

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA FAKULTETI

OPTIMAL BOSQARUV USULLARI KAFEDRASI

Ro'yhatga olingan:

«TASDIQLAYMAN»
O'quv ishlari bo'yicha prorektor
Prof.A.S. Soleev

№ _____
2019 y. « ____ » _____

« ____ » _____ 2019 y.

Chekli o'lchamli extremal masalalar va ularni yechishning sonli usullari
fani bo'yicha

O' Q U V – U S L U B I Y M A J M U A

Bilim sohasi: 100000 - Gumanitary soha

Ta'lim sohasi: 130000 - Matematika

Ta'lim yo'nalishi: 5130200 – Amaliy matematika va informatika

Samarqand - 2019

S. Axatqulov, S.Ochilov. “Chekli o’lchamli extremal masalalar va ularni yechishning sonli usullari” fanidan o’quv-uslubiy majmua.-Samarqand: SamDU nashri -2019. 195 bet.

Ushbu o’quv-uslubiy majmua oliy o’quv yurtlari amaliy matematika va informatika, 5130200 – amaliy matematika va informatika ta’lim yo’nalishi talabalriga mo’ljallangan

Taqrizchi: J. Mahmudov – Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasi dotsenti, f-m.f.d..

SamDU o’quv-uslubiy kengashining 2019 yil _____ dagi _____ qarori bilan o’quv-uslubiy majmua sifatida nashrga tavsiya etilgan

Tuzuvchilar: S. Axatqulov- Optimal boshqaruv usullari kafedrası katta o'qituvchisi, PhD.
S.Ochilov - Optimal boshqaruv usullari kafedrası dotsenti,
f.m.f.n

Mazkur o'quv –uslubiy majmua Samarqand Davlat universiteti, Amaliy matematika va informatika fakulteti, "Optimal boshqaruv usullari" kafedrası, 5130200 – amaliy matematika va informatika ta'lim yo'nalishining o'quv rejasidagi "Chekli o'lchamli extremal masalalar va ularni yechishning sonli usullari" fani bo'yicha Samarqand davlat universiteti tomonidan tasdiqlangan namunaviy fan dasturi asosida ishlab chiqilgan

"Optimal boshqaruv usullari" kafedrasining 2019 yil _____ 1-son yig'ilishida muhokamadan o'tgan va fakultet kengashida muhokama qilish uchun tavsiya etilgan.

Kafedra mudiri: _____ **dots. Bozorov I.N**

Amaliy matematika va informatika fakulteti o'qu-uslubiy kengashining 2019 yil "____" – avgustdagi 1-son qarori bilan tasdiqlangan.

O'quv-uslubiy kengash raisi: _____ **dots. Mamatov Sh.S.**

Fanning ishchi o'quv dasturi Amaliy matematika va informatika fakulteti ilmiy kengashining 2019 yil "____" – avgustdagi 1-son qarori bilan tasdiqlangan.

Fakultet dekani: _____ **dots. Babayarov.A.**

Kelishildi:

O'quv-uslubiy

boshqarma boshlig'i

_____ **dots. Aliqulov B.S.**

2019-#

Таълим йўналиши:

Академик даража - БАКАЛАВР

Ўқиш муддати - 4 йил

Таълим шакли - кундузги

Бүр	Хафтагалар												Ужирарайн:					Хувьцаа																																												
													ЖАМН	нуугдан																																																
														Балхадтай талын	Аггестайнхор	Малхад агуулагдсан	Бүтээгдэхүүний өндөр		Тэгш																																											
	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август																																																		
I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	42	36	4	2		10	52			
II																																																							44	36	4	4		8	52	
III																																																							44	36	4	4		8	52	
IV	M	M	M	M	M	M	M	M																																														42	21	7	8	6	6	48		
																																																							Жамн	172	129	19	18	6	32	20

И	Назрий тавдим	А	Аттестация	М	Малака амалиёти	Д	Давлат аттестацияси	Б	Битирув малакасинини	Т	Таълим
---	---------------	---	------------	---	-----------------	---	---------------------	---	----------------------	---	--------

Т/р	Ўқув блоклари, фаилар ва фаоллият турларининг номлари	Талабанинг ўқув юкламаси (соатларга)									Соатларнинг курс, семестр ва ҳафталар бўйича тақсими																
		Умумий юкламанинг ҳажми		Аудитория машғулотлари (соатларга)						Мустақил таълим	1-курс				2-курс				3-курс				4-курс				
				Жами	Маъруза	Амалий	Лаборатория	Семинар	Курс лойиҳаси (инио)		Курслардаги ҳафтала сон				Курслардаги ҳафтала сон				Курслардаги ҳафтала сон								
											42				44				44				42				
											Семестрлар																
											1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	
соат		%	Семестрдаги аудитория машғулотлари ҳафтала сон																								
				18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19									
1.00	Гуманитар ва иқтисодий-иқтисодий фаилар	1594	23	998	274	452		272		596	198	180	162	162	72	108	84	32									
1.01	Ўзбекистон тарихи	116		72	36			36		44	72																
1.02	Хукукшунослик. Ўзбекистон Республикаси Конституцияси	116		54	26			28		62		54															
1.03	Фалсафа	148		90	44			46		58			46	44													
1.04	Маънавият асослари. Диншунослик	92		54	26			28		38			54														
1.05	Маданиятшунослик	56		36	18			18		20				36													
1.06	Иқтисодий назарияси	116		72	36			36		44						72											
1.07	Социология	56		36	18			18		20					36												
1.08	Миллий ғоя: асосий тушунча ва тамойидлар	60		40	18			22		20								40									
1.09	Фуқаролик жамияти Ўзбекистонда демократик жамият қуриш назарияси ва амалиёти	122		76	36			40		46								76									
1.10	Ўзбек (рус) тили	116		72		72				44	36	36															
1.11	Чет тили	360		252		252				108	54	54	36	36	36	36											
1.12	Жисмоний маданият ва спорт *	236		144	16	128				92	36	36	36	36													
2.00	Математик ва табиий-илмий фаилар	948	14	558	260	262		36		390	90	72	72	72	144	108											
2.01	Механика	124		72	36	36				52				72													

3.04	Берилганлар структуралар ва алгоритмлар	182		108	42	66		ки	74		108						
3.05	Оддий дифференциал тенгламалар	182		108	54	54			74		72	36					
3.06	Функционал анализ	122		72	36	36			50			72					
3.07	Хусусий ҳосиллаи дифференциал тенгламалар	182		108	54	54			74				36	72			
3.08	Математик моделлаштириш	189		112	44	68		ки	77					72	40		
3.09	WEB дастурлаш технологиялари	182		108	26	82		ки	74					54	54		
3.10	Тизимли дастурлаш	122		72	36	36			50					72			
3.11	Соғли усуллар	210		126	60	66			84			54	72				
3.12	Ахборотни ҳимоялаш	93		56	30	26			37							56	
3.13	Умумий психология	90		54	26		28		36						54		
3.14	Умумий педагогика	90		54	26		28		36						54		
	Таълов фаилари	300		180	60	120			120							56	124
	1)Туташ мухитлар механикаси 2)АИУ яратилиши тх. ва дастур таъминоти 3)Дискрет динамик тизимлар	300		180	60	120			120							56	124
4.00	Ихтисослик фаилари	659	9	388	180	208			278			72		36	140	140	
4.01	Оптималлаштириш усуллари	101		60	30	30			41						60		
4.02	Операциялар тадқиқоти	94		56	28	28			38					36	20		
4.03	Компьютер графикаси	138		82	40	42			56						60	22	
4.04	Берилганлар базасини бошқариш тизимлари	122		72	30	42			50			72					
4.05	Таълов фаилари	204		118	52	66			86							118	
4.05.1	Матем. пакетлари амал тадбиқи.																
4.05.2	Автомат. ишчи урин. яратиш	204		118	52	66			86								118
4.05.3	Бошқарув масал. матем. дастур. усул																
5.00	Қўшимча тайёргарлик	450	7	216	108	108			234				144	72			
5.1	Чекли элементлар усули	150		72	36	36			78					72			
5.2	Интернет муҳитида илов. яратиш	150		72	36	36			78					72			
5.3	Чекли улчовли экстремал масалалар ва уларни ечишнинг соғли усуллари	150		72	36	36			78					72			
	ЖАМИ	6966	100	4128	1694	2070		364	3ки	2838	576	576	576	576	576	320	352
	Малака амалиёт	972									108		216		216	432	
	Битирув малакавий иши	324															324
	Аттестациялар	1026									108	108	108	108	180	108	270
	ҲАММАСИ	9288															

Ўқув режа Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 26.03.2016 йилдаги 2 рақамли буйруғи билан тасдиқланган ўқув режа асосида тузилди.

Ўқув жараёнининг таркибий қисмлари	Хафталар соғи	Семестр	Давлат аттестацияси
Назарий таълим	129	1-8	1. Гуманитар ва ижтимоий-иқтисодий фанлардан
Малака амалиёти	18	2, 4, 6, 7	2. Чет тили
Аттестациялар	16+3 (Д)	1-8	3. Битирув малакавий ишини ҳимоя қилиш
Битирув малакавий иши	6	8	
Таътил	32	1-8	
Жами	204		

Самарқанд давлат университети
Ўқув кенгаши томонидан маъқулланди.
2019 йил 6-сони баённома.

Самарқанд давлат университети
Илмий кенгаши томонидан маъқулланди.
2019 йил 6-сони баённома.

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIV VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI**

Ro'yxatga olindi:
№ BD-5130200-3.16.3
" " 2019 yil



Samarqand Davlat Universiteti
rektori:
R.I.Xalmuradov
2019 yil

**« CHEKLI O'LCHOVLI EKSTREMAL MASALALARNI
YECHISHNING SONLI USULLARI »** qo'shimcha fanning

O' Q U V D A S T U R I

Bilim sohasi:	100 000 – Gumanitar soha
Ta'lim sohasi:	130 000 – Matematika
Ta'lim yo'nalishi:	5130200 – Amaliy matematika

Samarqand – 2019

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Ro'yxatga olindi:

№ 1354

2019 y " _ " _____



CHEKLI O'LCHOVLI EKSTREMAL MASALALARNI YECHISHNING SONLI
USULLARI
qo'shimcha fanining
ISHCHI O'QUV DASTURI

Bilim sohasi: 100000 – Gumanitar soha

Ta'lim sohasi: 130000 - Matematika

Ta'lim yo'nalishi: 5130200-Amaliy matematika va informatika

Samarqand 2019

MUNDARIJA

Mavzu 1. Chekli o'lchamli ekstremal masalalarning umumiy qo'yilishi va sinflari.....	9
Mavzu 2. Chekli o'lchovli ekstremal masalalarning ba'zi umumiy xossalari.....	16
Mavzu 3. Qavariq to'plamlar va ular ustida amallar	23
Mavzu 4. Qavariq funksiyalar va ularning xossalari.....	32
Mavzu 5. Qavariq funksiyalarning ekstremumlari.....	42
Mavzu 6. Shartsiz ekstremumni izlashning sonli usullarini qurish tamoyillari.....	50
Mavzu 7. Bir o'lchovli minimallashtirish usullari.....	58
Mavzu 8. Dixotomiya va oltin kesim usullari.....	68
Mavzu 9. Fibonachchi va kvadratik interpolatsiya usullari.....	75
Mavzu 10. Konfiguratsiyalar (xuk-jivs) usuli.....	82
Mavzu 11. Rozenbrok usuli.....	90
Mavzu 12. Shartsiz minimallashtirish masalasida birinchi tartibli shartlar.....	102
Mavzu 13. Shartsiz minimallashtirish masalalarini yechishning sonli usullari	113
Mavzu 14. Nyuton va Nyuton-Rafson usullari.....	123
Mavzu 15. Shartli ekstremumga qo'yilgan masalalar.....	129
Mavzu 16. Shartli minimallashtirish masalalarini yechishning sonli usullari.....	143
Mavzu 17. Chiziqli programmashtirish masalasini yechishning grafik usuli.....	159
Mavzu 18. Динамик программалаштириш усули.....	175
Adabiyotlar ro'xati	184

1- Ma'ruza

Chekli o'lchovli ekstremal masalalarning umumiy qo'yilishi va sinflari.

Reja:

- 1.1. Chekli o'lchovli ekstremal masalaning qo'yilishi.
- 1.2. Chekli o'lchovli ekstremal masalalarning asosiy sinflari
- 1.3. Ekstremal masalalarni matematik modellashtrish.Misollar.
- 1.4. Ekstremal masalaning geometrik talqini.

Taynch iboralar: *Evklid fazosi, skalar ko'paytma, ekstremal masala, ekstremal masalalarning sinflari, aniq quyi chegara, aniq yuqori chegara, global minimum, global maksimum, lokal minimum, lokal maksimum, bir o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumi masalasi, shartsiz ekstremum masalasi, klassik shartli ekstremum masalasi, chiziqli bo'lmagan programmalashtirish masalasi, qavariq programma-lashtirish masalasi, chiziqli programmalashtirish masalasi, kvadratik programmalashtirish masalasi.*

Adabiyotlar.

1. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
2. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Методы оптимизации. Изд. 2-е, Минск, изд-во БГУ, 1981(Ўзбек тилига таржима қилинган ва 1995 йилда “Ўзбекистон” нашриётида нашр этилган).
3. **Алексеев В.М, Галеев Э.М, Тихомиров В.М.** Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 2005.
4. **Ашманов С.А., Тимохов А.В.** Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.
5. **Исраилов И., Отакулов С.** Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш усуллари курсидан маърузалар. Самарқанд, СамДУ нашри, 1-қисм, 1999.
6. **Исраилов И. ва б.** Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш фанидан амалий машғулотлар. Ўқув-услубий қўлланма, 1-қисм, Самарқанд, 1987.

1.1. Chekli o'lchovli ekstremal masalaning qo'yilishi va uning asosiy tiplari.

R^n - n - o'lchovli haqiqiy Evklid fazosi bo'lsin. R^n fazo $x = (x_1, \dots, x_n)$ va $y = (y_1, \dots, y_n)$ elementlarining skalar ko'paytmasi $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ tenglik bilan, $x \in R^n$ vektorning normasi esa, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ko'rinishda aniqlanadi. Ko'pincha (vektor – matrisali yozuvdan foydalanilganda), R^n fazoning elementlarini n - o'lchovli vektor – ustunlar deb qaraladi va $x, y \in R^n$ elementlarning skalar ko'paytmasi $x^T y$ ko'rinishda belgilanadi, bu yerda T – transponirlash belgisi.

R^n fazoning biror Q to'plamida aniqlangan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. $x^0 \in Q$ bo'lsin. Agar barcha $x \in Q$ lar uchun $f(x^0) \leq f(x)$ ($f(x^0) \geq f(x)$) munosabat bajarilsa, x^0 ga $f(x)$ funksiyaning Q to'plamdagi *global minimum (global maksimum)* nuqtasi deyiladi.

Agar x^0 - $f(x)$ funksiyaning Q to'plamdagi global minimum (global maksimum) nuqtasi bo'lsa, $f(x^0)$ ga $f(x)$ funksiyaning Q to'plamdagi eng kichik (eng katta) yoki minimal (maksimal) qiymati deyiladi va $f(x^0) = \min_{x \in Q} f(x)$ ($f(x^0) = \max_{x \in Q} f(x)$) deb belgilanadi.

$$\mathbf{1- misol.} \quad f(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x \in R^1 = (-\infty, +\infty)$$

funksiyani qaraymiz.

a) $Q = \{x \in R^1 : 1 \leq x \leq 2\}$ to'plamda $f(x)$ funksiyaning global minimum nuqtasi $x^0 = 1$, chunki $f(1) = \sin^2 \pi = 0 \leq \sin^2 \pi/x = f(x), \forall x \in Q$;

$\inf_{x \in Q} f(x) = \min_{x \in Q} f(x) = f(1) = 0$; $f(x)$ funksiyaning shu to'plamdagi global maksimum nuqtasi $x^0 = 2$, chunki $f(2) = \sin^2 \pi/2 = 1 \leq \sin^2 \pi/x, \forall x \in Q$;
 $\sup_{x \in Q} f(x) = \max_{x \in Q} f(x) = f(2) = 1$.

b) Agar $Q = \{x \in R^1 : 1/3 \leq x \leq 1\}$ bo'lsa, qaralayotgan funksiyaning global minimum nuqtalari uchta : $x_1^0 = 1/3, x_2^0 = 1/2, x_3^0 = 1$; global maksimum nuqtasi esa bitta : $x^0 = 2/3$.

v) Qaralayotgan funksiyaning $Q = \{x \in R^1 : 0 < x \leq 1\}$ to'plamda global minimum va maksimum nuqtalari sanoqli: $x_n^0 = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$ - global minimum nuqtalari,
 $x_n^0 = \frac{2}{2n+1}, n = 1, 2, \dots$ - global maksimum nuqtalaridir.

g) $Q = \{x \in R^1 : 2 \leq x < +\infty\}$ bo'lganda, $f(x)$ funksiya bu to'plamda o'zining aniq quyi chegarasiga erishmaydi, ya'ni bu holda funksiyaning global minimum nuqtasi yo'q. Haqiqatan ham,

$$\inf_{x \in Q} f(x) = \inf_{2 \leq x < +\infty} \sin^2 \frac{\pi}{x} = 0; \text{ ammo } \forall x \in Q \text{ uchun } f(x) > 0.$$

2- misol. $f(x) = 1 - \|x\|, x \in R^n$ funksiya berilgan.

a) $Q = \{x \in R^n : \|x\| \leq 1\}$ bo'lsa, $f(x)$ funksiyaning Q to'plamdagi global maksimum nuqtasi $x = \Theta = (0, 0, \dots, 0) \in R^n$ bo'ladi, chunki $f(\Theta) = 1 \geq 1 - \|x\|, \forall x \in Q$; global minimum nuqtalari esa, $\|x\| = 1$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalardan iborat, chunki $f(x) = 0, \|x\| = 1; f(x) \geq 0, \|x\| \leq 1$; demak global minimum nuqtalari to'plami kontinuum quvvatlidir.

b) $Q = \{x \in R^n : \|x\| \geq 1\}$ to'plamda esa, $f(x)$ funksiya $\|x\| = 1$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalarda aniq yuqori chegarasiga erishadi, chunki $f(x) = 0, \|x\| = 1; f(x) \leq 0, \|x\| \geq 1$; bu to'plamda $f(x)$ funksiyaning global minimum nuqtalari yo'q: $\inf_{x \in Q} f(x) = -\infty$.

2- ta'rif. $x^0 \in Q, K(x^0, \varepsilon) = \{x \in R^n : \|x - x^0\| < \varepsilon\}$ bo'lsin. Agar biror $\varepsilon > 0$ son topilib, barcha $x \in Q \cap K(x^0, \varepsilon)$ uchun $f(x^0) \leq f(x)$ ($f(x^0) \geq f(x)$) munosabat bajarilsa, x^0 ga $f(x)$ funksiyaning Q to'plamdagi lokal minimum (lokal maksimum) nuqtasi deyiladi.

$f(x)$ funksiyaning Q to'plamdagi minimum (maksimum) nuqtalari va minimal (maksimal) qiymatini topish haqidagi masalaga minimallashtirish (maksimallashtirish) masalasi deyiladi va u

$$f(x) \longrightarrow \min(\max), \quad x \in Q, \quad Q \in R^n \quad (1)$$

ko'rinishda belgilanadi.

$f(x)$ funksiyaning Q to'plamdagi minimum va maksimum nuqtalari ekstremum nuqtalari deb, (1) ko'rinishdagi masalalarni esa chekli o'lchovli ekstremal masalalar deb atamiz. Qaralayotgan ekstremal masala uchun

$$f(x) \longrightarrow extr, \quad x \in Q, \quad Q \in R^n$$

belgilashdan ham foydalaniladi.

(1) ekstremal masalaning global (lokal) yechimi deb, $f(x)$ funksiyaning Q to'plamdagi global (lokal) ekstremum nuqtalarini tushunamiz.

3- misol.

$$f(x) = x^2(1-x^2) \longrightarrow \min, \quad x \in Q = [-3, 3] \subset R^1 \quad (2)$$

$x^0 = 0$ - (2) masalaning lokal yechimi bo'ladi, chunki, agar $0 < \varepsilon < 1$ bo'lsa, $\forall x \in Q \cap K(x^0, \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ uchun $f(x) \geq 0 = f(x^0)$ bo'ladi. ammo, $x^0 = 0$ nuqta (2) masalaning global yechimi bo'la olmaydi, chunki agar $3 \geq |x| > 1$ bo'lsa, $f(x) < f(x^0)$ bo'ladi. $x^* = 3$ va $x^* = -3$ - masalaning global yechimlaridir: $\min_{x \in [-3, 3]} f(x) = f(\pm 3) = -72$.

1.2. Chekli o'lchovli ekstremal masalalarning asosiy sinflari

Matematikaning chekli o'lchovli ekstremal masalalar bilan shug'ullanadigan bo'limi *matematik programmashtirish* deb ataladi.

Matematik programmashtirishda ko'pincha quyidagi atamalardan foydalaniladi: (1) masala – *optimallashtirish masalasi*; $f(x)$ - *maqsad funksiyasi*; Q - *rejalar (joiz nuqtalar) to'plami*; $x \in Q$ - *ixtiyoriy reja (joiz nuqta)*; (1) masalaning *global (lokal) yechimi* – *optimal (lokal optimal) reja*.

Maqsad funksiyasi va rejalar to'plamining berilishiga qarab chekli o'lchovli optimallashtirish masalalarini quyidagicha sinflarga (tiplarga) ajratish mumkin.

a) Bir o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumi masalasi:

$$f(x) \longrightarrow \text{extr}, \quad x \in Q, \quad Q \in R \quad (3)$$

Bir o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumi matematik programmashtirishning klassik masalasi bo'lib, bu masala haqida dastlabki ma'lumotlar bizga matematik analiz kursidan ma'lum.

b) Shartsiz ekstremum masalasi:

$$f(x) \longrightarrow \text{extr}, \quad x \in R^n \quad (4)$$

Bu masala (1) dan $Q = R^n$ bo'lganda kelib chiqadi. Shartsiz ekstremum masalasi matematik programmashtirishning klassik masalasi bo'lib, u matematik analiz kursida differensial hisob yordamida o'rganilgan.

v) Klassik shartli ekstremum masalasi:

$$f(x) \longrightarrow \text{extr}, \quad g_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad x \in R^n \quad (5)$$

Bu masalada rejalar to'plami $Q = \{x \in R^n : g_i(x) = 0, i = \overline{1, m}\}$, ya'ni faqat tenglik ko'rinishidagi cheklashlar berilgan.

g) Chiziqsiz programmashtirishning umumiy masalasi:

$$f(x) \longrightarrow \text{extr}, \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad g_i(x) = 0, \quad i = \overline{k+1, m}, \quad x \in P. \quad (6)$$

Ushbu masalani matematik programmashtirishning umumiy shartli ekstremum masalasi deb ham ataymiz. Unda tenglik ko'rinishidagi cheklashlar bilan bir qatorda tengsizlik tipidagi cheklashlar ham qatnashadi.

(6) masaladan, xususiy holda, $m = 0$, $P = R^n$ bo'lganda shartsiz ekstremum masalasiga, $k = 0$, $P = R^n$ bo'lganda esa klassik shartli ekstremum masalasiga ega bo'lamiz.

d) Qavariq programmashtirish masalasi. $P \subset R^n$ - qavariq to'plam $f(x), g_i(x), i = \overline{1, k}$ funksiyalar P da qavariq, $g_i(x), i = \overline{k+1, m}$ funksiyalar chiziqli bo'lganda

$$f(x) \longrightarrow \min, \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad g_i(x) = 0, \quad i = \overline{k+1, m}, \quad x \in P$$

minimallashtirish masalasiga qavariq programmashtirishning umumiy masalasi deyiladi. Qavariq to'plam qavariq funksiyalar va ularning zarur xossalari bilan qavariq analiz asoslari bo'limida (4-9-§§) tanishamiz.

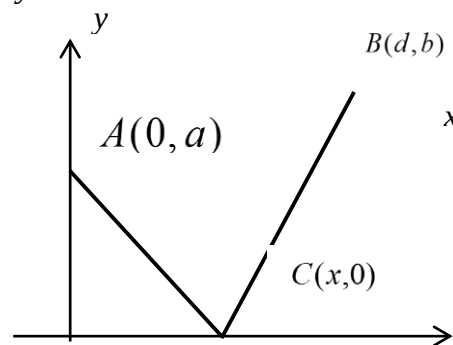
ye) **Kvadratik programmashtirish masalasi.** Agar qavariq programmashtirish masalasida maqsad funksiyasi $f(x) = x^T A x + b^T x$ (A -simmetrik $n \times n$ -matrisa, $A \geq 0, b^T = (b_1, \dots, b_n)$) kvadratik funksiyadan iborat, cheklashlar esa chiziqli funksiyalar bilan berilgan bo'lsa, unga kvadratik programmashtirish masalasi deyiladi.

i) **Chiziqli programmashtirish masalasi.** Agar (6) masalada $f(x), g_i(x), i = \overline{1, m}$ funksiyalar chiziqli, $P = \{x \in R^n : a_j \leq x_j \leq b_j, j = \overline{1, n}\}$ yoki $P = \{x \in R^n : x_j \geq 0, j = \overline{1, n}\}$ bo'lsa, chiziqli programmashtirish masalasiga esa bo'lamiz.

1.3. Ekstremal masalalarni matematik modellashtirish. Misollar.

Amaliyotda paydo bo'ladigan optimallashtirish masalalariga hozirgi zamon ekstremal masalalar nazariyasini qullay olish uchun avvalo ularni matematika tiliga ko'chirish – matematik formalashtirish zarur. Qo'yilgan har bir optimallashtirish masalasini matematik modellashtirish, shu masalaning matematik modelini tuzishga olib keladi. Quyida optimallashtirish masalalarining matematik modelini tuzishga doir bir necha misollar qaraymiz.

1-masala. Berilgan to'g'ri chiziqli shunday nuqtani topish talab qilinadiki, undan berilgan ikki nuqttagacha bo'lgan masofalar yig'indisi minimal (eng kichik) bo'lsin. Qo'yilgan masalaning matematik modelini tuzamiz. Buning uchun tekislikda Oxy dekart koordinatalar sistemasini qaraymiz va Ox o'qini berilgan to'g'ri chiziqli bo'ylab yo'naltiramiz, Oy o'qini esa berilgan A nuqta orqali o'tkazamiz (1-chizma). $\rho(A, C)$ va $\rho(B, C)$ mos ravishda, berilgan A va B nuqtalardan Ox o'qidagi ixtiyoriy S nuqttagacha bo'lgan masofalar bo'lsin. Masala shartiga ko'ra, Ox o'qida shunday S nuqtani topish talab qilinadiki, $f = \rho(A, C) + \rho(B, C)$ miqdor eng kichik qiymat qabul qilinsin. A, B, S nuqtalarning koordinatalari quyidagicha bo'lsin: $A(0, a), B(d, b), C(x, 0)$. U vaqtda



1-чизма

$\rho(A, C) = \sqrt{a^2 + x^2}$, $\rho(B, C) = \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$. S nuqtaning Ox o'qida o'zgarishi uning absissasi - x o'zgaruvchining $R^1 = (-\infty, +\infty)$ to'plamda o'zgarishidan iborat. Shunday qilib, qo'yilgan masalaning matematik modeli $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$ min, $x \in R^1$, ko'rinishda, ya'ni bir o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumini topish masalasidan iborat.

2- masala. R^n fazoda $a^1, a^2, \dots, a^m$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Shunday $x \in R^n$ nuqtani topish talab qilinadiki, bu nuqtalar berilgan $a^1, \dots, a^m$ nuqtalargacha bo'lgan masofalar kvadratlarining yig'indisi minimal bo'lsin. Ixtiyoriy $x \in R^n$ nuqtadan $a^i \in R^n, i = \overline{1, m}$ nuqttagacha bo'lgan masofa $\rho(x, a^i) = \|x - a^i\|$ bo'lgani uchun quyilgan masalaning matematik

modeli quyidagi $f(x) = \sum_{i=1}^m \|x - a^i\|^2$ min, $x \in R^n$ shartsiz minimum masalasidan iboratdir.

3- masala. Tekislikda berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqli bo'lgan eng qisqa masofa topilsin.

Berilgan nuqta $A(a_1, a_2)$, berilgan to'g'ri chiziqli $c_1 x_1 + c_2 x_2 = d$ bo'lsin. Agar $B(x_1, x_2)$ -to'g'ri chiziqlining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, undan A nuqttagacha bo'lgan masofa

$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$ bo'ladi. B nuqta to'g'ri chiziqda yotgani uchun uning koordinatalari $g(x) = c_1x_1 + c_2x_2 - d = 0$ cheklanishni qanoatlantiradi. Shunday qilib berilgan masala quyidagi minimallashtirish masalasiga keltiriladi:

$$f(x) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \longrightarrow \min, \quad g(x) = c_1x_1 + c_2x_2 - d = 0, \quad x \in R^2.$$

4- masala. Doiraga eng katta yuzaga ega bo'lgan to'g'ri to'rtburchak chizilsin.

Aylana tenglamasi $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ bo'lsin. Ox_1

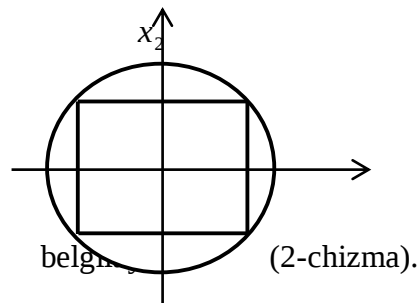
$M(x_1, x_2)$

va Ox_2 o'qlarini to'g'ri to'rtburchak tomonlariga

parallel qilib o'tkazamiz va (x_1, x_2) orqali to'g'ri

to'rtburchakning koordinatalar tekisligi birinchi

choragida yotuvchi uchining koordinatalarini



belgisi. (2-chizma).

U vaqtda doiraga ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchakning yuzasi $4x_1x_2$ ga teng bo'ladi. x_1, x_2 o'zgaruvchilarga $x_1^2 + x_2^2 = r^2$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ shartlar qo'yilgan. Shunday qilib, qo'yilgan masalani quyidagicha matematik formallashtirish mumkin:

$$f(x) = 4x_1x_2 \longrightarrow \max, \quad g(x) \equiv x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in P = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Bu masalani

$$f(x) = 4x_1x_2 \longrightarrow \max, \quad g(x) \equiv x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0, \quad g_2(x) \equiv -x_1 \leq 0, \quad g_3(x) \equiv -x_2 \leq 0$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

5- masala (ishlab chiqarish masalasi). Korxona n turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun xomashyoning m xilidan foydalaniladi. Faraz qilaylikki, j - mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun i - xomashyoning sarf bo'ladigan miqdori a_{ij} bo'lsin; j - mahsulot birligining realizatsiyasidan olinadigan foyda miqdori esa c_j bo'lsin. Agar i - xildagi xomashyo miqdori b_i bo'lsa, mahsulot ishlab chiqarishning shunday rejasini tuzish talab qilinadiki, uning realizatsiyasidan keladigan foyda maksimal bo'lsin.

Qo'yilgan masalaning matematik modelini tuzamiz. x_j - j - mahsulot ishlab chiqarish rejasi bo'lsin. Tushunarliki, $x_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$ bo'ladi. bundan tashqari, masala shartiga ko'ra

$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$, $i = \overline{1, m}$ cheklashlarga ega bo'lamiz. Umumiy ishlab chiqarish rejasi $x = (x_1, \dots, x_n)$

ning realizatsiyasidan keladigan foyda $\sum_{j=1}^n c_jx_j$ bo'ladi. Shunday qilib, qaralayotgan ishlab chiqarish masalasining matematik modeli

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_jx_j \longrightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

ko'rinishdagi chiziqli programallashtirish masalasidan iborat.

1.4. Ekstremal masalaning geometrik talqini.

Chekli o'lchovli (1) ekstremal masalaning geometrik ma'nosi haqida qisqacha so'z yuritamiz.

$$L_\alpha = \{x \in R^n : f(x) = \alpha\}, \quad \alpha \in R^1 \quad (7)$$

ko‘rinishdagi to‘plamlarni qaraymiz. L_α to‘plam (agar u bo‘sh bo‘lmasa!) $n=2$ bo‘lganda tekislikda chiziqdan, $n=3$ bo‘lganda sirtidan iborat. Bu to‘plamga $f(x)$ funksiyaning sath chizig‘i (yoki sirti) deyiladi.

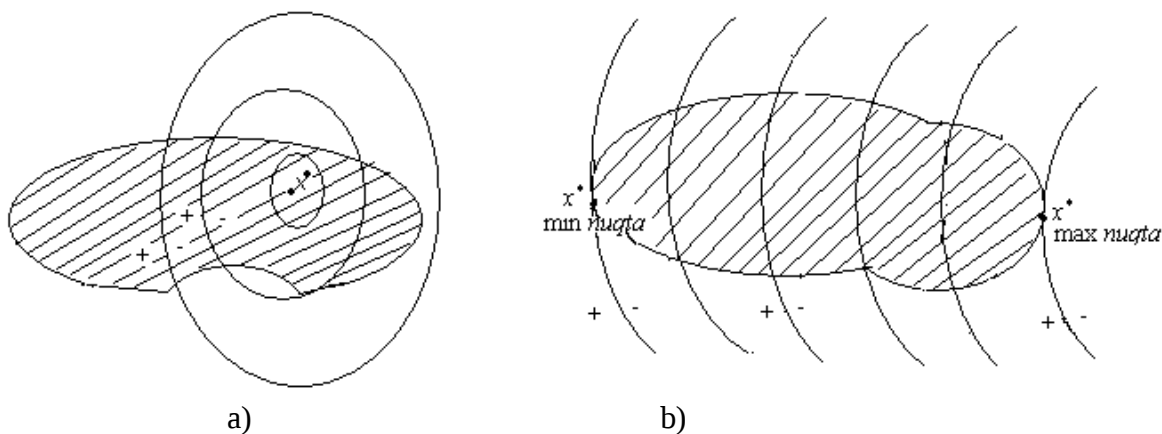
(1) masalaning qo‘yilishidan va (7) to‘plamlarning aniqlanishidan tushunarliki,

$$\min_{x \in Q} f(x) = \min \{ \alpha \in R^1 : L_\alpha \cap Q \neq \emptyset \}$$

$$\max_{x \in Q} f(x) = \max \{ \alpha \in R^1 : L_\alpha \cap Q \neq \emptyset \}.$$

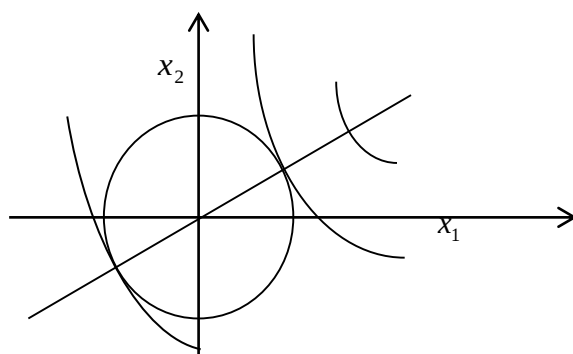
Demak, geometrik nuqtai nazardan, (1) masalani yechish, L_α to‘plam bilan Q to‘plam kesishadigan eng kichik (eng katta) α^* sonni topishga keltiradi. Bunda $x^* \in L_{\alpha^*} \cap Q$ nuqtalar (1) masalaning yechimidan, $\alpha^* = f(x^*)$ esa $f(x)$ funksiyaning Q to‘plamdagi minimal (maksimal) qiymatidan iborat bo‘ladi. x^* nuqta Q to‘plamning ichki nuqtasi (3 a)-chizma) yoki chegaraviy nuqtasi (3 b)-chizma) bo‘lishi mumkin.

Izoh. Funksiyaning o‘zgarish xarakterini ko‘rsatish uchun L_α sath chizig‘ining qaysi tomonida funksiya α dan katta qiymat qabul qilsa, shu tomonga “+” ishora, ikkinchi tomonga esa “-” ishora qo‘yish foydalidir.



3-chizma

5- misol. $f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \rightarrow \min(\max), x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. Bu masalaning rejalar to‘plami $Q = K(\Theta, 1) = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ markazi $\Theta = (0, 0)$ nuqtada bo‘lgan birlik doiradan iborat. Maqsad funksiyasining sath chizig‘i



4 – chizma.

$L_\alpha = \{x \in R^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = \alpha\}$ $\alpha > 0$ bo‘lganda $\sqrt{\alpha}$ radiusli va markazi $(2, 1)$ nuqtada bo‘lgan aylanadan iborat. $\alpha = 0$ bo‘lganda L_α to‘plam nuqtaga aylanadi $L_0 = \{(2, 1)\}$, $\alpha < 0$

bo'lganda esa L_α bo'sh to'plamdir (4-chizma). Chizmadan tushunarlik, maqsad funksiyasining minimum va maksimum nuqtalari L_α , $\alpha > 0$, aylanalarning $K(\Theta, 1)$ doiraga urinish nuqtalaridan iborat bo'ladi. $K(\Theta, 1)$ doiraga dastlabki urinuvchi aylana minimumni aniqlaydi, oxirgi marta urinuvchi aylana esa, maksimumni aniqlaydi.

Bu urinish nuqtalari esa, $(0, 0)$ va $(2, 1)$ nuqtalardan o'tuvchi $x_2 = \frac{1}{2}x_1$ to'g'ri chiziq bilan $x_1^2 + x_2^2 = 1$ aylananing kesishish nuqtalaridir. Demak, $x^* = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ - minimum nuqtasi, $x^{**} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ maksimum nuqtasi bo'ladi.

O'z-o'zini tekshirish savollari

1. Evklid fazosi va unda elementning normasi qanday aniqlanadi?
2. Chekli o'lchovli ekstremal masalaning qo'yilishini keltiring.
3. Chekli o'lchovli ekstremal masalalarning qanday sinflari bilan matematik analiz kursida tanishgansiz, ularni sanab bering va ko'rinishini yozing.
4. Chekli o'lchovli ekstremal masalaning asosiy elementlari nimalardan iborat?
5. Chekli o'lchovli ekstremal masalaning yechimi deganda nimani tushunasiz?
6. Chekli o'lchovli ekstremal masalada global va lokal yechimlarning bir-biridan farqi nimada?
7. Chekli o'lchovli ekstremal masalaning geometric talqinini qanday tushunasiz?

Mustaqil ish topshiriqlari

Quyidagi masalalarda asosiy elementlar: maqsad funksiyasi, rejalar to'plami aniqlanib, rejalar to'plami chizilsin:

a) $f(x) = 4x_1 + 8x_2 - x_1^3 + x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \min(\max);$

$x_1 + x_2 \leq 3, x_1 - x_2 \leq 1, x_1 \geq 0$

b) $f(x) = 6x_1 - 3x_2 - x_2^2 \rightarrow \max; \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 0, x_1 \leq 5 \end{array} \right\}$

c) $f(x) = 6x_1 - x_1^2 - x_2^3 + 2x_1x_2 \rightarrow \min(\max); \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 \leq 12, x_1 + 2x_2 \geq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$

d) $f(x) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + x_2 + 4 \rightarrow \min \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 \leq 2, x_1 \leq 4, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$

e) $f(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_3 \rightarrow \min(\max) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$

f) $f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_3^4 + 4x_1 + 2 \rightarrow \min(\max) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1^2 - x_3 \leq 5, x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$

g) $f(x) = 3x_1^2 - x_1x_2 + 4x_1x_2 + x_1^2 \rightarrow \min(\max) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, x_1^2 + x_2 + x_3 \leq 9, x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$

2-Ma'ruza

Chekli o'Ichovli ekstremal masalalarning ba'zi umumiy xossalari. Ekstremal masala yechimining mavjudligi.

Reja:

- 2.1. Chekli o'Ichovli ekstremal masalalarning ba'zi umumiy xossalari.
- 2.2. Ekstremal masala yechimining mavjudligi.
- 2.3.

Tayanch iboralar: chekli o'Ichovli ekstremal masalaning maqsad funksiyasi, chekli o'Ichovli ekstremal masalaning rejalar to'plami, global yechimlar to'plami, lokal yechimlar to'plami, kompakt to'plam, uzluksiz funksiya, funksiyaning sath to'plami, funksiyaning Lebeg to'plami, chegaralangan va chegaralanmagan to'plamlar, quyidan yarim uzluksiz funksiya, yuqoridan yarim uzluksiz funksiya, Veyershtrass teoremlari, Veyershtrass teoremlarining umumlashmasi,

Adabiyotlar.

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Изд. 2-е, Минск, изд-во БГУ, 1981(Ўзбек тилига таржима қилинган ва 1995 йилда “Ўзбекистон” нашриётида нашр этилган).
3. Алексеев В.М, Галеев Э.М, Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 2005.
4. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.
5. Исраилов И., Отакулов С. Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш усуллари курсидан маърузалар. Самарқанд, СамДУ нашри, 1-қисм, 1999.
6. Исраилов И. ва б. Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш фанидан амалий машғулотлар. Ўқув-услубий қўлланма, 1-қисм, Самарқанд, 1987.

2.1. Chekli o'Ichovli ekstremal masalalarning ba'zi umumiy xossalari

Chekli o'Ichovli

$$f(x) \longrightarrow \min(\max), \quad x \in Q, \quad Q \subset R^n \quad (1)$$

ekstremal masalani qaraymiz. Quyidagi,

$$f_*(Q) = \inf_{x \in Q} f(x), \quad f^*(Q) = \sup_{x \in Q} f(x), \quad (2)$$

$$Q_*(f) = \{x_* \in Q : f(x_*) = f_*(Q)\}, \quad Q^*(f) = \{x^* \in Q : f(x^*) = f^*(Q)\}$$

belgilashlarni kiritamiz.

$f(x)$ funksiyaning Q to'plamdagi lokal minimum (lokal maksimum) nuqtalari to'plamini $Q_*^l(f)$ ($Q_*^l(f)$) deb belgilaymiz. Global va lokal ekstremum nuqtalarining ta'riflariga asosan (1-ma'ruzaga q.),

$$Q_*(f) \subset Q_*^l(f), \quad Q^*(f) \subset Q_*^l(f) \quad (3)$$

munosabatlar o'rinalidir.

Agar global ekstremum mavjud va barcha lokal ekstremum nuqtalari aniqlangan bo'lsa, (1) masalaning x^0 global yechimini

$$f(x^0) = \min_{x \in Q_*^l(f)} f(x) \quad (f(x^0) = \max_{x \in Q_*^l(f)} f(x))$$

shartdan topamiz.

Keltirilgan bu tasdiq quyidagi teoremaning va (3) munosabatning natijasidir.

2.1-teorema. $Q_*(f) = \emptyset$ ($Q^*(f) \neq \emptyset$) va $Q_*(f) \subset P$ ($Q^*(f) \subset P$, $P \subset Q$ bo'lsin. U holda $\min_{x \in Q} f(x) = \min_{x \in P} f(x)$ ($\max_{x \in Q} f(x) = \max_{x \in P} f(x)$) $Q_*(f) = P_*(f)$ ($Q^*(f) = P^*(f)$) bo'ladi.

Δ . Isbotni minimum uchun olib boramiz (maksimum uchun o'xshash isbotlanadi). $Q_*(f) = \emptyset$ va $P \subset Q$ bo'lganligidan $\inf_{x \in P} f(x) \geq \min_{x \in Q} f(x)$ tenglik bajariladi. $Q_*(f) \subset P$ munosabatni hisobga olib, $\forall x_* \in Q_*(f)$ uchun $f(x_*) \geq \inf_{x \in P} f(x)$ ga ega bo'lamiz.

Shunday qilib,

$$\min_{x \in Q} f(x) = f(x_*) \geq \inf_{x \in P} f(x) \geq \min_{x \in Q} f(x). \quad (4)$$

Bu yerdan $\min_{x \in Q} f(x) = \min_{x \in P} f(x)$ kelib chiqadi. (4) dan $Q_*(f) \subset P_*(f)$ ni olamiz. $x_* \in P_*(f)$ bo'lsin. U holda $f(x_*) = \min_{x \in P} f(x) = \min_{x \in Q} f(x)$. $P_*(f) \subset Q$ ekanligini hisobga olib, bu yerdan $P_*(f) \subset Q_*(f)$ ni olamiz. Shunday qilib, $Q_*(f) = P_*(f)$. $\blacktriangle$

Bundan keyin, $f(x)$ funksiyaning shartsiz global (lokal) ekstremum deganda, shartsiz ekstremum masalasining global (lokal) yechimlarini tushunamiz.

$Q^*(f)$, $Q_*^J(f)$, $Q^*(f)$, $Q_*^J(f)$ to'plamlarning va $f(x)$ funksiyaning shartsiz ekstremum nuqtalarining aniqlanishidan, quyidagi teoremaga ega bo'lamiz.

2.2-teorema. $f(x) - R^n$ da aniqlangan funksiya, $Q \subset R^n$ bo'lsin. U holda:

- 1) agar $x^0 \in \text{int } Q$ bo'lsa, $x^0 \in Q_*^J(f)$ ($x^0 \in Q^*(f)$) bo'lishi uchun $x^0 - f(x)$ ning shartsiz lokal minimum (lokal maksimum) nuqtasi bo'lishi zarur va yetarlidir (bu tasdiqning yetarlilik qismi uchun $x^0 \in Q$ shart kifoya);
- 2) agar $f(x)$ funksiyaning shartsiz lokal minimum (lokal maksimum) nuqtalari Q ga tegishli emas yoki bunday nuqtalar umuman mavjud bo'lmasa, $Q_*^J(f) \in \partial Q$ ($Q^*(f) \in \partial Q$) bo'ladi, bu yerda ∂Q - Q to'plamning chegarasi;
- 3) agar $x^0 - f(x)$ ning shartsiz global minimum (global maksimum) nuqtasi bo'lib, $x^0 \in Q$ bo'lsa, $x^0 \in Q_*(f)$ ($x^0 \in Q^*(f)$) bo'ladi.

1-misol. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min$, $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, $x_1 + x_2 \leq 1$ masalani qaraymiz. Unga mos keluvchi $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min$, $x \in R^2$ shartsiz ekstremum masalasining yechimi $x^0 = (0,0) \in Q = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 1\}$. Shuning uchun $x^0 = (0,0)$ qaralayotgan masalaning yechimidir (2-teoremaning 3-tasdig'iga q.).

2.3-teorema. $f(x)$ funksiya $Q \subset R^n$ to'plamda aniqlangan $f(x) \in R \subset (-\infty, +\infty)$, $\forall x \in Q$, $g(y) - R$ da monoton o'suvchi funksiya bo'lsin. U holda (1) masala $\varphi(x) = g(f(x)) \rightarrow \min(\max)$, $x \in Q$ masalaga teng kuchli, ya'ni $Q_*(\varphi) = Q_*(f)$, $Q_*^J(\varphi) = Q_*^J(f)$ ($Q^*(\varphi) = Q^*(f)$, $Q_*^J(\varphi) = Q_*^J(f)$) va

$$\min_{x \in Q} \varphi(x) = g(\min_{x \in Q} f(x)) \quad (\max_{x \in Q} \varphi(x) = g(\max_{x \in Q} f(x))) \quad (5)$$

bo'ladi.

