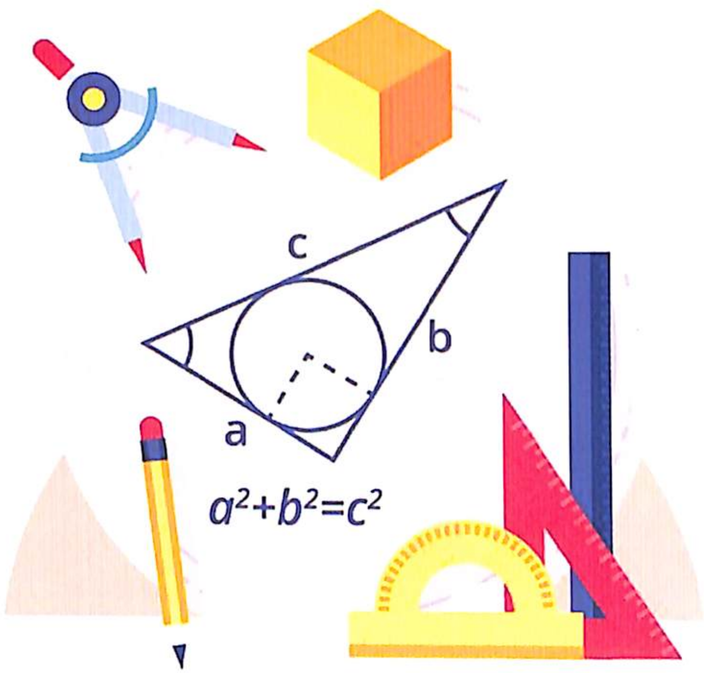
O.S. ZIKIROV

MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARI



O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG`BEK NOMIDAGI
O`ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

O. S. ZIKIROV

MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARI

O'QUV QO'LLANMA

I va II qismlari

Toshkent
“Innovatsiya-Ziyo”
2022

UDK ;517.5
BBK: 10
Z-85

Z i k i r o v O. S.
Matematik fizika tenglamalari. O'quv qo'llanma.i va II qismlari – Toshkent: "Innovatsiya-Ziyo", 2022, 320 b.

O'quv qo'llanma matematik fizika tenglamalari faniga bag'ishlangan. Unda matematik fizika tenglamalari haqida umumiy tushunchalar, matematik fizikaning asosiy tenglamalari va ularni keltirib chiqarish hamda bu tenglamalar uchun asosiy boshlang'ich chegaraviy masalalarning qo'yilishi va ularni yechishning ayrim usullari bayon qilingan.

Ayrim mavzularga oid tipik misol va masalalarning yechilishi ko'rsatilgan hamda mustaqil yechish uchun masalalar berilgan.

Qo'llanmada nazorat uchun testlardan namunalar keltirilgan.

Ushbu o'quv qo'llanma universitetlarning matematika, mexanika, tadbiqiy matematika va informatika yo'nalishlari bo'yicha bakalavrlar tayyorlaydigan fakultetlar talabalari uchun mo'ljallangan.

Mas'ul muharrir:
Fizika_matematika fanlari doktori,
professor Toxirov J.O.

Taqrizchilar:
Fizika_matematika fanlari doktori,
professor Fayazov Q.S.
Fizika_matematika fanlari doktori,
professor O'rinov A.Q.

...publikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi
...ilgan.

SO'Z BOSHI

Matematik fizika tenglamalari fani klassik mexanika, fizika, gidrodinamika, akustika va boshqa sohalarda sodir bo'ladigan jarayonlarning matematik modellarini yaratish va bu masalalarni yechish usullarini qurish bilan uzviy bog'liq. Bu modellashtirish muayyan jarayonlarni ifodalovchi fizikaviy kattaliklar asosida tenglamalarni keltirib chiqarish bilan xarakterlanadi. Kvant mexanikasi, atom va yadro fizikasi, qattiq jismlar nazariyasi, elementar zarralar fizikasi kabi sohalarning rivojlanishi matematik tadqiqotlarning asosini tashkil etadi. Mexanika va fizikaning ko'plab masalalari xususiy hosilali differensial tenglamalarni tadqiq etishga keladi. Shuning uchun xususiy hosilali differensial tenglamalar fani matematik fizikaning zamonaviy holatini o'rganish va tushunish uchun zarur bo'lgan boshlang'ich bilimlarni beradi.

Matematik fizika tenglamalari faniga bag'ishlangan darsliklar, o'quv qo'llanmalar ingliz, rus va boshqa tillarda ko'plab nashr qilingan. Bu adabiyotlarning nazariy qismi bilan misol va masalalarga oid bo'limlari orasida biroz tafovut borligi seziladi. Hozirgi davr talabiga javob beradigan yuqori malakali mutaxassislar tayyorlash, ularning nazariy va amaliy masalalarni chuqur o'zlashtirishiga ko'maklashuvchi o'zbek tilida yozilgan darsliklar, o'quv qo'llanmalari yaratish muxim ahamiyatga ega.

Ushbu o'quv qo'llanma universitetlarning matematika, mexanika, amaliy matematika va informatika yo'nalishlari o'quv rejasidagi asosiy fanlardan biri bo'lgan matematik fizika tenglamalari faniga bag'ishlangan. Fizikaviy jarayonlarning matematik modelini tadqiq etish xususiy hosilali differensial tenglamalar kursining asosiy qismini tashkil qiladi.

Talabalar bu fanni mukammal o'zlashtirishlari uchun ularga ma'lum bilimlar majmuasi zarur bo'ladi. Masalan, matematik fizika tenglamalari kursi oddiy differensial tenglamalar fanining bevosita davomi hisoblanadi. Uni mukammal tushunib, o'zlashtirishlari uchun

UDK ;517.5
BBK: 10
Z-85

Z i k i r o v O. S.
Matematik fizika tenglamalari. O'quv qo'llanma.i va II qismlari – Toshkent: "Innovatsiya-Ziyo", 2022, 320 b.

O'quv qo'llanma matematik fizika tenglamalari faniga bag'ishlangan. Unda matematik fizika tenglamalari haqida umumiy tushunchalar, matematik fizikaning asosiy tenglamalari va ularni keltirib chiqarish hamda bu tenglamalar uchun asosiy boshlang'ich chegaraviy masalalarning qo'yilishi va ularni yechishning ayrim usullari bayon qilingan.

Ayrim mavzularga oid tipik misol va masalalarning yechilishi ko'rsatilgan hamda mustaqil yechish uchun masalalar berilgan.

Qo'llanmada nazorat uchun testlardan namunalar keltirilgan.

Ushbu o'quv qo'llanma universitetlarning matematika, mexanika, tadbiqiy matematika va informatika yo'nalishlari bo'yicha bakalavrlar tayyorlaydigan fakultetlar talabalari uchun mo'ljallangan.

Mas'ul muharrir:
Fizika_matematika fanlari doktori,
professor Toxirov J.O.

Taqrizchilar:
Fizika_matematika fanlari doktori,
professor Fayazov Q.S.
Fizika_matematika fanlari doktori,
professor O'rinov A.Q.

O`zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan nashrga tavsiya etilgan.

ISBN 978-9943-7025-1-6

SO'Z BOSHI

Matematik fizika tenglamalari fani klassik mexanika, fizika, gidrodinamika, akustika va boshqa sohalarda sodir bo'ladigan jarayonlarning matematik modellarini yaratish va bu masalalarni yechish usullarini qurish bilan uzviy bog'liq. Bu modellashtirish muayyan jarayonlarni ifodalovchi fizikaviy kattaliklar asosida tenglamalarni keltirib chiqarish bilan xarakterlanadi. Kvant mexanikasi, atom va yadro fizikasi, qattiq jismlar nazariyasi, elementar zarralar fizikasi kabi sohalarning rivojlanishi matematik tadqiqotlarning asosini tashkil etadi. Mexanika va fizikaning ko'plab masalalari xususiy hosilali differensial tenglamalarni tadqiq etishga keladi. Shuning uchun xususiy hosilali differensial tenglamalar fani matematik fizikaning zamonaviy holatini o'rganish va tushunish uchun zarur bo'lgan boshlang'ich bilimlarni beradi.

Matematik fizika tenglamalari faniga bag'ishlangan darsliklar, o'quv qo'llanmalar ingliz, rus va boshqa tillarda ko'plab nashr qilingan. Bu adabiyotlarning nazariy qismi bilan misol va masalalarga oid bo'limlari orasida biroz tafovut borligi seziladi. Hozirgi davr talabiga javob beradigan yuqori malakali mutaxassislar tayyorlash, ularning nazariy va amaliy masalalarni chuqur o'zlashtirishiga ko'maklashuvchi o'zbek tilida yozilgan darsliklar, o'quv qo'llanmalari yaratish muxim ahamiyatga ega.

Ushbu o'quv qo'llanma universitetlarning matematika, mexanika, amaliy matematika va informatika yo'nalishlari o'quv rejasidagi asosiy fanlardan biri bo'lgan matematik fizika tenglamalari faniga bag'ishlangan. Fizikaviy jarayonlarning matematik modelini tadqiq etish xususiy hosilali differensial tenglamalar kursining asosiy qismini tashkil qiladi.

Talabalar bu fanni mukammal o'zlashtirishlari uchun ularga ma'lum bilimlar majmuasi zarur bo'ladi. Masalan, matematik fizika tenglamalari kursi oddiy differensial tenglamalar fanining bevosita davomi hisoblanadi. Uni mukammal tushunib, o'zlashtirishlari uchun oddiy differensial tenglamalar fanidan ma'lum bilimlar talab qilinadi. Bu borada talabalar kuzatuvchi bo'lib qolmasdan, balki o'zlari misol va masalalar yechish, mavzularni mustaqil o'zlashtirishlari lozim.

Qo'llanmaning asosiy maqsadi, talabalarni matematik fizika tenglamalari va ular uchun qo'yiladigan asosiy masalalar bilan tanishtirish, ular uchun zarur bo'lgan boshlang'ich bilimlarni berishdan iborat. Unda matematik fizikaning xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan ifodalanadigan ayrim masalalari o'rganilgan. Asosiy e'tibor xususiy hosilali differensial tenglamalarning klassifikatsiyasi, ularni kanonik ko'rinishga keltirish. Koshi masalasining qo'yilishi va uni yechish, giperbolik, parabolik va elliptik tipdagi tenglamalar uchun asosiy boshlang'ich chegaraviy masalalarning qo'yilishi va ularni yechishning ayrim usullarini bayon qilishga qaratilgan.

Ushbu qo'llanmani yozishda va mustaqil yechish uchun masalalarni tanlashda xususiy hosilali differensial tenglamalar sohasida o'zbek va rus tillarida chop etilgan adabiyotlardan keng foydalanildi hamda muallifning Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti talabalariga "Matematik fizika tenglamalari" fanidan olib borgan nazariy va amaliy mashg'ulotlari katta yordam bo'ldi.

Qo'lyozmani ko'rib chiqib, o'z fikr mulohazalarini bildirgan qo'llanmaning mas'ul muxarriri professor J.O.Toxirovga hamda professor A.Q.O'rinovga va professor Q.S.Fayazovga muallif samimiy minnatdorchilik bildiradi.

Qo'llanmadagi kamchiliklarni bartaraf etish, uning sifatini yaxshilashga qaratilgan tanqidiy fikr va mulohazalarini bildirgan hamkasblarga va kitobxonlarga muallif avvaldan minnatdorchilik bildiradi.

Muallif

I BOB

MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARI. ASOSIY MASALALARNING QO'YILISHI

Matematik fizikaning ayrim masalalari ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Qo'llanmaning ushbu dastlabki qismida xususiy hosilali tenglamalar haqida tushunchalar va ta'riflar qisqacha bayon qilingan.

Matematik fizikaning asosiy tenglamalarini keltirib chiqarish, bu tenglamalar uchun boshlang'ich–chegaraviy shartlar va korrekt qo'yiladigan masalalar berilgan.

Nokorrekt qo'yilgan masalalarga misollar keltirilgan.

1–§. Asosiy tushunchalar va ta'riflar

Noma'lum $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya uning xususiy hosilalarini va $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erkli o'zgaruvchilarni bog'lovchi quyidagi ifoda

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \ldots\right) = 0 \qquad (1)$$

xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

Bu erda $F(\cdot)$ — o'z argumentlarining berilgan funksiyasi, $x \in D \subset R^n$, $n \geq 2$; $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$, $k = \overline{0, m}$; $m \geq 1$; D esa (1) tenglamaning *berilish sohasi* deyiladi.

Misollar.

$$1)\ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} + u^2 = 0;$$

$$2)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \sin u = 0;$$

$$3)\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_3} = f(x_1, x_2, x_3, u);$$

oddiy differensial tenglamalar fanidan ma’lum bilimlar talab qilinadi. Bu borada talabalar kuzatuvchi bo‘lib qolmasdan, balki o‘zlari misol va masalalar yechish, mavzularni mustaqil o‘zlashtirishlari lozim.

Qo‘llanmaning asosiy maqsadi, talabalarni matematik fizika tenglamalari va ular uchun qo‘yiladigan asosiy masalalar bilan tanishtirish, ular uchun zarur bo‘lgan boshlang‘ich bilimlarni berishdan iborat. Unda matematik fizikaning xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan ifodalanadigan ayrim masalalari o‘rganilgan. Asosiy e’tibor xususiy hosilali differensial tenglamalarning klassifikatsiyasi, ularni kanonik ko‘rinishga keltirish, Koshi masalasining qo‘yilishi va uni yechish, giperbolik, parabolik va elliptik tipdagi tenglamalar uchun asosiy boshlang‘ich–chegaraviy masalalarning qo‘yilishi va ularni yechishning ayrim usullarini bayon qilishga qaratilgan.

Ushbu qo‘llanmani yozishda va mustaqil yechish uchun masalalarni tanlashda xususiy hosilali differensial tenglamalar sohasida o‘zbek va rus tillarida chop etilgan adabiyotlardan keng foydalanildi hamda muallifning Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti talabalariga "Matematik fizika tenglamalari" fanidan olib borgan nazariy va amaliy mashg‘ulotlari katta yordam bo‘ldi.

Qo‘lyozmani ko‘rib chiqib, o‘z fikr–mulohazalarini bildirgan qo‘llanmaning mas’ul muxarriri professor J.O.Toxirovga hamda professor A.Q.O‘rinovga va professor Q.S.Fayazovga muallif samimiy minnatdorchilik bildiradi.

Qo‘llanmadagi kamchiliklarni bartaraf etish, uning sifatini yaxshilashga qaratilgan tanqidiy fikr va mulohazalarini bildirgan hamkasblarga va kitobxonlarga muallif avvaldan minnatdorchilik bildiradi.

Muallif

I BOB

MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARI. ASOSIY MASALALARNING QO‘YILISHI

Matematik fizikaning ayrim masalalari ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Qo‘llanmaning ushbu dastlabki qismida xususiy hosilali tenglamalar haqida tushunchalar va ta’riflar qisqacha bayon qilingan.

Matematik fizikaning asosiy tenglamalarini keltirib chiqarish, bu tenglamalar uchun boshlang‘ich–chegaraviy shartlar va korrekt qo‘yiladigan masalalar berilgan.

Nokorrekt qo‘yilgan masalalarga misollar keltirilgan.

1–§. Asosiy tushunchalar va ta’riflar

Noma’lum $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya uning xususiy hosilalarini va $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erkli o‘zgaruvchilarni bog‘lovchi quyidagi ifoda

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \ldots\right) = 0 \qquad (1)$$

xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

Bu erda $F(\cdot)$ — o‘z argumentlarining berilgan funksiyasi, $x \in D \subset R^n$, $n \geq 2$; $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$, $k = \overline{0, m}$; $m \geq 1$; D esa (1) tenglamaning *berilish sohasi* deyiladi.

Misollar.

$$1)\ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} + u^2 = 0;$$

$$2)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \sin u = 0;$$

$$3)\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_3} = f(x_1, x_2, x_3, u);$$

Yuqorida keltirilgan tenglamalar mos ravishda *birinchi tartibli*, *ikkinchi tartibli* va *uchinchi tartibli* xusuiy hosilali differensial tenglamalardir.

Demak, differensial tenglamada noma'lum funksiya xususiy hosilasining eng yuqori tartibiga shu *tenglamaning tartibi* deyiladi.

Agar $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya biror D sohada aniqlangan, uzluksiz va tenglamada qatnashgan uzluksiz hosilalarga ega bo'lib, shu sohada tenglamani qanoatlantirsa, u holda bu funksiya *tenglamaning yechimi* deb ataladi.

Agar F barcha

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}, \qquad 0 \le k \le m,$$

hosilalarga nisbatan chiziqli bo'lsa, u holda (1) tenglama *chiziqli xususiy hosilali differensial tenglama* deyiladi.

Chiziqli tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{k_1,\cdots,k_n} a_{k_1,\cdots,k_n}(x)\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}} = f(x), \qquad \sum_{j=1}^{n} k_j = k$$

yoki

$$\mathcal{L}u = f(x)$$

bu erda

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{k=0}^{n}\sum_{k_1\dots k_n} a_{k_1\dots k_n}(x)\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}, \qquad \sum_{j=1}^{n} k_j = k,$$

m – *tartibli chiziqli differensial operator* deb ataladi.

Odatda xususiy hosilali chiziqli ikkinchi tartibli differensial tenglama quyidagicha ifodalanadi

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \qquad (2)$$

bu erda $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ biror chekli yoki cheksiz D sohada berilgan funksiyalar, ular tenglamaning *koeffitsientlari*, $f(x)$ esa tenglamaning *ozod hadi* deyiladi.

Agar chiziqli tenglamada $f(x) = 0$ bo'lsa, u *bir jinsli*, aksincha, ya'ni $f(x) \neq 0$ bo'lsa, *bir jinsli bo'lmagan tenglama* deyiladi.

Agar (2) tenglamada uning chap tomonini $L(u)$ orqali belgilasak, u holda (2) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olish mumkin:

$$L(u) = f(x), \qquad (3)$$

bu erda

$$L(u) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \qquad (4)$$

ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial operator deyiladi.

Masalan, ikki o'zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiy hosilali chiziqli differensial tenglama ushbu

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$+ a_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c_1(x,y)u = f(x,y)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Bu erda $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $a_1(x,y)$, $b_1(x,y)$ va $c_1(x,y)$ – tenglamaning koeffitsientlari, $f(x,y)$ esa uning ozod hadi bo'lib, ular x, y argumentlarning berilgan funksiyalari.

Agar (1) tenglamada F faqat yuqori tartibli

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}, \qquad \sum_{j=1}^{n} k_j = m$$

hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lsa, u holda (1) *kvazichiziqli tenglama* deyiladi.

Masalan, quyidagi tenglama

$$a\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} +$$

$$+ c\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_1\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

ikki o'zgaruvchili ikkinchi tartibli kvazichiziqli tenglamadir.

Xususiy hosilalar uchun quyidagi belgilashlardan foydalanamiz:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x},\quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y},\quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

va h. k.

Agar (4) ifodada $a_{ij}(x) \equiv 0$, $i, j = \overline{1, n}$, va $b_i(x)$ koeffitsientlardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, u holda (4) ifoda *birinchi tartibli chiziqli operator* deb ataladi.

Birinchi va ikkinchi tartibli chiziqli differensial operatorlar quyidagi xossalarga ega:

$$1)\ L(cu) = cL(u), \quad c = const;$$
$$2)\ L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2).$$

Bu xossalarni tekshirib ko'rish qiyinchilik keltirib chiqarmaydi.

Yuqoridagi xossalardan chiziqli bir-jinsli differensial tenglamalar uchun muxim bo'lgan ushbu xulosalar kelib chiqadi:

1-XULOSA. Agar $u(x)$ funksiya biror D sohada bir jinsli xususiy hosilali differensial $L(u) = 0$ tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda $cu(x)$, $c = const$ funksiya ham D sohada shu tenglamaning yechimi bo'ladi.

2-XULOSA. Agar $u_1(x)$ va $u_2(x)$ funksiyalar biror D sohada bir jinsli xususiy hosilali differensial $L(u) = 0$ tenglamaning yechimlari bo'lsa, u holda $u_1(x) + u_2(x)$ funksiya ham D sohada shu $L(u) = 0$ tenglamaning yechimi bo'ladi.

Bu xulosalardan quyidagi natijani olamiz:

NATIJA. Agar $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_n(x)$ funksiyalar biror D sohada bir jinsli xususiy hosilali differensial $L(u) = 0$ tenglamaning yechimlari bo'lsa, u holda bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi

$$c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \ldots + c_n u_n(x)$$

ham D sohada shu $L(u) = 0$ tenglamaning yechimi bo'ladi.

Bu erda c_i, $i = \overline{1, n}$ ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Agar R^n fazoning o'lchami ikkiga teng, ya'ni $n = 2$ bo'lsa, u holda $x_1 = x$, $x_2 = y$ deb, agar $n = 3$ bo'lsa, u holda $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ deb olamiz.

1-MISOL. Quyidagi berilgan

$$a)\ u(x, y, z) = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2}, \qquad b)\ u(x, y, z) = xyz,$$

funksiyalar $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ sohada ushbu

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

tenglamaning yechimi bo'ladimi?

YECHISH. a) Berilgan funksiyaning u_x, u_y va u_z xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x^2}{y^3} + \frac{2y}{z^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2y^2}{z^3}$$

va ularni berilgan tenglamaga ko'yib,

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x^2}{y^2} - \frac{2x^2}{y^2} + \frac{2y^2}{z^2} - \frac{2y^2}{z^2} = 0$$

tenglikni olamiz.

Demak, $u(x, y, z) = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{z^2}$ funksiya qaralayotgan sohada berilgan tenglamaning yechimi ekan.

b) Xuddi yuqoridagi kabi berilgan funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz: $u_x = yz$, $u_y = xz$, $u_z = xy$ va bularni tenglamaga qo'ysak,

$$xu_x + yu_y + zu_z = xyz \neq 0$$

bo'ladi. Shunday qilib, $u = xyz$ funksiya $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ sohada berilgan tenglamani qanoatlantirmas ekan.

2-MISOL. Ushbu

$$u(x, y) = \ln\frac{1}{r}, \quad r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

funksiya R^2 tekislikda

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Laplas tenglamasining yechimi bo'ladimi?

Bu erda $(x_0, y_0) \in R^2$ tekislikdagi biror fiksirlangan nuqta.

YECHISH. Berilgan funksiyaning hosilasini hisoblash uchun uni qulay ko'rinishda yozib olamiz

$$u(x,y) = \ln\frac{1}{r} = -\frac{1}{2}\ln r^2.$$

Bu funksiyaning xususiy hosilalarini olaylik

$$u_x = -\frac{1}{2}\frac{1}{r^2}(r^2)_x = -\frac{x - x_0}{r^2};$$

$$u_{xx} = (u_x)_x = -\frac{1}{r^2} + \frac{2(x - x_0)^2}{r^4}.$$

Xuddi shu kabi berilgan funksiyaning y bo'yicha ikkinchi tartibli hosilasini hisoblaymiz:

$$u_{yy} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2(y - y_0)^2}{r^4}.$$

Endi olingan u_{xx} va u_{yy} hosilalarni Laplas tenglamasiga qo'yamiz. Natijada barcha $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ nuqtalarda

$$u_{xx} + u_{yy} = -\frac{2}{r^2} + \frac{2(x - x_0)^2 + 2(y - y_0)^2}{r^4} = -\frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2} = 0$$

ayniyatga ega bo'lamiz.

Demak, $u(x,y) = \ln\frac{1}{r}$ funksiya R^2 tekislikning barcha $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ nuqtalarida Laplas tenglamasining yechimi bo'lar ekan.

Xususiy hosilali differensial tenglamalar xuddi oddiy differensial tenglamalar kabi aksariyat hollarda berilgan tenglamani qanoatlantiruvchi cheksiz ko'p xususiy yechimlarga ega. Bularning yig'indisi qaralayotgan tenglamaning umumiy yechimini tashkil qiladi. Oddiy differensial tenglamaning umumiy yec[illegible]

xususiy hosilali differensial tenglamaning umumiy yechimi o'rtasida keskin farq bor.

Oddiy differensial tenglamalar kursidan ma'lumki, ushbu

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{5}$$

ikkinchi tartibli tenglamaning umumiy yechimi 2 ta ixtiyoriy o'zgarmas songa bog'liq bo'lib, u

$$y(x) = g(x, c_1, c_2), \tag{6}$$

ko'rinishdagi egri chiziqlar oilasidan iborat.

Berilgan tenglamaning ixtiyoriy xususiy yechimi c_1, c_2 parametrlarga qiymatlar berish natijasida hosil bo'ladi.

Masalan, ushbu

$$y'' + 4y = 0, \tag{7}$$

ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x,$$

bu erda c_1, c_2 ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Agar berilgan tenglamaning $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilinsa, u holda umumiy yechimda qatnashgan c_1, c_2 o'zgarmaslarni $c_1 = 0$, $c_2 = 1/2$ ekanligi ko'rinadi. Bundan berilgan (7) tenglamaning xususiy yechimi

$$y(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi ikki o'zgaruvchili birinchi tartibli xususiy hosilali quyidagi

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \tag{8}$$

tenglamani qaraylik.

Bu tenglamada faqat u_x hosila qatnashyapti, y o'zgaruvchini fiksirlangan, deb qaraymiz. Barcha fiksirlangan y larda (8) tenglamani oddiy differensial tenglama deb qarash mumkin, bunda x erkli o'zgaruvchili, u noma'lum funksiya.

Faraz qilaylik, bu tenglamaning umumiy yechimi

$$u = \varphi(x, y, C). \tag{9}$$

formula bilan aniqlansin. Bu yechimda y parametr va ixtiyoriy C o'zgarmaslar uchun u (8) tenglamani qanoatlantiradi. (9) funksiya xususiy hosilali (8) tenglamaning yechimi bo'lishi uchun C parametr x ga nisbatan o'zgarmas bo'lishi zarur, ya'ni u y o'zgaruvchining ixtiyoriy funksiyasi bo'lishi kerak. Demak, C ning o'rniga y ga bog'liq bo'lgan ixtiyoriy $\psi(y)$ funksiya qo'ysak, natijada (8) tenglamaning (9) ga qaraganda umumiyroq bo'lgan

$$u = \varphi(x, y, \psi(y))$$

ko'rinishdagi yechimiga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, birinchi tartibli xususiy hosilali (8) tenglamaning umumiy yechimi $C(R)$ sinfiga tegishli bo'lgan ixtiyoriy $\psi(y)$ funksiyaga bog'liq bo'lar ekan.

Buni ayrim misollarda ko'raylik.

3–MISOL. Ushbu

$$u - x\frac{\partial u}{\partial x} - x^2y^2 = 0, \tag{10}$$

birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

YECHISH. Berilgan tenglamani quyidagi

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x}u = -xy^2$$

ko'rinishda ifodalaymiz.

Bu tenglamada y o'zgaruvchini parametr deb qaraymiz. Oxirgi tenglama birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama bo'lgani uchun uning umumiy yechimi $u = cx - x^2y^2$ bo'ladi. U holda xususiy hosilali (10) differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$u(x,y) = x\psi(y) - x^2y^2, \qquad \psi(y) \in C(R),$$

ko'rinishda topiladi.

Xususiy hosilali differensial tenglamaning umumiy yechimi oddiy differensial tenglamadan farqli o'laroq berilgan tenglamaning tartibiga teng bo'lgan sondagi ixtiyoriy funksiyalarga bog'liq bo'lar ekan.

4–MISOL. Ushbu $u_{xy} = 0$ yoki

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{11}$$

tenglamaning umumiy yechimini toping.

YECHISH. Berilgan tenglamani x bo'yicha integrallab,

$$u_y = \psi(y)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bunda $\psi(y)$ – ixtiyoriy funksiya.

Oxirgi tenglamani y bo'yicha integrallab,

$$u(x,y) = \int_0^y \psi(z)dz + \psi_1(x). \tag{12}$$

tenglikni olamiz. Bu erda $\psi_1(x)$ – ixtiyoriy funksiya.

Endi (12) tenglikda

$$\int_0^y \psi(z)dz = \psi_2(y)$$

deb belgilab,

$$u(x,y) = \psi_1(x) + \psi_2(y) \tag{13}$$

formulaga ega bo'lamiz.

Bunda $\psi(y)$ ixtiyoriy funksiya bo'lganligi uchun $\psi_2(y)$ ham y o'zgaruvchining ixtiyoriy funksiyasi bo'ladi.

Agar $\psi_1(x)$ va $\psi_2(y)$ funksiyalar R sohada bir marta uzluksiz differensiallanuvchi, ya'ni $\psi_1(x)$, $\psi_2(y) \in C^1(R)$ bo'lsa, u holda (13) formula orqali aniqlangan $u(x,y)$ funksiya R^2 tekislikda (11) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Xususiy hosilali (11) differensial tenglamaning umumiy yechimi yordamida uning xususiy yechimini ham topish mumkin. Buning uchun qaralayotgan masalaning berilgan shartlari asosida $\psi_1(x)$ va $\psi_2(y)$ funksiyalarning aniq ko'rinishlari topiladi.

Shuni ta'kidlash muximki, ayrim xususiy hosilali differensial tenglamalarning xususiy yechimlarini aniq ko'rinishlarini topish mumkin. Ko'p hollarda xususiy hosilali differensial tenglamalarining xususiy yechimlarini topish usullari yaratilgan. Qaralayotgan tenglamani, ma'lum boshlang'ich va chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan yechimlari topiladi.

Fizikaviy jarayonlarning matematik modelini qurish va uni tadqiq etish matematik fizikaning asosiy vazifasi hisoblanadi.

Mexanika va fizikaning juda ko'p masalalari ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadi.

MASALAN:

1. Bir jinsli torning ko'ndalang tebranishi, sterjenning bo'ylama tebranishi, o'tkazgichdagi elektr tebranishlar, turli muhitlarda tovush tarqalishi va shu kabi jarayonlar

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t), \quad a = const, \qquad (14)$$

to'lqin tenglamasi bilan ifodalanadi, va bu tenglama *uch o'lchovli to'lqin tarqalish tenglamasi* deyiladi.

Ushbu tenglama

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t),$$

ikki o'lchovli to'lqin tenglamasi deb atalidi. (14) tenglama bir o'lchovli

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$

bo'lgan holda bir jinsli torning majburiy tebranishini ifodalaydi.

2. Bir jinsli izotrop jismlarda issiqlikning tarqalishi, diffuziya jarayoni va g'ovak muhitlarda suyuqlik va gazlarning filtrlanishi kabi jarayonlar

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t), \quad a = con$$

issiqlik tarqalish tenglamasi orqali ifodalanadi.

Yuqoridagi (15) tenglama *uch o'lchovli issiqlik tarqalish tenglamasi* deyiladi. Ushbu ko'rinishdagi

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t),$$

tenglama *ikki o'lchovli issiqlik tarqalish tenglamasi* deb ataladi. Bir o'lchovli bo'lgan

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$

hol esa, *bir o'lchovli issiqlik tarqalish tenglamasi* deyiladi.

3. Statsionar issiqlik holati, o'tkazgich sirtida zaryadlarning muvozanatlashuvi, siqilmaydigan suyuqliklarning harakati va shu kabi jarayonlar

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -f(x, y, z), \qquad (16)$$

Puasson tenglamasi orqali ifodalanadi.

Agar (16) tenglamada $f(x, y, z) \equiv 0$ bo'lsa, u holda bu tenglama

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \qquad (17)$$

Laplas tenglamasi deb ataladi.

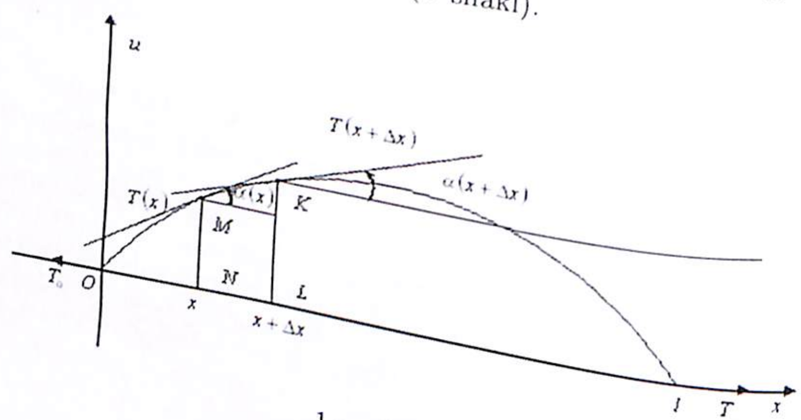
Elektr zaryadi va massasi hisobga olinmagan tortishish maydoni potensiallari va statsionar elektr maydoni masalalari Laplas tenglamasi orqali ifodalanadi.

Yuqorida keltirilgan (14)–(17) tenglamalar *matematik fizikaning asosiy tenglamalari* deb yuritiladi. Bu tenglamalarni mukammal o'rganish turli fizikaviy masalalarni yechish va umumiyroq bo'lgan xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasini yaratishga imkoniyat beradi.

2-§. Tor tebranish tenglamasini keltirib chiqarish. Asosiy boshlang'ich–chegaraviy masalalarning qo'yilishi

Tekislikda, Ox o'qi bo'yicha uchlari mahkamlangan uzunligi l ga teng bo'lgan torni (ingichka, elastik ipni) qaraylik. *Ingichka* – bu torning ko'ndalang kesimi uning uzunligiga nisbatan cheksiz kichik miqdor, *egiluvchan* deganda tor uzunligining o'zarishiga bog'liq bo'lmagan holda shaklini o'zgarishiga torning xech qanday qarshilik qilmasligi tushuniladi. Bu tushunchalarning matematik ma'nosi – torda sodir bo'ladigan $T(x)$ taranglik kuchi doimo uning oniy uzunligiga o'tkazilgan normal bo'yicha yo'nalgan bo'ladi.

Faraz qilaylik, Ox o'q bo'yicha torning uchlariga qarama–qarshi tomonlarga yo'nalgan T_0 taranglik kuchi qo'yilgan bo'lsin. Agar tor tashqi kuchlar ta'sirida muvozanat holatidan chiqarilsa, u holda tor tebranma harakat qiladi. Bunda torning muvozanat holatidagi $N(x)$ nuqtasi t vaqtda M holatga o'tadi (1–shakl).



1 — shakl.

Tor tebranish tenglamasini keltirib chiqarish uchun quyidagilarni talab qilamiz:

1) torning barcha nuqtalari bir tekislik... perpendikulyar tebransin, ya'ni tor ko'n...

2) torning kichik teb...

3) og'irlik kuchining ta'siri inobatga olinmasin, ya'ni taranglik kuchi shunchalik kattaki, buning natijasida og'irlik kuchining ta'siri sezilmaydi.

Torning tebranishi bir tekislikda sodir bo'layotgani uchun torning tebranish qonuni, ya'ni muvozanat holatidan og'ishi NM ikki o'zgaruvchili bitta $u(x,t)$ funksiya orqali ifodalanadi. Bunda u – torning t vaqtdagi abssissasi x bo'lgan N nuqtasining M nuqtagacha muvozanat holatidan NM og'ishi.

Agar torning kichik tebranishini inobatga olsak, u holda $u(x,t)$ funksiya ham kichik va etarlicha silliq torning x nuqtasiga t vaqtda o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti $u_x(x,t)$ ham kichik bo'ladi.

Torning tebranishi shunchalik kichik–ki, bunda

$$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 \ll 1,$$

bo'lsin. Bu torning kichik tebranishlarida uning uzunligini o'zgarmasligini bildiradi.

Haqiqatdan ham, t vaqtda torning MK yoyining uzunligi

$$l_{MK} = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx \approx \Delta x$$

formula bilan aniqlanadi.

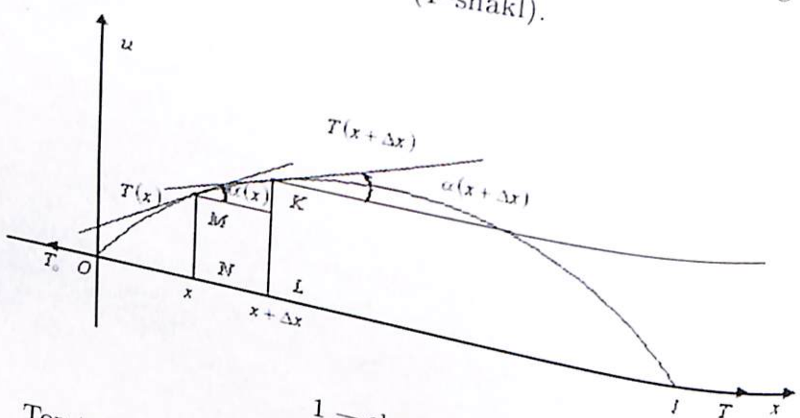
Demak, torning kichik tebranishlarida uning uzunligi o'zgarmaydi. U holda Guk qonuniga ko'ra taranglik koeffitsienti T vaqtga ham x ga ham bog'liq emas va u torning barcha nuqtalarida bir xil T_0 ga teng.

Endi tor tebranish tenglamasini keltirib chiqaraylik. Buning uchun torning MK bo'lakchasini ajratib olamiz va bunga ta'sir qilayotgan kuchlarni koordinata o'qlariga proeksiyasini tushiramiz. Dalamber prinsipiga asosan, barcha kuchlar proeksiyalarining

2–§. Tor tebranish tenglamasini keltirib chiqarish. Asosiy boshlang‘ich–chegaraviy masalalarning qo‘yilishi

Tekislikda, Ox o‘qi bo‘yicha uchlari mahkamlangan uzunligi l ga teng bo‘lgan torni (ingichka, elastik ipni) qaraylik. *Ingichka* — bu torning ko‘ndalang kesimi uning uzunligiga nisbatan cheksiz kichik miqdor, *egiluvchan* deganda tor uzunligining o‘zarishiga bog‘liq bo‘lmagan holda shaklini o‘zgarishiga torning xech qanday qarshilik qilmasligi tushuniladi. Bu tushunchalarning matematik ma’nosi — torda sodir bo‘ladigan $T(x)$ taranglik kuchi doimo uning oniy uzunligiga o‘tkazilgan normal bo‘yicha yo‘nalgan bo‘ladi.

Faraz qilaylik, Ox o‘q bo‘yicha torning uchlariga qarama–qarshi tomonlarga yo‘nalgan T_0 taranglik kuchi qo‘yilgan bo‘lsin. Agar tor tashqi kuchlar ta’sirida muvozanat holatidan chiqarilsa, u holda tor tebranma harakat qiladi. Bunda torning muvozanat holatidagi $N(x)$ nuqtasi t vaqtda M holatga o‘tadi (1–shakl).



1 — shakl.

Tor tebranish tenglamasini keltirib chiqarish uchun quyidagilarni talab qilamiz:

1) torning barcha nuqtalari bir tekisli... perpendikulyar tebransin, ya’ni tor ko‘n...

2) torning kichik tebr...

3) og‘irlik kuchining ta’siri inobatga olinmasin, ya’ni taranglik kuchi shunchalik kattaki, buning natijasida og‘irlik kuchining ta’siri sezilmaydi.

Torning tebranishi bir tekislikda sodir bo‘layotgani uchun torning tebranish qonuni, ya’ni muvozanat holatidan og‘ishi NM ikki o‘zgaruvchili bitta $u(x,t)$ funksiya orqali ifodalanadi. Bunda u – torning t vaqtdagi abssissasi x bo‘lgan N nuqtasining M nuqtagacha muvozanat holatidan NM og‘ishi.

Agar torning kichik tebranishini inobatga olsak, u holda $u(x,t)$ funksiya ham kichik va etarlicha silliq torning x nuqtasiga t vaqtda o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti $u_x(x,t)$ ham kichik bo‘ladi.

Torning tebranishi shunchalik kichik–ki, bunda

$$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 \ll 1,$$

bo‘lsin. Bu torning kichik tebranishlarida uning uzunligini o‘zgarmasligini bildiradi.

Haqiqatdan ham, t vaqtda torning MK yoyining uzunligi

$$l_{MK} = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx \approx \Delta x$$

formula bilan aniqlanadi.

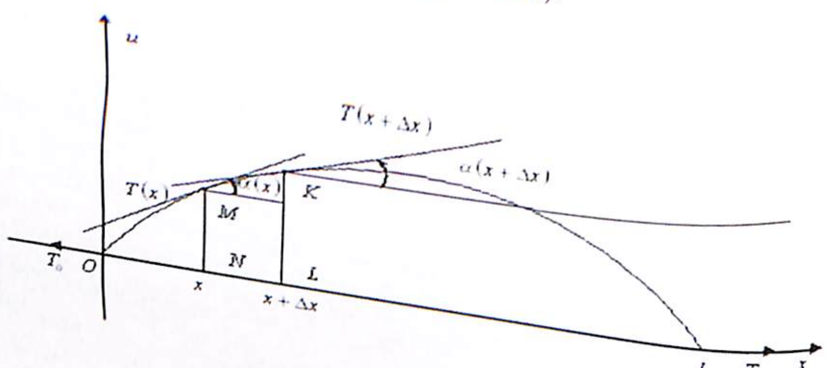
Demak, torning kichik tebranishlarida uning uzunligi o‘zgarmaydi. U holda Guk qonuniga ko‘ra taranglik koeffitsienti T vaqtga ham x ga ham bog‘liq emas va u torning barcha nuqtalarida bir xil T_0 ga teng.

Endi tor tebranish tenglamasini keltirib chiqaraylik. Buning uchun torning MK bo‘lakchasini ajratib olamiz va bunga ta’sir qilayotgan kuchlarni koordinata o‘qlariga proeksiyasini tushiramiz. Dalamber prinsipiga asosan, barcha kuchlar proeksiyalarining

2–§. Tor tebranish tenglamasini keltirib chiqarish. Asosiy boshlang'ich–chegaraviy masalalarning qo'yilishi

Tekislikda, Ox o'qi bo'yicha uchlari mahkamlangan uzunligi l ga teng bo'lgan torni (ingichka, elastik ipni) qaraylik. *Ingichka* — bu torning ko'ndalang kesimi uning uzunligiga nisbatan cheksiz kichik miqdor, *egiluvchan* deganda tor uzunligining o'zarishiga bog'liq bo'lmagan holda shaklini o'zgarishiga torning xech qanday qarshilik qilmasligi tushuniladi. Bu tushunchalarning matematik ma'nosi — torda sodir bo'ladigan $T(x)$ taranglik kuchi doimo uning oniy uzunligiga o'tkazilgan normal bo'yicha yo'nalgan bo'ladi.

Faraz qilaylik, Ox o'q bo'yicha torning uchlariga qarama–qarshi tomonlarga yo'nalgan T_0 taranglik kuchi qo'yilgan bo'lsin. Agar tor tashqi kuchlar ta'sirida muvozanat holatidan chiqarilsa, u holda tor tebranma harakat qiladi. Bunda torning muvozanat holatidagi $N(x)$ nuqtasi t vaqtda M holatga o'tadi (1–shakl).



1 — shakl.

Tor tebranish tenglamasini keltirib chiqarish uchun quyidagilarni talab qilamiz:

1) torning barcha nuqtalari bir tekislikda Ox ... perpendikulyar tebransin, ya'ni tor ko'ndalang teb...

2) torning kichik tebranishlari ...

3) og'irlik kuchining ta'siri inobatga olinmasin, ya'ni taranglik kuchi shunchalik kattaki, buning natijasida og'irlik kuchining ta'siri sezilmaydi.

Torning tebranishi bir tekislikda sodir bo'layotgani uchun torning tebranish qonuni, ya'ni muvozanat holatidan og'ishi NM ikki o'zgaruvchili bitta $u(x,t)$ funksiya orqali ifodalanadi. Bunda u – torning t vaqtdagi abssissasi x bo'lgan N nuqtasining M nuqtagacha muvozanat holatidan NM og'ishi.

Agar torning kichik tebranishini inobatga olsak, u holda $u(x,t)$ funksiya ham kichik va etarlicha silliq torning x nuqtasiga t vaqtda o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti $u_x(x,t)$ ham kichik bo'ladi.

Torning tebranishi shunchalik kichik–ki, bunda

$$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 \ll 1,$$

bo'lsin. Bu torning kichik tebranishlarida uning uzunligini o'zgarmasligini bildiradi.

Haqiqatdan ham, t vaqtda torning MK yoyining uzunligi

$$l_{MK} = \int\limits_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx \Delta x$$

formula bilan aniqlanadi.

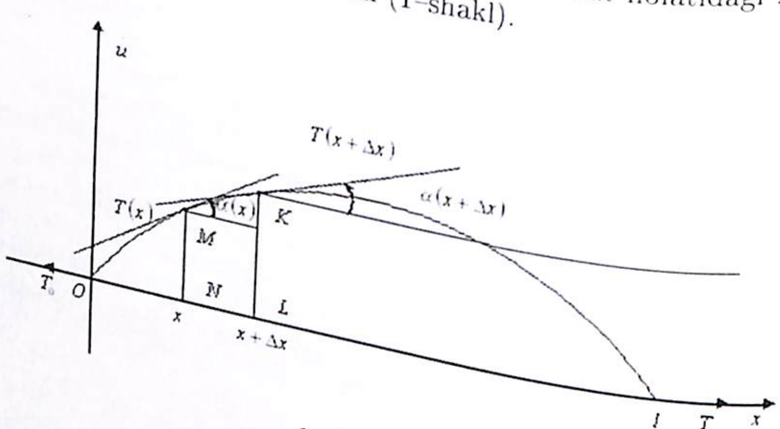
Demak, torning kichik tebranishlarida uning uzunligi o'zgarmaydi. U holda Guk qonuniga ko'ra taranglik koeffitsienti T vaqtga ham x ga ham bog'liq emas va u torning barcha nuqtalarida bir xil T_0 ga teng.

Endi tor tebranish tenglamasini keltirib chiqaraylik. Buning uchun torning MK bo'lakchasini ajratib olamiz va bunga ta'sir qilayotgan kuchlarni koordinata o'qlariga proeksiyasini tushiramiz. Dalamber prinsipiga asosan, barcha kuchlar proeksiyalarining yig'indisi, inersiya kuchini hisobga olganda nolga teng bo'ladi. Tarang...

2–§. Tor tebranish tenglamasini keltirib chiqarish. Asosiy boshlang'ich–chegaraviy masalalarning qo'yilishi

Tekislikda, Ox o'qi bo'yicha uchlari mahkamlangan uzunligi l ga teng bo'lgan torni (ingichka, elastik ipni) qaraylik. *Ingichka* – bu torning ko'ndalang kesimi uning uzunligiga nisbatan cheksiz kichik miqdor, *egiluvchan* deganda tor uzunligining o'zarishiga bog'liq bo'lmagan holda shaklini o'zgarishiga torning xech qanday qarshilik qilmasligi tushuniladi. Bu tushunchalarning matematik ma'nosi – torda sodir bo'ladigan $T(x)$ taranglik kuchi doimo uning oniy uzunligiga o'tkazilgan normal bo'yicha yo'nalgan bo'ladi.

Faraz qilaylik, Ox o'q bo'yicha torning uchlariga qarama–qarshi tomonlarga yo'nalgan T_0 taranglik kuchi qo'yilgan bo'lsin. Agar tor tashqi kuchlar ta'sirida muvozanat holatidan chiqarilsa, u holda tor tebranma harakat qiladi. Bunda torning muvozanat holatidagi $N(x)$ nuqtasi t vaqtda M holatga o'tadi (1–shakl).



1 — shakl.

Tor tebranish tenglamasini keltirib chiqarish uchun quyidagilarni talab qilamiz:

1) torning barcha nuqtalari bir tekislikda Ox o'qiga perpendikulyar tebransin, ya'ni tor ko'ndalang tebransin;

2) torning kichik tebranishlari hisobga olinsin;

3) og'irlik kuchining ta'siri inobatga olinmasin, ya'ni taranglik kuchi shunchalik kattaki, buning natijasida og'irlik kuchining ta'siri sezilmaydi.

Torning tebranishi bir tekislikda sodir bo'layotgani uchun torning tebranish qonuni, ya'ni muvozanat holatidan og'ishi NM ikki o'zgaruvchili bitta $u(x,t)$ funksiya orqali ifodalanadi. Bunda u – torning t vaqtdagi abssissasi x bo'lgan N nuqtasining M nuqtagacha muvozanat holatidan NM og'ishi.

Agar torning kichik tebranishini inobatga olsak, u holda $u(x,t)$ funksiya ham kichik va etarlicha silliq torning x nuqtasiga t vaqtda o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti $u_x(x,t)$ ham kichik bo'ladi.

Torning tebranishi shunchalik kichik–ki, bunda

$$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 \ll 1,$$

bo'lsin. Bu torning kichik tebranishlarida uning uzunligini o'zgarmasligini bildiradi.

Haqiqatdan ham, t vaqtda torning MK yoyining uzunligi

$$l_{MK} = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx \approx \Delta x$$

formula bilan aniqlanadi.

Demak, torning kichik tebranishlarida uning uzunligi o'zgarmaydi. U holda Guk qonuniga ko'ra taranglik koeffitsienti T vaqtga ham x ga ham bog'liq emas va u torning barcha nuqtalarida bir xil T_0 ga teng.

Endi tor tebranish tenglamasini keltirib chiqaraylik. Buning uchun torning MK bo'lakchasini ajratib olamiz va bunga ta'sir qilayotgan kuchlarni koordinata o'qlariga proeksiyasini tushiramiz. Dalamber prinsipiga asosan, barcha kuchlar proeksiyalarining yig'indisi, inersiya kuchini hisobga olganda nolga teng bo'ladi. Taranglik kuchining gorizantal o'qdagi proeksiyalarining yig'indisi

$$F_{gor} = -T(x)\cos\alpha(x) + T(x+\Delta x)\cos\alpha(x+\Delta x) =$$

$$= -T_0 \cos\alpha(x) + T_0 \cos\alpha(x + \Delta x) = 0,$$

bu erda

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2(x,t)}} \simeq 1.$$

Endi taranglik kuchini vertikal o'qqa proeksiyasini qaraylik:

$$F_{ver} = T_0 \sin\alpha(x) - T_0 \sin\alpha(x + \Delta x) =$$

$$= T_0\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha(x+\Delta x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha(x+\Delta x)}} - \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha(x)}}\right) =$$

$$= T_0\left(\frac{u_x(x+\Delta x,t)}{\sqrt{1 + u_x^2(x+\Delta x,t)}} - \frac{u_x(x,t)}{\sqrt{1 + u_x^2(x,t)}}\right) =$$

$$\cong T_0[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)].$$

Oxirgi formuladan Lagranj teoremasiga asosan

$$F_{ver} \cong T_0 u_{xx}(x',t), \qquad x' \in (x, x + \Delta x)$$

kelib chiqadi.