Δ . Isbotni minimum uchun keltirish bilan cheklanamiz. $x^0 \in Q_*(f)$ bo'lsin, ya'ni $f(x^0) \leq f(x)$, $\forall x \in Q$. U vaqtda $g(x)$ funksiyaning monoton o'suvchiligidan, $g(f(x_0)) \leq g(f(x))$, $\forall x \in Q$ kelib chiqadi, ya'ni $x^0 \in Q_*(\varphi)$. Demak, $Q_*(f) \subset Q_*(\varphi)$ va $\min_{x \in Q} g(f(x)) = g(f(x_0)) = g(\min_{x \in Q} f(x))$. $x^* \in Q_*(\varphi)$, ya'ni

$$\varphi(x^*) \leq \varphi(x) \leftrightarrow g(f(x^*)) \leq g(f(x)), \quad \forall x \in Q$$

bo'lsin. $g(x)$ funksiyaning monoton o'suvchiligidan $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in Q$ kelib chiqadi, ya'ni $x^* \in Q_*(f)$. Demak $Q_*(\varphi) \subset Q_*(f)$. Shunday qilib, $Q_*(\varphi) = Q_*(f)$. Xuddi shunga o'xshash $Q_*^J(\varphi) = Q_*^J(f)$ tenglikni ham ko'rsatish qiyin emas. ▲

Izohlar. a) Agar $f(Q_*) = -\infty$ ($f^*(Q) = +\infty$) bo'lsa va $g(\inf_{x \in Q} f(x)) = \lim_{y \rightarrow -\infty} g(y)$ ($g(\sup_{x \in Q} f(x)) = \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y)$) deb tushunilsa, (5) da $\min(\max)$ belgisini $\inf(\sup)$ belgisi bilan almashtirish mumkin. Haqiqatdan ham, agar $\{y_k\}$ - monoton kamayuvchi ketma - ketlik $y_k \rightarrow -\infty$ bo'lsa, $\forall x \in Q$ uchun shunday $k_0 = k_0(x)$ nomer topiladiki $f(x) > y_k$, $k \geq k_0$, bo'ladi. $g(y)$ funksiyaning monoton o'suvchiligini hisobga olsak, $\varphi(x) = g(f(x)) > g(y_k)$, $k \geq k_0$, yoki $k \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak, $\varphi(x) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} g(y_k)$ munosabatni olamiz. Bu yerdan

$$\inf_{x \in Q} \varphi(x) \geq g(\inf_{x \in Q} f(x)). \quad (6)$$

$\{x_k\} \in Q$ minimallashtiruvchi ketma - ketlik bo'lsin, ya'ni $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f_*(Q)$. U vaqtda $g(f(x_k)) \geq \inf_{x \in Q} g(f(x))$, $k = 1, 2, \dots$ Bu yerdan

$$g(\inf_{x \in Q} f(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(f(x_k)) \geq \inf_{x \in Q} \varphi(x). \quad (7)$$

(6) va (7) dan $\inf_{x \in Q} \varphi(x) = g(\inf_{x \in Q} f(x))$ kelib chiqadi.

b) Agar $f_*(Q) > -\infty$ ($f^*(Q) < +\infty$) bo'lib, $Q_*(f) = \emptyset$. ($Q^*(f) = \emptyset$) ya'ni $f(x)$ funksiyaning Q da global minimum (global maksimum) ga ega bo'lmasa, (5) da $\min(\max)$ belgisini $\inf(\sup)$ bilan almashtirib bo'lmaydi. Buni quyidagi misol tasdiqlaydi.

2-misol. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in Q = \{x \in \mathbb{R}^1 : x > 0\}$, $g(y) = \begin{cases} e^y, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$ bo'lsin. U holda,

$$\varphi(x) = g(f(x)) = e^{1/x}, x > 0, \varphi_*(Q) = 1, f_*(Q) = 0, g(f_*(Q)) = 0.$$

Demak,

$$\inf_{x \in Q} \varphi(x) = 1 > g(\inf_{x \in Q} f(x)) = 0.$$

c) Umuman olganda, (5) o'rniga, hamma vaqt,

$$\inf_{x \in Q} \varphi(x) \geq g(\inf_{x \in Q} f(x)) \quad (\sup_{x \in Q} \varphi(x) \geq g(\sup_{x \in Q} f(x)))$$

o'rinlidir. Haqiqatan ham, $f_*(Q) = -\infty$ bo'lgan holda esa (6) munosabatning bajarilishi yuqorida ko'rsatilgan edi. $f_*(Q) > -\infty$ bo'lgan holda esa (6) munosabat $g(y)$ funksiyaning monoton o'suvchiligidan va $f(x) \geq f_*(Q)$, $\forall x \in Q$ dan kelib chiqadi.

2.4-teorema. $f(x)$ funksiya $Q \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda aniqlangan $f(x) \in \mathbb{R} \subset (-\infty, +\infty)$, $\forall x \in Q$, $g(y) \in \mathbb{R}$ da monoton kamayuvchi funksiya bo'lsin. U holda (1) masala $\varphi(x) = g(f(x)) \rightarrow \max(\min)$, $x \in Q$ masalaga teng kuchlidir, ya'ni $Q^*(\varphi) = Q_*(f)$ $Q_*^J(\varphi) = Q_*^J(f)$ ($Q_*(\varphi) = Q^*(f)$, $Q_*^J(\varphi) = Q_*^J(f)$) $\max_{x \in Q} g(f(x)) = g(\min_{x \in Q} f(x))$ ($\min_{x \in Q} g(f(x)) = g(\max_{x \in Q} f(x))$).

Bu teoremadan kelib chiqadiki, $f(x) \rightarrow \max$, $x \in Q$ masala - $f(x) \rightarrow \min$, $x \in Q$ masalaga teng kuchli bo'ladi, ya'ni $Q^*(f) = Q_*(-f)$, $Q_*^J(f) = Q_*^J(-f)$ va $\max_{x \in Q} f(x) = -\min_{x \in Q}(-f(x))$.

2.2. Ekstremal masala yechimining mavjudligi.

Bu yerda chekli o'lchovli ekstremal masalalar uchun yechimning mavjudlik teoremlarini bayon qilamiz.

Chekli o'lchovli

$$\longrightarrow f(x) \min(\max), \quad x \in Q \quad (Q \in R^n) \quad (1)$$

ekstremal masalani qaraymiz. (1) masala yechimining mavjudligi,

$$f_*(Q) = \inf_{x \in Q} f(x) > -\infty \quad (f^*(Q) = \sup_{x \in Q} f(x) < +\infty),$$

$$Q_*(f) = \{x_* \in Q : f(x_*) = f_*(Q)\} \neq \emptyset$$

$$(Q^*(f) = \{x^* \in Q : f(x^*) = f^*(Q)\} \neq \emptyset)$$

munosabatlarning bajarilishi demakdir. Bu munosabatlarning bajarilishini ta'minlovchi shartlar $f(x)$ funksiya va Q to'plamga qo'yiladigan shartlardan iborat bo'lib, ular **Veyershtrass** teoremasi nomi bilan ma'lumdir.

1- ta'rif. Agar $x^* \in Q$ nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x^k\}_1^\infty \subset Q$ ketma-ketlik uchun $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \geq f(x^*)$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \leq f(x^*)$) bo'lsa, $f(x)$ funksiya x^* nuqtada quyidan (yuqoridan) yarim uzluksiz deyiladi. Agar $f(x)$ funksiya Q to'plamning har bir nuqtasida quyidan (yuqoridan) yarim uzluksiz bo'lsa, u Q to'plamda quyidan (yuqoridan) yarim uzluksiz deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, u ham quyidan, ham yuqoridan yarim uzluksiz bo'ladi, va aksincha, agar $f(x)$ funksiya ham quyidan, ham yuqoridan yarim uzluksiz bo'lsa, u uzluksizdir.

Q to'plamda quyidan (yuqoridan) yarim uzluksiz funksiyalar to'plami $\underline{C}(Q)$ ($\overline{C}(Q)$) kabi belgilanadi.

$$\textbf{3- misol.} \quad f(x) = \begin{cases} |x|, & 0 < |x| < 1, \\ a, & x = 0 \end{cases}, \quad Q = \{x \in R^n : |x| \leq 1\}$$

bo'lsin. $f(x)$ funksiya $a \leq 0$ bo'lganda Q to'plamda quyidan, $a \geq 0$ bo'lganda yuqoridan yarim uzluksiz; $a = 0$ bo'lganda esa bu funksiya Q da uzluksiz bo'ladi.

$$\textbf{4-misol.} \quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ a, & x = 0 \\ 1-x, & -1 \leq x < 0 \end{cases}, \quad Q = \{x \in R^1 : |x| \leq 1\}.$$

Bu yerda $f(x)$ funksiya $a \leq 0$ bo'lganda Q to'plamda quyidan, $a \geq 1$ bo'lganda yuqoridan yarim uzluksizdir; $0 < a < 1$ bo'lganda esa, $f(x)$ funksiya $x = 0$ nuqtada quyidan ham, yuqoridan ham yarim uzluksiz emas.

2.5-teorema (Veyershtrass). Faraz qilaylik, $f \in \underline{C}(Q)$ ($f \in \overline{C}(Q)$), Q to'plam- bo'sh bo'lmagan, chegaralangan va yopiq bo'lsin. U holda:

a) $f_*(Q) > -\infty$ ($f^*(Q) < +\infty$); b) (1) masalaning yechimlar to'plami $Q_*(f)$ ($Q^*(f)$) bo'sh bo'lmagan chegaralangan va yopiq to'plam bo'ladi.

Δ. Isbotni minimum uchun olib boramiz. Maksimum uchun shunga o'xshash isbotlanadi.

$\{x^k\}_1^\infty \subset Q$ - ixtiyoriy minimumlashtiruvchi ketma - ketlik bo'lsin, ya'ni $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f_*(Q)$.

Bunday ketma - ketlikning mavjudligi aniq quyi chegaraning ta'rifidan kelib chiqadi. Q - kompakt to'plam bo'lgani uchun, $\{x^k\}$ ketma - ketlik hych bo'lmaganda bitta limit nuqtaga ega va uning barcha limit nuqtalari Q ga tegishli bo'ladi. shu ketma - ketlikning ixtiyoriy x^* limit

nuqtasini olamiz. U vaqtda x^* nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x^m\} \subset \{x^k\}$ qisman ketma – ketlik mavjud. Aniq quyi chegaraning xossasidan va $f(x)$ funksiyaning x^* nuqtada quyidan yarim uzluksizligidan foydalanib, $f_*(Q) \leq f(x^*) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} f(x^m) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f_*(Q)$ munosabatga ega bo‘lamiz, ya’ni $f(x^*) = f_*(Q)$. Bu yerdan $f_*(Q) > -\infty$, $Q_*(f) \neq \emptyset$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan tashqari, ixtiyoriy minimumlashtiruvchi ketma – ketlikning ixtiyoriy limit nuqtasi $Q_*(f)$ ga tegishli ekanligi ham ko‘rsatildi.

Endi $Q_*(f)$ ning kompakt (chegaralangan va yopiq) to‘plamligini ko‘rsatamiz.

$Q_*(f) \subset Q$, Q - chegaralangan bo‘lgani uchun $Q_*(f)$ - chegaralangandir. $Q_*(f)$ ning yopiqqligini ko‘rsatish qoldi. Ixtiyoriy yaqinlashuvchi $\{y^k\}_1^\infty \subset Q_*(f)$ ketma – ketlikning olamiz. $y^k \rightarrow y^*$, $k \rightarrow \infty$ bo‘lsin. $\{y^k\}_1^\infty$ - minimumlashtiruvchi ketma – ketlik, chunki $f(y^k) = f_*(Q)$, $k = 1, 2, \dots$. Yuqorida isbotlanganiga ko‘ra, $y^* \in Q_*(f)$. Demak $Q_*(f)$ ning yopiqqligi ham ko‘rsatildi. ▲

Keltirilgan Veyershtass teoremasida $f(x)$ funksiya va Q to‘plamga qo‘yilgan shartlar muhimdir. Quyida keltirilgan misollarda berilgan ekstremal masalalarning yechimi mavjud emas. Ular uchun Veyershtass teoremasining shartlaridan hech bo‘lmaganda birortasi bajarilmaydi.

5-misol. a) $f(x) = 1 - x^2 \rightarrow \min$, $x \in Q = [0, 1/2]$, $x \in R^1$. Bu yerda Q to‘plam kompakt emas.

b)

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in [0, 1/2] \\ x^2 + 1, & x \in [1/2, 1] \end{cases} \rightarrow \min, \quad x \in Q = [0, 1].$$

Bu yerda $Q = [0, 1]$ kompakt, ammo $f(x)$ quyidan yarim uzluksiz emas: $\lim_{x \rightarrow 1/2} f(x) = 3/4$, $f(1/2) = 5/4$, $\lim_{x \rightarrow 1/2} f(x) < f(1/2)$.

c) $f(x) = e^{-x} \rightarrow \min$, $x \in Q = [0, +\infty)$.

Bu masalada Q - yopiq, ammo chegaralanmagan, demak Q - kompakt emas.

Amaliyotda ko‘pincha Q to‘plam kompakt bo‘lmaydi. Natijada 1-teoremani qo‘llash mumkin emas. Bunday hollarda 1-toyeremaning quyidagi umumlashmasidan foydalanish mumkin.

2.6-teorema. Faraz qilaylik, $f \in \underline{C}(Q)$ ($f \in \bar{C}(Q)$), $Q \subset R^n$ to‘plam yopiq va biror $\gamma = \text{const}$ uchun

$$Q_\gamma^f = \{x \in Q : f(x) \leq \gamma\} \quad (Q_\gamma^f = \{x \in Q : f(x) \geq \gamma\}) \quad (2)$$

bo‘sh bo‘lmagan, chegaralangan to‘plam bo‘lsin. U holda 1-teoremaning tasdiqlari o‘z kuchida qoladi ((2) ko‘rinishdagi Q_γ^f , Q_γ^f to‘plamlarga $f(x)$ funksiyaning sath (yoki Lebeg) to‘plamlari deyiladi).

Δ(2) to‘plamlarning aniqlanishidan ko‘rinib turibdiki, agar biror $\gamma = \text{const}$ uchun Q_γ^f (Q_γ^f) bo‘sh bo‘lmasa, $Q_*(f) \in Q_\gamma^f$ ($Q^*(f) \in Q_\gamma^f$) bo‘ladi. shuning uchun (1) masala yechimining mavjudligi

$$f(x) \rightarrow \min(\max), \quad x \in Q_\gamma^f \quad (x \in Q_\gamma^f) \quad (3)$$

masala yechimining mavjudligiga keltiradi.

Shartga ko‘ra, Q_γ^f (Q_γ^f) bo‘sh emas va chegaralangan. Demak, bu to‘plamning yopiqqligini ko‘rsatsak, (3) masalaga 1-teoremani qo‘llab, talab qilingan isbotga ega bo‘lamiz.

$\{x^k\} \in Q_\gamma^f$, $x^k \rightarrow x^*$, $k \rightarrow \infty$ bo‘lsin, ya’ni $f(x^k) \leq \gamma$.

Buyerdan, $f(x)$ funksiyaning quyidan yarim uzluksizligiga ko'ra, $f(x^*) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \leq \gamma$, ya'ni $x^* \in Q_f^\gamma$ ga ega bo'lamiz. Demak Q_f^γ - yopiq to'plam (Q_f^γ ning yopiqligi ham shunga o'xshash ko'rsatiladi). Δ

6-misol. $f(x) = x_1^2 - x_2x_3 \rightarrow \min$, $x_1 + x_2 - x_3 = 2$, $x_1 - x_2 - x_3 = 6$.

Bu masalada $Q = \{x \in R^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 2, x_1 - x_2 - x_3 = 6\} = \{x \in R^3 : x_2 = -2, x_1 - x_3 = 4\}$. Q_f^0 to'plamni quramiz ($\gamma = 0$). $Q_f^0 = \{x \in Q : f(x) \leq 0\} = \{x \in R^3 : x_2 = -2, x_1 - x_3 = 4, x_1^2 - x_2x_3 \leq 0\} = \{x \in R^3 : x_2 = -2, x_1 - x_3 = 4, x_1^2 + 2x_1 - 8 \leq 0\} = \{x \in R^3 : x_2 = -2, x_1 - x_3 = 4, (x+1)^2 \leq 9\} = \{x \in R^3 : -4 \leq x_1 \leq 2, x_2 = -2, -8 \leq x \leq -2\}$, ya'ni Q_f^0 chegaralangan va yopiq to'plamdir. 2- teorema asosan berilgan masalaning yechimi mavjud.

Quyida Q_f^γ va Q_f^f to'plamlarning chegaralanganligini ta'minlovchi shartni keltiramiz.

1-lemma. Agar $\lim_{k \rightarrow \infty} |x^k| = +\infty$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $(x^k) \in Q$ ketma – ketlik uchun $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = +\infty$ ($\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = -\infty$) bo'lsa, har bir $\lambda = f(y)$, $y \in Q$, uchun Q_f^γ (Q_f^f) – bo'sh bo'lmagan va chegaralangan to'plam bo'ladi.

Δ Isbotni Q_f^γ to'plam uchun keltiramiz. Q_f^f uchun shunga o'xshash isbotlanadi.

$\forall y \in Q$, $\gamma = f(y)$ uchun Q_f^γ to'plamning bo'sh emasligi ravshan.

Faraz qilaylikki, Q_f^γ chegaralanmagan bo'lsin. U vaqtda shunday $\{x^k\} \subset Q_f^\gamma$ ketma – ketlik mavjudki, $|x^k| \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow \infty$. Lemma shartiga ko'ra, $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = +\infty$. Ammo, $x^k \in Q_f^\gamma \leftrightarrow f(x^k) \leq \gamma$, $k = 1, 2, \dots$ munosabatdan $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \leq \gamma < +\infty$ kelib chiqadi. Olingan qarama – qarshilik lemmani isbotlaydi. $\blacktriangle$

7- misol. $f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^4 \rightarrow \min$, $x_3 \geq 1$. (5)

$Q = \{x \in R^3 : x \geq 1\}$ to'plamda

$$f(x) \geq x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = x^T Ax \quad (6)$$

munosabat bajariladi, bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} > 0,$$

chunki, uning ketma – ket bosh minorlari musbat:

$$D_1 = 1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix} = 3/4 > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{vmatrix} = 1/2 > 0.$$

1-lemmani qo'llab, (6) dan $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ ga ega bo'lamiz. U holda 1-lemma va 2-teorema asosan, (5) masalaning yechimi mavjud.

O'z-o'zini tekshirish savollari

1. Chekli o'lchovli ekstremal masalaning qo'yilishini keltiring.
2. Chekli o'lchovli ekstremal masalaning asosiy elementlari nimalardan iborat?
3. Chekli o'lchovli ekstremal masalaning maqsad funksiyasi nima?
4. Chekli o'lchovli ekstremal masalaning rejalar to'plami nima?
5. Funksiyaning aniq quyi va aniq yuqori chegaralari ta'riflarini keltiring
6. Funksiyaning minimumi va maksimumi ta'riflarini keltiring

7. Funksiyaning sath (Lebeg) to'plami deganda nimani tushunasiz?
8. Matematik analizdagi Veyershtrassning 1-teoremasini keltiring.
9. Matematik analizdagi Veyershtrassning 1-teoremasini keltiring.
10. Quyidan yarim uzluksiz funksiyaning ta'rifini bering va misol keltiring.
11. Quyidan yarim uzluksiz funksiyaning ta'rifini bering va misol keltiring.
12. Yuqoridan yarim uzluksiz funksiyaning ta'rifini bering va misol keltiring.
13. Veyershtrass teoremasining umumlashmasini keltiring.

Mustaqil ish topshiriqlari

Қуйидаги функциялар учун $c = \text{const}$ берилганда $M(c)$ сатҳ тўпламини тузинг(чизмасини ҳам ясанг):

a) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 + 5, c = 2;$

b) $f(x) = x_1^2 + 8x_1 - x_2 + 18, c = 2;$

c) $f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_1 - 6x_2 + 12, c = 1;$

d) $f(x) = x_1^3 - 3x_1 - x_2 + 4; c = 4$

4) Вейерштрасс теоремасидан фойдаланиб, қуйидаги масалалар ечимининг мавжудлигини исботланг:

a) $f(x) = 4x_1 + 8x_2 - x_1^3 + x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \min(\max);$

$x_1 + x_2 \leq 3, x_1 - x_2 \leq 1, x_1 \geq 0$

b) $f(x) = 6x_1 - 3x_2 - x_2^2 \rightarrow \max; \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 0, x_1 \leq 5 \end{array} \right\}$

c) $f(x) = 6x_1 - x_1^2 - x_2^3 + 2x_1x_2 \rightarrow \min(\max); \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 \leq 12, x_1 + 2x_2 \geq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$

d) $f(x) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + x_2 + 4 \rightarrow \min \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 \leq 2, x_1 \leq 4, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$

e) $f(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_3 \rightarrow \min(\max) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$

f) $f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_3^4 + 4x_1 + 2 \rightarrow \min(\max) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1^2 - x_3 \leq 5, x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$

g) $f(x) = 3x_1^2 - x_1x_2 + 4x_1x_2 + x_1^2 \rightarrow \min(\max) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, x_1^2 + x_2 + x_3 \leq 9, x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$

3 – ma’ruza

Qavariq to‘plamlar va ular ustida amallar. Qavariq to‘plamlarning ajralishi.

Reja:

- 3.1. Qavariq to‘plam tushunchasi. Misollar.
- 3.2. Qavariq konuslar va affin to‘plamlar.
- 3.3. Qavariq to‘plamlarning xossalari.
- 3.4. To‘plamlarning qavariq va affin qobiqlari.

Tayanch iboralar: qavariq to‘plam, qat’iy qavariq to‘plam, konus, qavariq konus, affin to‘plam, qavariq to‘plamlarning chiziqli kombinatsiyasi, qavariq to‘plamning yopig‘i, to‘plamning qavariq qobig‘i, to‘plamning affin qobig‘i.

Adabiyotlar.

1. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.

2. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Методы оптимизации. Изд. 2-е, Минск, изд-во БГУ, 1981 (Ўзбек тилига таржима қилинган ва 1995 йилда “Ўзбекистон” нашриётида нашр этилган).

3. **Алексеев В.М, Галеев Э.М, Тихомиров В.М.** Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 2005.

4. **Ашманов С.А., Тимохов А.В.** Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.

5. **Исраилов И., Отакулов С.** Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш усуллари курсидан маърузалар. Самарқанд, СамДУ нашри, 1-қисм, 1999.

6. **Исраилов И. ва б.** Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш фанидан амалий машғулотлар. Ўқув-услубий қўлланма, 1-қисм, Самарқанд, 1987.

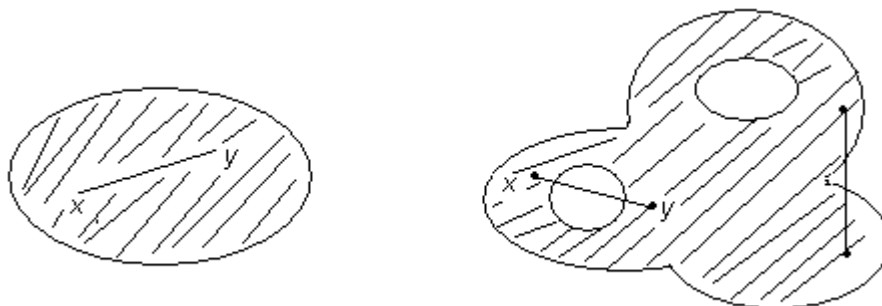
Ekstremal masalalarni o‘rganishda qavariq to‘plamlar va qavariq funksiyalar muhim ahamiyatga ega. Ular amaliy matematikaning o‘yinlar nazariyasi, jarayonlar tadqiqoti, iqtisodiy matematika, shuningdek, boshqa sohalarda ham qo‘llaniladi.

3.1. Qavariq to‘plam tushunchasi. Misollar.

Bo‘sh bo‘lmagan $Q \subset R^n$ to‘plam berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar $\forall x, y \in Q$ va barcha $\lambda \in [0,1]$ uchun $\lambda x + (1-\lambda)y \in Q$ bo‘lsa, Q - qavariq to‘plam deyiladi.

Qavariq to‘plam o‘zining ixtiyoriy x va y nuqtalarini tutashtiruvchi $[x, y] = \{z \in R^n : z = y + \lambda(x - y), 0 \leq \lambda \leq 1\}$ kesmani to‘liq o‘zida saqlaydi (1-chizma).



a) qavariq to'plam

b) qavariq bo'lmagan to'plam

3.1- chizma.

Ta'rifga asosan, R^n - qavariq to'plamdir. Yagona elementli to'plam va bo'sh to'plamni ham qavariq deb hisoblash mumkin.

R^n da qavariq to'plamlarga sodda misollar sifatida quyidagilarni keltirish mumkin ($n=2$ uchun 2-chizmaga q.):

a) $[u, v] = \{x \in R^n : x = u + \alpha(v - u), 0 \leq \alpha \leq 1\}$ - kesma;

b) $l^+(u, h) = \{x \in R^n : x = u + \alpha h, \alpha \geq 0\}$ - $u \in R^n$ nuqtadan $h \in R^n$ yo'nalishda chiquvchi nur;

$l(u, h) = \{x \in R^n : x = u + \alpha h, \alpha \in R^1\}$ - $u \in R^n$ nuqtadan $h \in R^n$ yo'nalish bo'yicha o'tuvchi to'g'ri chiziq;

c) $H(u, \gamma) = \{x \in R^n : u^T x = \gamma\}$ - gipertekislik, $u \in R^n$, $\gamma \in R^1$;
 $H^+(u, \gamma) = \{x \in R^n : u^T x \geq \gamma\}$, $H^-(u, \gamma) = \{x \in R^n : u^T x \leq \gamma\}$ - $H = (u, \gamma)$ gipertekislik bilan hosil qilingan yarim fazolar;

d) $P(u, v) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : u_i \leq \overline{x_i} \leq v_i, i = \overline{1, n}\}$ - n o'lchovli parallelepiped, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $-\infty < u_i < v_i < +\infty$ $i = \overline{1, n}$;

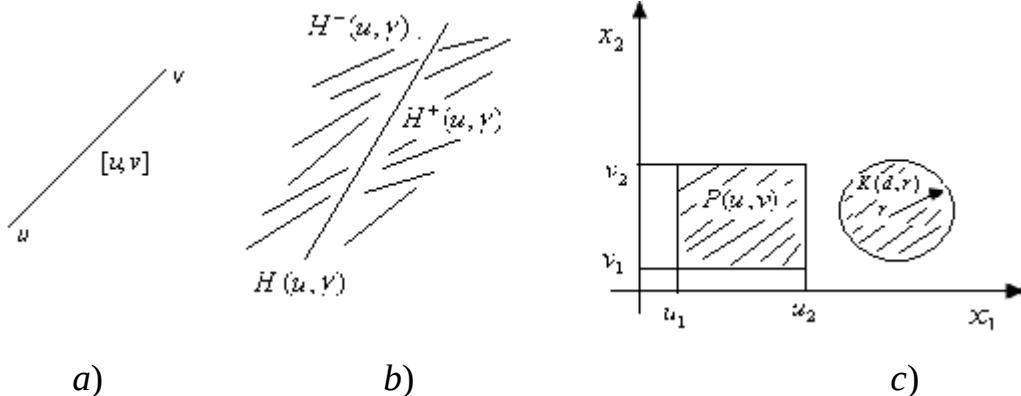
e) $K(d, r) = \{x \in R^n : \|x - d\| \leq r\}$ - markazi $d \in R^n$ nuqtada bo'lgan radiusli shar.

R^n da qavariq bo'lmagan to'plamlarga quyidagilar misol bo'la oladi ($n=2$ uchun 3-chizmaga q.):

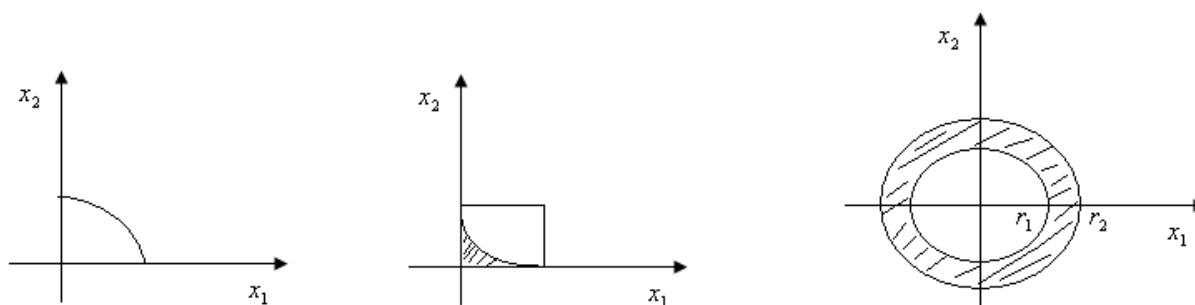
$Q = \{x \in R^n : \|x\| = 1, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}$;

$Q = \{x \in R^n : \|x - x_*\| = 1, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}$, $x_* = (1, 1, \dots, 1) \in R^n$;

$Q = \{x \in R^n : r_1 \leq \|x\| \leq r_2\}$, $r_1 < r_2$.



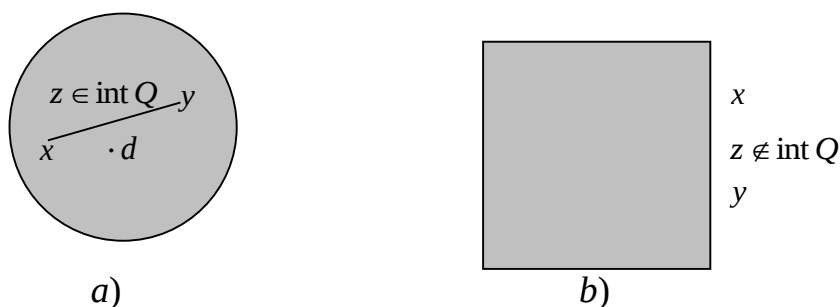
3.2-chizma.



3.3- chizma.

2- ta'rif. Agar ixtiyoriy $x, y \in Q$, $x \neq y$, nuqtalar va barcha $\lambda \in (0,1)$ sonlar uchun $\lambda x + (1-\lambda)y \in \text{int } Q$ bo'lsa (ya'ni $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in Q$ to'plamning ichki nuqtasi), Q - qat'iy qavariq to'plam deyiladi.

Masalan, $K(d,r)$ - shar – qat'iy qavariq to'plam, $P(u,v) - n$ o'lchovli parallelepiped – qat'iy qavariq emas (4-chizma).



3.4- chizma.

I z o h. Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, $Q \subset R^n$ to'plamning qat'iy qavariq bo'lishi uchun $\text{int } Q \neq \emptyset$ bo'lishi zarur.

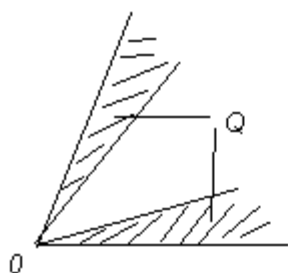
3.2. Qavariq konuslar va affin to'plamlar.

Qavariq konuslar va affin to'plamlar qavariq to'plamlarning muhim sinfini tashkil etadi.

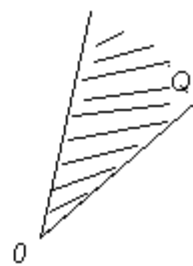
3- ta'rif. Agar barcha $x \in Q$, $\lambda \geq 0$ uchun $\lambda x \in Q$ bo'lsa, $Q \subset R^n$ - konus deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar Q - konus bo'lsa, u o'zining ixtiyoriy nuqtasidan o'tuvchi va uchi nolga bo'lgan nurni to'liq o'zida saqlaydi.

Agar barcha $x, y \in Q$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ uchun $\alpha x + \beta y \in Q$ bo'lsa, Q - qavariq konus deyiladi. Qavariq konus bir vaqtning o'zida ham qavariq to'plam ham konusdir (5-chizma).



a)



b)

3.5- chizma

4-ta'rif. Agar $\forall x, y \in Q$ va barcha $\lambda \in R^1$ uchun $\lambda x + (1 - \lambda)y \in Q$ bo'lsa, $Q \subset R^n$ - *affin to'plam* deyiladi.

Affin to'plam o'zining ixtiyoriy ikki nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziqni to'liq saqlaydi.

Affin to'plamlar sodda tuzilishga ega. Buni quyidagi teorema tasdiqlaydi.

1- teorema. $Q \subset R^n$ - affin to'plam bo'lsin. U holda:

a) ixtiyoriy $x^0 \in Q$ uchun $L = Q - x^0$ to'plam R^n da chiziqli qism fazo bo'ladi; bunda L $x^0 \in Q$ nuqtaning tanlanishiga bog'liq emas;

b) Q ni quyidagicha tasvirlash mumkin:

$$Q = \{x \in R^n : Ax = b\} = \{x \in R^n : a_i^T x = b, i = \overline{1, m}\}, \quad (3.1)$$

bu yerda $A - m \times n$ - o'lchovli matrisa, $a_1, \dots, a_m$ - uning satrlaridan tuzilgan vektorlar, $b = (b_1, \dots, b_m) \in R^m$.

(3.1) tasvir ko'rsatdiki, affin to'plam chekli sondagi gipertekisliklar kesishmasidan iborat.

$L = Q - x^0$ ga affin Q to'plamga parallel chiziqli qism fazo deyiladi.

1-teoremadan kelib chiqadiki, affin to'plam yopiqdir; agar $Q \neq R^n$ bo'lsa, affin Q to'plam ichki nuqtalarga ega emas ($\text{int } Q = \emptyset$).

3.3. Qavariq to'plamlarning xossalari.

Quyida qavariq to'plamlarning bir necha xossalarini keltiramiz.

2- teorema. Ixtiyoriy sondagi qavariq to'plamlarning kesishmasi yana qavariq to'plamdir.

$\Delta Q_i, i \in I$ - qavariq to'plamlar bo'lsin (I -chekli yoki cheksiz indekslar to'plami). $Q = \bigcap_{i \in I} Q_i$ to'plamning qavariq ekanligini ko'rsatamiz.

a) $Q = \emptyset$ bo'lsin. Bu holda teoremaning isboti o'z - o'zidan ravshan (chunki bo'sh to'plam qavariq deb qabul qilingan);

b) $Q \neq \emptyset, \forall x, y \in Q, \lambda \in [0,1]$ bo'lsin. To'plamlar kesishmasining ta'rifiga asosan $x, y \in Q_i, \forall i \in I$. $Q_i, i \in I$ to'plamlar qavariq bo'lganligi uchun $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in Q_i, i \in I$. U holda $z \in \bigcap_{i \in I} Q_i$, ya'ni Q - qavariq to'plamdir. ▲

Isbotlangan teorema asosan, $Q = \{x \in R^n : Ax \leq b\} = \{x \in R^n : a_i^T x \leq b_i, i = \overline{1, m}\}$ to'plam qavariqdir (bu yerda $A - m \times n$ - matrisa, $a_1, \dots, a_m$ - uning satrlaridan tuzilgan vektorlar, $b = (b_1, \dots, b_m)$). Chunki bu to'plam qavariq to'plamlar bo'lgan $H^-(a_i, b_i) = \{x \in R^n : a_i^T x \leq b_i, i = \overline{1, m}\}$ yarim fazolarning kesishmasidan iborat.

Chekli sondagi yarim fazolarning kesishmasidan iborat bo'lgan qavariq to'plamga poliedr deyiladi.

Qavariq to'plamlarning birlashmasi qavariq to'plam bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, $Q = K(d, r_1) \cup K(d, r_2)$ to'plam qavariqdir, chunki, $K(d, r_1) \cup K(d, r_2) = K(d, r), r = \max\{r_1, r_2\}$; $Q = H^+(u, \gamma_1) \cup H^-(u, \gamma_2), \gamma_1 > \gamma_2$ to'plam qavariq emas.

3- teorema. Qavariq $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ to'plamlarning chiziqli kombinatsiyasi deb ataluvchi

$$Q = \sum_{i=1}^m \alpha_i Q_i = \left\{ x \in R^n : x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i, x^i \in Q_i, i = \overline{1, m} \right\}$$

to'plam qavariq bo'ladi, bu yerda $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ - ixtiyoriy sonlar.

Bu teorema asosan, qavariq Q_1 va Q_2 to'plamlarning

$$Q_1 + Q_2 = \{x : x = x^1 + x^2, x^1 \in Q_1, x^2 \in Q_2\},$$

algebraik yig'indisi,

$$Q_1 - Q_2 = \{x : x = x^1 - x^2, x^1 \in Q_1, x^2 \in Q_2\}$$

ayirmasi hamda qavariq Q to'plamning ixtiyoriy α songa ko'paytmasi

$$\alpha Q = \{y : y = \alpha x, x \in Q\}$$

qavariq to'plamdir.

4- teorema. Qavariq Q to'plamning yopig'i $\bar{Q}$ - qavariq to'plamdir.

Δ $\forall x, y \in \bar{Q}, \lambda \in [0,1]$ uchun $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ nuqtani qaraymiz. Qavariq to'plam yakkalangan nuqtalarga ega bo'lmaganligi uchun x va y - Q to'plamning limitik nuqtalaridir. Shuning uchun shunday $x^k \in Q$ va $y^k \in Q$ nuqtalar ketma - ketligi mavjudki, $x^k \rightarrow x, y^k \rightarrow y, k \rightarrow \infty$ bo'ladi. Q to'plam qavariq bo'lganligi uchun $z^k = \lambda x^k + (1-\lambda)y^k \in Q, k = 1, 2, \dots$ U vaqtda $\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} x^k + (1-\lambda) \lim_{k \rightarrow \infty} y^k = \lambda x + (1-\lambda)y = z$. Demak, $z \in \bar{Q}$, ya'ni $\bar{Q}$ - qavariq to'plamdir. ▲

I z o h. a) Q to'plamning yopig'i $\bar{Q}$ - qavariq bo'lsa-da, Q - qavariq bo'lmashligi mumkin. Masalan, $Q = \{x \in R^n : 0 < \|x - d\| \leq r\}$ - qavariq emas, ammo $\bar{Q} = K(d, r)$ - qavariq to'plam.

b) qat'iy qavariq to'plamning yopig'i qat'iy qavariq bo'lmashligi mumkin. Masalan, $Q = \left\{x \in R^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1, x_i > 0, i = \overline{1, n}\right\}$ - qat'iy qavariq, ammo $\bar{Q} = \left\{x \in R^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\right\}$ esa qat'iy qavariq emas.

5- teorema. Q - qavariq to'plam, $\text{int } Q \neq \emptyset$ bo'lsin. Agar $x \in \bar{Q}$, $y \in \text{int } Q$ bo'lsa, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \text{int } Q$, $\forall \lambda \in (0, 1)$ bo'ladi.

$\Delta y \in \text{int } Q$ bo'lganligi uchun, shunday $\varepsilon > 0$ mavjudki,

$$\{v : \|v - y\| < \varepsilon\} \subset Q. \quad (3.2)$$

Biz

$$u = \lambda x + (1 - \lambda)y, \quad 0 < \lambda < 1 \quad (3.3)$$

ko'rinishdagi nuqtalarni qaraymiz. $u \in \text{int } Q$ ekanligini ko'rsatish uchun u nuqtaning Q to'plamda to'liq yotuvchi biror atrofni qurish yetarlidir. $\{z : \|z - u\| < (1 - \lambda)\varepsilon\} \subset Q$ ekanligini ko'rsatamiz.

$$x \in \bar{Q} \text{ bo'lganligidan, } \left\{v : \|v - x\| < \frac{(1 - \lambda)\varepsilon - \|z - u\|}{\lambda}\right\} \cap Q \text{ to'plam bo'sh emas.}$$

Shuning uchun, $z_1 \in Q$ nuqta mavjudki, uning uchun

$$\|z_1 - x\| < \frac{(1 - \lambda)\varepsilon - \|z - u\|}{\lambda} \quad (3.4)$$

munosabat bajariladi.

$$z_2 = \frac{z - \lambda z_1}{1 - \lambda} \text{ deb olamiz. U holda (3.3) va (3.4) dan}$$

$$\begin{aligned} \|z_2 - y\| &= \left\| \frac{z - \lambda z_1}{1 - \lambda} - y \right\| = \left\| \frac{z - \lambda z_1 - (u - \lambda x)}{1 - \lambda} \right\| = \frac{1}{1 - \lambda} \|(z - u) + \lambda(x - z_1)\| \leq \frac{1}{1 - \lambda} (\|z - u\| + \\ &+ \lambda\|x - z_1\|) < \varepsilon \end{aligned}$$

munosabatni olamiz. Demak, $z_2 \in Q$ ((3.2) ga q.). z_2 nuqtaning aniqlanishiga ko'ra, $z = \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2$. $z_1, z_2 \in Q$ va Q qavariq bo'lganligi uchun, $z \in Q$. Shunday qilib, $\|z - u\| < (1 - \lambda)\varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi har bir z vektorning Q ga tegishli ekanligi ko'rsatildi. Bu esa, $u \in \text{int } Q$ demakdir. ▲

Bu teoremadan natija sifatida quyidagi tasdiqlarni olish mumkin.

6- teorema. Agar Q - qavariq to'plam bo'lsa, $\text{int } Q$ ham qavariq to'plam bo'ladi.

7- teorema. Agar Q - qavariq to‘plam, $\text{int } Q \neq \emptyset$ bo‘lsa, $\bar{Q} = \overline{\text{int } Q}$, $\text{int } Q = \text{int } \bar{Q}$, $\partial Q = \partial \bar{Q}$ bo‘ladi (bu yerda $\partial Q = \bar{Q} \setminus \text{int } Q$ - Q to‘plamning chegarasi).

Agar Q - qavariq to‘plam bo‘lmasa, $\partial Q = \partial \bar{Q}$ tenglik o‘rniga faqat $\partial \bar{Q} \subset \partial Q$ munosabat o‘rinli xolos. Haqiqatan ham, $Q \subset \bar{Q}$ dan $\text{int } Q \subset \text{int } \bar{Q}$, demak, $\partial \bar{Q} = \bar{Q} \setminus \text{int } \bar{Q} \subset \bar{Q} \setminus \text{int } Q = \partial Q$.

7-teoremadan foydalanib, quyidagi natijani olish mumkin: agar $Q \subset R^n$ - qavariq to‘plam, $\text{int } Q \neq \emptyset$, $\bar{Q}$ - qat’iy qavariq bo‘lsa, Q - qat’iy qavariq to‘plam bo‘ladi.

R^n fazoning $x^1, \dots, x^m$ nuqtalari berilgan bo‘lsin.

5-ta’rif. Agar $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ bo‘lsa, $z = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i$ nuqtaga $x^1, x^2, \dots, x^m$ nuqtalarning *qavariq kombinatsiyasi* deyiladi.

Agar faqat $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ shart bajarilsa, $z = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i$ nuqtaga $x^1, x^2, \dots, x^m$ nuqtalarning *affin kombinatsiyasi* deyiladi.

8- teorema. Qavariq (affin) to‘plam o‘z nuqtalarining barcha mumkin bo‘lgan qavariq (affin) kombinatsiyalarini o‘zida saqlaydi.

Δ Teoremaning affin to‘plamga tegishli qismi 1- teoremadan kelib chiqadi ((1) formulaga q.).

$Q \subset R^n$ - qavariq to‘plam bo‘lsin. Ixtiyoriy $m = 1, 2, 3, \dots$ uchun

$$z = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad x^i \in R, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \quad (3.5)$$

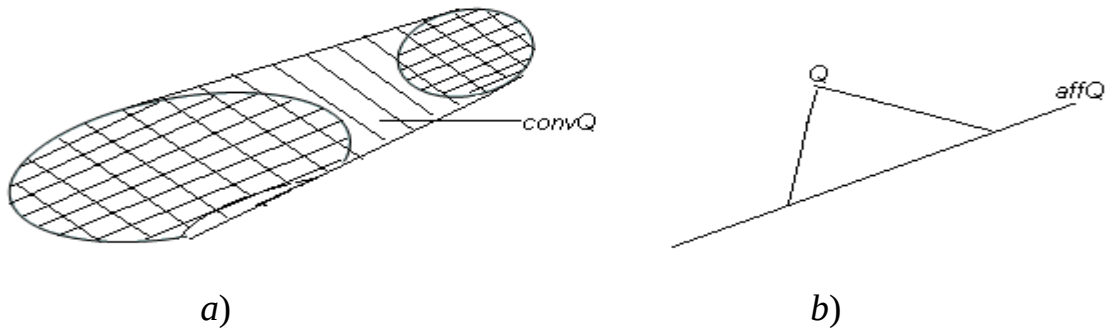
shartdan $z \in Q$ munosabat kelib chiqishini ko‘rsatamiz. Matematik indukchiya usulini qo‘llaymiz. $m = 1$ uchun tasdiqning bajarilishi ravshan. Faraz qilaylik, $m = k$ uchun tasdiq o‘rinli bo‘lsin. (5) da $m = k + 1$ deb olamiz. Agar $\lambda_{k+1} = 1$ bo‘lsa, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ va demak, $z = x^{k+1} \in Q$. Agar $0 < \lambda_{k+1} < 1$ bo‘lsa,

$$z = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x^i = (1 - \lambda_{k+1}) \bar{x} + \lambda_{k+1} x^{k+1}, \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} x^i \quad (3.6)$$

deb yozib olamiz. $\bar{x}$ nuqta $x^1, x^2, \dots, x^m$ nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo‘lib, induktiv farazga ko‘ra $\bar{x} \in Q$. U Holda, Q ning qavariqligini Hisobga olib, (6) dan $z \in Q$ ga ega bo‘lamiz. ▲

3. 4. To‘plamlarning qavariq va affin qobiqlari.

6- ta’rif. $Q \subset R^n$ to‘plamni o‘zida saqlovchi barcha qavariq (affin) to‘plamlarning kesishmasiga uning *qavariq (affin) qobig‘i* deyiladi va $\text{conv } Q$ ($\text{aff } Q$) deb belgilanadi (6-chizma).



3. 6- chizma.

Ixtiyoriy $Q \neq \emptyset$ uchun $\text{conv}Q$ ($\text{aff}Q$) – bo‘sh bo‘lmagan qavariq (affin) to‘plamdir. Agar Q - qavariq (affin) to‘plam bo‘lsa, $\text{conv}Q = Q$ ($\text{aff}Q = Q$) bo‘ladi.

9- teorema. Bo‘sh bo‘lmagan ixtiyoriy $Q \subset R^n$ to‘plamning qavariq (affin) qobig‘i Q to‘plam nuqtalarining barcha mumkin bo‘lgan qavariq (affin) kombinatsiyalari to‘plami bilan ustma- ust tushadi.

Δ Teoremaning qavariq qobiqqa tegishli qismini isbotlaymiz (affin qobiq uchun o‘xshash isbotlanadi).

Q to‘plam nuqtalarining barcha mumkin bo‘lga qavariq kombinatsiyalari to‘plamini $\text{com}Q$ deb belgilaylik. $Q \subset \text{conv}Q$ bo‘lganligidan (6-ta’rifga q.) 8-teoremaga asosan,

$$\text{com}Q \subset \text{conv}Q. \quad (3.7)$$

$\text{com}Q$ to‘plamning qavariqligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan, $z^1 = \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i x^i, \quad z^2 = \sum_{i=1}^{m_2} \mu_i y^i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \mu_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{m_2} \mu_i = 1$ bo‘lsin. $u^i = x^i, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad u^{m_1+1} = y^i, \quad i = \overline{1, m_2}, \quad \bar{\lambda}_i = \lambda_i, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad \bar{\lambda}_{m_1+i} = 0, \quad i = \overline{1, m_2}, \quad \bar{\mu}_i = 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad \bar{\mu}_{m_1+i} = \mu_i, \quad i = \overline{1, m_2}$ deb belgilaymiz. U holda $\forall \alpha \in [0, 1]$ uchun,

$$\alpha z^1 + (1-\alpha)z^2 = \alpha \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i x^i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{m_2} \mu_i y^i = \sum_{i=1}^{m_1+m_2} [\alpha \bar{\lambda}_i + (1-\alpha) \bar{\mu}_i] u^i,$$

$$\sum_{i=1}^{m_1+m_2} [\alpha \bar{\lambda}_i + (1-\alpha) \bar{\mu}_i] = \alpha \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{m_2} \mu_i = \alpha + (1-\alpha) = 1, \quad \alpha \bar{\lambda}_i + (1-\alpha) \bar{\mu}_i \geq 0,$$

$$i = \overline{1, m_1 + m_2}.$$

Demak, $z = \alpha z^1 + (1-\alpha)z^2 \in \text{com}Q$. Bu esa $\text{com}Q$ ning qavariqligini ko‘rsatadi.

Ta’rifdan tushunarliki, $Q \subset \text{com}Q$. Bundan esa, 6-ta’rifga ko‘ra, $\text{conv}Q \subset \text{com}Q$ kelib chiqadi. Olingan bu munosabat va (7) dan teorema isbotiga kelamiz. $\blacktriangle$

9-teoremadan foydalanib, quyidagi natijani olish mumkin.

3.10-teorema. Agar $Q_i \subset R^n, \quad i = \overline{1, k}$ bo‘lsa, $\text{conv} \sum_{i=1}^k Q_i = \sum_{i=1}^k \text{conv}Q_i$ bo‘ladi.

Qavariq analizda quyidagi teorema muhim ahamiyatga ega.

3.11-teorema (Karateodori). $Q \subset R^n$ bo'lsin. U holda $\text{conv}Q$ ning ixtiyoriy nuqtasini Q ning $n+1$ tadan ko'p bo'lmagan nuqtalarining qavariq kombinatsiyasi kabi tasvirlash mumkin. (Teoremaning isbotini [9,10] dan topish mumkin.)

Karateodori teoremasidan natija sifatida quyidagiga ega bo'lamiz.

3.12-teorema. Agar $Q \subset R^n$ - kompakt bo'lsa, $\text{conv}Q$ ham kompakt bo'ladi.

O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Qanday to'plam qavariq to'plam deyiladi? Misollar keltiring.
2. Qanday to'plam qat'iy qavariq to'plam deyiladi? Misollar keltiring.
3. Qanday to'plam konus deyiladi? Misollar keltiring.
4. Qanday to'plam affin to'plam deyiladi? Misollar keltiring.
5. Ixtiyoriy sondagi qavariq to'plamlarning kesishmasi qavariq to'plam bo'lishini isbotlang.
6. Ikkita qavariq to'plamning algebraik yig'indisi qanday to'plam bo'ladi?
7. Ikkita qavariq to'plamning algebraik ayirmasi qavariq ekanligini isbotlang.
8. Qavariq to'plamning yopig'i qavariq ekanligini isbotlang.
9. Nuqtalarning qavariq kombinatsiyasi ta'rifini keltiring.
10. To'plamning qavariq qobig'i ta'rifini keltiring.
11. To'plamning affin qobig'i ta'rifini keltiring.

4 – ma’ruza.

Qavariq funksiyalar va ularning xossalari. Qavariqlik kriteriylari.

Reja:

4.1. Qavariq funksiyalar. Misollar.

4.2. Qavariqlik kriteriylari.

4.3. Silliqlik funksiyalarining qavariqlik kriteriylari.

4.4. Qavariq funksiyalarining xossalari.

4.5. Qavariq funksiyaning sath to‘plami.

Tayanch iboralar: qavariq to‘plam, qavariq funksiya, chiziqli funksiya, qat’iy qavariq funksiya, kuchli qavariq funksiya, botiq funksiya, qavariq funksiyaning grafikusti (epigrafi), sath to‘plami

Adabiyotlar.

1. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.

2. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Методы оптимизации. Изд. 2-е, Минск, изд-во БГУ, 1981 (Ўзбек тилига таржима қилинган ва 1995 йилда “Ўзбекистон” нашриётида нашр этилган).

3. **Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М.** Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 2005.

4. **Ашманов С.А., Тимохов А.В.** Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.

5. **Исраилов И., Отакулов С.** Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш усуллари курсидан маърузалар. Самарқанд, СамДУ нашри, 1-қисм, 1999.

6. **Исраилов И. ва б.** Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш фанидан амалий машғулотлар. Ўқув-услубий қўлланма, 1-қисм, Самарқанд, 1987.

4.1. Qavariq funksiyalar.

Qavariq $Q \subset R^n$ to‘plamda aniqlangan $f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin.

1- **ta’rif.** Agar $\forall x, \forall \lambda \in [0,1]$ uchun

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad (4.1)$$

munosabat bajarilsa, $f(x)$ funksiya Q to‘plamda qavariq deyiladi.

Agar $\forall x, y \in Q, x \neq y$ nuqtalar va $\forall \lambda \in (0,1)$ uchun

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad (4.2)$$

qat’iy tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya Q da qat’iy qavariq funksiya deyiladi.

Agar $\mu > 0$ topilib, $\forall x, y \in Q$ va $P_Q(a) = x^*$ uchun

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \mu\lambda(1-\lambda)\|x - y\|^2 \quad (4.3)$$

bo‘lsa, $f(x)$ ga Q to‘plamda kuchli qavariq funksiya deyiladi.

Misollar. 1) Chiziqli funksiya $f(x) = c^T x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ - R^n da qavariq, chunki $c^T(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda c^T x + (1-\lambda)c^T y$, $\forall x, y \in R^n$, $\forall \lambda \in [0,1]$, ya'ni (4.1) munosabat bajariladi. $f(x) = c^T x$ - qat'iy qavariq ham, kuchli qavariq ham emas.

2) $f(x) = e^{\|x\|}$ - R^n da qat'iy qavariq funksiyadir, chunki $e^{\|\lambda x + (1-\lambda)y\|} < \lambda e^{\|x\|} + (1-\lambda)e^{\|y\|}$, $\forall x, y \in R^n$, $x \neq y$, $\forall \lambda \in (0,1)$, ya'ni (4.2) tengsizlik o'rinlidir.

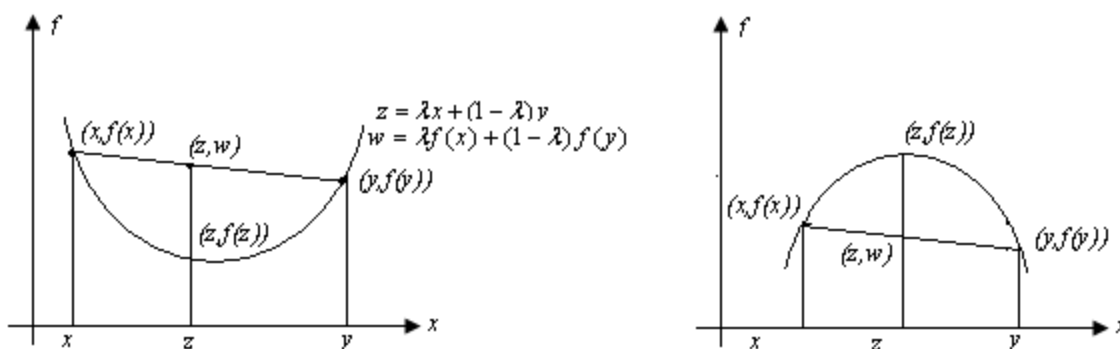
3) $f(x) = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ - R^n da kuchli qavariq funksiya bo'ladi. Bu funksiya uchun (4.3) munosabat $\mu = 1$ o'zgarmasli quyidagi tenglikdan iborat:

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2, \quad \forall x, y \in R^n, \lambda \in [0,1]$$

2-ta'rif. Agar $g(x) = -f(x)$ funksiya qavariq $Q \subset R^n$ to'plamda qavariq (qat'iy, kuchli qavariq) bo'lsa, $f(x)$ funksiya Q to'plamda botiq (qat'iy, kuchli botiq) deyiladi.

Masalan, $f(x) = c^T x$ - chiziqli funksiya botiq funksiya ham bo'ladi; $f(x) = 1 - e^{\|x\|}$ - qat'iy botiq funksiya, $f(x) = 1 - \|x\|^2$ - kuchli botiq funksiyadir.

Qavariq (botiq) funksiya ta'rifining geometrik ma'nosi 1-chizmada berilgan.



1-chizma.

Bundan buyon, asosan, qavariq funksiyalarning xossalarini o'rganamiz. Ulardan botiq funksiyalarning mos xossalarini keltirib chiqarish qiyin emas.

4.2. Qavariqlik kriteriylari.

Funksiyaning qavariqligiga ekvivalent bo'lgan tasdiqlarni *qavariqlik kriteriylari* deb ataymiz. Quyida bir necha qavariqlik kriteriylarini keltiramiz.

1-teorema (Yensen tengsizligi). $f(x)$ funksiyaning qavariq $Q \subset R^n$ to'plamda qavariq bo'lishi uchun ixtiyoriy $m = 1, 2, \dots, x^i \in Q, i = \overline{1, m}$ nuqtalar va $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ munosabatni qanoatlantiruvchi barcha $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$ sonlar uchun

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x^i) \quad (4.4)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Δ *Yetarliligi.* $m = 2$ bo'lganda (4.4) dan qavariq funksiya ta'rifidagi (4.1) munosabat kelib chiqadi.

Zaruriyligi. $f(x)$ - Q da qavariq funksiya bo'lsin. Matematik induksiya usulini qo'llaymiz. $m = 1$ uchun (4) ning bajarilishi ravshan. Faraz qilaylik, $m = k$ uchun (4.4) munosabat o'rinli bo'lsin. Uning $m = k + 1$ uchun bajarilishini ko'rsatamiz.

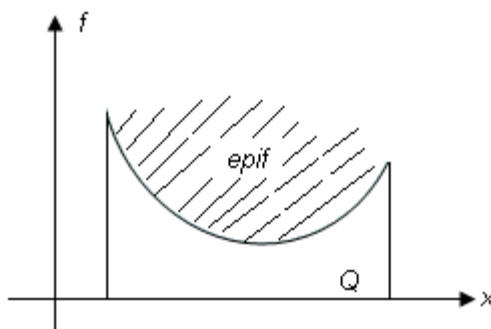
$$x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x^i \quad (4.5)$$

bo'lsin. $0 < \lambda_{k+1} < 1$ deb olamiz (agar $\lambda_{k+1} = 0$ bo'lsa, (4.5) da k ta element, $\lambda_{k+1} = 1$ bo'lganda esa $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ bo'lib, (4.5) da faqat bitta element qatnashadi; bu hollarda tasdiqning to'g'riligi faraz qilinmoqda). U holda $x = \lambda_{k+1} x^{k+1} + (1 - \lambda_{k+1}) \bar{x}$, $\bar{x} = \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i x^i$, $\bar{\lambda}_i = \lambda_i / (1 - \lambda_{k+1})$ deb yozib olamiz va $\bar{x} \in Q$ (chunki $\bar{x}$ element x^i , $i = \overline{1, k}$, nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat; Q -qavariq to'plam ekanligini hamda $f(x)$ funksiyaning qavariqligini, keyin esa, (4.4) ning $m = k$ uchun o'rinliligi haqidagi farazni hisobga olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x^i\right) &= f(\lambda_{k+1} x^{k+1} + (1 - \lambda_{k+1}) \bar{x}) \leq \lambda_{k+1} f(x^{k+1}) + (1 - \lambda_{k+1}) f(\bar{x}) \leq \\ &\leq (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} f(x^i) + \lambda_{k+1} f(x^{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x^i). \end{aligned}$$

Demak, (4) munosabat $f(x) = e^{\|x\|}$ uchun ham o'rinlidir. $\blacktriangle$

3-ta'rif. $Q \subset R^n$ to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiyaning *grafikusti* (yoki *epigrafi*) deb, quyidagi $epif = \{(x, y) \in R^{n+1} : x \in Q, y \geq f(x)\}$ to'plamga aytiladi (4.2-chizma).



2-chizma

4.2 – chizma.

2-teorema. Qavariq $Q \subset R^n$ to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiyaning shu to'plamda qavariq bo'lishi uchun, uning ustgrafi $epif$ ning R^{n+1} da qavariq to'plam bo'lishi zarur va yetarlidir.

Δ Zaruriyligi. $f(x)$ funksiya Q da qavariq bo'lsin. Ixtiyoriy ikkita $z^1 = (x^1, y^1) \in epif$, $z^2 = (x^2, y^2) \in epif$ nuqtalarni olib ularning qavariq kombinatsiyasini tuzamiz: $z(\lambda) = \lambda z^1 + (1-\lambda)z^2 = (\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \lambda y^1 + (1-\lambda)y^2)$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Q to'plamning qavariqligidan $x(\lambda) = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in Q$ kelib chiqadi. $f(x)$ funksiyaning qavariqligini va $z^1, z^2 \in epif$ ekanligini hisobga olib, $f(x(\lambda)) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) \leq \lambda y^1 + (1-\lambda)y^2$ tengsizlikni olamiz. Bu esa, $z(\lambda) \in epif$, $\lambda \in [0,1]$ ya'ni $epif$ qavariq demakdir.

Δ Yetarliligi. $epif$ -qavariq to'plam bo'lsin. Ixtiyoriy $x^1, x^2 \in Q$ nuqtalarni va $\lambda \in [0,1]$ sonni olamiz. U vaqtda $z^1 = (x^1, f(x^1)) \in epif$, $z^2 = (x^2, f(x^2)) \in epif$, $epif$ -qavariq to'plam bo'lganligidan, $z(\lambda) = \lambda z^1 + (1-\lambda)z^2 \geq f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2)$ munosabat bajarilishini bildiradi. Demak, $f(x)$ Q da qavariq funksiya bo'ladi. $\blacktriangle$

3-teorema. $f(x)$ funksiyaning qavariq $Q \subset R^n$ to'plamda qavariq (qat'iy qavariq) bo'lishi uchun ixtiyoriy $x, y \in Q$ larda skalyar $\phi(t) = f(x + ty)$ funksiyaning $[0,1]$ da qavariq (qat'iy qavariq) bo'lishi zarur va yetarlidir.

Δ Zaruriyligi. $\lambda \in [0,1]$, $t_1, t_2 \in [0,1]$ bo'lsin. U vaqtda $\phi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f(x + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)y) = f(\lambda(x + t_1 y) + (1-\lambda)(x + t_2 y)) \leq \lambda f(x + t_1 y) + (1-\lambda)f(x + t_2 y) = \lambda \phi(t_1) + (1-\lambda)\phi(t_2)$, ya'ni $\phi(t) - [0,1]$ da qavariqdir.

Δ Yetarliligi. Ixtiyoriy $x^1, x^2 \in Q$ nuqtalarni va $\lambda \in [0,1]$ sonni olamiz. $x = x^2$, $y = x^1 - x^2$ deb belgilasak,

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) = f(x^2 + \lambda(x^1 - x^2)) = f(x + \lambda y) = \phi(\lambda) \quad (4.6)$$

Shartga ko'ra $\phi(\lambda)$, $\lambda \in [0,1]$, qavariq bo'lgani uchun

$$\phi(\lambda) = \phi(\lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 0) \leq \lambda \phi(1) + (1-\lambda)\phi(0) = \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) \quad (4.7)$$

(4.6) va (4.7) dan

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)$$

kelib chiqadi, ya'ni $f(x)$ - Q da qavariq funksiya. $\blacktriangle$

4.3. Silliq funksiylarning qavariqlik kriteriysi.

Quyida differensiallanuvchi funksiyalar uchun qavariqlik kriteriyalaridan birini keltiramiz.

4-teorema. $f(x)$ - qavariq $Q \subset R^n$ to'plamda differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $f(x)$ funksiyaning Q to'plamda: 1) qavariq, 2) qat'iy qavariq, 3) $\mu > 0$ o'zgarmasli kuchli qavariq bo'lishi uchun, barcha $x, y \in Q$ larda, mos ravishda,

$$1) f(x) - f(y) \geq (x - y)^T \frac{\partial f(y)}{\partial x} \quad (4.8)$$

$$2) f(x) - f(y) > (x - y)^T \frac{\partial f(y)}{\partial x}, \quad x \neq y,$$

$$3) f(x) - f(y) \geq (x - y)^T \frac{\partial f(y)}{\partial x} + \mu \|x - y\|^2$$

munosabatlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Δ Teoremani qavariq funksiyalar uchun isbotlaymiz (qat'iy va kuchli qavariq funksiyalar uchun o'xshash isbotlanadi).

Zaruriyligi. $f(x)$ qavariq funksiya bo'lsin. Ta'rifdan foydalanib, $\forall x, y \in Q$, $\lambda \in [0,1]$ uchun

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) = f(y) + \lambda(f(x) - f(y))$$

yoki

$$f(x) - f(y) \geq \frac{1}{\lambda} [f(y + \lambda(x - y)) - f(y)] \quad (4.9)$$

tengsizlikni olamiz. $f(x)$ differensiallanuvchi bo'lgani uchun,

$$f(y + \lambda(x - y)) - f(y) = \lambda(x - y)^T \frac{\partial f(y)}{\partial x} + o(\lambda), \quad (4.10)$$

bu yerda $o(\lambda)/\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0+$. (4.9) va (4.10) lardan, $\lambda \rightarrow 0$ da, talab qilingan, (4.8) munosabatga ega bo'lamiz.

Yetarliligi. Faraz qilaylik, (4.8) bajarilsin. Ixtiyoriy $x^1, x^2 \in Q$, $\lambda \in [0,1]$ uchun $y = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ deb, (4.8) ga asosan,

$$f(x^1) - f(y) \geq (x^1 - y)^T \frac{\partial f(y)}{\partial x}, \quad f(x^2) - f(y) \geq (x^2 - y)^T \frac{\partial f(y)}{\partial x}$$

tengsizliklarga ega bo'lamiz. Bu tengsizliklarning birini λ ga, ikkinchisini $(1 - \lambda)$ ga ko'paytirib va ularni qo'shib, quyidagini olamiz:

$$\lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2) - f(y) \geq (\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 - y)^T \frac{\partial f(y)}{\partial x} = 0,$$

ya'ni (4.1) munosabat bajariladi. Demak, $f(x)$ - qavariq funksiya. $\blacktriangle$

Natija. Agar qavariq Q to'plamda qavariq $f(x)$ funksiya $x^* \in Q$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, barcha $x \in Q$ nuqtalar uchun

$$f(x) - f(x^*) \geq (x - x^*)^T \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} \quad (4.11)$$

tengsizlik bajariladi.

Skalar argumentli ($x \in R^1$) differensiallanuvchi qavariq $f(x)$ funksiya uchun (4.11) munosabat funksiyaning grafigi uning ixtiyoriy $(x^*, f(x^*))$ nuqtasiga o'tkazilgan urinmadan quyida yotmasligini ko'rsatadi.

4.4. Qavariq funksiyalarning xossalari.

Quyida natijasi qavariq funksiya bo'luvchi bir necha amallarni ko'rsatamiz.

5-teorema. $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ - qavariq $Q \subset R^n$ to'plamda qavariq funksiyalar, α_i , $i = \overline{1, m}$ - manfiymas sonlar bo'lsin. U vaqtda

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x) \quad (4.12)$$

funksiya Q to'plamda qavariqdir.

$\Delta \forall x, y \in Q, \lambda \in [0,1]$ uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i (\lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y)) = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x) + (1-\lambda) \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \end{aligned}$$

Demak, $f(x)$ funksiya qavariqdir. $\blacktriangle$

Quyidagi xossa ham qavariq funksiya ta'rifidan osongina kelib chiqadi.

6-teorema. $Q \subset R^n$ - qavariq to'plam, $P \subset R^m$, $\varphi(x, y)$ funksiya har bir $y \in P$ uchun x bo'yicha Q da qavariq va har bir $x \in Q$ uchun y bo'yicha Q da yuqoridan chegaralangan funksiya bo'lsin. U holda $f(x) = \sup_{y \in P} \varphi(x, y)$ funksiya P da qavariqdir.

Bu teoremadan, xususiyl holda, agar $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ funksiyalar to'plamda qavariq bo'lsa, $f(x) = \max_{i=1, m} f_i(x)$ funksiyaning ham Q da qavariqligi kelib chiqadi.

7- teorema. $g(x)$ - qavariq $Q \subset R^n$ to'plamda qavariq funksiya, $\varphi(u)$ -qavariq $P \subset R^1$ to'plamda monoton kamaymaydigan qavariq funksiya, $g(x) \in P, \forall x \in Q$ bo'lsin. U holda $f(x) = \varphi(g(x))$ funksiya Q da qavariq bo'ladi.

$\Delta g(x)$ funksiyaning qavariqligidan va $\varphi(y)$ funksiyaning monotonligidan foydalanib, ixtiyoriy $x^1, x^2 \in Q, \lambda \in [0,1]$ uchun, quyidagi munosabatni yozamiz:

$$\begin{aligned} f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) &= \varphi(g(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2)) \leq \varphi(\lambda g(x^1) + (1-\lambda)g(x^2)) \leq \lambda \varphi(g(x^1)) + \\ &+ (1-\lambda)\varphi(g(x^2)) = \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2). \end{aligned}$$

Bu esa, ta'rifga ko'ra, $f(x)$ funksiyaning qavariqligini ko'rsatadi. ▲

Xuddi shunga o'xshash quyidagi teorema ham o'rinalidir.

8-teorema. $\varphi(y)$ - qavariq $P \subset R^m$ to'plamda qavariq funksiya, A - $m \times n$ o'lchovli matrisa, $b \in R^m$, $Q = \{x \in R^n : Ax + b \in P\} \neq \emptyset$ bo'lsin. U vaqtda $f(x) = \varphi(Ax + b)$ funksiya Q da qavariq bo'ladi.

Misollar.

1) $g(x)$ - Q da qavariq, $g(x) < 0$, $\forall x \in Q$ bo'lsin. U holda $f(x) = -\frac{1}{g(x)}$

funksiya ham Q da qavariq bo'ladi. Haqiqatan, $\varphi(y) = -\frac{1}{y}$ funksiya $P = (-\infty, 0)$ da monoton o'suvchi qavariq funksiya va $g(x) \in P$, $\forall x \in Q$ bo'lgani uchun, $f(x)$ ning qavariqligi 7-teoremadan kelib chiqadi.

2) Ixtiyoriy $a > 0$, $b > 0$, $v \geq 1$ sonlar uchun $f(x) = (ax + b)^v$ funksiya $Q = [0, +\infty)$ da qavariqdir. Chunki $\varphi(y) = y^v$, $v \geq 1$ funksiya $P = [0, +\infty)$ da qavariq, $ax + b \geq 0$, $\forall x \in Q$ bo'lgani uchun, $f(x)$ funksiyaning qavariqligi 8-teoremadan kelib chiqadi.

3) $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ - Q da qavariq funksiyalar bo'lsin. U

$$f(x) = \sum_{i=1}^m [\max\{0, f_i(x)\}]^v, \quad v \geq 1$$

funksiya ham Q da qavariq bo'ladi.

Haqiqatan ham 6-teoremaga ko'ra, $g_i(x) = \max\{0, f_i(x)\}$ funksiyalar Q da qavariqdir. $v \geq 1$ bo'lganda $\varphi(y) = y^v$ funksiya $P = [0, +\infty)$ da qavariq va monoton o'suvchidir. Shuning uchun, 7-teoremaga asosan, $g_i(x) = [\bar{g}_i(x)]^v$ funksiyalar qavariqdir. U vaqtda $f(x)$ funksiyaning qavariqligi 5-teoremadan kelib chiqadi.

4.5. Qavariq funksiyaning sath to'plami.

$Q \subset R^n$ to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

4-ta'rif. Quyidagi,

$$Q_f^\gamma = \{x \in Q : f(x) \leq \gamma\}, \quad \gamma \in R^1 \quad (4.13)$$

ko'rinishdagi to'plamga $f(x)$ funksiyaning *sath (Lebeg) to'plami* deyiladi.

Qavariq funksiya ta'rifidan va sath to'plamning aniqlanishidan quyidagi xossaga ega bo'lamiz.

9-teorema. $f(x)$ funksiya $Q \subset R^n$ to'plamda qavariq bo'lsin. U vaqtda ixtiyoriy $\gamma \in R^1$ uchun Q_f^γ sath to'plami qavariqdir.

9-teoremaning teskarisi o‘rinli emas, ya’ni, ixtiyoriy $\gamma \in R^1$ uchun Q_f^γ to‘plamning qavariqligidan, $f(x)$ funksiyaning qavariqligi kelib chiqmasligi mumkin. Masalan, ixtiyoriy $\gamma \in R^1$ uchun $Q_f^\gamma = \{x \in R^1 : x^3 \leq \gamma\} = (-\infty, \sqrt[3]{\gamma}]$ to‘plam qavariq, ammo $f(x) = x^3$, $x \in R^1$ funksiya qavariq emas.

Qavariq funksiyalar uchun sath to‘plamlarining yana bir xossasi ularning chegaralanganligidir.

10-teorema. Qavariq yopiq Q to‘plamda uzluksiz kuchli qavariq Q_f^γ $f(x)$ funksiyaning barcha sath to‘plamlari Q_f^γ , $\gamma \in R^1$, chegaralangan to‘plamlardir.

Δ $Q_f^\gamma \neq \emptyset$ bo‘lsin (aks holda teoremaning to‘g‘riligi o‘z-o‘zidan ravshan). Ixtiyoriy $x^0 \in Q_f^\gamma$ uchun $K(x^0, 1) = \{x \in R^1 : \|x - x^0\| \leq 1\}$ birlik sharni qaraymiz. $f(x)$ ning uzluksizligidan Q_f^γ ning yopiqqligi kelib chiqadi. U vaqtda $P = Q_f^\gamma \cap K(x^0, 1)$ chegaralangan va yopiq (ya’ni kompakt) to‘plam bo‘ladi. Veyershtrass teoremasiga asosan, $f(x)$ funksiya P to‘plamda quyidan chegara-langani, ya’ni shunday $\alpha = \text{const}$ mavjudki,

$$f(x) \geq \alpha, \quad \forall x \in Q_f^\gamma \cap K(x^0, 1) \quad (4.14)$$

Barcha $x \in Q_f^\gamma$ uchun

$$\|x - x^0\| \leq 1 + \frac{\gamma - \alpha}{\mu} \quad (4.15)$$

ekanligini ko‘rsatamiz (bu yerda μ - $f(x)$ funksiyaning kuchli qavariqlik ta’rifidagi o‘zgarmas).

Agar $x \in Q_f^\gamma \cap K(x^0, 1)$ bo‘lsa, $\|x - x^0\| \leq 1$ ya’ni (4.15) tengsizlik bajariladi. $x \in Q_f^\gamma \setminus K(x^0, 1)$ bo‘lsin. $\lambda = 1 \setminus \|x - x^0\|$, $\bar{x} = \lambda x + (1 - \lambda)x^0$ deb olamiz. $0 < \lambda < 1$, $x \in Q_f^\gamma$, $x^0 \in Q_f^\gamma$ bo‘lgani uchun $\bar{x} \in Q_f^\gamma$ (chunki Q_f^γ -qavariq). $\bar{x} = x^0 + \lambda(x - x^0) = x^0 + \frac{1}{\|x - x^0\|}(x - x^0)$, $\|\bar{x} - x^0\| = 1$, ya’ni $\bar{x} \in K(x^0, 1)$. Shunday qilib, $\bar{x} \in Q_f^\gamma \cap K(x^0, 1)$. Endi (4.14) tengsizlikdan, $f(x)$ funksiyaning kuchli qavariqligidan, $f(x^0) \leq \gamma$, $f(x) \leq \gamma$ shartlardan va λ ning aniqlanishidan ketma-ket foydalanib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\alpha \leq f(x) \leq \lambda f(\bar{x}) + (1 - \lambda)f(x^0) - \mu\lambda(1 - \lambda)\|x - x^0\| \leq \gamma - \mu\gamma(1 - \lambda)\|x - x^0\| = \gamma - \mu(\|x - x^0\| - 1)$$

Buyerdan (4.15) tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa, Q_f^γ ning chegaranganligini ko‘rsatadi. Δ

Qavariq (kuchli qavariq bo'lmagan) funksiyalar uchun 10-teoremani quyidagicha umumlashtirish mumkin.

11-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ qavariq yopiq Q to'plamda quyidan yarim uzluksiz qavariq funksiya bo'lsin. Agar biror γ_0 uchun $Q_f^{\gamma_0}$ sath to'plami bo'sh bo'lmagan va chegaralangan bo'lsa, ixtiyoriy $\gamma \in R^1$ uchun ham Q_f^γ to'plam chegaralangan bo'ladi.

Teoremaning isbotini [4,11] dan qarash mumkin.

O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Qavariq funksiya ta'rifini bering va misollar keltiring.
2. Qat'iy qavariq funksiya ta'rifini bering va misollar keltiring.
3. Kuchli qavariq funksiya ta'rifini bering va misollar keltiring.
4. Funksiyaning qavariqlik kriteriylaridan Yensen tengsizligini keltiring.
5. Silliqlik funksiyalarning qavariqlik kriteriysi yozilsin.
6. Funksiyaning grafikusti ta'rifini bering va misolda namoyish qiling.
7. Funksiyaning sath to'plami ta'rifini bering va misolda namoyish qiling.
8. Kuchli qavariq funksiya sath to'plamining chegaralanganligi haqidagi teoremani keltiring.
9. Quyidan yarim uzluksiz qavariq funksiya sath to'plamining chegaralanganligi haqidagi teoremani keltiring.

Mustaqil ish topshiriqlari.

1. Agar $Q \subset R^n$ qavariq to'plam bo'lsa, $\rho_Q(x) = \inf_{q \in Q} \|x - q\|$ funksiyaning R^n da qavariqligini ko'rsating.
2. Agar $f(x)$ - qavariq funksiya bo'lsa, $|f(x)|$ ham qavariq bo'ladimi?
3. $f(x) = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}$ funksiyaning R^2 da qavariqligini tekshiring.
4. $\varphi(t) - [a, b]$ kesmada monoton kamaymaydigan (o'suvchi) funksiya bo'lsin. $f(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$ funksiyaning $[a, b]$ da qavariq (qat'iy qavariq) ekanligini ko'rsating.
5. $f(x)$ - qavariq $Q \subset R^n$ to'plamda differensiallanuvchi qat'iy qavariq funksiya bo'lsin. U holda ixtiyoriy $a \in R^n$ uchun $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = a$ tenglama bittadan ko'p yechimga ega bo'lmashligini isbotlang.

6. Agar $f_1(x), f_2(x)$ – qavariq funksiyalar bo‘lsa, ularning ko‘paytmasi ham qavariq bo‘ladimi?

7. $f_k(x), k=1,2,\dots$ funksiyalar qavariq $Q \subset R^n$ to‘plamda qavariq bo‘lsin va $\forall x \in Q$ uchun $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ limit mavjud bo‘lsin, yoki $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$ qator yaqinlashsin. $f(x)$ funksiyaning Q to‘plamda qavariq ekanligini ko‘rsating.

8. Agar $\varphi(x,t)$ funksiya har bir $t \in [0,1]$ da x bo‘yicha $Q \subset R^n$ da qavariq, har bir $x \in Q$ da t bo‘yicha $[0,1]$ da integrallanuvchi, $\alpha(t), t \in [0,1]$ manfiymas integrallanuvchi funksiya bo‘lsa, $f(x) = \int_0^1 \varphi(x,t) \alpha(t) dt$ funksiyaning qavariqligini ko‘rsating.

9. $\varphi(x)$ – Q to‘plamda qavariq funksiya bo‘lsa, a) $f(x) = e^{\varphi(x)}, x \in Q$ – qavariq;
b) $f(x) = 1/\varphi(x), x \in Q_0 = \{x \in Q: \varphi(x) < 0\}$ to‘plamda botiq ekanligini ko‘rsating.

5 – ma’ruza

Qavariq funksiyalarning ekstremumlari

Reja:

- 5.1. Qavariq funksiyaning uzluksizligi
- 5.2. Qavariq funksiyaning yo‘nalish bo‘yicha hosilasi.
- 5.3. Qavariq funksiyaning minimumi.
- 5.4. Qavariq funksiyaning maksimumi.

Tayanch iboralar: *qavariq to‘plam, qavariq funksiya, uzluksizlik, yo‘nalish bo‘yicha hosila, local minimum, global minimum, qat’iy qavariq funksiya, kuchli qavariq funksiya, kvaziqavariq funksiya, subgradiyent, subdifferensial.*

Adabiyotlar.

Adabiyotlar.

1. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
2. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Методы оптимизации. Изд. 2-е, Минск, изд-во БГУ, 1981(ўзбек тилига таржима қилинган ва 1995 йилда “Ўзбекистон” нашриётида нашр этилган).
3. **Алексеев В.М, Галеев Э.М, Тихомиров В.М.** Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 2005.
4. **Ашманов С.А., Тимохов А.В.** Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.
5. **Исраилов И., Отакулов С.** Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш усуллари курсидан маърузалар. Самарқанд, СамДУ нашри, 1-қисм, 1999.
6. **Исраилов И. ва 6.** Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш фанидан амалий машғулотлар. Ўқув-услубий қўлланма, 1-қисм, Самарқанд, 1987.

5.1. Qavariq funksiyaning uzluksizligi.

1-teorema. Qavariq $Q \subset R^n$ to‘plamda qavariq $f(x)$ funksiya Q to‘plamning barcha ichki nuqtalarida uzluksiz bo‘ladi.

Δ Dastlab $\theta \in \text{int } Q$, $f(\theta) = 0$ deb faraz qilib, teoremani $x^* = \theta$ nuqta uchun isbotlaymiz ($\theta = (0, 0, \dots, 0)$).

$\theta \in \text{int } Q$ bo‘lgani uchun, shunday kichik $r > 0$ son topiladiki, $P = \{x \in R^n : -r \leq x_j \leq r, j = \overline{1, n}\}$ giperkub ($x^* = \theta$ nuqtaning atrofi) Q da yotadi. $x^1, \dots, x^m (m = 2^n) - P$ ning uchlari, ya’ni $(\pm r, \dots, \pm r)$ ko‘rinishdagi nuqtalar bo‘lsin. $\alpha = \max_{1 \leq i \leq m} f(x^i)$ deb olamiz. Qavariq to‘plamlarning xossalariga ko‘ra, qavariq ko‘pyoqli R ning ixtiyoriy x nuqtasini $x^1, \dots, x^m$ nuqtalarning

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m; \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$

qavariq kombinasiyasi kabi yozish mumkin. U holda

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x^i) \leq \alpha \sum_{i=1}^m \lambda_i = \alpha$$

munosabatga kelamiz. Shunday qilib, $f(x)$ funksiya P da yuqoridan chegaralangandir. Endi $\forall x \in (0,1)$ son uchun $x^* = \theta$ nuqtaning $S_\varepsilon = \varepsilon P$ ko'rinishdagi atrofni qaraymiz. $\forall \tilde{x} \in S_\varepsilon$ nuqtani olamiz. $f(x)$ funksiyaning qavariqligidan, $f(\theta) = 0$ shartdan va $\pm \frac{\tilde{x}}{\varepsilon} \in P$ nuqtalar uchun (4) tengsizlikdan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f(\tilde{x}) = f\left(\varepsilon \frac{\tilde{x}}{\varepsilon} + (1-\varepsilon)\theta\right) \leq \varepsilon f\left(\frac{\tilde{x}}{\varepsilon}\right) + (1-\varepsilon)f(\theta) \leq \varepsilon \alpha,$$

$$0 = f(\theta) = f\left(\frac{1}{1+\varepsilon} \tilde{x} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \left(-\frac{\tilde{x}}{\varepsilon}\right)\right) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} f(\tilde{x}) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} f\left(-\frac{\tilde{x}}{\varepsilon}\right) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} f(\tilde{x}) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \alpha.$$

Bu yerdan, $|f(\tilde{x})| \leq \alpha \varepsilon$ ni olamiz. Demak, $f(x)$ funksiya $x^* = \theta$ nuqtada uzluksizdir.

Umumiy hol yuqoridagi qaralgan holga keltiriladi. Chunki $f(x)$ funksiyaning $x^* \in \text{int} Q$ nuqtadagi uzluksizligi $\Phi(y) = f(y + x^*) - f(x^*)$ ($\Phi(\theta) = 0$) funksiyaning $y^* = \theta \in \text{int } G$ ($G = Q - x^*$) nuqtadagi uzluksizligiga ekvivalentdir. Δ

5.2. Qavariq funksiyaning yo'nalish bo'yicha hosilasi.

5.1-ta'rif. $f(x)$, $x \in Q \subset R^n$ funksiya berilgan, $x^* \in Q$, $h \in R^n$, $h \neq \theta$ bo'lsin. Agar

$$f'(x^*; h) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{f(x^* + \alpha h) - f(x^*)}{\alpha} \quad (5.1)$$

chekli limit mavjud bo'lsa, $f'(x^*; h)$ - $f(x)$ funksiyaning x^* nuqtadagi h yo'nalish bo'yicha hosilasi deyiladi.

Agar ixtiyoriy $h \in R^n$ uchun (5.1) formula bo'yicha $f'(x^*; h)$ aniqlangan bo'lsa, $h \rightarrow f'(x^*; h)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning x^* nuqtadagi yo'nalishlar bo'yicha hosilasi deyiladi.

Yo'nalishlar bo'yicha hosilasiga ega funksiyaning yo'nalishlar bo'yicha differensiallanuvchi funksiya deb ham ataymiz.

5.1) formulaga ko'ra ixtiyoriy $\lambda > 0$ uchun $f'(x^*; \lambda h) = \lambda f'(x^*; h)$, ya'ni $f'(x^*; h)$ - h ga nisbatan musbat bir jinsli funksiyadir.

Funksiyaning yo'nalish bo'yicha differensiallanuvchiligi talabi differensiallanuvchilikka nisbatan ancha kuchsiz talabdir.

1-misol.

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{agar } x_1 \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha hosilaga ekanligini ko'rsating.

Δ Bu funksiya $x^* = (x_1, x_2) = \theta = (0, 0)$ nuqtada ixtiyoriy $h = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, yo'nalish bo'yicha hosilaga ega. Haqiqatan ham,

$$\frac{f(x^* + \alpha h) - f(x^*)}{\alpha} = \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{\alpha^2 \cos^2 \varphi + \sin \varphi}, \alpha > 0.$$

Bu yerdan,

$$f'(x^*, h) = \begin{cases} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi}, & \text{agar } \sin \varphi \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } \sin \varphi = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Ammo $f(x)$ funksiya $x^* = \theta$ nuqtada hatto uzluksiz ham emas. Haqiqatdan ham, agar $x = (x_1, x_2)$ nuqtani $x_1 = x_1^2$ parabola bo'yicha $x^* = \theta$ nuqtaga intiltirsak,

$$f(x_1, x_1^2) \equiv 1/2, \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_1^2) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0) = 0. \blacktriangle$$

2-teorema. Agar $f(x)$, $x \in R^n$ funksiya $x^* \in R^n$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u shu nuqtada $\forall h \in R^n$ yo'nalish bo'yicha differensiallanuvchi bo'ladi va

$$f'(x^*, h) = h^T \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} \quad (5.2)$$

tenglik bajariladi.

Δ $h \in R^n$, $\alpha > 0$. bo'lsin. $f(x)$ funksiyaning x^* nuqtada differensiallanuvchiligiga asosan,

$$f(x^* + \alpha h) = f(x^*) + \alpha h^T \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} + o(\alpha), \quad o(\alpha)/\alpha \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0+.$$

U holda (5.1) formuladan

$$f(x^*, h) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{f(x^* + \alpha h)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{\alpha h^T \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} + o(\alpha)}{\alpha} = h^T \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} + \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = h^T \frac{\partial f(x^*)}{\partial x}, \text{ ya'ni (5.2) tenglikka ega bo'lamiz. } \blacktriangle$$

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya qavariq $Q \subset R^n$ to'plamda qavariq bo'lsa, ixtiyoriy $x^* \in riQ$ va $h \in LinQ$ ($LinQ - affQ$ ga parallel qism fazo) uchun (5.1)

formula bo'yicha chekli $f'(x^*; h)$ mavjud va

$$f'(x^*; \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) \leq \lambda_1 f'(x^*; h_1) + \lambda_2 f'(x^*; h_2) \quad \forall h_1 + h_2 \in LinQ, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0. \quad (5.3)$$

munosabat o'rinalidir.

Δ Ixtiyoriy $x^* \in riQ$, $h \in LinQ$ uchun

$$A = \{\alpha > 0 : x^* + \alpha h \in Q\}, \quad B = \{\alpha < 0 : x^* + \alpha h \in Q\} \quad (5.4)$$

to'plamlarni qaraymiz. $x^* \in riQ$ bo'lgani uchun nisbiy ichki nuqta ta'rifiga ko'ra biror $\varepsilon > 0$ da $K(x^*, \varepsilon) \cap affQ \subset Q$ bo'ladi (bu yerda $K(x^*, \varepsilon) = \{x \in R^n : \|x - x^*\| < \varepsilon\}$). $h \in LinQ = affQ - x^*$ bo'lgani uchun barcha $\alpha \in R^1$ da $\alpha h \in LinQ$, yoki $x^* + \alpha h \in affQ$ bo'ladi. Natijada modul bo'yicha yetarlicha kichik $\alpha \in R^1$ uchun $x^* + \alpha h \in K(x^*, \varepsilon) \cap affQ \subset Q$ bajariladi.

Shunday qilib, (5.4) formula bo'yicha aniqlanuvchi A va B to'plamlar bo'sh emas.

Ixtiyoriy $\alpha_1 \in A$, $\alpha_2 \in A$, $\alpha_1 < \alpha_2$ sonlarni olamiz. $f(x)$ funksiyaning qavariqligiga asosan $f(x^* + \alpha_1 h) = f\left(\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\right)$

Ixtiyoriy $\alpha \in A$, $\alpha^0 \in B$ uchun yana $f(x)$ funksiyaning qavariqligidan foydalanib,

$$f(x^*) = f\left(\frac{\alpha}{\alpha - \alpha^0}(x^* + \alpha^0 h) + \frac{-\alpha^0}{\alpha - \alpha^0}(x^* + \alpha h)\right) \leq \frac{\alpha}{\alpha - \alpha^0} f(x^* + \alpha^0 h) - \frac{-\alpha^0}{\alpha - \alpha^0} f(x^* + \alpha h)$$

tengsizlikni olamiz. Bu yerdan: $\varphi(\alpha) \geq \varphi(\alpha^0)$, $\forall \alpha \in A$, ya'ni $\varphi(\alpha)$ funksiya A to'plamda quyidan chegaranlangandir. U vaqtda monoton funksiyaning limiti haqidagi analizdan ma'lum teoremaga asosan, chekli $f'(x^*, h) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \varphi(\alpha) = \inf_{\alpha > 0} \varphi(\alpha)$ limit mavjud.

Endi (5.3) munosabatni isbotlaymiz. Ixtiyoriy $\lambda \geq 0$ uchun

$$f'(x^*; \lambda h) = \lambda f'(x^*; h)$$

bo'lganligidan,

$$f'(x^*; h_1 + h_2) \leq f'(x^*; h_1) + f'(x^*; h_2), h_1, h_2 \in \text{Lin} Q$$

tengsizlikni isbotlash yetarli.

Buning uchun, (5.1) formuladan va qavariq funksiyaning ta'rifidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} f'(x^*; h_1 + h_2) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{f(x^* + \alpha(h_1 + h_2)) - f(x^*)}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{f\left(\frac{x^* + 2\alpha h_1}{2} + \frac{x^* + 2\alpha h_2}{2}\right) - f(x^*)}{\alpha} \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{f(x^* + 2\alpha h_1) - f(x^*)}{2\alpha} + \\ &+ \frac{f(x^* + 2\alpha h_2) - f(x^*)}{2\alpha} = f'(x^*; h_1) + f'(x^*; h_2). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

1-natija. Agar $\text{int} Q \neq \emptyset$ bo'lsa, qavariq $f(x)$ funksiya qavariq Q to'plamning har bir ichki x^* nuqtasida yo'nalishlar bo'yicha differensiallanuvchi va yo'nalishlar bo'yicha hosila $h \rightarrow f'(x^*; h)$ R^n da qavariq funksiya bo'ladi.

2-natija. Qavariq $f(x)$, $x \in [a, b]$, funksiya har bir $x \in (a, b)$ nuqtada chekli chap $f'(x^* - 0)$ va o'ng $f'(x^* + 0)$ hosilalarga ega.

5.3. Qavariq funksiyaning minimumi.

Qavariq $Q \subset R^n$ to'plamda aniqlangan qavariq $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

4-teorema. Qavariq $f(x)$, $x \in Q$ funksiyaning qavariq Q to'plamdagi har bir lokal minimum nuqtasi uning global minimum nuqtasi ham bo'ladi.

Δ $x^* \in Q$ lokal minimum nuqtasi bo'lsin, ammo global minimum nuqtasi bo'lmasin, deb faraz qilamiz. U vaqtda shunday $\bar{x} \in Q$ nuqta mavjudki, $f(\bar{x}) < f(x^*)$ bo'ladi. Ixtiyoriy $\lambda \in (0, 1)$ uchun $z = \lambda \bar{x} + (1 - \lambda)x^* = x^* + \lambda(\bar{x} - x^*)$ nuqtani qaraymiz. Q -qavariq to'plam bo'lgani uchun, $z \in Q$. $f(x)$ funksiyaning qavariqligidan foydalanib,

$$f(z) \leq \lambda f(\bar{x}) + (1 - \lambda)f(x^*) < \lambda f(x^*) + (1 - \lambda)f(x^*) = f(x^*),$$

ya'ni

$$f(z) < f(x^*) \quad (5.5)$$

tengsizlikni olamiz.

x^* – lokal minimum nuqtasi bo'lgani uchun, shunday $\varepsilon^* > 0$ mavjudki,

$$f(x) \geq f(x^*), \quad \forall x \in Q \cap K(x^*, \varepsilon^*), \quad (5.6)$$

bu yerda $K(x^*, \varepsilon^*) = \{x \in R^n : \|x - x^*\| < \varepsilon^*\}$. $0 < \lambda < \min\{1, \varepsilon^* / \|\bar{x} - x^*\|\}$ bo'lsin. U holda $z = x^* + \lambda(\bar{x} - x^*) \in Q \cap K(x^*, \varepsilon^*)$ va demak, (5.6) ga ko'ra, $f(x) \geq f(x^*)$. Bu esa, (5.5) ga ziddir. Olingan qarama-qarshilik teoremani isbotlaydi. ▲

5-teorema. Qavariq $f(x)$ funksiyaning qavariq $Q \subset R^n$ to'plamdagi minimum nuqtalari to'plami

$$Q_*(f) = \left\{ x_* \in R^n : f(x_*) = \min_{x \in Q} f(x) \right\}$$

qavariq to'plam bo'ladi. Agar $f(x)$ – qat'iy qavariq funksiya bo'lsa, uning qavariq Q to'plamdagi minimum nuqtasi yagonadir.

Δ $f(x) - Q$ da qavariq funksiya $Q_*(f) \neq \emptyset$ bo'lsin. $x_* \in Q_*(f)$, $y_* \in Q_*(f)$ nuqta-larni olamiz. U holda $f(x_*) = f(y_*) = \min_{x \in Q} f(x)$. $\tilde{x} = \lambda x_* + (1 - \lambda)y_*$ ($\lambda \in [0, 1]$) uchun $f(x)$

funksiyaning qavariqligidan foydalanib,

$$f(x_*) \leq f(\tilde{x}) = f(\lambda x_* + (1 - \lambda)y_*) \leq \lambda f(x_*) + (1 - \lambda)f(y_*) = f(x_*)$$

munosabatga ega bo'lamiz. Demak, $f(\tilde{x}) = f(x_*) = \min_{x \in Q} f(x)$, ya'ni $\tilde{x} \in Q_*(f)$. Bu esa,

ta'rifga ko'ra, $Q_*(f)$ to'plamning qavariqligini ko'rsatadi.

Endi $f(x)$ – qat'iy qavariq funksiya bo'lsin, ammo uning minimum nuqtasi yagona bo'lmasin, deb faraz qilaylik:

$$f(x^1) = \min_{x \in Q} f(x), \quad f(x^2) = \min_{x \in Q} f(x), \quad x^1 \neq x^2. \quad (5.7)$$

$x(\lambda) = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ ($\lambda \in (0, 1)$) nuqtani qaraymiz. $f(x)$ funksiyaning qat'iy qavariqligi ta'rifiga ko'ra,

$$f(x(\lambda)) = f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) < \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2).$$

Bu yerdan (5.7) ga ko'ra, $f(x(\lambda)) < \min_{x \in Q} f(x)$ ga ega bo'lamiz. Ammo, $x(\lambda) \in Q$ bo'lgani uchun, $f(x(\lambda)) \geq \min_{x \in Q} f(x)$. Olingan qarama-qarshilik ko'rsatadiki, agar $f(x)$ –

qat'iy qavariq va $Q_*(f) \neq \emptyset$ bo'lsa, $Q_*(f)$ faqat yagona elementlidir. ▲

Qavariq (hatto qat'iy qavariq) funksiyaning minimum nuqtalari to'plami bo'sh bo'lishi mumkin. Masalan, $f(x) = e^{-x}$ funksiya R^1 da qat'iy qavariq, ammo minimumga ega emas.

Kuchli qavariq funksiyalar uchun esa, quyidagi teorema o'rinalidir.

6-teorema. Qavariq yopiq $Q \subset R^n$ to'plamda quyidan yarim uzluksiz kuchli qavariq $f(x)$ funksiyaning yagona minimum nuqtasi mavjud.

Δ Kuchli qavariq funksiyalar sath to'plamlarining chegaralanganligi haqidagi teoremaga asosan (4-ma'ruzaga q.), ixtiyoriy $y \in Q$ uchun

$$Q_f^c = \{x \in Q : f(x) \leq f(y)\} \quad (c = f(y))$$

to'plam chegaralangandir. U vaqtda Veyershtrass teoremasining umumlashmasiga ko'ra, $f(x)$ funksiyaning Q to'plamda global minimum nuqtasining mavjudligi kelib chiqadi. Minimum nuqtasining yagonaligi 5-teoremadan kelib chiqadi.