Torning ko'ndalang tebranishlari qaralayotgani uchun inersiya kuchi va tashqi kuchlar Ou o'qiga parallel yo'nalgan. Shuning uchun ularning Ou o'qdagi proeksiyasini topamiz.

Faraz qilaylik, $p(x,t)$ - torning MK bo'lagiga ta'sir qilayotgan uzluksiz tashqi kuch, $\rho(x)$ esa torning uzluksiz chiziqli zichligi bo'lsin. U holda tashqi kuchlarning Ou o'qiga proeksiyasi

$$F_{tashqi} \cong p(x,t)\Delta x$$

bo'ladi. Torning zichligi $\rho(x)$ bo'lgani uchun uning MK bo'lagining massasi

$$m \cong \rho(x)\Delta x$$

ga teng.

Nyuton qonuniga ko'ra inersiya kuchi

$$F_{in} = ma \cong \rho(x)\Delta x u_{tt}(x'',t), \qquad x'' \in [x, x + \Delta x]$$

formula bilan aniqlanadi.

U holda barcha kuchlarning Ou o'qdagi proeksiyasi

$$T_0 u_{xx}(x',t)\Delta x - \rho(x) u_{tt}(x'',t)\Delta x + p(x,t)\Delta x = 0$$

formula bilan ifodalanadi.

Bu tenglikni $\Delta x \neq 0$ ga qisqartirib, so'ngra $\Delta \to 0$ limitga o'tsak,

$$T_0 u_{xx}(x,t) - \rho(x) u_{tt}(x,t) + p(x,t) = 0 \tag{1}$$

torning majburiy tebranish tenglamasiga ega bo'lamiz.

Agar tor bir jinsli bo'lsa, ya'ni $\rho(x) = const$, u holda (1) tenglama quyidagi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \tag{2}$$

ko'rinishga keladi. Bu erda $a^2 = T_0/\rho$, $f(x,t) = p(x,t)/\rho$.

Agar (1) yoki (2) tenglamada tashqi kuchlar qatnashmasa, ya'ni $p(x,t) \equiv 0$, bo'lsa, u holda (2) tenglama ushbu

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{3}$$

ko'rinishga keladi.

Oxirgi (3) tenglama bir jinsli *torning erkin tebranish tenglamasi* deyiladi. Bu tenglama *bir o'lchovli to'lqin tarqalish tenglamasi* deb ham yuritiladi.

Sterjenning bo'ylama tebranishlari, trubkadagi gazning tebranishlari va boshqa tebranma harakatlar (1) ko'rinishdagi tenglama orqali ifodalanadi.

Asosiy boshlang'ich–chegaraviy masalalarning qo'yilishi

Xususiy hosilali (1) tenglamaning koeffitsientlari va ozod hadiga qo'yilgan ma'lum shartlarga ko'ra cheksiz ko'p xususiy yechimlarga ega bo'ladi. Shuning uchun (1) tenglamaning o'zi qaralayotgan tor tebranishini to'liq aniqlash uchun etarli emas. Masalaning fizik mohiyatidan kelib chiqqan holda qo'shimcha shartlarning bajarilishi talab qilinadi. Fizikadan ma'lumki, nuqtaning harakatini aniqlash uchun uning boshlang'ich holati va boshlang'ich tezligini bilish kifoya.

Shuning uchun ham, tor harakatini aniqlash uchun $t=0$ da uning boshlang'ich holati va boshlang'ich tezligini bilish etarli bo'ladi, ya'ni

$$u(x,t)\,|_{t=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,|_{t=0}=\psi(x),\quad 0\le x\le l. \tag{4}$$

Bu *boshlang'ich shartlar* yoki *Koshi shartlari* deyiladi.

Torning uchlari mahkamlangan yoki mahkamlanmagan bo'lishi mumkin. Uchlari mahkamlangan tor uchun quyidagi shartlar o'rinli bo'ladi:

$$u(x,t)\,|_{x=0}=0,\quad u(x,t)\,|_{x=l}=0,\quad 0<t<T, \tag{5}$$

bu erda $T>0$, l – torning uzunligi.

Bu (5) ko'rinishdagi shartlar *chegaraviy shartlar* deb yuritiladi.

Shunday qilib, uchlari mahkamlangan torning harakatini aniqlash to'g'risidagi fizikaviy masala quyidagi matematik masalaga keltirildi: *xususiy hosilali (1) differensial tenglamaning (4) boshlang'ich va (5) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimi topilsin.*

Bu masala tor tebranish tenglamasi uchun *birinchi aralash masala* deyiladi.

Agar torning uchlari mahkamlanmagan bo'lsa, ya'ni bu uchlar biror qoida asosida harakatlansa, u holda (5) chegaraviy shartlar quyidagi

$$u(x,t)\,|_{x=0}=\mu_1(t),\quad u(x,t)\,|_{x=l}=\mu_2(t),\quad 0\le t\le T,$$

shartlarga almashadi.

Boshqa turdagi chegaraviy shartlarni ham olish mumkin. Chegaraviy shartlar uch xil turga bo'linadi:

1) Birinchi tur chegaraviy shartlar:

$$u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l,t)=\mu_2(t),\quad 0\le t\le T, \tag{6}$$

bu shart torning uchlari Ox o'qiga vertikal holda $\mu_1(t)$ va $\mu_2(t)$ funksiyalar bilan berilgan qoida asosida harakatlanishini bildiradi.

2) Ikkinchi turdagi chegaraviy shartlar: bunday chegaraviy shartlar quyidagicha ifodalanadi:

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\nu_1(t),\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l}=\nu_2(t),\quad 0\le t\le T. \tag{7}$$

Bu (7) shartlar torning uchlariga $\nu_1(t)$ va $\nu_2(t)$ ma'lum kuchlar qo'yilganini anglatadi.

3) Uchinchi turdagi chegaraviy shartlar:

$$\alpha_1(t)u_x(0,t)+\beta_1(t)u(0,t)=\sigma_1(t),\quad 0\le t\le T, \tag{8a}$$

$$\alpha_2(t)u_x(l,t)+\beta_2(t)u(l,t)=\sigma_2(t),\quad 0\le t\le T, \tag{8b}$$

bu erda $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ va $\sigma_i(t)$ $(i=1,2)$ – berilgan funksiyalar, ixtiyoriy $t\in[0,T]$ da yetarlicha uzluksiz va

$$\alpha_i^2(t)+\beta_i^2(t)\ne 0.$$

(8) chegaraviy shartlar torning uchlari elastik mahkamlanganligini ifodalaydi. Agar (6)–(8) chegaraviy shartlarda $\mu_i(t)$, $\nu_i(t)$ va $\sigma_i(t)$, $(i=1,2)$ berilgan funksiyalar nolga teng bo'lsa, u holda bunday chegaraviy shartlar *bir jinsli chegaraviy shartlar* deyiladi.

Endi ikkinchi va uchinchi tur chegaraviy shartlarni sharxlashga harakat qilaylik. Buning uchun bir uchi shiftga mahkamlangan, ikkinchi uchi erkin harakatlanuvchi sterjenning bo'ylama tebranishi haqidagi masalani qaraylik (2–shakl).

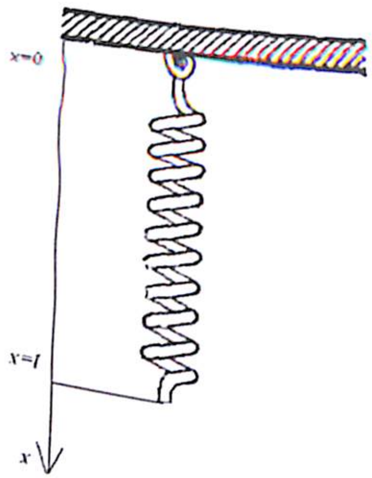
Sterjenning erkin uchining harakat qonuni berilmagan bo'lsin. Agar sterjenning mahkamlangan uchi $x=0$ da uning og'ishi $u(0,t)=0$, erkin uchi $x=l$ da esa uning tarangligi nolga teng, ya'ni

$$T(l,t)=k\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0.$$

Sterjenga tashqi kuchlarning ta'siri yo'qligi sababli, uning erkin harakat qiluvchi uchida chegaraviy shart quyidagi

$$u_x(x,t)\,|_{x=l}=0$$

ko'rinishda bo'ladi.



2 — shakl.

Agar prujinaning $x = 0$ uchi ma'lum $h(t)$ qonun asosida harakatlansa, $x = l$ uchiga esa $\nu(t)$ kuch osilgan bo'lsa, u holda chegaraviy shartlar

$$u(x,t)\,|_{x=0} = h(t), \quad u_x(x,t)\,|_{x=l} = \nu(t), \quad 0 \le t \le T,$$

ko'rinishda beriladi.

Agar prujinaning $x = l$ uchi elastik mahkamlangan bo'lsa, u holda prujinaning erkin harakatlanuvchi uchida chegaraviy shart ushbu ko'rinishda beriladi:

$$ku_x(l,t) = -\alpha u(l,t) \quad \text{yoki} \quad u_x(l,t) = -hu(l,t), \quad 0 \le t \le T,$$

bu erda $h = \alpha/k$, $k, \alpha > 0$. Bu holda prujinaning $x = l$ uchi ko'chishi mumkin, lekin mahkamlangan nuqtadagi elastiklik kuchi shu uchida ko'chgan uchining boshlang'ich holatga qaytarishga intiluvchi taranglik kuchini yuzaga keltiradi. Guk qonuniga ko'ra, berilgan kuch $u(l,t)$ ko'chishga proporsional, bunda proporsionallik koeffisienti mahkamlangan nuqtadagi *bikrlik koeffitsienti* deyiladi.

Agar elastik mahkamlangan $x = l$ uchi ko'chsa va uni boshlang'ich holatidan chetlanishi $\theta(t)$ funksiya bilan aniqlansa, u holda chegaraviy shart quyidagi

$$u_x(l,t) = -h[u(l,t) - \theta(t)], \quad 0 \le t \le T. \tag{9}$$

ko'rinishda bo'ladi. Taranglik kuchi $T(0,t) = -ku_x(0,t)$ ni e'tiborga olsak, $x = 0$, ya'ni chap tomonda elastik mahkamlanganlik sharti

$$u_x(0,t) = -h[u(0,t) - \theta(t)], \quad 0 \le t \le T,$$

bo'ladi.

Ta'kidlash mumkinki, qattiq mahkamlangan holda (α yetarlicha katta), ya'ni uchlarning katta bo'lmagan ko'chishlarda katta taranglik vujudga keladi, u holda (9) chegaraviy shart

$$u(l,t) = \theta(t), \quad 0 \le t \le T,$$

birinchi tur chegaraviy shartga o'tadi.

Elastik mahkamlangan holda (α kichik), ya'ni uchlarning katta ko'chishlarda kichik taranglik vujudga keladi.

Bu holda (9) chegaraviy shart $u_x(l,t) = \theta(t)$, $0 \le t \le T$ ikkinchi tur chegaraviy shartga o'tadi (tor erkin uchining sharti).

Agar torning ikkala uchida ikkinchi yoki uchinchi chegaraviy shartlar olinsa, u holda bunday masalalar giperbolik tipdagi tenglama uchun *ikkinchi yoki uchinchi chegaraviy masala* deb yuritiladi.

Agar torning $x = 0$ va $x = l$ uchlarida turli tipdagi chegaraviy shartlar bilan birga $t = 0$ boshlang'ich shart berilsa, bunday masalalar *aralash masalalar* deyiladi.

3–§. Issiqliq tarqalish tenglamasini keltirib chiqarish. Asosiy boshlang'ich–chegaraviy masalalarning qo'yilishi

Qattiq jism (x, y, z) nuqtasining t vaqtdagi harorati $u = u(x, y, z, t)$ bo'lsin. Agar qattiq jismning turli qismlarining harorati turlicha bo'lsa, u holda qaralayotgan qattiq jismning ko'proq isigan qismidan kamroq isigan qismi tomon issiqlik harakati sodir bo'ladi. Issiqlik tarqalish tenglamasini keltirib chiqarish Fur'e qonuniga asoslanadi. Bunga ko'ra ΔS sirtdan Δt vaqtda o'tuvchi ΔQ issiqlik miqdori quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial N}\Delta S \Delta t, \tag{1}$$

bu erda k – issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti. $\frac{\partial u}{\partial N}$ esa ΔS sirtga o'tkazilgan N normal bo'yicha olingan hosila, u quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(N,x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(N,y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(N,z) = (grad\, u, N),$$

ya'ni normal bo'yicha olingan hosila ikkita

$$N = i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos g'amma$$

$$grad\, u = \nabla u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}$$

vektorlarning skalyar ko'paytmasiga teng.

Bu erda i, j, k – koordinata o'qlarining yo'naltiruvchi birlik vektorlari, α, β, $g'amma$ esa N normal bilan mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlar orasidagi burchak.

Yuqorida keltirilgan (1) formuladagi minus ishora issiqlikning jismning ko'proq isigan nuqtasidan kamroq isigan qismiga issiqlik harakatini bildiradi.

Endi faraz qilaylik, qaralayotgan jism izotrop jism bo'lsin, ya'ni jismning issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti k faqat (x, y, z) nuqtaga bog'liq, u ga va $\frac{\partial u}{\partial N}$ ga bog'liq emas.

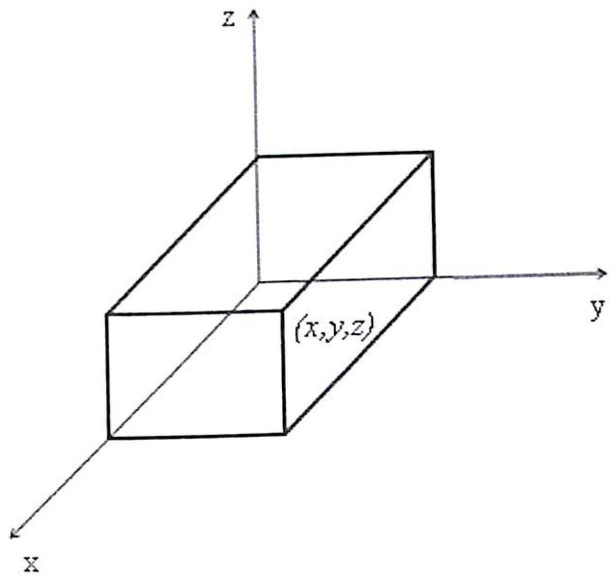
Agar qattiq jism anizotrop bo'lsa, u holda

$$k = k\left(x, y, z, N, u, \frac{\partial u}{\partial N}\right)$$

bo'ladi.

Issiqlik tarqalish tenglamasini keltirib chiqarish uchun qattiq jismdan (z, y, z) nuqtani o'z ichiga olgan yetarlicha kichik ixityoriy V parallelepiped ajratib olamiz, ya'ni

$$V = \{(x,y,z) : x < \xi < x + \Delta x,\ y < \eta < y + \Delta y,\ z < \zeta < z + \Delta z\}.$$



3 — shakl.

Endi V parallelepiped uchun issiqlik balansni tuzaylik. Parallelepipedning $\xi = x$ yuzasi orqali Δt vaqtda o'tgan issiqlik miqdori (1) formulaga ko'ra

$$Q_x = -k(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}\Delta y \Delta z \Delta t.$$

Parallelepipedning $\xi = x + \Delta x$ yuzasidan o'tayotgan issiqlik miqdori esa

$$Q_{x+\Delta x} = -k(x+\Delta x, y, z)\frac{\partial u(x+\Delta x, y, z, t)}{\partial x}\Delta y \Delta z \Delta t$$

ga teng. U holda V hajmda Ox o'qi bo'yicha qolgan issiqlik miqdori

$$\Delta Q_x = Q_x - Q_{x+\Delta x} = \Delta y \Delta z \Delta t \times$$

$$\times\left(k(x+\Delta x, y, z)\frac{\partial u(x+\Delta x, y, z, t)}{\partial x} - k(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x', y, z)\frac{\partial u(x', y, z, t)}{\partial x}\right)\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t, \quad x' \in (x, x+\Delta x).$$

bo'ladi.

Xuddi shu kabi V parallelepipedning qolgan yoqlari bo'yicha issiqlik miqdori

$$\Delta Q_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y',z)\frac{\partial u(x,y',z,t)}{\partial y}\right)\Delta y\Delta x\Delta z\Delta t, \quad y' \in (y, y+\Delta y);$$

$$\Delta Q_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(k(x,y,z')\frac{\partial u(x,y,z',t)}{\partial z}\right)\Delta z\Delta y\Delta x\Delta t, \quad z' \in (z, z+\Delta z).$$

ga teng bo'ladi.

U holda V hajmda Δt vaqtda oqayotgan umumiy issiqlik miqdori

$$Q_1 = \Delta Q_x + \Delta Q_y + \Delta Q_z =$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x',y,z)\frac{\partial u('x,y,z,t)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y',z)\frac{\partial u(x,y',z,t)}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(x,y,z')\frac{\partial u(x,y,z',t)}{\partial z}\right)\right\}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t, \qquad (2)$$

formula bilan aniqlanadi.

Faraz qilaylik, qaralayotgan V parallelepipedning ichida issiqlik manbalari bo'lsin. Parallelepipeddagi issiqlik manbalarining zichligi $F(x,y,z,t)$ bo'lsin, ya'ni $F(x,y,z,t)$ funksiya Δt vaqt ichida ΔV hajmdan ajralib chiqqan yoki unga singib ketgan issiqlik miqdori bo'lsin. U holda tashqi manbalar ta'sirida V hajmdan Δt vaqt oralig'ida ajralib chiqqan issiqlik miqdori

$$Q_2 = F(x,y,z,t)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t, \qquad (3)$$

bo'ladi.

Qaralayotgan qattiq jismning Δt vaqtdagi haroratini o'lchash uchun $\Delta_t u$ sarflangan issiqlik miqdori

$$Q_3 = \Delta_t u\, c(x,y,z)\rho(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z =$$

$$= [u(x,y,z,t+\Delta t) - u(x,y,z,t)]c(x,y,z)\rho(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Bu erda $\rho(x,y,z,)$ qattiq jismning zichligi, $c(x,y,z)$ esa uning solishtirma issiqlik sig'imi bo'lib, ularni argumentlarining uzluksiz funksiyasi deb hisoblaymiz. Lagranj teoremasiga asosan sarf qilingan issiqlik miqdori uchun quyidagi

$$Q_3 = \frac{\partial u(x,y,z,t')}{\partial t}\Delta t\, c(x,y,z)\rho(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z, \qquad (4)$$

ifodani olamiz. Bu erda $t' \in (t, t+\Delta t)$.

Endi V hajm uchun issiqlik balansi tenglamasini tuzamiz. Ma'lumki, $Q_3 = Q_1 + Q_2$, u holda (2)–(4) ifodalardan

$$\frac{\partial u(x,y,z,t')}{\partial t}c(x,y,z)\rho(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t =$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x',y,z)\frac{\partial u(x',y,z,t)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y',z)\frac{\partial u(x,y',z,t)}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(x,y,z')\frac{\partial u(x,y,z',t)}{\partial z}\right)\right\}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t +$$

$$+ F(x,y,z,t)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t.$$

kelib chiqadi. Oxirgi ifodani $\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t \neq 0$ ga qisqartirib, so'ngra $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ va $\Delta t \to 0$ limitga o'tsak, ushbu

$$c(x,y,z)\rho(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z,t')}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z}\right) +$$

$$+ F(x,y,z,t) = div(k\, grad\, u) + F(x,y,z,t), \qquad (5)$$

tenglama hosil bo'ladi. Bunda vektor–funksiyaning divergensiyasi quyidagicha tushuniladi:

Agar $a(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ bo'lsa, u holda

$$div\, a(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial x}$$

4–§. Puasson va Laplas tenglamalariga keladigan masalalar. Asosiy chegaraviy masalalarning qo'yilishi

Faraz qilaylik, biror S sirt bilan chegaralangan D jism ichida bir jinsli siqilmaydigan suyuqlik ma'lum $v(x,y,z)$ tezlik bilan statsionar harakatda bo'lsin. Agar suyuqlik bir jinsli siqilmaydigan suyuqlik, ya'ni $\rho(x,y,z) = const$ bo'lsa, u holda $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, $grad\,\rho = 0$ bo'ladi.

Agar suyuqlikning harakati uyurmali harakat bo'lmasa, u holda $v(x,y,z)$ tezlikning vektor maydoni potensial maydon bo'ladi, ya'ni biror skalyar maydonning gradienti

$$v = grad\,\varphi(x,y,z), \tag{1}$$

bu yerda $\varphi(x,y,z)$ *tezlik potensiali* deyiladi. Agar D jism ichida suyuqlikning harakatga keltiruvchi manba bo'lmasa, u holda

$$div\,v(x,y,z) = 0, \quad \forall(x,y,z) \in D, \tag{2}$$

bo'ladi.

Endi (1) formulani (2) ifodaga qo'ysak, quyidagi

$$div(grad\varphi) \equiv \Delta\varphi = 0, \quad \forall(x,y,z) \in D$$

Laplas tenglamasiga ega bo'lamiz.

Demak, bir jinsli siqilmaydigan suyuklikning uyurmali bo'lmagan harakatining tezlik potensiali Laplas tenglamasini qanoatlantirar ekan.

D hajmli elektr o'tkazuvchan muhitda zichligi $j(x,y,z)$ bo'lgan statsionar elektr tok bo'lsin. Agar D muhit ichida tok manbai bo'lmasa, u holda

$$div\,j(x,y,z) = 0, \quad \forall(x,y,z) \in D, \tag{3}$$

bo'ladi. Om qonuniga asosan elektr maydoni E tok zichligi orqali

$$E = \frac{j}{\lambda}$$

formula bilan aniqlanadi. Bu erda λ muhitning elektr o'tkazuvchanligi. Qaralayotgan D muhitda tok oqimi statsionar bo'lgani uchun undagi elektr maydoni potensial (uyurmasiz) maydon bo'ladi, ya'ni D jismda $\varphi(x,y,z)$ skalyar maydon mavjud va u

$$E = -grad\,\varphi(x,y,z), \tag{4}$$

formula bilan aniqlanadi. Xuddi yuqoridagi kabi (3) va (4) formulalardan

$$\Delta\,\varphi(x,y,z) = 0,$$

kelib chiqadi.

Demak, qaralayotgan muhitda elektr manbai bo'lmasa, u holda statsionar tokning elektr maydoni potensiali Laplas tenglamasini qanoatlantirar ekan.

Agar massani hisobga olmaganda tortishish maydoni potensiali ham Laplas tenglamasini qanoatlantirishini ko'rish mumkin.

Oldingi paragrafda bir jinsli izotrop qattiq jismda ushbu

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x,y,z,t), \tag{5}$$

issiqlik tarqalish tenglamasini keltirib chiqargan edik.

Faraz qilaylik, qattiq jismning har bir nuqtasida bir xil $u(x,y,z,t)$ harorat o'rnatilgan bo'lsin va bu harorat ixtiyoriy t vaqtda o'zgarmas bo'lib qolsin.

U holda $u(x,y,z,t) = u(x,y,z)$ va $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ bo'ladi va (1) tenglama quyidagi

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -\frac{f(x,y,z)}{a^2}, \tag{6}$$

ko'rinishga keladi. Bu (6) tenglama *Puasson tenglamasi* deyiladi.

Agar qattiq jism ichida tashqi issiqlik manbalari bo'lmasa, u holda (6) tenglamada $f(x,y,z) = 0$ bo'ladi va u ushbu

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \tag{7}$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglama *Laplas tenglamasi* deb ataladi.

Shunday qilib, bir jinsli izotrop qattiq jismda issiqlikning statsionar holati (7) *Laplas tenglamasi* orqali ifodalanar ekan. Noma'lum $u(x,y,z)$ funksiyani aniqlash uchun boshlang'ich shartni emas, balki vaqtga bog'liq bo'lmagan holda biror chegaraviy shart berish kifoya.

Asosiy chegaraviy masalalarning qo'yilishi

1. Dirixle masalasi yoki birinchi chegaraviy masala. R^3 fazoda S bo'lakli silliq sirt bilan chegaralangan sohani D deb belgilaylik. Xususiy hosilali (7) tenglamaning D sohada aniqlangan va S sirtda berilgan qiymati orqali $u(x,y,z)$ yechimini topish masalasi *Dirixle masalasi* deyiladi, ya'ni (7) tenglamaning $D \cup S$ sohada uzluksiz va quyidagi shartni qanoatlantiruvchi

$$u(x,y,z)\,|_S = \varphi_1(x,y,z), \quad (x,y,z) \in S,$$

$u(x,y,z)$ yechimini toping, bu yerda $\varphi_1(x,y,z)$ – berilgan funksiya.

2. Neyman masalasi yoki ikkinchi chegaraviy masala. (7) tenglamaning D sohada aniqlangan, $D \cup S$ da o'zining birinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz va ushbu chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi

$$\left.\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial N}\right|_S = \varphi_2(x,y,z), \quad (x,y,z) \in S,$$

$u(x,y,z)$ yechimini toping, bu yerda $\varphi_2(x,y,z)$ – berilgan funksiya, N esa S sirtga o'tkazilgan normal.

3. Puankare masalasi yoki uchinchi chegaraviy masala. (7) tenglamaning D sohada aniqlangan, $D \cup S$ da o'zining birinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz va ushbu chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi

$$\left.\left(\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial N} + \alpha(x,y,z)u(x,y,z)\right)\right|_S = \varphi_3(x,y,z), \quad (x,y,z) \in S,$$

$u(x,y,z)$ yechimini toping, bu yerda $\alpha(x,y,z)$ va $\varphi_3(x,y,z)$ – berilgan funksiyalar, N esa S sirtga o'tkazilgan normal.

Agar yuqorida keltirilgan masalalarning $u(x,y,z)$ yechimi S sirtga nisbatan D sohaning ichida (yoki tashqarisida) qidirilayotgan bo'lsa, u holda bunday masalaga mos ravishda *ichki (yoki tashqi) masala* deyiladi.

Shuni ta'kidlash muhimki, (2) va (3) tenglamalar bilan bir jinsli qattiq jismda sodir bo'ladigan issiqlik jarayonlarigina emas, balki boshqa statsionar jarayonlar ham ifodalanadi. Bunga misol sifatida siqilmaydigan suyuqliklarning potensial oqimini keltirishimiz mumkin.

5–§. Korrekt qo'yilgan chegaraviy masala tushunchasi. Nokorrekt chegaraviy masalalarga misollar

Biz oldingi paragraflarda xususiy hosilali tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalar – bu berilgan differensial tenglamaning qaralayotgan sohada ma'lum bir qo'shimcha shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iborat ekanligini ko'rdik.

Qo'shimcha shartlar ko'pchilik hollarda chegaraviy shartlar bo'lishi mumkin, ya'ni noma'lum funksiyaning qiymati qaralayotgan jismning sirtida yoki boshlang'ich shartlar – fizik jarayonni o'rganishda uning boshlang'ich vaqtdagi holati berilishi mumkin. Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarning yechimi o'rganilayotgan fizik jarayonning taqribiy matematik matematik ifodasini beradi. Fizikaviy jarayonlarning matematik modellarini qurishda uning ayrim parametrlari abstraktlashtiriladi. Ko'pgina ko'rsatkichlarining jarayonga ta'siri sezilarsiz deb, muhim hisoblangan parametrlar ajratib olinadi va shu parametrlar asosida fizikaviy jarayonning matematik modeli xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Fizikaviy jarayonlarning matematik modellashtirilishidan olingan natijalar taqribiy natijalar hisoblanadi.

Shuning uchun xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qo'yilgan boshlang'ich–chegaraviy masalalarning korrektligi tushunchasini kiritamiz.

Matematik fizika masalalari real fizik jarayonlarning matematik modelini ifodalagani uchun bu masalalar quyidagi shartlarni qanoatlantirishi zarur:

A) qaralayotgan masala ma'lum bir funksiyalar (M_1) sinfida yechimga ega (yechimning mavjudligi);

B) qaralayotgan masalaning yechimi bir funksiyalar (M_2) sinfida yagona (yechimning yagonaligi);

C) yechim boshlang'ich va chegaraviy shartlarga, tenglamaning koeffitsientlariga, ozod hadiga va boshqa berilganlarga uzluksiz bog'liq (yechimining turg'unligi).

Bu shartlar bir qarashda o'rinlidek ko'rinadi, lekin ularni fizikaviy jarayonning qurilgan matematik modeli asosida isbotlash kerak.

Qo'yilgan masalaning korrektligini isbotlash – bu matematik modelning birinchi aprobatsiyasidir, ya'ni

A) qurilgan model jarayonga zid emas (masalaning yechimi mavjud);

B) model fizik jarayonni bir qiymatli ifodalaydi (masalaning yechimi yagona);

C) fizik kattaliklarning hatoliklari qurilgan modelga sezilarsiz ta'sir qiladi (yechim,masalaning berilganlariga uzluksiz bog'liq, ya'ni berilganlarning ozgina o'zgarishiga yechimning ham ozgina o'zgarishi mos keladi).

Yuqoridagi A) — C) shartlarni qanoatlantiruvchi boshlang'ich-chegaraviy masala Adamar ma'nosida *korrekt qo'yilgan masala* deb ataladi.

Bo'sh bo'lmagan $M = M_1 \cap M_2$ funksiyalar sinfi boshlangich-chegaraviy masalaning *korrektlik sinfi* deyiladi.

Agar boshlang'ich-chegaraviy masala A) — S) shartlardan birortasini qanoatlantirmasa, u holda bunday masala *nokorrekt qo'yilgan yoki noto'g'ri qo'yilgan masala* deyiladi.

Nokorrekt chegaraviy masalalarga misollar

Endi nokorrekt qo'yilgan masalalarga misollar keltiramiz:

1-MASALA (ADAMAR MISOLI). $D = \{(x,y) : x \in R,\ y > 0\}$ sohada

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad (8)$$

Laplas tenglamasining

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad u_y(x,0) = \nu(x), \quad -\infty < x < +\infty, \qquad (9)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimi topilsin.

Bu yerda $\tau(x)$, $\nu(x)$ – berilgan cheksiz differensiallanuvchi funksiyalar.

Matematik fizikada (8)–(9) masala *Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi* deyiladi.

YECHISH. Ushbu

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{y^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\tau(x) + \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\nu(x)\right] \qquad (10)$$

ifoda (8) tenglamani va (9) boshlang'ich shartlarni qanoatlantirishini bevosita tekshirib, ishonch hosil qilish mumkin.

Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining yagonaligi (10) ifodadan kelib chiqadi, ya'ni $\tau(x) \equiv \nu(x) \equiv 0$ bo'lsa, u holda $u(x,y) \equiv 0$ bo'ladi.

Endi (8)–(9) Koshi masalasida boshlang'ich shartlardan birini ozgina o'zgartiraylik, ya'ni (8) tenglamaning

$$u(x,0) = 0, \qquad u_y(x,0) = \frac{\sin nx}{n}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish kerak bo'lsin.

Bu masalaning yechimini (10) formula yordamida quyidagi

$$u(x,y) = \frac{1}{n^2}\sin nx \,\mathrm{sh}ny$$

ko'rinishda topamiz. Bu erda $\mathrm{sh}\,ny = (e^{ny} - e^{-ny})/2$ – giperbolik sinus.

Yetarlicha katta n uchun boshlang'ich funksiya

$$\frac{1}{n}\sin nx \to 0$$

bo'ladi. Lekin masalaning yechimi $n \to \infty$ da

$$u(x,y) = \frac{1}{n^2}\mathrm{sh}ny \sin nx \to \infty, \quad x \neq j\pi; \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

4-MISOL. $D = \{(x,t) : -\infty < x < +\infty,\ t > 0\}$ sohada (16) tenglamaning

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad (19)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimini toping.

Bu yerda $\varphi_0(x)$ va $\varphi_1(x)$ – berilgan etarlicha silliq funksiyalar.

YECHISH. Faraz qilaylik, (16) tenglamaning (19) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud bo'lsin. U holda berilgan $\varphi_0(x)$ va $\varphi_1(x)$ funksiyalar uchun quyidagi

$$\varphi_0(x) = a^2\varphi_1''(x), \quad \text{pri } t = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \qquad (20)$$

shart o'rinli. Demak, (16) tenglamaning (19) shartni qanoatlantiruvchi yechimi faqat (20) tenglik bajarilganda mavjud bo'lishi mumkin. Berilgan $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ funksiyalar turlicha va ular xech qanday bir–biri bilan bog'langan emas. Shuning uchun issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining (19) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masaslasi nokorrekt qo'yilgan masala hisoblanadi.

Biz keyinchalik (16) tenglamaning

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad -\infty < x < +\infty,$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasining korrekt ekanligini ko'rsatamiz.

Nokorrekt qo'yilgan masalalar bevosita tadqiq etish, qiyin bo'lgan ob'ektlarni o'rganishda, masalan Er osti qidiruv ishlarida, georazvedka masalalarida, tomografiya va shu kabi jarayonlarni tadqiq etishda uchraydi.

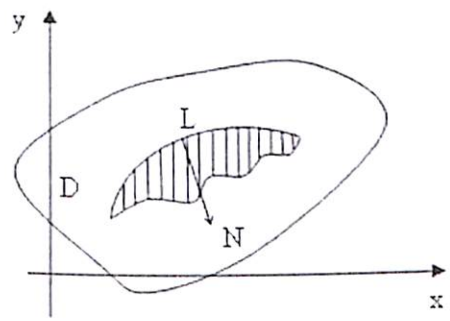
Koshi masalasi. Koshi–Kovalevskaya teoremasi

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lgan ushbu

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + f(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \qquad (1)$$

tenglamani biror D sohada qaraylik.

Faraz qilaylik, D sohada silliqlanuvchi, chekli uzunlikdagi va parametrik tenglamalari $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \le s \le l$ bo'lgan L egri chiziq berilgan va bu egri chiziq (1) tenglamaning xarakteristikasi bo'lmasin.



4 — shakl.

Bu yerda s orqali L egri chiziq yoyining, l orqali esa L egri chiziqning uzunligi belgilangan.

KOSHI MASALASI. Xususiy hosilali (1) differensial tenglamaning L egri chiziq atrofida aniqlangan, uzluksiz va quyidagi

$$u(x,y)\Big|_L = u(x(s), y(s)) = \tau(s), \qquad \frac{\partial u}{\partial N}\Big|_L = \nu(s), \quad 0 \le s \le l \qquad (2)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimini toping.

Bu yerda $\tau(s)$ va $\nu(s)$ berilgan etarlicha silliq funksiyalar, N esa L egri chiziqqa o'tkazilgan normal.

Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qo'yilgan Koshi masalasi matematik fizikaning muhim masalalaridan biri hisoblanadi. Uni tadqiq etish ilmiy va amaliy ahamiyatga ega.

KOSHI–KOVALEVSKAYA TEOREMASI.

Agar xususiy hosilali (1) differensial tenglamaning koeffitsientlari va $f(\cdot)$, $x(s)$, $y(s)$, $\tau(s)$, $\nu(s)$ funksiyalar analitik bo'lsa, u holda (1)–(2) Koshi masalasi L egri chiziqning yetarlicha kichik atrofida yagona analitik yechimga ega bo'ladi.

Nazorat uchun savollar

1. Qanday tenglamalarga xususiy hosilali tenglamalar deyiladi?
2. Nima uchun xususiy hosilali tenglamalarni o'rganish zarur?
3. Xususiy hosilali differensial tenglamaning tartibi nima?
4. Qanday xususiy hosilali differensial tenglamalar chiziqli, kvazichiziqli deyiladi?
5. Korrekt qo'yilgan masala deb, qanday masalalarga aytiladi?
6. Qanday tenglamalar uchun Koshi masalasi korrekt qo'yiladi?
7. Koshi masalasi qanday tenglamalar uchun nokorrekt qo'yilgan bo'ladi? Nima uchun?
8. Qanday fizikaviy masalalar giperbolik tipdagi tenglamalarga keltiriladi?
9. Parabolik tipdagi tenglamalarga qanday fizikaviy masalalar keltiriladi?
10. Qanday fizikaviy masalalar elliptik tipdagi tenglamalarga keltiriladi?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1.1. Quyidagi tenglamalarni xususiy hosilali differensial tenglama bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlang.

1) $u_{xx}^2 + u_{xy}^2 - (u_{xx} - u_{xy})^2 = 0.$
2) $\cos(u_{xx} + u_{yy}) - \cos u_{xx} \cos u_{yy} + \sin u_{xx} \sin u_{yy} = 0.$
3) $\sin(u_x + u_{yy}) - \sin u_x \cos u_{yy} - \cos u_x \sin u_{yy} + 2u = 4.$
4) $\log u_x u_y - \log u_x - \log u_y + 5u_x - 9u = 0.$
5) $\dfrac{\partial}{\partial y}\mathrm{ctg} u_x - u_{xy}\mathrm{cosec}^2 u_x - 4u + 11 = 0.$

1.2. Tenglamalarning tartibini aniqlang.

1) $u_x u_{xy}^2 + (u_{xx}^2 - 2u_{xy}^2 + u_y^2) - 2u = 0.$
2) $\cos^2 u_{xy} - 2u_x u_{xx} + 3u_y + \sin^2 u_{xy} + u_x = 3.$
3) $\dfrac{\partial}{\partial y}(u_x - 2u)^2 + 2(u_x - 2u)u_{xy} - xy^2 = 0.$
4) $\dfrac{\partial}{\partial x}(u_{yy}^2 - u_y) - 2u_{yy}\dfrac{\partial}{\partial y}(u_{xy} - u_x) + 2u_x + 7 = 0.$
5) $2u_{xx}u_{xxy} - \dfrac{\partial}{\partial y}(u_{xx} - u_y)^2 - 2u_y u_{xxy} + u_x = 0.$

1.3. Quyidagi tenglamalardan qaysi biri chiziqli (bir jinsli yoki bir jinsli bo'lmagan), qaysi biri chiziqsiz(kvazichiziqli) ekanligini aniqlang.

1) $3u_{xx} - 6u_{xy} + 7u_y - u_x = 0.$
2) $u_x u_{xy}^2 + 2xuu_{xy} - 3xyu_y + u = 0.$
3) $u_y u_{xy} - 3x^2 uu_{xy} + 2u_x - xyu + 9x^2 y = 0.$
4) $u_{xy} + 2\dfrac{\partial}{\partial x}(u_x^2 + u) - 6x \sin y = 0.$
5) $\dfrac{\partial}{\partial y}(yu_y + u_x^2) - 2u_x u_{xy} + u_x - 6u + x^3 \cos(x - y) = 0.$

1.4. Ushbu funksiya berilgan tenglamaning yechimi ekanligini isbotlang.

1) $u(x, y) = \cos y - (x - y)\sin y, \quad (x - y)u_{xy} - u_y = 0.$
2) $u(x, y) = \dfrac{x}{y}, \quad xu_{xy} = u_y.$
3) $u(x, y) = x \exp\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0.$
4) $u(x, y) = (x + y)^2 + \sin(3x + 2y), \quad 2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$

======== ◊ ========

II BOB
IKKINCHI TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI TENGLAMALARNING KLASSIFIKATSIYASI

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni qaysi tipga tegishli bo'lishi uning yuqori tartibli hosilalari oldidagi koeffisientlari orqali aniqlanadi.

Ushbu bobda xususiy hosilali tenglamalarning klassifikatsiyasi hamda ikki o'zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning kanonik ko'rinishga keltirish bayon qilingan. Kanonik tenglamani yangi noma'lum funksiya kiritish bilan yanada soddaroq ko'rinishga keltirish ko'rsatilgan.

6–§. Ikkinchi tartibli chizikli xususiy hosilali differensial tenglamalarning tiplari

Quyidagi

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x) \tag{1}$$

ikkinchi tartibli n o'zgaruvchili chiziqli differensial tenglamani R^n Evklid fazosidagi biror D sohada qaraylik.

Bu yerda $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subset R^n$, $ng'eq2$, tenglamaning koeffitsientlari $A_{ij}(x)$, $B_i(x)$, $C(x)$ va ozod hadi $f(x)$ yetarlicha silliq berilgan funksiyalar.

Agar $\forall x \in D$ uchun (1) tenglamada $A_{ij}(x) = 0$ bo'lsa, u holda (1) tenglama birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama bo'ladi. Shuning uchun qaralayotgan D sohada tenglamaning $A_{ij}(x)$ koeffitsientlari bir vaqtda nolga teng bo'lmasin, deb talab qilamiz, hamda $A_{ij}(x) = A_{ji}(x)$ tenglik o'rinli bo'lsin.

Faraz qilaylik, $x_0 \in D$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Chiziqli (1) tenglamaga mos ushbu xarakteristik forma

$$Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_0)\lambda_i\lambda_j \tag{2}$$

kvadratik forma deb ataladi.

Algebra kursidan ma'lumki, Q kvadratik formani D sohaning har bir x_0 nuqtasida $\lambda_i = \lambda_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ xosmas almashtirishlar yordamida quyidagi

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2 \tag{3}$$

kanonik ko'rinishga keltirish mumkin. Bu yerda α_i koeffitsientlar -1, 0 va 1 qiymatlarni qabul qiladi.

Qaralayotgan (1) chiziqli tenglamaning klassifikatsiyasi (3) formaning α_i koeffitsientlari qabul qiladigan qiymatlariga asoslanadi.

Agar barcha $\alpha_i = 1$ yoki $\alpha_i = -1$, $(i = \overline{1,n})$ bo'lsa, ya'ni (2) kvadratik forma musbat yoki manfiy aniqlangan bo'lsa, u holda (1) tenglama x_0 nuqtada *elliptik tipdagi tenglama* deyiladi.

Agar α_i koeffitsientlardan biri manfiy, qolganlari musbat (yoki aksincha) bo'lsa, u holda (1) tenglama x_0 nuqtada *giperbolik tipdagi tenglama* deyiladi.

Agar α_i koeffitsientlardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, u holda (1) tenglama x_0 nuqtada *parabolik tenglama* deyiladi.

Agar α_i koeffitsientlarning l $(1 < l < n-1)$ tasi musbat, qolgan $n - l$ tasi manfiy bo'lsa, u holda (1) tenglama x_0 nuqtada *ultragiperbolik tenglama* deyiladi.

Agar D sohaning har bir nuqtasida (3) kvadratik forma koeffitsientlarining barchasi noldan farqli va har xil ishorali, barchasi noldan farqli va bir xil ishorali hamda kamida bittasi (hammasi emas) nolga teng bo'lsa, u holda (1) tenglama D sohada mos ravishda *giperbolik, elliptik* hamda *parabolik tipdagi tenglama* deyiladi.

Agar (1) tenglama qaralayotgan D sohaning turli qismlarida har xil tipga tegishli bo'lsa, u holda (1) tenglama D sohada *aralash tipdagi tenglama* deyiladi.

1 – MISOL. Butun R^n fazoda aniqlangan n o'lchovli

$$\Delta u(x) = \sum_{n=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = 0. \qquad (4)$$

Laplas tenglamasini qaraylik.

Laplas tenglamasiga mos quyidagi

$$Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{n=1}^{n} \lambda_i^2$$

kvadratik formani tuzamiz.

Agar $i = j$ bo'lsa, u holda $A_{ij}(x) = 1$ va $i \neq j$ bo'lganda $A_{ij}(x) = 0$ bo'ladi. Shuning uchun (3) kvadratik formaning koeffitsientlari $\alpha_i = 1, (i = \overline{1,n})$ qiymat qabul qiladi. Demak, Laplas tenglamasi butun R^n fazoda elliptik tipdagi tenglama bo'ladi.

2 – MISOL. R^{n+1} fazoda aniqlangan n o'lchovli

$$\Box u(x,t) \equiv u_{tt} - a^2 \sum_{n=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \qquad (5)$$

to'lqin tarqalish tenglamasini qaraylik.

(5) tenglamaga mos kvadratik forma

$$Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) = \sum_{n=1}^{n} (-a^2 \lambda_i^2) + \lambda_{n+1}^2 = \lambda_{n+1}^2 - \sum_{n=1}^{n} a^2 \lambda_i^2$$

bo'ladi.

Bu kvadratik forma $\xi_i = a\lambda_i, (i = \overline{1,n}), \xi_{i+1} = \lambda_{n+1}$ almashtirish yordamida quyidagi

$$Q = \xi_{n+1}^2 - \sum_{n=1}^{n} a^2 \xi_i^2$$

kanonik ko'rinishga keladi. Bunda α_i koeffitsientlardan biri musbat, qolganlari esa manfiy. Demak, (5) tenglama $R^{n+1}_{x,t}$ fazoda giperbolik tipdagi tenglama ekan.

3 – MISOL. $R^{n+1}_{x,t}$ fazoda aniqlangan n o'lchovli

$$u_t - a^2 \sum_{n=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = u_t - a^2 \Delta u = 0, \qquad (6)$$

issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini qaraylik.

Bu tenglamaga mos kvadratik forma

$$Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) = -a^2 \sum_{n=1}^{n} \lambda_i^2 + 0\, \lambda_{n+1}^2$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda $\alpha_i = -a^2 < 0$, $i = \overline{1,n}$ va $\alpha_{n+1} = 0$.

Shunday qilib, (6) issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi $R^{n+1}_{x,t}$ fazoda parabolik tipdagi tenglama bo'lar ekan.

Kvadratik formaning musbat aniqlanganligi haqidagi Silvestr alomatiga asosan (2) kvadratik formani (3) kanonik ko'rinishga keltirmasdan qaralayotgan xususiy hosilali differensial tenglamaning tipini aniqlash mumkin.

Xususiy hosilali (1) differensial tenglama elliptik tipda bo'lishi uchun quyidagi

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

simmetrik matritsaning diagonal minorlari musbat aniqlangan bo'lishi zarur va etarli.

Agar (1) tenglama ikki o'zgaruvchili $x_1 = x$, $x_2 = y$ bo'lsa, uni quyidagi

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y), \qquad (8)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

Bu tenglamaga mos kvadratik forma

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = a(x,y)\lambda_1^2 + 2b(x,y)\lambda_1\lambda_2 + c(x,y)\lambda_2^2, \qquad (9)$$

bo'ladi.

Agar $a(x,y)\neq 0$ bo'lsa, u holda (9) kvadratik formani ushbu

$$Q(\lambda_1,\lambda_2)=a\left(\lambda_1+\frac{b}{a}\lambda_2\right)^2-\frac{b^2-ac}{a}\lambda_2^2, \qquad (10)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

Agar $\delta(M_0)=b^2-ac<0$ bo'lsa, u holda (9) kvadratik forma $M_0=(x_0,y_0)$ nuqtada musbat yoki manfiy aniqlangan bo'ladi. Chunki (10) ifoda quyidagi almashtirish

$$\xi_1=\sqrt{|a|}\left(\lambda_1+\frac{b}{a}\lambda_2\right),\qquad \xi_2=\sqrt{\frac{ac-b^2}{|a|}}\,\lambda_2$$

yordamida ushbu kanonik ko'rinishga

$$Q=\begin{cases}\xi_1^2+\xi_2^2, & a>0,\\ -\xi_1^2-\xi_2^2, & a<0\end{cases}$$

keladi. Bundan $\delta(M_0)=b^2-ac<0$ bo'lganda (8) tenglamaning $M_0=(x_0,y_0)$ nuqtada elliptik tipda bo'lishi kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, $M_0=(x_0,y_0)$ nuqtada $\delta(M_0)=b^2-ac>0$ bo'lsin. U holda (10) kvadratik forma

$$\xi_1=\sqrt{|a|}\left(\lambda_1+\frac{b}{a}\lambda_2\right),\qquad \xi_2=\sqrt{\frac{b^2-ac}{|a|}}\,\lambda_2$$

almashtirishdan keyin

$$Q=\begin{cases}\xi_1^2-\xi_2^2, & a>0,\\ hfill-\xi_1^2+\xi_2^2, & a<0\end{cases}$$

ko'rinishga keladi, ya'ni (3) kvadratik formaning koeffitsientlari α_1 va α_2 har xil ishorali. Bundan ko'rinadiki, qaralayotgan (8) tenglama $M_0=(x_0,y_0)$ nuqtada giperbolik tipga tegishli ekan.

Agar $M_0=(x_0,y_0)$ nuqtada $\delta(M_0)=b^2-ac=0$ bo'lsa, u holda

$$\xi_1=\sqrt{|a|}\left(\lambda_1+\frac{b}{a}\lambda_2\right),\qquad \xi_2=\lambda_2$$

xosmas almashtirish (10) kvadratik formani quyidagi

$$Q=\begin{cases}\xi_1^2+0\xi_2^2, & a>0,\\ -\xi_1^2+0\xi_2^2, & a<0\end{cases}$$

ko'rinishga keltiradi. Demak, (3) kvadratik formaning α_1 va α_2 koeffitsientlaridan biri nolga teng, ikkinchisi noldan farqli, ya'ni qaralayotgan (8) tenglama $M_0=(x_0,y_0)$ nuqtada parabolik tipdagi tenglama ekan.

Yuqoridagi mulohazalardan qaralayotgan xususiy hosilali (8) differensial tenglamaning tipini aniqlash $\delta(M_0)=b^2-ac$ diskriminantning ishorasiga bog'liq ekanligi ko'rinadi.