5.4. Qavariq funksiyaning maksimumi.

Qavariq funksiyaning qavariq to'plamdagi maksimumini topish masalasi minimumni topish masalasidan muhim farq qiladi. Xususan, qavariq funksiya qavariq to'plamda global maksimumdan tashqari, bir necha lokal maksimumlarga ham ega bo'lishi mumkin. Masalan, $f(x) = \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{4}\right)^2$ funksiyaning $Q = \{x = (x_1, x_2) : x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ to'plamdagi global maksimumi $x^0 = (0, 1)$ nuqtadadir. Shu bilan birga, $x^1 = (0, 0)$ va $x^2 = (1, 0)$ nuqtalar funksiyaning lokal maksimum nuqtalaridir.

7-teorema. Agar qavariq $Q \subset R^n$ to'plamda qavariq $f(x)$ funksiya biror $z \in \text{ri}Q$ nuqtada global maksimumga erishsa, $f(x)$ funksiya Q da o'zgarmas bo'ladi ($f(x) = \text{const}, x \in Q$).

$\Delta z \in \text{ri}Q$ - $f(x)$ funksiyaning Q to'plamdagi global maksimum nuqtasi bo'lsin. Ixtiyoriy $x \in Q, x \neq z$ nuqtani qaraymiz. $z \in \text{ri}Q$ bo'lgani uchun, shunday $\lambda \in (0, 1)$ va $y \in Q$ mavjudki, $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ bo'ladi. U holda $f(x)$ funksiyaning qavariqligiga asosan,

$$f(z) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

munosabat bajariladi. z nuqtaning aniqlanishiga ko'ra esa,

$$f(x) \leq f(z), f(y) \leq f(z).$$

Demak, agar $f(x) < f(z)$ bo'lsa, qarama-qarshilikni olamiz. Shunday qilib, $f(x) = f(z) = \text{const}, x \in Q$. Δ

Isbotlangan teorema ko'rsatadiki, o'zgarmasdan farqli qavariq funksiya qavariq to'plamning faqat nisbiy chegaraviy nuqtasidagina global maksimumga erishishi mumkin.

O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Funksiyaning uzluksizligi ta'riflarini keltiring.
2. Qavariq funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremani yozing.
3. Qavariq funksiyaning yo'nalish bo'yicha hosilasi ta'rifini keltiring.
4. Funksiyaning yo'nalish bo'yicha hosilasi hamda hosilasi orasidagi bog'lanishlarni izohlang.
5. Qavariq funksiyaning lokal minimumi uning global minimumi bo'lishi

haqidagi teoremani keltiring.

6. Qat'iy qavariq funksiyaning minimumi haqidagi teoremani keltiring.

7. Kuchli qavariq funksiyaning minimumi haqidagi teoremani keltiring.

Mustaqil ish topshiriqlari.

1. $f(x)$ - qavariq $Q \subset R^n$ to'plamda differentsiallanuvchi qat'iy qavariq funksiya bo'lsin. U holda ixtiyoriy $a \in R^n$ uchun $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = a$ tenglama bittadan ko'p yechimga ega bo'lmashligini isbotlang.

2. Agar $f_1(x), f_2(x)$ - qavariq funksiyalar bo'lsa, ularning ko'paytmasi ham qavariq bo'ladimi?

3. $f_k(x), k=1,2,\dots$ funksiyalar qavariq $Q \subset R^n$ to'plamda qavariq bo'lsin va $\forall x \in Q$ uchun $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ limit mavjud bo'lsin, yoki $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$ qator yaqinlashsin. $f(x)$ funksiyaning Q to'plamda qavariq ekanligini ko'rsating.

4. Agar $\varphi(x,t)$ funksiya har bir $t \in [0,1]$ da x bo'yicha $Q \subset R^n$ da qavariq, har bir $x \in Q$ da t bo'yicha $[0,1]$ da integrallanuvchi, $\alpha(t), t \in [0,1]$ manfiymas integral-lanuvchi funksiya bo'lsa, $f(x) = \int_0^1 \varphi(x,t) \alpha(t) dt$ funksiyaning qavariqligini ko'rsating.

5. $\varphi(x)$ - Q to'plamda qavariq funksiya bo'lsa, a) $f(x) = e^{\varphi(x)}, x \in Q$ - qavariq; b) $f(x) = 1/\varphi(x), x \in Q_0 = \{x \in Q: \varphi(x) < 0\}$ to'plamda botiq ekanligini ko'rsating.

6. Quyidagi funksiyalarning subdifferensial va yo'nalish bo'yicha hosilasini toping:

a) $f(x) = |x-1| + |x+1|, x \in R^1$; b) $f(x) = \max_{i=1,2,\dots,m} (a_i^T x - b_i), x \in R^n$;

c) $f(x) = \sum_{i=1}^m |a_i^T x - b_i|, x \in R^n$; d) $f(x) = e^{\|x\|}, x \in R^n$.

7. $F(x) - R^n$ da yuqoridan chegaralangan qavariq funksiya bo'lsin. U holda, $F(x) = \text{const}, x \in R^n$ ekanligini ko'rsating.

8. $f(x)$ - Q to'plamda $\mu > 0$ o'zgarmasli kuchli qavariq funksiya bo'lsin. $f(x)$ ning Q to'plamdagi $x^* \in Q$ minimum nuqtasi uchun quyidagi baholar o'rinli ekanligini ko'rsating:

a) $\mu \|x - x^*\|^2 \leq f(x) - f(x^*), \forall x \in Q$;

b) agar $f(x) - x \in Q$ nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa,

$$\mu \|x - x^*\| \leq \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|, 2\mu (f(x) - f(x^*)) \leq \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|^2.$$

9. $f(x)$ funksiya qavariq $Q \subset R^n$ to'plamda kvaziqavariq, ya'ni $\forall c = \text{const}$ uchun $Q_f^c = \{x \in Q: f(x) \leq c\}$ - qavariq to'plam bo'lsin. Quyidagi tasdiqlarning to'g'riligini ko'rsating:

a) $f(x)$ funksiyaning kvaziqavariqligi

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \max\{f(x^1), f(x^2)\}, \forall x^1, x^2 \in Q, \lambda \in [0,1]$$

munosabatlarning bajarilishiga teng kuchlidir;

b) kvaziqavariq funksiyaning minimum nuqtalari to'plami qavariqdir.

c) agar $f(x)$ - qat'iy kvaziqavariq (ya'ni $f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) < \max\{f(x^1), f(x^2)\}$, $x^1 \neq x^2, x^1, x^2 \in Q, \lambda \in (0,1)$) bo'lsa, uning lokal minimumi global minimum ham bo'ladi va minimum nuqtasi yagonadir.

6 – ma'ruza

Shartsiz ekstremumni izlashning sonli usullarini qurish tamoyillari.

Reja:

1. Kirish.

2. Minimallashtiruvchi va yaqinlashuvchi ketma-ketliklar.

3. Ekstremumni izlash sonli usullarining tiplari.

4. Ketma-ketlikning yaqinlashishi tartibi.

Tayanch iboralar: *shartsiz ekstremum masalasi, funksiyaning aniq quyi chegarasi, ketma-*

ketlik, minimallashtiruvchi ketma-ketlik, yaqinlashuvchi ketma-ketlik, sonli usullar, sonli usul-larning tiplari, nolinchi tartibli usullar, birinchi tartibli usullar, ikkinchi tartibli usullar, itera-tsiya, iteratsiya qadami, tushish yo'nalishi, eng tez tushish yo'nalishi, kvadratik yaqinlashish, chiziqli yaqinlashish, o'ta chiziqli yaqinlashish.

Adabiyotlar:

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.

2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Изд. 2-е, Минск, изд-во БГУ, 1981(ўзбек тилига таржима қилинган ва 1995 йилда “Ўзбекистон” нашриётида нашр этилган).

3. Алексеев В.М, Галеев Э.М, Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 2005.

4. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.

5. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высш.шк. 2005.

6. Исраилов И., Отакулов С. Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш усуллари курсидан маърузалар. Самарқанд, СамДУ нашри, 1-қисм, 1999.

7. Исраилов И. ва 6. Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш фанидан амалий машғулотлар. Ўқув-услубий қўлланма, 2-қисм, Самарқанд, 1988.

6.1. Kirish

Biz 1- va 2- ma'ruzalarda ko'rib chiqqan shartsiz ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari, chegaralangan sondagi, ulardagi bu shartlar yordamida olinadigan munosabatlar analitik yechimga ega bo'ladigan, masalalarni yechishda samarali bo'ladi. Lekin ko'p amaliy masalalarda ular quyidagi sabablarga ko'ra tavsiya qilinmaydi:

1. $f(x)$ maqsad funksiyasi ikkinchi tartibgacha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'la olmasligi.
2. Birinchi tartibli zaruriy shartdan foydalanilganda hosil bo'ladigan, umumiy holda, n ta nochiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning o'zi dastlabki masalani yechishdan murakkab bo'lishi.
3. Masalaning maqsad funksiyasi oshkor ravishda berilmagan bo'lib, faqat uning qiymati taqribiy hisoblanishi mumkinligi haqidagi ma'lumot berilganligi.

Optimallashtirish sonli usullarining ko'pchiligi iteratsion usullar sinfiga mansub bo'lib, ularda ma'lum bir qonuniyatga rioya qilinib, jarayonni tugatish kriteriysi ham ko'rsatilgan, nuqtalar ketma-ketligi hosil qilinadi. Bunda berilgan x^0 boshlang'ich nuqtadan boshlab $x^0, x^1, x^2, \dots$ nuqtalar ketma-ketligi hosil qilinadi. x^k nuqtadan x^{k+1} nuqtaga o'tish iteratsiya deyiladi.

Aniqlik uchun, ushbu

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x) \quad (6.1)$$

shartsiz minimumni topish masalasini qaraymiz.

(6.1) masalani sonli yechish, odatda, quyidagi

$$f(x^{k+1}) < f(x^k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.2)$$

xossaga ega bo'lgan $\{x^k\}$ nuqtalar ketma-ketligini qurish bilan bog'liqdir.

$\{x^k\}$ ketma-ketlikni qurishning umumiy qoidasi ushbu

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.3)$$

Bunda x^0 — izlashning boshlang'ich nuqtasi, d^k — x^k nuqtadan x^{k+1} nuqtaga o'tishning mumkin bo'lgan yo'nalishi bo'lib, u (6.2) shartning bajarilishini ta'minlaydi, t_k — qadamning kattaligi (miqdori).

x^0 boshlang'ich nuqta masalaning fizik ma'nosi hamda ekstremum nuqtasi-ning joylashishi haqidagi oldindan berilgan ma'lumotga tayangan holda tanlanadi.

Mumkin bo'lgan tushish yo'nalishi d^k ushbu, $f(x)$ funksiyaning kamayishini ta'minlaydigan,

$$(\nabla f(x^k), d^k) < 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6.4)$$

shartni qanoatlantirishi zarur. Mumkin bo'lgan tushish yo'nalishining misoli – antigradiyent vektorining yo'nalishidir: $d^k = -\nabla f(x^k)$.

$t_k > 0$ qadamning kattaligi yoki (6.2) shartdan, yoki funksiyaning tushish yo'nalishi bo'ylab minimum shartidan tanlanadi:

$$f(x^k + t_k d^k) \rightarrow \min_{t_k} \quad (6.5)$$

t_k qadamni (6.5) shartga ko'ra tanlash d^k yo'nalish bo'yicha eng tez tushishni ta'minlaydi.

6.2. Minimallashtiruvchi va yaqinlashuvchi ketma-ketliklar.

1-ta'rif. Agar $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f_*$, ya'ni ketma-ketlik funksiyaning aniq quyi chegarasiga yaqinlashsa, $f_* = \inf_{x \in R^n} f(x)$, $\{x^k\}$ ketma-ketlik *minimallashtiruvchi ketma-ketlik* deyiladi.

2-ta'rif. Agar $k \rightarrow \infty$ da $\|x^k - x^*\| \rightarrow 0$ bo'lsa, $\{x^k\}$ ketma-ketlik x^* minimum nuqtasiga yaqinlashuvchi deyiladi.

$\{x^k\}$ ketma-ketlikning, mumkin bo'lgan d^k yo'nalish va t_k qadamning (6.2) va (6.5) shartlardan tanlanishida, yaqinlashuvchi bo'lishi, $f(x)$ funksiyaning xarakteri hamda x^0 boshlang'ich nuqtaning tanlanishiga bog'liq bo'ladi.

1- misol. 1- va 2- ta'riflar bo'yicha berilgan ketma-ketliklarni sinflang:

a) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$ funksiya uchun $\{x^k\} = k$ ketma-ketlikni;

b) $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ funksiya uchun $x^{k+1} = x^k - \frac{1}{2} \nabla f(x^k)$ qoida bo'yicha berilgan $\{x^k\}$ ketma-ketlikni.

□ 1- va 2- ta'riflardan foydalanamiz.

a) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$ funksiya uchun $\{x^k\} = k$, $k = 1, 2, \dots$, ketma-ketlik minimallashtiruvchi ketma-ketlikdan iborat, chunki $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = 0 = f_*$, lekin u $x^* = 0$ minimum nuqtasiga yaqinlashmaydi;

b) $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ funksiya uchun $x^{k+1} = x^k - \frac{1}{2} \nabla f(x^k)$ ketma-ketlik faqat minimallashtiruvchigina bo'lib qolmasdan, u aniq quyi chegaraga erishiladigan, $f(x^*) = f_* = 0$, $x^* = (0, 0)^T$ nuqtaga yaqinlashuvchidir, chunki,

$$\nabla f(x^k) = (2x_1^k, 2x_2^k) \text{ va } (x_1^{k+1}, x_2^{k+1})^T = (x_1^k, x_2^k)^T - \frac{1}{2} (2x_1^k, 2x_2^k)^T. \blacksquare$$

6.3. Ekstremumni izlash sonli usullarining tiplari.

$f(x)$ funksiyaning tushish yo‘nalishi d^k va iteratsiya qadami t_k larni shakllantirishda foydalaniladigan xususiy hosilalarining eng yuqori tartibiga bog‘liq ravishda, (6.1) shartsiz ekstremum masalasini yechishning sonli usullarini uchta guruhga bo‘lish qabul qilingan.

1. Faqat $f(x)$ funksiyaning qiymatlari ma’lumotdan foydalaniladigan **nolinchi tartibli usullar**.

2. $f(x)$ funksiyaning birinchi tartibli hosilalari haqidagi ma’lumotdan foydalaniladigan **birinchi tartibli usullar**.

3. $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalari haqidagi ma’lumotdan foydalaniladigan **ikkinchi tartibli usullar**.

Usulning ishlash qobiliyati unga mos ketma-ketlikning yaqinlashuvini isbotlash bilan kafolatlanmaydi – yaqinlashishning ma’lum bir tezligi zarur bo‘ladi.

Shuni e’tirof etish kerakki, amaliyotda umumiy yaqinlashish nazariyasining natijalaridan ehtiyotkorlik bilan foydalanish kerak bo‘ladi. Masalan, algoritmlarni faqat ular hosil qilgan ketma-ketliklarning texnik yaqinlashish tezliklari kattaliklari bo‘yicha baholash mumkin emas, lekin bu tezliklar ma’lum bir darajada usulning samaradorligini ifodalasa ham, ularga erishish mumkin bo‘lgan shartlar juda kam hollarda amalga oshiriladi. Shuningdek, algoritmni, faqat uning yaqinlashish tezligi haqidagi teoremlar isbotlanmaganligi uchun, chetlab o‘tish mumkin emas: bunda usul sifatining pastligi, yoki isbotni amalga oshirish ancha qiyinchiliklarga olib kelishi kabilar muhimdir[30].

6.4. Ketma-ketlikning yaqinlashishi tartibi.

x^* nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x^k\}$ ketma-ketlikni qaraymiz. Bunda ketma-ketlikning elementlari har xil va x^k nuqtalarning birortasi ham x^* nuqta bilan ustma-ust tushmaydi, deb faraz qilinadi

Yaqinlasish tezligini baholashning eng samarali usullaridan biri, x^{k+1} va x^* nuqtalar orasidagi masofa bilan x^k va x^* nuqtalar orasidagi masofani taqqoslashdan iborat.

3-ta’rif. Agar r - ushbu

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|^r} < \infty. \quad (6.6)$$

munosabatni qanoatlantiruvchi maksimal (eng katta) son bo‘lsa, $\{x^k\}$ ketma-ketlik r tartibli yaqinlashuvchi deyiladi.

r miqdor $\{x^k\}$ ketma-ketlikning limitik xossalari vositasida aniqlanar ekan, u yaqinlashishning asimptotik tezligi deyiladi.

4-ta’rif. Agar $\{x^k\}$ kema-ketlik r tartibli yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda,

$$c = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|^r} \quad (6.7)$$

son x atoning asimptotik parametri deyiladi.

5-ta’rif. Agar $r=1$, $c < 1$ bo‘lsa, u holda, yaqinlashish –chiziqli; agar $r=2$ bo‘lsa, u holda yaqinlashish –kvadratik; $r > 1$ yoki $r=1$, $c=0$, bo‘lganda esa, yaqinlashish - o‘ta chiziqli deyiladi.

Chiziqli yaqinlashish geometrik progressiya tezligi bilan yaqinlashishning sinonimidan iborat.

2-misol. Ushbu

$$x^k = a^{(2^k)}, \quad k=0,1,2,\dots, \text{ bunda } 0 \leq a < 1,$$

ketma-ketlikning yaqinlashish tartibini aniqlang.

Bu ketma-ketlikning har bir hadi oldingisining kvadratiga teng bo‘lib, uning limiti nolga teng. U holda, 4-ta’rifga ko‘ra,

$$\frac{|x^{k+1} - 0|}{|x^k - 0|^r} = a,$$

shu sababli, $r=2$ va yaqinlashish – kvadratik ekan. Boshqacha aytganda, kvadratik yaqinlashish – har bir qadamda x^k ketma-ketlik to‘g‘ri raqamlarining soni ikki marta ortadi. Parametri $a=0,99$ bo‘lgan ketma-ketlikning dasnlabki 14 ta hadi 6.1-jadvalning ikkinchi ustunida keltirilgan. Shuni e’tirof etish kerakki, to‘g‘ri raqamlar sonining ikki marta ortishi birdan boshlanmasdan, aniqrog‘i, $k \geq 7$ dan boshlanar ekan. ■

6.1- jadval

k	x^k	y^k	z^k
0	0,99	2,2	
1	0,9801	1,4832397	1,0
2	0,96059601	1,2178833	0,25
3	0,92274469	1,1035775	0,03703704
4	0,85145777	1,0505130	0,00390625
5	0,72498033	1,0249453	0,00032
6	0,52559649	1,0123958	0,00002143
7	0,27625167	1,0061788	0,00000121
8	0,07631498	1,0030847	0,0000000596
9	0,00582398	1,0015411	0,0000000026
10	0,00003392	1,0007703	-
11	$0,11515 \cdot 10^{-8}$	1,0003851	-
12	$0,13236 \cdot 10^{-17}$	1,0001925	-
13	$0,17519 \cdot 10^{-36}$	1,0000963	-
14	$0,30692 \cdot 10^{-72}$	1,0000481	-

3-misol. Quyidagi ketma-ketliklarning yaqinlashish tartibi aniqlansin:

a) $y^k = a^{(2^k)}$, $k=0,1,\dots$, bunda $a>0$;

b) $\gamma^k = 1 + 2^{-k}$, $k = 0,1, \dots$.

□ 4.3-4.5- ta'riflardan foydalanamiz:

a) bu ketma-ketlikning har bir hadi oldingisidan olingan kvadrat ildizdan iborat. Uning limiti ixtiyoriy $a > 0$ uchun 1 ga teng, hamda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a^{2^{-(k+1)}} - 1}{a^{2^{-k}} - 1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{2^{-(k+1)}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Shu sababli, $r=1$ va yaqinlashish chiziqlidir. Bu ketma-ketlikning $a = 2.2$ bo'lgan holdagi dastlabki 14 ta hadi 4.1-jadvalning uchinchi ustunida keltirilgan.

b) $\{\gamma^k\}=\{2, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \dots\}$ ketma-ketlik $x^*=1$ nuqtaga yaqinlashadi, hamda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma^{k+1}-1}{\gamma^k-1} = \frac{1}{2}.$$

Shu sababli, $r=1$ va yaqinlashish chiziqli ekan. ■

4-misol. Ushbu

$$z^k = \frac{1}{k^k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

ketma-ketlikning yaqinlashish tartibi aniqlansin.

□ $\{z^k\}$ ketma-ketlikning limiti nolga teng va

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z^{k+1}-0}{z^k-0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k(1+\frac{1}{k})^{k+1}} = 0.$$

$r=1$ va $c=0$ bo'lganligidan, yaqinlashish o'ta chiziqlidir. Bu ketma-ketlikning dastlabki 14 ta hadi 6.1-jadvalning to'rtinchi ustunida keltirilgan. ■

6.1- izohlar.

1. Amaliyotda chiziqli yaqinlashish sekin bo'lishi, bir vaqtning o'zida kvadratik yoki o'ta chiziqli yaqinlashish unga qaraganda tez bo'lishi mumkin. Iteratsion jarayonning real o'zgarishi c o'zgarmasga bog'liq bo'ladi, masalan, $c = 0,001$ o'zgarmasli chiziqli yaqinlashish, ehtimol, to'la qanoatlantirishi, $c = 0,9$ o'zgarmasli chiziqli yaqinlashish esa, qanoatlantirmasligi mumkin.

2. Algoritmni taqqoslash jarayonida yaqinlashishning eng ko'p qo'llaniladigan kriteriylaridan biri, ularning kvadratik funksiyalarni samarali minimallashtirish qobiliyati hisoblanadi. Bu, kvadratik funksiyaning minimum nuqtasi yaqinida maqsad funksiyasining yetarli yaxshi approksimatsiyasi ekanligi bilan tushuntiriladi. Shunday qilib, kvadratik funksiyaning minimallashtirishda yaxshi natija bermaydigan algoritmning, joriy nuqta minimum nuqtasining atrofida joylashganda, umumiy nochiziqli funksiya holida muvaffaqiyatli foydalanilishi amri maholdir.

(6.1) masalani yechishning quyida bayon qilinadigan sonli usullari ikki o'zgaruvchili kvadratik funksiyalarni minimallashtirish bilan bog'liq misollarni yechish orqali namoyish qilinadi.

O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Shartsiz ekstremumga qo'yilgan masala qanday ifodalanadi?
2. Shartsiz ekstremumga qo'yilgan masalada birinchi tartibli zaruriy shartni keltiring.
3. Shartsiz ekstremumga qo'yilgan masalada ikkinchi tartibli zaruriy shartni keltiring.
4. Shartsiz ekstremumga qo'yilgan masalada ikkinchi tartibli yetarli shartni keltiring.
5. Funksiyaning aniq quyi chegarasi ta'rifini bering va misollar keltiring.
6. Funksiyaning minimallashtiruvchi ketma-ketlik ta'rifini bering va misol keltiring.
7. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik ta'rifini bering va misol keltiring.
8. r – tartib bilan yaqinlashuvchi ketma-ketlik ta'rifini bering va misol keltiring.
9. Xatoning asimptotik parametri ta'rifini bering.
10. Kvadratik yaqinlashishda xatoning asimptotik parametri nimaga teng?
11. Qanday ketma-ketlik o'ta chiziqli yaqinlashadi, deyiladi?

Mustaqil ish topshiriqlari.

1. $f(x) = 5x_1^2 - 15x_1 + x_2^2 - x_2 + 3x_3^2 + 6x_3 + 10$ funksiya uchun

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10x_1^k - 12 \\ 2x_2^k - 1 \\ 6x_3^k + 6 \end{pmatrix}$$

ketma-ketlik qaysi sinfga mansub ekanligini aniqlang.

Javob: ketma-ketlik minimallashtiruvchi va $x^* = (1, 5; 0, 5; -1)^T$ minimum nuqtasiga yaqinlashuvchidir.

2. $f(x) = 4x_1^2 + 16x_1 + 3x_2^2 - 18x_2 + x_3^2 - 4x_3 + 16$ funksiya uchun

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8x_1^k + 16 \\ 6x_2^k + 18 \\ 2x_3^k - 4 \end{pmatrix}$$

ketma-ketlik qaysi sinfga mansub ekanligini aniqlang.

Javob: ketma-ketlik minimallashtiruvchi va funksiyaning $x^* = (-2; -3; 2)^T$ minimum nuqtasiga yaqinlashuvchidir.

3. Ushbu

$$x^k = 1 + 3^{-k}, k=0,1,\dots,$$

ketma-ketlikning yaqinlashish tartibini aniqlang.

Javob: ketma-ketlik $x^* = 1$ nuqtaga, $c = 1/3$ bo'lganda, chiziqli yaqinlashadi.

4. Ushbu

$$x^k = 1 + 2^{-2^k}, k=0,1,\dots,$$

ketma-ketlikning yaqinlashish tartibini aniqlang.

Javob: ketma-ketlik $x^* = 1$ nuqtaga, $c = 1$ bo'lganda, kvadratik yaqinlashadi.

5. $f(x) = x^2 - 6x + 12$ funksiya uchun

$$x^k = -3 + \frac{2}{k+1}, k=0,1,\dots,$$

ketma-ketlik qaysi sinfga mansub ekanligini aniqlang.

Javob: ketma-ketlik minimallashtiruvchi va funksiyaning $x^* = -3$ minimum nuqtasiga yaqinlashuvchidir.

6. $f(x) = 4x^2 - 8x + 7$ funksiya uchun

$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{8} \nabla f(x^k), k=0,1,\dots$$

ketma-ketlik qaysi sinfga mansub ekanligini aniqlang.

Javob: ketma-ketlik minimallashtiruvchi va funksiyaning $x^* = 1$ minimum nuqtasiga yaqinlashuvchidir.

7. Ushbu

$$x_1^{k+1} = -\frac{1}{8}x_2^k + \frac{9}{8},$$

$$k=0,1,\dots$$

$$x_2^{k+1} = -\frac{1}{5}x_1^k + \frac{4}{5}$$

ketma-ketlik qaysi sinfga mansub ekanligini aniqlang.

Javob: ketma-ketlik $x^* = (1,1)^T$ nuqtaga yaqinlashuvchidir.

7 – ma’ruza

Bir o‘lchovli minimallashtirish usullari. Tekis izlash va intervalni teng ikkiga bo‘lish usullari.

Reja:

7.1. Masalaning qo‘yilishi va izlash strategiyasi.

7.1.1. Masalaning qo‘yilishi.

7.1.2. Izlash strategiyasi.

7.2. Tekis izlash usuli.

7.2.1. Masalaning qo‘yilishi

7.2.2. Izlash strategiyasi.

7.2.3. Algoritm.

7.2.4. Yaqinlashishi.

7.3. Intervalni teng ikkiga bo‘lish usuli.

7.3.1. Masalaning qo‘yilishi

7.3.2. Izlash strategiyasi.

7.3.3. Algoritm.

7.3.4. Yaqinlashishi.

Tayanch iboralar: shartsiz ekstremum masalasi, unimodal funksiya, passiv strategiya, ketma-ket strategiya, izlash strategiyasi bosqichlari, boshlang‘ich noaniqlik intervali, Svern algoritmi, kafolatli interval, noaniqlik intervalni nisbiy kichraytirish xarakteristikasi, tekis izlash usuli, tekis izlash usulining algoritmi, intervalni teng ikkiga bo‘lish usuli, intervalni teng ikkiga bo‘lish usulining algoritmi, yaqinlashish.

Adabiyotlar.

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.

2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Изд. 2-е, Минск, изд-во БГУ, 1981 (Ўзбек тилига таржима қилинган ва 1995 йилда “Ўзбекистон” нашриётида нашр этилган).

3. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 2005.

4. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.

5. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высш.шк. 2005.

6. Исраилов И., Отакулов С. Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш усуллари курсдан маърузалар. Самарқанд, СамДУ нашри, 1-қисм, 1999.

7. Исраилов И. ва б. Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш фанидан амалий машғулотлар. Ўқув-услубий қўлланма, 2-қисм, Самарқанд, 1988.

7.1. Masalaning qo‘yilishi va izlash strategiyasi.

7.1.1. Masalaning qo‘yilishi

Bir o‘zgaruvchili $f(x)$ funksiyaning shartsiz ekstremumini, ya’ni shunday $x^* \in R$ nuqtani topish talab qilinadiki, quyidagi

$$f(x^*) = \min_{x \in R} f(x)$$

munosabat bajarilsin.

Qo‘yilgan bir o‘lchovli minimallashtirish masalasi bizga matematik analiz kursidan ma’lum bo‘lgan shartsiz ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari yorda-mida yechilishi mumkin. Lekin

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

tenglama yechimini olish muammosi ancha qiyinchiliklarni keltirib chiqarishi mumkin.

Bundan tashqari, amaliy masalalarda $f(x)$ funksiya analitik ko‘rinishda berilmagan bo‘lishi

yoki ko‘pincha uning differentsiallanuvchi ekanligi noma’lum bo‘lishi ham mumkin. Shu sababli qo‘yilgan masalaning sonli yechimini olish dolzarb hisoblanadi.

Biz yuqorida berilgan masalani yechishning nolinchi tartibli sonli usullarini bayon qilamiz.

7.1 – i z o h l a r.

1. Bir o'lchovli minimallashtirish masalalarida minimum nuqtasi haqidagi dastlabki ma'lumot $L_0 = [a_0, b_0]$ boshlang'ich noaniqlik intervali yordamida beriladi. Bunda x^* nuqta L_0 intervalga tegishli, lekin uning aniq qiymati ma'lum emas, deb faraz qilinadi.

2. Ma'lum bir o'lchovli minimallashtirish usullarining ko'pchiligi *unimodal funksiyalar* sinfiga qo'llaniladi.

7.1- ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $[a_0, b_0]$ kesmadagi yagona x^* nuqtada minimumga erishsa va bunda x^* nuqtadan chapda bu funksiya qat'iy kamayuvchi, x^* nuqtadan o'ngda qat'iy o'suvchi bo'lsa, $f(x)$ funksiya $L_0 = [a_0, b_0]$ intervalda *unimodal* deyiladi.

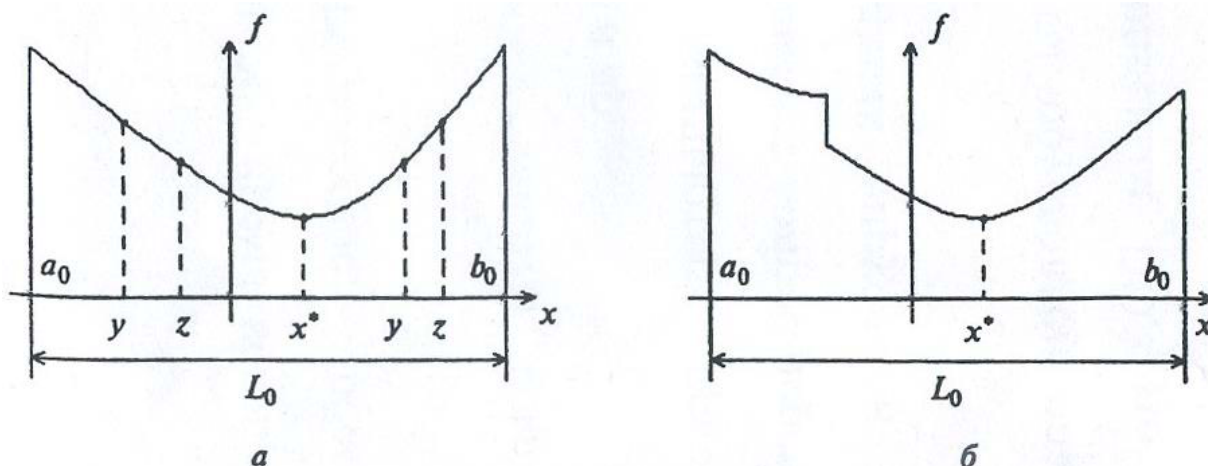


Рис. 5.1

Ta'rifga ko'ra, agar $a_0 \leq y < z < x^*$ bo'lsa, $f(y) > f(z)$ bo'ladi, $x^* < y < z \leq b_0$ bo'lganda esa, $f(y) < f(z)$ bo'ladi (7.1- a) chizma).

Uzluksiz qat'iy qavariq funksiya unimodal funksiyadan iborat. Lekin 5.1- ta'rifni uzluksiz va qavariq bo'lmagan funksiyalar ham qanoatlantiradi (7.1- b) chizma).

3. Bir o'lchovli minimallashtirish usullari birinchi va ikkinchi tartibli usullarda iteratsiya qadamining optimal qiymatini topishda keng qo'llaniladi. Bunda noaniqlik intervalining chap uchi, odatda, koordinatalar boshi, ya'ni $a_0 = 0$ bilan ustma-ust tushadi.

7.1.2. Izlash strategiyasi

Funksiyaning qiymatlari hisoblanadigan nuqtalarni tanlashning ikkita har xil tubdan farq qiladigan strategiyalari mavjud. Agar barcha nuqtalar oldindan berilsa, - bu *passiv (parallel)* strategiyadir. Agar bu nuqtalar, izlash jarayonida oldingi hisoblashlar natijalari bo'yicha, ketma-ket tanlansa, - bu *ketma-ket* strategiyadir. Passiv strategiya, masalan, *tekis izlash usulida* amalga oshiriladi.

Ketma-ket strategiya quyidagi yo'llar bilan amalga oshiriladi:

a) kvadratik va kubik interpolatsiyani qo'llash, bunda funksiyaning hisoblan-gan bir necha qiymatlari bo'yicha interpolatsion ko'phad quriladi, uning minimumi esa, izlanayotgan ekstremum nuqtasiga navbatdagi yaqinlashishni ko'rsatadi;

b) har biri minimum nuqtasini o'zida saqlovchi ichma-ich joylashgan intervallar ketma-ketligini qurish.

Izlash strategiyasi uchta bosqichdan iborat:

1. Boshlang'ich noaniqlik intervalini tanlash. Intervalning a_0, b_0 chegaralari

shunday bo'lishi kerakki, $f(x)$ funksiya unimodal bo'lib qolsin.

2. Noaniqlik intervalini kichraytirish.

3. Tamom qilish shartini tekshirish. Izlash joriy $[a_k, b_k]$ noaniqlik intervalining

uzunligi talab qilingan miqdordan kichik bo'lganda tugallanadi.

Javob oxirgi noaniqlik intervaliga tegishli nuqtalardan iborat bo'lib, ularning ichidan qandaydir qoida asosida masalaning x^* yechimi tanlanadi.

7.2 – i z o h l a r.

1. Ba'zi usullarda funksiyaning hisoblanadigan qiymatlari soni N oldindan beriladi yoki topiladi. Bu holda izlash davri chegaralangan bo'ladi.

2. Boshlang'ich noaniqlik intervalini evristik tanlash uchun **Svenn algoritmi**dan foydalanish mumkin:

1) quyidagi parametrlarni ixtiyoriy berish: biror x^0 nuqtani, $t > 0$ qadam kattaligini. $k = 0$ deb olish;

2) uchta $x^0 - t, x^0, x^0 + t$ nuqtalarda funksiyaning qiymatlarini hisoblash;

3) tamom qilish shartini tekshirish:

a) agar $f(x^0 - t) \geq f(x^0) \leq f(x^0 + t)$ bo'lsa, $L_0 = [a_0, b_0] = [x^0 - t, x^0 + t]$ **boshlang'ich noaniqlik intervali** topildi;

b) agar $f(x^0 - t) \leq f(x^0) \geq f(x^0 + t)$ bo'lsa, funksiya unimodal bo'lmaydi, talab qilingan noaniqlik intervali topilishi mumkin emas. Bunda hisoblashlar to'xtatiladi (yangi x^0 boshlang'ich nuqtani berish tavsiya qilinadi);

c) agar tamom qilish sharti bajarilmasa, 4-qadamga o'tiladi;

4) Δ miqdorni aniqlash:

a) agar $f(x^0 - t) \geq f(x^0) \geq f(x^0 + t)$ bo'lsa, u holda, $\Delta = t; a_0 = x^0; x^1 = x^0 + t; k = 1$;

b) agar $f(x^0 - t) \leq f(x^0) \leq f(x^0 + t)$ bo'lsa, u holda, $\Delta = -t; b_0 = x^0; x^1 = x^0 - t; k = 1$;

5) navbatdagi $x^{k+1} = x^k + 2^k \Delta$ nuqtani topish;

6) funksiyaning kamayish shartini tekshirish:

a) agar $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ va $\Delta = t$ bo'lsa, u holda, $a_0 = x^k$;

agar $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ va $\Delta = -t$ bo'lsa, u holda, $b_0 = x^k$;

har ikki holda ham $k = k + 1$ deb olish va 5-qadamga o'tish;

b) agar $f(x^{k+1}) \geq f(x^k)$ bo'lsa, jarayon to'xtatiladi. $\Delta = t$ bo'lganda $b_0 = x^{k+1}$ deb olish, $\Delta = -t$ bo'lganda esa, $a_0 = x^{k+1}$ deb olish kerak. Natijada, $[a_0, b_0]$ boshlang'ich noaniqlik intervali bo'ladi.

3. Ketma-ket strategiya qo'llangan holda noaniqlik intervalini kichraytirish funksiyaning qiymatini joriy intervalning ikkita nuqtasida hisoblash asosida amalga oshiriladi. Unimodallik xossasi hosil qilingan qism intervallarning qaysi birida minimum nuqtasi yo'qligini aniqlash imkonini beradi.

Faraz qilaylik, $[a, b]$ intervalning y, z nuqtalarida funksiyaning $f(y), f(z)$ qiymatlari hisoblangan bo'lsin. Agar $f(y) > f(z)$ bo'lsa, u holda, $x^0 \notin [a, y]$ bo'ladi va, shuning uchun, $x^0 \in [y, b]$ (7.2- a) chizma). Agar $f(y) < f(z)$ bo'lsa, u holda, $x^0 \notin (z, b]$ bo'ladi va shuning uchun, $x^0 \in [a, z]$ (7.2-b) chizma). Boshqacha aytganda, yangi noaniqlik intervali sifatida, minimum nuqtasini o'zida saqlagan "**kafolatli interval**" olinadi. Agar $f(y) = f(z)$ bo'lsa, yangi interval sifatida 7.2-chizmada tasvirlangan intervallarning ixtiyoriy bittasini olish mumkin.

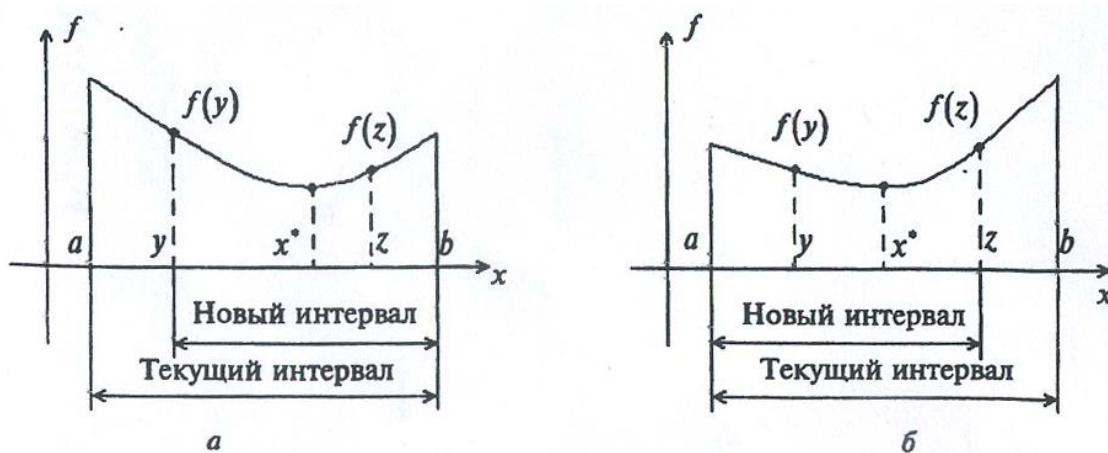


Рис. 5.2

7.2 – chizma.

Funksiyaning qiymatlarini hisoblashlarning soni N berilganda noaniqlik intervallarini kichraytirish algoritmlarining samaradorligini baholash uchun kriteriy kiritamiz.

7.2-ta'rif. Boshlang'ich noaniqlik intervalini nisbiy kichraytirish xarakteristikasi $R(N)$ deb, funksiyaning qiymatlarini N ta hisoblash natijasida hosil qilingan interval uzunligining boshlang'ich noaniqlik intervali uzunligiga nisbatiga aytiladi:

$$R(N) = \frac{|L_N|}{|L_0|}.$$

7.1-misol. Ushbu $f(x) = (x - 5)^2$ funksiyaning minimumini izlash uchun boshlang'ich noaniqlik intervalini toping.

□ *Svenn algoritmidan* foydalanamiz.

1°. $x^0 = 1$ va $t = 1$ larni beramiz. $k = 0$ deb olamiz.

2°. Funksiyaning $x^0 - t = 0$; $x^0 = 1$; $x^0 + t = 2$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(0) = 25, f(1) = 16, f(2) = 9.$$

3°. Jarayonning tamom bo'lish shartlari bajarilmaydi.

4°. Modomiki, $f(0) > f(1) > f(2)$ ekan, u holda, $\Delta = 1$; $a_0 = 1$; $x^1 = x^0 + t = 2$; $k = 1$.

5°. Navbatdagi $x^2 = x^1 + 2\Delta = 2 + 2 = 4$ nuqtani topamiz.

6°. $f(x^2) = 1 < f(x^1)$ va $\Delta = 1$ bo'lganligidan, $a_0 = x^1 = 2$. $k = 2$ deb olib, 5-qadamga o'tamiz.

5°. Navbatdagi $x^3 = x^2 + 4\Delta = 4 + 4 = 8$ nuqtani topamiz.

6°. $f(x^3) = 9 < f(x^2)$ va $\Delta = t = 1$ bo'lganligidan, jarayon yakuniga yetdi hamda o'ng chet $b_0 = x^3 = 8$ ekan. Shuning uchun, boshlang'ich noaniqlik intervali $[a_0, b_0] = [2, 8]$ bo'ladi. ■

7.2. Tekis izlash usuli

7.2.1. Masalaning qo'yilishi.

Bir o'zgaruvchili $f(x)$ funksiyaning shartsiz ekstremumini, ya'ni shunday $x^* \in R$ nuqtani topish talab qilinadiki, quyidagi

$$f(x^*) = \min_{x \in R} f(x)$$

munosabat bajarilsin.

7.2.2. Izlash strategiyasi

Usul passiv strategiyalarga ta'alluqlidir. Unda boshlang'ich noaniqlik intervali $L_0 = [a_0, b_0]$ va funksiyaning hisoblashlar soni N beriladi. Hisoblashlar bir-biridan teng uzoqlikda joylashgan N ta nuqtalarda bajariladi (bunda L_0 interval $N + 1$ ta teng intervallarga bo'linadi).

$f(x_i), i=1, \dots, N$, miqdorlar taqqoslangan holda, funksiyaning undagi qiymati eng kichik bo'lgan x_k nuqta topiladi. Izlanayotgan x^* minimum nuqtasi $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ intervalda joylashadi, deb hisoblanadi (7.3-chizma).

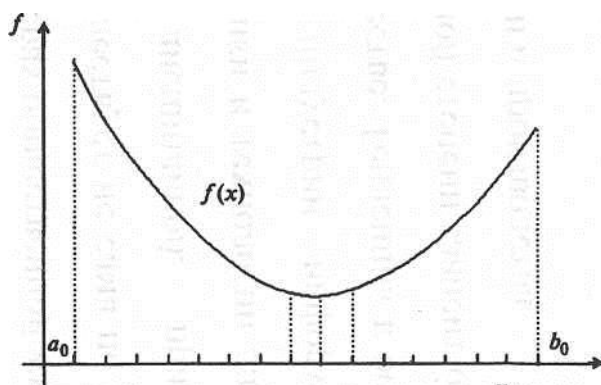


Рис. 5.3

7.3- chizma.

7.2.3. Algoritm

1-qadam. $L_0 = [a_0, b_0]$ boshlang'ich noaniqlik intervali va funksiyaning hisoblashlar soni N ni berish.

2- qadam. Bir-biridan teng uzoqlikda joylashgan

$$x_i = a_0 + i \frac{(b_0 - a_0)}{N + 1}, i = 1, \dots, N,$$

nuqtalarni hisoblash.

3- qadam. Topilgan nuqtalarda funksiyaning $f(x_i), i = 1, \dots, N$, qiymatlarini hisoblash.

4- qadam. Topilgan $x_i, i = 1, \dots, N$, nuqtalar ichida funksiya eng kichik qiymat qabul qiladigan x_k nuqtani topish: $f(x_k) = \min_{1 \leq i \leq N} f(x_i)$.

5- qadam. x^* minimum nuqtasi $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ intervalga tegishli, ya'ni $x^* \in [x_{k-1}, x_{k+1}] = L_N$, va bu intervalda taqribiy yechim sifatida $x^* \cong x_k$ nuqta tanlanishi mumkin.

7.2.4. Yaqinlashishi

Tekis izlash usuli uchun boshlang'ich noaniqlik intervalini nisbiy kichraytirish xarakteristikasi

$$R(N) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}}$$

formula bo'yicha topiladi, bunda N - funksiyaning hisoblashlar soni.

7.3- i z o h l a r.

1. Agar $R(N)$ miqdor berilgan bo'lsa, funksiyaning qiymatlarini hisoblashlar soni aniqligi $N \geq \frac{2}{R(N)} - 1$ munosabatni qanoatlantiruvchi eng kichik butun son kabi aniqlanadi.

2. $[a_0, b_0]$ kesmani o'zaro teng $N + 1$ ta qismlarga bo'lish *tanlov usulida* ham qo'llaniladi. Masalani bu usul bilan yechish uchun:

- a) bir-biridan teng uzoqlikda joylashgan $x_i = a_0 + i \frac{(b_0 - a_0)}{N+1}$, $i = 0, 1, \dots, N+1$, nuqtalarni hisoblash;
- b) topilgan nuqtalarda funksiyaning $f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N+1$, qiymatlarini hisoblash;
- c) topilgan x_i , $i = 0, 1, \dots, N+1$, nuqtalar ichida funksiya eng kichik qiymat qabul qiladigan nuqtani topish: $f(x_k) = \min_{1 \leq i \leq N+1} f(x_i)$.

Tanlov usuli bo'yicha minimum nuqtasini topishdagi xatolik $\frac{(b_0 - a_0)}{N+1}$ dan oshmaydi.

5.2- misol. $f(x) = 2x^2 - 12x$ funksiyaning minimumini tekis izlash usuli vositasida toping.

□ Tekis izlash usulidan foydalanamiz.

1. Boshlang'ich noaniqlik intervalini **Svenn algoritmi** bo'yicha topamiz:

a) $x^0 = 5$ boshlang'ich nuqta va $t = 5$ qadamni beramiz. $k = 0$ deb olamiz;

b) uchta $x^0 - t = 0$; $x^0 = 5$; $x^0 + t = 10$ nuqtalarda funksiyaning qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(x^0 - t) = 0 \quad f(x^0) = -10 \quad f(x^0 + t) = 80$$

c) $f(x^0 - t) > f(x^0) < f(x^0 + t)$ bo'lganligidan, boshlang'ich noaniqlik intervali topildi: $L_0 = [0, 10]$. L_0 interval $N + 1 = 10$ ta o'zaro teng qism intervallarni o'zida saqlashi uchun, $N = 9$ deb olish yetarli.

2. Funksiyani hisoblash nuqtalarini aniqlaymiz: $x_i = 0 + i \frac{(10 - 0)}{10}$, $i = 1, \dots, 9$.

3. Topilgan 9 ta nuqtalarda funksiyaning qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(1) = -10, \quad f(2) = -16, \quad f(3) = -18, \quad f(4) = -16, \quad f(5) = -10, \quad f(6) = 0, \quad f(7) = 14, \\ f(8) = 32, \quad f(9) = 54.$$

4. Funksiya $x_3 = 3$ nuqtada eng kichik qiymat qabul qiladi: $f(x_3) = -18$.

5. Izlanayotgan minimum nuqtasi, to'qqiz hisoblashdan so'ng, $[2, 4]$ intervalga

tegishli bo'ladi, ya'ni $x^* \in [2, 4] = L_9$ va unda $x^* \cong x_3 = 3$ nuqta tanlanadi.