Agar biror $M_0=(x_0,y_0)$ nuqtada $\delta(M_0)=b^2-ac>0$ bo'lsa, u holda (8) tenglama M_0 nuqtada *giperbolik tipdagi tenglama* deyiladi.

Agar biror $M_0=(x_0,y_0)$ nuqtada $\delta(M_0)=b^2-ac<0$ bo'lsa, u holda (8) tenglama M_0 nuqtada *elliptik tipdagi tenglama* deyiladi.

Agar biror $M_0=(x_0,y_0)$ nuqtada $\delta(M_0)=b^2-ac=0$ bo'lsa, u holda (8) tenglama shu nuqtada *parabolik tipdagi tenglama* deyiladi.

4 – MISOL. Quyidagi tenglamalarning tipini aniqlang.

a) $u_{xx}-4u_{xy}+2u_{xz}+4u_{yy}+u_{zz}+3xyu=0;$

b) $u_{xx}+2u_{xy}-25u_{yz}+2u_{yy}+6u_{zz}+xu_z+x^2yu=0;$

c) $4u_{xx}+6u_{xy}+2u_{yy}+10u_{xz}+4u_{yz}-6u_{zz}=0;$

YECHISH. Berilgan tenglamalarning yuqori tartibli hosilalari oldigi koeffitsientlari o'zgarmas. Shuning uchun bu tenglamalarning tipi butun fazoda aniqlanadi.

a) Berilgan tenglamaga mos xarakteristik forma

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1^2-4\lambda_1\lambda_2+2\lambda_1\lambda_3+4\lambda_2^2+\lambda_3^2=$$
$$=(\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3)^2+(\lambda_2+\lambda_3)^2-(\lambda_2-\lambda_3)^2$$

ko'rinishda bo'ladi. Quyidagi

$$\lambda_1=\xi_1+\frac{1}{2}\xi_2+\frac{3}{2}\xi_3;\quad \lambda_2=\frac{1}{2}(\xi_2+\xi_3);\quad \lambda_3=\frac{1}{2}(\xi_2-\xi_3)$$

xosmas almashtirish yordamida $Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ forma

$$K(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2$$

kanonik ko'rinishga keladi.

α_i $(\alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = -1)$ koeffitsientlar noldan farqli va har xil ishorali. Ta'rifga asosan bu tenglama giperbolik tipga tegishli.

b) Yuqoridagi kabi berilgan differensial tenglamaning xarakteristik formasini tuzamiz

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_2^2 + 6\lambda_3^2 \qquad (*)$$

va uni to'la kvadratlarga ajratib, kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$Q = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3^2 + 4\lambda_3^2 =$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)^2 + 4\lambda_3^2.$$

Bundan quyidagi xosmas almashtirishlar natijasida

$$\xi_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, \qquad \xi_2 = \lambda_2 + \lambda_3, \qquad \xi_3 = 2\lambda_3.$$

Q kvadratik forma ushbu

$$K(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$$

kanonik ko'rinishga keladi.

Demak, (3) kvadratik formaning α_1, α_2 va α_3 koeffitsientlari noldan farqli va bir xil ishorali. Shuning uchun berilgan tenglama R^3 fazoda elliptik tipda bo'ladi.

Endi kvadratik formaning musbat aniqlanganligi haqidagi Silvestr alomati yordamida ham berilgan tenglamaning tipini aniqlaylik.

Buning uchun berilgan tenglamaning (7) matritsaga o'xshash matritsasini tuzamiz va uning diagonal minorlarini hisoblaymiz.

$$\Delta_1 = A_{11} = 1 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

sohada bir vaqtda nolga teng bo'lmasin. F esa argumentlarining berilgan funksiyasi.

Qaralayotgan (1) tenglamani kanonik ko'rinishga keltirish uchun x, y erkli o'zgaruvchilar o'rniga quyidagi tengliklar yordamida

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \tag{2}$$

yangi ξ, η o'zgaruvchilar kiritamiz.

Bu yerda $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ funksiyalar D sohada ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va (2) almashtirishning yakobiani D sohada noldan farqli, ya'ni

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0. \tag{3}$$

Agar bu tengsizlik bajarilsa, u holda (2) sistemani ξ, η nuqtalarning biror sohasida x, y o'zgaruvchilarga nisbatan bir qiymatli yechish mumkin. Topilgan $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ funksiyalar ham ξ, η bo'yicha ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi.

Endi $u(x,y)$ funksiyani $C^2(D)$ sinfdan deb hisoblaymiz va undan yangi ξ, η o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalarini hisoblaymiz. Murakkab funksiyalarni differensiallash haqidagi teoremaga asosan quyidagi

$$u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x; \quad u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y;$$

$$u_{xx} = (u_x)_x = (u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x)_x = (u_\xi\xi_x)_x + (u_\eta\eta_x)_x =$$
$$= (u_\xi)_x\xi_x + u_\xi\xi_{xx} + (u_\eta)_x\eta_x + u_\eta\eta_{xx} =$$
$$= (u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x)\xi_x + u_\xi\xi_{xx} + (u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x)\eta_x + u_\eta\eta_{xx} =$$
$$= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx};$$

$$u_{xy} = (u_x)_y = (u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x)_y = (u_\xi\xi_x)_y + (u_\eta\eta_x)_y =$$
$$= (u_\xi)_y\xi_x + u_\xi\xi_{xy} + (u_\eta)_y\eta_x + u_\eta\eta_{xy} =$$
$$\ldots\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy};$$

$$u_{yy} = (u_y)_y = (u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y)_y = (u_\xi\xi_y)_y + (u_\eta\eta_y)_y =$$
$$= (u_\xi)_y\xi_y + u_\xi\xi_{yy} + (u_\eta)_y\eta_y + u_\eta\eta_{yy} =$$
$$= (u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y)\xi_y + u_\xi\xi_{yy} + (u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y)\eta_y + u_\eta\eta_{yy} =$$
$$= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}.$$

tengliklarni olamiz.

Demak, $u(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalarini yangi ξ, η o'zgaruvchilarning hosilalari bo'yicha quyidagi formulalar bilan ifodalandi:

$$\begin{cases} u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x; \\ u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y; \\ u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}; \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}; \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}. \end{cases} \tag{4}$$

Bu tengliklarni (1) tenglamaga qo'yamiz va natijada (1) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$a_1(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + 2b_1(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + c_1(\xi,\eta)u_{\eta\eta} = F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta), \tag{5}$$

bu yerda

$$\begin{cases} a_1(\xi,\eta) = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \\ b_1(\xi,\eta) = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y, \\ c_1(\xi,\eta) = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2. \end{cases} \tag{6}$$

(6) tengliklarga asosan bevosita o'rniga qo'yib, ushbu tenglikning

$$b_1^2 - a_1c_1 = (\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2(b^2 - ac)$$

bajarilishiga ishonch hosil qilishimiz mumkin.

Bundan esa (x,y) o'zgaruvchilarni (2) va (3) xosmas almashtirishlar natijasida qaralayotgan (1) tenglama tipining o'zgarmasligi kelib chiqadi.

Qaralayotgan (1) tenglamada $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ o'zgaruvchilarni qanday tanlaganimizda, u yanada soddaroq ko'rinishga keladi?

Bu savolga javob topish uchun $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ o'zgaruvchilarni $a_1(\xi,\eta)$, $b_1(\xi,\eta)$ va $c_1(\xi,\eta)$ koeffitsientlardan birini nolga aylantiradigan qilib tanlaymiz.

Buning uchun quyidagi lemmalar o'rinli.

1–LEMMA. Faraz qilaylik, $z = \varphi(x,y) \in C^1(D)$ va D sohada $\varphi_y(x,y) \neq 0$ (yoki $\varphi_x(x,y) \neq 0$) bo'lsin. Agar $z = \varphi(x,y)$ funksiya ushbu

$$a(x,y)z_x^2 + 2b(x,y)z_x z_y + c(x,y)z_y^2 = 0. \tag{7}$$

birinchi tartibli xususiy hosilali chiziqsiz tenglamaning xususiy yechimi bo'lsa, u holda $\varphi(x,y) = const$ ifoda

$$a(x,y)(dy)^2 - 2b(x,y)dxdy + c(x,y)(dy)^2 = 0 \tag{8}$$

oddiy differensial tenglamaning umumiy integrali bo'ladi.

2–LEMMA. Agar $\varphi(x,y) = const$ ifoda (8) oddiy differensial tenglamaning umumiy integrali bo'lsa, u holda $z = \varphi(x,y)$ funksiya (7) chiziqsiz tenglamaning xususiy yechimi bo'ladi.

ISBOT. **1.** Faraz qilaylik, $z = \varphi(x,y)$ funksiya D sohada (7) tenglamaning xususiy yechimi bo'lsin. Agar y o'zgaruvchi $\varphi(x,y) = const$ oshkormas funksiyadan aniqlansa, u holda $\varphi(x,y) = const$ tenglik (8) tenglamaning umumiy integrali bo'ladi.

Lemmaning shartga ko'ra $\varphi(x,y)$ funksiya D sohada o'zining $\varphi_x(x,y)$ va $\varphi_y(x,y)$ xususiy hosilalari bilan birga uzluksiz va $\varphi_x(x,y) \neq 0$ (yoki $\varphi_y(x,y) \neq 0$) bo'ladi. Oshkormas funksiya haqidagi teoremadan y o'zgaruvchini $\varphi(x,y) = const$ tenglikdan $y = f(x,c)$ ko'rinishda topish mumkin. Bundan

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right]\Bigg|_{y=f(x,c)}$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikni (8) tenglamaga qo'yib, ushbu

$$a(x,y)(dy)^2 - 2b(x,y)dxdy + c(x,y)(dy)^2 =$$

$$= \left[a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + c(x,y)\right](dx)^2 =$$

$$= \left[a(x,y)\left(-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right)^2 - \right.$$

$$\left. -2b(x,y)\left(-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right) + c(x,y)\right]_{y=f(x,c)} (dx)^2 = 0$$

ifodaga ega bo'lamiz. Demak, barcha $(x,y) \in D$ uchun quyidagi

$$a(x,y)\varphi_x^2(x,y) + 2b(x,y)\varphi_x(x,y)\varphi_y(x,y) + c(x,y)\varphi_y^2(x,y) = 0,$$

yoki

$$a(x,y)\left(-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right)^2 - 2b(x,y)\left(-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right) + c(x,y) = 0$$

tenglik o'rinli.

2. Endi $\varphi(x,y) = const$ tenglik D sohada (8) tenglamaning umumiy integrali bo'lsin. U holda $\forall (x,y) \in D$ uchun

$$a(x,y)\varphi_x^2(x,y) + 2b(x,y)\varphi_x(x,y)\varphi_y(x,y) + c(x,y)\varphi_y^2(x,y) = 0,$$

bo'lishini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, (x',y') nuqta D sohadan olingan ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Bu nuqta orqali (8) tenglamaning biror $\varphi(x',y') = c'$ integral egri chizig'i o'tsin. U holda bu egri chiziqning tenglamasi $\varphi(x,y) = c'$ yoki $y = f(x,c')$ bo'ladi. Integral egri chiziqning barcha nuqtalari uchun $y' = f(x,c')$ bo'lganda ushbu

$$a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + c(x,y) =$$

$$= \left[a(x,y)\left(-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right)^2 - 2b(x,y)\left(-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right) + c(x,y)\right] = 0$$

tenglik bajariladi. Bu tenglikda $x = x'$ almashtirsak,

$$a(x,y)\left(-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right)^2 - 2b(x,y)\left(-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right) + c(x,y) = 0$$

yoki

$$a(x',y')\varphi_x^2(x',y')+2b(x',y')\varphi_x(x',y')\varphi_y(x',y')+c(x',y')\varphi_y^2(x',y')=0$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak, (x',y') nuqtada $z=\varphi(x,y)$ funksiya (7) tenglamani qanoatlantirishi isbotlandi. Bundan (x',y') nuqtaning ixtiyoriy ekanligidan $z=\varphi(x,y)$ funksiya D sohada (7) tenglamaning yechimi ekanligi kelib chiqadi.

(8) oddiy differensial tenglamaga (1) xususiy hosilali differensial tenglamaning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi.

Xarakteristik tenglamaning umumiy yechimlari (1) xususiy hosilali differensial tenglamaning *xarakteristikalari* deb ataladi.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamaning tipiga ko'ra uchta holni qaraymiz.

BIRINCHI HOL. Xususiy hosilali (1) differensial tenglamaning diskrminanti D sohada $\delta=b^2-ac>0$ bo'lsin. U holda (1) tenglama D sohada giperbolik tipdagi tenglama bo'ladi. Ixtiyoriy $(x_0,y_0)\in D$ nuqtada (1) tenglamani kanonik ko'rinishga keltiraylik. Bu nuqtada $a(x_0,y_0)\neq 0$ yoki $c(x_0,y_0)\neq 0$ bo'lsin, aks holda (1) tenglama kanonik ko'rinishdagi tenglama bo'ladi.

Faraz qilaylik, $a(x_0,y_0)\neq 0$ bo'lsin. D sohada $\delta>0$ ekanligidan (8) xarakteristik tenglama quyidagi ikkita

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}, \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}. \tag{10}$$

birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarga ajraladi.

Bu tenglamalarning o'ng tomonlari ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va $(x_0,y_0)\in D$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida $a(x_0,y_0)\neq 0$. Shuning uchun birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremaga asosan bu tenglamalarning umumiy i[illegible] mavjud va ular haqiqiy va har xil

$$[illegible], y)=c_1=const, \qquad \psi(x,y)=c_2=const. \tag{11}$$

bo'ladi.

(11) umumiy integrallar haqiqiy va har xil bo'lgani uchun giperbolik tipdagi tenglamalar ikkita haqiqiy xarakteristikalar oilasiga ega bo'lar ekan.

Yangi o'zgaruvchilarni $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$ deb olsak, yuqoridagi lemmaga ko'ra $a_1(\xi,\eta)=c_1(\xi,\eta)=0$ va $b_1(\xi,\eta)\neq 0$ bo'ladi.

Bunda (5) tenglamani $2b_1(\xi,\eta)$ ga bo'lib, quyidagi

$$u_{\xi\eta}=Q(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta), \quad Q=-\frac{F_1}{2b_1} \tag{12}$$

ko'rinishdagi tenglamani olamiz.

Bu *giperbolik tipdagi tenglamaning kanonik ko'rinishi* deyiladi.

Agar (12) tenglamada ξ, η o'zgaruvchilardan yangi α, β o'zgaruvchilarga $\xi=\alpha+\beta$, $\eta=\alpha-\beta$ tengliklar yordamida o'tsak, u holda (12) tenglama

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=Q_1(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta), \quad Q_1=4Q \tag{13}$$

ko'rinishga keladi.

Bu tenglama *giperbolik tipdagi tenglamaning ikkinchi kanonik ko'rinishi* deyiladi.

IKKINCHI HOL. Xususiy hosilali (1) differensial tenglamaning diskrminanti D sohada $\delta=b^2-ac=0$ bo'lsin. U holda (1) tenglama D sohada *parabolik tipdagi tenglama* deyiladi.

Farazimizga ko'ra, (1) tenglamaning koeffitsientlari bir vaqtda nolga aylanmaydi. U holda $\delta=b^2-ac=0$ shartga asosan D sohaning har bir nuqtasida $a\neq 0$ va $c\neq 0$ bo'ladi. Umumiylikka ziyon qilmasdan D sohaning biror (x_0,y_0) nuqtasida $a\neq 0$ deb olaylik. (1) tenglamani shu (x_0,y_0) nuqta atrofida kanonik ko'rinishga keltiramiz.

Bu holda (9) va (10) tenglamalar o'zaro ustma-ust tushadi va bitta $\varphi(x,y)=const$ haqiqiy umumiy integralga ega bo'ladi.

Yangi o'zgaruvchilarni $\xi=\varphi(x,y)$ bu yerda $\varphi(x,y)\in C^2(D)$ va bu funksiya lemmaga asosan (7) tenglamaning yechimi bo'ladi. Endi ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi $\eta=\eta(x,y)$ funksiyani D sohaning biror (x_0,y_0) nuqtasida $J\neq 0$ bo'ladigan qilib tanlaymiz. U holda (5) tenglamada $a_1(\xi,\eta)=0$ bo'ladi. (6) tengliklardan $b_1(\xi,\eta)=0$ ekanligini ko'rsatish qiyin emas. Bundan D sohaning biror (x_0,y_0) nuqtasida $c_1(\xi,\eta)\neq 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar D sohaning biror (x_0,y_0) nuqtasida $c_1(\xi,\eta)=0$ bo'lsa, u holda (6) tengliklardan $b=\sqrt{ac}$ deb, $\forall\, a\geq 0, b\geq 0$ uchun quyidagi

$$\begin{cases} \sqrt{|a|}\xi_x+\sqrt{|c|}\xi_y=0, \\ \sqrt{|a|}\eta_x+\sqrt{|c|}\eta_y=0 \end{cases} \tag{14}$$

sistemani olamiz. $J\neq 0$ bo'lgani uchun (14) sistema faqat trivial $a=0$, $c=0$ yechimga ega. Bundan $b=0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $|a|+|b|+|c|>0$ shartga zid. Shuning uchun (5) tenglamani har ikki tomonini $c_1(\xi,\eta)$ ga bo'lsak, u quyidagi

$$u_{\eta\eta}=Q(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta),\qquad Q=\frac{F_1}{c_1}, \tag{15}$$

kanonik ko'rinishga keladi.

Bu *parabolik tenglamaning kanonik ko'rinishi* deyiladi.

UCHINCHI HOL. Agar D sohaning (x_0,y_0) nuqtasida $b^2-ac<0$ bo'lsa, u holda (1) tenglama shu nuqtada *elliptik tipdagi tenglama* deyiladi.

Qaralayotgan (1) tenglamaning $a(x,y)$, $b(x,y)$ va $c(x,y)$ koeffisientlari D sohaning biror (x_0,y_0) nuqtasida analitik funksiyalar bo'lsin. U holda (9) va (10) tenglamalarning o'ng tomonlari analitik funksiyalar bo'ladi. Koshi–Kovalevskaya teoremasiga asosan (9) va (10) tenglamalar D sohaning biror $(x_0;y_0)$ nuqtasi atrofida kompleks-qo'shma

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(x,y)+i\varphi_2(x,y)=c_1,$$
$$\varphi^*(x,y)=\varphi_1(x,y)-i\varphi_2(x,y)=c_2$$

analitik yechimlarga ega. Yangi ξ, η o'zgaruvchilarni ushbu

$$\xi=\frac{1}{2}\left(\varphi(x,y)+\varphi^*(x,y)\right)=\varphi_1(x,y),$$
$$\eta=[illegible]\; y)\Big)=\varphi_2(x,y)$$

tengliklar yordamida kiritamiz.

Bu funksiyalar D sohada

$$J=\begin{vmatrix}\varphi_{1x} & \varphi_{1y}\\ \varphi_{2x} & \varphi_{2y}\end{vmatrix}=\varphi_{1x}\varphi_{2y}-\varphi_{1y}\varphi_{2x}\neq 0$$

shartni qanoatlantiradi.

Haqiqatdan ham, D sohaning biror (x_0,y_0) nuqtasida atrofida

$$J=\varphi_{1x}\varphi_{2y}-\varphi_{1y}\varphi_{2x}=0$$

bo'lsin. U holda

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}:\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}:\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\quad\text{yoki}\quad\frac{\varphi_{1x}}{\varphi_{1y}}=\frac{\varphi_{2x}}{\varphi_{2y}} \tag{16}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$\varphi(x,y)$ funksiya D sohada analitik bo'lgani uchun bu funksiya

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial y};\qquad\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}$$

Koshi–Riman shartini qanoatlantiradi.

Bundan

$$\frac{\varphi_{1x}}{\varphi_{1y}}=-\frac{\varphi_{2y}}{\varphi_{2x}}$$

kelib chiqadi va bu (16) tenglikka zid. Demak, D sohaning biror (x_0,y_0) nuqtasida $J\neq 0$ bo'lar ekan.

Endi $\varphi(x,y)=\xi(x,y)+i\eta(x,y)$ ifodani (7) tenglamaga qo'yib,

$$a(\xi_x+i\eta_x)^2+2b(\xi_x+i\eta_x)(\xi_y+i\eta_y)+c(\xi_y+i\eta_y)^2=0,$$

uning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratamiz. Natijada

$$a\xi_x^2+2b\xi_x\xi_y+c\xi_y^2=a\eta_x+2b\eta_x\eta_y+c\eta_y^2;$$
$$a\xi_x\eta_x+b(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+c\xi_y\eta_x=0$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

holda (5) tenglamada $a_1(\xi,\eta)=0$ bo'ladi. (6) tengliklardan $b_1(\xi,\eta)=0$ ekanligini ko'rsatish qiyin emas. Bundan D sohaning biror (x_0,y_0) nuqtasida $c_1(\xi,\eta)\neq 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar D sohaning biror (x_0,y_0) nuqtasida $c_1(\xi,\eta)=0$ bo'lsa, u holda (6) tengliklardan $b=\sqrt{ac}$ deb, $\forall a\geq 0, b\geq 0$ uchun quyidagi

$$\begin{cases} \sqrt{|a|}\xi_x+\sqrt{|c|}\xi_y=0, \\ \sqrt{|a|}\eta_x+\sqrt{|c|}\eta_y=0 \end{cases} \tag{14}$$

sistemani olamiz. $J\neq 0$ bo'lgani uchun (14) sistema faqat trivial $a=0$, $c=0$ yechimga ega. Bundan $b=0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $|a|+|b|+|c|>0$ shartga zid. Shuning uchun (5) tenglamani har ikki tomonini $c_1(\xi,\eta)$ ga bo'lsak, u quyidagi

$$u_{\eta\eta}=Q(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta), \qquad Q=\frac{F_1}{c_1}, \tag{15}$$

kanonik ko'rinishga keladi.

Bu *parabolik tenglamaning kanonik ko'rinishi* deyiladi.

UCHINCHI HOL. Agar D sohaning (x_0,y_0) nuqtasida $b^2-ac<0$ bo'lsa, u holda (1) tenglama shu nuqtada *elliptik tipdagi tenglama* deyiladi.

Qaralayotgan (1) tenglamaning $a(x,y)$, $b(x,y)$ va $c(x,y)$ koeffisientlari D sohaning biror (x_0,y_0) nuqtasida analitik funksiyalar bo'lsin. U holda (9) va (10) tenglamalarning o'ng tomonlari analitik funksiyalar bo'ladi. Koshi–Kovalevskaya teoremasiga asosan (9) va (10) tenglamalar D sohaning biror (x_0,y_0) nuqtasi atrofida kompleks-qo'shma

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(x,y)+i\varphi_2(x,y)=c_1,$$
$$\varphi^*(x,y)=\varphi_1(x,y)-i\varphi_2(x,y)=c_2$$

analitik yechimlarga ega. Yangi ξ, η o'zgaruvchilarni ushbu

$$\xi=\frac{1}{2}\Big(\varphi(x,y)+\varphi^*(x,y)\Big)=\varphi_1(x,y),$$
$$\eta=\frac{1}{2}\Big(\varphi(x,y)-\varphi^*(x,y)\Big)=\varphi_2(x,y)$$

tengliklar yordamida kiritamiz.

Bu funksiyalar D sohada

$$J=\begin{vmatrix}\varphi_{1x} & \varphi_{1y}\\ \varphi_{2x} & \varphi_{2y}\end{vmatrix}=\varphi_{1x}\varphi_{2y}-\varphi_{1y}\varphi_{2x}\neq 0$$

shartni qanoatlantiradi.

Haqiqatdan ham, D sohaning biror (x_0,y_0) nuqtasida atrofida

$$J=\varphi_{1x}\varphi_{2y}-\varphi_{1y}\varphi_{2x}=0$$

bo'lsin. U holda

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}:\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}:\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \quad \text{yoki} \quad \frac{\varphi_{1x}}{\varphi_{1y}}=\frac{\varphi_{2x}}{\varphi_{2y}} \tag{16}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$\varphi(x,y)$ funksiya D sohada analitik bo'lgani uchun bu funksiya

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}; \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}$$

Koshi–Riman shartini qanoatlantiradi.

Bundan

$$\frac{\varphi_{1x}}{\varphi_{1y}}=-\frac{\varphi_{2y}}{\varphi_{2x}}$$

kelib chiqadi va bu (16) tenglikka zid. Demak, D sohaning biror (x_0,y_0) nuqtasida $J\neq 0$ bo'lar ekan.

Endi $\varphi(x,y)=\xi(x,y)+i\eta(x,y)$ ifodani (7) tenglamaga qo'yib,

$$a(\xi_x+i\eta_x)^2+2b(\xi_x+i\eta_x)(\xi_y+i\eta_y)+c(\xi_y+i\eta_y)^2=0,$$

uning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratamiz. Natijada

$$a\xi_x^2+2b\xi_x\xi_y+c\xi_y^2=a\eta_x+2b\eta_x\eta_y+c\eta_y^2;$$
$$a\xi_x\eta_x+b(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+c\xi_y\eta_x=0$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Oxirgi tengliklardan $a_1(\xi,\eta) = c_1(\xi,\eta)$ va $b_1(\xi,\eta) = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

(5) tenglamani har ikki tomonini $a_1(\xi,\eta)$ ga bo‘lib, ushbu

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = Q(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta), \quad Q = \frac{F_1}{a_1}. \qquad (17)$$

kanonik ko‘rinishdagi tenglamani olamiz. Bu tenglama *elliptik tenglamaning kanonik ko‘rinishi* deyiladi.

Agar (1) tenglamada $a(x,y) = c(x,y)$ va $b(x,y) = 0$ bo‘lsa, u holda berilgan tenglama (17) kanonik ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar qaralayotgan sohaning barcha nuqtalarida

$$b^2 - ac > 0 \quad \text{yoki} \quad b^2 - ac = 0 \quad \text{yoki} \quad b^2 - ac < 0$$

bo‘lsa, (1) tenglama shu sohada mos ravishda *giperbolik* yoki *parabolik* yoki *elliptik tipga tegishli* deyiladi.

Agar D sohaning turli nuqtalarida $b^2 - ac$ ifodaning ishorasi turlicha bo‘lsa, u holda (1) tenglama D sohada *aralash tipdagi tenglama* deyiladi.

Endi (1) tenglamaning o‘ng tomonidagi F funksiya argumentlarining chiziqli funksiyasi bo‘lib, uning koeffitsientlari o‘zgarmas sonlar bo‘lsin.

O‘zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli xususiy hosilali ushbu differensial

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + a_1u_x + b_1u_y + c_1u = f(x,y), \qquad (18)$$

tenglamani qaraylik.

Bu tenglamaning xarakteristikalari quyidagi

$$y = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}x + c_1, \quad y = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}x + c_2 \qquad (19)$$

to‘g‘ri chiziqlardan iborat.

(19) tengliklardagi radikal ostidagi $b^2 - ac$ ifodaning ishorasiga qarab mos ravishda o‘zgaruvchilarni almashtirish yordamida (18) tenglamani quyidagi kanonik ko‘rinishlarga keltirish mumkin:

a) giperbolik tipdagi tenglama:

$$\left\{\begin{array}{l} u_{\xi\eta} + a_2u_\xi + b_2u_\eta + c_2u = f_1(\xi,\eta), \\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + a_2u_\xi + b_2u_\eta + c_2u = f_1(\xi,\eta). \end{array}\right. \qquad (20)$$

b) parabolik tipdagi tenglama:

$$\left\{\begin{array}{l} u_{\xi\xi} + a_2u_\xi + b_2u_\eta + c_2u = f_1(\xi,\eta), \\ u_{\eta\eta} + a_2u_\xi + b_2u_\eta + c_2u = f_1(\xi,\eta) \end{array}\right. \qquad (21)$$

c) elliptik tipdagi tenglama

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + a_2u_\xi + b_2u_\eta + c_2u = f_1(x,y). \qquad (22)$$

Ushbu

$$u(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta}v(\xi,\eta)$$

formula bilan yangi $v(\xi,\eta)$ noma'lum funksiya kiritib, λ va μ koeffitsientlarni tanlash hisobiga (20), (21) va (22) kanonik tenglamalarni yanada soddalashtirish mumkin.

5-Misol. Quyidagi tenglamalarni kanonik ko‘rinishga keltiring.

a) $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0;$

b) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + cu = 0;$

c) $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0.$

Yechish. a) Tenglamaning tipini aniqlaymiz:

$$\delta = b^2 - ac = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4 > 0.$$

Demak, tenglama giperbolik tipga tegishli ekan. U holda kanonik tenglamaning bosh hadi $u_{\xi\eta} = Q$ ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$(dy)^2 + 2\cos x dx dy - (3 + \sin^2 x)(dx)^2 = 0$$

Bundan

$$dy = (-\cos x + 2)dx, \quad dy = (-\cos x - 2)dx$$

tenglamalarga ega bo'lamiz. Bu tenglamalarni integrallab,

$$y - \sin x - 2x = c_1, quady + \sin x + 2x = c_2$$

umumiy yechimlarni (tenglamaning xarakteristikalarini) topamiz. Yangi

$$\xi = 2x + \sin x + y, \quad \eta = 2x - \sin x - y$$

xarakteristik o'zgaruvchilarga o'tib, berilgan tenglamada qatnashuvchi xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$$u_x = (2 + \cos x)u_\xi + (2 - \cos x)u_\eta, \quad u_y = u_\xi - u_\eta,$$
$$u_{xx} = (2 + \cos x)^2 u_{\xi\xi} + 2(4 - \cos^2 x)u_{\xi\eta} + (2 - \cos x)^2 u_{\eta\eta} -$$
$$- \sin x u_\xi + \sin x u_\eta,$$
$$u_{xy} = (2 + \cos x)u_{\xi\xi} - 2\cos x u_{\xi\eta} - (2 - \cos x)u_{\eta\eta},$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Bularni tenglamaga qo'yib, soddalashtirish natijasida

$$u_{\xi\eta} + \frac{\eta - \xi}{16}(u_\xi - u_\eta) = 0$$

ko'rinishdagi kanonik tenglamaga kelamiz.

b) Tenglamaning tipini aniqlaymiz: $\delta = 0$. Demak, berilgan tenglama parabolik tipda ekan. Uning kanonik ko'rinishi, agar ξ o'zgaruvchi ixtiyoriy tanlanganda

$$u_{\xi\xi} = Q(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

yoki η o'zgaruvchi ixtiyoriy tanlanganda

$$u_{\eta\eta} = Q(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$(dy)^2 + 2dxdy + (dx)^2 = 0 \quad \text{ëki} \quad dy + dx = 0$$

[illegible]b, u bitta ikki karrali $y + x = c$ yechimga ega.

funksiyalarni kiritamiz va $u(\xi,\eta)$ funksiyaning hosilalarini topamiz:

$$u_x = 2u_\xi + u_\eta, \qquad u_y = -u_\xi$$
$$u_{xx} = 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$
$$u_{xy} = -2u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta}, \qquad u_{yy} = u_{\xi\xi}$$

Topilgan ifodalarni tenglamaga qo'yib, ushbu

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_\eta = 0$$

kanonik tenglamaga ega bo'lamiz.

6–MISOL. Quyidagi tenglamani kanonik ko'rinishga keltiring va kanonik tenglamani soddalashtiring.

$$2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y + u = 0.$$

YECHISH. Tenglamaning tipini aniqlaymiz: $\delta = -1 < 0$ bo'lgani uchun tenglama elliptik tipga tegishli bo'ladi.

Xarakteristik tenglamasi

$$2(dy)^2 - 2dxdy + (dx)^2 = 0$$

bo'lib, u ikkita kompleks–qo'shma

$$2y - x + ix = c_1, \quad 2y - x - ix = c_2$$

yechimlarga ega.

Yangi ξ, η o'zgaruvchilarni $\xi = 2y - x$, $\eta = x$ tengliklar yordamida kiritamiz. Berilgan tenglamada qatnashuvchi xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$$u_x = -u_\xi + u_\eta, qquadu_y = 2u_\xi,$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$
$$u_{xy} - 2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta}, u_{yy} = 4u_{\xi\xi}$$

Bularni tenglamaga qo'yib, kanonik tenglamani olamiz:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_\xi + 2u_\eta + \frac{1}{2}u = 0.$$

Bu tenglamani soddalashtirish uchun quyidagi ko'rinishda yangi $v(\xi,\eta)$ noma'lum funksiya kiritamiz:

$$u(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi+\mu\eta}v(\xi,\eta)$$

Xususiy hosilalarini hisoblaymiz:

$$u_\xi = \lambda e^{\lambda\xi+\mu\eta}v + e^{\lambda\xi+\mu\eta}v_\xi,$$
$$u_\eta = \mu e^{\lambda\xi+\mu\eta}v + e^{\lambda\xi+\mu\eta}v_\eta,$$
$$u_{\xi\xi} = \lambda^2 e^{\lambda\xi+\mu\eta}v + 2\lambda e^{\lambda\xi+\mu\eta}v_\xi + e^{\lambda\xi+\mu\eta}v_{\xi\xi},$$
$$u_{\eta\eta} = \mu^2 e^{\lambda\xi+\mu\eta}v + 2\mu e^{\lambda\xi+\mu\eta}v_\eta + e^{\lambda\xi+\mu\eta}v_{\eta\eta}.$$

Bu ifodalarni kanonik tenglamaga qo'yib, uni soddalashtirsak, natijada ushbu

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (2+2\lambda)v_\xi + (2+2\mu)v_\eta + (\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda + 2\mu + \frac{1}{2})v = 0$$

tenglamaga ega bo'lamiz. λ va μ sonlarni $2 + 2\lambda = 0$, $2 + 2\mu = 0$ bo'ladigan qilib tanlaymiz. U holda $\lambda = -1$, $\mu = -1$ va

$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda + 2\mu + \frac{1}{2} = 1 + 1 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

bo'lib, soddalashtirilgan tenglama

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - \frac{3}{2}v = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

7–MISOL. Ushbu tenglamani kanonik ko'rinishga keltiring.

$$u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_x + u_y = 0.$$

YECHISH. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik (kvadratik) forma

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \lambda_3\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1\right)^2 - \lambda_3^2$$

ko'rinishda bo'ladi.

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \lambda_3, \quad \mu_2 = -\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2, \quad \mu_3 = \lambda_3$$

deb belgilaymiz va Q forma

$$Q = \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2$$

kanonik ko'rinishga keladi. Demak, berilgan tenglama giperbolik tipga tegishli, chunki $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = -1$.

Shunday qilib, quyidagi xosmas almashtirish

$$\lambda_1 = \mu_1 - \mu_2 - \mu_3, \quad \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_3, \quad \lambda_3 = \mu_3$$

Q kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltiradi.

Yuqoridagi xosmas almashtirish matritsasi

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ga teng.

Tenglamani kanonik ko'rinishga keltiruvchi xosmas affin almashtirish matritsasi $\mathbf{M}$ matritsaga qo'shma

$$\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

bo'ladi. Demak, tenglamani kanonik ko'rinishga keltiruvchi xosmas affin almashtirish quyidagi

$$\xi = x + y, \quad \eta = -x + y, \quad \zeta = -x - y + z$$

ko'rinishda topiladi.

Endi $u(\xi, \eta, \zeta)$ funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblaymiz:

$$u_x = u_\xi - u_\eta - u_\zeta, \quad u_y = u_\xi + u_\eta - u_\zeta,$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta},$$
$$u_{xz} = u_{\eta\zeta} - u_{\eta\zeta} - u_{\zeta\zeta},$$
$$u_{yz} = u_{\xi\zeta} + u_{\eta\zeta} - u_{\zeta\zeta}.$$

Topilgan ifodalarni tenglamaga qo'yib, soddalashtirsak, quyidagi

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} + 2u_\eta = 0$$

kanonik tenglamaga ega bo'lamiz.

8–MISOL. Quyidagi tenglamalarning

$$a) \quad u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + u_y = 0;$$

$$b) \quad u_{xy} - xu_x + u = 0.$$

umumiy echimlarini toping.

YECHISH. a) Berilgan tenglama giperbolik tipga tegishli, chunki $\delta = b^2 - ac = 9 - 8 = 1 > 0$. Unga mos xarakteristik tenglama

$$(dy)^2 - 3dxdy + 2(dx)^2 = 0 \quad \text{yoki} \quad dy - dx = 0, \quad dy - 2dx = 0$$

bo'lib, ularni integrallasak,

$$y - x = c_1, \quad y - 2x = c_2$$

xarakteristikalar oilasiga ega bo'lamiz.

$$\xi = y - x, \quad \eta = y - 2x \tag{23}$$

tengliklar yordamida yangi o'zgaruvchilar kiritib, hosilalarni hisoblaymiz:

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta};$$
$$u_{xy} = -u_{\xi\xi} - 3u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta};$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta};$$
$$u_x = -u_\xi - 2u_\eta; \quad u_y = u_\xi + u_\eta.$$

Bu ifodalarni berilgan tenglamaga qo'yib, ushbu

$$u_{\xi\eta} + u_\eta = 0 \tag{24}$$

kanonik tenglamaga ega bo'lamiz.

Oxirgi tenglamada

$$v(\xi,\eta) = \frac{\partial}{\partial\eta}u(\xi,\eta) \tag{25}$$

yangi noma'lum funksiya kiritib,

$$\frac{dv}{d\xi} + v = 0$$

chiziqli tenglamani olamiz.

Bu tenglamani integrallab,

$$v(\xi,\eta) = \varphi_0(\eta)e^{-\xi} \tag{26}$$

yechimni hosil qilamiz.

(26) ifodani (25) tenglikka qo'yib,

$$\frac{du}{d\eta} = \varphi_0(\eta)e^{-\xi}$$

tenglamaga ega bo'lamiz va uni integrallab, (24) tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$u(\xi,\eta) = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta)e^{-\xi},$$

bu yerda $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\eta)$ – ixtiyoriy funksiyalar.

Oxirgi formulada (23) tengliklar yordamida eski x, y o'zgaruvchilarga qaytib, berilgan tenglamaning

$$u(x,y) = \varphi_1(y-x) + e^{x-y}\varphi_2(y-2x)$$

umumiy yechimini topamiz.

Bunda $\varphi_1(y-x)$, $\varphi_2(y-2x)$ – ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi ixtiyoriy funksiyalar.

b) Tenglamaning umumiy yechimini topish uchun

$$v(x,y) = u_x(x,y)$$

ko'rinishda yangi funksiya kiritamiz. U holda berilgan tenglama

$$v_y - xv + u = 0$$

ko'rinishga keladi, bu yerda $u(0,y) = -v_y(0,y)$ tenglik o'rinli.

Oxirgi tenglamani x o'zgaruvchi bo'yicha differensiallaymiz va natijada $v(x,y)$ funksiyaga nisbatan quyidagi

$$v_{xy} - xv_x = 0 \tag{27}$$

tenglamani olamiz.

Buning umumiy yechimi yuqoridagi kabi topiladi. (27) tenglamada $v_x = z(x,y)$ almashtirish bajaramiz.

U holda

$$z_y - xz = 0$$

tenglama hosil bo'ladi.

x o'zgaruvchini fiksirlaymiz va hosil bo'lgan oddiy

$$\frac{dz}{z} = xdy$$

differensial tenglamani integrallaymiz. Natijada

$$z(x,y) = \varphi_0(x)e^{xy}$$

yoki $v(x,y)$ funksiyaga o'tib,

$$v_x = \varphi_0(x)e^{xy}$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Bundan

$$v(x,y) = \int\limits_0^x \varphi_0(s)e^{sy}ds + \varphi_1(y)$$

hosil bo'ladi. $v = u_x$ bo'lgani uchun berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$u(x,y) = \int\limits_0^x dt \int\limits_0^t \varphi_0(s)e^{sy}ds + x\varphi_1(y) + \varphi_2(y) \tag{28}$$

ko'rinishda topiladi.

Ikki o'lchovli integralda integrallash tartibini almashtirib, uni bir o'lchovli integralga keltiramiz

$$u(x,y) = \int_0^x (x-s)\varphi_0(s)e^{2y}ds + x\varphi_1(y) + \varphi_2(y).$$

Bu erda $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ — ixtiyoriy funksiyalar.

Shuni ta'kidlash muhimki, giperbolik tipdagi tenglamalarni kanonik ko'rinishga keltirish, bunday tenglamalarni integrallash usullaridan biri hisoblanadi.

Nazorat uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning tipi qanday aniqlanadi?
2. Nima uchun tenglamaning tipi nuqtada aniqlanadi?
3. Tenglamaning tipi nimalarga bog'liq bo'ladi?
4. Qanday tenglamalar giperbolik, parabolik va elliptik tipdagi tenglamalar deyiladi?
5. O'zgarmas koeffitsientli tenglamalarning tipi haqida nima deyish mumkin?
6. Qanday tenglamaga aralash tipdagi tenglama deyiladi?
7. Tenglamani kanonik ko'rinishga keltirishda yangi $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ o'zgaruvchilar qanday shartlarni qanoatlantiradi va nima uchun?
8. Xarakteristik tenglama nima va u qanday olinadi?
9. Yangi o'zgaruvchilar kiritilganda qaralayotgan giperbolik tenglamaning koeffitsientlari qanday ko'rinishga keladi?
10. Yangi o'zgaruvchilar kiritilganda qaralayotgan parabolik tenglamaning koeffitsientlari qanday ko'rinishga keladi?
11. Elliptik tenglamalarda yangi o'zgaruvchilar kiritilganda uning koeffitsientlari qanday ko'rinishda bo'ladi?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

2.1. Quyidagi tenglamalarning tipini aniqlang va kanonik ko'rinishga keltiring.

1) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0;$
2) $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0;$
3) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u = 0;$
4) $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0;$
5) $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0;$
6) $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0;$
7) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$
8) $(1+x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1+x^2)u_x = 0.$
9) $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} - 2yu_x + ye^{\frac{y}{x}} = 0.$
10) $u_{xx} - 4xu_{xy} + 8x^2 u_{yy} - \dfrac{1}{x}u_x + u_y = 0.$

2.2. Quyidagi tenglamalarni tipi o'zgarmaydigan sohada kanonik ko'rinishga keltiring.

1) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0.$
2) $3u_{xy} - 2u_{xz} - u_{yz} - u = 0.$
3) $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} + 3u_x = 0.$
4) $3u_{yy} - 2u_{xy} - 2u_{yz} + 4u = 0.$
5) $2u_{xx} + 5u_{yy} + 2u_{zz} - 6u_{xy} - 4u_{xz} + 6u_{yz} - 3u + y - 2z = 0.$

2.3. Berilgan tenglamalarni kanonik ko'rinishga keltiring va ularni soddalashtiring.

1) $au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0, \quad a, b, c = const.$
2) $u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma = const.$
3) $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0.$
4) $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0.$
5) $u_{xy} + u_{xx} - u_y - 10u + 4x = 0.$

2.4. Quyidagi tenglamalarning umumiy yechimini toping

1) $u_x - 2u_y = 0$

2) $3u_x - 2u_y + u = 0$

3) $2u_x - u_y + 2u = 0$

4) $u_x + 2u_y = \sin(x+y)$

5) $3u_x - 4u_y + \sin(4x-3y)u = 0.$

6) $u_{xy} + au_x = 0$

7) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$

8) $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2yu_{yy} + 3u_x + u_y = 2.$

9) $u_{xy} + au_x + bu_y + abu = 0.$

10) $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 u_x\right) = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

III BOB
GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR

Mexanika va fizikaning tebranish jarayonlari bilan bog'liq bir qator muammolari, masalan, tor va membrananing tebranishi, gaz, elektromexanik to'lqinlarning tarqalishi kabi jarayonlar giperbolik tipdagi tenglamalar orqali ifodalanadi. Bunday tenglamalar bilan ifodalanuvchi jarayonlarinng o'ziga xos tomoni, tebranishlarning chekli tezlikda tarqalishidir.

8–§. Tor tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasi. D'alamber formulasi

Mexanika va fizikaning tebranish jarayonlari bilan bog'liq bir qator masalalari giperbolik tipdagi tenglama bilan ifodalanadi. Ushbu paragrafda tor tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasining qo'yilishi, D'alamber formulasi va uning fizikaviy talqini, Koshi masalasi yechimining turg'unligini isbotlaymiz. Shu bilan birga bir jinsli bo'lmagan tor tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimni keltiramiz.

Koshi masalasining qo'yilishi.

Eng sodda giperbolik tipdagi tenglama ushbu

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a = const, \tag{1}$$

ko'rinishda bo'lib, u *tor tebranish tenglamasi* yoki *to'lqin tarqalish tenglamasi* deyiladi.

To'lqin tarqalish nazariyasida Koshi masalasi muhim o'rin egallaydi. (x,t) tekislikdagi biror $D = \{(x,t) : -\infty < x < +\infty, t > 0\}$ sohada (1) tor tebranish tenglamasini qaraylik.

Ta'rif. Agar $u(x,t)$ funksiya D sohada aniqlangan uzluksiz va [illegible] marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, shu sohada (1) tenglamani qanoatlantirsa, bu funksiya tor tebranish tenglamasining D [illegible]gi *regulyar yechimi* deyiladi.

Koshi masalasi. Tor tebranish tenglamasining yopiq $\overline{D}$ sohada aniqlangan, uzluksiz va

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimini toping.

Bu yerda $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

Tor tenglamasi uchun Koshi masalasi cheksiz uzunlikdagi tor tebranishining matematik modeli bo'lib, uning chetki nuqtalari torning boshqa qismlarining tebranishiga ta'sir qilmaydi. Shuning uchun ham (1) (2) Koshi masalasida chegaraviy shartlar qatnashmaydi.

Tor tebranish tenglamasining umumiy yechimi.

Tor tebranish tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun (1) tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$a(x,t)(dt)^2 - 2b(x,t)dtdx + c(x,t)(dx)^2 = 0,$$

bu yerda $a(x,t) = a^2$, $b(x,t) = 0$, $c(x,t) = -1$ va $\delta = a^2 > 0$. Demak, (1) tor tebranish tenglamasi $R^2_{x,t}$ tekislikda giperbolik tipdagi tenglama ekan. U holda

$$\frac{dt}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{\delta}}{a} = \pm\frac{1}{a} \qquad \text{yoki} \qquad dx = \pm a dt$$

bo'lib, u ikkita haqiqiy va har xil

$$x + at = c_1 = const, \qquad x - at = c_2 = const$$

yechimlarga ega. Bu formulalar bilan aniqlangan to'g'ri chiziqlar tor tebranish tenglamasining xarakteristikalari oilasini ifodalaydi.

Quyidagi

$$\xi = x + at, \qquad \eta = x - at \tag{3}$$

tengliklarga asosan yangi ξ, η o'zgaruvchilar kiritamiz va u_{tt} ha... u_{xx} xususiy hosilalarni

$$u_{tt} = a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta}$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

topamiz. Bu hosilalarni (1) tenglamaga qo'yib, soddalashtiramiz. Natijada (1) tenglama ushbu

$$u_{\xi\eta} = 0 \tag{4}$$

kanonik ko'rinishga keladi.

Oxirgi tenglamani ketma-ket integrallab, kanonik tenglamaning umumiy yechimini

$$u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta) \tag{5}$$

ko'rinishda topamiz.

Bunda $f(\xi)$, $g(\eta)$ – ixtiyoriy funksiyalar.

Agar $g(\eta) \in C^1(R)$ bo'lsa, u holda (5) funksiya (4) tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni

$$g(\eta) \in C^1(R) \quad \text{va} \quad u_{\xi\eta} = 0$$

yoki

$$u_\eta = g'(\eta) \quad \text{va} \quad g(\eta) \in C^2(R).$$

Demak, $f(\xi)$ va $g(\eta) \in C^2(R)$ bo'lsa, u holda (5) funksiya (4) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Endi (5) formulada ξ va η o'zgaruvchilardan eski x, t o'zgaruvchilarga qaytib, (1) tenglamaning umumiy yechimini olamiz:

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at), \tag{6}$$

bu yerda $f(x+at)$ va $g(x-at)$ – ixtiyoriy ikki marta uzluksiz hosilalarga ega funksiyalar.

Xuddi yuqoridagi kabi (6) formulada $f(x+at)$ va $g(x-at) \in C^2(R)$ bo'lsa, u holda (6) funksiya (1) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Endi (6) umumiy yechimning fizikaviy xossasiga to'htalib o'taylik. Avvalo, $f(\xi) = 0$ bo'lsin. U holda torning siljishi

$$u_1(x,t) = g(x-at), \tag{7}$$

KOSHI MASALASI. Tor tebranish tenglamasining yopiq $\overline{D}$ sohada aniqlangan, uzluksiz va

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\quad u_t(x,0)=\varphi_1(x),\quad -\infty<x<+\infty, \tag{2}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimini toping.

Bu yerda $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

Tor tenglamasi uchun Koshi masalasi cheksiz uzunlikdagi tor tebranishining matematik modeli bo'lib, uning chetki nuqtalari torning boshqa qismlarining tebranishiga ta'sir qilmaydi. Shuning uchun ham (1)–(2) Koshi masalasida chegaraviy shartlar qatnashmaydi.

TOR TEBRANISH TENGLAMASINING UMUMIY YECHIMI.

Tor tebranish tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun (1) tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$a(x,t)(dt)^2-2b(x,t)dtdx+c(x,t)(dx)^2=0,$$

bu yerda $a(x,t)=a^2$, $b(x,t)=0$, $c(x,t)=-1$ va $\delta=a^2>0$. Demak, (1) tor tebranish tenglamasi $R^2_{x,t}$ tekislikda giperbolik tipdagi tenglama ekan. U holda

$$\frac{dt}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{\delta}}{a}=\pm\frac{1}{a}\qquad \text{yoki}\qquad dx=\pm a dt$$

bo'lib, u ikkita haqiqiy va har xil

$$x+at=c_1=const,\qquad x-at=c_2=const$$

yechimlarga ega. Bu formulalar bilan aniqlangan to'g'ri chiziqlar tor tebranish tenglamasining xarakteristikalari oilasini ifodalaydi.