Buyerda boshlang'ich noaniqlik intervalini nisbiy kichraytirish xarakteristikasi

$$R(N) = \frac{|L_9|}{|L_0|} = \frac{4 - 0}{10 - 0} = 0,4 = \frac{2}{5}$$

bo'ladi. ■

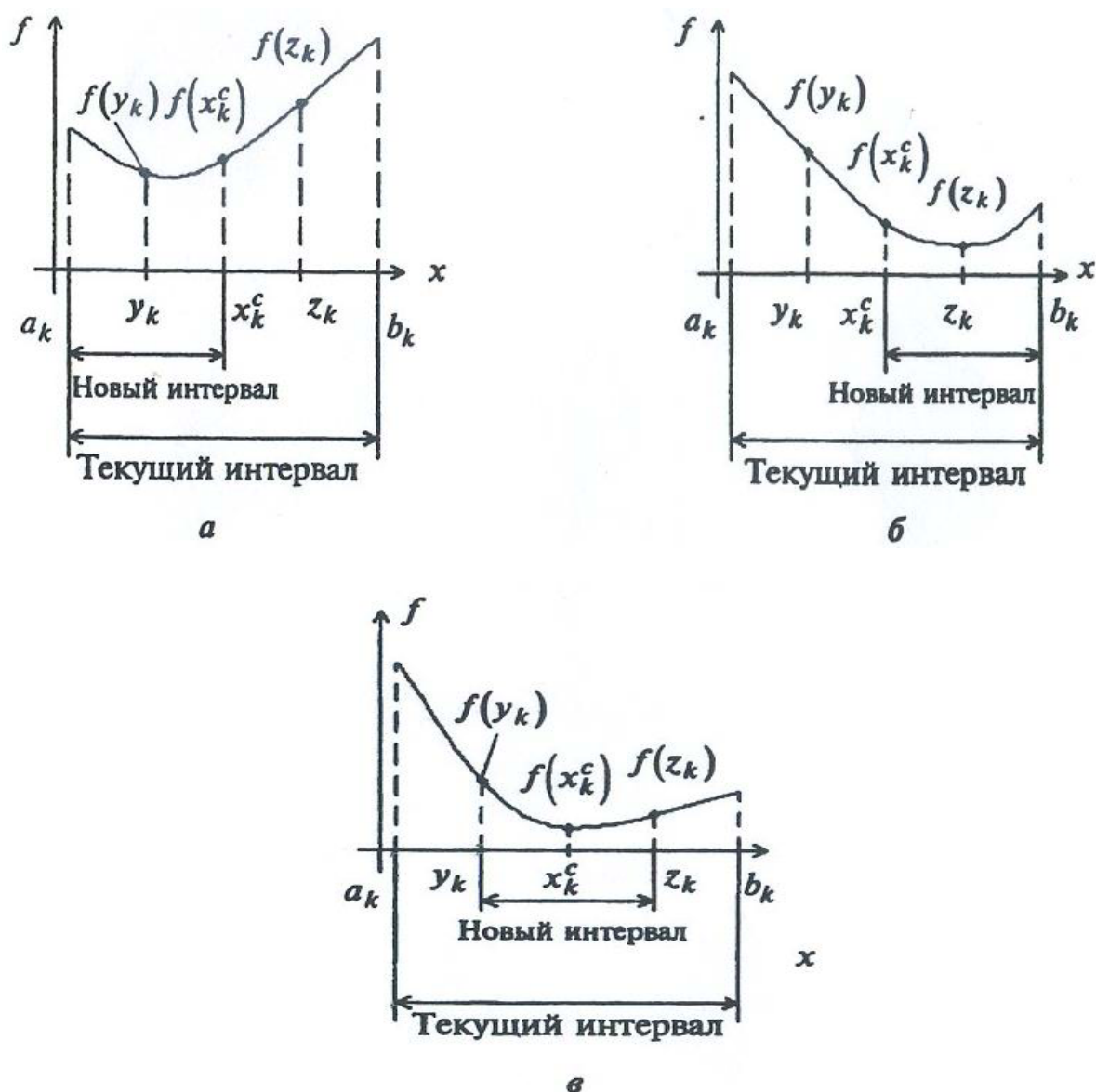


Рис. 5.4

7.3. Intervalni teng ikkiga bo'lish usuli.

7.3.1. Masalaning qo'yilishi

Bir o'zgaruvchili $f(x)$ funksiyaning shartsiz ekstremumini, ya'ni shunday $x^* \in R$ nuqtani topish talab qilinadiki, quyidagi

$$f(x^*) = \min_{x \in R} f(x)$$

munosabat bajarilsin.

7.3.2. Izlash strategiyasi

Usul ketma-ket strategiyalarga mansub bo'lib, har bir iteratsiyada joriy noaniqlik intervalining rosa yarmini chiqarib tashlash imkonini beradi. Boshlan-g'ich noaniqlik intervali beriladi, intervalni kichraytirish algoritmi esa, umumiy holdagi kabi "kafolatlovchi" bo'lib, funksiyaning joriy intervalda tekis taqsimlangan uchta nuqtadagi (ular joriy intervalni to'rtta teng bo'laklarga bo'ladi) qiymatlari tahliliga asoslanadi. Izlash jarayonini yakunlash shartlari standartdir: izlash jarayo-ni joriy noaniqlik intervali uzunligi belgilangan miqdordan kichik bo'lganda to'xtatiladi.

7.3.3. Algoritm

1-qadam. $L_0 = [a_0, b_0]$ boshlang'ich noaniqlik intervalini va talab qilingan $l > 0$ aniqlikni berish.

2-qadam. $k=0$ deb olish.

3-qadam. $x_k^{o'} = \frac{a_k + b_k}{2}$ o'rta nuqtani hisoblash, $|L_{2k}| = b_k - a_k$, $f(x_k^{o'})$.

4-qadam. $y_k = a_k + \frac{|L_{2k}|}{4}$, $z_k = b_k - \frac{|L_{2k}|}{4}$ nuqtalarni va $f(y_k)$, $f(z_k)$ qiymatlarni hisoblash. Shuni e'tirof etish kerakki, $y_k, x_k^{o'}, z_k$ nuqtalar $[a_k, b_k]$ kesmani to'rtta teng bo'laklarga bo'ladi.

5-qadam. $f(y_k)$ va $f(x_k^{o'})$ qiymatlarni taqqoslash:

a) agar $f(y_k) < f(x_k^{o'})$ bo'lsa, $b_{k+1} = x_k^{o'}$, $a_{k+1} = a_k$ deb olib, $(x_k^{o'}, b_k]$ intervalni chiqarib tashlash. Yangi intervalning o'rta nuqtasi $y_k : x_{k+1}^{o'} = y_k$ bo'ladi (5.4 a)-chizma).

b) agar $f(y_k) \geq f(x_k^{o'})$ bo'lsa, 6-qadamga o'tish.

6-qadam. $f(z_k)$ va $f(x_k^{o'})$ qiymatlarni taqqoslash.

a) agar $f(z_k) < f(x_k^{o'})$ bo'lsa, $a_{k+1} = x_k^{o'}$, $b_{k+1} = b_k$ deb olib, $[a_k, x_k^{o'})$ intervalni chiqarib tashlash. Yangi intervalning o'rta nuqtasi $z_k : x_{k+1}^{o'} = z_k$ bo'ladi (5.4. b)-chizma). 7-qadamga o'tish.

b) Agar $f(z_k) \geq f(x_k^{o'})$ bo'lsa, $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = z_k$ deb olib, $[a_k, y_k), (z_k, b_k]$

intervallarni chiqarib tashlash. Yangi intervalning o'rta nuqtasi - $x_k^{o'}$ nuqta bo'ladi: $x_{k+1}^{o'} = x_k^{o'}$ (5.4. b)-chizma).

7-qadam. $|L_{2(k+1)}| = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ ni hisoblash va yakunlash shartini tekshirish:

a) agar $|L_{2(k+1)}| \leq l$ bo'lsa, izlash jarayoni yakunlanadi va $x^* \in L_{2(k+1)} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$.

Taqribiy yechim sifatida oxirgi intervalning o'rtasini olish mumkin: $x^* \cong x_{k+1}^{o'}$;

b) agar $|L_{2(k+1)}| > l$ bo'lsa, $k = k + 1$ deb olish va 4-qadamga o'tish.

7.3.4. Yaqinlashishi.

Intervalni teng ikkiga bo'lish usuli uchun boshlang'ich intervalni nisbiy kichraytirish xarakteristikasi ushbu $R(N) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}}$

formula bo'yicha topiladi, bunda N - funksiyaning qiymatlarini hisoblashlar soni.

5.4 – i z o h l a r.

1. Ketma-ket olinadigan intervallarning o'rta nuqtasi hamisha oldingi iteratsiyada olingan uchta nuqtalardan biri bilan ustma-ust tushadi. Demak, har bir iteratsiyada funksiyaning ikki marta hisoblash talab qilinadi.

2. Agar $R(N)$ miqdor berilgan bo'lsa, talab qilingan aniqlikka erishish uchun funksiyaning qiymatlarini hisoblashlar soni ushbu

$$N \geq \frac{2 \ln R(N)}{\ln 0,5}$$

shartni qanoatlantiruvchi eng kichik butun son kabi topiladi.

3. Joriy intervallar $L_0, L_2, L_4, \dots$, juft raqamli bo'lib, bunda ularning indeksi – funksiyaning qiymatlarini hisoblashlar sonini ko'rsatadi.

7.3 – misol. Ushbu $f(x) = 2x^2 - 12x$ funksiyaning minimumini intervalni teng ikkiga bo'lish usulidan foydalanib, toping.

□ 1. $L_0 = [0, 10]$ boshlang'ich noaniqlik intervalini beramiz (7.1-misolning 1-bandiga q.). $l = 1$ bo'lsin.

2. $k = 0$ deb olamiz.

$$3^0. \quad x_0^c = \frac{0+10}{2} = 5, \quad |L_0| = |10 - 0| = 10, \quad f(x_0^c) = -10 \text{ larni hisoblaymiz.}$$

$$4^0. \quad y_0 = a_0 + \frac{|L_0|}{4} = 0 + \frac{10}{4} = 2,5; \quad z_0 = b_0 - \frac{|L_0|}{4} = 10 - \frac{10}{4} = 7,5; \quad f(y_0) = -17,5; \quad f(z_0) = 22,5$$

larni hisoblaymiz.

5⁰. $f(y_0)$ va $f(x_0^c)$ larni taqqoslaymiz. $f(y_0) = -17,5 < f(x_0^c) = -10$ bo'lganligidan, $a_1 = a_0 = 0, b_1 = x_0^c = 5, x_1^c = y_0 = 2,5$ deb olamiz.

7⁰. Natijada, $L_2 = [0, 5], |L_2| = 5 > l = 1, k = 1$ bo'ladi. 4-qadamga o'tamiz.

$$4^1. \quad y_1 = a_1 + \frac{|L_2|}{4} = 0 + \frac{5}{4} = 1,25; \quad z_1 = b_1 - \frac{|L_2|}{4} = 5 - \frac{5}{4} = 3,75; \quad f(y_1) = -11,875; \quad f(z_1) = -16,875 \text{ larni hisoblaymiz.}$$

5¹. $f(y_1)$ va $f(x_1^c) = f(y_0) = -17,5$ larni taqqoslaymiz. $f(y_1) = -11,875 > f(x_1^c) = -17,5$ bo'lganligidan, 6-qadamga o'tamiz.

6¹. $f(z_1)$ va $f(x_1^c)$ larni taqqoslaymiz. $f(z_1) = -16,875 > f(x_1^c) = -17,5$ bo'lganligidan, $a_2 = y_1 = 1,25, b_2 = z_1 = 3,75, x_2^c = x_1^c = 2,5$ deb olamiz.

7¹. $L_4 = [1,25; 3,75], |L_4| = 3,75 - 1,25 = 2,5 > l = 1$ bo'ladi. $k = 2$ deb, 4-qadamga o'tamiz.

$$4^2. \quad y_2 = a_2 + \frac{|L_4|}{4} = 1,25 + \frac{2,5}{4} = 1,875; \quad z_2 = b_2 - \frac{|L_4|}{4} = 3,75 - \frac{2,5}{4} = 3,125; \quad f(y_2) \cong -15,47; \quad f(z_2) = -17,97 \text{ larni hisoblaymiz.}$$

5². $f(y_2)$ va $f(x_2^c) = f(x_1^c) = -17,5$ larni taqqoslaymiz. $f(y_2) = -15,47 > f(x_2^c) = -17,5$ bo'lganligidan, 6-qadamga o'tamiz.

6². $f(z_2)$ va $f(x_2^c) = -17,5$ larni taqqoslaymiz. $f(z_2) = -17,79 < f(x_2^c) = -17,5$ bo'lganligidan, $a_3 = x_2^c = 2,5, b_3 = b_2 = 3,75, x_3^c = z_2 = 3,125$ deb olamiz.

7². Natijada, $L_6 = [2,5; 3,75], |L_6| = 3,75 - 2,5 = 1,25 > l = 1$ bo'ladi. $k = 3$ deb, 4-qadamga o'tamiz.

$$4^3. \quad y_3 = a_3 + \frac{|L_6|}{4} = 2,5 + \frac{1,25}{4} = 2,81; \quad z_3 = b_3 - \frac{|L_6|}{4} = 3,75 - \frac{1,25}{4} = 3,43; \quad f(y_3) = -17,93; \quad f(z_3) = -17,62 \text{ larni hisoblaymiz.}$$

5³. $f(y_3)$ va $f(x_3^c) = f(z_2) = -17,97$ larni taqqoslaymiz. $f(y_3) = -17,93 > f(x_3^c) = -17,97$ bo'lganligidan, 6-qadamga o'tamiz.

6³. $f(z_3)$ va $f(x_3^c)$ larni taqqoslaymiz. $f(z_3) = -17,63 > f(x_3^c) = -17,79$ bo'lganligidan, $a_4 = y_3 = 2,5, b_4 = z_3 = 3,43, x_4^c = x_3^c = 3,125$.

7^3 . Natijada, $L_8 = [2,81; 3,43]$, $|L_8| = 3,43 - 2,81 = 0,62 < l = 1$ $x^* \in L_8, N = 8$ bo'ladi. Yechim sifatida oxirgi intervalning $x^* \cong x_4^c = 3,125$ o'rta nuqtasini olish mumkin. Dastlabki iteratsiyalar 7.5- chizmada tasvirlangan.

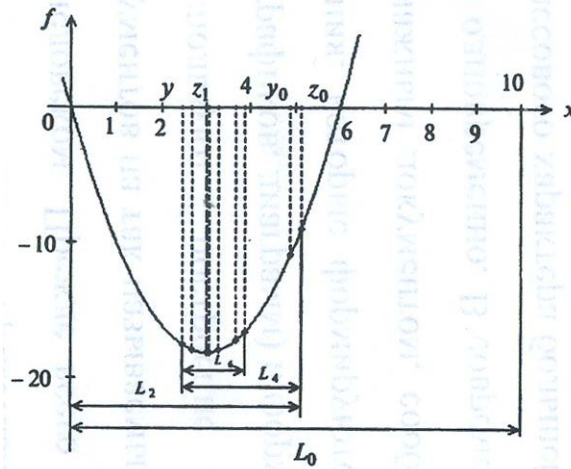


Рис. 5.7

7.5- chizma.

O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Shartsiz ekstremum masalasi deganda nimani tusunasiz?
2. Unimodal funksiya ta'rifini bering va misol keltiring.
3. Minimumni izlashning passiv strategiyasi qanday amalga oshiriladi?
4. Minimumni izlashning ketma-ket strategiyasi qanday amalga oshiriladi?
5. Minimumni izlash strategiyasi bosqichlarini keltiring.
6. Boshlang'ich noaniqlik intervali deganda nimani tushuasiz?
7. Svenn algoritmini keltiring.
8. Tekis izlash usulining algoritmi ozilsin.
9. Intervalni teng ikkiga bo'lish usulining algoritmi qadamlarini yozing.
10. Qarab o'tilgan usullarning yaqinlashishi haqida nima deyish mumkin?

Mustaqil ish topshiriqlari.

1. Ushbu $f(x) = 2x^2 - Nx$ funksiyaning minimumini izlashdagi boshlang'ich noaniqlik intervalini toping, bunda N – talabanig guruh jurnalidagi raqami $N \neq 12$.
2. Ushbu

$$f(x) = 2x^2 - Nx$$

funksiyaning minimumini tekis izlash usuli va intervalni teng ikkiga bo'lish usuli yordamida toping, bunda N – talabanig guruh jurnalidagi raqami, $N \neq 12$, $l = 1$ deb olish tavsiya qilinadi.

8- ma'ruza.

Bir o'lchovli minimallashtirish usullari. Dixotomiya va oltin kesim usullari.

Reja:

8.1. Dixotomiya usuli

8.1.1. Masalaning qo'yilishi

8.1.2. Izlash strategiyasi.

8.1.3. Algoritm.

8.1.4. Yaqinlashishi.

8.2. Oltin kesim usuli.

8.2.1. Masalaning qo'yilishi

8.2.2. Izlash strategiyasi.

8.2.3. Algoritm.

8.2.4. Yaqinlashishi.

Tayanch iboralar: shartsiz ekstremum masalasi, ketma-ket strategiyalar, dixotomiya usulida izlash strategiyasi, dixotomiya usulining algoritmi, dixotomiya usulining yaqinlashishi, oltin kesimning ta'rif, oltin kesim usulida izlash strategiyasi, oltin kesim usulining algoritmi, oltin kesim usulining yaqinlashishi.

Adabiyotlar.

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Изд. 2-е, Минск, изд-во БГУ, 1981 (Ўзбек тилига таржима қилинган ва 1995 йилда "Ўзбекистон" нашриётида нашр этилган).
3. Алексеев В.М, Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 2005.
4. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.
5. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высш.шк. 2005.
6. Исраилов И., Отакулов С. Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш усуллари курсидан маърузалар. Самарқанд, СамДУ нашри, 1-қисм, 1999.
7. Исраилов И. ва б. Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш фанидан амалий машғулотлар. Ўқув-усlubий қўлланма, 2-қисм, Самарқанд, 1988.

8.1. Dixotomiya usuli

8.1.1. Masalaning qo'yilishi

Bir o'zgaruvchili $f(x)$ funksiyaning shartsiz ekstremumini, ya'ni shunday $x^* \in R$ nuqtani topish talab qilinadiki, quyidagi

$$f(x^*) = \min_{x \in R} f(x)$$

munosabat bajarilsin.

8.1.2. Izlash strategiyasi

Usul ketma-ket strategiyalarga mansub. Dastlab boshlang'ch noaniqlik intervali va talab qilingan aniqlik beriladi. Algoritm funksiyaning ikkita nuqtadagi qiymatlari tahliliga asoslanadi (7.2-chizmaga q.). Ularni topish uchun, joriy noaniqlik intervali teng ikkiga bo'linadi va o'rta

nuqtaning ikki tomoniga $\frac{\varepsilon}{2}$ miqdor joy-lashtiriladi, bunda ε – kichik musbat son. Jarayonning

yakunlanish sharti standartdir: izlash joriy noaniqlik intervalining uzunligi oldindan qabul qilingan miqdordan kichik bo'lganda to'xtatiladi.

8.1.3. Algoritm

1-qadam. $L_0 = [a_0, b_0]$ boshlang'ich noaniqlik intervali, $\varepsilon > 0$ - kichik son, $l > 0$ - aniqliklarni berish.

2-qadam. $k=0$ deb olish.

3-qadam. $y_k = \frac{a_k + b_k - \varepsilon}{2},$

$f(y_k) \quad z_k = \frac{a_k + b_k + \varepsilon}{2}, \quad f(z_k)$ larni hisoblash.

4-qadam. $f(y_k)$ va $f(z_k)$ larni taqqoslash:

a) agar $f(y_k) \leq f(z_k)$ bo'lsa, $a_{k+1} = a_k$ $b_{k+1} = z_k$ deb olish (8.1 a)-chizma) va 5-qadamga o'tish;

b) agar $f(y_k) > f(z_k)$ bo'lsa, $a_{k+1} = y_k$ $b_{k+1} = b_k$ deb olish (8.1 b)-chizma).

5-qadam. $|L_{2(k+1)}| = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ ni hisoblash va yakunlash shartini tekshirish:

a) agar $|L_{2(k+1)}| \leq l$ bo'lsa, izlash jarayoni tugaydi va $x^* \in L_{2(k+1)} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ Taqribiy

yechim sifatida oxirgi intervalning o'rtasini olish mumkin: $x^* \cong \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2};$

b) agar $|L_{2(k+1)}| > l$ bo'lsa, $k=k+1$ deb olish va 3-qadamga o'tish.

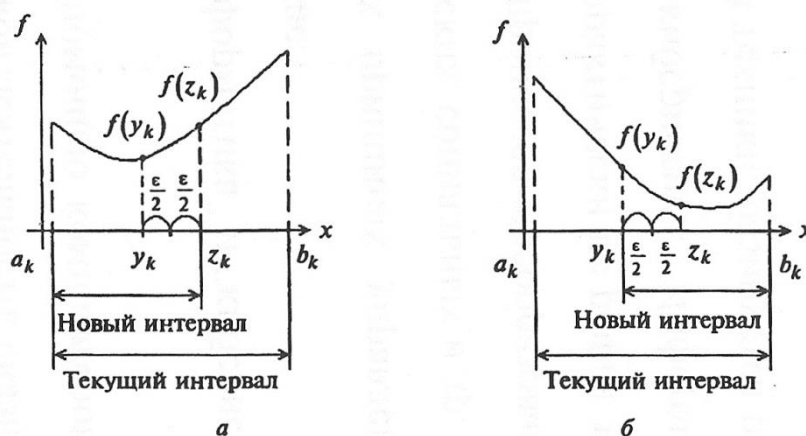


Рис. 5.6

8.1- chizma.

8.1.4. Yaqinlashish.

Dixotomiya usuli uchun boshlang'ich noaniqlik intervalini nisbiy kichraytirish xarakteristikasi

$$R(N) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}}$$

formula bo'yicha topiladi, bunda N - funksiyani hisoblashlar soni.

8.1-i z o h l a r.

1. Joriy noaniqlik intervallari, intervalni teng ikkiga bo'lish usulidagi kabi, $L_0, L_2, L_4, \dots$, juft raqamli bo'lib, bunda ularning indeksi – funksiyaning qiymatlarini hisoblashlar sonini ko'rsatadi.

2. Kichik ε lar uchun dixotomiya va intervalni teng ikkiga bo'lish usullarining samaradorligini bir xil deb hisoblash mumkin.

8.1- misol. Ushbu $f(x) = 2x^2 - 12x$ funksiyaning minimumini dixotomiya usulidan foydalanib, toping.

□ 1. Boshlang'ich noaniqlik intervalini beramiz: $L_0 = [0, 10]$ (7.2-misolning 1-b.ga q.).
 $\varepsilon = 0,2$, $l = 1$ deb olamiz.

2. $k=0$ deb olamiz.

$$3^0. y_0 = \frac{a_0 + b_0 - \varepsilon}{2} = \frac{0 + 10 - 0,2}{2} = 4,9; \quad z_0 = \frac{a_0 + b_0 + \varepsilon}{2} = \frac{0 + 10 + 0,2}{2} = 5,1$$

$$f(y_0) = -10,78; \quad f(z_0) = -9,18 \text{ larni hisoblaymiz.}$$

4⁰. $f(y_0) < f(z_0)$, bo'lganligidan, $a_1 = a_0 = 0$; $b_1 = z_0 = 5,1$ bo'ladi (8.1 a)-chizma).

5⁰. Demak, $L_2 = [0; 5,1]$, $|L_2| = 5,1 > l = 1$. $k=1$ deb olamiz va 3-qadamga o'tamiz.

$$3^1. y_1 = \frac{a_1 + b_1 - \varepsilon}{2} = \frac{0 + 5,1 - 0,2}{2} = 2,45; \quad z_1 = \frac{a_1 + b_1 + \varepsilon}{2} = \frac{0 + 5,1 + 0,2}{2} = 2,65;$$

$$f(y_1) = -17,395; \quad f(z_1) = -17,755 \text{ larni hisoblaymiz.}$$

4¹. $f(y_1) > f(z_1)$ bo'lganligidan, $a_2 = y_1 = 2,45$; $b_2 = b_1 = 5,1$ bo'ladi (8.1 b)-chizma).

5¹. Demak, $L_4 = [2,45; 5,1]$, $|L_4| = 5,1 - 2,4 = 2,65 > l = 1$. $k=2$ deb olamiz va 3-qadamga o'tamiz.

$$3^2. y_2 = \frac{a_2 + b_2 - \varepsilon}{2} = \frac{2,45 + 5,1 - 0,2}{2} = 3,675; \quad z_2 = \frac{a_2 + b_2 + \varepsilon}{2} = \frac{2,45 + 5,1 + 0,2}{2} = 3,875;$$

$$f(y_2) = -17,089; \quad f(z_2) = -16,469 \text{ larni hisoblaymiz.}$$

4². $f(y_2) < f(z_2)$ bo'lganligidan, $a_3 = a_2 = 2,45$; $b_3 = z_2 = 3,875$ bo'ladi (8.1 a)-chizma).

5². Demak, $L_6 = [2,45; 3,875]$, $|L_6| = 3,875 - 2,45 = 1,425 > l = 1$. $k=3$ deb olamiz va 3-qadamga o'tamiz.

$$3^3. y_3 = \frac{a_3 + b_3 - \varepsilon}{2} = \frac{2,45 + 3,875 - 0,2}{2} = 3,06;$$

$$z_3 = \frac{a_3 + b_3 + \varepsilon}{2} = \frac{2,45 + 3,875 + 0,2}{2} = 3,26 \quad f(y_3) = -17,99; \quad f(z_3) = -17,86$$

larni hisoblaymiz.

4³. $f(y_3) < f(z_3)$ bo'lganligidan, $a_4 = a_3 = 2,45$; $b_4 = z_3 = 3,26$ bo'ladi (8.1 a)-chizma).

5³. Demak, $L_8 = [2,45; 3,260]$, $|L_8| = 3,26 - 2,45 = 0,81 < l = 1$.

$$x^* \in [2,45; 3,26], \quad N=8, \quad x^* \in \frac{2,45 + 3,26}{2} = 2,885. \quad \blacksquare$$

Misolda bajarilgan dastlabki iteratsiyalar 8.2- chizmada keltirilgan.

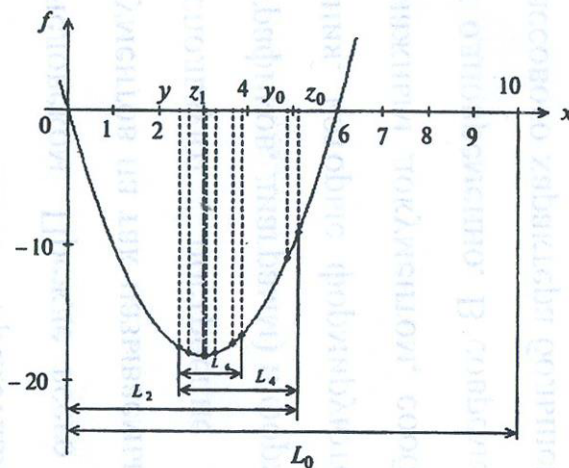


Рис. 5.7

8.2-chizma.

8.2. Oltin kesim usuli.

8.2.1. Masalaning qo'yilishi.

Bir o'zgaruvchili $f(x)$ funksiyaning shartsiz ekstremumini, ya'ni shunday $x^* \in R$ nuqtani topish talab qilinadiki, quyidagi

$$f(x^*) = \min_{x \in R} f(x)$$

munosabat bajarilsin.

Bir o'Ichovli minimallashtirishning muayyan bir, o'aniqlik intervalini ketma-ket qisqartirish tamoyiliga asoslangan holda ishlaydigan, usulini qurish uchun, har bir qadamda ikkita ichki nuqtani tanlash qoidasini berish talab qilinadi. Bunda tanlangan nuqtalardan biri navbatdagi intervalning ichki nuqtasi bo'lishi maqsadga muvofiq bo'ladi. U holda har bir iteratsiyada funksiyaning qiymatlarini hisoblash-lar soni ikki marta kamayadi, ya'ni bitta iteratsiya faqat funksiyaning bitta yangi qiymatini hisoblashni talab qiladi. Oltin kesim usulida ichki nuqtalar sifatida oltin kesim hosil qiluvchi nuqtalar tanlanadi.

8.1-ta'rif. Agar kesmada biror nuqta berigan bo'lib, kesma uzunligining nuqta yordamida hosil qilingan katta qismi uzunligiga nisbati, katta qism uzunligining kichik qism uzunligiga nisbatiga teng bo'lsa, u holda, nuqta kesmada oltin kesim hosil qiladi, deyiladi.

$[a_0, b_0]$ kesmada uning chetlariga nisbatan simmetrik bo'lgan ikkita y_0, z_0 nuqta mavjud:

$$\frac{b_0 - a_0}{b_0 - y_0} = \frac{b_0 - y_0}{y_0 - a_0} = \frac{b_0 - a_0}{z_0 - a_0} = \frac{z_0 - a_0}{b_0 - z_0} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,6180.$$

Bundan tashqari, y_0 nuqta $[a_0, z_0]$ kesmada oltin kesim hosil qiladi va z_0 nuqta esa, $[y_0, b_0]$ kesmada oltin kesim hosil qiladi.

8.2.2. Izlash strategiyasi

Usul ketma-ket strategiyalarga mansub. Dastlab boshlang'ch noaniqlik intervali va talab qilingan aniqlik beriladi. Intervalni kichraytirish algoritmi funksiyaning ikkita nuqtadagi qiymatlari tahliliga asoslanadi (7.2-chizmaga q.). Funksiyani hisoblash nuqtalari sifatida, oltin kesim hosil qiluvchi nuqtalar olinadi. U holda, oltin kesimning xossasiga asosan, birinchi iteratsiyadan keying iteratsiyalarning har birida funksiyaning bitta yangi qiymatini hisoblash talab qilinadi. Jarayonning yakunlanish sharti standartdir: izlash joriy noaniqlik intervalining uzunligi oldindan qabul qilingan miqdordan kichik bo'lganda to'xtatiladi.

8.2.3. Algoritm

1-qadam. $L_0 = [a_0, b_0]$ boshlang'ich noaniqlik intervali, $l > 0$ - aniqliklarni berish.

2-qadam. $k=0$ deb olish.

3-qadam. $y_0 = a_0 + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0)$; $z_0 = a_0 + b_0 - y_0$, $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,38196$.

larni hisoblash.

4-qadam. $f(y_k), f(z_k)$ qiymatlarni hisoblash.

5-qadam. $f(y_k), f(z_k)$ qiymatlarni taqqoslash:

- agar $f(y_k) \leq f(z_k)$ bo'lsa, $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = z_k$ va $y_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - y_k$, $z_{k+1} = y_k$ deb olish (8.2 a)-chizma). 6-qadamga o'tish;
- agar $f(y_k) > f(z_k)$ bo'lsa, $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = b_k$ va $y_{k+1} = z_k$, $z_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - z_k$, deb olish (8.2 b)-chizma).

6-qadam. $\Delta = |a_{k+1} - b_{k+1}|$ ni hisoblash va yakunlash shartini tekshirish:

- a) agar $\Delta \leq l$ bo'lsa, jarayon yakuniga yetadi va $x^* \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$. Taqribiy yechim sifatida oxirgi intervalning o'rtasini olsh mumkin: $x^* \cong \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$;
- b) agar $\Delta > l$ bo'lsa, deb olish va 4-qadamga o'tish.

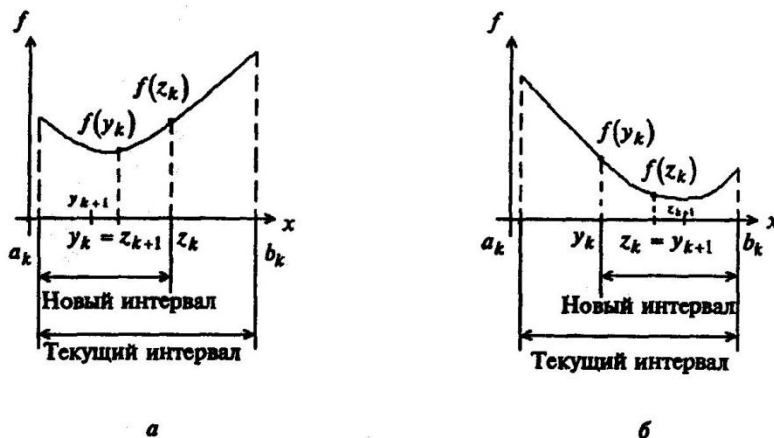


Рис. 5.9

8.2-chizma.

8.2.4. Yaqinlashish.

Oltin kesim usuli uchun boshlang'ich noaniqlik intervalini nisbiy kichraytirish xarakteristikasi $R(N) = (0,618)^{N-1}$ formula bo'yicha topiladi, bunda N - funktsiyani hisoblashlar soni.

8.2 – i z o h l a r.

1. Joriy noaniqlik intervallari quydagi, $L_0, L_2, L_3, L_4, \dots$ ko'rinishga ega. Ular, birinchi iteratsiyada funktsiya ikki marta, keyingilarida esa, bir marta hisoblanishini ko'rsatadi.
2. Noaniqlik intervalining qisqarishi o'zgarmasdir:

$$\frac{|L_0|}{|L_2|} = \frac{|L_2|}{|L_3|} = \frac{|L_3|}{|L_4|} = \dots = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,618.$$

$$R(N)$$

3. Agar $R(N)$ miqdor berilgan bo'lsa, funktsiyaning qiymatlarini hisoblashlar soni $N \geq 1 + \frac{\ln R(N)}{\ln 0,618}$

munosabatni qanoatlantiruvchi eng kichik butun son kabi aniqlanadi.

8.2-misol. Ushbu $f(x) = 2x^2 - 12x$ funktsiyaning minimumini oltin kesim usulidan foydalanib, toping.

□ 1. Boshlang'ich noaniqlik intervalini beramiz: $L_0 = [0, 10]$ (7.2-misolning 1-b.ga q.). $l=1$ deb olamiz.

2. $k=0$ deb olamiz.

3°. $y_0 = a_0 + 0,382(b_0 - a_0) = 0 + 0,382 \cdot 10 = 3,82$; $z_0 = a_0 + b_0 - y_0 = 0 + 10 - 3,82 = 6,18$ larni hisoblaymiz.

4°. $f(y_0) = -16,65$; $f(z_0) = 2,22$ larni hisoblaymiz.

5°. $f(y_0)$ va $f(z_0)$ larni taqqoslaymiz. $f(y_0) < f(z_0)$ bo'lganligidan, $a_1 = a_0 = 0$, $b_1 = z_0 = 6,18$ $y_1 = a_1 + b_1 - y_0 = 0 + 6,18 - 3,82 = 2,36$; $z_1 = y_0 = 3,82$ bo'ladi.

6°. Natijada, $L_2 = [0; 6,18]$, $|L_2| = 6,18 > l = 1$ ekanligini olamiz. $k=1$ deb olamiz va 4-qadamga o'tamiz.

4¹. $f(y_1) = -17,18$; ni hisoblaymiz, $f(z_1) = f(y_0) = -16,65$ esa, 4⁰ – qadamda hisoblangan edi.

5¹. $f(y_1)$ va $f(z_1)$ larni taqqoslaymiz. $f(y_1) < f(z_1)$ bo‘lganligidan, $a_2 = a_1 = 0$, $b_2 = z_1 = 3,82$; $y_2 = a_2 + b_2 - y_1 = 0 + 3,82 - 2,36 = 1,46$; $z_2 = y_1 = 2,36$. bo‘ladi.

6¹. Natijada, $L_3 = [0; 3,82]$, $|L_3| = 3,82 > l = 1$ ekanligini olamiz. $k=2$ deb olamiz va 4-qadamga o‘tamiz.

4². $f(y_2) = -13,25$ ni hisoblaymiz (yangi hisoblash), $f(z_2) = f(y_1) = -17,18$.

5². $f(y_2)$ va $f(z_2)$ larni taqqoslaymiz. $f(y_2) > f(z_2)$ bo‘lganligidan, $a_3 = y_2 = 1,46$, $b_3 = b_2 = 3,82$; $y_3 = z_2 = 2,36$; $z_3 = a_3 + b_3 - y_2 = 1,46 + 3,82 - 2,36 = 2,92$. bo‘ladi.

6². Natijada, $L_4 = [1,46; 3,82]$, $|L_4| = 3,82 - 1,46 = 2,36 > l = 1$ ekanligini olamiz $k=3$ deb, 4-qadamga o‘tamiz.

4³. $f(y_3) = f(z_2) = -17,18$ (ular 4² – qadamda hisoblangan). $f(z_3) = -17,99$. ni hisoblaymiz (yangi hisoblash).

5³. $f(y_3)$ va $f(z_3)$ larni taqqoslaymiz. $f(y_3) > f(z_3)$ bo‘lganligidan, $a_4 = y_3 = 2,36$, $b_4 = b_3 = 3,82$; $z_4 = a_4 + b_4 - y_3 = 2,36 + 3,82 - 2,92 = 3,26$. $y_4 = z_3 = 2,92$. bo‘ladi.

6³. Natijada, $L_5 = [2,36; 3,82]$, $|L_5| = 3,82 - 2,36 = 1,46 > l = 1$ ekanligini olamiz. $k=4$ deb olib, 4-qadamga o‘tamiz.

4⁴. $f(y_4) = f(z_3) = -17,99$ (ular 4³ – qadamda hisoblangan). $f(z_4) = -17,86$ ni hisoblaymiz.

5⁴. $f(y_4)$ va $f(z_4)$ larni taqqoslaymiz. $f(y_4) < f(z_4)$ bo‘lganligidan, $a_5 = a_4 = 2,36$, $b_5 = z_4 = 6,18$ $y_5 = a_5 + b_5 - y_4 = 2,36 + 3,26 - 2,92 = 2,7$; $z_5 = y_4 = 2,92$. bo‘ladi.

6⁴. Natijada, $L_6 = [2,36; 3,26]$, $|L_6| = 3,26 - 2,36 = 0,9 < l = 1$ ekanligini olamiz. Demak, $x^* \in L_6$, $N=6$, $x^* \cong \frac{3,26 + 2,36}{2} = 2,81$.

Izlashning dastlabki iteratsiyalari 8.3- chizmada keltirilgan. ■

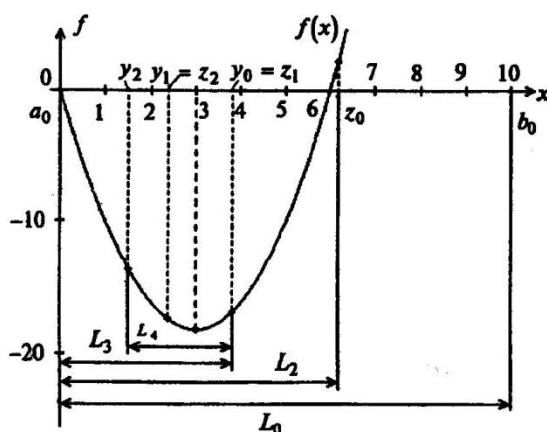


Рис. 5.10

8.3- chizma.

8.3 – misol. Ushbu $f(x) = \frac{127}{4}x^2 - \frac{61}{4}x + 2$ funksiyaning minimumini oltin kesim usuli orqali toping.

□ 1. Svenn algoritmidan foydalanib, boshlang'ich noaniqlik intervalini topamiz.

$x^0 = 0,25$ $t=0,25$ $k=0$
a) boshlang'ich nuqtani, qadam kattaligini beramiz. deb olamiz;
 $x^0 = 0,25$; $x^0 - t = 0$; $x^0 + t = 0,5$:

b) Uchta nuqtalarda funksiyaning qiymatlarini hisoblaymiz:

$f(x^0) = 0,171$; $f(x^0 - t) = 2$; $f(x^0 + t) = 2,31$;
 $f(x^0 - t) > f(x^0) < f(x^0 + t)$
c) bo'lganligidan, boshlang'ich noaniqlik intervali topildi:
 $L_0 = [0; 0,5]$ $l = 0,15$
deb olamiz.

$k=0$
2. deb olamiz.

3⁰. $y_0 = a_0 + 0,382(b_0 - a_0) = 0 + 0,382 \cdot 0,5 = 0,191$;

$z_0 = a_0 + b_0 - y_0 = 0 + 0,5 - 0,191 = 0,309$ larni hisoblaymiz.

4⁰. $f(y_0) = 0,245$; $f(z_0) = 0,319$ larni hisoblaymiz.

5⁰. $f(y_0) < f(z_0)$ bo'lganligidan, $a_1 = a_0 = 0$, $b_1 = z_0 = 0,309$;

$y_1 = a_1 + b_1 - y_0 = 0 + 0,309 - 0,191 = 0,118$; $z_1 = y_0 = 0,191$ bo'ladi.

6⁰. Natijada, $L_2 = [0; 0,309]$; $|L_2| = 0,309 > l = 0,15$. $k=1$ deb, 4-qadamga o'tamiz.

4¹. $f(y_1) = 0,642$; $f(z_1) = 0,245$ larni hisoblaymiz.

5¹. $f(y_1) > f(z_1)$, bo'lganligidan, $a_2 = y_1 = 0,118$; $b_2 = b_1 = 0,309$;

$z_2 = a_2 + b_2 - z_1 = 0,118 + 0,309 - 0,191 = 0,236$; $y_2 = z_1 = 0,191$ bo'ladi.

6¹. Natijada, $L_3 = [0,118; 0,309]$; $|L_3| = 0,191 > l = 0,15$. $k=2$ deb olamiz va 4-qadamga o'tamiz.

4². $f(y_2) = 0,245$; $f(z_2) = 0,169$ larni hisoblaymiz.

5². $f(y_2) > f(z_2)$ bo'lganligidan, $a_3 = y_2 = 0,191$; $b_3 = b_2 = 0,309$;

$z_3 = a_3 + b_3 - z_2 = 0,191 + 0,309 - 0,236 = 0,264$; $y_3 = z_2 = 0,236$ bo'ladi.

6⁰. Natijada, $L_4 = [0,191; 0,309]$; $|L_4| = 0,118 < l = 0,15$; $x^* \in L_4$ $N=4$,
 $x^* \cong \frac{0,191 + 0,309}{2} = 0,25$.

■ O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Dixotomiya usuli qanday strategiyalarga mansub?
2. Dixotomiya usulida minimumni izlash strategiyasi qanday amalga oshiriladi?
3. Dixotomiya usulining algoritmini keltiring.
4. Dixotomiya usulining yaqinlashishi qanday ifodalanadi?
5. Oltin kesim usuli qanday strategiyalarga mansub?
6. Oltin kesim usulida minimumni izlash strategiyasi qanday amalga oshiriladi?
7. Oltin kesim usulining algoritmini keltiring.
8. Oltin kesim usulining yaqinlashishi qanday ifodalanadi?

Mustaqil ish topshiriqlari.

3. Ushbu $f(x) = 2x^2 - Nx$ funksiyaning minimumini izlashdagi boshlang'ich

noaniqlik intervalini toping, bunda N – talabanig guruh jurnalidagi raqami $N \neq 12$.

4. Ushbu

$$f(x) = 2x^2 - Nx$$

funksiyaning minimumini tekis izlash usuli va intervalni teng ikkiga bo'lish usuli yordamida toping, bunda N – talabanig guruh jurnalidagi raqami, $N \neq 12$, $l = 1$ deb olish tavsiya qilinadi.

9- ma'ruza.

Bir o'lchovli minimallashtirish usullari. Fibonachchi va kvadratik interpolatsiya usullari.
Reja:

9.1. Fibonachchi usuli.

9.1.1. Masalaning qo'yilishi.

9.1.2. Izlash strategiyasi.

9.1.3. Algoritm.

9.1.4. Yaqinlashishi.

9.2. Kvadratik interpolatsiya usuli.

9.2.1. Masalaning qo'yilishi.

9.2.2. Izlash strategiyasi.

9.2.3. Algoritm.

9.2.4. Yaqinlashishi.

Tayanch iboralar: shartsiz ekstremum masalasi, unimodal funksiya, ketma-ket strategiya, Fibonachchi usuli, Fibonachchi usulining algoritmi, kvadratik interpolatsiya usuli, kvadratik interpolatsiya usulining algoritmi, yaqinlashishi.

Adabiyotlar.

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Изд. 2-е, Минск, изд-во БГУ, 1981(Ўзбек тилига таржима қилинган ва 1995 йилда “Ўзбекистон” нашриётида нашр этилган).
3. Алексеев В.М, Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 2005.
4. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.
5. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высш.шк. 2005.
6. Исраилов И., Отакулов С. Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш усуллари курсидан маърузалар. Самарқанд, СамДУ нашри, 1-қисм, 1999.
7. Исраилов И. ва б. Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш фанидан амалий машғулотлар. Ўқув-услубий қўлланма, 2-қисм, Самарқанд, 1988.

9.1. Fibonachchi usuli

9.1.1. Masalaning qo'yilishi

Bir o'zgaruvchili $f(x)$ funksiyaning shartsiz ekstremumini, ya'ni shunday $x^* \in R$ nuqtani topish talab qilinadiki, quyidagi

$$f(x^*) = \min_{x \in R} f(x)$$

munosabat bajarilsin.

Bir o'lchovli minimallashtirishning muayyan bir, oaniqlik intervalini ketma-ket qisqartirish tamoyiliga asoslangan holda ishlaydigan, usulini qurish uchun, har bir qadamda ikkita ichki nuqtani tanlash qoidasini berish talab qilinadi. Bunda tanlangan nuqtalardan biri navbatdagi intervalning ichki nuqtasi bo'lishi maqsadga muvofiq bo'ladi. U holda har bir iteratsiyada funksiyaning qiymatlarini hisoblash-lar soni ikki marta kamayadi, ya'ni bitta iteratsiya faqat funksiyaning bitta yangi qiymatini hisoblashni talab qiladi. Fibonachchi usulida shunday strategiya amalga oshirilganki, unda funksiyaning hisoblashlar soni berilganda noaniqlik intervalini

maksimal kafolatlangan qisqartirish ta'minlanadi va u optimallikka da'vogar bo'ladi. Bu strategiya Fibonachchi sonlariga tayanadi.

9.1- ta'rif. Fibonachchi sonlari

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, \quad k=2,3,4,\dots$$

formula bo'yicha aniqlanadi.

Fibonachchi sonlari ketma-ketligi 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,... ko'ri-nishga ega.

9.1.2. Izlash strategiyasi

Usul ketma-ket strategiyalarga mansub. Boshlang'ich noaniqlik intervali va funksiyaning qiymatlarini hisoblashlar soni N beriladi. Intervalni kichraytirish algoritmi funksiyaning ikkita nuqtadagi qiymatlari tahliliga asoslanadi (7.2- chiz-maga q.). Funksiyani hisoblashlar bajariladigan nuqtalar $N + 1$ ta Fibonachchi sonlaridan tuzilgan ketma-ketlikdan foydalanilgan holda topiladi. Jarayonning yakunlanish sharti standartdir: izlash joriy noaniqlik intervalining uzunligi oldin-dan qabul qilingan miqdordan kichik bo'lganda to'xtatiladi.

9.1.3. Algoritm

1-qadam. $L_0 = [a_0, b_0]$ boshlang'ich noaniqlik intervali, $\varepsilon > 0$ - kichik son, $l > 0$ - oxirgi intervalning mumkin bo'lgan uzunligini berish.

2-qadam. Funksiyani hisoblashlar soni N ni $F_N \geq \frac{|L_0|}{l}$ shart bajariladigan

eng kichik butun son kabi va $F_0, F_1, F_2, \dots, F_n$ Fibonachchi sonlarini topish.

3-qadam. $k=0$ deb olish.

4-qadam. $y_0 = a_0 + \frac{F_{N-2}}{F_N}(b_0 - a_0)$; $z_0 = a_0 + \frac{F_{N-1}}{F_N}(b_0 - a_0)$ larni hisoblash.

5-qadam. $f(y_k)$, $f(z_k)$ larni hisoblash.

6-qadam. $f(y_k)$, $f(z_k)$ larni taqqoslash:

a) agar $f(y_k) \leq f(z_k)$ bo'lsa, u holda, $a_{k+1} = a_k$; $b_{k+1} = z_k$; $z_{k+1} = y_k$;

$y_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{N-k-3}}{F_{N-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1})$ deb olish. 7-qadamga o'tish;

b) agar $f(y_k) > f(z_k)$ bo'lsa, u holda, $a_{k+1} = y_k$; $b_{k+1} = b_k$; $y_{k+1} = z_k$; $z_{k+1} =$

$a_{k+1} + \frac{F_{N-k-2}}{F_{N-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1})$ deb olish.

7-qadam. Yakunlash shartini tekshirish va zarur bo'lgan holda, yechimni olish uchun funksiyaning oxirgi N - hisoblanishini amalga oshirish:

a) agar $k \neq N - 3$; bo'lsa, $k=k+1$ deb olish va 5-qadamga o'tish;

b) agar $k = N - 3$ bo'lsa, hamisha, ya'ni funksiya yangi hisoblanadigan nuqta yo'q. Bu

holda $y_{N-2} = \frac{a_{N-2} + b_{N-2}}{2}$ deb olish lozim. $y_{N-1} = y_{N-2} = z_{N-2}$ va $z_{N-1} = y_{N-1} + \varepsilon$ nuqtalarda

funksiyaning qiymatlari hisoblanadi hamda oxirgi noaniqlik intervalining chegaralari topiladi:

- agar $f(y_{N-1}) \leq f(z_{N-1})$ bo'lsa, $a_{N-1} = a_{N-2}$; $b_{N-1} = z_{N-1}$ deb olish;

- agar $f(y_{N-1}) > f(z_{N-1})$ bo'lsa, $a_{N-1} = y_{N-2}$; $b_{N-1} = b_{N-2}$ deb olish.

Izlash jarayoni to'xtatiladi va $x^* \in [a_{N-1}, b_{N-1}]$. Taqribiy yechim sifatida oxirgi intervalning ixtiyoriy nuqtasini, masalan, uning o'rtasini olish mumkin:

$$x^* \cong \frac{a_{N-1} + b_{N-1}}{2}.$$

9.1.4. Yaqinlashish.

Fibonachchi usuli uchun boshlang'ich noaniqlik intervalini nisbiy kichraytirish

xarakteristikasi ushbu $R(N) = \frac{1}{F_N}$ formula bo'yicha topiladi, bunda N - funksiyani hisoblashlar soni.

9.1- izohlar.

1. Funksiyaning qiymatlarini hisoblashlar soni N berilganda, Fibonachchi usuli boshqa, oldingi ma'ruzalarda ko'rib o'tilgan usullarga qaraganda, oxirgi noaniqlik intervalining minimal uzunligini ta'minlaydi.

2. Noaniqlik intervallarining raqamlanishi oltin kesim usulidagi kabi bo'ladi:

$$L_0, L_2, L_3, L_4, \dots$$

3. k - iteratsiyada noaniqlik intervalining uzunligi $\frac{F_{N-k-1}}{F_{N-k}}$ qoida bo'yicha qisqaradi.

$$f(x) = 2x^2 - 12x$$

9.1 – misol. Ushbu funksiya minimumini Fibonachchi usulidan foydalanib toping.

1. Boshlang'ich noaniqlik intervalini beramiz: $L_0 = [0, 10]$ (6.2 misolning 1-b.ga q.). $l=1$; $\varepsilon=0,01$; $F_6 = 13 > \frac{|L_0|}{l} = \frac{10}{1} = 10$, bo'lsin, shu sababli, $N=6$.

2. Fibonachchi sonlarini topamiz: $F_0=F_1=1$, $F_2=2$, $F_3=3$, $F_4=5$, $F_5=8$, $F_6=13$.

3. $k=0$ deb olamiz.

$$4^\circ. y_0 = a_0 + \frac{F_4}{F_6}(b_0 - a_0) = 0 + \frac{5}{13} * 10 = 3,846; z_0 = a_0 + \frac{F_5}{F_6}(b_0 - a_0) = 0 + \frac{8}{13} * 10 = 6,154$$

larni hisoblaymiz.

5°. $f(y_0) = -16,57$; $f(z_0) = -1,893$ larni hisoblaymiz.

6°. $f(y_0)$ va $f(z_0)$ larni taqqoslaymiz. $f(y_0) < f(z_0)$ bo'lganligidan, $a_1 = a_0 = 0$;

$$b_1 = z_0 = 6,154; y_1 = a_1 + \frac{F_{6-3}}{F_{6-1}}(b_1 - a_1) = 0 + \frac{3}{8} * 6,154 = 2,308; z_1 = y_0 = 3,846.$$

7°. Yakunlash shartini tekshiramiz: $k=0 \neq N-3 = 6-3=3$; $L_2 = [0; 6,154]$. $k=1$ deb, 5-qadamga o'tamiz.

5¹. $f(y_1) = -17,04$ qiymatni hisoblaymiz, $f(z_1) = -16,57$ (5°- qadamda hisolangan edi).

6¹. $f(y_1)$ va $f(z_1)$ larni taqqoslaymiz. $f(y_1) < f(z_1)$ bo'lganligidan, $a_2 = a_1 = 0$;

$$b_2 = z_1 = 3,846; y_2 = a_2 + \frac{F_{6-4}}{F_{6-2}}(b_2 - a_2) = 0 + \frac{2}{5} * 3,846 = 1,538; z_2 = y_1 = 2,308.$$

7¹. Yakunlash shartini tekshiramiz: $k=1 \neq N-3=3$; $L_2 = [0; 3,846]$. $k=2$ deb olib, 5-qadamga o'tamiz.

5². $f(y_2) = -13,73$ qiymatni hisoblaymiz; $f(z_2) = -17,04$ (5¹- qadamda hisolangan edi).

6². $f(y_2)$ va $f(z_2)$. $f(y_2) > f(z_2)$ bo'lganligidan, $a_3 = y_2 = 1,538$; $b_3 = b_2 = 3,846$; $y_3 = z_2 = 2,308$;
 $z_3 = a_3 + \frac{F_{6-4}}{F_{6-3}}(b_3 - a_3) = 1,538 + \frac{2}{3} * (3,846 - 1,538) = 3,077$.

7². Yakunlash shartini tekshiramiz: $k=2 \neq N-3=3$, $L_4 = [1,538; 3,846]$. $k=3$ deb olamiz va 5-qadamga o'tamiz.

5³. $f(y_3) = f(z_2) = -17,04$ (avval hisoblangan edi); $f(z_3) = -17,9884$ ni hisoblaymiz.

6³. $f(y_3)$ va $f(z_3)$ larni hisoblaymiz. $f(y_3) > f(z_3)$ bo'lganligidan, $a_4 = y_3 = 2,308$;

$$b_4 = b_3 = 3,846; y_4 = z_3 = 3,077;$$

$$z_4 = a_4 + \frac{F_{6-5}}{F_{6-4}}(b_4 - a_4) = 2,308 + \frac{1}{2} * (3,846 - 2,308) = 3,077.$$

7³. Yakunlash shartini tekshiramiz: $k = 3 = N - 3 = 3$; $L_5 = [2,308 ; 3,846]$. Положим $y_5 = y_4 = z_4 = 3,077$; $z_5 = y_5 + \varepsilon = 3,077 + 0,01 = 3,087$ deb olamiz. $f(y_5) = -17,9884$ (5³-qadamda hisoblangan edi); $f(z_5) = -17,985$ ni hisoblaymiz. $f(y_5) > f(z_5)$ bo'lganligidan, $a_5 = a_4 = 2,308$; $b_5 = z_5 = 3,087$. Shu sababli, $x^* \in L_6 = [2,308; 3,087]$; $|L_6| = 3,087 - 2,308 = 0,78 < l = 1$. Ravshanki, $\frac{|L_6|}{|L_0|} = 0,078 \cong \frac{1}{|F_6|} = \frac{1}{13} 0,077$. Taqribiy yechim sifatida, L_6 intervalning o'rtasini olamiz: $x^* \cong \frac{2,308 + 3,087}{2} = 2,697$.

9.2. Kvadratik interpolatsiya usuli.

9.2.1. Masalaning qo'yilishi.

Bir o'zgaruvchili $f(x)$ funksiyaning shartsiz ekstremumini, ya'ni shunday $x^* \in R$ nuqtani topish talab qilinadiki, quyidagi

$$f(x^*) = \min_{x \in R} f(x)$$

munosabat bajarilsin.

9.2.2. Izlash strategiyasi.

Kvadratik interpolatsiya usuli (Pauell usuli) ketma-ket strategiyalarga mansub. Unda boshlang'ich nuqta beriladi va tanlov qadami yordamida shunday uchta, imkoni boricha ular izlanayotgan minimum nuqtasiga yaqin nuqtalar topiladi. Hosil qilingan nuqtalarda funksiyaning qiymatlari hisoblanadi. So'ngra, shu uchta nuqtalardan o'tuvchi ikkinchi darajali interpolatsion ko'phad quriladi. Izlanayotgan minimum nuqtasi sifatida ko'phadning minimum nuqtasi olinadi. Izlash jarayoni, olingan nuqta, uchta tayanch nuqtalarning eng yaxshisidan oldindan berilgan miqdordan katta bo'lmagan farq qilganda, yakunlanadi.

9.2.3. Algoritm.

1- qadam. x_1 boshlang'ich nuqtani, $\Delta x > 0$ qadam kattaligini, hamda aniqlikni ko'rsatuvchi ε_1 va ε_2 – kichik musbat sonlarni berish.

2- qadam. $x_2 = x_1 + \Delta x$

3- qadam. $f(x_1) = f_1$ va $f(x_2) = f_2$ larni hisoblash.

4- qadam. $f(x_1)$ va $f(x_2)$ larni taqqoslash:

a) agar $f(x_1) > f(x_2)$ bo'lsa, $x_3 = x_1 + 2\Delta x$ deb olish (9.1 a)- chizma);

b) agar $f(x_1) \leq f(x_2)$ bo'lsa, $x_3 = x_1 - \Delta x$ deb olish (9.1 b)- chizma).

5- qadam. $f(x_3) = f_3$ ni hisoblash.

6- qadam. $F_{min} = \min\{f_1, f_2, f_3\}$, $x_{min} = x_i$: $f(x_i) = F_{min}$ larni topish.

7- qadam. Uchta nuqta bo'yicha qurilgan interpolatsion ko'phadning:

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3},$$

minimum nuqtasini va funksiyaning $f(\bar{x})$ qiymatini topish (9.1- chizma).

Bunda $\bar{x}$ nuqta uchta, x_1, x_2, x_3 nuqtalar va $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ qiymatlar bo'yicha qurilgan,

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{f(x_2)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{f(x_3)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)},$$

$$x \in R^1,$$

parabolaning minimum nuqtasidan iborat.

Agar $\bar{x}$ uchun olingan formulaning maxraji nolga aylansa, interpolatsiyaning natijasi to'g'ri chiziq bo'ladi. Bu holda, $x_1 = x_{min}$ deb olib, 2-qadamga o'tish tavsiya qilinadi.

8- qadam . Yakunlash shartini tekshirish:

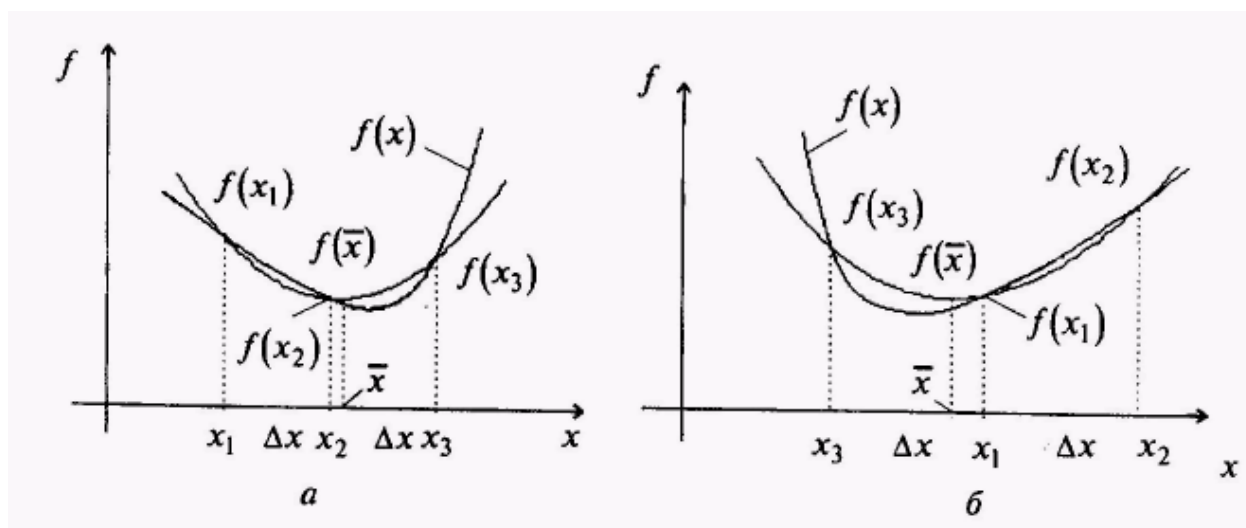
$$\left| \frac{F_{min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right| < \varepsilon_1, \left| \frac{x_{min} - \bar{x}}{\bar{x}} \right| < \varepsilon_2.$$

U holda:

a) agar har ikki shart ham bajarilsa, izlash jarayoni tugaydi va $x^* \cong \bar{x}$;

b) agar shartlarning biri bajarilmasa va $\bar{x} \in [x_1, x_3]$ bo'lsa, eng yaxshi nuqtani (x_{min} yoki $\bar{x}$) ni va uning ikki tomonidan ikkita nuqtani tanlash. Bu nuqtalarni tabiiy ravishda belgilash va 6-qadamga o'tish;

c) agar shartlarning biri bajarilmasa va $\bar{x} \notin [x_1, x_3]$ bo'lsa, u holda, $x_1 = \bar{x}$ deb olish va 2-qadamga o'tish.



9.1 – chizma.

9.2 – i z o h l a r.

1. Kubik interpolyatsiyadan va hosilaning qiymati haqidagi ma'lumotdan foydalaniladigan aniqroq usulni biz keying ma'ruzalarda qaraymiz.

2. Algoritmning 1 – 4 qadamlari, funksiyaning kamayish yo'nalishini aniqlash, ba'zi hollarda funksiya unimodal bo'ladigan intervalni aniqlash imkonini beradi.

9.2 - misol. Ushbu $f(x) = 2x^2 + \frac{16}{x}$ funksiyaning minimumini kvadratik interpolyatsiya usuli yordamida toping.

1°. $x_1 = 1$ boshlag'ich nuqtani, $\Delta x = 1$ qadam kattaligin, $\varepsilon_1 = 0,003$ kichik sonni beramiz.

2°. $x_2 = x_1 + \Delta x = 2$ ni hisoblaymiz.

3°. $f(x_1) = f_1 = 18$; $f(x_2) = f_2 = 16$ larni hisoblaymiz.

4°. $f(x_1) > f(x_2)$ bo'lganligidan, $x_3 = x_1 + 2\Delta x = 1 + 2 = 3$ deb olamiz (9.1-a) chizma).

5°. $f(x_3) = f_3 = 23,33$ ni hisoblaymiz.

6°. $F_{\min} = \min\{18; 16; 23,33\} = 16$; $x_{\min} = x_2 = 2$ larni topamiz.

7°. Interpolyatsion ko'phadning minimum nuqtasini topamiz:

$$\bar{x} = \frac{1(4-9)18 + (9-1)16 + (1-4)23,33}{2(2-3)18 + (3-1)16 + (1-2)23,33} = 1,714; \quad f(\bar{x}) = 15,21.$$

8°. Yakunlash shartini tekshiramiz:

$$\left| \frac{16 - 15,21}{15,21} \right| = 0,052 > \varepsilon_1 = 0,003 \text{ (bajarilmaydi), } \bar{x} - \text{eng yaxshi nuqta, uning chap}$$

tomonida $x_1 = 1$ nuqta, o'ng tomonida esa, $x_2 = 2$ nuqta yotadi. Ularni, tabiiy ravishda, $x_1 = 1$, $x_2 = \bar{x} = 1,714$; $x_3 = 2$ deb raqamlaymiz. Bu nuqtalarga funksiyaning quyidagi qiymatlari mos keladi: $f_1 = 18$; $f_2 = 15,21$; $f_3 = 16$. 6 - qadamga o'tamiz.

6°. $F_{\min} = \min\{18; 15,21; 16\} = 16$; $x_{\min} = x_2 = 1,714$ larni topamiz.

7°. Interpolyatsion ko'phadning minimum nuqtasini topamiz:

$$\bar{x} = \frac{1(1,714^2 - 4)18 + (4 - 1)15,21 + (1 - 1,714^2)16}{2(1,714 - 2)18 + (2 - 1)15,21 + (1 - 1,714)16} = 1,65; \quad f(\bar{x}) = 15,142.$$

8°. Yakunlash shartini tekshiramiz:

$$\left| \frac{15,21 - 15,142}{15,142} \right| = 0,0045 > 0,003 \text{ (bajarilmaydi), } \bar{x} - \text{eng yaxshi nuqta, uning chap}$$

tomonida $x_1 = 1$ nuqta, o'ng tomonida esa, $x_2 = 1,714$ nuqta yotadi. Ularni, tabiiy ravishda, $x_1 = 1$, $x_2 = 1,65$; $x_3 = 1,714$ deb raqamlaymiz. Bu nuqtalarga funksiyaning quyidagi qiymatlari mos keladi:

$f_1 = 18$; $f_2 = 15,142$; $f_3 = 15,21$. 6- qadamga o'tamiz.

6°. $F_{\min} = \min\{18; 15,142; 15,21\} = 15,142$; $x_{\min} = x_2 = 1,65$ larni topamiz.

7°. Interpolyatsion ko'phadning minimum nuqtasini topamiz:

$$\bar{x} = \frac{1(1,65^2 - 1,714^2)18 + (1,714 - 1)15,142 + (1 - 1,65^2)15,21}{2(1,65 - 1,714)18 + (1,714 - 1)15,142 + (1 - 1,65)15,21} = 1,6125; \quad f(\bar{x}) = 15,123.$$

8°. Yakunlash shartini tekshiramiz:

$$\left| \frac{15,142 - 15,123}{15,123} \right| = 0,0013 < \varepsilon_1 = 0,003 \text{ (bajariladi),}$$

$$\left| \frac{1,65 - 1,6125}{1,6125} \right| = 0,023 < \varepsilon_1 = 0,03 \text{ (bajariladi).}$$

Izlash jarayoni yakuniga yetdi. Yechim: $x^* \cong x = 1,6125$.

Endi minimum nuqtasining koordinatasini analitik ifodasini shartsiz ekstremumning zaruriy sharti yordamida topamiz:

$$\frac{df(x)}{dx} = 4x - \frac{16}{x^2} = 0.$$

Buyerdan, $x^* = \sqrt[3]{4} = 1,5874$. Bu nuqtada $f''(x^*) = 4 + \frac{32}{(x^*)^3} = 12 > 0$, ya'ni shartsiz minimumning yetarli sharti bajariladi.

9.3- misol. Ushbu $f(x) = \frac{127}{4}t^2 - \frac{61}{4}t + 2$ funksiyaning minimumini kvadratik interpolyatsiya usuli orqali toping.

- 1. $x_1 = 0,25$ boshlang'ich nuqta; $\Delta x = 0,25$ qadam kattaligi; aniqlikni ifodalovchi $\varepsilon_1 = 0,02$; $\varepsilon_1 = 0,05$ kichik musbat sonlarni beramiz.
2. $x_2 = x_1 + \Delta x = 0,5$ ni hisoblaymiz.
3. $f(x_1) = f_1 = 0,171$; $f(x_2) = f_2 = 2,31$ larni hisoblaymiz.
4. $f(x_1) > f(x_2)$ bo'lganligidan, $x_3 = x_1 - \Delta x = 0$.
5. $f(x_3) = f_3 = 2$ ni hisoblaymiz.
6. $F_{min} = \min\{0,171; 2,31; 2\} = 0,171$; $x_{min} = x_1 = 0,25$ larni topamiz.
7. $\bar{x} = \frac{1(0,5^2 - 0^2)0,171 + (0^2 - 0,25^2)2,31 + (0,25^2 - 0,5^2)2}{2(0,5 - 0)0,171 + (0 - 0,25)2,31 + (0,25 - 0,5)2} = 0,2402$; $f(\bar{x}) = 0,16879$ larni hisoblaymiz.

8. Yakunlash shartini tekshiramiz:

$$\left| \frac{0,171 - 0,16879}{0,16879} \right| = 0,013 < \varepsilon_1 = 0,02 \text{ (bajariladi).}$$

$$\left| \frac{0,25 - 0,2402}{0,2402} \right| = 0,04 < \varepsilon_2 = 0,05 \text{ (bajariladi).}$$

Shu sababli, $x \cong 0,2402$. ■

O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Fibonachchi usuli qanday strategiyalarga mansub?
2. Fibonachchi usulida minimumni izlash strategiyasi qanday amalga oshiriladi?
3. Fibonachchi usulining algoritmini keltiring.
4. Fibonachchi usulining yaqinlashishi qanday ifodalanadi?
5. Kvadratik interpolyatsiya usuli qanday strategiyalarga mansub?
6. Kvadratik interpolyatsiya usulida minimumni izlash strategiyasi qanday amalga oshiriladi?
7. Kvadratik interpolyatsiya usulining algoritmini keltiring.
8. Kvadratik interpolyatsiya usulining yaqinlashishi qanday ifodalanadi?

Mustaqil ish topshiriqlari.

5. Ushbu $f(x) = 2x^2 - Nx$ funksiyaning minimumini izlashdagi boshlang'ich noaniqlik intervalini toping, bunda N — talabanig guruh jurnalidagi raqami $N \neq 12$.
6. Ushbu

$$f(x) = 2x^2 - Nx$$

funksiyaning minimumini tekis izlash usuli va intervalni teng ikkiga bo'lish usuli yordamida toping, bunda N — talabanig guruh jurnalidagi raqami, $N \neq 12$, $l = 1$ deb olish tavsiya qilinadi.

10 - лекция SHARTSIZ EKSTREMUM MASALALARI UCHUN NOLINCHI TARTIBLI USULLAR

KONFIGURATSIYALAR (XUK-JIVS) USULI

Reja:

10. 1. Masalaning qo'yilishi.

10. 2. Izlash strategiyasi.

10. 3. Algoritm.

10. 4. Yaqinlashishi.

10. 5. Misollar.

Tayanch iboralar: *shartsiz ekstremum masalasi, Xuk-Jivs usulida izlash strategiyasi, tadqiqotli izlash, namuna bo'yicha izlash, Xuk-Jivs usulining algoritmi, eski basis, yangi basis, tezlashtiruvchi ko'paytuvchi, qadamni kichraytirish koeffitsiyenti, o'zgaruvchilarning tsiklik o'zgarishi..*

Asosiy adabiyotlar

1. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.

2. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Методы оптимизации. Изд. 2-е, Минск, изд-во БГУ, 1981.

3. **Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М.** Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 2005.

Qo'shimcha adabiyotlar

4. **Ашманов С.А., Тимохов А.В.** Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.

5. **Пантелеев А.В.** Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высш.шк. 2005.

10.1. . Masalaning qo'yilishi

Ko'p o'zgaruvchili $f(x)$ funksiyaning shartsiz minimumini, ya'ni shunday $x^* \in R^n$ nuqtani topish kerakki, unda

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x)$$

munosabat bajarilsin.

10.2. Izlash strategiyasi.

Konfiguratsiyalar (Xuk-Jivs) usuli - o'zgaruvchilarning tsiklik o'zgarishi mujassam bo'lgan **tadqiqotli izlash** va tezlashtiruvchi **namuna bo'yicha izlashning** koombinatsiyasidan iborat. Tadqiqotli izlash maqsad funksiyasining lokal o'zgarishini kuzatish va uning "jarliklar" bo'ylab kamayish yo'nalishini aniqlashga yo'naltirilgandir. Olingan ma'lumotdan namuna bo'yicha izlashda "jarliklar" bo'ylab harakat qilinganda foydalaniladi.

Tadqiqotli izlash, eski basis deb ataladigan, biror boshlang'ich x^0 nuqtada boshlanadi. Bunda izlash yo'nalishlari to'plami sifatida koordinatalar yo'nalishlari to'plami tanlanadi. Har xil koordinatalar yo'nalishlarida harxil va izlash jarayonida o'zgaruvchi bo'lgan, qadam kattaligi beriladi. Birinchi koordinata yo'nalishi tanlanadi va mos o'zgaruvchini kattalashtirish tomoniga qadam qo'yiladi. Agar funksiyaning sinalayotgan nuqtadagi qiymati, uning boshlang'ich nuqtadagi qiymatidan kichik bo'lsa, u holda, qo'yilgan qadam muvaffaqiyatli hisoblanadi. Aks

holda oldingi nuqtaga qaytish zarur va qarama-qarshi yoʻnalishda qadam qoʻyish, soʻngra funksiyaning oʻzgarishini tekshirish lozim. Barcha koordinatalar qarab chiqilgandan soʻng, tadqiqotli izlash tugaydi. Hosil qilingan nuqta – **yangi basis** deyiladi (10.1-chizmada x^0 nuqtada tadqiqotli izlash amalga oshirilgan va x^1 nuqta – yangi basis olingan).

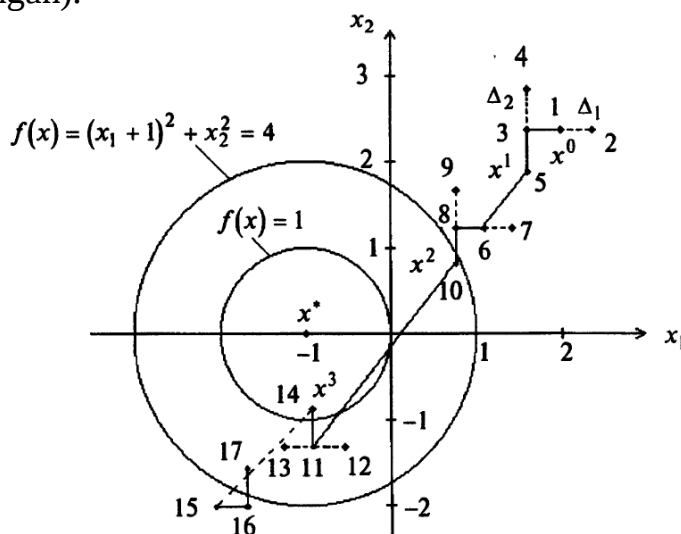


Рис. 5.12
10.1-чизма.

Agar berilgan qadam kattaligida bajarilgan tadqiqotli izlash muvaffaqiyatsiz boʻlsa, qadam kichraytirilib, jarayon davom ettiriladi. Qadamning joriy kattaligi oldindan berilgan miqdordan kichik boʻlganda izlash yakuniga yetadi.

Namuna boʻyicha izlash eski bazisdan yangi bazisga yoʻnalgan harakatdan iborat (10.1-chizmada x^0 nuqtadan x^1 nuqta orqali, x^1 nuqtadan x^2 nuqta orqali, x^2 nuqtadan x^3 nuqta orqali). Tezlashtiruvchi qadam kattaligi λ tezlashtiruvchi koeffitsiyent orqali beriladi. Namuna boʻyicha izlashning yutugʻi olingan nuqtalardan tadqiqotli izlash yordamida aniqlanadi (masalan, 10.1-chizmada - 6, 11, 15 nuqtalar). Agar bunda funksiyaning eng yaxshi nuqtadagi qiymati, oldingi basis nuqtadagi qiymatidan kichik boʻlsa, namuna boʻyicha izlash muvaffaqiyatli boʻladi (6,11 nuqtalar – muvaffaqiyatli namuna boʻyicha izlash natijasi, 15 esa, - muvaffaqiyatsiz namuna boʻyicha izlash natijasidir). Agar namuna boʻyicha izlash muvaffaqiyatsiz boʻlsa, u holda, yangi bazisga qaytilib, kichraytirilgan qadamli tadqiqotli izlash davom etadi.

10.1- chizmada muvaffaqiyatli izlash tutash chiziqlar orqali, muvaffaqiyatsiz izlash esa, punktir chiziqlar orqali koʻrsatilgan, sonlar esa, algoritmda hosil boʻladigan nuqtalarga mos keladi.

$d_1, \dots, d_n$ lar orqali

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, d_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

koordinatalar yoʻnalishlarini belgilaymiz. d_i yoʻnalish boʻyicha izlashda faqat x_i oʻzgaruvchi almashadi, qolgan oʻzgaruvchilar belgilangan holda qoladi..

10.3. Algoritm

1 - qadam. x^0 boshlang'ich nuqta, algoritmni to'xtatish uchun $\varepsilon > 0$ son, koordinatalar yo'nalishlari bo'yicha qadamlarning $\Delta_1, \dots, \Delta_n \geq \varepsilon$ boshlang'ich qiymatlari, $\lambda > 0$ tezlashtiruvchi ko'paytuvchi, $\alpha > 1$ qadamni kichraytirish koeffitsiyenti berilgan bo'lsin. $y^1 = x^0, i = 1, k = 0$ deb olish.

2- qadam. Tanlangan koordinata yo'nalishi bo'yicha tadqiqotli izlashni amalga oshirish:

a) agar

$$f(y^i + \Delta_i d_i) < f(y^i),$$

ya'ni

$$f(y_1^i, \dots, y_i^i + \Delta_i, \dots, y_n^i) < f(y_1^i, \dots, y_i^i, \dots, y_n^i),$$

bo'lsa, qadam muvaffaqiyatli hisoblanadi. Bu holda $y^{i+1} = y^i + \Delta_i d_i$ deb olish va 3-qadamga o'tish kerak;

b) agar «a» bandda qadam muvaffaqiyatsiz bo'lsa, u holda, qarama-qarshi yo'nalishda qadam qo'yiladi:

a) agar

$$f(y^i - \Delta_i d_i) < f(y^i),$$

ya'ni

$$f(y_1^i, \dots, y_i^i - \Delta_i, \dots, y_n^i) < f(y_1^i, \dots, y_i^i, \dots, y_n^i),$$

bo'lsa, qadam muvaffaqiyatli hisoblanadi. Bu holda $y^{i+1} = y^i - \Delta_i d_i$ deb olish va 3-qadamga o'tish lozim;

b) agar «a» va «b» bandlardagi qadamlar muvaffaqiyatsiz bo'lsa, $y^{i+1} = y^i$ deb olish

3-qadam. Quyidagi shartlarni tekshirish:

a) agar $i < n$ bo'lsa, u holda $i = i + 1$ deb olish va 2-qadamga o'tish (qolgan yo'nalishlar bo'yicha tadqiqotli izlashni davom ettirish);

b) agar $i = n$ bo'lsa, u holda, tadqiqotli izlashning muvaffaqiyatli ekanligini tekshirish:

- agar $f(y^{n+1}) < f(x^k)$ bo'lsa, u holda, 4-qadamga o'tish;

- agar $f(y^{n+1}) \geq f(x^k)$ bo'lsa, u holda, 5-qadamga o'tish.

4-qadam. Namuna bo'yicha izlash o'tkazish. $x^{k+1} = y^{n+1}$, $y^1 = x^{k+1} + \lambda(x^{k+1} - x^k), i = 1, k = k + 1$ deb olish va 2-qadamga o'tish.

5-qadam. Yakinlash shartini tekshirish:

a) agar barcha $\Delta_i \leq \varepsilon$ bo'lsa, u holda izlashni tugatish: $x^* \cong x^k$;

b) $\Delta_i > \varepsilon$ bo'lgan i lar uchun, qadam kattaligini kichraytirish: $\Delta_i = \frac{\Delta_i}{\alpha}$. $y^1 = x^k, x^{k+1} = x^k, k = k + 1, i = 1$ deb olish va 2-qadamga o'tish.

10.1 izohlar.

1. Algoritmida koordinatalar yo'nalishlari bo'yicha qadamlarning bir xil kattaligidan foydalanish, ya'ni $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ larning o'rniga Δ ni qo'llash mumkin.

2. Usulning, unda ham tadqiqotli izlashda, ham namuna bo'yicha izlashda bir o'lchovli minimallashtirishdan foydalanish ko'zda tutilgan o'zgartirilgan variant ham mavjud. U holda, agar $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lsa, usul statsionar nuqtaga yaqinlashadi.

10.1 - misol. Ushbu

$$f(x) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$$

funksiyaning minimumini konfiguratsiyalar (Xuk-Jivs) usuli orqali toping.

□ 1. 10.2-chizmada berilgan funksiyaning sath chiziqlari tasvirlangan: ular

$$f(x) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 = \text{const.}$$

tenglamalar bilan berilgan ellipslar oilasidan iborat.

Agar $\text{const} = 4$ bo'lsa, u holda, $(x_1 - 5)^2 + \frac{(x_2 - 6)^2}{4} = 1$ ellipsni olamiz, ya'ni, $a = 1$, $b = 2$, $x_{10} = 5$, $x_{20} = 6$. $x^0 = (8,9)^T$ boshlang'ich nuqtani beramiz.

2⁰. Modomiki,

$$f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(9,9) = 73 > f(y^1) = f(x^0) = 45,$$

ekan, qadam muvaffaqiyatsizdir.

$$f(y^1 - \Delta_1 d_1) = f(7,9) = 25 < f(y^1) = f(x^0) = 45,$$

bo'lganligidan, bu qadam muvaffaqiyatli: $y^2 = y^1 - \Delta_1 d_1 = (7,9)^T$.

3⁰. $i = 1 < 2 = n$ bo'lgani uchun, $i = 2$ deb olamiz va 2-qadamga o'tamiz.

2¹. $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(7,11) = 41 > f(y^2) = 25$, bo'lganligidan, qadam muvaffaqiyatsizdir.

$f(y^2 - \Delta_2 d_2) = f(7,7) = 17 < f(y^2) = 25$ bo'lgani uchun, bu qadam muvaffaqiyatli:

$$y^3 = y^2 - \Delta_2 d_2 = (7,7)^T.$$

3¹. Modomiki, $i = 2 = n = 2$ va $f(y^3) = 17 < f(x^0) = 45$ ekan, u holda, 4-qadamga o'tamiz.

4⁰. Yangi bazisni $x^1 = y^3 = (7,7)^T$ - deb, $i = 1$, $k = k + 1 = 1$, deb olib, $y^1 = x^1 + 1 \cdot (x^1 - x^0) = (7,7)^T + [(7,7)^T - (8,9)^T] = (6,5)^T$ ni topamiz. Namuna bo'yicha izlash amalga oshirildi. 2-qadamga o'tamiz.

2². $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(7,5) = 17 > f(y^1) = 5$, bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsizdir.

$f(y^1 - \Delta_1 d_1) = f(5,5) = 1 < f(y^1) = 17$, bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatli: $y^2 = y^1 - \Delta_1 d_1 = (5,5)^T$.

3². Modomiki, $i = 1 < 2 = n$, ekan, u holda, $i = i + 1 = 2$ va 2-qadamga o'tamiz.

2³. $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(5,7) = 1 = f(y^2) = f(5,5) = 1$, bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsizdir.

$f(y^2 - \Delta_2 d_2) = f(5,3) = 9 > f(y^2) = 1$, bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsizdir. Shu sababli, $y^3 = y^2 = (5,5)^T$.

3³. $i = 2 = n = 2$ va $f(y^3) = 1 < f(x^1) = 17$ bo'lgani uchun, 4⁰ qadamdagi namuna bo'yicha izlash muvaffaqiyatli. $y^3 = (5,5)^T$ nuqta yangi bazisga aylanadi, $x^1 = (7,7)^T$ nuqta esa, eski basis bo'ladi. 4-qadamga o'tamiz.

4¹. $x^2 = y^3 = (5,5)^T$ – yangi bazis, $i = 1, k = k + 1 = 2$;
 $y^1 = x^2 + (x^2 - x^1) = (5,5)^T + [(5,5)^T - (7,7)^T] = (3,3)^T$ deb olamiz va 2-qadamga o‘tamiz.

2⁴. $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(4,3) = 13 < f(y^1) = f(3,3) = 25$, bo‘lgani uchun, qadam muvaffaqiyatli: $y^2 = y^1 + \Delta_1 d_1 = (4,3)^T$.

3⁴. Modomiki, $i = 1 < 2 = n$ ekan, u holda $i = i + 1 = 2$ va 2-qadamga o‘tamiz.

2⁵. $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(4,5) = 5 < f(y^2) = 13$, bo‘lgani uchun, qadam muvaffaqiyatli: $y^3 = y^2 + \Delta_2 d_2 = (4,3)^T$.

3⁵. Modomiki, $i = n$ va $f(y^3) = 5 > f(x^2) = 1$ ekan, 4¹ qadamdagi namuna bo‘yicha izlash muvaffaqiyatsizdir. 5-qadamga o‘tamiz.

5⁰. $\Delta_1 = 1 > \varepsilon, \Delta_2 = 2 > \varepsilon$ bo‘lgani uchun, qadamni kichraytiramiz: $\Delta_1 = \frac{\Delta_1}{2} = 0,5; \Delta_2 = \frac{\Delta_2}{2} = 1$. $y^1 = x^2 = (5,5)^T, x^3 = x^2 = (5,5)^T, i = 1, k = k + 1 = 3$ deb olib, 2-qadamga o‘tamiz.

2⁶. $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(5,5; 5) = 2 > f(y^1) = 1$, bo‘lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsizdir.

$f(y^1 - \Delta_1 d_1) = f(4,5; 5) = 2 > f(y^1) = 1$, bo‘lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsizdir. Shu sababli, $y^2 = y^1 = (5,5)^T$.

3⁶. Modomiki, $i = 1 < 2 = n$ ekan, u holda, $i = i + 1 = 2$ deb olamiz va 2-qadamga o‘tamiz.

2⁷. $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(5,6) = 0 < f(y^2) = f(5,5) = 1$, bo‘lgani uchun, qadam muvaffaqiyatli: $y^3 = y^2 + \Delta_2 d_2 = (5,6)^T$.

3⁷. Modomiki, $f(y^3) = 0 \leq f(x^3) = 1$ ekan, 4-qadamga o‘tamiz. y^3 nuqta yangi bazisga aylanadi, x^3 nuqta esa, eski bazis bo‘lib qoladi.

4². $x^4 = y^3 = (5,6)^T$ – yangi bazis, $i = 1, k = k + 1 = 4$;
 $y^1 = x^4 + (x^4 - x^3) = (5,6)^T + [(5,6)^T - (5,5)^T] = (5,7)^T$ deb olamiz. 2-qadamga o‘tamiz.

2⁸. $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(5,5; 7) = 2 > f(y^1) = f(5; 7) = 1$ bo‘lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsizdir.

$f(y^1 - \Delta_1 d_1) = f(4,5; 7) = 2 > f(y^1) = 1$, bo‘lgani uchun, bu qadam ham muvaffaqiyatsiz. U holda, $y^2 = y^1 = (5; 7)^T$.

3⁸. Modomiki, $i = 1 < 2 = n$ ekan, u holda, $i = i + 1 = 2$ va 2-qadamga o‘tamiz.

2⁹. $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(5; 8) = 1$ bo‘lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsiz.
 $f(y^2 - \Delta_2 d_2) = f(5; 6) = 0 < f(5; 7) = 1$ bo‘lgani uchun, qadam muvaffaqiyatli:
 $y^3 = y^2 - \Delta_2 d_2 = (5,6)^T$.

3⁹. Modomiki, $i = 2 = n = 2$ va $f(y^3) = f(x^4) = f(5,6) = 0$ ekan, namuna bo‘yicha izlash muvaffaqiyatsiz. 5-qadamga o‘tamiz.

5¹. $\Delta_1 > \varepsilon$ va $\Delta_2 > \varepsilon$ bo‘lgani uchun, qadamni kichraytiramiz: $\Delta_1 = \frac{0,5}{2} = 0,25; \Delta_2 = 0,5$. $y^1 = x^4 = (5; 6)^T, x^5 = x^4, k = k + 1 = 5, i = 1$ deb olib, 2-qadamga o‘tamiz.

2¹⁰. $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(5,25; 6) = 0,25 > f(y^1) = 0$ bo‘lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsiz.

$f(y^1 - \Delta_1 d_1) = f(4,75; 6) = 0,25 > f(y^1) = 0$, bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsiz va $y^2 = y^1 = (5;6)^T$.

3¹⁰. Modomiki, $i = 1 < 2 = n$ ekan, u holda, $i = i + 1 = 2$ va 2-qadamga o'tamiz.

2¹¹. $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(5; 6,5) = 0,25 > f(y^2) = 0$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsiz. $f(y^2 - \Delta_2 d_2) = f(5; 5,5) = 0,25 > f(y^2) = 0$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsiz: $y^3 = y^2 = (5;6)^T$.

3¹¹. Modomiki, $i = 2 = n = 2$ va $f(y^3) = 0 = f(x^5) = 0$ ekan, tadqiqotli izlash muvaffaqiyatsizdir. 5-qadamga o'tamiz.

5². $\Delta_1 = 0,25 < \varepsilon = 0,3$; $\Delta_2 = 0,5 > \varepsilon$ bo'lgani uchun, Δ_2 qadamni kichraytiramiz: $\Delta_1 = 0,25$; $\Delta_2 = \frac{0,5}{2} = 0,25$. $y^1 = x^5 = (5,6)^T$, $x^6 = x^5$, $k = k + 1 = 6$, $i = 1$ deb olamiz va 2-qadamga o'tamiz.

2¹². $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(5,25; 6) = 0,25 > f(y^1) = 0$ va $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(4,75; 6) = 0,25 > f(y^1) = 0$, bo'lganligidan, qadamlar muvaffaqiyatsiz va $y^2 = y^1 = (5;6)^T$.

3¹². Modomiki, $i = 1 < 2 = n$ ekan, u holda, $i = i + 1 = 2$ va 2-qadamga o'tamiz.

2¹³. $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(5; 6,25) = 0,0625 > f(y^2) = 0$ va $f(y^2 - \Delta_2 d_2) = f(5; 5,875) = 0,0625 > f(y^2) = 0$ bo'lganligidan, qadamlar muvaffaqiyatsiz va $y^3 = y^2 = (5; 6)^T$.

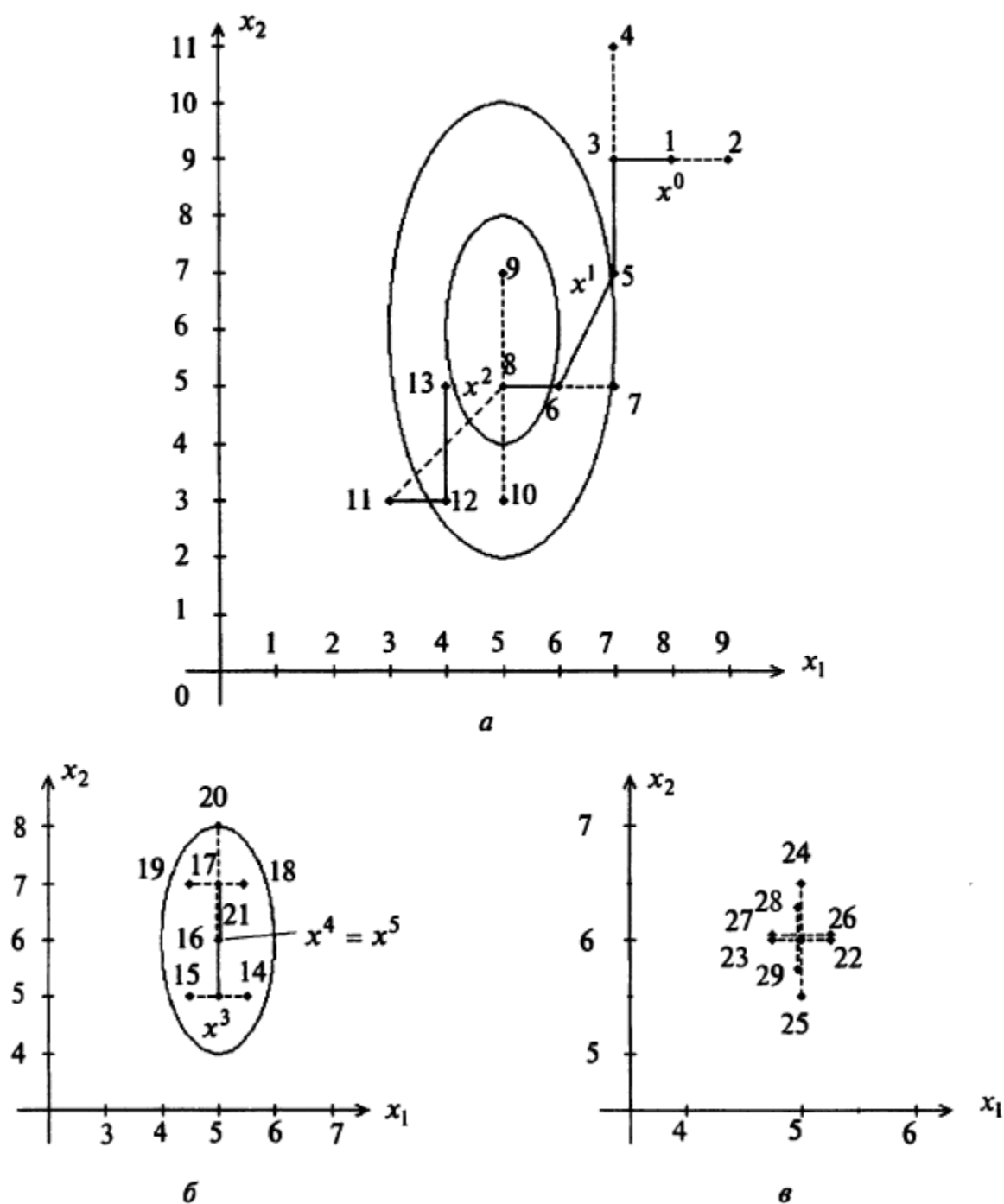


Рис. 5.13

10.2- chizma

3¹³. Modomiki, $i = 2 = n = 2$ va $f(y^3) = 0 = f(x^6) = 0$ ekan, u holda, 5-qadamga o'tamiz.

5³. $\Delta_1 = 0,25 < \varepsilon = 0,3$ va $\Delta_2 = 0,25 < \varepsilon = 0,3$ bo'lgani uchun izlash nihoyasiga yetdi: $x^* = (5; 6)^T$.

10.2- a-c chizmalarda olingan nuqtalar ketma-ket tasvirlangan; bunda muvaffaqiyatli iteratsiyalar – tutash chiziqlar orqali, muvaffaqiyatsiz iteratsiyalar esa, punktir chiziqlar orqali berilgan. ■

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Konfiguratsiyalar usuli qanday strategiyalar sinfiga mansub?
2. Tadqiqotli izlashning mohiyatini izohlang.
3. Xuk-Jivs usulida minimumni izlash qanday tartibda amalga oshiriladi?
4. Namuna bo'yicha izlashning mohiyatini izohlang.
5. Qanday iteratsiya muvaffaqiyatli iteratsiya deyiladi?
6. Qanday iteratsiya muvaffaqiyatsiz iteratsiya deyiladi?
7. Xuk-Jivs usulining algoritmi bosqichlarini keltiring.
8. Xuk-Jivs usulining yaqinlashishi haqida nimalar ni bilasiz?

Mustaqil ish tooshiriqlari

Quyidagi funksiyalarning minimumini, konfiguratsiyalar (Xuk-Jivs) usulidan foydalanib, toping:

$$1. f(x) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 2.$$

Javob: aniq yechim: $x^* = (1,1)^T$.

$$2. f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 + 2)^2.$$

Javob: aniq yechim - $x^* = (2,5,-2)^T$.

$$3. f(x) = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 - 4x_1 + 3.$$

Javob: aniq yechim - $x^* = (1,0)^T$.

$$4. f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2.$$

Javob: aniq yechim - $x^* = (3,2)^T$.

$$5. f(x) = 1 - 2x_1 - 2x_2 - 4x_1x_2 + 10x_1^2 + 2x_2^2.$$

Javob: aniq yechim - $x^* = (0,25; 0,75)^T$.

11 – ma’ruza ROZENBROK USULI

План:

- 11.1. Masalaning qo‘yilishi.
- 11. 2. Izlash strategiyasi.
- 11. 3. Algoritm.
- 11. 4. Yaqinlashishi.
- 11. 5. Misollar.