Quyidagi

$$\xi=x+at,\quad \eta=x-at \tag{3}$$

tengliklarga asosan yangi ξ, η o'zgaruvchilar kiritamiz va u_{tt} hamda u_{xx} xususiy hosilalarni

$$u_{tt}=a^2u_{\xi\xi}-2a^2u_{\xi\eta}+a^2u_{\eta\eta}$$

[illegible]

Faraz qilaylik, torning tebranishini kuzatuvchi $t = 0$ vaqtda torning x nuqtasidan chiqib Ox o'qining musbat yo'nalishi bo'yicha a tezlik bilan harakatlansin, ya'ni uning abssissasi t vaqtda $x + at$ formula bilan aniqlanadi. Bunda kuzatuvchi uchun $u_1(x,t) = g(x - at)$ formula bilan aniqlangan torning siljishi $g(x)$ ga teng va doim o'zgarmas bo'lib qoladi. (7) funksiya bilan aniqlangan jarayon *to'g'ri to'lqinning tarqalishi* deyiladi.

Xuddi shunday $u_2(x,t) = f(x + at)$ yechim teskari to'lqinning tarqalishini ifodalaydi, ya'ni to'lqin Ox o'qining manfiy yo'nalishi bo'ylab a tezlik bilan tarqaladi. U holda (6) formula ikkita to'g'ri va teskari to'lqinlarning yig'indisi (superpozitsiyasi)dan iborat. Bu $t = 0$ vaqtda torning holatini grafik usulda qurish imkoniyatini beradi. Endi $t = 0$ vaqtda to'g'ri va teskari to'lqinlarni ifodalovchi $u_1(x,0) = g(x)$ va $u_2(x,0) = f(x)$ funksiyalarning grafigini yasaylik. Keyin ularning shaklini o'zgartirmasdan a tezlik bilan har ikki tomonga siljitamiz, ya'ni $u_1 = g(x)$ funksiyani o'ng tomonga va $u_2 = f(x)$ ni esa chap tomonga a tezlik bilan siljitamiz. Torning t vaqtdagi grafigi yuqoridagi surilgan grafiklar ordinatalarining algebraik yig'indisidan iborat bo'ladi.

Koshi masalasi yechimini qurish.

Umumiy yechimdagi $f(x + at)$ va $g(x - at)$ funksiyalarni topish uchun (2) boshlang'ich shartlardan foydalanamiz

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi_0(x),$$

$$u_t(x,0) = af'(x) - ag'(x) = \varphi_1(x)$$

va quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi_0(x), \\ f'(x) - g'(x) = \dfrac{1}{a}\varphi_1(x). \end{cases} \quad (8)$$

Bu sistemaning ikkinchi tenglamasida x ni z bilan alma[illegible]

uni noldan x gacha integrallaymiz. Natijada ushbu

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi_0(x), \\ f(x) - g(x) = \dfrac{1}{a}\int\limits_0^x \varphi_1(z)dz + c. \end{cases}$$

sistemani olamiz. Bunda $c = f(0) - g(0)$ – ixtiyoriy o'zgarmas.

Oxirgi sistemadan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarni topamiz:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}\varphi_0(x) + \dfrac{1}{2a}\int\limits_0^x \varphi_1(z)dz + \dfrac{c}{2} \\ g(x) = \dfrac{1}{2}\varphi_0(x) - \dfrac{1}{2a}\int\limits_0^x \varphi_1(z)dz - \dfrac{c}{2} \end{cases} \quad (9)$$

(9) formulada $f(x)$ funksiyaning x argumentini $x + at$ bilan, $g(x)$ funksiyaning x agumentini esa $x - at$ bilan almashtiramiz va (6) umumiy yechimga qo'yib,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi_0(x + at) + \varphi_0(x - at)\Big] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z)dz, \quad (10)$$

ifodani hosil qilamiz.

Bu bir jinsli tor tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimini ifodalovchi *D'alamber formulasi* deyiladi.

Koshi masalasining qo'yilishida $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ funksiyalarni yetarlicha silliq bo'lsin deb talab qilgan edik. Endi bu funksiyalarning qaysi sinfga tegishli ekanligini aniqlaylik.

Agar $\varphi_0(x) \in C^2(R^1)$, $\varphi_1(x) \in C^1(R^1)$ bo'lsa, u holda (10) formula bilan aniqlangan $u(x,t)$ funksiya (1) tor tebranish tenglamasini va (2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantirishini bevosita tekshirib ishonch hosil qilish mumkin.

Haqiqatan ham, (10) formulada $t = 0$ desak, u holda

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \qquad x \in R$$

bo'ladi. (10) formuladan t bo'yicha hosila olamiz

$$u_t [illegible] \frac{[illegible]'(x + at) - a\varphi_0'(x - at)}{2} + \frac{1}{2a}\Big[a\varphi_1(x + at) + a\varphi_1(x - at)\Big],$$

formula bilan aniqlanadi.

Faraz qilaylik, torning tebranishini kuzatuvchi $t = 0$ vaqtda torning $x = c$ nuqtasidan chiqib Ox o'qining musbat yo'nalishi bo'ylab a tezlik bilan harakatlansin, ya'ni uning abssissasi t vaqtda $x = at + c$ formula bilan aniqlanadi. Bunda kuzatuvchi uchun $u_1(x,t) = g(x - at)$ formula bilan aniqlangan torning siljishi $g(c)$ ga teng va doim o'zgarmas bo'lib qoladi. (7) funksiya bilan aniqlangan jarayon *to'g'ri to'lqinning tarqalishi* deyiladi.

Xuddi shunday $u_2(x,t) = f(x + at)$ yechim teskari to'lqinning tarqalishini ifodalaydi, ya'ni to'lqin Ox o'qining manfiy yo'nalishi bo'ylab a tezlik bilan tarqaladi. U holda (6) formula ikkita to'g'ri va teskari to'lqinlarning yig'indisi (superpozitsiyasi)dan iborat. Bu $t = 0$ vaqtda torning holatini grafik usulda qurish imkoniyatini beradi. Endi $t = 0$ vaqtda to'g'ri va teskari to'lqinlarni ifodalovchi $u_1(x,0) = g(x)$ va $u_2(x,0) = f(x)$ funksiyalarning grafigini yasaylik. Keyin ularning shaklini o'zgartirmasdan a tezlik bilan har ikki tomonga siljitamiz, ya'ni $u_1 = g(x)$ funksiyani o'ng tomonga va $u_2 = f(x)$ ni esa chap tomonga a tezlik bilan siljitamiz. Torning t vaqtdagi grafigi yuqoridagi surilgan grafiklar ordinatalarining algebraik yig'indisidan iborat bo'ladi.

Koshi masalasi yechimini qurish.

Umumiy yechimdagi $f(x + at)$ va $g(x - at)$ funksiyalarni topish uchun (2) boshlang'ich shartlardan foydalanamiz

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi_0(x),$$

$$u_t(x,0) = af'(x) - ag'(x) = \varphi_1(x)$$

va quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi_0(x), \\ f'(x) - g'(x) = \dfrac{1}{a}\varphi_1(x). \end{cases}$$

Bu sistemaning ikkinchi tenglamasida x ni z bilan al...

uni noldan x gacha integrallaymiz. Natijada ushbu

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi_0(x), \\ f(x) - g(x) = \dfrac{1}{a}\int\limits_0^x \varphi_1(z)dz + c. \end{cases}$$

sistemani olamiz. Bunda $c = f(0) - g(0)$ – ixtiyoriy o'zgarmas.

Oxirgi sistemadan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarni topamiz:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}\varphi_0(x) + \dfrac{1}{2a}\int\limits_0^x \varphi_1(z)dz + \dfrac{c}{2} \\ g(x) = \dfrac{1}{2}\varphi_0(x) - \dfrac{1}{2a}\int\limits_0^x \varphi_1(z)dz - \dfrac{c}{2} \end{cases} \tag{9}$$

(9) formulada $f(x)$ funksiyaning x argumentini $x + at$ bilan, $g(x)$ funksiyaning x agumentini esa $x - at$ bilan almashtiramiz va (6) umumiy yechimga qo'yib,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi_0(x + at) + \varphi_0(x - at)\Big] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z)dz, \tag{10}$$

ifodani hosil qilamiz.

Bu bir jinsli tor tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimini ifodalovchi *D'alamber formulasi* deyiladi.

Koshi masalasining qo'yilishida $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ funksiyalarni yetarlicha silliq bo'lsin deb talab qilgan edik. Endi bu funksiyalarning qaysi sinfga tegishli ekanligini aniqlaylik.

Agar $\varphi_0(x) \in C^2(R^1)$, $\varphi_1(x) \in C^1(R^1)$ bo'lsa, u holda (10) formula bilan aniqlangan $u(x,t)$ funksiya (1) tor tebranish tenglamasini va (2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantirishini bevosita tekshirib ishonch hosil qilish mumkin.

Haqiqatan ham, (10) formulada $t = 0$ desak, u holda

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \qquad x \in R$$

...ladi. (10) formuladan t bo'yicha hosila olamiz

$$... = \frac{a\varphi_0'(x + at) - a\varphi_0'(x - at)}{...} + \frac{1}{...}\Big[a\varphi_1(x + at) + a\varphi_1(x - at)\Big],$$

keyin $t \to 0$ bo'lganda

$$u_t(x,0) \to \varphi_1(x), \quad x \in R$$

ekanligini ko'ramiz. Bu tor tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasining yechimi mavjud ekanligini ko'rsatadi. (10) formulani keltirib chiqarish tor tebranish tenglamasining (6) umumiy yechimiga asoslangan va barcha bosqichlar bir qiymatli bajarildi. Shuning uchun yechimning yagonaligi esa uning qurish usulidan ham kelib chiqadi.

KOSHI MASALASI YECHIMINING TURG'UNLIGI.

Faraz qilaylik, $u_0(x,t)$ funksiya (1) tenglamaning quyidagi

$$u(x,0) = \varphi_0^0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1^0(x), \quad x \in R$$

boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi yechimi bo'lsin. Xuddi yuqoridagi kabi $u_0(x,t)$ funksiya ham (10) formula orqali quriladi.

Agar

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0^0(x)| < \delta, \quad |\varphi_1(x) - \varphi_1^0(x)| < \delta \quad \forall x \in R$$

bo'lsa, u holda $\forall x \in R$, $t \in [0, T]$, T – ixtiyoriy musbat son uchun $u(x,t)$ va $u_0(x,t)$ yechimlarning ayrimasini baholaymiz.

$$|u(x,t) - u_0(x,t)| \leq \frac{1}{2}\left|\varphi_0(x+at) - \varphi_0^0(x+at)\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left|\varphi_0(x-at) - \varphi_0^0(x-at)\right| + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\left|\varphi_1(z) - \varphi_1^0(z)\right|dz <$$

$$< \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2a}\delta\int\limits_{x-at}^{x+at} dz =$$

$$= \delta + \delta\frac{1}{2a}2at = \delta(1+t) < \delta(1+T), \quad (11)$$

Faraz qilaylik, ε ixtiyoriy musbat son va $\delta = \varepsilon/(1+T)$ bo...

U holda (11) tengsizlikdan $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday δ ...

son topiladiki, barcha $x \in R$ va $t \in [0, T]$ larda

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0^0(x)| < \delta, \quad |\varphi_1(x) - \varphi_1^0(x)| < \delta$$

shartlar bajarilganda $|u(x,t) - u_0(x,t)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bundan, tor tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasining yechimi berilganlarga uzluksiz bog'liq ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilab, quyidagi teorema isbotlandi:

TEOREMA. Agar $\varphi_0(x) \in C^2(R^1)$, $\varphi_1(x) \in C^1(R^1)$ bo'lsa, u holda tor tebranish tenglama uchun Koshi masalasining yechimi mavjud, yagona va turg'un bo'ladi, ya'ni (1)–(2) masalaning $u(x,t)$ yechimi (10) formula bilan aniqlanadi.

Ma'lum bir masalalarni yechishda $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ funksiyalar teoremaning shartlarini bajarmasligi mumkin. Bunda tor tebranish tenglamasi uchun (1)–(2) Koshi masalasining regulyar yechimi tushunchasini kiritib bo'lmaydi. Bunday hollarda umumlashgan yechim tushunchasi kiritiladi.

TA'RIF. Tor tebranish tenglamasi uchun (1)–(2) Koshi masalasining umumlashgan yechimi deb, (1) tenglamaning

$$u_n(x,0) = \varphi_{n0}(x), \quad u_{nt}(x,0) = \varphi_{n1}(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u_n(x,t)$ regulyar yechimlarning tekis yakinlashuvchi ketma-ketligining limiti bo'lgan $u(x,t)$ funksiyaga aytiladi.

Bu yerda $\varphi_{n0}(x) \in C^2(R^1)$, $\varphi_{n1}(x) \in C^1(R^1)$ va bu funksiyalar sonlar o'qining ixtiyoriy $[\alpha, \beta]$ segmentida $\varphi_0(x)$ va $\varphi_1(x)$ funksiyalarga tekis yaqinlashuvchi ketma-ketliklar, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{n0}(x) \rightrightarrows \varphi_0(x), \qquad \lim_{n\to\infty}\varphi_{n1}(x) \rightrightarrows \varphi_1(x).$$

Agar $\varphi_0(x)$, $\varphi_{n1}(x) \in C(R^1)$ bo'lsa, u xolda (1)–(2) Koshi masalasining umumlashgan yechimi mavjud, yagona va (10) formula bilan ifodalanishini ko'rsatish qiyin emas.

KOSHI MASALASI YECHIMINING FIZIKAVIY TALQINI.

Tor tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasining (10) formula bilan aniqlangan yechimi boshlang'ich tezlik bo'yicha torning boshlang'ich siljishini tarqalish jarayonini ifodalaydi.

Tor tebranish tenglamasining (9) umumiy yechimning ...aviy xususiyatiga asosan (10) formula ikkita to'g'ri to'lqinning

... $f(x+at)+g(x-at)$, bulardan biri ... shu tezlik bilan chap ...

... bunda

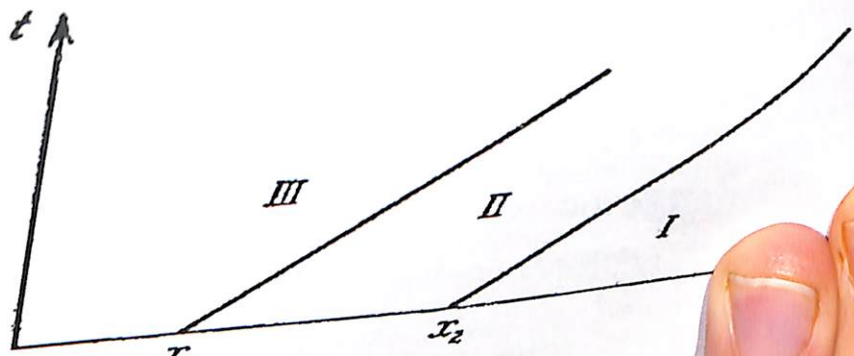
$$f(x+at) = \frac{1}{2}\varphi_0(x+at) + F(x+at),$$

$$g(x-at) = \frac{1}{2}\varphi_0(x-at) = F(x-at)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu yerda

$$F(\xi) = \frac{1}{2a}\int_0^{\xi}\varphi_1(s)ds.$$

(x,t) o'zgaruvchilar tekisligida $x+at=c_1=const$ va $x-at=c_2=const$ to'g'ri chiziqlar (1) tenglamaning xarakteristikalari bo'lgani uchun $u(x,t)=\varphi_0(x+at)$ funksiya $x+at=c_1$ xarakteristika bo'ylab o'zgarmas va bu qiymat $\varphi_0(c_1)$ ga teng. Xuddi shunday $u(x,t)=\varphi_0(x-at)$ funksiya $x-at=c_2=const$ xarakteristika bo'ylab o'zgarmasdir.



5 — shakl.

Faraz qilaylik, $\varphi_0(x)$ funksiya biror (x_1, x_2) intervalda noldan farqli va intervaldan tashqarida nolga teng bo'lsin. $(x_1, 0)$ va $(x_2, 0)$ nuqtalardan (1) tenglamaning $x+at=c_1$ va $x-at=c_2$ xarakteristikalarini o'tkazamiz. Bu xarakteristikalar $t>0$ yarim tekislikni uchta I, II va III bo'lakka bo'ladi (5–shakl).

$u(x,t)=\varphi_0(x-at)$ funksiya $II: x_1 < x-at < x_2$ sohada noldan farqli, bunda $x-at=x_1$ va $x+at=x_2$ xarakteristikalar o'ng tomonga a tezlik bilan tarqalayotgan to'g'ri to'lqinning oldingi va orqa fronti deb yuritiladi.

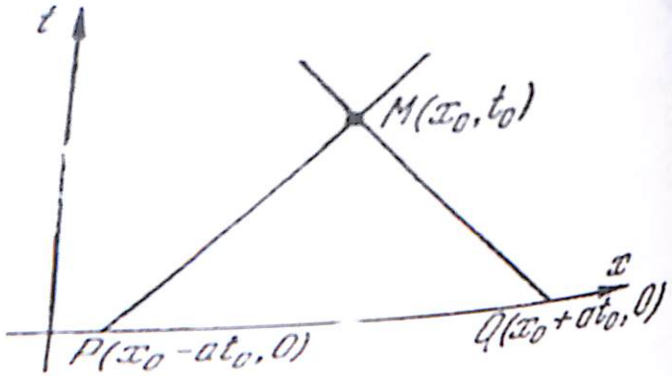
Faraz qilaylik, $M=(x_0,t_0)$ nuqta $t>0$ yarim tekislikda fiksirlangan nuqta bo'lsin. Bu nuqtadan (1) tenglamaning $x-at=x_0-at_0$ va $x+at=x_0+at_0$ xarakteristikalarini o'tkazamiz. Bu xarakteristikalar Ox o'qi bilan $P=(x_1,0)=(x_0-at_0,0)$ va $Q=(x_2,0)=(x_0+at_0,0)$ nuqtalarda kesishadi. Tor tebranish tenglamasining (6) umumiy yechimining M nuqtadagi qiymati $u(x_0,t_0)=g(x_1)+f(x_2)$ ga teng, ya'ni $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning qiymati mos ravishda MPQ uchburchak asosining $(x_1,0)$ va $(x_2,0)$ uchlaridagi qiymatlari orqali ifodalanadi (6–shakl).

Bu MP, MQ xarakteristikalar va Ox o'qida PQ kesmadan tashkil topgan MPQ uchburchak M nuktaning *xarakteristik uchburchagi* deyiladi.

Koshi masalasining yechimini ifodalovchi (10) formuladan torning x_0 nuqtasini t_0 vaqtdagi $u(x_0,t_0)$ siljishi PQ kesmada berilgan boshlang'ich holat va boshlang'ich tezlikning P va Q nuqtalardagi qiymatlariga bog'liq ekanligi ko'rinadi. (10) formulani quyidagi

$$u(M) = \frac{\varphi_0(P)+\varphi_0(Q)}{2} + \frac{1}{2a}\int_P^Q \varphi_1(s)ds$$

...aklda yozish mumkin. PQ kesmadan tashqarida berilgan boshlan-...h shartlar $u(x,t)$ yechimning M nuqtadagi qiymatiga xech qanday ...ir ko'rsatmaydi.



6 — shakl.

Demak, tor tebranish tenglamasi uchun boshlang'ich shartlar butun o'qda emas, balki PQ kesmada berilgan bo'lsa, u holda Koshi masalasining yechimi MPQ xarakteristik uchburchakning ichida aniqlanadi.

Endi Koshi masalasini bir jinsli bo'lmagan

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{12}$$

tenglama uchun qaraylik, ya'ni (12) tenglamaning

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), qquadu_t|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{2}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topaylik.

Faraz qilaylik, $t > \tau$ da $v_f(x,t;\tau)$ quyidagi yordamchi

$$(v_f)_{tt} = a^2 (v_f)_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{13}$$

$$v_f(x,\tau;\tau) = 0, \quad \frac{\partial v_f}{\partial t}(x,\tau;\tau) = f(x,\tau), \; t = \tau, \; -\infty < x < \infty \tag{14}$$

Koshi masalasining yechimi bo'lsin. D'alamber formulasiga a...

$$v_f(x,t;\tau) = v_f(x,t-\tau;\tau) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi \ldots$$

...i topamiz.

Bu formulalarda τ faqat parametr. (14) boshlang'ich shartlar $t=0$ da emas, balki $t=\tau$ da berilgan.

U holda (6) D'alamber formulasini quyidagi

$$u(x,t) = \frac{\partial v_{\varphi_0}}{\partial t}(x,t;0) + v_{\varphi_1}(x,t;0), \tag{16}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda

$$v_{\varphi_1}(x,t;0) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\xi)d\xi, \quad v_{\varphi_0}(x,t;0) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi_0(\xi)d\xi,$$

bo'lib, ular (13)–(14) masalaning $\tau = 0$ bo'lgandagi mos ravishda

$$\left.\frac{\partial v_f}{\partial t}\right|_{\tau=0} = \varphi_1(x), \qquad \left.\frac{\partial v_f}{\partial t}\right|_{\tau=0} = \varphi_0(x)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlari. Shu bilan birga tekshirib ko'rish osonki

$$\frac{\partial v_{\varphi_0}}{\partial t}(x,t;0) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{a+xt} \varphi_0(\xi)d\xi = \frac{\varphi_0(x+at)+\varphi_0(x-at)}{2},$$

bo'ladi.

Bir jinsli bo'lmagan (12) tenglamaning bir jinsli

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini (15) formuladan foydalanib, quyidagicha yozish mumkin

$$u(x,t) = a^2\int\limits_0^t v_{\varphi_0}(x,t;\tau)d\tau$$

yoki v_{φ_0} ning qiymatini o'rniga qo'yib, ushbu

$$u(x,t) = \frac{a}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

ifodani olamiz.

Shunday qilib, (12) tenglamaning (2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x+at) + \varphi_0(x-at)\right] +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z)dz + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (17)$$

formula bilan aniqlanadi. Bunda $\varphi_0''(x)$, $\varphi_1'(x)$ funksiyalar uzluksiz va $f(x,t)$ - birinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lgan funksiya, ya'ni $f(x,t) \in C^1(\overline{D})$.

1-MASALA. Ushbu

$$yu_{xx} - (x+y)u_{xy} + xu_{yy} = 0, \quad x > 0$$

tenglamaning

$$u(x,0) = x^2, \quad u_y(x,0) = 3x,$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ regulyar yechimini toping.

YECHISH. Berilgan tenglamani kanonik ko'rinishga keltirib, integrallaymiz. Natijada kanonik tenglamaning umumiy yechimi hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan yechimda x va y o'zgaruvchilarga qaytib, berilgan tenglamaning umumiy yechimini

$$u(x,y) = f_1(x+y) + f_2(x^2+y^2) \qquad (18)$$

ko'rinishda yozamiz.

Bu yerda $f_1(x+y)$ va $f_2(x^2+y^2)$ - ixtiyoriy ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar.

(18) formuladan va boshlang'ich shartlardan foydalanib, f_1 va f_2 funksiyalarni topamiz:

$$f_1(x) = \frac{3}{2}x^2 + f_1(0),$$

$$f_2(x^2) = -\frac{1}{2}x^2 - f_1(0).$$

Topilgan funksiyalarni (18) formulaga qo'yamiz, natijada berilgan masalaning quyidagi

$$u(x,y) = \frac{3}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) = x^2 + 3xy + y^2.$$

yechimiga ega bo'lamiz.

2-MASALA. Ushbu

$$2u_{xy} - e^{-x}u_{yy} = 4x \qquad (19)$$

tenglamaning

$$u(x,y)\,|_{y=x} = x^5\cos x, quadu_y(x,y)\,|_{y=x} = x^2+1 \qquad (20)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ regulyar yechimini toping.

YECHISH. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$-2dxdy - e^{-x}(dx)^2 = 0$$

bo'lib, u $x = c$, $2y - e^{-x} = c$ yechimlarga (xarakteristikalarga) ega. Yangi ξ, η o'zgaruvchilar kiritamiz

$$\xi = x, quad\eta = 2y - e^{-x}.$$

U holda (19) tenglama

$$u_{\xi\eta} = \xi$$

kanonik ko'rinishga keladi.

Oxirgi tenglamaning umumiy yechimi

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\xi^2\eta + f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

bo'ladi.

Bundan eski x, y o'zgaruvchilarga o'tsak, berilgan tenglamaning umumiy yechimini

$$u(x,y) = \frac{1}{2}x^2(2y - e^{-x}) + f_1(x) + f_2(2y - e^{-x}) \qquad (21)$$

topamiz.

Bu yerda $f_1(x)$ va $f_2(2y-e^{-x})$ ixtiyoriy funksiyalar. (21) ifodadagi $f_1(x)$ va $f_2(2y-e^{-x})$ funksiyalarni (20) shartlar yordamida aniqlaymiz:

$$f_1(x)+f_2(2x-e^{-x})+\frac{1}{2}x^2(2x-e^{-x})=x^5\cos x$$

Bundan
$$2f_2'(2x-e^{-x})+x^2=x^2+1$$

$$f_2(t)=\frac{1}{2}t+f_2(0)$$

$$f_1(x)=x^5\cos x-x^3+\frac{1}{2}x^2e^{-x}-\frac{1}{2}(2x-e^{-x})-f_2(0)$$

bo'ladi.

Topilgan ifodalarni (21) formulaga qo'yib, soddalashtirsak, (19)–(20) masalaning yechimini

$$u(x,y)=x^5\cos x+(y-x)(x^2+1)$$

ko'rinishda topamiz.

9–§. Tor tebranish tenglamasi uchun aralash masala

Biz I bobda uchlari mahkamlangan torning tebranishi haqidagi fizik masalani ikkinchi tartibli xususiy hosilali tenglama, ya'ni giperbolik tipdagi tenglama uchun chegaraviy masalaga kelishini ko'rdik. Ushbu paragrafda yuqorida aytilgan masalaning qo'yilishi, yechimning yagonaligi va mavjudligini batafsil o'rganamiz.

MASALANING QO'YILISHI. YECHIMNING YAGONALIGI.

Biror chekli $D=\{(x,t):0<x<l,\ 0<t<T\}$ sohada bir jinsli torning majburiy tebranishini ifodalovchi ushbu

$$Lu\equiv\rho u_{tt}-T_0u_{xx}=f(x,t) \tag{1}$$

jinsli bo'lmagan tor tebranish tenglamasini qaraylik, erda l – torning uzunligi, T – musbat son, ρ – torning zichligi,

T_0 - torning taranglik kuchi. $f(x,t)$ esa torga ta'sir qilayotgan tashqi kuchlarning yig'indisi.

ARALASH MASALA. Yopiq $\overline{D}$ sohada aniqlangan va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ funksiya toping:

1) $u(x,t)$ funksiya yopiq $\overline{D}$ sohada ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va $\forall(x,t)\in D$ da (1) tenglamani qanoatlantirsin, ya'ni

$$u(x,t)\in C^2(\overline{D});\quad Lu(x,t)=f(x,t),\quad \forall(x,t)\in D,$$

bo'lsin;

2) $u(x,t)$ funksiya ushbu

$$u(x,t)|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad u_t(x,t)|_{t=0}=\varphi_1(x),\quad 0\le x\le l; \tag{2}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantirsin:

3) $u(x,t)$ funksiya D sohaning chegarasida quyidagi

$$u(x,t)|_{x=0}=\mu_1(t),\quad u(x,t)|_{x=l}=\mu_2(t),\quad 0\le t\le T; \tag{3}$$

shartlarni qanoatlantirsin; bu yerda $f(x,t)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\mu_1(t)$ va $\mu_2(t)$ berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

1-TEOREMA. Agar (1)–(3) aralash masalaning yechimi mavjud bo'lsa, u holda bu yechim yagona bo'ladi.

ISBOT. Faraz qilaylik, (1)–(3) masala ikkita $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ yechimlarga ega bo'lsin. U holda bu yechimlarning ayirmasi $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)\in C^2(\overline{D})$ bo'lib, $v(x,t)$ funksiya bir jinsli

$$Lu=L(u_1-u_2)=Lu_1-Lu_2=f(x,t)-f(x,t)=0 \tag{4}$$

tor tebranish tenglamasini hamda bir jinsli boshlang'ich

$$\begin{aligned} u(x,t)|_{t=0}&=[u_1(x,t)-u_2(x,t)]|_{t=0}=u_1(x,t)|_{t=0}-u_2(x,t)|_{t=0}=\\ &=\varphi_0(x)-\varphi_0(x)=0,\qquad 0\le x\le l;\\ u_t(x,t)|_{t=0}&=[u_{1t}(x,t)-u_{2t}(x,t)]|_{t=0}=u_{1t}(x,t)|_{t=0}-u_{2t}(x,t)|_{t=0}=\\ &=\varphi_1(x)-\varphi_1(x)=0,\qquad 0\le x\le l; \end{aligned} \tag{5}$$

va chegaraviy

$$u(x,t)|_{x=0} = [u_1(x,t) - u_2(x,t)]|_{x=0} = u_1(x,t)|_{x=0} - u_2(x,t)|_{x=0} =$$
$$= \mu_1(t) - \mu_1(t) = 0; \qquad 0 < t < T; \tag{7}$$
$$u(x,t)|_{x=l} = [u_1(x,t) - u_2(x,t)]|_{x=l} = u_1(x,t)|_{x=l} - u_2(x,t)|_{x=l} =$$
$$= \mu_2(t) - \mu_2(t) = 0; \qquad 0 < t < T. \tag{8}$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Bir jinsli (4)–(8) masalaning $u(x,t)$ yechimi $\forall(x,t) \in \overline{D}$ bo‘lganda aynan nolga teng ekanligini isbot qilamiz.

Buning uchun quyidagi

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx. \tag{9}$$

integralni qaraylik.

Bu integral torning bir jinsli chegaraviy shartlar bilan erkin tebranish energiyasi saqlanish qonunining matematik ifodasi bo‘lib, u torning *to‘la energiyasi deyiladi*.

Chunki torning t vaqtdagi $\Delta x = dx$ elementining kinetik energiyasi

$$K(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \rho\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Torning t vaqtdagi $\Delta x = dx$ elementining potensial energiyasi taranglik kuchining bajargan ishi bo‘lib, u quyidagi

$$\Pi(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l T_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx$$

bilan aniqlanadi.

[illegible]ak, (9) formula torning ko‘ndalang tebranishining to‘la [illegible]o‘lib, u torning *energiyalari integrali* deyiladi.

Endi (9) integralning t vaqtga bog‘liq emasligini ko‘raylik. Buning uchun (9) formulaning t bo‘yicha hosilasini hisoblaymiz:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int\limits_0^l \Big(\rho u_t u_{tt} + T_0 u_x u_{xt}\Big)dx. \tag{10}$$

Bir jinsli chegaraviy shartlardan

$$u_t(0,t) = 0, \qquad u_t(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu shartlarni inobatga olib (10) formulaning ikkinchi qo‘shiluvchisini x bo‘yicha 0 dan l gacha bo‘laklab integrallaymiz, natijada

$$\int\limits_0^l T_0 u_x u_{xt} dx = T_0 u_x u_t\Big|_0^l - \int\limits_0^l T_0 u_t u_{xx} dx = -\int\limits_0^l T_0 u_t u_{xx} dx, \tag{11}$$

ifodani olamiz. Topilgan (11) ifodani (10) formulaga qo‘yib, bir jinsli (4) tor tebranish tenglamasini inobatga olsak,

$$E'(t) = \int\limits_0^l u_t(\rho u_{tt} - T_0 u_{xx})dx = \int\limits_0^l u_t Lu dx = 0$$

tenglikni olamiz.

Oxirgi tenglikdan $\forall t \in [0,T]$ uchun $E(t) = const$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun bir jinsli bo‘lmagan boshlang‘ich shartlarda

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}\right)^2\right]dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^l [\rho(\varphi_1(x))^2 + T_0(\varphi_0(x))^2]dx. \tag{12}$$

... uchlari mahkamlangan torning ... ixtiyoriy vaqtda o'zgarmas ... teng bo'ladi. ... (12) formula ...

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx = 0$$

... faqat va faqat $\forall (x,t) \in \overline{D}$ uchun ... $u(x,t) = 0$ bo'lganda o'rinli. Bundan esa $\overline{D}$ yopiq ... kelib chiqadi. Bir jinsli shartlarga ko'ra $\overline{D}$ sohada $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, farazimiz noto'g'ri ekan. Bu ziddiyat ... tenglamasi uchun qo'yilgan aralash masala yechimining yagona ekanligini isbotlaydi.

YECHIMNING BERILGANLARGA UZLUKSIZ BOG'LIQLIGI. Faraz qilaylik, D sohada (1) tenglama bir xil chegaraviy shartlarni va

$$u_1(x,t)|_{t=0} = \varphi_0^1(x), \quad u_{1t}(x,t)|_{t=0} = \varphi_1^1(x);$$

$$u_2(x,t)|_{t=0} = \varphi_0^2(x), \quad u_{2t}(x,t)|_{t=0} = \varphi_1^2(x);$$

boshlang'ich shartlarni qanotalantiruvchi $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ yechimlari bo'lsin.

2-TEOREMA. Agar

$$\varphi_0^{(1)}(x) - \varphi_1^{(1)}(x) = \varphi_0(x), \quad \varphi_0^{(2)}(x) - \varphi_1^{(2)}(x) = \varphi_1(x)$$

funk... ... $\varphi_0'(x)$ funksiya $\forall x \in [0,l]$ da absolyut qiymati bo'yicha ... kichik bo'lsa, u holda $u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$ ayirma ... kichik bo'ladi.

... Ushbu $u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$ ayirma D sohada bir ... jinsli chegaraviy

$$Lu \equiv \rho u_{tt} - T_0 u_{xx} = 0 \tag{13}$$

$$u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)|_{x=l} = 0, \tag{14}$$

va boshlang'ich

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{15}$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Yana energiyalar integralini qaraymiz:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx. \tag{16}$$

Bu integral (13) tenglamaning (14) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy yechimida o'zgarmas qiymatini saqlaydi, ya'ni $E(t) = E(0)$, $0 \le t \le T$. Bundan (15) boshlang'ich shartlarga asosan

$$\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx =$$

$$= \int_0^l [\rho(\varphi_1(x))^2 + T_0(\varphi_0(x))^2]dx$$

kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, $M = \max\{\rho, T_0\}$ bo'lsin. U holda

$$\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx \le$$

$$\le M \int_0^l [(\varphi_1(x))^2 + (\varphi_0(x))^2]dx$$

... tengsizlikning o'ng tomonidagi ... tengsizlik o'ri... ...dan ... funksiyalar... yet... kichik ...

$$\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx \le \delta^2$$

Bu formuladan ko'rinadiki, uchlari mahkamlangan torning erkin ko'ndalang tebranishining to'la energiyasi ixtiyoriy vaqtda o'zgarmas va u torning boshlang'ich energiyasiga teng bo'ladi.

Bir jinsli (5) va (6) shartlarni inobatga olib, (12) formuladan ushbu

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx = 0$$

tenglikni olamiz. Oxirgi tenglik faqat va faqat $\forall (x,t) \in \overline{D}$ uchun $u_t(x,t) = 0$ va $u_x(x,t) = 0$ bo'lganda o'rinli. Bundan esa $\overline{D}$ yopiq sohada $u(x,t) = const$ bo'ladi. Bir jinsli shartlarga ko'ra $\overline{D}$ sohada $u(x,t) = 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, farazimiz noto'g'ri ekan. Bu ziddiyat tor tebranish tenglamasi uchun qo'yilgan aralash masala yechimining yagona ekanligini isbotlaydi.

YECHIMNING BERILGANLARGA UZLUKSIZ BOG'LIQLIGI. Faraz qilaylik, D sohada (1) tenglama bir xil chegaraviy shartlarni va

$$u_1(x,t)|_{t=0} = \varphi_0^1(x), \quad u_{1t}(x,t)|_{t=0} = \varphi_1^1(x);$$

$$u_2(x,t)|_{t=0} = \varphi_0^2(x), \quad u_{2t}(x,t)|_{t=0} = \varphi_1^2(x);$$

boshlang'ich shartlarni qanotalantiruvchi $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ yechimlarga ega bo'lsin.

2-TEOREMA. Agar

$$\varphi_0^{(1)}(x) - \varphi_1^{(1)}(x) = \varphi_0(x), \quad \varphi_0^{(2)}(x) - \varphi_1^{(2)}(x) = \varphi_1(x)$$

funksiyalar va $\varphi_0'(x)$ funksiya $\forall x \in [0,l]$ da absolyut qiymati bo'yicha yetarlicha kichik bo'lsa, u holda $u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$ ayirma ham yetarlicha kichik bo'ladi.

ISBOT. Ushbu $u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$ ayirma D sohada bir jinsli

$$Lu \equiv \rho u_{tt} - T_0 u_{xx} = 0 \tag{13}$$

tenglamani, bir jinsli chegaraviy

$$u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)|_{x=l} = 0, \tag{14}$$

va boshlang'ich

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{15}$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Yana energiyalar integralini qaraymiz:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx. \tag{16}$$

Bu integral (13) tenglamaning (14) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy yechimida o'zgarmas qiymatini saqlaydi, ya'ni $E(t) = E(0)$, $0 \le t \le T$. Bundan (15) boshlang'ich shartlarga asosan

$$\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx =$$

$$= \int_0^l [\rho(\varphi_1(x))^2 + T_0(\varphi_0(x))^2]dx$$

kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, $M = \max\{\rho, T_0\}$ bo'lsin. U holda

$$\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx \le$$

$$\le M \int_0^l [(\varphi_1(x))^2 + (\varphi_0(x))^2]dx$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu tengsizlikning o'ng tomonidagi funksiyalarning yetarlicha kichik ekanligidan

$$\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx \le \delta^2$$

10–§. Tor tebranish tenglamasi uchun aralash masala yechimining mavjudligi

Bu paragrafda tor tebranish tenglamasi uchun qo‘yilgan aralash masala yechimining mavjudligini isbotaymiz.

Unda avval uchlari mahkamlangan bir jinsli torning erkin tebranishini, ya’ni (1)–(3) masalada $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$ va $f(x,t) = 0$ bo‘lgan holni, keyin uchlari mahkamlangan torning majburiy tebranishi va so‘ngra uchlari qo‘zg‘aluvchi bo‘lgan torning majburiy tebranishi, ya’ni (1)–(3) masalaning yechimini Fur’e usulida quramiz.

Uchlari mahkamlangan torning erkin tebranishi

Fur’e usuli, yoki o‘zgaruvchilarni ajratish usuli xususiy hosilali tenglamalarni yechishda ko‘p qo‘llaniladigan usullardan biri hisoblanadi.

Uchlari mahkamlangan bir jinsli torning erkin tebranishi masalasi ushbu bir jinsli

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \tag{1}$$

tor tebranish tenglamasining quyidagi boshlang‘ich

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0} = \varphi_1(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

va bir jinsli chegaraviy

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimini topish masalasiga keltiriladi. Bu masalaning $u(x,t)$ yechimini $C^2(\overline{D})$ funksiyalar sinfidan izlaymiz.

Buning uchun (1) tenglamaning D sohada noldan farqli va bir jinsli (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0, \tag{4}$$

ko‘rinishda qidiramiz.

bo'lishi kelib chiqadi. Bundan esa

$$\int_0^l T_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx \le \frac{\delta^2}{2}$$

bo'ladi.

Quyidagi tenglikdan

$$u(x,t)-u(0,t)=\int_0^x \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,dx$$

ushbu

$$|u(x,t)| \le \int_0^x \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right| dx \le \int_0^x \frac{1}{\sqrt{T_0}}\sqrt{T_0}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right| dx \le$$

$$\left[\int_0^x \frac{dx}{T_0}\int_0^x T_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{1/2} \le \left[\int_0^l \frac{dx}{T_0}\int_0^l T_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{1/2} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{l}{T_0}}\left[\int_0^l T_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{1/2} \le \sqrt{\frac{l}{2T_0}}\,\delta=\varepsilon.$$

tengsizlik yoki $|u(x,t)| \le \varepsilon$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, tor tebranish tenglamasi uchun aralash masalaning yechimi boshlang'ich funksiyalarga, ya'ni berilganlarga uzluksiz bog'liq ekan. Shunday qilib, 2–teorema isbotlandi.

10–§. Tor tebranish tenglamasi uchun aralash masala yechimining mavjudligi

Bu paragrafda tor tebranish tenglamasi uchun qo'yilgan aralash masala yechimining mavjudligini isbotaymiz.

Unda avval uchlari mahkamlangan bir jinsli torning erkin tebranishini, ya'ni (1)–(3) masalada $\mu_1(t)=\mu_2(t)=0$ va $f(x,t)=0$ bo'lgan holni, keyin uchlari mahkamlangan torning majburiy tebranishi va so'ngra uchlari qo'zg'aluvchi bo'lgan torning majburiy tebranishi, ya'ni (1)–(3) masalaning yechimini Fur'e usulida quramiz.

Uchlari mahkamlangan torning erkin tebranishi

Fur'e usuli, yoki o'zgaruvchilarni ajratish usuli xususiy hosilali tenglamalarni yechishda ko'p qo'llaniladigan usullardan biri hisoblanadi.

Uchlari mahkamlangan bir jinsli torning erkin tebranishi masalasi ushbu bir jinsli

$$u_{tt}=a^2u_{xx}, \qquad a^2=\frac{T_0}{\rho}, \tag{1}$$

tor tebranish tenglamasining quyidagi boshlang'ich

$$u(x,t)|_{t=0}=\varphi_0(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0}=\varphi_1(x), \qquad 0\le x\le l, \tag{2}$$

va bir jinsli chegaraviy

$$u(0,t)=0, \qquad u(l,t)=0, \qquad 0\le t\le T, \tag{3}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimini topish masalasiga keltiriladi. Bu masalaning $u(x,t)$ yechimini $C^2(\overline{D})$ funksiyalar sinfidan izlaymiz.

Buning uchun (1) tenglamaning D sohada noldan farqli va bir jinsli (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini

$$u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0, \tag{4}$$

ko'rinishda qidiramiz.

(4) ifodani (1) tenglamaga qo'yib, uning o'zgaruvchilarini ajratsak, ushbu

$$T''(t)X(x) = a^2X''(x)T(t)$$

yoki

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \tag{5}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikning chap tomoni faqat t o'zgaruvchiga, o'ng tomoni esa faqat x o'zgaruvchiga bog'liq. Shuning uchun (5) tenglik, ikki tomoni ham bitta o'zgarmas $-\lambda$ songa teng bo'lgandagina o'rinli bo'ladi. U holda (5) ifodadan ikkita chiziqli ikkinchi tartibli

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{6}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad 0 < x < l, \tag{7}$$

oddiy differensial tenglamalarni olamiz.

Ixtiyoriy $t \in [0,T]$ da $T(t) \neq 0$ bo'lgani uchun (4) tenglikdan (3) chegaraviy shartlar asosida quyidagi

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0 \tag{8}$$

shartlar kelib chiqadi.

Shunday qilib, biz $X(x)$ funksiyani topish uchun quyidagi masalaga ega bo'ldik: λ parametrning qanday qiymatlarida (7)-(8) chegaraviy masalaning $X(x)$ yechimi noldan farqli bo'ladi. Bunday masala matematik fizikada *spektral masala yoki Shturm-Liuvill masalasi deyiladi.*

Shturm–Liuvill masalaning noldan farqli yechimini ta'minlagan λ parametrning qiymatlari spektral masalaning *xos qiymatlari*, unga mos yechimlar esa *xos funksiyalar* deb ataladi. (7) va (8) masalaning xos qimatlari to'plami shu *masalaning spektri* deyiladi.

Endi qaralayotgan spektral masalaning xos qiymatlarini va ularga mos xos funksiyalarini topaylik.

Buning uchun uchta $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ va $\lambda > 0$ hollarni alohida-alohida qarab chiqamiz.

1) Faraz qilaylik, $\lambda = -k^2 < 0$ bo'lsin. U holda (7) tenglamaning umumiy yechimi

$$X(x) = C_1e^{kx} + C_2e^{-kx},$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda C_1 va C_2 – ixtiyoriy o'zgarmas sonlar. Shu yechimni (8) bir jinsli chegaraviy shartlarga qo'ysak, C_1 va C_2 o'zgarmaslarni topish uchun quyidagi

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ X(l) = C_1e^{kl} + C_2e^{-kl} = 0. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

Bu sistemaning asosiy determinanti noldan farqli va u yagona trivial yechimga ega, ya'ni $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Demak, bu holda $X(x) \equiv 0$ bo'ladi va bu yechim masala shartini qanoatlantirmaydi.

2) Endi $\lambda = 0$ bo'lsin. U holda (7) tenglamaning umumiy yechimi

$$X(x) = C_1 + C_2x$$

va (8) shartlarga asosan $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ bo'ladi, demak $X(x) \equiv 0$, bu yechim ham masala shartini qanoatlantirmaydi.

3) Faraz qilaylik, $\lambda = \mu^2 > 0$, $\mu > 0$ bo'lsin. U holda (7) tenglamaning umumiy yechimi

$$X(x) = C_1\cos\mu x + C_2\sin\mu x$$

ko'rinishda bo'ladi. Oxirgi ifodani (8) chegaraviy shartlarga qo'ysak,

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2\,0 = 0, \\ X(l) = C_1\cos\mu l + C_2\sin\mu l = 0. \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bundan $C_1 = 0$, $C_2\sin\mu l = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi $C_2 \neq 0$ deb olamiz, aks holda yana $X(x) \equiv 0$ bo'ladi. Shuning uchun $\sin\mu l = 0$, bundan esa $\mu l = k\pi$, $k \in Z$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, (7)–(8) masalaning noldan farqli yechimi faqatgina

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \qquad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

qiymatlarda mavjud va bu qiymatlar qaralayotgan masalaning *xos qiymatlari* deyiladi. Bu qiymatlarga mos *xos funksiyalar*

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Endi topilgan $\lambda = \lambda_k$ qiymatlarda (6) tenglamaning umumiy yechimi

$$T_k(t) = a_k\cos\frac{k\pi at}{l} + b_k\sin\frac{k\pi at}{l}$$

ko‘rinishda topiladi, bunda a_k, b_k – ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar.

Topilgan $X_k(x)$ va $T_k(t)$ funksiyalarni (4) formulaga qo‘yib, ushbu

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)) = \left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l} + b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

funksiyani olamiz. Bu $u_k(x,t)$, $(k = 1, 2, \dots)$ funksiyalar a_k va b_k koeffitsientlarning ixtiyoriy qiymatlarida (1) tenglamani va (3) bir jinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

(1) tenglama chiziqli va bir jinsli bo‘lgani uchun yechimlarning chekli yig‘indisi ham tenglamani qanoatlantiradi va u quyidagi

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l} + b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{9}$$

qator uchun ham o‘rinli. Agar bu qator tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda bu qatorni x bo‘yicha va t bo‘yicha ikki marta differensiallash mumkin. (9) qatorning har bir hadi (1) bir jinsli tenglamani va bir jinsli (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. Bu shart (9) formula bilan aniqlangan qatorning yig‘indisi, ya’ni $u(x,t)$ uchun ham o‘rinli.

Endi ixtiyoriy a_k va b_k o‘zgarmas sonlarni topamiz. Buning uchun (9) formula bilan aniqlangan $u(x,t)$ funksiya (2) boshlang‘ich shartlarga qo‘yamiz.

(9) formulani t bo‘yicha differensiallab ushbu

$$u_t = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(-a_k\sin\frac{k\pi at}{l} + b_k\cos\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{10}$$

tenglikni olamiz. Endi (9) va (10) ifodalarda $t = 0$ deb, (2) boshlang‘ich shartlarga asosan

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\, b_k\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{11}$$

ifodalarga ega bo‘lamiz. Bu tengliklar $\varphi_0(x)$ va $\varphi_1(x)$ funksiyalarning $(0,l)$ oraliqdagi sinuslar bo‘yicha Fur’e qatoriga yoyilmalaridir.

U holda Fur’e qatorlari nazariyasiga asosan a_k va b_k koeffitsientlar quyidagi

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \tag{12}$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \tag{13}$$

formulalar bilan aniqlanadi.

Shunday qilib, bir jinsli tor tebranish tenglamasi uchun aralash masalaning yechimi (9) qator ko‘rinishida bo‘lib, undagi a_k va b_k koeffitsientlar mos ravishda (12) va (13) formulalar orqali topiladi.

1-TEOREMA. Agar $\varphi_0(x)$ funksiya $[0,l]$ oraliqda uch marta uzluksiz differensiallanuvchi va quyidagi

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = 0, \qquad \varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) = 0, \tag{14}$$

shartlarni qanoatlantirsa, $\varphi_1(x)$ funksiya esa $[0,l]$ oraliqda ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0 \tag{15}$$

bo'lsa, u holda (9) formula bilan aniqlangan $u(x,t)$ funksiya yopiq $\overline{D}$ sohada ikki marta uzluksiz hosilalarga ega va D sohada (1) bir jinsli tor tebranish tenglamasini hamda (2) boshlang'ich va (3) bir jinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun avval (12) formula bilan aniqlangan integralni uch marta bo'laklab integrallaymiz. (14) tengliklarga asosan

$$a_k = -\frac{2}{l}\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \int_0^l \varphi_0'''(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{p_k}{k^3}, \tag{16}$$

ifodani olamiz.

(13) formulaning o'ng tomonini xuddi shunday (15) tengliklarni inobatga olib, ikki matra bo'laklab integrallash natijasida

$$b_k = -\frac{2}{la}\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \int_0^l \varphi_1''(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{q_k}{k^3}, \tag{17}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerda

$$p_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0'''(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx; \quad q_k = \frac{2}{la}\int_0^l \varphi_1''(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Boshlang'ich shartlarga ko'ra $\varphi_0'''(x)$, $\varphi_1''(x)$ funksiyalar $[0,l]$ segmentda uzluksiz, u holda matematik analiz kursidan ma'lum bo'lgan Bessel tengsizligiga ko'ra ushbu qatorlar

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 \le \frac{2}{l}\int_0^l [\varphi_0'''(x)]^2\,dx; \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k \le \frac{2}{l}\int_0^l \left[\frac{\varphi_1''(x)}{a}\right]^2 dx. \tag{18}$$

yaqinlashuvchi qatorlar bo'ladi.

Endi (16) va (17) ifodalarni (9) qatorga qo'yib, quyidagi

$$u(x,t) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left(p_k\cos\frac{k\pi at}{l} + q_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{19}$$

qatorni olamiz.

Hosil bo'lgan (19) qatorning har bir hadi yopiq $\overline{D}$ sohaning $\forall(x,t)$ nuqtasida ushbu yaqinlashuvchi

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\Big(|p_k| + |q_k|\Big),$$

sonli qatorning hadlari bilan chegaralangan. U holda Veyershtrass alomatiga ko'ra (9) qator yopiq $\overline{D}$ sohada absolyut va tekis yaqinlashadi. Demak, $u(x,t)$ funksiya yopiq $\overline{D}$ sohada yaqinlashuvchi qatorning yig'indisi sifatida uzluksiz bo'ladi.

Endi (9) qatorni x va t o'zgaruvchilar bo'yicha ikki marta formal ravishda hadma-had differensiallash mumkin ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun (9) qatorni hadma-had differensiallashdan hosil bo'lgan qatorlarning yopiq $\overline{D}$ sohada absolyut va tekis yaqinlashishini isbotlaymiz. (19) qatorni hadma-had differensiallab, ushbu

$$u_{xx}(x,t) = \frac{l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(p_k\cos\frac{k\pi at}{l} + q_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{20}$$

$$u_{tt}(x,t) = \frac{la^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(p_k\cos\frac{k\pi at}{l} + q_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{21}$$

qatorlarga ega bo'lamiz. Bu qatorlar $\forall(x,t)\in\overline{D}$ sohada

$$\frac{ml}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\Big(|p_k| + |q_k|\Big), \qquad m = \max\{1, a^2\}, \tag{22}$$

qatorga majorant bo'ladi. Oxirgi (22) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi (18) qatorlarning yaqinlashishidan va quyidagi

$$\frac{1}{k}|p_k| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + p_k^2\right), \qquad \frac{1}{k}|q_k| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + q_k^2\right)$$

tengsizliklardan kelib chiqadi. U holda (20) va (2) qatorlar Veyershtrass alomatiga asosan yopiq $\overline{D}$ sohada absolyut va tekis yaqinlashuvi bo'ladi.

Demak, $u_{xx}(x,t)$ va $u_{tt}(x,t)$ funksiyalar yopiq $\overline{D}$ sohada uzluksiz ekan. Endi (20) va (21) qatorlarni (1^0) tenglamaga qo'ysak, (9) formula bilan aniqlangan $u(x,t)$ funksiya tor tebranish tenglamasini qanoatlantirishiga ishonch hosil qilish mumkin. Shunday qilib, 1–teorema isbot bo'ldi.

YECHIMNING FIZIKAVIY TALQINI. Tor tebranish tenglamasi uchun aralash masalaning (9) ko'rinishda topilgan yechimini qaraylik. Agar bu formulada

$$a_k = A_k \sin \varphi_k, \quad b_k = B_k \cos \varphi_k$$

belgilashlarni kiritsak, u holda $u_k(x,t)$ xususiy yechimlarni quyidagi

$$u_k(x,t) = A_k \sin \frac{\pi k x}{l} \sin\left(\frac{k\pi a t}{l} + \varphi_k\right). \tag{23}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda torning har bir nuqtasi bir xil φ_k fazali, amplitudasi $A_k \sin \dfrac{k\pi x}{l}$ ga teng bo'lgan $\omega_k = \dfrac{k\pi}{l}$ chastotali garmonik tebranadi.

Tor harakatining (23) ko'rinishdagi garmonik tebranishlari *to'g'ri to'lqin* deyiladi, ya'ni (34) qatorning har bir hadi to'g'ri to'lqin deb ataladi. Bundan esa (20) ko'rinishdagi yechim cheksiz ko'p to'g'ri to'lqinlarning yig'indisini ifodalaydi.

Tor tebranish jarayonida o'zidan tovush chiqaradi. Tovushlar ikki xil – musiqiy va musiqiy bo'lmagan turlarga ajraladi. Musiqiy tovushlarni notalar, musiqiy bo'maganlarni esa *shovqinlar* deb yuritiladi. Musiqiy tovushlar ma'lum ma'noda yuqori darajada sifatli bo'lib, uni har bir kishi o'zining imkoniyati darajasida baholay oladi.

Balandligi bo'yicha kishining qulog'i ajrata olmaydigan notalar *tonlar* deyiladi. Tovushning balandligi tebranish chastotasiga bog'liq bo'ladi. Eng past tonning chastotasi *asosiy chastota* deyiladi va u

$$\omega_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

formula bilan aniqlanadi.

Asosiy chastotadan balandroq bo'lgan chastotali tonlar *obertonlar* deyiladi va obertonlar asosiy ω_1 chastotaga karrali bo'lib, ular *garmonikalar* deyiladi. Birinchi garmonika deb asosiy ton hisoblanadi, ikkinchi garmonika esa chastotasi $\omega_2 = 2\omega_1$ bo'lgan tonlar va hokazo.

Demak, (9) formula bilan aniqlangan yechim alohida garmonikalarnin yig'indisi bo'lib, uning amplitudasi garmonikalarning nomeri ortib borgan sari nolga intiladi, ya'ni $k \to \infty$ koeffitsientlar $a_k \to 0$ va $b_k \to 0$ intiladi. Shu sababli garmonikaning tordan tarqalayotgan tovushga ta'siri tovush tembrini hosil qiladi.

Ushbu $x = 0, l/k, (2l)/k, \ldots, (k-1)l/k, l$ nuqtalarda tebranish amplitudasining k – garmonikasi nolga intiladi, chunki bu nuqtalarda $\sin \dfrac{k\pi}{l} x = 0$ bo'ladi. Bu nuqtalar k – garmonikaning *tugunlari* deyiladi va torning tebranish jarayonida bu tugunlar qo'zg'almaydi. $x_m = \dfrac{(2m+1)\,l}{2k}$, $(m = \overline{0,\, k-1})$ nuqtalarda $\sin \dfrac{k\pi x}{l} = \pm 1$ bo'lgani uchun tor maksimal A_k amplitudali garmonik tebranadi va bu *to'g'ri to'lqinlar* deyiladi.

Quyidagi

$$\omega_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \qquad \text{yoki} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l\sqrt{\frac{\rho}{T_0}}$$

formulalar mos ravishda asosiy tonning chastotasini va davrini aniqlaydi. Bu formulalar yordamida tor tebranish qoidasini asoslashimiz mumkin:

1) Zichligi va tarangligi o'zgarmas bo'lgan torning tebranish davri uning uzunligiga to'g'ri proporsional bo'ladi.

2) Ma'lum uzunlikdagi torning tebranish davri T_0 taranglikning kvadrat ildiziga teskari proporsional ravishda o'zgaradi.

3) Uzunligi va tarangligi ma'lum bo'lgan torning tebranish davri tor zichligining kvadrat ildiziga to'g'ri proporsional o'zgaradi.

Bir jinsli torning majburiy tebranishi

Uchlari mahkamlangan bir jinsli torning tashqi kuchlar ta'siridagi majburiy tebranishi quyidagi aralash masalaga ekvivalent keltiriladi.

Bir jinsli bo'lmagan

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x,t), \qquad \forall (x,t) \in D; \tag{24}$$

tor tebranish tenglamasining (2) boshlang'ich va bir jinsli (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimini toping.

Bu yerda $g(x,t) = f(x,t)/\rho \in C^2(D)$ torga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar yigindisi.

Bu masalaning $u(x,t)$ yechimini quyidagi

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \tag{25}$$

ko'rinishda qidiramiz. Bu yerda $v(x,t)$ funksiya bir jinsli bo'lmagan

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + g(x,t) \tag{26}$$

tor tebranish tenglamaning bir jinsli boshlang'ich

$$v|_{t=0} = 0, \qquad v_t|_{t=0} = 0 \tag{27}$$

va chegaraviy

$$v|_{x=0} = 0, \qquad v|_{x=l} = 0 \tag{28}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi; $w(x,t)$ funksiya esa bir jinsli

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} \tag{29}$$

tenglamaning quyidagi boshlang'ich

$$w|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad w_t|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{30}$$

va chegaraviy

$$w|_{x=0} = 0, \qquad w|_{x=l} = 0 \tag{31}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimidan iborat.

Yuqoridagi masalalardan ko'rinib turibdiki, $v(x,t)$ funksiya uchlari mahkamlangan bir jinsli torning $g(x,t)$ tashqi kuchlar ta'siridagi majburiy tebranishini, $w(x,t)$ esa shu torning erkin

tebranishini ifodalaydi. $w(x,t)$ funksiyaga nisbatan (29)–(31) masala yechimining mavjudligini oldingi punktda isbot qildik.

Shuning uchun bu yerda (26)–(28) masalaning $v(x,t)$ yechimini qurish etarlidir.

Bu masalaning $v(x,t)$ yechimini quyidagi qator

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \tag{32}$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu yerda $T_k(t)$ hozircha noma'lum funksiya. (32) qatorni yopiq $\overline{D}$ sohada yaqinlashuvchi va shu sohada x va t o'zgaruvchilar bo'yicha hadma-had differensiallash mumkin bo'lsin. U holda (32) qator bir jinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

Bu qatorni (27) boshlang'ich shartlarga qo'yib, $T_k(t)$ funksiyalar uchun quyidagi

$$T_k(0) = 0, \qquad T_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{33}$$

boshlang'ich shartlarni olamiz.

Endi $g(x,t)$ funksiyani $[0,l]$ segmentda x o'zgaruvchiga nisbatan sinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoyilsin.

$$g(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{34}$$

bunda f_k koeffitsientlar quyidagi

$$g_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l g(x,t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \tag{35}$$

formula bilan aniqlanadi.

$T_k(t)$ funksiyalarni topish uchun (32) va (34) ifodalarni (26) tenglama qo'yib, ushbu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k''(t) + w_k^2 T_k(t)\right] \sin \frac{k\pi x}{l} = g(x,t), \tag{36}$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu yerda $\omega_k = \frac{k\pi}{l}$.

(36) va (34) yoyilmalarni o'zaro taqqoslab, k ning har bir qiymatida chiziqli o'zgarmas koeffitsientli

$$T_k''(t) + w_k^2 T_k(t) = g_k(t), \qquad 0 \le t \le T \tag{37}$$

oddiy differensial tenglamalarga ega bo'lamiz.

Demak, $T_k(t)$ funksiyalarni topish uchun ikkinchi tartibli (37) oddiy differensial tenglamani (44) boshlang'ich shartlarni oldik. Bu masalaning yechimini o'zgarmasni variatsiyalash usuli yordamida topamiz. Bir jinsli (37) tenglamaning umumiy yechimi

$$T_k(t) = c_1 \cos \omega_k t + c_2 \sin \omega_k t,$$

bu yerda c_1, c_2 – ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Endi (37) tenglamaning umumiy yechimini

$$T_k(t) = c_1(t) \cos \omega t + c_2(t) \sin \omega t, \tag{38}$$

ko'rinishda izlaymiz.

Differensial tenglamalar kursidan ma'lumki, $c_1'(t)$ va $c_2'(t)$ noma'lum funksiyalarga nisbatan quyidagi

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos \omega_k t + c_2'(t) \sin \omega_k t = 0, \\ -c_1'(t)\omega_k \sin \omega_k t + c_2'(t)\omega_k \cos \omega_k t = g_k(t); \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Bundan $c_1'(t)$ va $c_2'(t)$ funksiyalarni

$$c_1'(t) = -\frac{g_k(t)}{\omega_k} \sin \omega_k t, \quad c_2'(t) = \frac{g_k(t)}{\omega_k} \cos \omega_k t,$$

ko'rinishda topamiz va bu tenglamalarni integrallab, $c_1(t)$ va $c_2(t)$ funksiyalarni

$$c_1(t) = -\frac{1}{\omega_k} \int_0^t g_k(\tau) \sin \omega_k \tau \, d\tau + c_1^0,$$

$$c_2(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t g_k(\tau) \cos \omega_k \tau \, d\tau + c_2^0.$$

ko'rinishda aniqlaymiz. Bunda c_1^0 va c_2^0 – ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Topilgan $c_1(t)$ va $c_2(t)$ funksiyalarni (38) formulaga qo'yib, (37) tenglamaning umumiy yechimini

$$T_k(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t g_k(\tau) \sin[\omega_k(t-\tau)] d\tau + c_1^0 \cos \omega_k t + c_2^0 \sin \omega_k t, \tag{39}$$

ko'rinishda topamiz. (33) boshlang'ich shartlarni qanoatlantirib, (39) umumiy yechimdan $c_1^0 = c_2^0 = 0$ ekanligini olamiz.

Agar $g_k(t) \in C[0,T]$ bo'lsa, u holda (37) tenglamaning (33) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi

$$T_k(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t g_k(\tau) \sin[\omega_k(t-\tau)] d\tau, \tag{40}$$

formula bilan aniqlanadi.

Endi (32) qatorning yopiq $\overline{D}$ sohada tekis yaqinlashuvchi ekanligini hamda x va t argumentlari bo'yicha ikki marta differensiallash mumkinligini ko'rsataylik.

Agar $g(x,t)$ funksiya yopiq $\overline{D}$ sohada uzluksiz, shu sohada x o'zgaruvchi bo'yicha uzluksiz ikki marta differensiallanuvchi va $\forall t \in [0,T]$ uchun $g(0,t) = g(l,t) = 0$ bo'lsa, u holda (35) ifodani ikki marta bo'laklab integrallaymiz, natijada

$$g_k(t) = -\frac{2}{l}\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 \int_0^l g_{xx}''(x,t) \sin \frac{k\pi x}{l} \, dx = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{a_k(t)}{k^2}, \tag{41}$$

ifodani olamiz, bunda yerda

$$a_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^t g_{xx}''(x,t) \sin \frac{k\pi x}{l} \, dx.$$

Uzluksiz funksiyalarning kvadratidan tuzilgan $a_k(t)$ funksional qator

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2(t) < \infty, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{42}$$

Bessel tengsizligiga asosan yaqinlashuvchi qator bo'ladi. Endi (41) ifodani (40) formulaga qo'yamiz va $T_k(t)$ ushbu

$$T_k(t) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{1}{a} \int_0^t \frac{a_k(t)}{k^3} \sin \omega_k(t-\tau)\, d\tau.$$

ko'rinishda yoziladi. Hosil bo'lgan oxirgi ifodani esa (32) formulaga qo'ysak,

$$v(x,t) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \int_0^t a_k(\tau) \sin[\omega_k(t-\tau)]\, d\tau \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{43}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu qatorning har bir hadi $\forall t \in [0, T]$ bo'lganda ushbu

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{T}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k(t_0)|}{k^3}$$

sonli qatorning har bir hadi bilan chegaralangan.

Bu yerda $|a_k(t_0)| = \max\limits_{0 \le t \le T} |a_k(t)|$, t_0 biror fiksirlangan nuqta.

Shuning uchun (43) qator $\overline{D}$ sohada absolyut va tekis yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Endi (43) qatorni hadma-had ikki marta x va t o'zgaruvchilari bo'yicha differensiallaymiz, natijada ushbu

$$v_{xx} = \frac{l}{a\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^t a_k(\tau) \sin[\omega_k(t-\tau)]\, d\tau \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{44}$$

$$v_{tt} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} a_k(t) \tau \sin\frac{k\pi x}{l} +$$

$$+\frac{la}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^t a_k(\tau) \sin[\omega_k(t-\tau)]\, d\tau \sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{45}$$

qatorlarni olamiz. Ma'lumki, bu qatorlar $(x,t) \in \overline{D}$ da quyidagi qatorlarga

$$\frac{l}{a\pi} T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k(t_0)|}{\pi}, \qquad \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k(t_0)|}{k^2} + \frac{la}{\pi} T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k(t_0)|}{k}$$

majorantlanadi. Bu qatorlarning yaqinlashishi (52) qatorning yaqinlashishidan va

$$2\frac{|a_k(t_0)|}{k} \le \frac{1}{k^2} + a_k^2(t_0)$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

U holda (44) va (45) qatorlar $(x,t) \in \overline{D}$ sohada absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi, bundan esa $\overline{D}$ da $v_{xx}(x,t)$ va $v_{tt}(x,t)$ hosilalarning uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

Endi (44) va (45) ifodalarni (26) tenglamaga qo'ysak, (32) formula bilan aniqlangan $v(x,t)$ funksiya bir jinsli bo'lmagan tor tebranish tenglamasini qanoatlantirishiga ishonch hosil qilish mumkin.

Shunday qilib, quyidagi teoremani isbotladik:

2–TEOREMA. Agar $\varphi_0(x)$ va $\varphi_1(x)$ funksiyalar 1–teorema shartlarini qanoatlantirsa va $g(x,t)$ funksiya yopiq $\overline{D}$ sohada uzluksiz, shu sohada ikkinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lib, $g(0,t) = 0$, $g(l,t) = 0$ tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda $\{(24), (2), (3)\}$ masalaning yagona yechimi mavjud va bu yechim

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right) \sin\frac{k\pi x}{l};$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda

$$T_k(t) = \frac{2}{k\pi}\int_0^t \sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau \int_0^l g(x,\tau)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx;$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx;$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Demak, $v(x,t)$ funksiya (32) qator ko'rinishida uning koeffitsientlari (35), (39) formulalar orqali, $w(x,t)$ funksiya esa (9) ko'rinishda va uning koeffitsientlari (12), (13) formulalar bilan aniqlanadi.

Uchlari qo'zg'aluvchan torning majburiy tebranishi

Torning uchlari mahkamlanmagan bo'lib, ular biror qoida asosida harakatlansin va tor biror tashqi kuch ta'sirida tebranayotgan bo'lsin. U holda bu masala bir jinsli bo'lmagan

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x,t), \quad a^2 = T_0/\rho, \tag{46}$$

tor tebranish tenglamasining quyidagi boshlang'ich

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{47}$$

va chegaraviy

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{48}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga ekvivalent bo'ladi.

Bu yerda $g(x,t) = \dfrac{f(x,t)}{\rho}$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ $\varphi_0(x)$ va $\varphi_1(x)$ – berilgan funksiyalar.

Qaralayotgan umumiy (46)–(48) masala yechimining mavjudligini bir jinsli chegaraviy shartli masalaga keltirib isbotlash mumkin.

Buning uchun $\mu_1(t)$ va $\mu_2(t)$ funksiyalarni $C^2[0,T]$ sinfdan deb talab qilamiz. U holda (48) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi quyidagi

$$z(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)], \tag{49}$$

yordamchi funksiyani kiritamiz, ya'ni

$$z(0,t) = \mu_1(t), \qquad z(l,t) = \mu_2(t).$$

Endi (46) tenglamaning (47) boshlang'ich va (48) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimini

$$u(x,t) = v(x,t) + z(x,t), \tag{50}$$

ko'rinishda izlaymiz, bu yerda $v(x,t)$ yangi noma'lum funksiya. Boshlang'ich va chegaraviy shartlarga asosan $v(x,t)$ funksiya uchun quyidagi bir jinsli chegaraviy

$$v|_{x=0} = u(x,t)|_{x=0} - z(x,t)|_{x=0} = \mu_1(t) - \mu_1(t) = 0,$$

$$v|_{x=l} = u(x,t)|_{x=l} - z(x,t)|_{x=l} = \mu_2(t) - \mu_2(t) = 0,$$

va boshlang'ich

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} - z|_{t=0} = \varphi_0(x) - \mu_1(0) - [\mu_2(0) - \mu_1(0)]\frac{x}{2} = \bar{\varphi}_0(x)$$

$$v_t|_{t=0} = u_t|_{t=0} - z_t|_{t=0} = \varphi_1(x) - \mu_1'(0) - [\mu_2'(0) - \mu_1'(0)]\frac{x}{2} = \bar{\varphi}_1(x)$$

shartlarga ega bo'lamiz.

(50) tenglikka ko'ra yangi noma'lum $v(x,t)$ funksiyaga nisbatan ushbu

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = (u-z)_{tt} - a^2(u-z)_{xx} =$$
$$= u_{tt} - a^2 u_{xx} - (z_{tt} - a^2 z_{xx}) =$$
$$= g(x,t) - \mu_1''(t) - [\mu_2''(t) - \mu_1''(t)]\frac{x}{l} = \bar{g}(x,t)$$

yoki

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{g}(x,t)$$

tenglamani olamiz. Bu yerda

$$\bar{g}(x,t) = g(x,t) - \mu_1''(t) - [\mu_2''(t) - \mu_1''(t)]\frac{x}{l}.$$

Shunday qilib, biz $v(x,t)$ funksiyani topish uchun quyidagi masalaga keldik: Bir jinsli bo'lmagan

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{g}(x,t). \tag{51}$$

tor tebranish tenglamasining quyidagi boshlang'ich

$$v(x,t)|_{t=0} = \bar{\varphi}_0(x), \qquad v_t(x,t)|_{t=0} = \bar{\varphi}_1(x). \tag{52}$$

va bir jinsli chegaraviy

$$v(x,t)|_{x=0} = 0, \qquad v(x,t)|_{x=l} = 0, \tag{53}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $v(x,t)$ yechimini toping.

Bu masalaning yechimini oldingi bosqichda batafsil o'rgandik. Agar $\bar{\varphi}_0(x)$, $\bar{\varphi}_1(x)$ va $\bar{g}(x,t)$ funksiyalar 2–teorema shartlarini qanoatlantirsa, u holda (51)–(53) masalaning $C^2(\overline{D})$ sinfga tegishli bo'lgan $v(x,t)$ yechimi mavjud va yagona bo'ladi.

Shunday qilib, (46)–(48 aralash masala yechimining mavjud va yagonaligi haqidagi ushbu teorema o'rinli:

3–TEOREMA. Agar berilgan funksiyalar

$$\varphi_0(x) \in C^3[0,l], \ \varphi_1(x) \in C^2[0,l]; \quad \mu_1(t), \ \mu_2(t) \in C^2[0,T];$$
$$g(x,t), \ g_x(x,t), \ g_{xx}(x,t) \in C(\overline{D})$$

bo'lib, ular uchun quyidagi tengliklar

$$\varphi_0(0) = \mu_1(0), \ \varphi_0(l) = \mu_2(0), \ \varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) = 0,$$
$$\ldots \mu_1'(0), \ \varphi_1(l) = \mu_2'(0), \ g(0,t) = \mu_1''(t), \ g(l,t) = \mu_2''(t)$$

o'rinli bo'lsa, u holda (46)–(48) aralash masalaning yagona yechimi mavjud bo'ladi.

Endi ikkinch aralash masalani Fur'e usuli bilan yechaylik.

1–MASALA. To'g'ri to'rtburchakli D sohada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{54}$$

tenglamaning quyidagi

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{55}$$

boshlang'ich va

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{56}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimini toping.

YECHISH. Berilgan bir jinsli tor tebranish tenglamasining $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimini $u(x,t) = X(x)T(t)$ ko'rinishda izlaymiz. Bundan $X(x)$ funksiya uchun ubshu

$$X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0, \tag{57}$$

chegaraviy shartlarni olamiz.

Endi $u(x,t)$ ko'paytmani (54) tenglamaga qo'ysak,

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Oxirgi tenglikni $a^2X(x)T(t) \neq 0$ ifodaga bo'lib,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2T(t)} = -\lambda$$

ifodani olamiz. Bundan esa $X(x)$ funksiyaga nisbatan

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{58a}$$
$$X'(0) = 0, \ X'(l) = 0, \tag{58b}$$

(58) masalaning λ_k xos sonlarini (60) va xos funksiyalarini esa $k=0$ bo'lganda (61) ko'rininshda

$$\lambda_0 = \left(\frac{\pi 0}{l}\right)^2 = 0, \qquad X_0(x) = \cos\frac{\pi 0}{l}x = 1$$

yozish mumkin.

Demak, (58) Shturm–Liuvill masalasi uchun

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \qquad X_k(x) = \cos\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

xos qiymat va xos funksiyalarga ega bo'ldik.

Endi (59) tenglamani qaraylik. Bu tenglama $\lambda = \lambda_k$ bo'lganda ham ma'noga ega va

$$T_k''(t) + a^2\lambda_k T_k(t) = 0, \quad t > 0, \tag{62}$$

tenglamani qaraymiz. Agar $k = 0$ bo'lsa, oxirgi tenglamaning umumiy yechimi

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t$$

bo'ladi, bu yerda A_0, B_0 – ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Agar $k > 0$ bo'lsa, (62) tenglamaning umumiy yechimi

$$T_k(t) = A_k\cos\left(\frac{ka\pi}{l}\right)t + B_k\sin\left(\frac{ka\pi}{l}\right)t, \quad t > 0 \tag{63}$$

ko'rinishda bo'ladi, bunda A_k va B_k – ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Endi qaralayotgan (54)–(56) aralash masalaning yechimini

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$$

ko'rinishda izlaymiz, ya'ni

$$\ldots = A_0 + B_0 t + \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\cos\left(\frac{ka\pi}{l}\right)t + B_k\sin\left(\frac{ka\pi}{l}\right)t\right]\cos\left(\frac{k\pi}{l}\right)x, \tag{64}$$

Qaralayotgan masalaning boshlang'ich shartlariga ko'ra

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(0) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x), \tag{65}$$

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k'(0) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ka\pi}{l} B_k X_k(x), \tag{66}$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar kosinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoyilsin, ya'ni

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad \psi(x) = \frac{\beta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right).$$

Bu yerda α_k va β_k koeffitsientlar

$$\alpha_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx, \quad \beta_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx,$$

ko'rinishda aniqlanadi.

Shunday qilib, Fur'e qatorlari uchun standart formulalardan foydalanib, (64) formuladagi A_k va B_k koeffitsientlar uchun quyidagi

$$A_k = \alpha_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx, \quad k > 0,$$

$$B_k = \frac{l}{k\pi a} \beta_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx, \quad k > 0,$$

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2} = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \quad B_0 = \frac{\beta_0}{2} = \frac{1}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) dx,$$

formulalarni olamiz.

Endi topilgan A_k va B_k koeffitsientlarni (64) formulaga qo'yib, …4)–(56) aralash masalaning $u(x,t)$ yechimini hosil qilamiz.

11-§. Tor tebranish tenglamasi uchun Gursa va Darbu masalalari

Bu paragrafda tor tebranish tenglamasi uchun Gursa masalasini o'rganamiz. Bu masala fizikaviy jihatdan ham qiziqarli bo'lib, u ko'plab tadbiqiy masalalarda, ayniqsa gaz tozalash, quritish jarayonlari bilan bog'liq masalalarni o'rganishda uchraydi. Bu masalada chegaraviy shartlar tenglamaning xarakteristikalarida berilgani uchun ham *Gursa masalasi chegaraviy masala* deb yuritiladi.

Gursa masalasi chegaraviy masala bo'lib, chegaraviy shartlar tenglamaning bir nuqtadan chiquvchi xarakteristikalarida beriladi. (x,t) o'zgaruvchilar tekisligida bir jinsli ushbu

$$\Box u(x,t) \equiv u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{1}$$

tor tebranish tenglamasini qaraylik. Umumiylikka ziyon qilmasdan (1) tenglamada $a = 1$ deb olish mumkin. Haqiqatdan ham, (x,t) tekisligida quyidagicha yangi $x = x$, $y = at$ o'zgaruvchilar kiritamiz. U holda (1) tenglamada qatnashgan hosilalarni hisoblaymiz:

$$u_{tt} = u_{yy} y_t^2 + u_y y_{tt} = a^2 u_{yy} \text{ va } u_{tt} - a^2 u_{xx} = a^2 u_{yy} - a^2 u_{xx} = 0$$

Bundan esa (1) tenglamani

$$\Box u(x,y) \equiv u_{xx} - u_{yy} = 0, \tag{2}$$

ko'rinishda yozib olishimiz mumkin.

Ma'lumki, (2) tenglama ikkita haqiqiy xarakteristikalar

$$x - y = const \quad \text{va} \quad x + y = const$$

oilasiga ega. Berilgan (2) tenglamani xarakteristik to'rtburchakda qaraylik, ya'ni (2) tenglamaning AC_1, C_1B, BC_2 va C_2A xarakteristikalari bilan chegaralangan sohani G deb, belgilaylik.

Faraz qilaylik, $A = (0,0)$, $C_1 = (x_1, x_1)$, $C_2 = (x_2, -x_2)$, bo'lsin. Bu yerda $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

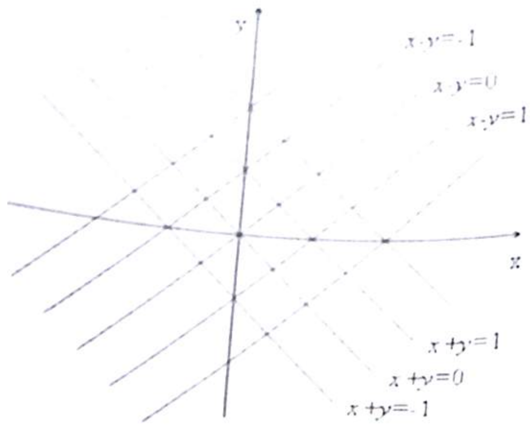
Gursa masalasi. (2) tenglamaning yopiq G sohada aniqlangan, uzluksiz va quyidagi

$$u(x,y)|_{AC_1} = u(x,y)|_{y=x} = u(x,x) = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le x_1, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{AC_2} = u(x,y)|_{y=-x} = u(x,-x) = \psi_2(x), \quad x \leq x \leq_2, \tag{4}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimini toping.

Bu yerda $\psi_1(x)$ va $\psi_2(x)$ berilgan etarlicha silliq funksiyalar bo'lib, ular uchun $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ tenglik o'rinli.



7 — shakl.

Ma'lumki, (2) tenglamaning umumiy yechimi

$$u(x,y) = f(x+y) + g(x-y), \tag{5}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $f, g \in C^2(R)$. (2) tenglama uchun Gursa masalasining yechimini (5) umumiy yechim asosida quraylik. Bunda $C^2(R)$ sinfga tegishli bo'lgan f, g funksiyalarni topish uchun (5) formula bilan aniqlangan $u(x,y)$ funksiyani (3) va (4) shartlarga qo'yamiz, natijada

$$u(x,y)|_{y=x} = f(2x) + g(0) = \psi_1(x),$$

$$u(x,y)|_{y=-x} = f(0) + g(2x) = \psi_2(x),$$

yoki

$$f(2x) + g(0) = \psi_1(x), \tag{6}$$

$$f(0) + g(2x) = \psi_2(x). \tag{7}$$

tengliklarni olamiz. Demak, f va g funksiyalarni topish uchun (6)–(7) tenglamalar sistemasiga ega bo'ldik. Bu sistemaning birinchisida x ni $x/2$ ga almashtirib, $f(x)$ funksiyani

$$f(x) = \psi_1\left(\frac{x}{2}\right) - g(0), \tag{8}$$

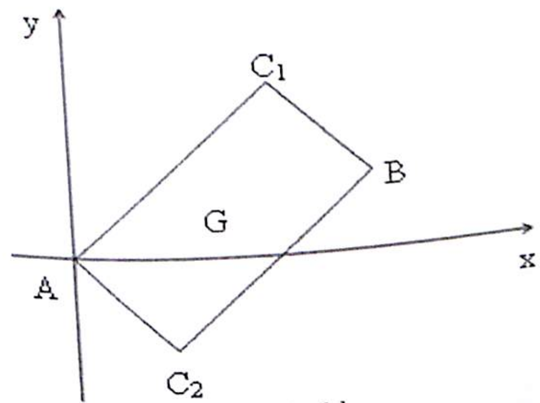
ko'rinishda topamiz. Xuddi shunday qilib, (7) tenglamadan $g(x)$ funksiyani

$$g(x) = \psi_2\left(\frac{x}{2}\right) - f(0), \tag{9}$$

topamiz. Endi (8) va (9) formulalar bilan topilgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarni (5) umumiy yechimga qo'yamiz. Natijada (2)–(4) Gursa masalasining yechimini quyidagi

$$u(x,y) = \psi_1\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi_2\left(\frac{x-y}{2}\right) - \psi_1(0), \tag{10}$$

ko'rinishda topamiz.



8 — shakl.

Agar $\psi_1(x)$ va $\psi_2(x)$ funksiyalar berilgan sohada ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda (10) formula bilan aniqlangan $u(x,y)$ funksiya qaralayotgan sohada (2) tenglamani va (3), (4) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

2–Darbu masalasining yechimini topish uchun (2) tenglamaning umumiy yechimida qatnashgan f va g funksiyalarni (13) va (15) shartlardan foydalanib topamiz. Buning uchun (5) formulani ketma-ket (13) va (15) shartlarga qo'yib,

$$u(x,y)|_{y=-x} = f(0) + g(2x) = \psi(x), \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = f'(x) - g'(x) = \nu(x). \tag{17}$$

ifodalarni olamiz. Olingan (17) ifodada x ni s ga almashtiramiz va hosil bo'lgan tenglikni s bo'yicha noldan x gacha integrallaab, ushbu

$$\int_0^x f'(s)ds - \int_0^x g'(s)ds = \int_0^x \nu(s)ds.$$

yoki

$$f(x) - g(x) = \int_0^x \nu(s)ds + f(0) - g(0) = \int_0^x \nu(s)ds + c \tag{18}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Endi (16) formuladan ushbu $g(x)$ funksiyani

$$g(x) = \psi\left(\frac{x}{2}\right) - f(0), \tag{19}$$

olamiz. Olingan ifodani (18) ga qo'yib, $f(x)$ funksiyani

$$f(x) = \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \int_0^x \nu(s)ds + c - f(0), \tag{20}$$

topamiz. (19) va (20) formulalar bilan topilgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning qiymatini (5) umumiy yechimga qo'ysak, 2–Darbu masalasining yechimi

$$u(x,y) = \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \int_0^{x+y} \nu(s)ds + c - f(0) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) - f(0),$$

yoki

$$u(x,y) = \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) + \int_0^{x+y} \nu(s)ds - \psi(0). \tag{21}$$

hosil bo'ladi. Bu yerda $c - 2f(0) = \psi(0)$.

Agar $\psi(x) \in C^2(0, l/2)$ va $\nu(x)$ funksiya $[0, l]$ segmentda integrallanuvchi (ya'ni $\nu(x) \in I[0, l]$) va $\nu(x) \in C^1(0, l)$ bo'lsa, u holda (21) formula bilan aniqlangan $u(x,y)$ funksiya G sohada (2) tenglamani va (13), (15) shartlarni qanoatlantiradi.

Demak, quyidagi teorema isbotlandi:

3–TEOREMA. Agar

$$\nu(x) \in I[0, l] \cap C^1(0, l), \ quad \psi(x) \in C[0, l/2] \cap C^2(0, l/2)$$

bo'lsa, u holda (2) tenglama uchun 2–Darbu masalasi G sohada yagona yechimga ega bo'ladi va bu yechim (21) formula bilan aniqlanadi.

12–§. Chiziqli giperbolik tenglama uchun Koshi va Gursa masalalari. Ketma–ket yaqinlashish usuli

Quyidagi ikkinchi tartibli chiziqli

$$Lu \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \tag{1}$$

giperbolik tipdagi tenglamani qaraylik.

Biz II bobda har qanday ikki o'zgaruvchili chiziqli giperbolik tipdagi tenglamani (1) kanonik ko'rinishga keltirilishi mumkin ekanligini ko'rdik. (1) tenglamaning xarakteristikalari $x = const$ va $y = const$ bo'lishini topish qiyin emas.

R^2_{xy} tekislikda γ egri chiziq shunday berilganki, bu egri chiziqni koordinat o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlar bilan kamida bitta nuqtada kesib o'tsin.

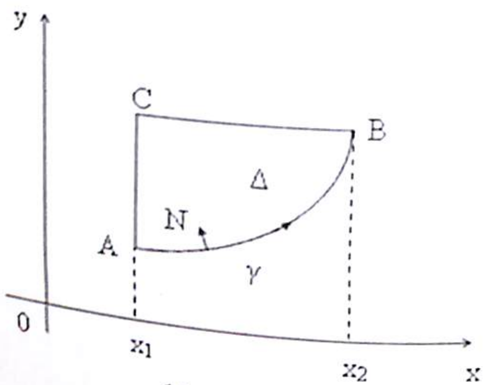
1. Koshi masalasi.

g'amma egri chiziq atrofida (1) tenglamaning ushbu

$$u|_{\gamma} = \tau, \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\gamma} = \nu.$$

shartlarni qanoatlantiradigan $u(x,y)$ yechimi topilsin.

Bu yerda τ va ν γ egri chiziq ustida berilgan yetarlicha silliq funksiyalar, n esa γ egri chiziqqa o'tkazilgan normal. Bu masalada yechimning aniqlanish sohasi γ chiziqning biror atrofidan iborat bo'ladi.



10 — shakl.

Agar γ egri chiziq (1) tenglamaning xarakteristikalari bilan ustma–ust tushmasa, tenglamaning koeffitsientlari va berilgan τ, ν, $f(x,y)$ funksiyalar hamda γ egri chiziq analitik funksiyalar bo'lsa, u holda Koshi–Kovalevskaya teoremasiga asosan Koshi masalaning γ egri chiziqning yetarlicha kichik atrofida analitik yechimi mavjud va yagona bo'ladi.

Qaralayotgan (1) tenglama giperbolik tipdagi tenglama bo'lgani uchun ham Koshi masalasining ... chiziqning kichik atrof... chiziqning A ...

Endi (1) tenglama uchun Koshi masalasining qo'yilishini aniqlab olaylik. γ egri chiziq $y = \gamma(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin, bunda $x_A \le x \le x_B$, $\gamma(x) \in C^1[x_A, x_B]$ va $\dfrac{d\gamma(x)}{dx} > 0$.

Koshi masalasi. (1) tenglamaning egri chiziqli $\overline{\Delta}$ sohada aniqlangan uzluksiz va quyidagi

$$u(x,y)|_{AB} = u(x,y)|_{y=\gamma(x)} = \tau(x), \quad x_A \le x \le x_B, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AB} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{y=\gamma(x)} = \nu(x), \quad x_A \le x \le x_B, \tag{3}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimini toping.

Bu yerda $\tau(x)$ va $\nu(x)$ berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

Shuni ta'kidlash muhimki, (2) va (3) Koshi shartlari $y = \gamma(x)$ egri chiziq ustida $u_x(x,y)$ va $u_y(x,y)$ hosilalarni aniqlashga imkon beradi. Haqiqatdan ham, (2) shartni x o'zgaruvchi bo'yicha differensiallab,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=\gamma(x)} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\gamma(x)} \gamma'(x) - \tau'(x), \tag{4}$$

ifodani olamiz.

$u(x,y)$ funksiyadan γ egri chiziqda normal bo'yicha olingan hosila quyidagicha

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=\gamma(x)} \cos(x,n) + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\gamma(x)} \cos(y,n) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\gamma'(x) - \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \tag{5}$$

bo'ladi. Hosil bo'lgan (4)–(5) tenglamalar sistemasidan u_x va u_y hosilalarni (6) bir qiymatli aniqlanlaymiz.

1–TEOREMA. Agar (1) tenglamaning koeffitsientlari va o'ng tomoni

$$a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y),\ f(x,y)\in C(\overline{\Delta})$$

hamda berilgan $\tau(x)$ va $\nu(x)$ funksiyalar

$$\tau(x)\in C^1[x_A,x_B],\quad \nu(x)\in C[x_A,x_B].$$

bo'lsa, u holda (1)–(3) Koshi masalasining yechimi mavjud va yagona bo'ladi.

ISBOT. Agar quyidagi

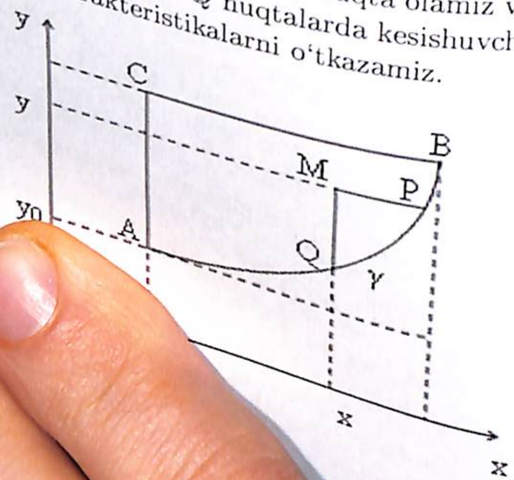
$$v=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad w=\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{8}$$

yordamchi funksiyalarni kiritsak, u holda (1) tenglama ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}=f(x,y)-a(x,y)v-b(x,y)w-c(x,y)u;\\ \dfrac{\partial w}{\partial x}=f(x,y)-a(x,y)v-b(x,y)w-c(x,y)u;\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=w(x,y). \end{cases} \tag{9}$$

uchta tenglamalar sistemasiga ekvivalent bo'ladi.

Endi Δ sohada ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqta olamiz va shu nuqtadan chiquvchi γ chiziq bilan P va Q nuqtalarda kesishuvchi (1) tenglamaning MP va MQ xarakteristikalarni o'tkazamiz.



11 – shakl.

(9) sistemaning birinchi va uchinchi tenglamasini QM kesma $y=const$ bo'yicha, ikkinchi tenglamasini esa PM kesma $x=const$ bo'yicha integrallaymiz hamda (2), (6), (7) va (8) ifodalarni hisobga olib $v(x,y)$, $u(x,y)$, $w(x,y)$ funksiyalarni

$$\begin{cases} v=\varphi(x)+\int\limits_{\gamma(x)}^{y}[f-av(x,\eta)-bw(x,\eta)-cu(x,\eta)]d\eta;\\ w=\widetilde{\psi}(y)+\int\limits_{h(y)}^{x}[f-av(\xi,y)-bw(\xi,y)-cu(\xi,y)]d\xi;\\ u=\tau(x)+\int\limits_{\gamma(x)}^{y}w(x,\eta)d\eta. \end{cases} \tag{10}$$

ko'rinishda aniqlaymiz. Bu yerda

$$\widetilde{\psi}(y)=\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=h(y)},$$

$h(y)$ esa $\gamma(x)$ ga teskari bo'lgan funksiya.

Agar $u(x,y)$ funksiya (1)–(3) Koshi masalasining yechimi bo'lsa, u holda $v(x,y)$, $w(x,y)$ va $u(x,y)$ funksiyalar (10) integral tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi va aksincha yopiq $\overline{\Delta}$ sohada (10) sistemaning ixtiyoriy (v,w,u) yechimi (9) differensial tenglamalar sistemasini va u funksiya esa Koshi masalasi shartlarini qanoatlantiradi.

Bundan tashqari (4), (6), (9) formulalardan va (10) sistemaning birinchi tenglamasidan

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=\gamma(x)}+\int\limits_{\gamma(x)}^{y}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)d\xi=$$

$$=\varphi(x)+\int\limits_{\gamma(x)}^{y}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)d\xi=\varphi(x)+\int\limits_{\gamma(x)}^{y}\frac{\partial w}{\partial\xi}d\xi=$$

$$= \varphi(x) + \int\limits_{h(y)}^{x} [f - av(\xi,y) - bw(\xi,y) - cu(\xi,y)]d\xi = v;$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, (8) tengliklar bajariladi.

Endi (8) tengliklarni (9) sistemaning birinchi tenglamasiga qo'yib, $u(x,y)$ funksiyaning (1) tenglamani va (2), (3) Koshi shartlarini qanoatlantirishiga ishonch hosil qilishimiz mumkin.

Shunday qilib, (1)–(3) Koshi masalasini (10) integral tenglamalar sistemasiga ekvivalent ekan. Bu integral tenglamalar sistemasini ketma-ket yaqinlashish usuli bilan echamiz.

Buning uchun nolinchi yaqinlashish sifatida

$$v_0 = \varphi(x), \qquad w_0 = \widetilde{\psi}(y), \qquad u_0 = \tau(x)$$

berilgan boshlang'ich funksiyalarni olamiz va ketma-ketlikning keyingi hadlarini quyidagi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial n} = \varphi(x) + \int\limits_{\gamma(x)}^{y} [f(x,\eta) - av_{n-1} - bw_{n-1} - cu_{n-1}]d\eta; \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = \widetilde{\psi}(y) + \int\limits_{h(y)}^{x} [f(\xi,y) - av_{n-1} - bw_{n-1} - cu_{n-1}]d\xi; \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \tau(x) + \int\limits_{\gamma(x)}^{y} w_{n-1}(x,\eta)d\eta, \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{cases} \tag{11}$$

formulalar bo'yicha quramiz.

Endi yopiq $\overline{\Delta}$ sohada v_n, w_n va u_n ketma-ketliklarni yaqinlashuvchi ekanligini isbotlaylik. Buning uchun quyidagi

$$v_{n+1} - v_n = -\int\limits_{\gamma(x)}^{y} [a(v_n - v_{n-1}) + b(w_n - w_{n-1}) + c(u_n - u_{n-1})]d\eta;$$

$$w_{n+1} - w_n = -\int\limits_{h(y)}^{x} [a(v_n - v_{n-1}) + b(w_n - w_{n-1}) + c(u_n - u_{n-1})]d\xi;$$

$$u_{n+1} - u_n = \int\limits_{\gamma(x)}^{y} (w_n - w_{n-1})d\eta. \tag{12}$$

ayirmalarni tuzamiz.

Agar Kg'eq$\max\limits_{\Delta}\{|a| + |b| + |c|\}$ va $A = const > 0$ bo'lsa, u holda $|v_n - v_{n-1}|$, $|w_n - w_{n-1}|$ va $|u_n - u_{n-1}|$ ayrimalar quyidagi

$$\begin{cases} |v_n - v_{n-1}| \le K^{n-1} A \dfrac{(x + y - x_0 - y_0)^{n-1}}{(n-1)!}; \\ |w_n - w_{n-1}| \le K^{n-1} A \dfrac{(x + y - x_0 - y_0)^{n-1}}{(n-1)!}; \\ |u_n - u_{n-1}| \le K^{n-1} A \dfrac{(x + y - x_0 - y_0)^{n-1}}{(n-1)!}; \end{cases} \tag{13}$$

tengsizliklarni qanoatlantirishini ko'rsataylik.

Bu tengsizliklarning to'g'ri ekanligini matematik induksiya usuli bilan isbotlaymiz. Agar A yetarlicha katta bo'lsa, u holda $n = 1$ bo'lganda (13) baholar to'g'ri bo'ladi. Endi bu tengsizliklar $n + 1$ bo'lganda ham o'rinli ekanligini ko'rsataylik. Yuqorida tuzilgan (12) ayirmalardan, masalan uning birinchisidan

$$|v_{n+1} - v_n| \le \int\limits_{\gamma(x)}^{y} (|a| + |b| + |c|)\, K^{n-1} A \frac{(x + \eta - x_0 - y_0)^{n-1}}{(n-1)!}\, d\eta \le$$

$$\le K^n A \int\limits_{y_0}^{y} \frac{(x + \eta - x_0 - y_0)^{n-1}}{(n-1)!}\, d\eta =$$

$$= \frac{K^n}{n!} A\,[(x + y - x_0 - y_0)^n - (x - x_0)^n] \le$$

$$\le K^n A \frac{(x + y - x_0 - y_0)^n}{n!}, \quad (x > x_0,\ y\text{g'eq}\gamma(x) > y_0)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Xuddi shu kabi $|w_{n+1} - w_n|$ va $|u_{n+1} - u_n|$ ayrimalarni baholaymiz. Natijada ushbu

$$v_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(v_n - v_{n-1}),\quad w_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(w_n - w_{n-1}),\quad u_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n-1}) \qquad (14)$$

qatorlarni olamiz. Bu qatorlarning har bir hadi absolyut qiymati jihatidan yaqinlashuvchi

$$A + A\sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1}\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!} = A\,(1 + exp\{K(x+y-x_0-y_0)\})$$

qatorning hadlaridan kichik. Shuning uchun (14) qatorlar (13) tengsizliklarga asosan yopiq $\overline{\Delta}$ sohada absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Demak, v_n, w_n va u_n ketma-ket yaqinlashishlar mos ravishda yopiq $\overline{\Delta}$ sohada uzluksiz bo'lgan v, w va u limitga intiladi. (11) sistemada $n \to \infty$ limitga o'tsak, u holda bu ketma-ketliklar mos ravshida $v(x,y)$, $w(x,y)$ va $u(x,y)$ funksiyalarga intiladi. Bu limit funksiyalar (10) sistemani qanoatlantiradi, bunda esa u_x, u_y, v_y va w_x funksiyalarning yopiq $\overline{\Delta}$ sohada uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.

Endi (10) tenglamalar sistemasi yechimining yagona ekanligini isbotlaylik.

Faraz qilaylik, (10) tenglamalar sistemasi v_1, w_1, u_1 va v_2, w_2, u_2 yechimlarga ega bo'lsin. Ularning ayirmasini $V = v_1 - v_2$, $W = w_1 - w_2$ va $U = u_1 - u_2$ deb belgilaylik. U holda V, W va U funksiyalar ushbu

$$\begin{cases} V(x,y) = -\int\limits_{\gamma(x)}^{y} [aV - bW - cU]d\eta; \\ W(x,y) = -\int\limits_{h(y)}^{x} [aV - bW - cU]d\xi; \\ U(x,y) = -\int\limits_{\gamma(x)}^{y} W(x,\eta)d\eta, \end{cases} \qquad (15)$$

[sis]temani qanoatlantiradi. Bundan $V = W = U = 0$ ekanligini isbot[...]
[...]amiz. V, W va U funksiyalar egri chiziqli yopiq $\overline{\Delta}$ sohada uzluksiz

va chegaralangan. Demak, shunday B son mavjudki, bu son uchun

$$|V| \le B, \qquad |W| \le B, \qquad |U| \le B$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. U holda (15) sistemadan

$$|V(x,y)| \le \int\limits_{\gamma(x)}^{y} (|a| + |b| + |c|)Bd\eta \le$$

$$\le KB(y - y_0) \le KB\frac{(x+y-x_0-y_0)}{1!},$$

tengsizlikni olamiz. Xuddi shunday W va U uchun ham

$$|W(x,y)| \le KB\frac{(x+y-x_0-y_0)}{1!};$$

$$|U(x,y)| \le KB\frac{(x+y-x_0-y_0)}{1!},$$

tengsizliklar o'rinli ekanligini ko'ramiz. Bu tengsizliklarga matematik induksiya usulini qo'llaymiz va ixtiyoriy n uchun quyidagi

$$|V(x,y)| \le K^n B\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!};$$

$$|W(x,y)| \le K^n B\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!};$$

$$|U(x,y)| \le K^n B\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!},$$

baholar o'rinli bo'ladi.