Tayanch iboralar: *shartsiz minimum masalasi, Rozenbrok usulida izlash strategiyasi, cho‘zish koeffitsiyenti, siqish koeffitsiyenti, joriy yo‘nalishlar sistemasi, Rozenbrok usulining algoritmi.*

Asosiy adabiyotlar.

1. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
2. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Методы оптимизации. Изд. 2-е, Минск, изд-во БГУ, 1981.
3. **Алексеев В.М, Галеев Э.М., Тихомиров В.М.** Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 2005.

Qo‘shimcha adabiyotlar.

4. **Ашманов С.А., Тимохов А.В.** Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.
5. **Пантелеев А.В.** Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высш.шк. 2005.

11.1. Masalaning qo‘yilishi.

Ко‘п o‘zgaruvchili $f(x)$ funksiyaning shartsiz minimumini, ya’ni shunday $x^* \in R^n$ nuqtani topish kerakki, unda

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x)$$

munosabat bajarilsin.

11.1-ta’rif. Faraz qilaylik, $d_1, d_2, \dots, d_n$ – normasi birga teng bo‘lgan o‘zaro chiziqli bog‘lanmagan vektorlar bo‘lsin. Agar barcha $i = 1, \dots, n$, lar uchun называются *взаимно ортогональными*, если для всех справедливо условие $d_i^T d_j = 0, j \neq i$ shart bajarilsa, bu vektorlar o‘zaro orthogonal deyiladi.

11.2. Izlash strategiyasi.

Rozenbrok usulining mohiyati quyidagidan iborat. Boshlang‘ich nuqta beriladi. U nuqtadan n chiziqli bog‘lanmagan va orthogonal yo‘nalishlar bo‘ylab o‘zgaradigan diskret qadamlar yordamida funksiyaning kamayish yo‘nalishini iterativ izlash amalga oshiriladi. Tadqiq qilinayotgan yo‘nalishda muvaffaqiyatli qadam holda, navbatdagi qadamda uning qiymati cho‘zish koeffitsiyenti yordamida ortadi, qadam muvaffaqiyatsiz bo‘lgan holda esa, siqish koeffitsiyentiga ko‘paytirish hisobiga, kamayadi (bunda izlash yo‘nalishi qarama-qarshisiga almashtiriladi). Joriy yo‘nalishlar sistemasidagi izlash, funksiya kamayishining barcha imkoniyatlari aniqlanganiga qadar o‘tkaziladi. Agar izlashning har bir

yoʻnalishida muvaffaqiyatsizlik yuz bersa, u holda, yangi chiziqli bogʻlanmagan va orthogonal yoʻnalishlar toʻplami quriladi va alohida yoʻnalishlar boʻyicha tsiklik izlash davom ettiriladi. Yangi yoʻnalishlar oldingilariga nisbatan shunday buriladiki, ular jarliklar boʻylab choʻziladi (11.1-chizma).

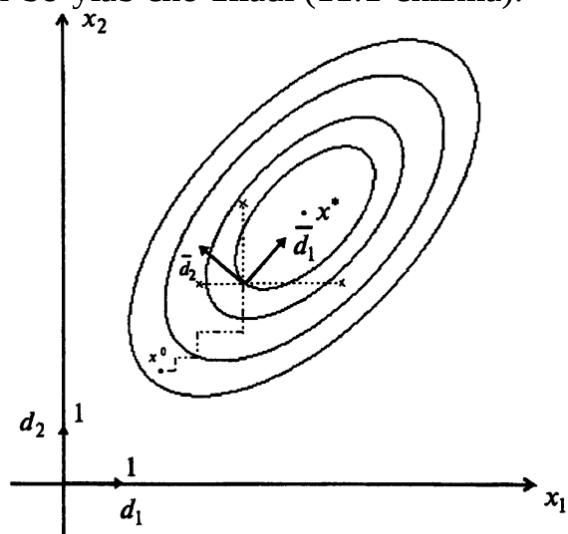


Рис. 5.17

Ак

11.1- chizma.

11.3. Algoritm.

1-qadam. x^0 boshlangʻich nuqta, algaritmni toʻxtatish uchun $\varepsilon > 0$ son, $\alpha > 1$ choʻzish va $-1 < \beta < 0$ siqish koeffitsiyentlari berilgan, boshlangʻich chiziqli bogʻlanmagan va ortogonal $d_1, d_2, \dots, d_n$ s ifatida

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, d_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix};$$

koordinatalar yoʻnalishlarini olish, izlash yoʻnalishlarining har biri boʻylab qadamning boshlangʻich uzunligi $\Delta_1^0, \dots, \Delta_n^0 > 0$; N -bir iteratsiyada barcha yoʻnalishlar boʻyicha muvaffaqiyatsiz qadamlar seriyasining maksimal soni boʻlsin. $y^1 = x^0, k = 0, i = 1$, barcha i lar uchun $\Delta_1 = \Delta_1^0$ deb olish.

2-qadam. i -yoʻnalish boʻyicha:

a) agar $f(y^i + \Delta_i d_i) < f(y^i)$ boʻlsa, qadam muvaffaqiyatli hisoblanadi. Bu holda $y^{i+1} = y^i + \Delta_i d_i, \Delta_i = \alpha \Delta_i$ deb olish va 3-qadamga oʻtish;

b) agar $f(y^i + \Delta_i d_i) \geq f(y^i)$ boʻlsa, qadam muvaffaqiyatsiz hisoblanadi. U holda, $y^{i+1} = y^i, \Delta_i = \beta \Delta_i$ deb olish va 3-qadamga oʻtish.

3-qadam. Quyidagi shartlarning bajarilishini tekshirish:

a) agar $i < n$ boʻlsa, u holda, $i = i + 1$ deb olish va 2-qadamga oʻtish (qolgan yoʻnalishlar boʻyicha qadamlar amalga oshirish);

b) agar $i = n$ boʻlsa, joriy ortogonal yoʻnalishlar boʻyicha izlashning yutuqliligini tekshirish:

- agar $f(y^{n+1}) < f(y^1)$ bo'lsa, ya'ni 2-qadamda yo'nalish bo'yicha hech bo'lmaganda bitta tushish muvaffaqiyatli bo'lsa, $y^1 = y^{n+1}, i = 1$, deb olish va 2-qadamga o'tish;

- agar $f(y^{n+1}) = f(y^1)$ bo'lsa, ya'ni n ta oxirgi qadamlarning har biri muvaffaqiyatsiz bo'lsa, joriy iteratsiyada izlashning yutuqliligini baholash:

- agar $f(y^{n+1}) < f(x^k)$ bo'lsa, ya'ni k - iteratsiyada hech bo'lmaganda bitta qadam muvaffaqiyatli bo'lsa, u holda, 4-qadamga o'tish;

- agar $f(y^{n+1}) = f(x^k)$ bo'lsa, ya'ni k - iteratsiyada birorta ham muvaffaqiyatli qadam bo'lmasa, izlash jarayonini vaqtincha to'xtatish. Agar joriy iteratsiyada barcha ketma-ket muvaffaqiyatsiz qadamlar seriyasining l soni N dan oshmasa, u holda, yakunlash shartini tekshirish, aks holda esa, 4-qadamga o'tish. Oxirgi qadamlar seriyasida foydalanilgan Δ_i miqdorlar tekshiriladi. Agar barcha i lar uchun $|\Delta_i| \leq \varepsilon$ bo'lsa, u holda, masalaning taqribiy yechimi topilgan hisoblanadi: $x^* \cong x^k$. Agar hech bo'lmaganda bitta i uchun $|\Delta_i| > \varepsilon$ bo'lsa, u holda, $y^1 = y^{n+1}, i = 1$ deb olish va 2-qadamga o'tish.

4-qadam. $x^{k+1} = y^{n+1}$ deb olish va yakunlash shartini tekshirish:

a) agar $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon$ bo'lsa, u holda, izlashni to'xtatish: $x^* \cong x^{k+1}$;

b) agar $\|x^{k+1} - x^k\| > \varepsilon$ bo'lsa, u holda k - iteratsiyada izlashning har bir yo'nalishi bo'yicha qadamlar $\lambda_1 \dots \lambda_n$ uzunligini

$$x^{k+1} - x^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i d_i$$

formula yordamida hisoblab chiqish. So'ngra Gram-Shmidt almashtirishidan foydalanib, izlashning yangi chiziqli bog'lamagan va ortogonal $\bar{d}_1 \dots \bar{d}_n$ yo'nalishlarni qurish:

$$a_i = \begin{cases} d_i, & \lambda_i = 0 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j d_j, & \lambda_i \neq 0 \end{cases}, \quad b_i = \begin{cases} a_i, & i = 1 \\ \sum_{j=1}^{i-1} (a_i^T \bar{d}_j) \bar{d}_j, & i \geq 2, \end{cases}$$

$$\bar{d}_i = \frac{b_i}{\|b_i\|}.$$

Shuni e'tirof etish kerakki, agar $\lambda_i = 0$ bo'lsa, u holda, $\bar{d}_j = d_j$, ya'ni yangi yo'nalishlarni, faqat, ular uchun, $\lambda_i \neq 0$ bo'lgan indekslar uchun hisoblash lozim. Yangi yo'nalishlar topilgandan so'ng: barcha $i = 1, \dots, n$, lar uchun, $\bar{d}_j = d_j$, $\Delta_i = \Delta_i^0$, $k = k + 1, y^1 = x^{k+1}, i = 1$, deb olish va 2-qadamga o'tish.

11.1. Izohlar.

1. Agar 2-qadam muvaffaqiyatli bo'lsa, u holda Δ_i qadam $\alpha \Delta_i$ ga almashtiriladi, ya'ni qadam miqdori (kattaligi) orttiriladi, chunki $\alpha > 1$. Muvaffaqiyatsizlik navbatdagi urinishda i - yo'nalish bo'ylab qarama-qarshi yo'nalishda siljishga olib keladi, chunki $\beta < 0$.

2. Rozenbrok quyidagi cho'zish va siqish koeffitsiyentlarini tavsiya etgan: $\alpha = 3, \beta = -0,5$.

3. Devis, Swenn va Kemilar har bir d_i yo'nalish bo'ylab izlashda bir o'lchovli minimallashtirish algoritmini qo'llab, Rozenbrok usulini modifikatsiya

qilishdi[4,42]. U holda, agar $f(x)$ differensiallanuvchi bo'lganda, u holda generatsiya qilinayotgan nuqtalar ketma-ketligi statsionar nuqtaga intiladi.

11.1-misol. Ushbu $f(x) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$ funksiyaning minimumini Rozenbrok usulidan foydalanib, toping.

□ 1. Boshlang'ich nuqta $x^0 = (8,9)^T$, $\varepsilon = 0,6$; $\alpha = 2$, $\beta = -0,5$; $d_1 = (1,0)^T$, $d_2 = (0,1)^T$; $\Delta_1^0 = 1$, $\Delta_2^0 = 2$, $N = 3$ larni beramiz. $y^1 = x^0 = (8,9)^T$, $k = 0$, $i = 1$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 2$ deb olamiz.

2⁰. $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(9,9) = 73 > f(y^1) = f(8,9) = 45$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsiz: $y^2 = y^1 = (8,9)^T$, $\Delta_1 = -0,5 \cdot 1 = -0,5$.

3⁰. Modomiki, $i = 1 < n = 2$ ekan, u holda, $i = i + 1 = 2$ va 2-qadamga o'tamiz.

2¹. $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(8,11) = 61 > f(y^2) = 45$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsiz: $y^3 = y^2 = (8,9)^T$, $\Delta_2 = -0,5 \cdot 2 = -1$.

3¹. Modomiki, $i = 2 = n$, $f(y^{n+1}) = f(y^3) = f(x^0)$ ekan, qadamlarning bitta muvaffaqiyatsiz seriyasi bajarildi: $l = 1 < N = 3$, lekin bajarilgan qadamlar seriyasi uchun $|\Delta_1| = 1 > \varepsilon = 0,6$; $|\Delta_2| = 2 > \varepsilon = 0,6$, shu sababli, $y^1 = y^3 = (8,9)^T$, $i = 1$ deb olamiz va 2-qadamga o'tamiz.

2². $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(7,5; 9) = 34 > f(y^1) = f(8,9) = 45$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatli:

$$y^2 = y^1 + \Delta_1 d_1 = (7,5; 9)^T, \Delta_1 = \alpha \Delta_1 = 2(-0,5) = -1$$

3². Modomiki, $i = 1 < n = 2$ ekan, u holda, $i = i + 1 = 2$ va 2-qadamga o'tamiz.

2³. $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(7,5; 8) = 29 < f(y^2) = 34$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatli:

$$y^3 = y^2 + \Delta_2 d_2 = (7,5; 8)^T, \Delta_2 = \alpha \Delta_2 = 2(-1) = -2.$$

3³. Modomiki, $i = 2 = n = 2$, $f(y^3) = 29 < f(y^1) = 45$ ekan, u holda, $y^1 = y^3 = (7,5; 8)^T$, $i = 1$ deb olamiz va 2-qadamga o'tamiz.

2⁴. $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(6,5; 8) = 13 < f(y^1) = f(7,5; 8) = 29$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatli:

$$y^2 = y^1 + \Delta_1 d_1 = (6,5; 8)^T, \Delta_1 = \alpha \Delta_1 = 2(-1) = -2.$$

3⁴. Modomiki, $i = 1 < n = 2$ ekan, u holda, $i = i + 1 = 2$ va 2-qadamga o'tamiz.

2⁵. $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(6,5; 6) = 9 < f(y^2) = f(6,5; 8) = 13$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatli:

$$y^3 = y^2 + \Delta_2 d_2 = (6,5; 6)^T, \Delta_2 = \alpha \Delta_2 = 2(-2) = -4.$$

3⁵. Modomiki, $i = 2 = n$, $f(y^3) = 9 < f(y^1) = 29$ ekan, u holda, $y^3 = y^2 = (6,5; 6)^T$, $i = 1$ deb olamiz va 2-qadamga o'tamiz.

2⁶. $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(4,5; 6) = 1 < f(y^1) = f(6,5; 6) = 9$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatli:

$$y^2 = y^1 + \Delta_1 d_1, \Delta_1 = \alpha \Delta_1 = -0,5(-4) = 2.$$

3⁶. Modomiki, $i = 1 < n = 2$ ekan, u holda, $i = i + 1 = 2$ va 2-qadamga o'tamiz.

2⁷. $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(4,5; 2) = 17 > f(y^2) = 1$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsiz: $y^3 = y^2 = (4,5; 6)^T$, $\Delta_2 = \alpha\beta = -0,5(-4) = 2$.

3⁷. Modomiki, $i = 2 = n$, $f(y^3) = 1 < f(y^1) = f(6,5; 6) = 9$ ekan, u holda, $y^1 = y^3 = (4,5; 6)^T$, $i = 1$ va 2-qadamga o'tamiz.

2⁸. $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(0,5; 6) = 81 > f(y^1) = f(4,5; 6) = 1$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsiz: $y^2 = y^1 = (4,5; 6)^T$, $\Delta_1 = -0,5(-4) = 2$.

3⁸. Modomiki, $i = 1 < n = 2$ ekan, u holda, $i = i + 1 = 2$ va 2-qadamga o'tamiz.

2⁹. $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(4,5; 8) = 5 > f(y^2) = 1$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsiz: $y^3 = y^2 = (4,5; 6)^T$, $\Delta_2 = -0,5 \cdot 2 = -1$

3⁹. Modomiki, $i = 2 = n = 2$ va $f(y^3) = f(y^1)$, lekin $f(y^3) = 1 < f(x^0) = 45$ ekan, u holda, 4-qadamga o'tamiz.

4⁰. $x^1 = y^3 = (4,5; 6)^T$ deb olamiz. Modomiki, $\|x^1 - x^0\| = \|(8,9)^T - (4,5; 6)^T\| = \sqrt{3,5^2 + 3^2} = 4,61 > \varepsilon = 0,6$ ekan, u holda, λ_1, λ_2 larni $x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ munosabatdan hisoblaymiz.

Buyerdan, $\lambda_1 = -3,5$; $\lambda_2 = -3$. Endi izlash yo'nalishlarining yangi majmuasini quramiz:

$$a_1 = \sum_{j=1}^{n=2} \lambda_j d_j = -3,5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ -3 \end{pmatrix}; a_1$$

$$= \sum_{j=2}^{n=2} \lambda_j d_j = -3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} -3,5 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ chunki, } i = 1; \bar{d}_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} -3,5 \\ -3 \end{pmatrix}}{4,61} = \begin{pmatrix} -0,76 \\ -0,65 \end{pmatrix};$$

$$b_2 = a_2 - \sum_{j=1}^{2-1} (a_2^T \bar{d}_j) \bar{d}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} - \left((0 - 3) \begin{pmatrix} -0,76 \\ -1,729 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -0,76 \\ -0,65 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} - 1,95 \begin{pmatrix} -0,76 \\ -0,76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,482 \\ -\frac{1}{729} \end{pmatrix}; \bar{d}_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1,482 \\ -1,729 \end{pmatrix}}{2,28}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,65 \\ -0,76 \end{pmatrix};$$

$d_1 = \bar{d}_1, d_2 = \bar{d}_2, \Delta_1 = \Delta_1^0 = 1, \Delta_2 = \Delta_2^0 = 2, k = k + 1, y^1 = x^1 = (4,5; 6)^T, i = 1$ deb olamiz va 2-qadamga o'tamiz.

2¹⁰. $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(3,74; 5,35) = 6,766 > f(y^1) = f(4,5; 6) = 1$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsiz:

$$y^2 = y^1 = (4,5; 6)^T, \Delta_1 = -0,5 \cdot 1 = -0,5.$$

3¹⁰. Modomiki, $i = 1 < n = 2$ ekan, u holda, $i = i + 1 = 2$.

2¹¹. $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(5,801; 4,481) = 4,876 > f(y^2) = 1$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsiz: $y^3 = y^2 = (4,5; 6)^T$, $\Delta_2 = -0,5 \cdot 2 = -1$.

3¹¹. Modomiki, $i = 2 = n$, $f(y^3) = f(y^1) = 1$ ekan, joriy iteratsiyada izlashning yutuqliligini baholaymiz. $f(y^3) = f(y^1) = 1$ bo'lgani uchun, joriy

iteratsiyada birorta ham muvaffaqiyatli bo'lgan emas. $l - 1 < N = 3$ ekanligidan, yakunlash shartini tekshiramiz. Natijada: $|\Delta_2| = 1 > \varepsilon = 0,6$ va shu sababli, $y^1 = y^3 = (4,5; 6)^T, i = 1$ deb olamiz va 2-qadamga o'tamiz.

2¹². $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(4,880; 6,325) = 0,164 < f(y^1) = f(4,5; 6) = 1$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatli:

$$y^2 = y^1 + \Delta_1 d_1 = (4,880; 6,325)^T, \Delta_1 = \alpha \Delta_1 = -0,5 \cdot 2 = -1.$$

3¹². Modomiki, $i = 1 < n = 2$ ekan, u holda, $i = i + 1 = 2$ va 2-qadamga o'tamiz.

2¹³. $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(4,229; 7,085) = 3,555 > f(y^2) = 0,164$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsiz:

$$y^3 = y^2 = (4,880; 6,325)^T, \Delta_2 = \beta \Delta_2 = -0,5(-1) = 0,5.$$

3¹³. Modomiki, $i = 2 = n$ ekan, u holda, joriy ortogonal yo'nalishlar bo'yicha izlashning yutuqliligini tekshiramiz: $f(y^3) = 0,164 < f(y^1) = 1$ – izlash yutuqli. $y^1 = y^3 = (4,880; 6,325)^T, i = 1$ deb olamiz va 2-qadamga o'tamiz.

2¹⁴. Ushbu

$f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(5,639; 6,976) = 2,586 > f(y^1) = f(4,880; 6,325) = 0,164$, tengsizlik bajarilganligidan, qadam muvaffaqiyatsiz:

$$y^2 = y^1 = (4,880; 6,325)^T, \Delta_1 = -0,5 \cdot (-1) = 0,5.$$

3¹⁴. Modomiki, $i = 1 < n = 2$ ekan, u holda, $i = i + 1 = 2$ va 2-qadamga o'tamiz.

2¹⁵. $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(5,205; 5,946) = 0,171 > f(y_2) = 0,164$ bo'lgani uchun, qadam muvaffaqiyatsiz:

$$y^3 = y^2 = (4,880; 6,325)^T, \Delta_2 = -0,5 \cdot 0,5 = -0,25.$$

3¹⁵. Modomiki, $i = 2 = n$ va $f(y^3) = 0,164 = f(y^1)$ ekan, joriy iteratsiyada izlashning yutuqliligini baholaymiz: $f(y^3) = 0,164 < f(x^1) = 1$ – joriy iteratsiyada muvaffaqiyatli qadam bo'lgan edi. 4-qadamga o'tamiz.

4¹. $x^2 = y^3 = (4,880; 6,325)^T$ deb olamiz. Ushbu

$$\|x^2 - x^1\| = \sqrt{(4,880 - 4,5)^2 + (6,325 - 6)^2} = 0,5 < \varepsilon = 0,6$$

shart bajarilganligidan, izlash jarayoni yakunlanadi:

$$x^* = x^2 = (4,880; 6,325)^T; f(x^*) = 0,164. \blacksquare$$

O'z-o'zini tekshirish savollari

9. Rozenbrok usuli qanday strategiyalarga mansub?
10. Rozenbrok usuli da minimumni izlash strategiyasi qanday amalga oshiriladi?
11. Rozenbrok usulining algoritmini keltiring.
12. Rozenbrok usulining yaqinlashishi haqida nima deyish mumkin?
13. Chiziqli bog'lanmagan vektorlar sistemasining ta'rifini bering va misollar keltiring.
14. Qanday vektorlar sistemasi o'zaro ortogonal deyiladi?

Mustaqil ish topshiriqlari

Rozenbrok usulidan foydalanib, quyidagi funksiyalarning minimumini toping.

$$6. f(x) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 2.$$

Javob: aniq yechim $x^* = (1,1)^T$.

$$7. f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 + 2)^2.$$

Javob: aniq yechim $x^* = (2,5, -2)^T$.

$$8. f(x) = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 - 4x_1 + 3.$$

Javob: aniq yechim $x^* = (1,0)^T$.

$$9. f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2.$$

Javob: aniq yechim $x^* = (3,2)^T$.

Пример 11.2. Найти минимум функции $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ методом Розенброка.

□ 1. Зададим начальную точку $x^0 = (0,5; 1)^T$, $\varepsilon = 0,075$; $\alpha = 3$, $\beta = -0,5$;
 $d_1 = (1,0)^T$, $d_2 = (0,1)^T$; $\Delta_1^0 = \Delta_2^0 = 0,1$; $N = 3$. Положим $y^1 = x^0 = (0,5; 1)^T$, $k = 0$, $i = 1$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0,1$.

2⁰. Поскольку $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(0,6; 1) = 2,32 > f(y^1) = f(0,5; 1) = 2$, шаг неудачен: $y^2 = y^1$, $\Delta_1 = -0,5(0,1) = -0,05$.

3⁰. Так как $i = 1 < n = 2$, поэтому $i = i + 1 = 2$ и перейдем к шагу 2.

2¹. Поскольку $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(0,5; 1,1) = 2,26 > f(y^2) = 2$, шаг неудачен: $y^3 = y^2$, $\Delta_2 = -0,5(0,1) = -0,05$.

3¹. Имеем $i = 2 = n$, $f(y^3) = f(y^1)$, выполнена одна неудачная серия шагов: $l = 1 < N = 3$. На этой серии $|\Delta_1| = 0,1 > \varepsilon = 0,075$; $|\Delta_2| = 0,1 > \varepsilon = 0,075$, поэтому положим $y^1 = y^3$, $i = 1$ и перейдем к шагу 2.

2². Поскольку $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(0,45; 1) = 1,855 > f(y^1) = f(0,5; 1) = 2$, шаг удачен: $y^2 = (0,45; 1)^T$, $\Delta_1 = 3(-0,05) = -0,15$.

3². Имеем $i = 1 < n = 2$, поэтому $i = i + 1 = 2$ и перейдем к шагу 2.

2³. Поскольку $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(0,45; 0,95) = 1,735 < f(y^2) = 1,855$, то шаг удачен: $y^3 = (0,45; 0,95)^T$, $\Delta_2 = 3(-0,05) = -0,15$.

3³. Имеем $i = 2 = n$, $f(y^3) = 1,735 < f(y^1) = 2$. Положим $y^1 = (0,45; 0,95)^T$, $i = 1$ и перейдем к шагу 2.

2⁴. Так как $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(0,3; 0,95) = 1,3675 < f(y^1) = 1,735$, шаг удачен: $y^2 = y^1 + \Delta_1 d_1 = (0,3; 0,95)^T$, $\Delta_1 = 3(-0,15) = -0,45$.

3⁴. Имеем $i = 1 < n = 2$, поэтому $i = i + 1 = 2$ и перейдем к шагу 2.

2⁵. Поскольку $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(0,3; 0,8) = 1,06 > f(y^2) = 1,3675$, шаг удачен: $y^3 = (0,8; 0,8)^T$, $\Delta_2 = 3(-0,15) = -0,45$.

3⁵. Имеем $i = 2 = n$, $f(y^3) = 1,06 < f(y^1) = 1,855$. Положим $y^1 = y^3 = (0,3; 0,8)^T$, $i = 1$ и перейдем к шагу 2.

2⁶. Поскольку $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(-0,15; 0,8) = 0,565 < f(y^1) = 1,06$ шаг удачен: $y^2 = (-0,15; 0,8)^T$, $\Delta_1 = 3(-0,45) = -1,35$.

3⁶. Имеем $i = 1 < n = 1$, поэтому $i = i + 1 = 2$ и перейдем к шагу 2.

2⁷. Так как $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(-0,15; 0,35) = 0,115 < f(y^3) = 0,565$, шаг удачен: $y^2 = (-0,15; 0,35)^T$, $\Delta_2 = 3(-0,45) = -1,35$.

3⁷. Имеем $i = 2 = n$, $f(y^3) = 0,115 < f(y^1) = 1,06$. Положим $y^1 = y^3 = (-0,15; 0,35)^T$, $i = 1$ и перейдем к шагу 2.

2⁸. Поскольку $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(-1,5; 0,35) = 4,1 > f(y^1) = 0,115$, шаг неудачен: $y^2 = y^1 = (-0,15; 0,35)^T$, $\Delta_1 = -0,5(-1,35) = 0,675$.

3⁸. Имеем $i = 1 < n = 2$, поэтому $i = i + 1 = 2$ и перейдем к шагу 2.

2⁹.. Так как $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(-0,15; -1) = 1,195 > f(y^2) = 0,115$, шаг неудачен: $y^3 = y^1 = (-0,15; 0,35)^T$, $\Delta_2 = -0,5(-1,35) = 0,675$.

3⁹. Имеем $i = 2 = n = 2$, $f(y^3) = f(y^1) = 0,115$. Так как выполняется условие $f(y^3) = 0,115 < f(x^0) = 2$, переходим к шагу 4.

4⁰. Положим $x^1 = y^3 = (-0,15; 0,35)^T$.

Так как $\|x^1 - x^0\| = \sqrt{(-0,15 - 0,5)^2 + (0,35 - 1)^2} = 0,92 > \varepsilon = 0,075$,

то вычислим λ_1, λ_2 из соотношения $x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} -0,65 \\ -0,65 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Отсюда $\lambda_1 = \lambda_2 = -0,65$.

Построим новый набор направлений поиска:

$$a_1 = \sum_{j=1}^{n=2} \lambda_j d_j = -0,65 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0,65 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,65 \\ -0,65 \end{pmatrix};$$

$$a_2 = \sum_{j=2}^{n=2} \lambda_j d_j = -0,65 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,65 \end{pmatrix};$$

$$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} -0,65 \\ -0,65 \end{pmatrix}, \text{ так как } i = 1; \bar{d}_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \begin{pmatrix} -0,707 \\ -0,707 \end{pmatrix};$$

$$b_2 = a_2 = \sum_{j=1}^{2-1} (a_2^T \bar{d}_j) \bar{d}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,65 \end{pmatrix} - \left((0 - 0,65) \begin{pmatrix} -0,707 \\ -0,707 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -0,707 \\ -0,707 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,65 \end{pmatrix} - 0,459 \begin{pmatrix} -0,707 \\ -0,707 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,325 \\ -0,325 \end{pmatrix}; \bar{d}_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{\begin{pmatrix} -0,707 \\ -0,707 \end{pmatrix}}{0,459} = \begin{pmatrix} 0,707 \\ -0,707 \end{pmatrix}.$$

Положим $d_1 = \bar{d}_1$, $d_2 = \bar{d}_2$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_1^0 = \Delta_2^0 = 0,1$, $k = k + 1 = 1$,
 $y^1 = x^1 = (-0,15; 0,35)^T$, $i = 1$ и перейдем к шагу 2.

2¹⁰. Поскольку $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(-0,22; 0,28) = 0,114 > f(y^1) = 0,115$, шаг удачен: $y^2 = y^1 + \Delta_1 d_1 = (-0,22; 0,28)^T$, $\Delta_1 = \alpha \Delta_1 = 3 \cdot 0,1 = 0,3$.

3¹⁰. Имеем $i = 1 < n = 2$, поэтому $i = i + 1 = 2$ и перейдем к шагу 2.

2¹¹. Поскольку $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(-0,15; 0,209) = 0,057 > f(y^2) = 0,114$, шаг удачен: $y^3 = (-0,15; 0,209)^T$, $\Delta_2 = 3 \cdot 0,1 = 0,3$.

3¹¹. Имеем $i = 2 = n$, $f(y^3) = 0,057 < f(y^1) = 0,015$. Положим $y^1 = y^3 = (-0,15; 0,209)^T$, $i = 1$ и перейдем к шагу 2.

2¹². Поскольку $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(-0,362; -0,004) = 0,264 > f(y^1) = 0,057$, шаг неудачен: $y^2 = y^1$, $\Delta_1 = -0,5(0,3) = -0,015$.

3¹². Имеем $i = 1 < n = 2$, поэтому $i = i + 1 = 2$ и перейдем к шагу 2.

2¹³. Так как $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(0,062; -0,004) = 0,008 < f(y^2) = 0,057$, шаг удачен: $y^3 = (0,062; -0,004)^T$, $\Delta_2 = 3 \cdot 0,3 = 0,9$.

3¹³. Имеем $i = 2 = n$, $f(y^3) = 0,008 < f(y^1) = 0,057$. Положим $y^1 = y^3 = (0,062; -0,004)^T$, $i = 2$ и перейдем к шагу 2.

2¹⁴. Поскольку $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(0,168; 0,103) = 0,084 > f(y^1) = 0,008$, шаг неудачен: $y^2 = y^1 = (0,062; -0,004)^T$, $\Delta_1 = -0,5 \cdot (-0,015) = 0,0075$.

3¹⁴. Так как $i = 1 < n = 2$, то $i = i + 1 = 2$ и перейдем к шагу 2.

2¹⁵. Поскольку $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(0,698; -0,216) = 0,719 > f(y^2) = 0,008$, шаг неудачен: $y^3 = y^2$, $\Delta_2 = -0,5 \cdot 0,9 = -0,45$.

3¹⁵. Имеем $i = 2 = n$, $f(y^3) = 0,008 = f(y^1) = 0,008$.

Так как $f(y^3) = 8 \cdot 10 - 3 < f(x^1) = 0,115$, то перейдем к шагу 4.

4¹. Положим $x^2 = y^3 = (0,062; -4 \cdot 10 - 3)^T$. Так как справедливо $\|x^2 - x^1\| = \sqrt{(0,062 - (-0,15))^2 + (-4 \cdot 10^{-3} - 0,35)^2} = 0,41 > \varepsilon = 0,075$, то вычислим λ_1, λ_2 из соотношения $x^2 - x^1 = \begin{pmatrix} 0,212 \\ -0,353 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -0,707 \\ -0,707 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0,707 \\ -0,707 \end{pmatrix}$. Отсюда $\lambda_1 = 0,1, \lambda_2 = 0,4$. Построим новый набор направлений поиска:

$$a_1 = \sum_{j=1}^{n=2} \lambda_j d_j = 0,1 \begin{pmatrix} -0,707 \\ -0,707 \end{pmatrix} + 0,4 \begin{pmatrix} 0,707 \\ -0,707 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,212 \\ -0,353 \end{pmatrix};$$

$$a_2 = \sum_{j=2}^{n=2} \lambda_j d_j = 0,4 \begin{pmatrix} 0,707 \\ -0,707 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2828 \\ -0,2828 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} b_1 = a_1 &= \begin{pmatrix} 0,212 \\ -0,353 \end{pmatrix}, \text{ так как } i = 1; \bar{d}_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} 0,212 \\ -0,353 \end{pmatrix}}{0,41} = \begin{pmatrix} 0,51 \\ -0,86 \end{pmatrix}; b_2 = a_2 = \\ &= \sum_{j=1}^{2-1} (a_2^T \bar{d}_j) \bar{d}_j = \begin{pmatrix} 0,2828 \\ -0,2828 \end{pmatrix} - \left((0,2828 - 0,2828) \begin{pmatrix} 0,51 \\ -0,86 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0,51 \\ -0,86 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,2828 \\ -0,2828 \end{pmatrix} - 0,3874 \begin{pmatrix} 0,51 \\ -0,86 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0853 \\ 0,0504 \end{pmatrix}; \bar{d}_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{\begin{pmatrix} -0,0853 \\ 0,0504 \end{pmatrix}}{0,099} = \begin{pmatrix} 0,86 \\ 0,51 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Положим $d_1 = \overline{d_1}, d_2 = \overline{d_2}, \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_1^0 = \Delta_2^0 = 0,1; y_1 = x_2 = (0,062; -4 \cdot 10^{-3})^T, k = k + 1 = 2, i = 1$ и перейдем к шагу 2.

2¹⁶. Поскольку $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(0,111; 0,047) = 0,06 > f(y^1) = 8 \cdot 10^{-3}$, шаг неудачен: $y^3 = y^2, \Delta_2 = -0,5 \cdot 0,1 = -0,05$.

3¹⁷. Имеем $i = 2 = n, f(y^3) = f(y^1) = 8 \cdot 10^{-3}$, выполнена одна неудачная серия шагов: $l = 1 < N = 3$. На последней серии справедливы неравенства: $|\Delta_1| = 0,1 > \varepsilon = 0,075, |\Delta_2| = 0,1 > \varepsilon = 0,075$.

Поэтому положим $y^1 = y^3 = (0,062; -4 \cdot 10^{-3})^T, i = 1$ и перейдем к шагу 2.

2¹⁸. Поскольку $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(0,036; 0,039) = 5,5 \cdot 10^{-3} < f(y^2) = 8 \cdot 10^{-3}$, шаг удачен: $y^2 = (0,036; 0,039)^T, \Delta_1 = 2 \cdot (-0,05) = -0,1$.

3¹⁸. Имеем $i = 1 < n = 2$, поэтому $i = i + 1 = 2$ и перейдем к шагу 2.

2¹⁹. Так как $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(-7 \cdot 10^{-3}; 0,0135) = 1,86 \cdot 10^{-4} < f(y^2) = 5,5 \cdot 10^{-3}$, шаг удачен: $y^3 = (-7 \cdot 10^{-3}; 0,0135)^T, \Delta_2 = 2(-0,05) = -0,1$.

3¹⁹. Имеем $i = 2 = n, f(y^3) = 1,86 \cdot 10^{-4} < f(y^1) = 8 \cdot 10^{-3}$.

Положим

$y^1 = y^3, i = 1$ и перейдем к шагу 2.

2²⁰. Поскольку $f(y^1 + \Delta_1 d_1) = f(-0,058; 0,095) = 0,01 > f(y^1) = 1,86 \cdot 10^{-4}$, шаг неудачен: $y^2 = y^1, \Delta_1 = -0,5(-0,1) = 0,05$.

3²⁰. Имеем $i = 1 < n = 2$, поэтому $i = i + 1 = 2$ и перейдем к шагу 2.

2²¹. Поскольку $f(y^2 + \Delta_2 d_2) = f(-0,093; -0,0375) = 0,02 > f(y^2) = 1,86 \cdot 10^{-4}$, шаг неудачен: $y^3 = y^2 = y^1, \Delta_1 = -0,5(-0,1) = 0,05$.

3²¹. Имеем $i=2=n, f(y^3) = f(y^1)$. Так как справедливо условие $f(y^3) = 1,86 \cdot 10^{-4} < f(y^2) = 8 \cdot 10^{-3}$ то перейдем к шагу 4.

4²⁰. Положим $x^3 = y^3 = (7 \cdot 10^{-3}; 0,0135)^T$. Так как $\|x^3 + x^2\| = \sqrt{(-7 \cdot 10^{-3} - 0,062)^2 + (0,0135 - (-4 \cdot 10^{-3}))^2} = 0,071 < \varepsilon = 0,075$, то процесс поиска завершается: $x^0 = x^4 = (7 \cdot 10^{-3}; 0,0135)^T; f(x^0) = 1,86 \cdot 10^{-4}$. ■

Вопросы для самопроверки

15. Каким стратегиям относится метод Розенброка?
16. Как осуществляется стратегия поиска минимума в методе Розенброка?
17. Приведите алгоритм метода Розенброка.
18. Что можно сказать о сходимости метода Розенброка?

Задания на самостоятельную работу

Методом Розенброка найти минимум функций:

10. $f(x) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 2$.

Ответ: точное решение $x^* = (1,1)^T$.

11. $f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 + 2)^2$.

Ответ: точное решение $x^* = (2,5, - 2)^T$.

$$12. f(x) = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 - 4x_1 + 3.$$

Ответ: точное решение $x^* = (1,0)^T$.

$$13. f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2.$$

Ответ: точное решение $x^* = (3,2)^T$.

$$14. f(x) = 1 - 2x_1 - 2x_2 - 4x_1 x_2 + 10x_1^2 + 2x_2^2.$$

Ответ: точное решение $x^* = (0,25; 0,75)^T$.

Тесты по изученной теме

1. Утверждение:

Положить $x^{k+1} = y^{n+1}$ и проверить условие окончания:

а) если $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon$, то поиск завершить: $x^* \cong x^{k+1}$;

б) если $\|x^{k+1} - x^k\| > \varepsilon$, вычислить длины шагов по каждому направлению поиска на k -й итерации $\lambda_1 \dots \lambda_n$ из соотношения $x^{k+1} - x^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i d_i$. Далее построить новый набор линейно независимых и взаимно ортогональных направлений поиска $\bar{d}_1 \dots \bar{d}_n$ с помощью процедуры Грама-Шмидта:

$$a_i = \begin{cases} d_i, & \lambda_i = 0 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j d_j, & \lambda_i \neq 0 \end{cases} \quad b_i = \begin{cases} a_i, & i = 1 \\ \sum_{j=1}^{i-1} (a_i^T \bar{d}_j) \bar{d}_j, & i \geq 2, \end{cases}$$
$$\bar{d}_i = \frac{b_i}{\|b_i\|}.$$

является шагом алгоритма метода Розенброка.

А) 3-; Б) 4-; В) 2-; Г) 1- .

2. Утверждение:

Сделать по i -му направлению:

а) если $f(y^i + \Delta_i d_i) < f(y^i)$, шаг считается удачным. В этом случае следует положить $y^{i+1} = y^i + \Delta_i d_i$, $\Delta_i = \alpha \Delta_i$ и перейти к шагу 3;

б) если $f(y^i + \Delta_i d_i) \geq f(y^i)$, шаг считается неудачным. Тогда следует положить $y^{i+1} = y^i$, $\Delta_i = \beta \Delta_i$ и перейти к шагу 3.

является шагом алгоритма метода Розенброка.

А) 3-; Б) 4-; В) 2-; Г) 1- .

3. Утверждение:

Проверить выполнение условий:

а) если $i < n$, то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 2 (сделать шаги по оставшимся направлениям);

б) если $i = n$, проверить успешность поиска по текущим ортогональным направлениям:

- если $f(y^{n+1}) < f(y^1)$, т.е. хотя бы один спуск по направлению на шаге 2 был успешным, положить $y^1 = y^{n+1}$, $i = 1$, и перейти к шагу 2;

- если $f(y^{n+1}) = f(y^1)$, т.е. каждый из n последних шагов был неудачным, оценить успешность поиска на текущей итерации:

- если $f(y^{n+1}) < f(x^k)$, т.е. на k -й итерации хотя бы один шаг удачный, то перейти к шагу 4;

- если $f(y^{n+1}) = f(x^k)$, т.е. не было ни одного удачного шага на k -й итерации, процесс поиска приостановить. Если число l последовательно неудачных серий шагов по всем направлениям на текущей итерации не превышает N , проверить условие окончания, а иначе перейти к шагу 4. Проверяются величины Δ_i , использованные во время последней серии шагов. Если $|\Delta_i| \leq \varepsilon$ для всех i , то найдено приближенное решение задачи: $x^* \cong x^k$. Если $|\Delta_i| > \varepsilon$ хотя бы для одного i , то положить $y^1 = y^{n+1}$, $i = 1$ и перейти к шагу 2.

является шагом алгоритма метода Розенброка.

А) 3-; Б) 4-; В) 2-; Г) 1- .

4. Утверждение:

Задать начальную точку x^0 , число $\varepsilon > 0$ для остановки алгоритма, коэффициенты растяжения $\alpha > 1$ и сжатия $-1 < \beta < 0$, в качестве начальных линейно независимых и ортогональных направлений $d_1, d_2, \dots, d_n$ выбрать координатные направления:

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, d_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

начальную длину шага вдоль каждого из направлений поиска $\Delta_1^0, \dots, \Delta_n^0 > 0$; N —максимальное число неудачных серий шагов по всем направлениям на одной итерации. Положить $y^1 = x^0$, $k=0$, $i=1$, $\Delta_1 = \Delta_1^0$ для всех i .

является шагом алгоритма метода Розенброка.

А) 3-; Б) 4-; В) 2-; Г) 5- .

12 - ma'ruza
SHARTSIZ MINIMALLASHTIRISH MASALASIDA BIRINCHI TARTIBLI
SHARTLAR.

Reja:

11.1. O'ZGARMAS QADAMLI GRADIYENTLI TUSHISH USULI.

11.1.1. Masalaning qo'yilishi.

11.1.2. Izlash strategiyasi.

11.1.3. Algoritm.

11.1.4. Yaqinlashishi.

11.1.5. Yaqinlashish tezligi.

11.1.6. Masalani yechish jarayoni.

11.2. GRADIYENTLI ENG TEZ TUSHISH USULI.

11.2.1. Masalaning qo'yilishi.

11.2.2. Izlash strategiyasi.

11.2.3. Algoritm.

11.2.4. Yaqinlashishi.

11.2.5. Yaqinlashish tezligi.

11.2.6. Masalani yechish jarayoni.

Tayanch iboralar: *quyidan chegaralangan funksiya, funksiyaning xususiy hosilasi, Evklid fazosi, funksiyaning lokal minimum, nuqtalar ketma-ketligi, kamayuvchi funksiya, funksiyaning gradiyenti, iteratsiya qadami, izlash strategiyasi, o'zgarmas qadamli gradiyentli tushish, algoritm, usulning yaqinlashishi, yaqinlashish tezligi, gradiyentli eng tez tushish, iteratsiya qadamini aniqlash yo'llari.*

Adabiyotlar.

- 1. Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
- 2. Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Методы оптимизации. Изд. 2-е, Минск, изд-во БГУ, 1981(Ўзбек тилига таржима қилинган ва 1995 йилда “Ўзбекистон” нашриётида нашр этилган).
- 3. Алексеев В.М, Галеев Э.М., Тихомиров В.М.** Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 2005.
- 4. Ашманов С.А., Тимохов А.В.** Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.
- 5. Пантелеев А.В.** Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высш.шк. 2005.
- 6. Исраилов И., Отакулов С.** “Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш усуллари” курсидан маърузалар. Самарқанд, СамДУ нашри, 1-қисм, 1999.
- 7. Исраилов И. ва б.** “Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш усуллари” фанидан амалий машғулотлар. Ўқув-услубий қўлланма, 2-қисм, Самарқанд, 1988.

12.1. O'ZGARMAS QADAMLI GRADIYENTLI TUSHISH USULI

12.1.1. Masalaning qo'yilishi

R^n to'plamda quyidan chegaralangan va uning barcha nuqtalarda uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

$X = R^n$ joiz nuqtalar to'plamida funksiyaning lokal minimumini, ya'ni shunday $x^* \in R^n$ nuqtani topish talab qilinadiki, unda

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x)$$

shart bajarilsin.

12.1.2. Izlash strategiyasi

Masalani yechish strategiyasi, shunday $\{x^k\}$, $k = 0, 1, \dots$, nuqtalar ketma-ketligini qurishdan iboratki, bu ketma-ketlikning nuqtalari uchun,

$f(x^{k+1}) < f(x^k)$, $k = 0, 1, \dots$,
munosabatlar bajarilsin. $\{x^k\}$ ketma-ketlikning nuqtalari quyidagi,
 $x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k)$, $k = 0, 1, \dots$,

qoida bo'yicha hisoblanadi, bunda x^0 nuqta foydalanuvchi tomonidan beriladi; $\nabla f(x^k)$ – funksiyaning x^k nuqtada hisoblangan gradiyenti; t_k qadam kattaligi foydalauvchi tomonidan beriladi va ketma-ketlikning nuqtalarida funksiya kamayuvchi bo'lganiga qadar o'zgarmasdan qoladi, bu esa,

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) < 0 \text{ yoki } f(x^{k+1}) - f(x^k) < -\varepsilon \|\nabla f(x^k)\|^2, 0 < \varepsilon < 1$$

shartning bajarilishini tekshirish yo'li bilan nazorat qilinadi. $\{x^k\}$ ketma-ketlikni qurish, $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon_1$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan x^k nuqtada tugaydi, bunda ε_1 – berilgan kichik musbat son, yoki $k \geq M$, bunda M – bir vaqtning o'zida ikkita,

$$\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_2, |f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_2$$

tengsizliklar bajariladigan iteratsiyalarning eng ko'p soni, ε_2 – kichik musbat son. x^k nuqta-ning izlanayotgan minimum nuqtasiga yaqinlashish sifatida olinishi masalasi quyida bayon etilgan qo'shimcha tekshirishlar yo'li bilan hal etiladi.

12.1.3. Algoritm

1-qadam. x^0 , $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, M – iteratsiyalarning eng ko'p (mumkin bo'lgan) sonini berish. Funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi gradiyentini topish:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T.$$

2-qadam. $k = 0$ deb olish.

3-qadam. $\nabla f(x^k)$ ni hisoblash.

4-qadam. $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon_1$ yakunlash kriteriysini tekshirish:

- a) agar kriteriy bajarilsa, hisoblashlar tugaydi: $x^* = x^k$;
- b) agar kriteriy bajarilmasa, 5-qadamga o'tish.

5-qadam. $k \geq M$ tengsizlikning bajarilishini tekshirish:

- a) agar tengsizlik bajarilsa, hisoblashlar tugaydi: $x^* = x^k$;
- b) agar tengsizlik bajarilmasa, 6-qadamga o'tish.

6-qadam. t_k qadam kattaligini berish.

7-qadam. $x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k)$ ni hisoblash.

8-qadam. $f(x^{k+1}) - f(x^k) < 0$ (yoki $f(x^{k+1}) - f(x^k) < -\varepsilon \|\nabla f(x^k)\|^2$) shartni tekshirish:

a) agar shart bajarilsa, u holda, 9-qadamga o'tish;

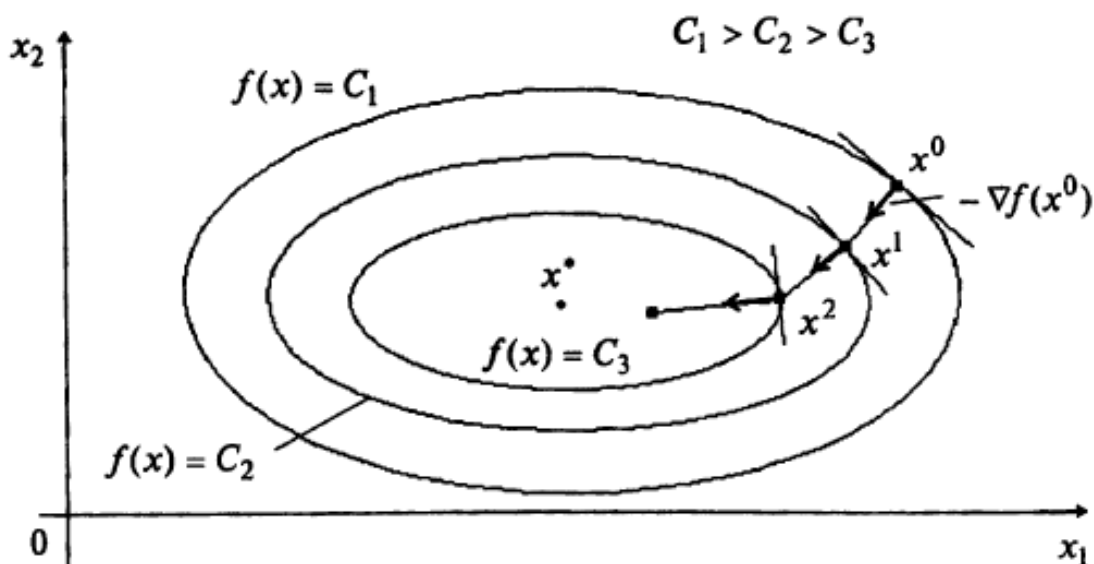
b) agar shart bajarilmasa, $t_k = \frac{t_k}{2}$ deb olish va 7-qadamga o'tish.