Bundan esa $n \to \infty$ bo'lganda $V = W = U = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Shuday qilib, 1-teorema to'liq isbot bo'ldi.

2. Gursa masalasi.

Agar AB egri chiziq to'g'ri burchak tashkil qilsa, ya'ni $\angle ADB$ to'g'ri burchak bo'lsa, u holda ADB egri chiziqda ikkita chegaraviy shart berib bo'lmaydi. Buning o'rniga quyidagi Gursa masalasini qarashimiz mumkin.

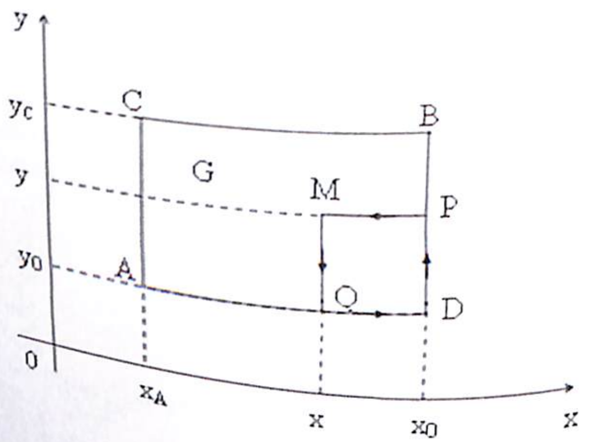
Giperbolik tipdagi (1) tenglamaning AD, DB, BC va AC xarakteristikalari bilan chegaralangan to'g'ri to'rtburchakli sohani G deb belgilaylik. Bu yerda $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, $D = (x_D, y_D)$ va $x_A = x_C$, $y_A = y_D$, $x_D = x_B$, $y_C = y_D$.

GURSA MASALASI. To'rtburchakli G sohada (1) tenglamaning quyidagi

$$u(x,y)|_{AD} = u|_{y=y_D} = \varphi_1(x), \quad x_A \le x \le x_D, \tag{16}$$

$$u(x,y)|_{DB} = u|_{x=x_D} = \varphi_2(y), \quad y_D \le y \le y_C, \tag{17}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimini toping. Bu yerda $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(y)$ berilgan etarlicha silliq funksiyalar va bu funksiyalar uchun $\varphi_1(x_D) = \varphi_2(y_D)$ tenglik o'rinli.



12 — shakl.

Gursa masalasi uchun ushbu teoremani isbotlaylik.

2–TEOREMA. Agar (1) tenglamaning koeffitsientlari va o'ng tomoni

o... (x,y), $c(x,y)$, $f(x,y) \in C(\overline{G})$

hamda berilga... ...ar

...$_A, x_D]$, $\varphi_2(y) \in C^1[y_D, y_B]$,

bo'lsa, u holda (1), (15)–(16) Gursa masalasining $u(x,y)$ yechimi $C^1(\overline{G})$ sinfda mavjud va yagona bo'ladi.

ISBOT. Xuddi Koshi masalasidagi kabi quyidagi

$$v = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad w = \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{18}$$

yordamchi funksiyalarni kiritsak, u holda (1) tenglama ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = f(x,y) - a(x,y)v - b(x,y)w - c(x,y)u; \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = f(x,y) - a(x,y)v - b(x,y)w - c(x,y)u; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = w(x,y); \end{cases} \tag{19}$$

tenglamalar sistemasiga ekvivalent bo'ladi.

Endi G sohada ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqta olamiz va bu nuqta orqali (1) tenglamaning MP va MQ xarakteristikalarini o'tkazamiz. Bu yerda $P = (x_D, y)$, $Q = (x, y_D)$.

(19) sistemaning birinchi va uchinchi tenglamalarini QM kesmada, ikkinchi tenglamasini esa PM kesmada integrallab, ushbu

$$\begin{cases} v = v(x, y_D) + \int\limits_{y_D}^{y} [f - av(x,\eta) - bw(x,\eta) - cu(x,\eta)]d\eta; \\ w = w(x_D, y) + \int\limits_{h(y)}^{x} [f - av(\xi,y) - bw(\xi,y) - cu(\xi,y)]d\xi; \\ u = u(x, y_D) + \int\limits_{\gamma(x)}^{y} w(x,\eta)d\eta; \end{cases} \tag{20}$$

sistemaga ega bo'lamiz.

Bu sistemadan (16)–(18) tengliklarga ko'ra

$$v(x_0, y_D) = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=y_0} = \varphi_1'(x), \quad w(x_D, y) = \ldots$$

Agar $vL[u] - uL^*[v]$ ayirmani biror H va K ifodalarning mos ravishda x va y o'zaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalarining yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, u holda ikkita L va L^* differensial operatorlar *o'zaro qo'shma operatorlar* deyiladi.

Agar $L[u] = L^*[u]$ bo'lsa, u holda $L[u]$ *o'z-o'ziga qo'shma operator* deyiladi.

R^2_{xy} tekislikda S bo'lakli silliq chiziq bilan chegaralangan soha D bo'lsin. Endi (2) ayniyatni D sohada integrallaymiz va unga matematik analiz kursidan ma'lum bo'lgan Grin formulasini qo'llaymiz. Natijada

$$\iint_D \Big(vL[u] - uL^*[v]\Big)\,dxdy = \frac{1}{2}\int_S (Hdy - Kdx), \tag{4}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu formula ham ikki o'lchovli Grin formulasi deyiladi.

Riman usuli. Nemis matematigi R.Riman chiziqli giperbolik tipdagi tenglamalar uchun Koshi va Gursa masalalarining yechimini qurish usulini tavsiya qilgan.

Quyidagi Koshi masalasini qaraylik.

Koshi masalasi. Yopiq $\overline{D}$ sohada aniqlangan, uzluksiz va

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}), \quad u_{xy} \in C(D); \tag{5}$$

funksiyalar sinfiga tegishli

$$L[u] \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \tag{6}$$

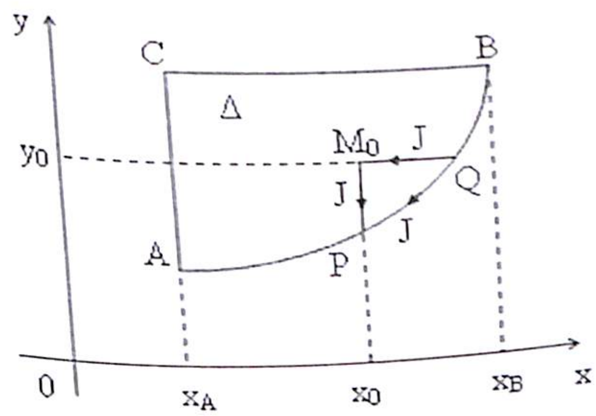
tenglamaning quyidagi

$$u|_{y=\gamma(x)} = \tau(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=\gamma(x)} = \nu(x), \tag{7}$$

...tlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimini toping. Bu yerda ...$b(x,y)$ - uzluksiz va birinchi tartibli hosilalarga ega, $c(x,y)$ ... uzluksiz funksiyalar, $\tau(x)$, $\nu(x)$ - berilgan funksiyalar, n ...i chiziqqa o'tkazilgan normal.

Ma'lumki, (6) tenglamaga mos xarakteristik tenglama $dxdy = 0$ bo'lib, $x = const$, $y = const$ to'g'ri chiziqlar tenglamaning xarakteristikalari bo'ladi.

Tekislikda biror $\gamma(x)$ egri chiziq berilgan bo'lib, (6) tenglamaning xarakteristikalari bu egri chiziqni bittadan ortiq nuqtalarda kesib o'tmasin.



13 — shakl.

$M(x_0, y_0)$ nuqtani belgilab, bu nuqtadan $x = x_0$, $y = y_0$ xarakteristikalarni o'tkazamiz. Bu xarakteristikalar berilgan $\gamma(x)$ chiziq bilan P va Q nuqtalarda kesishib, MPQ egri chiziqli uchburchak hosil qiladi. MPQ egri chiziqli uchburchak bilan chegaralangan soha Δ bo'lsin.

Faraz qilaylik, (5)–(7) masalaning $u(x,y)$ yechimi mavjud bo'lsin. U holda yopiq $\overline{\Delta}$ sohada aniqlangan, uzluksiz va

$$v(x,y) \in C^1(\overline{\Delta}), \quad v_{xy} \in C(\Delta)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $v(x,y)$ funksiya uchun (4) ayniyat o'rinli.

Noma'lum $u(x,y)$ funksiyaning $M(x_0, y_0)$ nuqtadagi qiymatini aniqlaymiz. Buning uchun (4) ifodani Δ sohada integrall... Grin formulasini qo'llaymiz.

Natijada

$$\iint\limits_{\Delta}(vLu - uL^*v)dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma}(Hdy - Kdx)$$

hosil bo'ladi.

Bu yerda γ kontur PQ yoydan hamda QM va MP xarakteristikalardan iborat.

Endi (4) ifodaning o'ng tomonidagi QM va MP xarakteristikalar bo'yicha olingan integrallarni qaraylik.

QM xarakteristikada $dy = 0$. MP xarakteristikada esa $dx = 0$ bo'lgani uchun (4) tenglik quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\iint\limits_{\Delta}(vLu - uL^*v)dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_{P}^{Q}(Hdy - Kdx) -$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q}^{M}Kdx + \frac{1}{2}\int\limits_{M}^{P}Hdy = J_1 + J_2 + J_3. \tag{8}$$

Endi J_i integrallarni alohida-alohida hisoblaymiz.

$$J_1 = \int\limits_{PQ} u(v_x dx - v_y dy) - v(u_x dx - u_y dy) - 2uv(bdx - ady). \tag{9}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{Q}^{M}Kdx = \frac{1}{2}\Big[(uv)_M - (uv)_Q\Big] - \int\limits_{Q}^{M}u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - bv\right)dx, \tag{10}$$

$$J_3 = \frac{1}{2}\int\limits_{M}^{P}Hdy = \frac{1}{2}\Big[(uv)_P - (uv)_M\Big] - \int\limits_{M}^{P}u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - av\right)dy. \tag{11}$$

Topilgan J_i integrallarning (9), (10) va (11) ifodalarini (8) formulaga qo'yib, mos hadlarini soddalashtirsak, quyidagi

$$u(M)v(M) = \frac{u(P)v(P) - u(Q)v(Q)}{2} -$$

$$-\int\limits_{P}^{Q} u(v_x dx - v_y dy) - v(u_x dx - u_y dy) - 2uv(bdx + ady) +$$

$$+\int\limits_{Q}^{M} u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - bv\right)\Big|_{y=y_0} dx + \int\limits_{P}^{M} u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - av\right)\Big|_{x=x_0} dy +$$

$$+\iint\limits_{\Delta}\Big[v(x,y)f(x,y) - uL^*v\Big]dxdy. \tag{12}$$

formulaga ega bo'lamiz. (12) formulaning o'ng tomonidagi ikki karrali integral va QM va MP xarakteristikalar bo'yicha integrallarda noma'lum $u(x,y)$ funksiya qatnashyapti. Riman usulining asosiy maqsadi, shu integrallarni nolga aylantiradigan qilib, v funksiyani tanlashdan iborat.

Faraz qilaylik, ikki juft $(x, y; x_0, y_0)$ o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan $v(x, y; x_0, y_0)$ funksiya quyidagi

1) Δ sohada

$$L^*_{xy}v(x, y; x_0, y_0) = 0, \tag{13}$$

bir jinsli tenglamani va

2) $$\left(\frac{\partial}{\partial x}v(x, y; x_0, y_0) - b(x, y)v(x, y; x_0, y_0)\right)\Big|_{y=y_0} = 0, \tag{14}$$

3) $$\left(\frac{\partial}{\partial y}v(x, y; x_0, y_0) - a(x, y)v(x, y; x_0, y_0)\right)\Big|_{x=x_0} = 0, \tag{15}$$

4) $x = x_0$ va $y = y_0$ bo'lganda

$$v(x, y; x_0, y_0) = 1, \tag{16}$$

shartlarni qanoatlantirsin.

Gursa masalasi yechimining integral ifodasini olamiz.

2 TEOREMA. Agar

$$a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y),\ a_x(x,y),\ b_y(x,y),\ f(x,y)\in C(\overline{\Delta})$$

$$\varphi_1(x)\in C^1[x_A,x_D],\ \varphi_2(y)\in C^1[y_D,y_B] \quad \text{va} \quad \varphi_1(x_D)=\varphi_2(y_D)$$

bo'lsa, u holda (6), (21), (22) Gursa masalasining yagona yechimi mavjud bo'ladi va (23) formula bilan aniqlanadi.

14-§. Telegraf tenglamasi uchun Koshi masalasi

O'tkazgichdan elektr toki o'tganda uning atrofida elektromagnit maydoni hosil bo'ladi. Bu maydon o'tkazgichdagi tok kuchi va kuchlanishni o'zgartiradi va bu o'zgarish o'tkazgichda tebranish jarayonini keltirib chiqaradi. Bunday tebranma jarayonlarni ifodalovchi tenglama matematik fizikada *telegraf tenglamasi* deb yuritiladi.

Biz ushbu paragrafda telegraf tenglamasini keltirib chiqarish va shu tenglama uchun Koshi masalasini o'rganamiz.

1. TELEGRAF TENGLAMASINI KELTIRIB CHIKARISH.

Uzunligi l bo'lgan o'tkazgichni Ox o'qi bo'ylab, koordinata boshiga o'tkazgichning bir uchini joylashtiraylik. O'tkazgichdan o'tayotgan elektr okimi Ox o'kining musbat yo'nalishi bilan bir xil yo'nalgan bo'lsin. O'tkazgichning biror nuqtasidagi i tok kuchi va v kuchlanishi x abssissa va t vaqtning funksiyasi bo'ladi. Tok kuchi i va uning v kuchlanishi biror birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama bilan o'zaro bog'liq bo'ladi. O'tkazgichning birlik uzunligiga mos keluvchi qarshilik R, elektr sig'imi C, o'z induksiya koeffitsienti L va tokning isrof bo'lish koeffitsienti G o'zgarmas bo'lsin. O'tkazgichning ixtiyoriy $x=x_1$ va $x=x_2$ nuqtalar orasidagi qismini qaraymiz. Bu qismga Om qonunini qo'llaymiz. Natijada

$$v(x_1,t)-v(x_2,t)=R\int_{x_1}^{x_2} i(x,t)dx+L\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}dx, \qquad (1)$$

ikkinchidan esa

$$v(x_1,t)-v(x_2,t)=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}dx$$

bo'ladi. U holda yuqoridagi tengliklardan

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}+L\,\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}+R\,i(x,t)\right)dx=0$$

ifoda kelib chiqadi. Bundan esa x_1 va x_2 nuqtalarning ixtiyoriy ekanligidan $v(x,t)$ va $i(x,t)$ funksiyalarga nisbatan

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}+L\,\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}+R\,i(x,t)=0, \qquad (2)$$

tenglamani olamiz.

Bir tomondan, birlik vaqt davomida o'tkazgichning $[x_1,x_2]$ qismidan o'tayotgan elektr miqdori

$$i(x_1,t)-i(x_2,t)=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}dx, \qquad (3)$$

ga teng bo'ladi. Ikkinchi tomondan esa, birlik vaqtda o'tkazgichning shu belgilangan qismidan o'tayotgan elektr miqdori o'tkazgichning yi-qismni zaryadlashga ketgan va isrof bo'lgan elektr miqdorining yig'indisiga teng, ya'ni

$$i(x_1,t)-i(x_2,t)=C\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}dx+G\int_{x_1}^{x_2}v(x,t)dx, \qquad (4)$$

bo'ladi. U holda (3) va (4) formulalardan

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}+C\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+G\,i(x,y)\right)dx=0.$$

Sterjenning $x = 0$ va $x = l$ chetlarida uning harorati yoki issiqlik oqimining zichligi ma'lum bo'lishi yoki atrof muhit bilan issiqlik almashinish shartlarini berish mumkin.

Agar sterjenning $x = 0$ uchida $\mu_1(t)$ temperatura va $x = l$ uchida issiqlik okimining zichligi $\nu_1(t)$ ma'lum bo'lsa, u holda

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad -k(l)\,\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \nu_1(t) \tag{3}$$

chegaraviy shartlar beriladi.

Agar sterjenning $x = 0$ va $x = l$ uchlarida issiqlik okimining zichligi nolga teng bo'lsa, u holda sterjenning uchlari *issiqlik o'tkazmaydigan* deyiladi.

Masalan, agar sterjenning $x = l$ uchi issiqlik o'tkazmaydigan bo'lsa, bu holda

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

chegaraviy shart beriladi.

Agar sterjenning uchlarida atrof muxit bilan issiqlik almashinishi sodir bo'layotgan bo'lsa, u holda birlik vaqtda sterjenning x kesimidan atrof muxitga chiqayotgan issiqlik miqdori sterjenning temperaturasidan atrof muxit temperaturasining ayrimasiga proporsional bo'ladi, ya'ni

$$q = H(u - u_0),$$

bu yerda H – issiqlik almashinish koeffitsienti, u – sterjenning, u_0 esa atrof muxitning temperaturasi.

Issiqlik oqimi zichligining fizikaviy xossasiga asosan sterjenning $x = 0$ va $x = l$ uchlarida

$$k(0)\,\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = H_1[u(0,t) - p_1(t)], \tag{5}$$

$$k(l)\,\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = H_2[u(l,t) - p_2(t)], \tag{6}$$

is[illegible]ish shartlarini olamiz.

Bu yerda H_1 va H_2 – sterjenning mos ravishda chap va o'ng uchlarining issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti, $p_1(t)$ va $p_2(t)$ mos ravishda sterjenning uchlari atrofining harorati.

Yuqoridagi (5)–(6) chegaraviy shartlarni quyidagi

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - h_1 u(0,t) = \mu_1(t), \tag{7}$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} - h_2 u(l,t) = \mu_2(t), \tag{8}$$

ko'rinishda yozib olish mumkin. Bu yerda

$$h_1 = \frac{H_1}{k(0)} > 0, \qquad h_2 = \frac{H_2}{k(l)} > 0,$$

$$\mu_1(t) = -\frac{H_1}{k(0)}\,p_1(t), \qquad \mu_2(t) = \frac{H_2}{k(l)}\,p_2(t).$$

Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun yuqorida keltirilgan chegaraviy shartlarni umumiy holda

$$\alpha_1\,\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \beta_1 u(0,t) = \mu_1(t), \quad t > 0, \tag{9}$$

$$\alpha_2\,\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \beta_2 u(l,t) = \mu_2(t), \quad t > 0 \tag{10}$$

yozish mumkin. Bunda $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ va β_2 – berilgan o'zgarmaslar, ular uchun ushbu $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$ tengsizliklar o'rinli, $\mu_1(t)$ va $\mu_2(t)$ berilgan funksiyalar.

Agar $\alpha_i = 0$ va $\beta_i \neq 0$ bo'lsa, u holda (9), (10) shartlar

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(l,t) = \mu_2(t)$$

kurinishni oladi va ular *birinchi tur chegaraviy shartlar* deyiladi.

Agar $\alpha_i \neq 0$ va $\beta_i = 0$ bo'lsa, u holda (9), (10) shartlar *ikkinchi tur chegaraviy shartlar* deyiladi va ular

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \nu_1(t), \qquad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \nu_2(t)$$

kurinishda ifodalanadi.

Agar $\alpha_i \neq 0$ va $\beta_i \neq 0$ bo'lsa, u holda (9), (10) shartlar *uchinchi tur chegaraviy shartlar* deyiladi.

16–§. Issiklik tarqalish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala

MASALANING QO'YILISHI. YECHIMNING YAGONALIGI. Berilgan chekli $Q = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ sohada

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{1}$$

tenglamaning

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l; \tag{2}$$

boshlang'ich va

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan yechimini topish masalasi *birinchi chegaraviy masala* deb yuritiladi.

Bu yerda l uchi koordinat boshida bo'lgan sterjenining uzunligini, T esa shu fizik jarayonni o'rganish qancha vaqt davom etishini bildiradi, $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – berilgan funksiyalar.

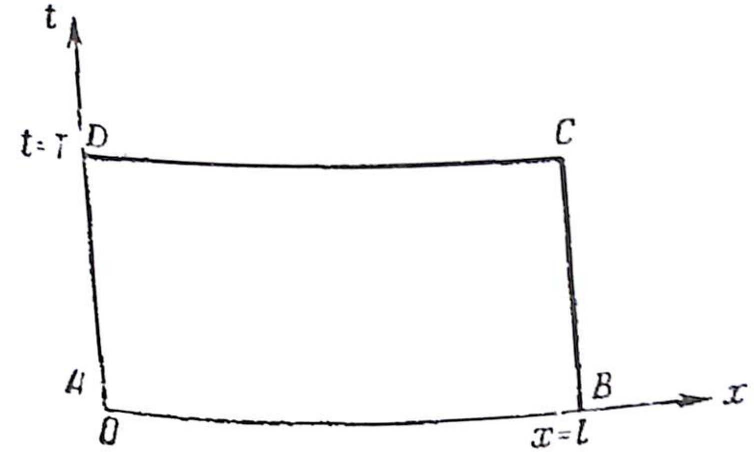
Biz izlanayotgan $u(x,t)$ yechimni $\overline{Q}$ yopiq sohada uzluksiz funksiya deb faraz qilamiz va shuning uchun berilgan $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ funksiyalarni uzluksizligini va demak,

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi(l) = \mu_2(0)$$

bo'lishini talab qilamiz.

I bobdan ma'lumki, (1)–(3) chegaraviy masala biror qattiq jismning boshlang'ich harorati $\varphi(x)$, uning chegarasidagi harorati ma'lum bo'lsa, bu jismning $\forall t \in [0,T]$ vaqtdagi $u(x,t)$ haroratni aniqlaydi.

Yuqorida qo'yilgan (1)–(3) masalani yechishda $t > 0$ bo'lishi juda muhim, chunki tor tebranish tenglamasidan farqli o'laroq t vaqtni $-t$ ga almashtirsak, (1) tenglama tubdan o'zgarib ketadi. Shuni [illegible]kidlash muhimki, agar (1) tenglamada t vaqt $-t$ ga al[illegible] [illegible] qaralayotgan boshlang'ich–chegaraviy masala umuman [illegible] bo'lmaydi. Bu fizikaviy jarayonlarga va tenglamani [illegible]higa bevosita bog'liq.



17 – shakl.

Biz qo'yilgan (1)–(3) birinchi boshlang'ich–chegaraviy masalani to'liq o'rganish bilan cheklanamiz. Avval bu masala yechimining yagona ekanligini ekstremum prinsipi yordamida ko'rsatamiz va yechimning turg'unligini isbotlaymiz. (1)–(3) masala yechimining mavjudligi esa matematik fizikada keng ko'llaniladigan usullardan biri o'zgaruvchilarni ajratish, Fur'e usuli bilan ko'rsatamiz.

EKSTREMUM PRINSIPI.

1–TEOREMA. Yopiq $\overline{Q}$ sohada uzluksiz bo'lgan va Q soha ichida bir jinsli

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{6}$$

issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga Γ chiziqda erishadi.

Bu yerda Γ qaralayotgan Q to'rtburchakning $t = 0$, $x = 0$ va $x = l$ chiziqlar ustida yotgan chegaralarining yig'indisi.

ISBOT. $u(x,t)$ funksiyaning Q to'rtburchakdagi eng katta qiymati M, ya'ni $\max\limits_{D}|u(x,t)| = M$ va chiziq ustidagi eng katta qiymati esa m, ya'ni $\max\limits_{\Gamma}|u(x,t)| = m$ deb belgilaymiz.

Faraz qilaylik, Q to'rtburchakda shunday (x^*, t^*) ichki nuqta topilsinki, bu yerda $t^* > 0$, $0 < x^* < l$, bu nuqtada $M > m$ bo'lsin.

Bu masala yechimining yagonaligi 16-§da ekstremum prinsipi yordamida isbotlangan.

Qaralayotgan (1)–(3) masala yechimining mavjudligini bir jinsli chegaraviy shartli masalaga keltirib isbotlaymiz.

Buning uchun $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ funksiyalarni $C^1[0,T]$ sinfdan bo'lsin, deb talab qilamiz. U holda (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi

$$\omega(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]$$

yordamchi funksiya kiritamiz, ya'ni

$$\omega(0,t) = \mu_1(t), \qquad \omega(l,t) = \mu_2(t).$$

Endi (1) tenglamaning (2) boshlang'ich va (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini quyidagi

$$u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t). \tag{4}$$

yig'indi ko'rinishida izlaymiz. Bu yerda $v(x,t)$ yangi noma'lum funksiya. (2) boshlang'ich va (3) chegaraviy shartlar asosida $v(x,t)$ funksiyaga nisbatan quyidagi

$$v(0,t) = u(0,t) - \omega(0,t) = \mu_1(t) - \mu_1(t) = 0;$$

$$v(l,t) = u(l,t) - \omega(l,t) = \mu_2(t) - \mu_2(t) = 0;$$

$$v(x,0) = u(x,0) - \omega(x,0) = \varphi(x) - \mu_1(0) + \frac{x}{l}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] = \tilde{\varphi}(x)$$

chegaraviy va boshlang'ich shartlarga ega bo'lamiz. Noma'lum $v(x,t)$ funksiyaga nisbatan tenglama esa

$$v_t - a^2 v_{xx} = (u-\omega)_t - a^2(u-\omega)_{xx} =$$

$$= u_t - a^2 u_{xx} - (\omega_t - a^2\omega_{xx}) =$$

$$= f(x,t) - \mu_1'(t) - \frac{x}{l}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] = g(x,t),$$

yoki

$$v_t = a^2 v_{xx} + g(x,t), \tag{5}$$

bo'lib, bunda

$$g(x,t) = f(x,t) - \mu_1'(t) - \frac{x}{l}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)].$$

Shunday qilib, noma'lum $v(x,t)$ funksiyani topish uchun quyidagi masalaga keldik. Bir jinsli bo'lmagan (5) tenglamaning

$$v|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x) \tag{6}$$

boshlang'ich va bir jinsli

$$v|_{x=0} = 0, \qquad v|_{x=l} = 0 \tag{7}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $v(x,t)$ yechimi topilsin. Bu yerda $g(x,t)$ funksiya uzluksiz va x bo'yicha bo'lakli uzluksiz hosilaga ega hamda barcha $t > 0$ lar uchun $g(0,t) = g(l,t) = 0$ bo'lsin, deb talab qilamiz.

Oxirgi (5)–(7) masalaning yechimini

$$v(x,t) = v_1(x,t) + v_2(x,t)$$

yig'indi ko'rinishida izlaymiz.

Bu yerda $v_1(x,t)$ funksiya bir jinsli issiqlik tarqalish tenglamasining (6)–(7) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bo'lib, u avvalgi paragrafda (20) formula bilan, a_n Fur'e koeffitsienti esa (22) formula bilan aniqlangan. (22) formulani inobatga olib, (20) qatorni quyidagi

$$v_1(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l \left[e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]\varphi(\xi)d\xi,$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.

$v_2(x,t)$ funksiya esa (5) tenglamaning bir jinsli boshlang'ich va (7) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi echimidan iborat, ya'ni

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + g(x,t)$$

$$+\int_0^t\int_0^l\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right]\right\}g(\xi,\tau)d\xi d\tau;$$

yoki

$$v(x,t)=\int_0^l G(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi+\int_0^t\int_0^l G(x,\xi;t-\tau)\,g(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad (16)$$

ko'rinishda topamiz. Bu yerda

$$G(x,\xi;t-\tau)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}.$$

(16) formuladagi $G(x,\xi;t-\tau)$ funksiya oniy issiqlik manbai yoki ***Grin funksiyasi*** deyiladi.

Endi mavzuga oid bir nechta masala qaraylik.

1–MASALA. Bir jinsli bolmagan ushbu

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), \quad (17)$$

issiqlik tarqalish tenglamasining $D=\{(x,t):0<x<l, t>0\}$ sohada aniqlangan uzluksiz va quyidagi boshlang'ich

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\le x\le l, \quad (18)$$

va chegaraviy

$$u_x(0,t)=0, \quad u_x(l,t)+hu(l,t)=0, \quad h>0, \quad (19)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimini toping.

Bu masalada qaralayotgan sterjenning $x=0$ uchida issiqlik oqimining zichligi nolga teng, ya'ni sterjenning $x=0$ uchi issiqlik o'tkazmaydi. Issiqlik oqimi zichligining xossasiga asosan sterjenning $x=l$ uchida esa atrof muhit bilan issiqlik almashish jarayoni sodir bo'ladi. Shuning uchun sterjenning $x=l$ uchida issiqlik almashish sharti berilgan.

YECHISH. Berilgan aralash masala yechimini

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$$

yig'indi ko'rinishida izlaymiz. Bu yerda $u_1(x,t)$ bir jinsli tenglamaning (18)-(19) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi, ya'ni

$$u_1(x,t):\begin{cases}u_t=a^2u_{xx},\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\le x\le l,\\ u_x(0,t)=0, \quad u_x(l,t)+hu(l,t)=0, \quad h>0;\end{cases} \quad (20)$$

$u_2(x,t)$ esa (17) tenglamaning bir jinsli boshlang'ich va chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimidan iborat, ya'ni

$$u_2(x,t):\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\\ u(x,0)=0, \quad 0\le x\le l,\\ u_x(0,t)=0, \quad u_x(l,t)+hu(l,t)=0, \quad h>0;\end{cases} \quad (21)$$

1^0. Avval (20) masalaning yechimini topaylik.

(19) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi bir jinsli issiqlik tarqalish tenglamasining yechimini $u(x,t)=X(x)T(t)$ ko'rinishda izlaymiz. Bundan $X(x)$ funksiyaga nisbatan ushbu

$$X'(0)=0, \quad X'(l)+hX(l)=0 \quad (22)$$

chegaraviy shartlarni olamiz. $u(x,t)$ funksiyani bir jinsli tenglamaga qo'yib, sodda almashtirishlardan so'ng $X(x)$ funksiyaga nisbatan

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad h>0;\\ X'(0)=0, \quad X'(l)+hX(l)=0,\end{cases} \quad (23)$$

SHturm–Liuvill masalasini, $T(t)$ funksiyaga nisbatan esa $t>0$,

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0,$$

tenglamani olamiz.

hosil bo'ladi. Bundan $|\varphi(x+2az\sqrt{t})-\varphi(x)|\leq 2M$ ekanligini hisobga olib,

$$|u(x,t)-\varphi(x)|\leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}d\alpha =$$

$$= \frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-N} e^{-z^2}dz + \frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-N}^{N} a^{-z^2}dz + \int\limits_{N}^{\infty} e^{-z^2}dz,$$

deb yozish mumkin. Bundan esa har qanday kichik $\varepsilon>0$ berilganda ham N ni shunday tanlab olish mumkinki,

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-N} e^{-z^2}dz \leq \frac{\varepsilon}{3},\quad \frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{N}^{\infty} e^{-z^2}dz \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

bo'ladi. Demak,

$$|u(x,t)-\varphi(x)|\leq \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-N}^{N}|\varphi(x+2za\sqrt{t})-\varphi(x)|e^{-z^2}dz \tag{19}$$

deb yozish mumkin. $\varphi(x)$ funksiyaning uzluksizligidan yetarli kichik $t>0$ va $|z|\leq N$ uchun

$$|\varphi(x+2az\sqrt{t})-\varphi(x)|\leq \frac{\varepsilon}{3}$$

bajariladi. U holda (19) tengsizlikka asosan

$$|u(x,t)-\varphi(x)|\leq \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-N}^{N} e^{-z^2}dz \leq$$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Bundan $\varepsilon>0$ ixtiyoriyligidan

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \varphi(x)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday usul bilan Koshi masalasining yechimi turg'un ekanligini ham isbotlash mumkin. Demak, issiqlik tarqalishi tenglamasi uchun Koshi masalasi korrekt qo'yilgan masala ekan.

Agar Koshi masalasida (2) boshlang'ich shart $t=0$ da emas, biror $t=\tau$ da berilgan bo'lsa, (12) formulada t ni $t-\tau$ bilan almashtirish lozim, ya'ni

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}. \tag{20}$$

Bu funksiya Koshi masalasining *Grin funksiyasi* ham deb yuritiladi va chegaraviy masalalarning yechimlarini oshkor ravishda topishda keng qo'llaniladi.

20–§. Bir jinsli bo'lmagan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun Koshi masalasi

Endi $t>0$ da bir jinsli bo'lmagan issiqlik tarqalish tenglamasi

$$u_t = a^2u_{xx}+f(x,t),$$

uchun Koshi masalasining yechimini topaylik.

(1)–(2) Koshi masalasining yechimini $u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$ yig'indi ko'rinishida izlaymiz, bu yerda $u_1(x,t)$ funksiya bir jinsli issiqlik tarqalish tenglamasining (2) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi, $u_2(x,t)$ esa (1) tenglamaning bir jinsli boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi.

Yuqorida bir jinsli tenglamaning (2) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini (12) formula orqali topgan edik.

Endi $u_2(x,t)$ yechimning integral ifodasini topamiz. Agar $f(x,t)$ funksiya $t>0$, $-\infty<x<+\infty$ da uzluksiz va chegaralangan bo'lsa, u holda

$$v(x,t,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2a\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau)\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}d\xi, \tag{21}$$

funksiya $t>\tau$ da $v_t=a^2v_{xx}$ tenglamani va $t=\tau$ da esa $v(x,t,t)=f(x,t)$ tenglikni qanoatlantiradi.

Ushbu

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t,\tau)d\tau,$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya uchun quyidagi tengliklarning

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,t)=v(x,t,t)+\int_0^t v_t(x,t,\tau)d\tau$$

$$u_{xx}=\int_0^t v_{xx}(x,t,\tau)d\tau$$

o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Bu tengliklardan (21) funksiya (1)–(2) masalaning yechimi ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $v(x,t,\tau)$ funksiyaning ifodasini (21) tenglikka qo'yib, bir jinsli bo'lmagan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun bir jinsli Koshi masalasining

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}f(\xi,\tau)d\xi, \tag{22}$$

yechimiga ega bo'lamiz.

Endi yuqorida topilgan (12) va (22) formulalarni qo'shib, issiqlik tarqalish tenglamasi uchun (1)–(2) Koshi masalasining yechimi

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}d\xi+$$

$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{23}$$

hosil qilamiz.

3–TEOREMA. Agar $\varphi(x)$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ oraliqda, $f(x,t)$ funksiya $t>0$, $-\infty<x<+\infty$ sohada uzluksiz va chegaralangan bo'lsa, u holda (1)–(2) Koshi masalasining yechimi mavjud va yagona bo'lib, bu yechim (23) formula bilan aniqlanadi.

Bu yerda $f(x,t)\in C^2(t\geq 0)$ va uning birinchi va ikkinchi tartibli barcha hosilalari $t>0$ da chegaralangan funksiyalar.

1–NATIJA. Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun qo'yilgan Koshi masalasining $u(x,t)$ yechimi Q sohada cheksiz differensiallanuvchi, ya'ni $u(x,t)\in C^\infty(Q)$ bo'ladi.

2–IZOX. Yuqoridagi natijaga ko'ra qaralayotgan Koshi masalasining $u(x,t)$ yechimini $t>0$ bo'lganda x va t o'zgaruvchilar bo'yicha differensiallash berilgan $\varphi(x)$ funksiyaning silliqligiga bog'liq emas.

Issiqlik tarqalish tenglamasi yechimining silliqligi tor tebranish tenglamasi yechimidan tubdan farq qiladi. Qaralayotgan sohada tor tebranish tenglamasi yechimining silliqligi berilgan funksiyalarning silliqligiga bog'liq bo'ladi.

3–IZOX. (2) formuladan ko'rinadiki, issiqlik sterjen bo'ylab biror tezlik bilan emas, balki oniy tarqaladi. Haqiqatdan ham, faraz qilaylik, boshlang'ich harorat (α,β) integralda $\varphi(x)>0$ va undan tashqarida $\varphi(x)=0$ bo'lsin. U holda $u(x,t)$ temperaturaning keyingi tarqalishi uchun

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_\alpha^\beta\varphi(\xi)\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}d\xi$$

formulaga ega bo'lamiz.

Bu formuladan yetarlicha kichik $t>0$ va yetarlicha katta x uchun $u(x,t)$ musbat ekanligini ko'rish qiyin emas. Bundan ko'rinadiki, sterjenda issiqlik cheksiz tezlik bilan, ya'ni oniy tezlik bilan tarqaladi. Tabiiyki, bunday bo'lishi mumkin emas. Demak, (1) ...ama sterjenda issiqlik tarqalish masalasi to'liq ifodalamas ekan.

Issiqlik tarqalish tenglamasini keltirib chiqarishdagi ayrim fizikaviy noaniqliklar bilan bog'liq

YECHIMNING BERILGANLARGA UZLUKSIZ BOG'LIQLIGI.

Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun Koshi masalasining yechimi berilganlarga uzluksiz bog'liq bo'ladi. Faraz qilaylik, $u(x,t)$ funksiya (1) tenglamaning (2) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi, $u_\varepsilon(x,t)$ funksiya esa (1) tenglamaning

$$u_\varepsilon(x,0) = \varphi_\varepsilon(x), \tag{22}$$

shartni qanoatlantiruvchi yechimi bo'lsin.

Agar ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ bo'lganda $|\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ bo'lsa, u holda barcha x va $t > 0$ uchun $|u(x,t) - u_\varepsilon(x,t)| < \varepsilon$ bo'ladi.

Haqaqatdan ham, (1) tenglamaning (2) va (22) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ va $u_\varepsilon(x,t)$ yechimlari mos ravishda (12) formula bilan aniqlanadi. Ularning ayirmasi

$$u(x,t) - u_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(\xi) - \varphi_\varepsilon(\xi)] \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} d\xi$$

bo'ladi. Bu ayirmani baholaymiz, natijada

$$|u(x,t) - u_\varepsilon(x,t)| \le \frac{\varepsilon}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} d\xi$$

yoki $z = \dfrac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}$ almashtirish yordamida

$$|u(x,t) - u_\varepsilon(x,t)| \le \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \varepsilon$$

... issiqlik tarqalish tenglamasi uchun Koshi masalasining ... bog'liq ekan.

Mam'lumki, yuqorida keltirilgan $(x,t;\xi,\tau)$ argumentlarga bog'liq bo'lgan

$$E(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)^2}\right\}$$

funksiya issiqlik tarqalish tenglamasining *fundamental yechimi* deyiladi.

Bu funksiya quyidagi xossalarga ega:

1^0. $E(x,t;\xi,\tau)$ funksiya (x,t) o'zgaruvchilar bo'yicha bir jinsli issiqlik tarqalish tenglamasini qanoatlantiradi.

2^0. $E(x,t;\xi,\tau)$ funksiya (ξ,η) o'zgaruvchilar bo'yicha bir jinsli issiqlik tarqalish tenglamasiga qo'shma bo'lgan

$$E_t + a^2 E_{xx} = 0$$

tenglamani qanoatlantiradi.

3^0. Agar $x \neq \xi$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{\tau \to t} E(x,t;\xi,\tau) = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi.

4^0. Agar $\varphi(x)$ funksiya $\forall x \in [0,l]$ bo'lganda uzluksiz, ya'ni $\varphi(x) \in C[0,l]$ bo'lsa, u holda $E(x,t;\xi,\tau)$ fundamental yechim uchun ushbu

$$\lim_{\tau \to t} \int_0^l E(x,t;\xi,\tau)\varphi(\xi)d\xi = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(0), & \text{agar } x = 0 \text{ b,} \\ \varphi(x), & \text{agar } x \in (0,l) \text{ b,} \\ \frac{1}{2}\varphi(l), & \text{agar } x = l \text{ b,} \end{cases} \tag{24}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun fundamental yechimning 1^0 va 2^0 xossalarining bajarilishiga bevosita tekshirib ishonch hosil qilish mumkin.

Biz bu yerda 3^0 va 4^0 xossalarini isbotlaymiz.

3^0. Ma'lumki, $E(x,t;\xi,\tau)$ funksiya $\tau \to t$ da aniqmaslikka ega. Shuning uchun bu funksiyani ushbu

$$E(x,t;\xi,\tau) = \frac{A(t)}{B(t)},$$

ayniyatlarni inobatga olib, (25) formulada $\tau \to t$ limitga o'tamiz va

$$\lim_{\tau\to t}\int\limits_0^l E(x,t;\xi,\tau)\varphi(\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\tau\to t}\int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}}^{\frac{l-x}{2a\sqrt{t-\tau}}} e^{-z^2}\varphi(x+2a\sqrt{t-\tau}\,z)dz$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\,\varphi(0), \text{ agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ \varphi(x), \text{ agar } x \in (0,l) \text{ bo'lsa,} \\ \frac{1}{2}\,\varphi(l), \text{ agar } x = l \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Fundamental yechimning 4^0 xossasidan quyidagi natija kelib chiqadi:

2-NATIJA. Agar (24) formulada $\varphi(x) = 1$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{\tau\to t}\int\limits_0^l E(x,t;\xi,\tau)d\xi = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, \text{ agar } x \in (0,l) \text{ bo'lsa,} \\ \frac{1}{2}, \text{ agar } x = l \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

FUNDAMENTAL YECHIMNING FIZIKAVIY XOSSASI.

Sterjenning biror x_0 nuqtasi atrofidan kichik segmentini ajratib olaylik, ya'ni $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, bu yerda $\varepsilon > 0$. Faraz qilaylik, $\varphi(x)$ boshlang'ich harorat shu segmentda o'zgarmas $u_0 > 0$ va bu segmentdan tashqarida nolga teng bo'lsin.

Buni fizikaviy tasavvur qilish qiyin emas, boshlang'ich vaqtda sterjenning $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ segmentiga $Q = 2\varepsilon c\rho u_0$ issiqlik miqdori berilgan, bunda c sterjenning issiqlik sigimi, ρ sterjenning zichligi, sterjenning $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ qismida harorat ko'tarilib u_0 ga teng bo'ladi. Vaqtning keyingi momentlarida sterjendagi issiqlik tarqalishi (12) formula bilan aniqlanadi, biz qarayotgan holda u quyidagicha

$$u_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} u_0 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi =$$

$$= \frac{Q}{2ac\rho\sqrt{\pi t}}\,\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi.$$

ifodalanadi.

Agar ε ni nolga yaqin qilib kichiklashtirsak, unda sterjenning juda kichik qismiga Q issiqlik miqdori taqsimlandi, deb hisoblashimiz mumkin. U holda $t = 0$ vaqtda sterjenning $x = x_0$ nuqtasida joylashgan kuchlanishi Q bo'lgan oniy issiqlik manbaiga ega bo'lamiz. Bunday oniy issiqlik manbai ta'sirida sterjenda issiqlik taqsimoti quyidagi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,t) = \frac{Q}{2ac\rho\sqrt{\pi t}}\,\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi, \qquad (23)$$

formula bilan aniqlanadi.

O'rta qiymat haqidagi teoremaga ko'ra

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi = e^{-\frac{(x-\xi_0)^2}{4a^2t}}$$

tenglikni olamiz. Bu yerda $x_0 - \varepsilon < \xi_0 < x_0 + \varepsilon$, agar $\varepsilon \to 0$ bo'lsa, $x_0 \to \xi_0$ bo'ladi. U holda (23) formula

$$\frac{Q}{c\rho}\,\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x_0-\xi_0)^2}{4a^2t}}$$

ko'rinishga keladi.

Shunday qilib, (13) fundamental yechim sterjenning $x = \xi$ nuqtasidagi $t = 0$ boshlang'ich vaqtda joylashgan kuchlanishi $Q = c\rho$ ga teng bo'lgan oniy issiqlik manbaining taqsimotini bildiradi. Issiqlik tarqalish tenglamasining (13) formula bilan aniqlangan $G(x,t;\xi)$ fundamental yechimining

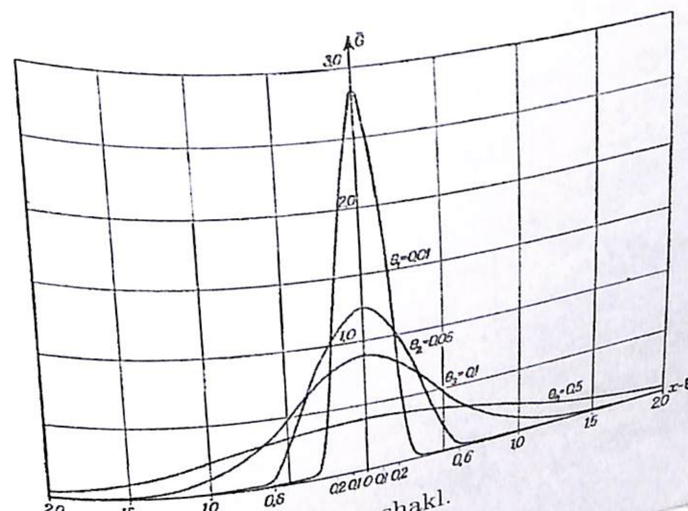
$$E(x,t;\xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

grafigini fiksirlangan ξ uchun x ning funksiyasi sifatida aloda t vaqtning $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ momentlarida quyidagi chizmada keltirilgan.

Har bir egri chiziq ostidagi yuza birga teng, ya'ni

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = 1.$$

Bu sterjendagi $Q = c\rho$ issiqlik miqdori vaqt o'tishi bilan o'zgarmas ekanligini bildiradi. 18–shakldan ko'rinadiki, agar $t > 0$ yetarlicha kichik son bo'lsa, u holda (13) egri chiziqlar bilan chegaralangan deyarli barcha yuzalar abssissalar o'qida $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ oraliqning ustida joylashgan bo'ladi. Bu yuzaning qiymatini $c\rho$ ga ko'paytmasi boshlang'ich vaqtdagi issiqlik miqdoriga teng. Shunday qilib, $t > 0$ yetarlicha kichik bo'lganda, deyarli barcha issiqlik $x = \xi$ nuqtaning kichik atrofida uyushgan bo'lar ekan. Demak, $t = 0$ vaqtda barcha issiqlik miqdori $x = \xi$ nuqtaga joylashgan bo'ladi, ya'ni biz oniy issiqlik manbaiga ega bo'lamiz.



18 — shakl.

Endi yuqoridagi mulohazalarga asosan (12) yechimning fizik ma'nosini keltirish qiyin emas. Haqiqatdan ham, sterjenning $x = \xi$ kesimiga boshlang'ich vaqtda $\varphi(\xi)$ harorat berish uchun shu nuqtaning yetarlicha kichik $d\xi$ yuzasiga $dQ = c\rho\varphi(\xi)d\xi$ teng bo'lgan issiqlik miqdori taqsimlashimiz zarur yoki sterjenning ξ nuqtasiga kuchlanishi dQ bo'lgan oniy issiqlik manbaini joylashtirish zarur. Shu oniy issiqlik manbai ta'sirida issiqlikning taqsimlanishi (13) formulaga ko'ra

$$\varphi(\xi)d\xi \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

bo'ladi. Boshlang'ich $\varphi(\xi)$ harorat ta'sirida sterjenning barcha nuqtalaridagi harorat shu yuzalarning yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni (12) formula kelib chiqadi.

1-MASALA. Ushbu

$$u_t = u_{xx}, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

tenglamaning

$$u(x,0) = \sin x, \qquad -\infty < x < +\infty$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi regulyar yechimini toping.

YECHISH. Masala yechimini (12) formula yordamida topamiz. Bu yerda $a = 1$, $\varphi(x) = \sin x$ bo'lgani uchun (12) formulaga ko'ra

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin\xi \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right\} d\xi \tag{24}$$

hosil bo'ladi. Ushbu

$$x - \xi = 2\sqrt{t}s, \qquad d\xi = -2\sqrt{t}ds$$

almashtirish yordamida (24) integral

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\left(\sin x \cos 2\sqrt{t}s - \cos x \sin 2\sqrt{t}s\right) ds$$

ko'rinishga keladi.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{s^2} \cos 2bs ds = \sqrt{\pi}e^{-b^2}, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{s^2} \sin 2bs ds = 0 \tag{25}$$

tengliklarga asosan oxirgi ifodadan 1 masalaning yechimi

$$u(x,t) = e^{-t}\sin x$$

kelib chiqadi.

2-MASALA. Ushbu bir jinsli bo'lmagan

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + e^t \sin x, \qquad -\infty < x < +\infty, \ t > 0;$$

tenglamaning

$$u(x,0) = e^{-x^2}\sin x, \qquad -\infty < x < +\infty,$$

shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

YECHISH. (21) formulaga

$$a = \frac{1}{2}, \quad f(x,t) = e^t \sin x, \quad \varphi(x) = e^{-x^2}\sin x$$

funksiyalarni qo'yib,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\sin\xi \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{t}\right\} d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\tau}\sin\xi}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left\{\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right\} d\xi d\tau = I_1 + I_2; \tag{26}$$

tenglikni olamiz.

Endi I_1 va I_2 integrallarni hisoblaymiz.

Birinchi I_1 integral

$$\xi = \sqrt{\frac{t}{t+1}}s + \frac{x}{t+1}; \qquad d\xi = \sqrt{\frac{t}{t+1}}ds$$

... natijasida

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \sqrt{\frac{t}{t+1}} \exp\left\{-\frac{x^2}{t+1}\right\} \sin\left(\sqrt{\frac{t}{t+1}}\, s + \frac{x}{t+1}\right) ds$$

ko'rinishga keladi. Bundan

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi (t+1)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{t+1}\right\}\left[\sin\frac{x}{t+1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\cos\sqrt{\frac{t}{t+1}}\, s\, ds + \cos\frac{x}{t+1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\sin\sqrt{\frac{t}{t+1}}\, s\, ds\right]$$

bo'ladi. Bundan (25) tengliklarga ko'ra

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{t+1}}\sin\left(\frac{x}{t+1}\right)\exp\left\{-\frac{4x^2+t}{4(t+1)}\right\}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Ikkinchi I_2 integral esa,

$$I_2 = \int_0^t e^{2\tau - t}\sin x\, d\tau = \sin x\, sh\, t$$

ga teng. I_1 va I_2 integrallarning qiymatlarini (26) formulaga qo'ysak, ...ning yechimi

$$\frac{1}{\ldots}\sin\frac{x}{t+1}\exp\left\{-\frac{4x^2+t}{4(t+1)}\right\}$$

3-MASALA. Quyidagi

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\,\Delta^k \tau(x), \tag{27}$$

funksiya

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} - u_t = 0, \tag{28}$$

tenglamaning

$$u(x,0) = \tau(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{29}$$

shartni qanoatlantiruvchi yechimi ekanligini isbotlang.

Bu yerda $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ Laplas operatori, $\tau(x) = \tau(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cheksiz differensiallanuvchi funksiya; Faraz qilaylik, (27) va uning hosilalaridan tuzilgan qatorlar tekis yaqinlashuvchi bo'lsin.

ISBOT. (27) qatorni $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilari bo'yicha ikki marta, t bo'yicha bir marta differensiallashdan hosil bo'lgan qatorlarning tekis yaqinlashuvchi ekanligidan $u(x,t)$ yig'indi uchun

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\,\Delta^k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \tau(x)}{\partial x_i^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\,\Delta^{k+1}\tau(x);$$

$$u_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,\Delta^k \tau(x) \qquad u_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\,\Delta^{k+1}\tau(x)$$

bo'ladi. Demak, (27) funksiya berilgan (28) tenglamani qanoatlantiradi.

(27) funksiyadan (29) shart bevosita kelib chiqadi, ya'ni

$$u(x,t) = \tau(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\,\Delta^k \tau(x),$$

bundan $t \to 0$ da limitga o'tsak,

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = u(x,0) = \tau(x)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Demak, (28) tenglamaning (29) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi (27) formula orqali ifodalandi.

21-§. Birinchi chegaraviy masala yechimining integral ifodasi

Bu paragrafda issiqlik tarqalishi tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani qaraymiz. xOt tekisligida uchlari $A(0,0)$, $B(l,0)$, $E(l,T)$ va $F(0,T)$ nuqtalarda bo'lgan $ABEF$ to'g'ri to'rtburchakni Q deb belgilaymiz.

Berilgan chekli $Q = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ sohada

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{1}$$

tenglamaning

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

boshlang'ich va

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan $u(x,t)$ yechimini toping.

Bu yerda $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ va $\mu_2(t)$ – berilgan funksiyalar bo'lib, bu funksiyalar uchun quyidagi

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \qquad \varphi(l) = \mu_2(0)$$

tengliklar o'rinli.

Bu masala yechimining yagonaligi oldingi paragrafda ekstremum prinsipi yordamida isbotlangan, echimning mavjudligi esa o'zgaruvchilarni ajratish, Fur'e usuli bilan ko'rsatilgan.

Biz bu paragrafda (1)–(3) masala yechimining mavj[illegible] Grin funksiyasi yordamida isbotlashga harakat qilamiz va yec[illegible] integral ifodasini keltirib chiqaramiz.

Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun Grin formulasi. Bu yerda issiqlik tarqalish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala yechimining integral ifodasini keltirib chiqaramiz.

Buning uchun ushbu

$$Mv = -a^2 v_{xx} - v_t. \tag{4}$$

operatorni qaraylik.

Faraz qilaylik, $\varphi(x,t)$, $\psi(x,t)$ ixtiyoriy cheksiz differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin. L va M operatorlar uchun quyidagi

$$\psi L\varphi - \varphi M\psi = -a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi \psi\right).$$

ifoda o'rinli, bu ifodani Q_τ soha bo'yicha bo'laklab integrallaymiz. Natijada Grin formulasiga asosan

$$\iint\limits_{Q_\tau} \Big[\psi L\varphi - \varphi M\psi\Big] dxdt = \int\limits_{\partial Q_\tau} \left[\varphi \psi dx + a^2\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right], \tag{5}$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu yerda $Q_\tau = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < \tau\}$ to'g'ri to'rtburchakli soha, ∂Q_τ esa Q_τ sohaning chegarasi, ya'ni $t = 0$, $x = l$, $t = \tau$ va $x = 0$.

Agar $L\varphi = f$ va $M\psi = 0$ bo'lsa, u holda (5) formulani quyidagicha

$$\iint\limits_{Q_\tau} \psi\, L\varphi\, dxdt = \int\limits_{AB} \varphi\psi\Big|_{t=0} dx + \int\limits_{BE} a^2\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\Big|_{x=l} dt +$$

$$+ \int\limits_{EF} \varphi\psi\Big|_{t=\tau} dx + \int\limits_{FA} a^2\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} dt, \tag{6}$$

yoki

$$\int\limits_{EF} \varphi\psi\Big|_{t=\tau} dx = \int\limits_{AB} \varphi\psi\Big|_{t=0} dx + \int\limits_{BE} a^2\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\Big|_{x=l} dt -$$

$$\int_{AF} a^2\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} dt + \iint_{Q_\tau} \psi\, L\varphi\, dx dt, \tag{6}$$

yozib olish mumkin.

Faraz qilaylik, $\varphi(x,t) = u(x,t)$ funksiya (1) tenglamaning biror yechimi, ya'ni $Lu = f(x,t)$; $\psi(x,t) = E(x,t;\xi,\tau)$ esa issiqlik tarqalish tenglamasining fundamental yechimi, ya'ni

$$E(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\, e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \tag{7}$$

bo'lsin.

Ma'lumki, $E(x,t;\xi,\tau)$ funksiya x, t o'zgaruvchilar bo'yicha $LE = 0$ tenglamani, ξ, τ o'zgaruvchilar bo'yicha esa $ME = 0$ tenglamani qanoatlantiradi.

Faraz qilaylik, $M(x,t)$ qaralayotgan Q_τ sohadan olingan fiksirlangan nuqta, M_1 esa koordinatalari x, $t+h$, $h > 0$ bo'lgan nuqta bo'lsin. M nuqta orqali EF xarakteristika o'tkazamiz, (6) formulada x ni ξ ga t ni esa τ deb almashtiramiz. U holda (6) formulani $ABEF$ soha bo'yicha

$$\varphi(\xi,\tau) = u(\xi,\tau), \qquad \psi(\xi,\tau) = E(x,t+h;\xi,\tau),$$

funksiyalarga qo'llaymiz. Natijada

$$\int_{EF} \frac{1}{2a\sqrt{\pi h}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 h}\right\} u(\xi,t)\,d\xi =$$

$$= \int_{AB} u(\xi,0)E(x,t+h;\xi,0)\,d\xi + \int_{BE} a^2\left(E\frac{\partial u}{\partial\xi} - u\frac{\partial E}{\partial\xi}\right)\Big|_{x=l} d\tau -$$

$$-\int_{AF} a^2\left(E\frac{\partial u}{\partial\xi} - u\frac{\partial E}{\partial\xi}\right)\Big|_{x=0} d\tau + \iint_{Q_\tau} E(x,t+h;\xi,\tau)Lu\, d\xi d\tau,$$

ifodaga ega bo'lamiz.

$FABE$ sohada $E(x,t+h;\xi,\tau)$ va $\dfrac{\partial E}{\partial\xi}$ funksiyalarning h ga nisbatan uzluksiz ekanligidan hamda ushbu

$$\lim_{h\to 0}\int_{EF} \frac{1}{2a\sqrt{\pi h}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 h}\right\} u(\xi,t)\,d\xi = u(x,t)$$

tenglikka asosan, oxirgi formulada $h \to 0$ bo'lganda limitga o'tamiz. Agar (x,t) nuqta EF kesmada yotsa, u holda quyidagi

$$u(x,t) = \int_{AB} u(\xi,0)E(x,t;\xi,0)\,d\xi + \int_{BE} a^2\left(E\frac{\partial u}{\partial\xi} - u\frac{\partial E}{\partial\xi}\right)\Big|_{x=l} d\tau -$$

$$-\int_{AF} a^2\left(E\frac{\partial u}{\partial\xi} - u\frac{\partial E}{\partial\xi}\right)\Big|_{x=0} d\tau + \iint_{Q_t} E(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \tag{8}$$

asosiy integral ifodaga ega bo'lamiz.

Bu formula issiqlik tarqalish tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masala yechimini bermaydi, chunki sohaning AF va BE chegarasida u funksiyani emas, balki u_ξ ni ham bilish kerak.

Faraz qilaylik, v funksiya qo'shma $Mv = 0$ tenglamaning EF da nolga teng bo'lgan biror yechimi va u funksiya bir jinsli issiqlik tarqalish tenglamasi $Lu = 0$ ning yechimi bo'lsin.

Yuqorida olingan (6) formulani $FABE$ sohada u va v funksiyalarga qo'llaymiz. U holda

$$0 = \int_{AB} u(\xi,0)v(\xi,0)\,d\xi + \int_{BE} a^2\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi} - u\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)\Big|_{x=l} d\tau -$$

$$-\int_{AF} a^2\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi} - u\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)\Big|_{x=0} d\tau, \tag{9}$$

formulani olamiz.

Endi (8) formuladan (9) formulani ayiramiz, natijada

$$u(x,t) = \int_{AB} u(\xi,0)G(x,t;\xi,0)\,d\xi + \int_{BE} a^2\left(G\frac{\partial u}{\partial\xi} - u\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)\Big|_{x=l} d\tau -$$

$$-\int_{AF} a^2\left(G\frac{\partial u}{\partial\xi} - u\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)\Big|_{x=0} d\tau + \iint_{Q_t} G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \quad (10)$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu yerda

$$G(x,t;\xi,\tau) = E(x,t;\xi,\tau) - v(x,t;\xi,\tau). \quad (11)$$

Agar qaralayotgan sohaning FA va BE chegarasida $v=0$ deb tanlasak, u holda $u(x,t)$ funksiya uchun quyidagi

$$u(x,t) = \int_{AB} u(\xi,0)G(x,t;\xi,0)d\xi - a^2\int_{BE} u(l,\tau)\frac{\partial G}{\partial\xi}\Big|_{x=l} d\tau +$$

$$+a^2\int_{AF} u(0,\tau)\frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{x=0} d\tau + \iint_{Q_t} G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau,$$

integral ifodaga kelamiz. Oxirgi tenglikdan (2)–(3) shartlarga asosan ushbu

$$u(x,t) = \int_0^l \varphi(\xi)G(x,t;\xi,0)d\xi - a^2\int_0^t \mu_1(\tau)\frac{\partial G}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0} d\tau +$$

$$-a^2\int_0^t \mu(\tau)\frac{\partial G}{\partial\xi}\Big|_{\xi=l} d\tau + \int_0^t\int_0^l G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \quad (12)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu funksiya (1) issiqlik tarqalish tenglamasi uchun birinchi boshlang'ich–chegaraviy masalaning yechimini beradi.

Shunday qilib, issiqlik tarqalish tenglama uchun birinchi chegaraviy masala echimining integral ifodasida asosiy qiyinchilik $v(\xi,\tau) = v(x,t;\xi,\tau)$ funksiyani aniqlash hisoblanadi.

Bu funksiya quyidagi shartlar asosida aniqlanadi:

1. $v(x,t;\xi,\tau)$ funksiya Q sohada aniqlangan uzluksiz hamda $x,t;\xi,\tau)$ hosila $\overline{Q}$ mavjud va uzluksiz bo'lib, $x=0$ va $x=l$ da ...grallanuvchi;

2. $v(x,t;\xi,\tau)$ funksiya $\tau<t$ uchun issitarqalish tenglamasiga ...a bo'lgan $Mv=0$ tenglamani qanoatlantiradi;

3. $v(x,t;\xi,\tau)$ funksiya Q sohaning chegarasida $x=0$ va $x=l$ da $v(x,t;\xi,\tau)$ ga teng, ya'ni

$$v|_{x=0} = E(0,t;\xi,\tau), \quad v|_{x=l} = E(l,t;\xi,\tau)$$

shartlarni qanoatlantiradi;

4. Agar $\xi \ne x \in (0,l)$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{\tau\to t} v(x,t;\xi,\tau)=0$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu shartlarga ko'ra, $v = v(x,t;\xi,\tau)$ funksiya x,t parametrlarga bog'liq bo'lib, u qo'shma $Mv=0$ tenglama uchun (1)–(3) masalaga o'xshash chegaraviy masalaning yechimi kabi aniqlanadi.

Demak, ikki juft o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan (11) ko'rinishdagi $G(x,t;\xi,\tau)$ funksiya issiqlik tarqalish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalaning *Grin funksiyasi* deyiladi.

Shunday qilib, issiqlik tarqalish tenglamasining ixtiyoriy yechimi Grin funksiyasi yordamida (12) formula bilan aniqlanadi.

To'g'ri to'rtburchakda (1)–(3) masalaning Grin funksiyasi uchun quyidagi

$$G(x,t;\xi,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big[E(x,t;\xi+2nl,\tau) - E(x,t;-\xi+2nl,\tau)\Big], \quad (13)$$

qatorni qaraymiz.

Bu qator $0\le x\le l$, $0<\xi<l$ va $0<\alpha\le t-\tau<A$ sohada absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $n=\pm1,\pm2,\pm3,\dots$ uchun

$$|\pm\xi - 2nl - x| \ge 2|nl| - |\pm\xi - x| > 2|nl| - 2,$$

u holda $n=0$ dan boshqa hollarda fundamental yechim uchun

$$|E(x,t;\pm\xi+2nl,\tau)| \le \frac{1}{2a\sqrt{\pi\alpha}}\exp\left[-\frac{(|nl|-l)^2}{4a^2A}\right]$$

tengsizlik o'rinli.

Demak, (13) qatorning har bir hadi $n=0$ dan boshqa hollarda

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi\alpha}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{l^2(n-1)^2}{4a^2A}\right]$$

yaqinlashuvchi sonli qatorning hadlari bilan chegaralangan. Bundan esa (13) qatorning qaralayotgan sohada absolyut va tekis yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

O'rganilayotgan masalaning Grin funksiyasi

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2nl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi-2nl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\}, \tag{14}$$

ko'rinishga ega bo'ladi va buni quyidagi

$$G(x,t;\xi,\tau)=E(x,t;\xi,\tau)+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'E(x,t;\xi+2nl,\tau)-$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E(x,t;-\xi+2nl,\tau) \tag{15}$$

ko'rinishda yozib olish mumkin.

Bu yerda $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}{}'$ belgi yig'indini n noldan boshqa butun qiymatlari bo'yicha olinganligini bildiradi.

Bundan (11) tenglikka asosan (1)–(3) masala uchun

$$v(x,t;\xi,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E(x,t;-\xi+2nl,\tau)-$$

$$-\sum_{n=1}^{+\infty}\left[E(x,t;\xi+2nl,\tau)+E(x,t;\xi-2nl,\tau)\right]$$

bo'lar ekan.

... issiqlik tarqalish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy ... [funks]iyasining asosiy xossalarini keltiramiz: ... t o'zgaruvchilar bo'yicha bir jinsli

issiqlik tarqalish tenglamasini qanoatlantiradi.

2^0. $G(x,t;\xi,\tau)$ funksiya ξ,τ o'zgaruvchilar bo'yicha qo'shma ya'ni

$$G_\tau+a^2G_{\xi\xi}=0$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Grin funksiyasining 1^0 va 2^0 xossalarini bevosita hisoblashlar yordamida ko'rsatish mumkin.

3^0. $G(x,t;\xi,\tau)$ funksiya uchun quyidagi

$$G(x,t;0,\tau)=0,\qquad G(x,t;l,\tau)=0$$

chegaraviy shartlarni o'rinli.

Tengliklarning birinchisi $G(x,t;\xi,\tau)$ Grin funksiyasining (14) ko'rinishidan bevosta kelib chiqadi, ikkinchisi esa

$$G(x,t;l,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-(2n-1)l)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(x-(2n-1)l)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\}=0$$

tenglikka asosan o'rinli bo'ladi.

4^0. Agar $\xi\neq x\in(0,l)$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{\tau\to t}G(x,t;\xi,\tau)=0$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Grin funksiyasida quyidagi $t-\tau=\varepsilon$

$$\left(\frac{x-\xi-2nl}{2a}\right)^2=h_1>0,\qquad\left(\frac{x+\xi-2nl}{2a}\right)^2=h_2>0$$

belgilashlarni kiritamiz. U holda

$$\lim_{t\to\tau}G(x,t;\xi,\tau)=\lim_{\varepsilon\to0}G(x,t;\xi,t-\varepsilon)=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1/\sqrt{\varepsilon}}{e^{h_1/\varepsilon}}-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1/\sqrt{\varepsilon}}{e^{h_2/\varepsilon}}\right\}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

3^0. Xuddi yuqoridagi kabi

$$u_3(x,t) = -a^2 \int_0^t \mu_2(\tau) G_\xi(x,t;l,\tau)d\tau$$

funksiya issiqlik tarqalish tenglamasini qanoatlantirishini hamda bu funksiya uchun quyidagi

$$\lim_{t\to+0} u_3(x,t) = 0, \qquad \forall x \in (0,l);$$

$$\lim_{x\to+0} u_3(x,t) = 0, \qquad \forall t \in (0,T];$$

$$\lim_{x\to l-0} u_3(x,t) = \mu_2(t), \qquad \forall t \in (0,T]$$

tengliklarning o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin.

4^0. Endi $u_4(x,t)$ funksiyani qaraymiz: ixtiyoriy $(x,t) \in Q \cap EF$ bo'lsin. U holda

$$u_{4t} - a^2 u_{4xx} = \lim_{\tau\to t} \int_0^l f(\xi,t)G(x,t;\xi,t)d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^l f(\xi,\tau)\Big(G_t - a^2 G_{xx}\Big)d\xi$$

bo'ladi. Grin funksiyasining xossasiga asosan yuqoridagi ifodaning ikkinchi qo'shiluvchisi nolga teng va natijada

$$u_{4t} - a^2 u_{4xx} = \lim_{\tau\to t} \int_0^l f(\xi,t)G(x,t;\xi,t)d\xi$$

ega bo'lamiz. (14) formulani e'tiborga olib,

$$u_{4t} - a^2 u_{4xx} = \lim_{\tau\to t} \int_0^l f(\xi,t)E(x,t;\xi,t)d\xi +$$

issiqlik tarqalish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalaning barcha shartlarini qanoatlantirishi kelib chiqadi.

Shu bilan teorema isbotlandi.

Izox. Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun har xil sohalarda ikkinchi, uchinchi boshlang'ich chegaraviy masalalar hamda turli noklassik masalalarning qo'yilishi va ularning yechish usullari [22] o'quv qo'llanmada batafsil bayon qilingan.

======== ◇ ========

Nazorat uchun savollar

1. Qanday fizikaviy masalalar parabolik tipdagi tenglamalar orqali ifodalanadi?
2. Issiqlik tarqalish tenglamasida u_t va u_{xx} hosilalar qanday fizik ma'noga ega?
3. Parabolik tenglama uchun asosiy chegaraviy masalalar qanday qo'yiladi?
4. Birinchi chegaraviy masalaning korrektligi haqida nima deyish mumkin?
5. Parabolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi qanday qo'yiladi?
6. Koshi masalasi yechimining mavjudligi qanday isbotlanadi va yechimning ko'rinishi qanday ifodalanadi?
7. Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining yagonaligi qanday isbotlanadi?
8. Koshi masalasi uchun ekstremum prinsipi qanday qo'llaniladi?
9. Qanday usullarda Koshi masalasi yechimining mavjudligi isbotlanadi?
10. Issiklik tarkalish tenglamasi uchun Kos[illegible]asi yechimining mavjudligini isbotlashda Fur'e usuli qanday[illegible]

11. Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun maksimum prinsipi qanday ifodalanadi?
12. Ekstremum prinsipidan qanday xossalar kelib chiqadi?
13. Parabolik tipdagi tenglama echimining silliqligi haqida nima deyish mumkin?
14. Chegaraviy shartlarning qanday turlari bor?
15. Fundamental echim qanday fizikaviy xossaga ega?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

4.1. Yon sirti issiqlik o'tkazmaydigan birlik uzunlikdagi sterjen berilgan bo'lsin. Agar sterjenning uchlaridagi harorati nolga teng va uning boshlang'ich temperaturasi $u(x,0) = \varphi(x) = x(1-x)$ bo'lsa, u holda sterjenda issiqlikning $u(x,t)$ tarqalishini aniqlang.

4.2. Ushbu $u_t = a^2 u_{xx}$ tenglamaning $0 < x < l,\ t > 0$ sohada quyidagi boshlang'ich $u(x,0) = \sin\dfrac{2\pi x}{l}$ va bir jinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimini toping.

4.3. Ushbu $u_t = a^2 u_{xx}$ tenglamaning $0 < x < l,\ t > 0$ sohada quyidagi

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l$$

boshlang'ich va

$$u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad t > 0$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimini toping.

4.4. Ushbu $u_t = a^2 u_{xx}$ tenglamaning $0 < x < l,\ t > 0$ sohada quyidagi

$$u(x,0) = Ax, \quad 0 \le x \le l$$

boshlang'ich va

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0,$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimini toping.

4.5 Ushbu $u_t = a^2 u_{xx} + f(x)$ tenglamaning $0 < x < l,\ t > 0$ sohada aniqlangan uzluksiz va quyidagi

$$u(x,0) = A(l-x), \quad 0 \le x \le l$$

differensial tenglamani qaraylik.

Bu tenglamaga mos kvadratik forma

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_2^2, \tag{7}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar $\delta = b^2 - ac < 0$, bo'lsa, u xolda (7) kvadratik formaning ishorasi aniqlangan bo'ladi va D sohaning $\delta < 0$ bo'lgan barcha nuqtalarida (6) tenglama *elliptik tipdagi tenglama* deyiladi.

3-MISOL. Quyidagi

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

tenglama *Trikomi tenglamasi* deyiladi. Bu tenglama $y > 0$ da elliptik tipga tegishli bo'ladi, chunki $\delta = b^2 - ac = -y$. Lekin qaralayotgan D sohada Trikomi tenglamasi tekis elliptik tenglama bo'lmaydi.

23–§. Garmonik funksiyalar

R^n evklid fazosida biror S sirt bilan chegaralangan sohani D deb belgilaylik. Bu sohada quyidagi

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0 \tag{1}$$

Laplas tenglamasini qaraylik.

Demak bundan keyin n o'lchovli fazoning x nuqtasi deganda koordinatalari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bo'lgan $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtani tushunamiz.

1–TA'RIF. Agar $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ chekli D sohada barcha argumentlari bo'yicha ikki marta uzluksiz hosilaga ega bo'lgan va (1) ...la Laplas tenglamasini qanoatlantirsa, u holda bu funksiya ... garmonik funksiya deyiladi, ya'ni

$$u(x) \in C^2(D) \qquad \text{va} \qquad \Delta u(x) = 0, \ \ldots).$$

2–TA'RIF. Agar $u(x)$ funksiya cheksiz D sohaning koordinat boshidan chekli masofada yotgan har bir x nuqtasida garmonik bo'lib, yetarlicha katta $|x|$ nuqtalar uchun

$$|u(x)| < \frac{C}{|x|^{n-2}}, \tag{2}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $u(x)$ funksiya cheksiz D sohada garmonik deyiladi. Bu yerda n fazoning o'lchovi, C – biror o'zgarmas son, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}$.

Ikki o'lchovli cheksiz sohada garmonik bo'lgan funksiya (2) tengsizlikka asosan cheksizlikda chegaralangan bo'lishi kerak.

1–MISOL. Ushbu

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$$

chiziqli funksiya ixtiyoriy $D \subset R^n$ sohada garmonik funksiya bo'ladi, chunki

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = a_i \qquad \text{va} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

2–MISOL. Ikki o'lchovli (x, y) tekislikda ushbu

$$u(x, y) = Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad z = x + iy,$$

funksiya $(0, 0)$ nuqtani o'z ichiga olmagan ixtiyoriy sohada garmonik bo'ladi.

Haqiqatdan ham $u(x, y)$ funksiya yordamida

$$v(x, y) = Im\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

funksiyani qurish mumkin. Koshi–Riman shartlariga ko'ra $u(x, y)$ funksiyaning garmonik ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

3–MISOL. Ikki argumentli $u(x, y) = x^2 + y^2$ funksiya garmonik bo'lmaydi. Chunki bu funksiya Laplas tenglamasini qanoatlantirmaydi, ya'ni tekislikning ixtiyoriy nuqtasida

$$\Delta u(x, y) = \Delta(x^2 + y^2) = 4 \neq 0$$

Demak, $q(x,y;\xi,\eta) = \ln\frac{1}{r}$ funksiya R^2 tekislikning barcha $(x,y) \neq (\xi,\eta)$ nuqtalarida garmonik funksiya bo'lar ekan.

Endi R^n fazoda Laplas tenglamasining fundamental yechimini keltiramiz.

Faraz qilaylik, R^n, *ng'eq3* fazoda ikkita $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ va $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ nuqtalari bo'lsin. Ular orasidagi masofani

$$r = |x - \xi| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \xi_k)^2} \tag{3}$$

deb belgilaylik. Ushbu

$$v(x,\xi) = \frac{1}{r^{n-2}}, \qquad n \geq 3$$

funksiya har qanday $x \neq \xi$ nuqtada garmonik funksiya ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Bu funksiya ξ nuqtani o'z ichiga olmagan har qanday sohada x bo'yicha Laplas tenglamasini qanoatlantiradi. Haqiqatan ham,

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} = -\frac{n-2}{r^{n-1}}\frac{\partial r}{\partial x_k} = -\frac{(n-2)(x_k - \xi_k)}{r^n},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{n-2}{r^n} + \frac{n(n-2)(x_k-\xi_k)^2}{r^{n+2}} = $$

$$= \frac{n-2}{r^n}\left(\frac{n(x_k-\xi_k)^2}{r^2} - 1\right).$$

Bundan

$$\Delta v = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} = \frac{n-2}{r^n}\left[\frac{n}{r^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - \xi_k)^2 - n\right] = 0$$

ekani kelib chiqadi.

Endi (3) funksiya (2) shartni ham qanoatlantirishini ko'rsataylik. $r = |x - \xi| g'e |x| - |\xi|$ bo'lishi ravshan. Yetarlicha

katta $|x|$ lar uchun $|x| > 2|\xi|$ deb olishimiz mumkin. U holda $|\xi| < \frac{1}{2}|x|$ bo'ladi, bundan esa $r > \frac{1}{2}|x|$ kelib chiqadi. Natijada (3) formulaga asosan

$$v(x,\xi) < \frac{2^{n-2}}{|x|^{n-2}}$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Bundan esa $v(x,\xi)$ funksiyaning cheksiz sohada ham garmonik bo'lishi kelib chiqadi.

Yuqorida ko'rilgan $q(x,y;\xi,\eta)$ va $v(x,\xi)$ funksiyalar *Laplas tenglamasining fundamental yechimi* deyiladi.

Bu funksiyalarning muhim tomoni shundaki, agar $r \to 0$ bo'lsa, bu funksiyalar cheksizlikka intiladi.

Laplas tenglamasining fundamental yechimi $n = 2$ bo'lgan holda *logarifmik maxsuslikka* ega, $n > 2$ bo'lganda esa *darajali maxsuslikka* ega deyiladi.

Ikki o'lchovli R^2 tekislikda konform akslantirishlar Laplas tenglamasini o'zini o'ziga akslantiradi.

Faraz qilaylik, $z = z(\zeta) = x(\xi,\eta) + iy(\xi,\eta)$ golomorf funksiya ζ tekisligidagi D sohani z tekisligidagi Ω sohaga konform akslantirsin. Ω sohada $u(x,y)$ funksiya garmonik bo'lsin. U holda $\widetilde{u}(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ funksiya D sohada garmonik funksiya bo'ladi. Buni isbotlash uchun

$$\Delta_\zeta \widetilde{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

hosilalarni hisoblaymiz. Buning uchun

$$\widetilde{u}_\xi = u_x x_\xi + u_y y_\xi; \qquad \widetilde{u}_\eta = u_x x_\eta + u_y y_\eta;$$

va

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} = u_{xx}x_\xi^2 + 2u_{xy}x_\xi y_\xi + u_{yy}y_\xi^2 + u_x x_{\xi\xi} + u_y y_{\xi\xi};$$

$$\widetilde{u}_{\eta\eta} = u_{xx}x_\eta^2 + 2u_{xy}x_\eta y_\eta + u_{yy}y_\eta^2 + u_x x_{\eta\eta} + u_y y_{\eta\eta}.$$

Oxirgi ifodalarni qo'shamiz. Bunda $x(\xi,\eta)$ va $y(\xi,\eta)$ funksiyalar $z(\zeta)$ analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari bo'lgani uchun x y

... ξ va η bo'yicha garmonik va ular Koshi–Riman tenglamasi ... ekan. Quyidagi munosabatlar o'rinli, ya'ni

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \Delta_\zeta x = \Delta_\zeta = 0.$$

Bundan

$$\Delta_\zeta u = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]\Delta_z u = |z'(\zeta)|^2 \Delta_z u$$

bo'ladi. Bu yerda

$$\Delta_z u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Oxirgi tenglikdan ko'rinadiki, agar $\Delta_z u = 0$ bo'lsa, undan $\Delta_\zeta u = 0$ bo'lishi kelib chiqar ekan. Demak, konform akslantirishlar $n = 2$ da garmonik funksiyani yana garmonik funksiyaga o'tkazar ekan.

Ixtiyoriy $n > 2$ bo'lganda garmonik funksiyani yana garmonik funksiyaga akslantiruvchi akslantirish mavjud, bunday almashtirish *Kelvin almashtirishi* deyiladi. Buni biz keyingi paragrafda o'rganamiz.

25–§. Kelvin teoremasi

Faraz qilaylik, $u(x)$ funksiya R^n fazoda garmonik bo'lsin. R^n fazoni biror tekislikka nisbatan simmetrik akslantirsak, u holda $u(x)$ funksiya garmoniklik xossasini saqlaydi.

Markazi $x_0 = 0$ nuqtada bo'lgan R radiusli sfera S_R bo'lsin. Agar x va ξ nuqtalar sfera markazidan o'tuvchi xx_0 nurda yotib, bu nuqtalar uchun quyidagi

$$\xi = x\,\frac{R^2}{r^2}, \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = |x|^2 \tag{1}$$

yoki koordinatalari bilan

$$\xi_i = x_i\,\frac{R^2}{r^2}, \qquad i = \overline{1,n}$$

funksiyalar ξ va η bo'yicha garmonik va ular Koshi–Riman tenglamasi bilan bog'langan. Quyidagi munosabatlar o'rinli, ya'ni

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \Delta_\zeta x = \Delta_\zeta = 0.$$

Bundan

$$\Delta_\zeta \widetilde{u} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]\Delta_z u = |z'(\zeta)|^2 \Delta_z u$$

bo'ladi. Bu erda

$$\Delta_z u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Oxirgi tenglikdan ko'rinadiki, agar $\Delta_z u = 0$ bo'lsa, undan $\Delta_z u = 0$ bo'lishi kelib chiqar ekan. Demak, konform akslantirishlar $n = 2$ da garmonik funksiyani yana garmonik funksiyaga o'tkazar ekan.

Ixtiyoriy $n > 2$ bo'lganda garmonik funksiyani yana garmonik funksiyaga akslantiruvchi akslantirish mavjud, bunday almashtirish *Kelvin almashtirishi* deyiladi. Buni biz keyingi paragrafda o'rganamiz.

25–§. Kelvin teoremasi

Faraz qilaylik, $u(x)$ funksiya R^n fazoda garmonik bo'lsin. R^n fazoni biror tekislikka nisbatan simmetrik akslantirsak, u holda $u(x)$ funksiya garmoniklik xossasini saqlaydi.

Markazi $x_0 = 0$ nuqtada bo'lgan R radiusli sfera S_R bo'lsin. Agar x va ξ nuqtalar sfera markazidan o'tuvchi xx_0 nurda yotib, bu nuqtalar uchun quyidagi

$$\xi = x\,\frac{R^2}{r^2}, \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = |x|^2 \tag{1}$$

yoki koordinatalari bilan

$$\xi_i = x_i\,\frac{R^2}{r^2}, \qquad i = \overline{1,n}$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa, u holda (1) tenglik S_R *sferaga nisbatan inversiya* deb ataladi.

Bu holda x va ξ nuqtalar *garmonik qo'shma* yoki *simmetrik nuqtalar* deyiladi. (1) tenglikka asosan

$$|x| \cdot |\xi| = R^2 \tag{2}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Umuman olganda $ng'eq2$ bo'lganda inversiya almashtirishi natijasida funksiyaning garmoniklik xossasi saqlanib qolmaydi. Misol tariqasida $n = 3$ bo'lgan holda ushbu

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \tag{3}$$

garmonik funksiyani qaraylik. Bu funksiya $|x| \neq 0$ nuqtada garmonik bo'ladi. Birlik sferaga nisbatan

$$x_i = \frac{\xi}{\rho^2}, \qquad \rho = |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}$$

inversiya almashtirishi natijasida (3) funksiya

$$v(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = u\left(\frac{\xi_1}{\rho^2}, \frac{\xi_2}{\rho^2}, \frac{\xi_3}{\rho^2}\right) = \rho$$

ko'rinishga keladi. Bu esa garmonik funksiya bo'lmaydi.

Inversiya almashtirishining bu kamchiligini shu almashtirishdan so'ng funksiyani ρ^{2-n} ga ko'paytirish natijasida bartaraf qilish mumkin.

Buning uchun quyidagi teorema o'rinli.

Kelvin teoremasi. Agar $u(x)$ funksiya D sohada garmonik bo'lsa, u holda

$$v(\xi) = \frac{1}{\rho^{n-2}}\, u\left(\frac{\xi}{\rho^2}\right) \tag{4}$$

formula bilan aniqlangan $v(\xi)$ funksiya D' sohada garmonik bo'ladi.

Bu yerda D' soha D sohaga qo'shma bo'lib, u birlik sferaga nisbatan inversiya natijasida hosil bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, D sohaning ixtiyoriy nuqtasi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va D' sohaning ixtiyoriy nuqtasi esa $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\xi_i = \dfrac{x_i}{r^2}$, $i = \overline{1,n}$; x nuqtadan koordinata boshigacha bo'lgan masofa r, ξ nuqtadan koordinata boshigacha bo'lgan masofa esa ρ bo'lsin.

Bu nuqtalar uchun (2) formulaga asosan $r \cdot \rho = |x| \cdot |\xi| = 1$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Quyidagi

$$\Delta v(\xi) = r^{n+2} \Delta u(x), \tag{5}$$

tenglikning to'g'ri ekanligini isbotlaymiz.

Avval ushbu hosilani hisoblaylik:

$$\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} = \begin{cases} \rho^{-2} - \rho^{-4} \cdot 2\xi_i^2, & k \neq i; \\ -2\rho^{-4}\xi_k \cdot \xi_i, & k \neq i. \end{cases} \tag{6}$$

U holda (3) formuladan

$$\frac{\partial v(\xi)}{\partial \xi_i} = (2-n)\rho^{1-n}\frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} u(x) + \rho^{2-n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} =$$

$$= (2-n)\rho^{-n}\xi_i u(x) - 2\rho^{-n-2}\xi_i \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\xi_k +$$

$$+\rho^{-n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = (2-n)J_1 - 2J_2 + J_3. \tag{7}$$

Endi (6) formula asosida (7) ifodaning o'ng tomonidagi funksiyalarning ξ_i bo'yicha hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial J_1}{\partial \xi_i} = -n\rho^{-n-2}\xi_i^2 u(x) + \rho^{-n}u(x) -$$

$$-2\rho^{-n-4}\xi_i^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\xi_k + \rho^{-n-2}\xi_i^2\frac{\partial u(x)}{\partial x_i};$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \xi_i} = -(n+2)\rho^{-n-4}\xi_i^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\xi_k + \rho^{-n-2}\sum^{n}\frac{\partial u(x \dots}{\dots}$$

$$+\rho^{-n-2}\xi_i^2\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\frac{\partial x_m}{\partial \xi_i}\xi_k + \rho^{-n-2}\xi_i\frac{\partial u}{\partial x_i} =$$

$$= -(n+2)\rho^{-n-4}\xi_i^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\xi_k + \rho^{-n-2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\xi_k -$$

$$-2\rho^{-n-6}\xi_i^2\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\frac{\partial x_m}{\partial \xi_i}\xi_m\xi_k +$$

$$+\rho^{-n-4}\xi_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\xi_k + \rho^{-n-2}\xi_i\frac{\partial u}{\partial x_i};$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \xi_i} = -n\rho^{-n-2}\xi_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + \rho^{-n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} =$$

$$= -n\rho^{-n-2}\xi_i\frac{\partial u}{\partial x_i} - 2\rho^{-n-4}\xi_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\xi_k + \rho^{-n-2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

U holda topilgan hosilalarga ko'ra (5) formulaning o'rinli ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$\Delta v(\xi) = (2-n)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial J_1}{\partial \xi_i} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial J_2}{\partial \xi_i} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial J_3}{\partial \xi_i} =$$

$$= -(2-n)n\rho^{-n}u(x) + (2-n)\rho^{-n}u(x) -$$

$$-(2-n)2\rho^{-n-2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\xi_k + (2-n)\rho^{-n-2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\xi_i +$$

$$+2(n+2)\rho^{-n-2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\xi_k - 2n\rho^{-n-2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\xi_k +$$

$$+4\rho^{-n-4}\sum_{k,m=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_k}\xi_m\xi_k - 2\rho^{-n-4}\sum_{k,i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\xi_i\xi_k -$$

$$-2\rho^{-n-2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\xi_i - n\rho^{-n-2}\sum^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\xi_i - \dots$$

$$2\rho^{n-4}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\xi_i\xi_k+\rho^{n-2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\rho^{n+2}\Delta u(x).$$

Shunday qilib, (5) tenglikning to'g'ri ekanligi isbotlandi.

Demak, (4) funksiya $\rho \neq 0$ bo'lganda D' sohada garmonik funksiya bo'lar ekan.

Izoh. (4) funksiyaning ixtiyoriy R radiusli S_R sferaga nisbatan inversiyasi

$$v(\xi)=\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-2}u\left(\frac{R^2}{\rho^2}\xi\right)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Kelvin teoremasidan foydalanib, odatda garmonik funksiyaning cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofidagi ta'rifi beriladi.

TA'RIF. Agar

$$v(\xi)=\frac{1}{\rho^{n-2}}u\left(\frac{\xi}{\rho^2}\right)=|x|^{n-2}u(x)$$

funksiya $\rho=0$ nuqtada $\lim_{\rho\to 0}v(\xi)$ sifatida qo'shimcha aniqlangan bo'lib, $\rho=0$ nuqta atrofida garmonik bo'lsa, u holda $u(x)$ funksiya cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofida garmonik deyiladi.

Bu ta'rifga ko'ra $v(\xi)$ funksiyaning $\rho=0$ nuqta atrofida chegaralangan ekanligi kelib chiqadi.

Ushbu lemmani isbotsiz keltiramiz:

LEMMA. Agar $u(x)$ funksiya cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofida garmonik bo'lsa, u holda ushbu

$$|u(x)|\le\frac{A}{|x|^{n-2}},\quad \left|\frac{\partial^i u(x)}{\partial x^i}\right|\le\frac{A}{|x|^{n-2+i}},\quad n\ge 3; \tag{8}$$

$$|u(x)|\le \ldots,\quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|,\quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|\le\frac{A}{|x|^2},\quad n=2, \tag{9}$$

... A musbat o'zgarmas son. ... funksiyaning ... bo'ladi.

26-§. Garmonik funksiyalar uchun ekstremum prinsipi

Bu paragrafda garmonik funksiyalarning muhim xossalaridan biri ekstremum prinsipini o'rganamiz. Bu yerda talabalarni ekstremum prinsipidan kelib chiqadigan ayrim natijalar bilan tanishtiramiz. Keyinchalik ekstremum prinsipidan foydalanib, Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasi yechimining yagonaligi va turg'unligini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, R^n evklid fazosida silliq S sirt bilan chegaralangan soha D bo'lsin, ya'ni $D\subset R^n$, $\overline{D}=D\cup S$.

1-TEOREMA. Agar $u(x)$ funksiya chekli D sohada garmonik, yopiq $\overline{D}$ sohada uzluksiz va o'zgarmasdan farqli bo'lsa, u holda bu funksiya D sohaning ichki nuqtalarida o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishmaydi, ya'ni bu funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga D sohaning S chegarasida erishadi.

ISBOT. Faraz qilaylik, $\max_{S}u(x)=m$, $\max_{\overline{D}}u(x)=M$ bo'lsin va $u(x)$ funksiya D sohaning ichki nuqtalarida m dan katta qiymatga erishsin. U holda D sohada shunday x_0 nuqta topiladiki, bu nuqtada $u(x_0)=M$, $M>m$ bo'ladi.

Quyidagi ko'rinishda

$$v(x)=u(x)+\frac{M-m}{2d^2}r^2 \tag{1}$$

yordamchi funksiya kiritamiz. Bu erda $r=\rho(x,x_0)$ ikkita x va x_0 nuqtalar orasidagi masofa,

$$r^2=\rho^2(x,x_0)=(x_1-x_1^0)^2+\ldots+(x_i-x_i^0)^2+\ldots+(x_n-x_n^0)^2;$$

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n),\qquad x_0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_i^0,\ldots,x_n^0);$$

d esa D sohaning diametri, ya'ni $\overline{D}$ soha nuqtalari orasidagi maksimal masofa. Agar D soha chekli bo'lsa, u holda d chekli musbat son bo'lib, ixtiyoriy $x\in D$ uchun $r<d$ bo'ladi.

Shuni ta'kidlashimiz mumkinki,

1) $v(x_0)=u(x_0)=M$, bunda $r=0$, ya'ni $x=x_0$;

2) $v(x)|_S=u(x)|_S+\frac{M-m}{2d^2}r^2\Big|_S\le m+\frac{M-m}{2}=\frac{M+m}{2}<M$

Shunday qilib, $v(x)$ funksiya ham D sohada xuddi $u(x)$ funksiya kabi xossalarga ega, ya'ni $v(x)$ funksiya D sohaning ichki x_0 nuqtasida M qiymatni qabul qiladi va sohaning S chegarasida M dan kichik qiymatga ega. Demak, $v(x)$ funksiya maksimum qiymatga D sohaning ichki $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ nuqtalarida erishishi mumkin. U holda bu nuqtada ekstremumning zaruriy shartiga ko'ra ushbu

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|_{x=\xi} = 0 \quad \text{va} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\Big|_{x=\xi} \leq 0, \quad i = \overline{1,n}$$

ifodalarga ega bo'lamiz. Bundan $v(x)$ funksiya uchun Laplas operatorining $x = \xi$ nuqtadagi qiymati

$$\Delta v(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \leq 0, \tag{2}$$

bo'ladi.

Ikkinchi tomondan (1) tenglikka asosan

$$\frac{\partial (r^2)}{\partial x_i} = 2(x_i - x_i^0), \quad \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial x_i^2} = 2, \quad \Delta r^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial x_i^2} = 2n$$

ekanligini inobatga olsak, $x = \xi$ nuqtada

$$\Delta v(x) = \Delta\left(u(x) + \frac{M-m}{2d^2} r^2\right) =$$

$$= \Delta u(x) + \frac{M-m}{2d^2} \Delta r^2 = n\frac{M-m}{d^2} > 0$$

tengsizlikni olamiz. Bu esa (2) tengsizlikka zid.

Bu ziddiyat garmonik funksiya o'zining maksimum qiymatiga sohaning ichki nuqtalarida erishishini isbotlaydi. Xuddi shunga o'xshash minimum bo'lgan hol isbotlanadi.

1–LEMMA. Agar $u(x)$ funksiya D sohada garmonik, yopiq $\overline{D}$ sohada uzluksiz va eng katta (eng kichik) qiymatiga D sohaning ichki nuqtalarida erishsa, u holda bu funksiya o'zgarmasdir.

ISBOT. Faraz qilaylik, ixtiyoriy $x \in \overline{D}$ bo'lganda $u(x) \neq const$ bo'lsin. U holda 1–teoremaga asosan $u(x)$ funksiya o'zining eng katta qiymatiga D sohaning S chegarasida erishadi. Bu esa $u(x) \equiv const$ shartga zid.

Yuqorida isbotlangan 1–teorema va 1–natijaga asosan quyidagi kuchsiz ekstremum prinsipi o'rinli.

2–LEMMA. Chekli D sohada garmonik, yopiq $\overline{D}$ sohada uzluksiz bo'lgan $u(x)$ funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga D sohaning S chegarasida erishadi.

Haqiqatdan ham, agar yopiq $\overline{D}$ sohada $u(x) \neq const$ bo'lsa, u holda 1–teoremaga ko'ra bu funksiya eng katta va eng kichik qiymatiga faqat D sohaning S chegarasida erishadi. Agar yopiq sohada $u(x) \equiv const$ bo'lsa, u holda $u(x)$ funksiya eng katta (eng kichik) qiymatga yopiq $\overline{D}$ sohaning ixtiyoriy nuqtasida, xususan S chegarada ham erishadi.

3–LEMMA. Agar $u(x)$ funksiya D sohada garmonik, yopiq $\overline{D}$ sohada uzluksiz va D sohaning S chegarasida $u(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda yopiq $\overline{D}$ sohada $u(x) \geq 0$ bo'ladi.

ISBOT. Faraz qilaylik, D sohada shunday $x' \in D$ nuqta mavjudki, bu nuqtada $u(x') < 0$ bo'lsin. U holda $u(x)$ funksiya $\overline{D}$ sohada etarlicha kichik manfiy qiymatga sohaning S chegarasida erishadi. Bu esa D sohaning S chegarasida $u(x) \geq 0$ bo'lsin degan shartga zid.

4–LEMMA. (Taqqoslash xossasi) Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar D sohada garmonik, yopiq $\overline{D}$ sohada uzluksiz va S chegarada $u(x) \geq v(x)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in D$ uchun $u(x) \geq v(x)$ bo'ladi.

ISBOT. Bu natijani isbotlash uchun quyidagi $w(x) = u(x) - v(x)$ ayirmani qaraymiz. Bu ayirma 3–natijaning shartlarini qanoatlantiradi. U holda $x \in D$ bo'lganda $w(x) \geq 0$ yoki $u(x) \geq v(x)$ ekanligi kelib chiqadi.

5–LEMMA. Agar $u(x)$ funksiya D sohada garmonik va yopiq $\overline{D}$ sohada uzluksiz bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in D$ uchun quyidagi a) $\min\limits_S u(x) \leq u(x) \leq \max\limits_S u(x)$;

b) $|u(x)| \leq \max\limits_S |u(x)|$. tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Ma'lumki, $\ln\frac{1}{r}$ Laplas tenglamasining fundamental echimi bo'lgani uchun $\Delta\left(\ln\frac{1}{r}\right) = 0$ bo'ladi. δ_ε sohaning S_ε chegarasiga o'tkazilgan tashqi n_ε normal r radiusga qarama-qarshi yo'nalganligi uchun

$$\frac{\partial}{\partial n_\varepsilon}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\Big|_{r=\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial n_\varepsilon}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \tag{7}$$

teng. $u(x,y)$ funksiyaning birinchi tartibli hosilalarining uzluksizligidan

$$\max_{S_\varepsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon}\right| \le C,$$

bo'ladi, bu yerda C o'zgarmas ε ga bog'liq emas. Shuning uchun $\varepsilon \to 0$ intilganda

$$\left|\int_{S_\varepsilon} \ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon}\,ds_\varepsilon\right| = \left|\ln\frac{1}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon}\,ds_\varepsilon\right| \le C\cdot 2\pi\varepsilon\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon} \to 0$$

bo'ladi.

(7) tenglikni hisobga olib, ε radiusli aylanadan birlik aylanaga o'tamiz, $x-\xi = \varepsilon\cos\varphi$, $y-\eta = \varepsilon\sin\varphi$, $ds_\varepsilon = \varepsilon\, ds_1$ natijada ushbu

$$\int_{S_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial n_\varepsilon}\left(\ln\frac{1}{r}\right)ds_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int_{S_1} u(x-\varepsilon\cos\varphi, y-\varepsilon\sin\varphi)\varepsilon ds_1 = 2\pi u(x,y),$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Endi (6) formulada $\varepsilon \to 0$ limitga o'tsak, D_ε esa D ga intiladi, uning o'ng tomonidagi ikkinchi integral $-2\pi u(x,y)$ ga intiladi, ya'ni

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\left[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon} - u\frac{\partial}{\partial n_\varepsilon}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]ds_\varepsilon = -2(x,y).$$

Natijada quyidagi

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint_D \ln\frac{1}{r}\,\Delta u \ldots +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_S\left[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]ds. \tag{8}$$

C^2 sinfdagi funksiyalarning integral ifodasi hosil bo'ladi.

Agar $u(x,y)$ funksiya D sohada garmonik bo'lsa, u holda bu funksiyaning integral ifodasi (8) formuladan

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_S\left[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]ds, \tag{9}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Agar $n > 3$ bo'lsa, u holda C^2 sinfdagi funksiyalarning integral ifodasi

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|}\iint_D \frac{1}{r^{n-2}}\Delta u(\xi)\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{(n-2)|S_1|}\int_S\left[\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\right]d_\xi S. \tag{10}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi $n = 3$ bo'lganda $|S_1| = 4\pi$ ga teng bo'ladi va C^2 sinfdagi funksiyalarning integral ifodasi, ya'ni (10) formula

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\iint_D \frac{1}{r}\Delta u(\xi)\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]d_\xi S, \tag{11}$$

ko'rinishga keladi.

Oxirgi (10) va (11) formulalardan garmonik funksiyaning integral ifodasini qiyinchiliksiz olish mumkin.

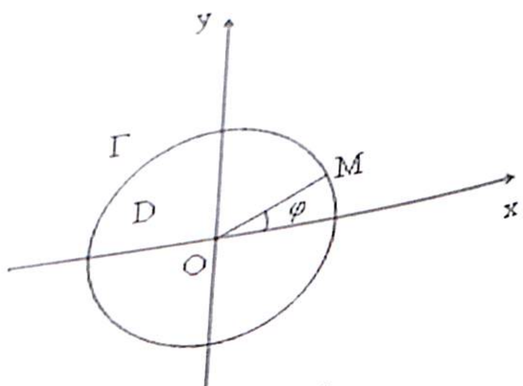
...ning o'ng va chap tomonlari faqat bitta λ o'zgarmasga teng bo'lganda o'rinli. U holda (5) tenglama ikkita

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \tag{6}$$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0, \tag{7}$$

chiziqli oddiy differensial tenglamaga ekvivalent bo'ladi.

Chegaraviy funksiya $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$ ekanligidan (4) formulaga asosan $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ bo'ladi. Demak, Φ davri $T = 2\pi$ bo'lgan davriy funksiya ekan. Bu faqat $\lambda = n^2, n \in N$ bo'lganda o'rinli bo'ladi.



19—shakl.

(6) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi

$$\Phi_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi$$

formula bilan aniqlanadi, bunda a_n, b_n ixtiyoriy o'zgarmaslar. (7) tenglama esa $\lambda = n^2$ bo'lganda ikkita

$$R_1(\rho) = \rho^n, \qquad R_2(\rho) = \rho^{-n}$$

...yechimlarga ega.

...ning yopiq $\overline{D}$ sohada uzluksiz yechimi ...ning yechimi sifatida $R(\rho)$ ...

formulani topamiz. Shunday qilib, (3) tenglamaning D doirada garmonik bo'lgan xususiy yechimini topdik.

Agar $\lambda = 0$ bo'lsa, (3) tenglamaning yechimi $u(x, y) = const$ bo'ladi va aniqlik uchun $const = a_0/2$ deb olamiz. U holda Dirixle masalasining yechimini ushbu

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \tag{8}$$

yig'indi ko'rinishda izlaymiz.

Faraz qilaylik, ushbu a_n, b_n ketma ketliklar chegaralangan va $M = \max_n\{|a_0|/2, |a_n| + |b_n|\}$ bo'lsin. Agar $\rho < \rho_1 < 1$, ixtiyoriy ρ_1 fiksirlangan musbat son bo'lsa, u holda (8) qator ushbu

$$M(1 + \rho_1 + \rho_1^2 + \ldots + \rho_1^n + \ldots) = M \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_1^n \tag{9}$$

sonli qator bilan majorantlanadi. Veyershtrass alomatiga asosan (8) qator ixtiyoriy yopiq $\rho \leq \rho_1$ doirada tekis yaqinlashuvchi va bu qatorning yig'indisi yopiq $\rho \leq \rho_1$ doirada uzluksiz bo'ladi. Budan $\rho_1 \in (0, 1)$ oraliqda ixtiyoriy ekanligidan $u(\rho, \varphi)$ funksiyaning D doirada uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.

Endi (8) qatorni D doirada uzluksiz ρ va φ o'zgaruvchilar bo'yicha k marta differensiallash mumkin. Hosil bo'lgan qatorlar $\rho \leq \rho_1 < 1$ (9) kabi yaqinlashuvchi sonli qator bilan majorantlanadi.

Haqiqatdan ham, (8) qatorni k marta formal differensiallash natijasida

$$\frac{\partial^k u(\rho, \varphi)}{\partial \rho^k} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)\rho^{n-k}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \tag{10}$$

$$\frac{\partial^k u(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k \rho^n \left[(a_n \cos\left(n\varphi + \frac{k\pi}{2}\right) + b_n \sin\left(n\varphi + \frac{k\pi}{2}\right)\right], \tag{11}$$

hosil bo'lgan (10) qatorning hadlari $\rho \leq \rho_1 < 1$ sohada ushbu

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)\rho_1^{n-k} \leq M \sum_{n=k}^{+\infty} n^k \rho_1^{n-k} = M \sum_{m=0}^{+\infty} (k+m)^k \rho_1^m,$$

yaqinlashuvchi sonli qatorning hadlari bilan chegaralangan.

(11) qator esa mos ravishda

$$M\sum_{n=1}^{+\infty} n^k \rho_1^n$$

qatorga majorantlanadi.

Bundan (10)–(11) qatorlar $\rho \le \rho_1$ yopiq doirada absolyut va tekis yaqinlashuvchi, shuning uchun bu qatorlarning yig'indisi D sohada uzluksiz bo'ladi.

Agar (10) qatorda $k = 1$ va $k = 2$, (11) qatorda esa $k = 2$ bo'lganda hosil bo'lgan ifodalarni (3) tenglamaga qo'ysak, (8) qator bilan aniqlangan $u(\rho, \varphi)$ funksiya D doirada tenglamaning yechimi bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.

SHunday qilib, (8) qator D sohada garmonik funksiya ekan. U holda (8) qatorni (2) chegaraviy shartga qo'yamiz, natijada

$$u(\rho,\varphi)\Big|_S = f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \tag{12}$$

hosil bo'ladi.

Bu $f(\varphi)$ funksiyaning $[0, 2\pi]$ segmentda sinus va kosinus bo'yicha Fur'e qatoriga yoyilmasi deyiladi.

Uning a_n va b_n koeffitsientlari

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi, \tag{13}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{14}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi, \qquad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{15}$$

r yordamida aniqlanadi.

Agar $f(\varphi)$ funksiya $[0, 2\pi]$ segmentda uzluksiz va shu segmentda uzluksiz birinchi tartibli hosilalarga ega bo'lsa, u holda (12) qator $[0, 2\pi]$ segmentda $f(\varphi)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi, bunda (12) qatorning har bir hadi ushbu

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|), \tag{16}$$

yaqinlashuvchi sonli qatorning hadlari bilan majorantlanadi.

Demak, (8) qator ixtiyoriy $\rho \le 1$ bo'lganda (16) qatorga majorantlansa, u holda Veyershtrass alomatiga ko'ra (8) qator yopiq $\overline{D}$ sohada absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Endi $f(\varphi)$ ixtiyoriy uzluksiz funksiya bo'lganda, koeffitsientlari (13)–(15) formulalar bilan aniqlangan (8) qator $\rho < 1$ sohada Dirixle masalasining yechimi ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\rho = 1$ aylanada berilgan $f(\varphi)$ funksiyaga intiluvchi $f_m(\varphi)$ funksiyalar ketma-ketligini quramiz.

Faraz qilaylik, u_m funksiya $u_m|_S = f_m(\varphi)$ shartni qanoatlantiruvchi Dirixle masalasining yechimi bo'lsin. 6-lemmaga asosan u_m ketma-ketlik $\rho \le 1$ doirada uzluksiz bo'lgan $u(x, y)$ funksiyaga intiladi va bu funksiya $\rho = 1$ da $f(\varphi)$ funksiyaga teng.

Faraz qilaylik, $f_m(\varphi)$ funksiyaning Fure koeffitsientlari a_n^m, b_n^m bo'lsin. $\forall \varepsilon > 0$ olinganda barcha n lar uchun etarlicha katta m larda

$$|a_n - a_n^m| \le \varepsilon, \qquad |b_n - b_n^m| \le \varepsilon$$

bo'ladi.

Bundan

$$\left|\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) - u_m\right| =$$

$$= \left|\frac{a_0 - a_0^m}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n |(a_n - a_n^m)\cos n\varphi + (b_n - b_n^m)\sin n\varphi)|\right| \le$$

$$\le 2\varepsilon \sum_{n=}^{\infty} \ldots \frac{1}{1-\rho}$$

kelib chiqadi.

Demak, (8) formula bilan aniqlangan $u(x,y)$ funksiya $\rho<1$ sohada (1)–(2) Dirixle masalasining yechimi ekan.

Shunday qilib, quyidagi teoremaning o'rinli ekanligi isbotlandi.

1–TEOREMA. Agar $f(\varphi)\in C^1[0,2\pi]$ va $f(0)=f(2\pi)$ bo'lsa, u holda D sohada Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasining yagona yechimi mavjud bo'ladi. Bu yechim (8) qator bilan, uning a_0, a_n va b_n koeffitsientlari mos ravishda (13), (14) va (15) formulalar bilan aniqlanadi.

Puasson formulasi

Endi (8) qatorni (14)–(15) formulalarni inobatga olib o'zgartiramiz. Buning uchun (14) va (15) koeffitsientlarni (8) qatorga qo'yamiz. Natijada $\rho<1$ sohada

$$u(\rho,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\rho^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(t)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\Big\{\int\limits_0^{2\pi}f(t)\cos nt dt\cos n\varphi+\int\limits_0^{2\pi}f(t)\sin nt dt\sin n\varphi\Big\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(t)\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\{\cos nt\cos n\varphi+\sin nt\sin n\varphi\}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(t)\Big[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n(t-\varphi)\Big]dt, \qquad (17)$$

$$=-1+2\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos nw=-1+2Re\sum_{n=0}^{\infty}z^n=$$

$$=-1+2Re\frac{1}{1-z}=-1+2Re\frac{1}{1-\rho e^{iw}}=\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos w} \qquad (18)$$

ko'rinishga keladi.

U holda (18) ifodani (17) formulaga qo'yib, $\rho<1$ bo'lganda

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(t)\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(t-w)}dt. \qquad (19)$$

formulani olamiz.

Bu formula *Puasson formulasi deyiladi* va bu $\rho<1$ sohada Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasi yechimini aniqlaydi.

Ixtiyoriy R radiusli doira uchun Puasson formulasini topish uchun (19) formuladan ρ ni ρ/R ga almashtirib,

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\tilde{f}(t)\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2\rho R\cos(t-w)}dt,$$

$\tilde{f}(t)=f(tR)=f(s)$, $dt=ds/R$, $s=\varphi R$ ixtiyoriy R radiusli aylana yoyining uzunligi. U holda

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_0^{2\pi R}f(s)\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2\rho R\cos(s/R-w)}ds, \qquad (20)$$

formulaga ega bo'lamiz.

bo'lsa, u holda barcha $x \in \Omega$ nuqtalarda $u(x)$ funksiya uchun ushbu

$$|u(x)| \le C \cdot \max_{\Gamma} |u(x)|, \quad C = const, \tag{6}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bu yerda, $r \to \infty$ intilganda, $\alpha(r) \to 0$ bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, koordinatalar boshi Ω sohada bo'lmasin. Endi markazi koordinatalar boshida bo'lgan R radiusli S_R sirtga nisbatan inversiya almashtirishini qaraylik. Bunda R^n fazoning Ω sohada yotuvchi barcha nuqtalari koordinatalar boshini o'z ichiga olgan chekli Ω^* sohaning nuqtalariga bir qiymatli akslantiriladi, sohaning Γ chegarasidagi nuqtalar esa Ω^* sohaning Γ^* chegarasidagi nuqtalarga, cheksiz uzoqlikdagi ∞ nuqta esa koordinatalar boshiga akslanadi. U holda Kelvin teoremasiga asosan

$$v(\xi) = \left(\frac{R}{r}\right)^{n-2} u\left(\frac{R^2}{r^2}\xi\right) = \left(\frac{r}{R}\right)^{n-2} u(x), \tag{7}$$

funksiya $\Omega^* \setminus \{\xi = 0\}$ sohada garmonik bo'ladi va $r = |\xi| \to 0$ bo'lganda ushbu

$$v(\xi) = \begin{cases} \alpha^*(r) \ln \dfrac{r}{R^2}, & \text{agar} \quad n = 2 \\ \alpha^*(r) \dfrac{1}{r^{n-2}}, & \text{agar} \quad n > 2 \end{cases}$$

shartni qanoatlantiradi. Bu yerda $\alpha^*(r) = R^{n-2}\alpha\left(\dfrac{R^2}{r}\right) \to 0.$ Agar $r \to 0$ intilsa, $\alpha^*(r) \to 0$ bo'ladi. U holda (7) funksiya $\xi = 0$ nuqtada garmonik bo'ladi, ya'ni $v(\xi)$ funksiya Ω^* sohaning nuqtalarida garmonik funksiya bo'lar ekan.

Shunday qilib, $v(\xi)$ funksiya chekli $\overline{\Omega^*}$ sohada uzluksiz va Ω^* sohada garmonik ekanligidan, ekstremum prinsipiga asosan bu funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga Ω^* sohaning $G'amma^*$ chegarasida erishadi, ya'ni $\forall \xi \in \overline{\Omega^*}$ bo'lganda $v($[illegible]iya uchun quyidagi tengsizlik

$$|v(\xi)| \le \max_{G'amma^*} |v(\xi)|$$

o'rinli. Bu tengsizlikdan (7) formulani inobatga olib, $\forall x \in \Omega$ nuqtalar uchun

$$|u(x)| = \left(\frac{R}{r}\right)^{n-2} v(\xi) \le \left(\frac{R}{r}\right)^{n-2} \max_{\Gamma}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-2} |u(x)| \le$$

$$\le \left(\frac{r^*}{r}\right)^{n-2} \max_{\Gamma} |u(x)| \le C \cdot \max_{\Gamma} |u(x)|,$$

kelib chiqadi. Bu yerda $r^* = \max\limits_{\Gamma} r$, $C = \sup\limits_{\Omega}\left(\dfrac{r^*}{r}\right)^{n-2}$.

Shunday qilib, (6) tengsizlik isbotlandi.

2-Teorema. Agar tashqi Dirixle masalasining yechimi mavjud bo'lsa, u holda bu yechim yagona bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, tashqi Dirixle masalasi $u_1(x)$ va $u_2(x)$ yechimlarga ega bo'lsin. U holda ularning ayirmasi $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ bir jinsli chegaraviy shartni qanoatlantiradi. Buning uchun 1-teorema shartlari bajariladi va (6) baho o'rinli. $u(x)$ funksiya qaralayotgan sohaning Γ chegarasida nolga teng bo'lgani uchun (6) tengsizlikdan $|u(x)| \le 0$ kelib chiqadi.

Bundan esa $\forall x \in \overline{\Omega}$ uchun $u(x) \equiv 0$ yoki $u_1(x) = u_2(x)$ bo'ladi. Demak, tashqi Dirixle masalasining yechimi yagona ekan.

Endi tashqi Dirixle masalasi yechimining mavjudligini $n = 2$ bo'lgan holda isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, markazi koordinata boshida bo'lgan R radiusli Γ_R aylana bilan chegaralangan D_R doiraning tashqarisi $\Omega_R = R^2 \setminus D_R$ bo'lsin. Ω_R sohada Laplas tenglamasi uchun (1)–(3) va (5) shartlarni qanoatlantiruvchi tashqi Dirixle masalasi yechimini quramiz, bunda (3) chegaraviy shart $\Gamma_R = \{(x,y) : x^2 + y^2 = R^2\}$ aylanada

$$u(x,y)|_{\Gamma_R} = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|_{r=R} = f(R,\varphi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \tag{3'}$$

[illegible]n bo'ladi. Bu yerda f be[illegible]zluksiz funksiya va $f(0) =$ [illegible]

[illegible]englik o'rinli.

$\overline{U}(M_0, \varepsilon)$ sharda $\left.\dfrac{\partial u}{\partial N}\right|_{S_\varepsilon}$ funksiya chegaralangan, ya'ni $M \in \overline{U}(M_0, \varepsilon)$ uchun

$$\left|\frac{\partial u(M)}{\partial N}\right| \leq K$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda

$$|I_{21}| \leq \frac{1}{4\pi}\iint_{S_\varepsilon}\left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial N}\right| dS \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint_{S_\varepsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial N}\right| dS \leq$$

$$\leq \frac{K}{4\pi\varepsilon}\iint_{S_\varepsilon} dS = \frac{K}{4\pi\varepsilon}4\pi\varepsilon^2 = K\varepsilon.$$

bo'ladi. Buning $\varepsilon \to 0$ dagi limiti

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{21} = 0, \tag{15}$$

teng.

Demak, (12) – (15) tengliklardan

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I = \lim_{\varepsilon\to 0}(I_1 - I_2) = u(M_0), \tag{16}$$

bo'ladi.

Shunday qilib, (11) formulada (16) tenglikni inobatga olib, $\varepsilon \to 0$ da limitga o'tsak, (9) formulaning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Biz yuqorida (9) formulani $u(M_0)$ funksiya (6)–(8) Dirixle masalasining yechimi bo'lsin, deb hosil qildik. Shuni aytish muhimki, (9) formula bilan aniqlangan $u(M_0)$ funksiya Laplas tenglamasini va chegaraviy shartni qanoatlantiradi.

Grin funksiyasining xossasidan $D \backslash M$ sohada

$$\Delta_{M_0} G(M, M_0) = 0,$$

bo'ladi. D sohada M_0 nuqtaning ixtiyoriy ekanligidan va garmonik funksiyaning xossasidan

$$\Delta u(M_0) = -\iint_S f(M)\Delta_{M_0}\left(\frac{\partial}{\partial N}G(M, M_0)\right) dS =$$

$$= -\iint_S f(M)\frac{\partial}{\partial N}\left(\Delta_{M_0} G(M, M_0)\right) dS = 0$$

kelib chiqadi. Demak, (9) funksiya Laplas tenglamasini qanoatlantirar ekan.

Agar S sirt etarlicha silliq bo'lsa, u holda (9) funksiyadan

$$\lim_{M_0 \to P_0} u(M_0) = f(P_0), \quad P_0 \in S, \tag{17}$$

bo'lishini ko'rsatish mumkin.

Agar (9) formulada $f(M) = 1$ bo'lsa, u holda Grin funksiyasining xossasi va ekstremum prinsipiga asosan $u(M_0) = 1$ bo'ladi. U holda (9) formuladan

$$\iint_S \frac{\partial G(P, M_0)}{\partial N} dS = -1, \tag{18}$$

tenglikni olamiz. (18) tenglikdan va (9) formuladan foydalanib, quyidagi

$$u(M_0) - f(P) = -\iint_S [f(M) - f(P)]\frac{\partial G}{\partial N} dS \tag{19}$$

ayirmani tuzamiz.

S sirtdagi $P_0 \in S$ nuqtani δ radiusli shar bilan ajratib olamiz. S sirtning δ radiusli shar ichidagi qismi σ bo'lsin. δ radiusni shunday tanlaymizki, unda $M \in \sigma$ bo'lsin. f funksiyaning uzluksizligidan $\varepsilon > 0$,

$$|f(M) - f(P)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda

$$u(M_0) - f(P) = -\iint_\sigma [f(M) - f(P)]\frac{\partial G}{\partial N} dS -$$

$$-\iint_{S\backslash\sigma} [f(M) - f(P)]\frac{\partial G}{\partial N} dS = J_1 + J_2$$

shartni qanoatlantiradigan $g(M, M_0)$ regulyar qismini topishimiz zarur bo'ladi.

Yuqoridagi (20) tenglikdan $\frac{1}{r} = \frac{R}{\rho r_1}$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa $g(M, M_0)$ regulyar qismini

$$g(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho r_1}$$

deb olishimiz zarur bo'ladi. U holda Grin funksiyasi

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln \frac{1}{r} - \ln \frac{R}{\rho r_1}\right). \tag{21}$$

ko'rinishga keladi.

Haqiqatdan ham, (21) funksiya Grin funksiyasining ta'rifida keltirilgan shartlarni qanoatlantiradi. Endi doirada Dirixle masalasining yechimini olishimiz uchun (21) Grin funksiyadan normal bo'yicha hosilani hisoblaymiz.

$$\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial N}\left(\ln \frac{1}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial N}\left(\ln \frac{R}{\rho r_1}\right); \tag{22}$$

bu yerda

$$\frac{\partial}{\partial N}\left(\ln \frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r}\left[\frac{x - x_0}{r} \cos(N, x) + \frac{y - y_0}{r} \cos(N, y)\right] =$$

$$= -\frac{1}{r}[\cos(r, x) \cos(N, x) + \cos(r, y) \cos(N, y)] = -\frac{1}{r} \cos(r, N);$$

xuddi shuningdek

$$\frac{\partial}{\partial N}\left(\ln \frac{R}{\rho r_1}\right) = -\frac{1}{r_1} \cos(r_1, N)$$

Endi OM_0M uchburchakdan $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(r, N)$ tenglikni olamiz, $O\overline{M}_0M$ uchburchakda esa $\rho_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos(r_1, N)$ bo'ladi. Bu tengliklardan

$$\cos(r, N) = \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr}, \qquad \cos(r_1, N) = \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1}.$$

Topilgan ifodalarni (22) formulaga qo'yamiz va (20) tenglikni inobatga olib, uni soddalashtirsak, natijada Grin funksiyasining normal bo'yicha hosilasi

$$\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial N} = -\frac{1}{r}\cos(r, N) + \frac{1}{r_1}\cos(r_1, N) =$$

$$= -\frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr^2} + \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1^2} =$$

$$= \frac{2R^2r^2 - R^2r_1^2 - \rho_1^2r^2}{2Rr^2r_1^2} = -\frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi buni (9) formulaga qo'yib, Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasining yechimini quyidagi

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_S f(M)\frac{R^2 - \rho^2}{r^2}\,ds \tag{23}$$

ko'rinishda hosil qilamiz. Demak, xOy tekisligida Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasining yechimi Grin funksiyasi yordamida (23) formula bilan aniqlandi.

Xuddi $n = 3$ bo'lgandagi kabi (23) formula qaralayotgan sohada Laplas tenglamasini va chegaraviy shartni qanoatlantirishini ko'rsatish mumkin.

======== ◇ ========

Nazorat uchun testlardan namunalar

1 – nazorat uchun testlar

1. Agar $1 < x < 2$, $3 < y < 4$ bo'lsa, u holda ushbu

$$u_{xx} + y^2 u_{yy} + 2yu_x - 3yu_y = 0$$

tenglamaning tipini aniqlang.
a) giperbolik, b) parabolik,
c) aralash, d) elliptik.

2. Agar $5 < x < 6$, $y = 0$ bo'lsa, u holda ushbu

$$u_{xx} + y^2 u_{yy} + 2yu_x - 3yu_y = 0$$

tenglamaning tipini aniqlang.
a) giperbolik, b) parabolik,
c) aralash, d) elliptik.

3. Agar $1 < x^2 + y^2 < 3$ bo'lsa, u holda ushbu

$$u_{xx} + 2yu_{xy} + y^2 u_{yy} - 3xu_y = 0$$

tenglamaning tipini aniqlang.
a) giperbolik, b) parabolik,
c) aralash, d) elliptik.

4. Agar $2 < x + y < 5$ bo'lsa, u holda ushbu

$$4u_{xx} - 2(x - y)u_{xy} + (1 - xy)u_{yy} - 3xu_x = 0$$

tenglamaning tipini aniqlang.
a) giperbolik, b) parabolik,

c) $u(x,y) = e^{y}\varphi(x) + \psi(x)$;
d) $u(x,y) = x\varphi(y) + \psi(y)$.

5. Ushbu berilgan $u_{yy} + 2u_y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.
a) $u(x,y) = e^{-2y}\varphi(x) + \psi(x)$;
b) $u(x,y) = y^2\varphi(x) + \psi(y)$;
c) $u(x,y) = e^{-2y}\varphi(x) + \psi(y)$;
d) $u(x,y) = y^{-2}\varphi(x) + \psi(x)$.

6. Ushbu $u(x,y) = e^{-2x}\varphi(y) + \psi(x)$ funksiya quyidagi qaysi tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi?
a) $u_{yy} + 2u_y = 0$; b) $u_{xy} + 2u_y = 0$;
c) $u_{xy} - 2xu_y = 0$; d) $u_{xy} + 3u_y = 0$.

7. Ushbu $u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$ funksiya quyidagi qaysi tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi?
a) $u_{xy} + 2u_y = 0$; b) $u_{xy} = 0$;
c) $u_{xy} - 2xu_y = 0$; d) $u_{xy} + 3u_y = 0$.

8. Ushbu $u(x,y) = y^3\varphi(x) + \psi(y)$ funksiya quyidagi qaysi tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi?
a) $u_{xy} + 3u_y = 0$; b) $u_{yy} - 2u_y = 0$;
c) $u_{xy} - \dfrac{3}{y}u_x = 0$; d) $u_{yy} - \dfrac{3}{y}u_y = 0$.

9. Ushbu $u(x,y) = e^{2x}\varphi(y) + \psi(x)$ funksiya quyidagi qaysi tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi?
a) $u_{xx} - 2u_x = 0$; b) $u_{xy} - 2u_y = 0$;
c) $u_{yy} - \dfrac{2}{y}u_y = 0$; d) $u_{xy} + \dfrac{3}{x}u_y = 0$.

9. Ushbu $4xu_{xx} - yu_{xy} + 7u_x = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.
a) $u(x,y) = y^{-2/3}\varphi(x^3y^2) + \psi(y)$;
b) $u(x,y) = x^{5/3}\varphi(x^2y^3) + \psi(x)$;
c) $u(x,y) = y^3\varphi(xy^4) + \psi(y)$;

d) $u(x,y) = y^{-7/3}\varphi(x^2y^3) + \psi(x)$

10. Ushbu $u_{xy} + u_{yy} = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.
a) $u(x,y) = \varphi(x - y) + \psi(x)$;
b) $u(x,y) = e^{-x}\varphi(x - y) + \psi(x)$;
c) $u(x,y) = x^2\varphi(x - y) + \psi(y)$;
d) $u(x,y) = e^{x}\varphi(x - y) + \psi(y)$.

11. Ushbu $u_{xy} + \dfrac{2}{x}u_y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.
a) $u(x,y) = x^2\varphi(y) + \psi(x)$;
b) $u(x,y) = x^2\varphi(y) + \psi(x)$;
c) $u(x,y) = x^{-5/6}\varphi(xy^4) + \psi(x)$;
d) $u(x,y) = y^{-6/5}\varphi(x^4y) + \psi(y)$.

12. Ushbu $u_{xx} + 2u_x = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.
a) $u(x,y) = y^{5/2}\varphi(xy) + \psi(x)$;
b) $u(x,y) = x^{2/3}\varphi(x^2y) + \psi(y)$;
c) $u(x,y) = \varphi(y)e^{-2x} + \psi(y)$;
d) $u(x,y) = y^2\varphi(xy) + \psi(y)$.

13. Ushbu $2u_{xy} - u_{yy} - 3u_y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.
a) $u(x,y) = y^3\varphi(xy^2) + \psi(y)$;
b) $u(x,y) = e^{3x/2}f(x + 2y) + g(x)$;
c) $u(x,y) = x^2\varphi(xy^2) + \psi(x)$;
d) $u(x,y) = y^{-2}\varphi(x^2y) + \psi(y)$.

14. Ushbu $u_{xy} - 3u_{yy} - 5u_y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.
a) $u(x,y) = x^2\varphi(x^3y) + \psi(x)$;
b) $u(x,y) = x\varphi(x^3y^2) + \psi(y)$;
c) $u(x,y) = e^{5x}\varphi(3x + y) + \psi(x)$;

d) $u(x,y) = y^{-2}\varphi(x^2y) + \psi(y)$.

15. Ushbu $xu_{xx} + yu_{xy} = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

a) $u(x,y) = x\varphi(xy) + \psi(x)$;
b) $u(x,y) = y\varphi(x^2y) + \psi(y)$;
c) $u(x,y) = x^2\varphi(xy^2) + \psi(x)$;
d) $u(x,y) = y\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \psi(y)$.

3 – nazorat uchun testlar

1. Ushbu

$$u(1,y) = 3y^3 + 5, \qquad u_x(1,y) = 3y + 1$$

boshlang'ich shartlarni quyidagi funksiyalardan qaysi biri qanoatlantiradi?

a) $u(x,y) = 5 - \dfrac{9}{2}\,y + \ln x + \dfrac{9}{2}\,x^{2/3}y + 3y^2$;
b) $u(x,y) = 9y + 3y^3 - 2\ln x - \dfrac{9}{2}\,x^{2/3}y + 5$;
c) $u(x,y) = 5x^2y^2 + 5 - \dfrac{5}{9}\,x^{3/2}y + 3y^2 - x^{5/9}y + 3y$;
d) $u(x,y) = 3y + 5 - x^{2/3}y + 3y^2 - 2\ln x + 5$.

2. Ushbu

$$u(x,1) = 2x^2, \qquad u_y(x,1) = 3x + 1$$

...shlang'ich shartlarni quyidagi funksiyalardan qaysi biri ...oatlantiradi?

a) $u(x,y) = 5x + \dfrac{3}{2}\,xy^2 - \dfrac{3}{2}\,xy^3 + 1 + 3x^2$;
b) $u(x,y) = \dfrac{3}{2}\,xy^2 - \dfrac{3}{4}\,y^{4/3} + 2x^2 - \dfrac{3}{2}\,x + \dfrac{3}{4}$;
c) $u(x,y) = 9y^2 + 5xy - 5x^3y^2 + 3xy^2 - 3x^{5/9}y + 3y$;

d) $u(x,y) = \dfrac{9}{5}\,y + 3y^3 - \dfrac{9}{5}\,x^{2/3}y + 3y^2 - 2\ln x + 5$.

3. Ushbu

$$u(x,1) = 2x^3, \qquad u_y(x,1) = 3x$$

boshlang'ich shartlarni quyidagi funksiyalardan qaysi biri qanoatlantiradi?

a) $u(x,y) = 5 - \dfrac{9}{2}\,y + \ln x + \dfrac{9}{2}\,x^{2/3}y + 3x^2$;
b) $u(x,y) = \dfrac{2}{9}\,x + 3x^3 - 2\ln x - \dfrac{9}{2}\,x^{2/3}y$;
c) $u(x,y) = 5x^2 + 12 - \dfrac{5}{9}\,x^{3/2}y + 3x^2 - 3x^{5/9}y + 3x$;
d) $u(x,y) = \dfrac{9}{4}\,xy^{4/3} + 2x^3 - \dfrac{9}{4}\,x$.

4. Ushbu

$$u(1,y) = 1 + 2y, \qquad u_x(1,y) = 3y^2$$

boshlang'ich shartlarni quyidagi funksiyalardan qaysi biri qanoatlantiradi?

a) $u(x,y) = 5 - \dfrac{9}{2}\,y + \ln x + x^{2/3}y + 3x^2$;
b) $u(x,y) = \dfrac{3}{2}\,x^2y^2 + 1 + 2y - \dfrac{3}{2}\,y^2$;
c) $u(x,y) = 5x^2 + 12 - \dfrac{5}{9}\,x^{3/2}y + 3x^2 - 3x^{5/9}y + 3x$;
d) $u(x,y) = \dfrac{9}{4}\,xy^{4/3} + 2x^3 - \dfrac{9}{4}\,x$.

5. Agar biror tenglamaning umumiy yechimi

$$u(x,y) = y^{-5/3}\,f(x^3y^4) + g(y)$$

bo'lsa, u holda $u(1,y) = 3y^5$, $u_x(1,y) = 3y^4$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ funksiyani toping.

a) $u(x,y) = 5 - \dfrac{9}{2}\,y + \ln x + \dfrac{9}{2}\,x^{2/3}y + 3y^2$;

bo'lsa, u holda $u(0,y) = 1$, $u_x(0,y) = 1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ funksiyani toping.

a) $u(x,y) = x^4(y^4 - 1) + 3x^2 + 2$;

b) $u(x,y) = 2\ln x - \dfrac{9}{2}\,x^{2/3}y + 5$;

c) $u(x,y) = x(1+y)$;

d) $u(x,y) = \dfrac{1}{23}\,e^{23x} + \dfrac{22}{23}$.

12. Agar $\xi = 5x - 6y$, $\eta = x + 2y$ bo'lganda berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$u(\xi,\eta) = e^{2\xi} f(\eta) + g(\xi)$$

bo'lsa, u holda $u(0,y) = 4$, $u_x(0,y) = 1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ funksiyani toping.

a) $u(x,y) = x(y^4 + 4) + 3x^2 + 4$;

b) $u(x,y) = 2\ln x - \dfrac{9}{2}\,x^{2/3}y + 5$;

c) $u(x,y) = x(1+y)$;

d) $u(x,y) = \dfrac{1}{16}\,e^{16x} + \dfrac{63}{16}$.

13. Agar $\xi = 3x - 4y$, $\eta = 5x + 6y$ bo'lganda berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$u(\xi,\eta) = e^{-3\eta} f(\xi) + g(\eta)$$

...larni

bo'lsa, u holda $u(0,y) = 1$, $u_x(0,y) = 2$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ funksiyani toping.

a) $u(x,y) = x(1+y)$;

b) $u(x,y) = 2\ln x - \dfrac{9}{2}\,x^{2/3}y + 5$;

c) $u(x,y) = \dfrac{3}{22}\,e^{44x/3} + \dfrac{19}{22}$;

d) $u(x,y) = x^4(y^4 - 1) + 3x^2 + 2$.

15. Agar $\xi = x^3y^4$, $\eta = x$ bo'lganda berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$u(\xi,\eta) = \eta^{-4/3} f(\xi) + g(\eta)$$

bo'lsa, u holda $u(x,1) = 4x^2$, $u_y(x,1) = 6x$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ funksiyani toping.

a) $u(x,y) = x(1+y)$;

b) $u(x,y) = \dfrac{24}{7}\,xy^{7/4} + 4x^2 - \dfrac{24}{7}\,x$;

c) $u(x,y) = 2\ln x - \dfrac{9}{2}\,x^{2/3}y + 5$;

d) $u(x,y) = x^4(y^4 - 1) + 3x^2 + 2$.

4 – nazorat uchun testlar

... $r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ qutb ...

c) $\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}$, $n = 2$;
d) To'g'ri javob a) va v).

3. Ushbu $x^3 + axy^2$ funksiya a ning qanday qiymatida garmonik bo'ladi.
a) $a = 1$; b) $a = -1$; c) $a = -3$; d) $a = -2$.

4. Ushbu $x^2 + y^2 + az^2$ funksiya a ning qanday qiymatida garmonik bo'ladi.
a) $a = 1$; b) $a = -2$; c) $a = -1$; d) $a = -3$.

5. Ushbu $\sin 3x_1 \operatorname{ch} ax_2$ funksiya a ning qanday qiymatida garmonik bo'ladi.
a) $a = \pm 3$; b) $a = -2$; c) $a = 1$; d) $a = \pm 2$.

6. Laplas tenglamasining fundamental yechimini aniqlang.
a) $E(x, y) = -\ln|x - y|, \quad n = 2$;
b) $E(x, y) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\}$;
c) $E(x, y) = (n-2)^{-1}|x - y|^{2-n}, \quad n > 2$;
d) To'g'ri javob a) va v).

7. Agar $x = (x_1, x_2, x_3)$ va $y = (y_1, y_2, y_3)$ bo'lsa, u holda ushbu $E(x, y) = |x - y|^{-1}$ funksiya qaysi tenglamaning fundamental yechimi bo'ladi?

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$; b) $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0$;
c) $\sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$; d) $\sum\limits_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$;

8. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri garmonik bo'ladi?
a) $v(x, y) = x^2 + y^2$;
b) $v(x, y) = x^2 - y^2$;
c) $v(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 7$;

d) $v(x, y) = 5xy + 4y^4 - 9$.

9. Laplas tenglamasi uchun quyida keltirilgan qaysi masala nokorrekt qo'yilgan?
a) Koshi masalasi; b) Dirixle masalasi;
c) Neyman masalasi; d) Gursa masalasi.

10. Laplas tenglamasi uchun quyida keltirilgan qaysi masala korrekt qo'yilgan?
a) Koshi masalasi;
b) Dirixle masalasi;
c) Neyman masalasi;
d) To'g'ri javob b) va c).

11. Elliptik tipdagi tenglama uchun qanday masala korrekt qo'yilgan deyiladi?
a) masalaning echimi mavjud bo'lsa;
b) masalaning echimi yagona bo'lsa;
c) masalaning echimi berilganlarga uzluksiz bog'liq bo'lsa;
d) To'g'ri javob: a), b) va v).

12. Issiqlik tarqalish tenglamasining fundamental yechimini aniqlang.
a) $E(x, y) = -\ln|x - y|, \quad n = 2$;
b) $E(x, y) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\}$;
c) $E(x, y) = (n-2)^{-1}|x - y|^{2-n}, \quad n > 2$;
d) To'g'ri javob a).

13. Ushbu $u_t = u_{xx}$ tenglamaning $u(x, 0) = \sin lx$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi $u(x, t)$ yechimini toping.
a) $u(x, t) = \cos lx \sin t$;
b) $u(x, t) = \sin lx$;
c) $u(x, t) = e^{-l^2 t} \sin lx$;

d) To'g'ri javob a).

14. Ushbu $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ issiqlik tarqalish tenglamasining $u(x,y,0) = \sin kx \cos ly$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimini toping.

a) $u(x,t) = e^{-(k^2+l^2)t} \sin kx \cos ly$;
b) $u(x,t) = \sin lx$;
c) $u(x,t) = e^{-l^2 t} \sin kx \cos ly$;
d) To'g'ri javob a).

15. Ushbu $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ issiqlik tarqalish tenglamasining $u(x,y,0) = \sin kx + \cos ly$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimini toping.

a) $u(x,t) = \sin kx + \cos ly$;
b) $u(x,t) = e^{-k^2 t} \sin kx + e^{-l^2 t} \cos ly$;
c) $u(x,t) = e^{-l^2 t} \sin kx \cos ly$;
d) $u(x,t) = e^{-l^2 t}(\sin kx + \cos ly)$;

Berilgan misol va masalalarning javoblari.

I–bobda berilgan misollarning javoblari:

1.1.
1) Tenglama bo'ladi: $u_{xx} = 0$, $u_{xy} = 0$;
2) Tenglama emas: $0 = 0$;
3) Tenglama emas: $u = 2$;
4) Tenglama bo'ladi: $5u_x - 9u = 0$;

1.2.
5) Tenglama emas: $4u = -11$;
1) Ikkinchi tartibli;
2) Ikkinchi tartibli;
3) Ikkinchi tartibli;
4) Ikkinchi tartibli;

1.3.
5) Ikkinchi tartibli;
1) Bir jinsli chiziqli tenglama;
2) CHiziqsiz tenglama;
3) Bir jinsli kvazichiziqli tenglama;
4) Bir jinsli bo'lmagan kvazichiziqli tenglama;
5) Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglama;

1.5. $u(x,y) = \varphi(y)$; $y(x) = c$; bu yerda $\varphi(y)$ — ixtiyoriy uzluksiz funksiya; c — ixtiyoriy o'zgarmas.

1.6.qquad $u(x,y) = \varphi_1(y)x + \varphi_2(y)$; $y(x) = c_1 x + c_2$; bu yerda $\varphi_1(y)$ va $\varphi_2(y)$ — ixtiyoriy uzluksiz funksiyalar, c_1 va c_2 esa ixtiyoriy o'zgarmaslar.

1.7. $u(x,y) = f(x) + g(y)$; 1.8. $u(x,y) = f(x) + g(y)e^{-5x}$;

1.9. $u(x,y) = f(x)e^{3x} + g(y)$;

1.10.
1) $u(x,y) = xy + f(x) + g(y)$;
2) $u(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 y + f(y)x + g(y)$;
3) $u(x,y) = f(x) + xg_1(y) + g_2(y)$;

2.4. 1) $u(x,y) = \varphi(2x - y)$.

2) $u(x,y) = \varphi(2x + 3y)\exp\left(\dfrac{y}{2}\right)$.

3) $u(x,y) = \varphi(x + 2y)e^{2y}$.

4) $u(x,y) = \varphi(2x - y) - \dfrac{1}{3}\cos(x + y)$.

5) $u(x,y) = \varphi(4x + 3y)\exp\left(\dfrac{y}{4}\sin(4x + 3y)\right)$.

6) $u(x,y) = f(y) + g(x)e^{-ay}$.

7) $u(x,y) = f(x + y - \cos x) + g(x - y + \cos x)$.

8) $u(x,y) = x - y + f(x - 3y) + g(2x + y)\exp\left(\dfrac{3y - x}{7}\right)$.

9) $u(x,y) = [f(x) + g(y)]\exp\{-bx - ay\}$.

10) $u(x,y) = \dfrac{1}{x}\Big[f(x - y) + g(x + y)\Big]$.

III–bobda berilgan masalalarning javoblari:

3.1. 1) $u(x,y) = x^{-1}f(xy^4) + g(x)$;

$\xi = xy^4, \quad \eta = x; \quad u_{\xi\eta} + \eta^{-1}u_\xi = 0.$

2) $u(x,y) = f(xy)\ln y + g(y)$;

$\xi = xy, \quad \eta = y; \quad u_{\eta\eta} + \eta^{-1}u_\eta = 0.$

3) $u(x,y) = f(x) + x^{1/3}g(xy^3)$;

$\xi = x, \quad \eta = xy^3; \quad u_{\xi\eta} - \dfrac{1}{3\xi}u_\eta = 0.$

4) $u(x,y) = f(y + \sin x) + g(y + \sin x)e^{2x}$;

$\xi = y + \sin x, \quad \eta = x; \quad u_{\eta\eta} - 2u_\eta = 0.$

5) $u(x,y) = f(x^2 + y^2) + g(x^2 + y^2)x^3 + 10^{-1}x^5$;

$\xi = x^2 + y^2, \quad \eta = x; \quad u_{\eta\eta} - 2\eta^{-1}u_\eta - \eta^3 = 0.$

6) $u(x,y) = f(x + 2y) + e^{x/2}g(x + 2y)$;

$\xi = x + 2y, \quad \eta = x; \quad u_{\eta\eta} - \dfrac{1}{2}u_\eta = 0.$

7) $u(x,y) = f(4x + y)\exp\left\{x + \dfrac{y}{2}\right\} + g(2x + y)$;

$\xi = 4x + y, \quad \eta = 2x + y; \quad u_{\xi\eta} - \dfrac{1}{2}u_\xi = 0.$

8) $u(x,y) = f(x + \cos y)\dfrac{1}{x} + g(x)$;

$\xi = x + \cos y, \quad \eta = x; \quad u_{\xi\eta} + \dfrac{1}{\eta}u_\eta = 0.$

3.2. 1) $u(x,y) = -\dfrac{3}{2}(x^2 + y^2) + \sin y + 3xy$.

2) $u(x,y) = \dfrac{4}{5}(y^{3/4} - |x|^{5/2})$; $\quad |x| < 1, \quad 0 < y < 1$.

3) $u(x,y) = \sin y + e^{x-y} - 1$. 4) $u(x,y) = xy + \dfrac{y^2}{3}$.

5) $u(x,y) = x^2 + y^4$. 6) $u(x,y) = xy^4 + 1$.

7) $u(x,y) = 2(y^2 - 1) + \dfrac{1}{5}x^2(1 - y^5) + 3x^2$.

8) $u(x,y) = 2\sqrt{xy}$. 9) $u(x,y) = (x - 1)y^5$.

10) $u(x,t) = x + \dfrac{axt^2}{6} + \sin x \sin t$.

3.3. $u(x,t) = A\sin \pi n x \cos \pi n a x.$

3.4. $u(x,t) = \dfrac{8}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^3}\sin[(2k+1)\pi x]\cos[(2k+1)\pi at].$

3.5. $u(x,t) = \dfrac{4\alpha_0}{a\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}\sin[(2k+1)\pi x]\sin[(2k+1)\pi at].$

3.6. $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\pi}\sin\dfrac{2a\pi}{l}t\sin\dfrac{2\pi}{l}x.$

3.7. $u(x,t) = \dfrac{2l}{a\pi}\sin\dfrac{a\pi}{2l}t\sin\dfrac{\pi}{2l}x + \cos\dfrac{5a\pi}{2l}t\sin\dfrac{5\pi}{2l}x.$

3.8. $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\cos a\lambda_k t\sin\lambda_k x +$

$$+\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\int_0^l f_k(\tau)\sin a\lambda_k(t-\tau)\sin\lambda_k x d\tau;$$

bu yerda $a_k = \dfrac{2(h^2+\lambda_k^2)}{l(h^2+\lambda_k^2)+h}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\lambda_k x dx;$

$$f_k(t) = \frac{2(h^2+\lambda_k^2)}{l(h^2+\lambda_k^2)+h}\int_0^l f(x,t)\sin\lambda_k x dx;$$

λ_k esa $\lambda_k\cos\lambda_k l + h\sin\lambda_k l = 0$ tenglamaning ildizlari.

3.9. $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\dfrac{2}{k\pi}\left(\alpha-(-1)^k\beta\right) - \dfrac{l^2 f_k}{(k\pi a)^2}\right]\times$

$$\times\cos\left(\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{l^2 f_k}{(k\pi a)^2}\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right);$$

bu yerda

$$f_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx.$$

3.11. 1) $u(x,t) = \dfrac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)] -$

$$-\frac{ct}{2}\int_{x-at}^{x+at}\left(\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)^{-1}J_1\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-t)^2}{a^2}}\right)\psi(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}J_o\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

2) $u(x,t) = \dfrac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+$

$$+\frac{ct}{2}\int_{x-at}^{x+at}\left(\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)^{-1}I_1\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)\psi(\xi)d\xi.$$

3) $u(x,t) = \dfrac{1}{4}\int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\eta}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\dfrac{\lambda}{4}\right)\dfrac{(\xi-\xi_1)^k(\eta-\eta_1)^k}{(k!)^2}d\eta_1 d\xi_1 =$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\lambda}{4}\right)^k\frac{\xi^{k+1}\eta^{k+1}}{[(k+1)!]^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\lambda}{4}\right)^k\frac{(x^2-t^2)^{k+1}}{[(k+1)!]^2}.$$

4) $u(x,y) = \dfrac{1}{2} + (4-3y)\exp(1-x-y) -$

$$-\left(2x+\frac{3}{2}\right)\exp[2(1-x-y)],$$

$$R(x,y;\xi,\eta) = \exp\{x-\xi+2(y-\eta)\}.$$

IV–bobda berilgan masalalarning javoblari:

4.1. $u(x,t) = \dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2k+1}\exp\{-(2k+1)^2\pi a^2 t\}\sin(2k+1)\pi x.$

4.2. $u(x,t) = \exp\left\{-\left(\dfrac{a\pi}{2l}\right)^2 t\right\}\sin\dfrac{\pi x}{2l}.$

4.3. $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k\exp\left\{-\left[\dfrac{(2k+1)a\pi}{2l}\right]^2 t\right\}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}x.$

Bu yerda $a_k = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}xdx.$

10. Копляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М. "Высшая школа". 1970. – 710 с.

11. Михлин С.Г. Курс математической физики. – СПб., "Лань". 2002. – 576 с.

12. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М., "Высшая школа". 1995. – 301 с.

13. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М., Изд–во физ.мат. лит. 1961. – 400 с.

14. Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. – Самара. Самарский университет. 2012. – 194 с.

15. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. Учебник для ВУЗов. – М., ФИЗМАТЛИТ. 2013. – 352 с.

16. Салохиддинов М.С. Математик физика тенгламалари. – Тошкент., "Ўқитувчи". 2002. – 445 б.

17. Салохиддинов М.С., Ўринов А.Қ. Гиперболик ва эллиптик типдаги бузиладиган дифференциал тенгламалар. – Тошкент., "Университет". 2006. – 270 б.

18. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. – М., Наука. 1964. – 206 с.

19. Смирнов М.М. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М., "Наука". 1974. – 112 с.

20. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М., Изд–во МГУ. 2004. – 798 с.

21. Ўринов А.Қ. Телеграф тенгламаси учун чегаравий масалалар. – Тошкент. "Университет". 1996. – 47 бет.

22. Ўринов А.Қ. Математик физика тенгламалари фанидан масалалар тўплами. – Фарғона, ФарДУ. 2008. – 104 бет.

23. Ўринов А.Қ. Параболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. – Тошкент, "Mumtoz so'z". 2015. – 196 бет.

24. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. – Тошкент, "Mumtoz so'z". 2014. – 196 бет.

25. Cain J.W., Reynolds A.M. Ordinary and Partial Differential Equations, An introduction to Dynamical Systems. – Richmond, Virginia. 2010. 416 p.

26. Hunter J.K. Notes on Partial Differential Equations. – University of California at Davis. 2014. 242 p.

27. Miersemann E. Partial Differential Equations, Lecture Notes. – Leipzig University. 2012. 205 p.

28. Moore J. D. Introduction to Partial Differential Equations. – University of California, CA. 2012. 169 p.

29. Pinchover Y and Rubinstein J. An introduction to Partial Differential Equations. – Cambridge University Press. 2005. 385 p.

30. Strauss W. S. Partial Differential Equations, An introduction. – John Wiley and Sons, Inc. NJ USA, 2008. 466 p.

M U N D A R I J A

O. S. ZIKIROV

MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARI

O'QUV QO'LLANMA

I va II qism

Qayta nashr

Toshkent - "Innovatsiya-Ziyo" - 2022

Muharrir: Xolsaidov F. B.

Nashriyot litsenziyasi AI №023, 27.10.2018.
Bosishga 20.05.2022. da ruxsat etildi. Bichimi 60x84.
"Times New Roman" garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.

Shartli bosma tabog'i 21. Nashr bosma tabog'i 20.
Adadi 50 nusxa.

...atsiya- Ziyo" MCHJ matbaa bo'limida chop etildi.
...kent shahri, Farhod ko'chasi, 6-a uy.

ISBN 978-9943-7025-1-6