9-qadam. $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_2$, $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_2$ tengsizliklarning bajarilishini tekshirish:

a) agar k va $k = k - 1$ larning joriy qiymatlarida tengsizliklarning har ikkisi ham bajarilsa, hisoblashlar tugaydi, $x^* = x^{k+1}$;

b) agar tengsizliklardan birortasi bajarilmasa, u holda, $k = k + 1$ deb olish va 3-qadamga o'tish.

$n = 2$ uchun usulning geometrik talqini 10.1-chizmada keltirilgan.



12.1- chizma.

12.1.4. Yaqinlashishi

12.1-tasdiq. $f(x)$ funksiya R^n da quyidan chegaralangan va differensiallanuvchi bo'lib, uning gradiyenti esa,

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L \|x - y\|, \forall x, y \in R^n,$$

Lipshits shartini qanoatlantirsin, bunda $L > 0$. U holda, ixtiyoriy $x^0 \in R^n$ boshlang'ich nuqtada o'zgarmas qadamli gradiyentli tushish usuli uchun

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x^k)\| = 0$$

munosabat o'rinli.

12.1- izohlar.

1. 10.1 tasdiq $\{x^k\}$ ketma-ketlikning $\nabla f(x^*) = 0$ shart bajariladigan x^* statsionar nuqtaga yaqinlashishini kafolatlaydi. Demak, usul qo'llanilganda topilgan nuqta, uni sinflash uchun, qo'shimcha tadqiqotlarni talab qiladi.

2. Gradiyentli tushish usuli $\{x^k\}$ ketma-ketlikning kuchli qavariq funksiyalarning minimum nuqtasiga yaqinlashishini kafolatlaydi.

3. Misollar yechishda yaxshiroq t_k miqdorni tanlashning iteratsion jarayoni 7- va 8 - qadamlarning indekslarida namoyon bo'ladi. Bunda birinchi indeks raqam bilan, ikkinchisi esa, joriy t_k miqdorning teng ikkiga bo'linishi bilan ustma-ust tushadi.

12.1.5. Yaqinlashish tezligi

Yaqinlashish tezligini baholashlar, faqat kuchli qavariq funksiyalar uchun, $\{x^k\}$ ketma-ketlik $f(x)$ funksiyaning minimum nuqtasiga geometrik progressiya tezligida yaqinlashganda, olingan:

$$f(x^k) - f(x^*) \leq q^k(f(x^0) - f(x^*)), \|x^k - x^*\| \leq C(\sqrt{q})^k,$$

bunda $q \in (0,1), C > 0$ – o‘zgarmas sonlar.

12.1.6. Masalani yechish jarayoni

1. O‘zgarmas qadamli gradiyentli tushish algoritmidan foydalanib, unda, hisoblashlarni tugatish kriteriylaridan hech bo‘lmaganda bittasi bajariladigan, nuqtani topish.

2. Topilgan x^k nuqtani, masala yechimi uchun topilgan yaqinlashish bo‘lishini aniqlash maqsadida, tahlil qilish. Tahlil jarayoni $f(x)$ funksiyaning uzluksiz ikkinchi tartibli hosililari borligi orqali aniqlanadi. Agar $f(x) \in C^2$ bo‘lsa, minimumning yetarli shartlari bajarilishini tekshirish lozim: $H(x^*) > 0$. Agar $H(x^k) > 0$ bo‘lsa, u holda, x^k nuqta izlanayotgan x^* nuqta uchun topilgan yaqinlashish bo‘ladi. Agar $f(x) \in C^1$ bo‘lsa, u holda, $f(x)$ funksiyani x^k nuqtaning Q -atrofida qavariqlikka tekshirish kerak, bunda $f(x) \in C^1$ funksiyaning qavariqlik kriteriyasi:

$f(x)$ qavariq (qat’iy qavariq) bo‘lishi uchun,

$$f(x+y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y), \forall x, y \in Q; (f(x+y) > f(x) + (\nabla f(x), y))$$

munosabatning bajarilishi zarur va yetarli dan foydalanib, tekshirish lozim.

Agar $f(x)$ funksiya qavariq (qat’iy qavariq) bo‘lsa, u holda $x^k - x^*$ nuqta uchun topilgan yaqinlashish bo‘ladi.

12.2 - izoh. Agar $f(x)$ funksiyaning global minimumini topish talab qilingan bo‘lsa, qat’iy qavariq $f(x)$ funksiya uchun bu masalani yechish funksiyaning lokal minimumini izlashga o‘xshash bo‘ladi. $f(x)$ funksiya bir necha lokal minimumlarga ega bo‘lsa, global minimumni izlash, barcha lokal minimumlar ichidan tanlash natijasida amalga oshiriladi.

12.1-misol. Ushbu

$$f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

funksiyaning lokal minimumini toping.

□ **I.** Hisoblashlarni tugatish kriteriylaridan hech bo‘lmaganda bittasi bajariladigan, x^k nuqtani aniqlash.

1. $x^0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, M: x^0 = (0,5; 1)^T, \varepsilon_1 = 0,1; \varepsilon_2 = 0,15; M = 10$ larni beramiz. Funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi $\nabla f(x) = (4x_1 + x_2; x_1 + 2x_2)^T$ gradiyentini topamiz.

2. $k = 0$ deb olamiz.

3⁰. $\nabla f(x^0)$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^0) = (3; 2,5)^T$.

4⁰. $\|\nabla f(x^0)\|$ ni hisoblaymiz: $\|\nabla f(x^0)\| = 3,9 > 0,1$. 5 –qadamga o‘tamiz.

5⁰. $k \geq M$ ni tekshiramiz: $k = 0 < 10 = M$. 6-qadamga o‘tamiz.

6⁰. $t_0 = 0,5$ miqdorni beramiz.

7⁰. x^1 ni hisoblaymiz: $x^1 = (0,5; 1)^T - 0,5(3; 2,5)^T = (-1; 0,25)^T$; $f(x^1) = 2,31$.

8⁰. $f(x^1)$ va $f(x^0) = 2$ larni taqqoslaymiz. $f(x^1) > f(x^0)$ ekan. Xulosa: $k = 0$ uchun $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ shart bajarilmaydi. $t^0 = 0,25$ miqdorni beramiz va 7-, 8- qadamlarni takrorlashga o'tamiz.

7⁰¹. x^1 ni hisoblaymiz: $x^1 = (0,5; 1)^T - 0,25(3; 2,5)^T = (-0,25; 0,375)^T$; $f(x^1) = 0,171$.

8⁰¹. $f(x^1)$ va $f(x^0)$ larni taqqoslaymiz. Xulosa: $f(x^1) < f(x^0)$. 9-qadamga o'tamiz.

9⁰. $\|x^1 - x^0\|$ va $|f(x^1) - f(x^0)|$ larni hisoblaymiz:

$$\|x^1 - x^0\| = 0,976 > 0,15; |f(x^1) - f(x^0)| = 1,829 > 0,15.$$

Xulosa: $k = 1$ deb olamiz va 3-qadamga o'tamiz.

3¹. $\nabla f(x^1)$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^1) = (-0,625; 0,51)^T$.

4¹. $\|\nabla f(x^1)\|$ ni hisoblaymiz: $\|\nabla f(x^1)\| = 0,81$. 5-qadamga o'tamiz.

5¹. $k \geq M$ shartni tekshiramiz: $k = 1 < 10 = M$. 6-qadamga o'tamiz.

6¹. $t_1 = 0,25$ miqdorni beramiz.

7¹. x^2 ni hisoblaymiz:

$$x^2 = (-0,25; 0,375)^T - 0,25(-0,625; 0,5)^T = (-0,094; 0,25)^T; f(x^2) = 0,056.$$

8¹. $f(x^2)$ va $f(x^1)$ larni taqqoslaymiz. Xulosa: $f(x^2) < f(x^1)$. 9-qadamga o'tamiz.

9¹. $\|x^2 - x^1\|$ va $|f(x^2) - f(x^1)|$ larni hisoblaymiz:

$$\|x^2 - x^1\| = 0,2 > 0,15; |f(x^2) - f(x^1)| = 0,115 < 0,15.$$

Xulosa: $k = 2$ deb olamiz va 3-qadamga o'tamiz.

3². $\nabla f(x^2)$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^2) = (-0,126; 0,406)^T$.

4². $\|\nabla f(x^2)\|$ ni hisoblaymiz: $\|\nabla f(x^2)\| = 0,425 > 0,1$. 5-qadamga o'tamiz.

5². $k \geq M$ shartni tekshiramiz: $k = 2 < 10 = M$. 6-qadamga o'tamiz.

6². $t_2 = 0,25$ miqdorni beramiz.

7². x^3 ni hisoblaymiz:

$$x^3 = (-0,094; 0,25)^T - 0,25(-0,126; 0,406)^T = (-0,063; 0,15)^T; f(x^3) = 0,021.$$

8². $f(x^3)$ va $f(x^2)$ larni taqqoslaymiz. Xulosa: $f(x^3) < f(x^2)$. 9-qadamga o'tamiz.

9². $\|x^3 - x^2\|$ va $|f(x^3) - f(x^2)|$ larni hisoblaymiz:

$$\|x^3 - x^2\| = 0,105 < 0,15; |f(x^3) - f(x^2)| = 0,035 < 0,15.$$

Xulosa: $k = 3$ deb olamiz va 3-qadamga o'tamiz.

$$3^3. \nabla f(x^3) \text{ ni hisoblaymiz: } \nabla f(x^3) = (-0,102; 0,237)^T.$$

$$4^3. \|\nabla f(x^3)\| \text{ ni hisoblaymiz: } \|\nabla f(x^3)\| = 0,257 > 0,1. \text{ 5-qadamga o'tamiz.}$$

$$5^3. k \geq M \text{ shartni tekshiramiz: } k = 3 < 10 = M. \text{ 6-qadamga o'tamiz.}$$

$$6^3. t_3 = 0,25 \text{ miqdorni beramiz.}$$

$$7^3. x^4 \text{ ni hisoblaymiz:}$$

$$x^4 = (-0,063; 0,15)^T - 0,25(-0,102; 0,237)^T = (-0,038; 0,091)^T; f(x^4) = 0,0076.$$

$$8^3. f(x^4) \text{ va } f(x^3) \text{ larni taqqoslaymiz: } f(x^4) < f(x^3).$$

$$9^3. \|x^4 - x^3\| \text{ va } |f(x^4) - f(x^3)| \text{ larni hisoblaymiz:}$$

$$\|x^4 - x^3\| = 0,064 > 0,15; |f(x^4) - f(x^3)| = 0,015 < 0,15.$$

$k = 2,3$ bo'lganda,

$$\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_2, |f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_2$$

shartlar bajariladi. Hisoblashlar tugadi. $x^4 = (-0,038; 0,091)^T$ nuqta topildi: $f(x^4) = 0,0076$.

Topilgan nuqtalar 10.2-chizmada punktir chiziqlar bilan tutashtirilgan.

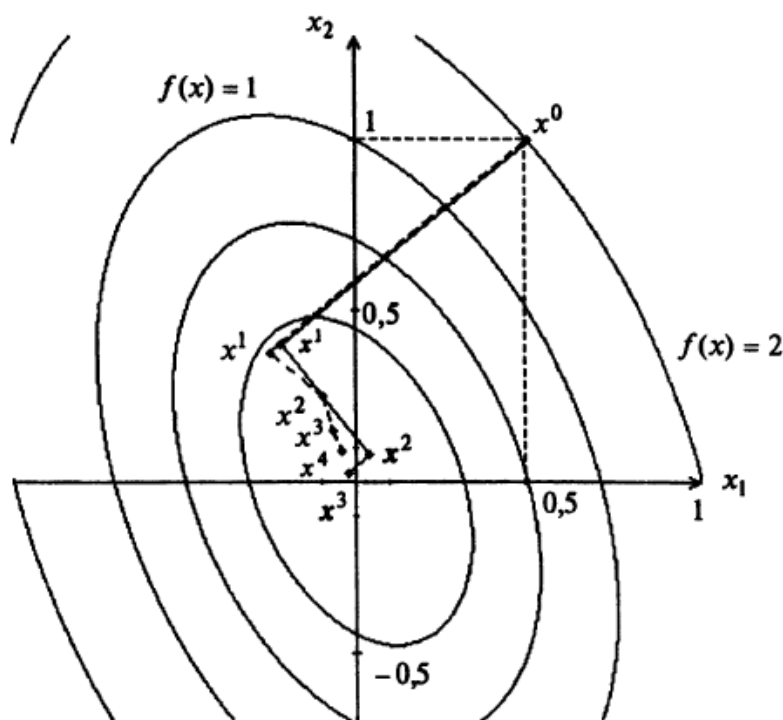


Рис. 6.2

11.2-chizma.

II. x^4 nuqtaning tahlili.

$f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ funksiya ikki marta differensiallanuvchi, shu sababli, x^4 nuqtada minimumning yetarli shartlarini tekshirish o'tkazamiz. Buning uchun, $H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Gess matrisasini tahlil qilamiz. Matrisa o'zgarmas va musbat aniqlangan (ya'ni $H > 0$), chunki, uning $\Delta_1 = 4$ va $\Delta_2 = 7$ burchak minorlarining ikkisi ham musbat. Shunday qilib, $x^4 = (-0,038; 0,091)^T$ nuqta $x^* = (0,0)^T$ lokal minimum nuqtasi uchun topilgan yaqinlashish bo'lib, $f(x^4) = 0,0076$ esa, $f(x^*) = 0$ qiymat uchun topilgan yaqinlashishdan iborat. Shuni e'tirof etish kerakki, $H > 0$ shart, bir vaqtning o'zida R^2 da $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ funksiyaning qat'iy qavariqligi shartidan iborat.

Demak, $x^4 = (-0,038; 0,091)^T$, $f(x^4) = 0,0076$ lar $f(x)$ funksiyaning minimum nuqtasi va uning dagi eng kichik qiymati uchun topilgan yaqinlashishlardan iborat ekan. ■

12.2. GRADIYENTLI ENG TEZ TUSHISH USULI

12.2.1. Masalaning qo'yilishi

R^n to'plamda quyidan chegaralangan va uning barcha nuqtalarda uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

$X = R^n$ joiz nuqtalar to'plamida funksiyaning lokal minimumini, ya'ni shunday $x^* \in R^n$ nuqtani topish talab qilinadiki, unda

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x)$$

shart bajarilsin.

12.2.2. Izlash strategiyasi

Masalani yechish strategiyasi, shunday $\{x^k\}$, $k = 0, 1, \dots$, nuqtalar ketma-ketligini qurishdan iboratki, bu ketma-ketlikning nuqtalari uchun,

munosabatlar bajarilsin. $\{x^k\}$ ketma-ketlikning nuqtalari quyidagi, $x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k)$, $k = 0, 1, \dots$, (11.3) qoida bo'yicha hisoblanadi, bunda x^0 nuqta foydalanuvchi tomonidan beriladi; $\nabla f(x^k)$ – funksiyaning x^k nuqtada hisoblangan gradiyenti; t_k qadam kattaligi, har bir k uchun,

$$\varphi(t_k) = f(x^k - t_k \nabla f(x^k)) \rightarrow \min_{t_k} \quad (11.4)$$

shartdan topiladi.

(11.4) masalani yechish, $\frac{d\varphi}{dt_k} = 0$ minimumning zaruriy shartidan foydalanish hamda $\frac{d^2\varphi}{dt_k} > 0$ minimumning yetarli shartini tekshirish orqali amalga oshiriladi. Bu yo'ldan yoki yetarli sodda $\varphi(t_k)$ minimallashtiriluvchi funksiya holda, yoki yetarli murakkab $\varphi(t_k) =$

$= f(x^k - t_k \nabla f(x^k))$ funksiyaning $P(t_k)$ ko'phad (odatda, ikkinchi yoki uchinchi darajali) orqali yaqinlashtirishdan so'ng, foydalanish mumkin va bu holda $\frac{d\varphi}{dt_k} = 0$ shart $\frac{dP}{dt_k} = 0$ shartga, $\frac{d^2\varphi}{dt_k} > 0$ shart esa, $\frac{d^2P}{dt_k} > 0$ shartga almashtiriladi.

(11.4) masalani yechishning boshqa yo'li,

$$\min_{t_k \in [a,b]} \varphi(t_k) = \min_{t_k \in [a,b]} f(x^k - t_k \nabla f(x^k))$$

masalani yechishda sonli usullardan foydalanish bilan bog'liqdir. Bunda $[a, b]$ intervalning chegaralari foydalanuvchi tomonidan beriladi.

Bunda topilgan t_k qiymatning, $\frac{d\varphi}{dt_k} = 0$, $\frac{d^2\varphi}{dt_k^2} > 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi t_k^* optimal qiymatga yaqinlik darajasi, $[a, b]$ intervalning berilishiga va bir o'lchovli minimallashtirish usullarining aniqligiga bog'liq bo'ladi.

$\{x^k\}$ ketma-ketlikni qurish, $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon_1$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan x^k nuqtada tugaydi, bunda ε_1 – berilgan kichik musbat son, yoki $k \geq M$, bunda M – bir vaqtning o'zida ikkita,

$$\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_2, \|f(x^{k+1}) - f(x^k)\| < \varepsilon_2$$

tengsizliklar bajariladigan iteratsiyalarning eng ko'p soni, ε_2 – kichik musbat son. x^k nuqta-ning izlanayotgan minimum nuqtasiga yaqinlashish sifatida olinishi masalasi quyida bayon etilgan qo'shimcha tekshirishlar yo'li bilan hal etiladi.

12.2.3. Algoritm

1-qadam. x^0 , $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, M - iteratsiyalarning eng ko'p (mumkin bo'lgan) sonini berish. Funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi gradiyentini topish:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T.$$

2-qadam. $k = 0$ deb olish.

3-qadam. $\nabla f(x^k)$ ni hisoblash.

4-qadam. $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon_1$ yakunlash sharti bajarilishini tekshirish:

a) agar kriteriy bajarilsa, $x^* = x^k$ bo'ladi;

б) agar kriteriy bajarilmasa, 5-qadamga o'tish.

5-qadam. $k \geq M$ tengsizlik bajarilishini tekshirish:

a) agar tengsizlik bajarilsa, $x^* = x$ bo'ladi;

б) agar tengsizlik bajarilmasa, 6-qadamga o'tish.

6-qadam. t_k^* qadamning kattaligini

$$\varphi(t_k) = f(x^k - t_k \nabla f(x^k)) \rightarrow \min_{t_k}$$

shartdan topish.

7-qadam. $x^{k+1} = x^k - t_k^* \nabla f(x^k)$ ni hisoblash.

8-qadam.

$$\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_2, |f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_2$$

shartlarning bajarilishuini tekshirish:

a) agar joriy $k = k - 1$ qiymatda ikki shart ham bajarilsa, hisoblashlar tugaydi, $x^* = x^{k+1}$;

б) agar shartlardan bittasi bajarilmasa, $k = k + 1$ deb olish va 3-qadamga o'tish.

$n = 2$ uchun usulning geometric talqini 11.3-chizmada keltirilgan.

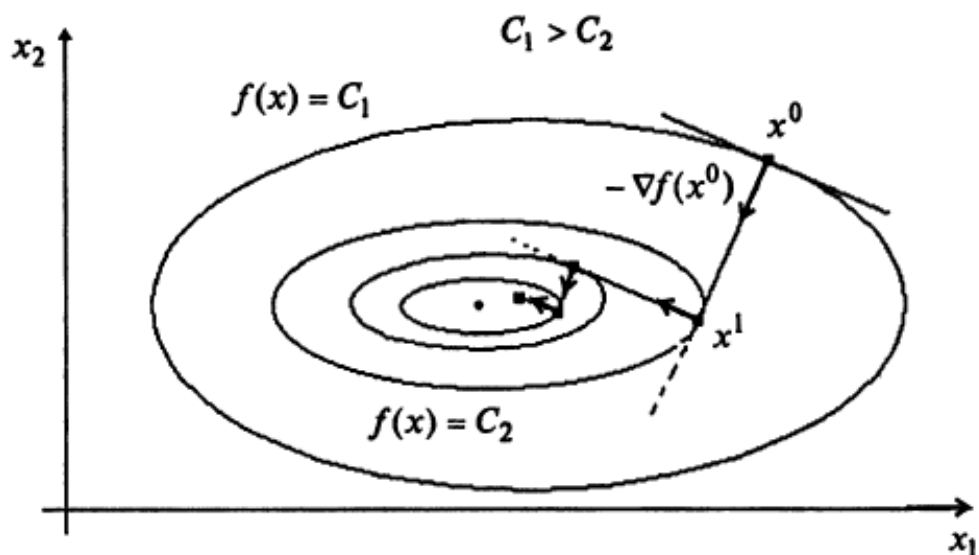


Рис. 6.3

12.2.4. Yaqinlashishi

12.2 - tasdiq. $f(x)$ funksiya 11.1-tasdiqning shartlarini qanoatlantirsin. U holda, ixtiyoriy $x^0 \in R^n$ boshlang'ich nuqtada, eng tez gradiyentli tushish usuli uchun, $k \rightarrow \infty$ da

$$\|\nabla f(x^k)\| \rightarrow 0.$$

12.3-izohlar.

1. 11.1 tasdiq $\{x^k\}$ ketma-ketlikning $\nabla f(x^*) = 0$ shart bajariladigan x^* statsionar nuqtaga yaqinlashishini kafolatlaydi. Demak, usul qo'llanilganda topilgan nuqta, uni sinflash uchun, qo'shimcha tadqiqotlarni talab qiladi.

2. Gradiyentli tushish usuli $\{x^k\}$ ketma-ketlikning kuchli qavariq funksiyalarning minimum nuqtasiga yaqinlashishini kafolatlaydi.

12.2.5. Yaqinlashish tezligi

Yaqinlashish tezligini baholashlar, faqat kuchli qavariq funksiyalar uchun, $\{x^k\}$ ketma-ketlik $f(x)$ funksiyaning minimum nuqtasiga geometrik progressiya tezligida (chiziqli) yaqinlashganda, olingan:

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \frac{M-m}{M+m} \|x^k - x^*\|,$$

bunda M, m – $f(x)$ funksiya uchun qurilgan $H(x)$ matrisaning eng kichik va eng katta xos qiymatlarini baholashlardan iborat.

12.4-izohlar.

1. Masalani yechish jarayoni 11.1-bandda bayon qilingani bilan ustma-ust tushadi.

2. $f(x)$ funksiyaning global minimumini izlash jarayoni uchun 11.2-izoh o'rinli bo'lib qoladi.

12.2-misol. Ushbu

$$f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

funksiyaning lokal minimumini toping.

□ I. Hisoblashlarni tugatish kriteriyalaridan hech bo'lmaganda bittasi bajariladigan, x^k nuqtani aniqlash.

1°. $x^0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, M : x^0 = (0,5; 1)^T, \varepsilon_1 = 0,1; \varepsilon_2 = 0,15; M = 10$ larni beramiz. Funktsiyaning ixtiyoriy nuqtadagi $\nabla f(x) = (4x_1 + x_2; x_1 + 2x_2)^T$ gradiyentini topamiz.

2°. $k = 0$ deb olamiz.

3°. $\nabla f(x^0)$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^0) = (3; 2,5)^T$.

4°. $\|\nabla f(x^0)\|$ ni hisoblaymiz: $\|\nabla f(x^0)\| = 3,9 > 0,1$. 5-qadamga o'tamiz.

5°. $k \geq M$ shartni tekshiramiz: $k = 0 < 10 = M$. 6- qadamga o'tamiz.

6°. Navbatdagi nuqta

$$x^1 = x^0 - t_0 \nabla f(x^0) = (0,5; 1)^T - t_0 (3; 2,5)^T = (0,5 - 3t_0; 1 - 2,5 \cdot t_0)^T$$

formuladan topiladi.

Koordinatalar uchun topilgan $x_1^1 = 0,5 - 3t_0$, $x_2^1 = 1 - 2,5 \cdot t_0$ ifodalarni $f(x)$ ga keltirib qo'yamiz: $\varphi(t_0) = 2 \cdot (0,5 - 3t_0)^2 + (0,5 - 3t_0) \cdot (1 - 2,5 \cdot t_0)(1 - 2,5 \cdot t_0)^2$.

$\varphi(t_0)$ funksiyaning t_0 bo'yicha minimumini shartsiz ekstremumning zaruriy shartlari yordami-da topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t_0)}{dt_0} &= 4 \cdot (0,5 - 3t_0) \cdot (-3) + (-3) \cdot (1 - 2,5t_0) + (-2,5) \cdot (0,5 - 3t_0) + 2 \\ &\cdot (1 - 2,5 \cdot t_0) \cdot (-2,5) = -15,25 + 63,25 \cdot t_0 = 0. \end{aligned}$$

Buyerdan, $t_0^* \cong 0,24$. $\frac{d^2\varphi(t_0)}{dt_0^2} = 63,25 > 0$ bo'lgani uchun, qadamning topilgan qiymati $\varphi(t_0)$ funksiyaning t_0 bo'yicha minimumini ta'minlaydi.

Ixtiyoriy iteratsiyada qadamning eng yaxshi t_k^* kattaligini hisoblash uchun formulani

$$\varphi(t_k) = f(x^k - t_k \nabla f(x^k)) \rightarrow \min_{t_k}$$

shartdan olish mumkin bo'ladi. Natijada,

$$\begin{aligned} \nabla f(x^k) &= (4x_1^k + x_2^k; x_1^k + x_2^k)^T; x^k - t_k \nabla f(x^k) = [x_1^k - t_k(4x_1^k + x_2^k); x_2^k - t_k(x_1^k + x_2^k)]^T, \\ \varphi(t_k) &= 2(x_1^k - t_k(4x_1^k + x_2^k))^2 + (x_1^k - t_k(4x_1^k + x_2^k))(x_2^k - t_k(x_1^k + x_2^k)) + \\ &(x_2^k - t_k(x_1^k + x_2^k))^2. \end{aligned}$$

$$\frac{d\varphi}{dt_k} = 0 \text{ shartdan,}$$

$$t_k^* = \frac{(4x_1^k + x_2^k)^2 + (x_1^k + 2x_2^k)^2}{4(4x_1^k + x_2^k)^2 + 2(4x_1^k + 2x_2^k)(x_1^k + 2x_2^k) + 2(x_1^k + 2x_2^k)^2}$$

bo'ladi. t_0^* ni aniqlaymiz: $t_0^* = 0,2$.

7°. $x^1 = x^0 - t_0^* \nabla f(x^0)$ ni topamiz:

$$x^1 = (0,5; 1)^T - 0,24(3; 2,5)^T = (-0,22; 0,4)^T.$$

8°. $\|x^1 - x^0\|$ ni hisoblaymiz: $\|x^1 - x^0\| = 0,937 > 0,15$. $|f(x^1) - f(x^0)|$ ni hisoblaymiz: $|f(x^1) - f(x^0)| = 1,83 > 0,15$. Xulosa: $k = 1$ deb olamiz va 3-qadamga o'tamiz.

3¹. $\nabla f(x^1)$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^1) = (-0,48; 0,58)^T$.

4¹. $\|\nabla f(x^1)\|$ ni hisoblaymiz: $\|\nabla f(x^1)\| = 0,752 > 0,1$.

5¹. $k \geq M$ shartni tekshiramiz: $k = 1 < 10 = M$.

6¹. t_1^* ni aniqlaymiz: $t_1^* = 0,546$ (6^0 – b. ga q.).

7¹. $x^2 = x^1 - t_1^* \nabla f(x^1)$ ni topamiz:

$$x^2 = (-0,22; 0,4)^T - 0,546(-0,48; 0,58)^T = (0,04; 0,08)^T$$

8¹. $\|x^2 - x^1\|, |f(x^2) - f(x^1)|$ larni hisoblaymiz:

$$\|x^2 - x^1\| = 0,41 > 0,15; |f(x^2) - f(x^1)| = 0,156 > 0,15.$$

$k = 2$ deb olamiz va 3-qadamga o'tamiz.

3². $\nabla f(x^2)$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^2) = (0,24; 0,2)^T$.

4². $\|\nabla f(x^2)\|$ ni hisoblaymiz: $\|\nabla f(x^2)\| = 0,312 > 0,1$.

5². $k \geq M$ shartni tekshiramiz: $k = 2 < 10 = M$.

6². t_2^* ni aniqlaymiz: $t_2^* = 0,24$ (6^0 – b. ga q.).

7². $x^3 = x^2 - t_2^* \nabla f(x^2)$ ni topamiz:

$$x^3 = (0,04; 0,08)^T - 0,24(0,24; 0,2)^T = (-0,0176; 0,032)^T.$$

8². $\|x^3 - x^2\|, |f(x^3) - f(x^2)|$ larni hisoblaymiz:

$$\|x^3 - x^2\| = 0,0749 < 0,15; |f(x^3) - f(x^2)| = 0,0116 < 0,15.$$

$k = 3$ deb olamiz va 3-qadamga o'tamiz.

3³. $\nabla f(x^3)$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^3) = (-0,012; -0,0816)^T$.

4³. $\|\nabla f(x^3)\|$ ni hisoblaymiz: $\|\nabla f(x^3)\| = 0,082 < 0,1$. Hisoblashlar tugadi.

$x^3 = (-0,0176; 0,032)^T$ nuqta va bu nuqtada funksiyaning $f(x^3) = 0,00127$ qiymati topildi.

12.2-chizmada topilgan nuqtalar ajratilgan va tutash chiziq bilan ifodalangan.

II. x^3 nuqtaning tahlili.

11.1-misolda $f(x)$ funksiyaning qat'iy qavariq ekanligi ko'rsatilgan edi, demak, x^3 nuqta x^* global minimum nuqtasining topilgan yaqinlashishidan iborat bo'ladi.

O'z-o'zini tekshirish savollari

1. O'zgarmas qadamli gradiyentli tushish usuli qanday strategiyalarga mansub?
2. O'zgarmas qadamli gradiyentli tushish usulida minimumni izlash strategiyasi qanday amalga oshiriladi?
3. O'zgarmas qadamli gradiyentli tushish usulining algoritmini keltiring.
4. O'zgarmas qadamli gradiyentli tushish usulining yaqinlashishi qanday ifodalanadi?
5. O'zgarmas qadamli gradiyentli tushish usulining yaqinlashishi tezligi qanday bo'ladi?
6. Gradiyentli eng tez tushish usuli qanday strategiyalarga mansub?
7. Gradiyentli eng tez tushish usulida minimumni izlash strategiyasi qanday amalga oshiriladi?
8. Gradiyentli eng tez tushish usulining algoritmini keltiring.
9. Gradiyentli eng tez tushish usulining yaqinlashishi qanday ifodalanadi?
10. Gradiyentli eng tez tushish usulining yaqinlashish tezligi haqida nima deyish mumkin?

13 - ma'ruza

Shartsiz minimallashtirish masalalarini yechishning sonli usullari (koordinatalar bo'ylab tushish va Gauss-Zeydel usullari)

Reja:

13.1. KOORDINATLAR BO'YLAB TUSHISH USULI.

13.1.1. Masalaning qo'yilishi.

13.1.2. Izlash strategiyasi.

13.1.3. Algoritm.

13.1.4. Misol.

13.2. GAUSS-ZEYDEL USULI.

13.2.1. Masalaning qo'yilishi.

13.2.2. Izlash strategiyasi.

13.2.3. Algoritm.

13.2.4. Misol.

Tayanch iboralar: shartsiz minimallashtirish masalasi, tsikl, tsiklning raqami, iteratsiya qadami,

13.1. KOORDINATLAR BO'YLAB TUSHISH USULI.

13.1.1. Masalaning qo'yilishi

Faraz qilaylik, R^n to'plamda quyidan chegaralangan va uning barcha nuqtalarida uzluksiz xususiy hosilslarga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

$X = R^n$ joiz yechimlar to'plamida $f(x)$ funksiyaning lokal minimumini topish, ya'ni shunday $x^* \in R^n$ nuqtani topish kerakki, unda

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x)$$

munosabat bajarilsin.

13.1.2. Izlash strategiyasi

Masalani yechish strategiyasi shunday $\{x^k\}$, $k = 0, 1, \dots$, nuqtalar ketma-ketligini qurishdan iboratki, ularda $f(x^{k+1}) < f(x^k)$, $k = 0, 1, \dots$, munosabatlar bajarilsin. $\{x^*\}$ ketma-ketlikning nuqtalari, tsikllar bo'yicha, quyidagi

$$x^{jk+1} = x^{jk} - t_k \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{k+1}} \right) \Big|_{x=x^{jk}} \cdot e_{k+1}, \quad (1)$$

qoidalarga mos ravishda hisoblanadi, bunda j – hisoblashlar tsiklining raqami, $j = 0, 1, 2, \dots$; k -tsikl ichidagi iteratsiya raqami, $k = 0, 1, \dots, n-1$; e_{k+1} , $k = 0, 1, \dots, n-1$ – $(k+1)$ -proyeksiyasi 1 ga teng bo'lgan yagona vektor; x^{00} nuqta foydalanuvchi tomonidan beriladi, t_k qadam kattaligi,

$$f \left(x^{jk+1} = x^{jk} - t_k \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{k+1}} \right) \Big|_{x=x^{jk}} \cdot e_{k+1} \right) - f(x^{jk}) < 0$$

yoki

$$f(x^{jk+1}) - f(x^{jk}) < -\varepsilon \|\nabla f(x^{jk})\|^2$$

shartdan tanlanadi.

Agar joriy t_k da tanlangan shart bajarilmasa, qadam ikki marta kichraytiriladi va $x^{jk} - t_k \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{k+1}} \right) \Big|_{x=x^{jk}} \cdot e_{k+1}$ qaytadan hisoblanadi. Shuni oson ko'rish mumkinki, tanlab olingan j

uchun, k raqamli bitta iteratsiyada x^{jk} nuqtaning faqat bitta, $k + 1$ raqamli iteratsiyasi o'zgaradi, j raqamli to'la tsikl jarayonida esa, ya'ni $k = 0$ dan boshlab $k = n - 1$ gacha, x^{j0} nuqtaning barcha n ta proyeksiyalari o'zgaradi. Bundan keyin x^{jn} nuqtaga $x^{j+1,0}$ raqam beriladi va u $j + 1$ – tsiklda hisoblashlar uchun boshlang'ich nuqta sifatida olinadi. Hisoblashlar x^{jk} nuqtada, quyidagi, hisoblashlarni tugatish uchta kriteriylaridan hech bo'lmaganda bittasi bajarilganda to'xtatiladi:

$$\|\nabla f(x^{jk})\| < \varepsilon_1, \text{ yoki } j \geq M,$$

yoki

$$\|x^{jk+1} - x^{jk}\| < \varepsilon_2, \quad |f(x^{jk+1}) - f(x^{jk})| < \varepsilon_2$$

tengsizliklarning bir vaqtda bajarilishi.

Hisoblashlar natijasida olingan nuqtalar $\{x^l\}$ ketma-ketlikning nuqtalari kabi yozilishi mumkin, bunda $l = n \cdot j + k$ – nuqtaning tartib raqami, ya'ni $\{x^l\} = \{x^0 = x^{00}, x^1 = x^{01}, \dots, x^n = x^{0n} = x^{10}, x^{n+1} = x^{11}, x^{n+2} = x^{12}, \dots\}$.

13.1.3. Algoritm

1-qadam. $x^{00}, \varepsilon > 0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ larni, hisoblash tsikllari n ga karrali iteratsiyalari limitik soni M ni berish, bunda n – x vektorning o'lchovi. $\nabla f(x)$ gradiyentni topish.

2-qadam. $j = 0$ tsikl raqamini berish.

3-qadam. $j \geq M$ shartni tekshirish:

a) agar $j \geq M$ bo'lsa, u holda $x^* = x^{jk}$, hisoblashlar tugaydi;

b) aks holda, 4-qadamga o'tish.

4-qadam. $k = 0$ ni berish.

5-qadam. $k \leq n - 1$ shart bajarilishini tekshirish:

a) agar $k \leq n - 1$ bo'lsa, 6-qadamga o'tish;

b) agar $k = n$ bo'lsa, $j = j + 1$ va $x^{j+1,k} = x^{jn}$ deb olish va 3-qadamga o'tish.

6-qadam. $\nabla f(x^{jk})$ ni hisoblash.

7-qadam. $\|\nabla f(x^{jk})\| < \varepsilon_1$ – yakunlash kriteriysini tekshirish:

a) agar kriteriy bajarilsa, u holda $x^* = x^{jk}$, hisoblashlar tygadi;

b) agar kriteriy bajarilmasa, u holda, 8-qadamga o'tish.

8-qadam. t_k ni berish.

9-qadam. x^{jk+1} nuqtani hisoblash: $x^{jk+1} = x^{jk} - t_k \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{k+1}} \right) \Big|_{x=x^{jk}} \cdot e_{k+1}$.

10-qadam. Quyidagi,

$$f(x^{jk+1}) - f(x^{jk}) < 0 \quad (\text{yoki } f(x^{jk+1}) - f(x^{jk}) < -\varepsilon \|\nabla f(x^{jk})\|^2)$$

shartlarning bajarilishini tekshirish:

a) agar shart bajarilsa, 11-qadamga o'tish;

b) agar shart bajarilmasa, $t_k = \frac{t_k}{2}$ deb olish va 9-qadamga o'tish.

11-qadam.

$$\|f(x^{jk+1}) - f(x^{jk})\| < \varepsilon_2, \quad |f(x^{jk+1}) - f(x^{jk})| < \varepsilon_2$$

shartlarning bajarilishini tekshirish:

a) agar ketma-ket, j va $j - 1$ raqamli tsikllarda ikkita shart ham bajarilsa, x^{jk+1} nuqtada hisoblash tygaydi va $x^* = x^{jk+1}$;

b) agar shartlardan hech bo'lmaganda bittisi bajrilmasa, $k = k + 1$ deb olish va 5-qadamga o'tish.

$n=2$ uchun usulning geometrik sharhi 13.1-chizmada keltirilgan.

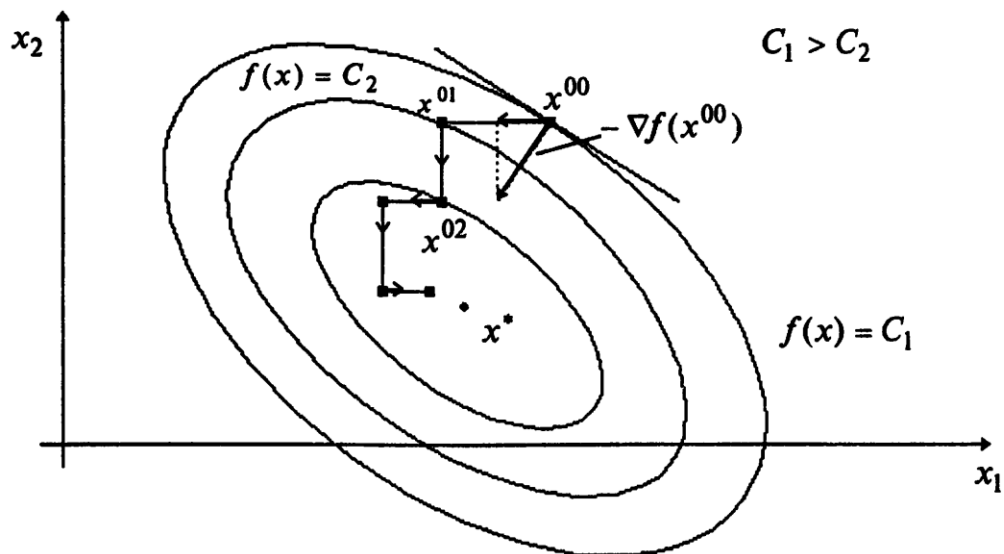


Рис. 6.4

13.1-chizma.

13.1- izohlar.

1. Agar $f(x)$ funksiya 12.1-tasdiqning shartlarini qanoatlantirsa, koordinatalar bo'ylab tushish usuli bo'yicha qurilgan $\{x^k\}$ ketma-ketlik $k \rightarrow \infty$ da $\|\nabla f(x^k)\| \rightarrow 0$ shart bajarilishini ta'minlaydi.
2. Usulni qo'llash natijasida topilgan x^* nuqtada, uning sinfini aniqlash maqsadida, qo'shimcha tekshirishlar o'tkazish talab qilinadi.
3. Usulning yaqinlashish tezligi chiziqli yaqinlashish kabi baholanadi.
4. Masalani yechish jarayoni va global minimumni izlashda 12.1 – izoh o'rinli.

13.1.4. Misol.

Ushbu

$$f(x) = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$

funksiyaning lokal minimumi topilsin.

□ I. Unda hisoblashlarni yakunlash kriteriylaridan hech bo'lmaganda bittasi bajariladigan x^{jk} nuqtani aniqlash.

1. $x^{00}, \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, M : x^{00} = (0,5; 1)^T, \varepsilon = 0, \varepsilon_1 = 0,1; \varepsilon_2 = 0,15; M = 10$ larni berish.
Funksi-

yaning ixtiyoriy nuqtadagi $\nabla f(x) = (4x_1 + x_2; x_1 + 2x_2)^T$ gradiyentini topamiz.

2. $j=0$ ni beramiz.

3. $j \geq M$ shart bajarilishini tekshiramiz: $j = 0 < 10 = M$.
4. $k=0$ ni beramiz.
5. $k \leq n - 1$ shart bajarilishini tekshiramiz: $k = 0 < 1 = n - 1$.
6. $\nabla f(x^{00})$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^{00}) = (3; 2,5)^T$.
7. $\|\nabla f(x^{00})\| < \varepsilon_1$ shartni tekshiramiz: $\|\nabla f(x^{00})\| = 3.8 > 0.1$.

8⁰. $t_1 = 0.5$ deb olamiz.

9⁰. $x^{01} = x^{00} - t_0 \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right) |_{x=x^{00}} \cdot e_1$ ni hisoblaymiz, bunda $\frac{\partial f(x^{00})}{\partial x_1} = (4x_1 - 2x_2) |_{x^{00}} = 2 + 1 = 3$, $e_1 = (1, 0)^T$. Buyerdan $x^{01} = (-1; 1)^T$.

10⁰. $f(x^{01}) - f(x^{00}) < 0$ shartni tekshiramiz: $f(x^{01}) - f(x^{00}) = 2 - 2 = 0$. Xulosa: $t_0 = 0.25$ deb olamiz va 9-qadamga o'tamiz.

9¹. $t_0 = 0.25$ qadam bilan x^{00} ni hisoblaymiz: $x^{00} = (-0.25, 1)^T$.

10¹. $f(x^{01}) - f(x^{00}) < 0$ shartni tekshiramiz: $f(x^{01}) - f(x^{00}) = 0.85 - 2 = -1.125 < 0$.

11⁰. $\|x^{01} - x^{00}\| < \varepsilon_2$, $|f(x^{01}) - f(x^{00})| < \varepsilon_2$ shartlarni tekshiramiz:

$$\|x^{01} - x^{00}\| = 0.75 > 0.15, |f(x^{01}) - f(x^{00})| = 1.125 > 0.15:$$

$k=1$ deb olamiz va 5-qadamga o'tamiz.

5¹. $k \leq n - 1$ shartning bajarilishini tekshiramiz: $k = 0 < 1 = n - 1$.

6¹. $\nabla f(x^{01})$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^{01}) = (0; 1.75)^T$.

7¹. $\|\nabla f(x^{01})\| < \varepsilon_1$ shartni tekshiramiz: $\|\nabla f(x^{01})\| = 1.75 > 0.1$.

8¹. $t_1 = 0.5$ deb olamiz.

9¹. $x^{02} = x^{01} - t_1 \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right) |_{x=x^{01}} \cdot e_2$ ni hisoblaymiz, bunda $e_2 = (0, 1)^T$;

$\frac{\partial f(x^{01})}{\partial x_2} = (x_1 - 2x_2) |_{x^{01}} = -0.25 + 2 = 1.75$. Buyerdan, $x^{02} = (-0.25; 0.125)^T$.

10¹. $f(x^{02}) - f(x^{01}) < 0$ shartni tekshiramiz:

$$f(x^{02}) - f(x^{01}) = 0.109 - 0.875 = -0.766 < 0.$$

11⁰. $\|x^{02} - x^{01}\| < \varepsilon_2$, $|f(x^{02}) - f(x^{01})| < \varepsilon_2$ shartlarni tekshiramiz:

$$\|x^{02} - x^{01}\| = 0.875 > 0.15, |f(x^{02}) - f(x^{01})| = 0.766 < 0.15.$$

$k=2$ deb olamiz va 5-qadamga o'tamiz.

5². $k \leq n - 1$ ning bajarilishini tekshiramiz: $k = 0 < 1 = n - 1$. $j=1$, $x^{10} = x^{02}$, larni berib, 3 - qadamga o'tamiz.

3¹. $j \geq M$ ning bajarilishini tekshiramiz: $j = 1 < 10 = M$.

4¹. $k=0$ ni beramiz.

5². $k \leq n - 1$ ning bajarilishini tekshiramiz: $k = 0 < 1 = n - 1$.

6². $\nabla f(x^{10})$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^{10}) = \nabla f(x^{02}) = (-0.875; 0.00)^T$.

7². $\|\nabla f(x^{10})\| < \varepsilon_1$ shartni tekshiramiz: $\|\nabla f(x^{10})\| = 0.875 > 0.1$.

8². $t_0 = 0.25$ ni beramiz.

9². $x^{11} = x^{10} - t_0 \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right) |_{x=x^{10}} \cdot e_1$ ni hisoblaymiz, $x^{11} = (-0.03, 0.125)^T$;

10². $f(x^{11}) - f(x^{10}) < 0$ shartni tekshiramiz:

$$f(x^{11}) - f(x^{10}) = 0.01 - 0.109 = -0.0099 < 0.$$

11². $\|x^{11} - x^{10}\| < \varepsilon_2$, $|f(x^{11}) - f(x^{10})| < \varepsilon_2$ shartlarni tekshiramiz:

$$\|x^{11} - x^{10}\| = 0.22 > 0.15, |f(x^{11}) - f(x^{10})| = 0.099 < 0.15.$$

$k=1$ deb olib, 5-qadamga o'tamiz.

5³. $k \leq n - 1$ ning bajarilishini tekshiramiz: $k = 0 < 1 = n - 1$.

6³. $\nabla f(x^{11})$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^{11}) = (0.005; 0.22)^T$.

7³. $\|\nabla f(x^{11})\| < \varepsilon_1$ shartni tekshiramiz: $\|\nabla f(x^{11})\| = 0.22 > 0.1$.

8³. $t_1 = 0.25$ ni beramiz.

9³. $x^{12} = x^{11} - t_0 \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right) |_{x=x^{11}} \cdot e_1$ ni hisoblaymiz, $x^{12} = (-0.03, 0.07)^T$;

10³. $f(x^{12}) - f(x^{11}) < 0$ shartni tekshiramiz:

$$f(x^{12}) - f(x^{11}) = 0.0046 - 0.1 = -0.0954 < 0.$$

11². $\|x^{12} - x^{11}\| < \varepsilon_2, |f(x^{12}) - f(x^{11})| < \varepsilon_2$ shartlarni tekshiramiz:

$$\|x^{12} - x^{11}\| = 0.055 > 0.15, |f(x^{12}) - f(x^{11})| = 0.0954 < 0.15.$$

$k=2$ deb olamiz va 5-qadamga o'tamiz.

5⁴. $k \leq n - 1$ ning bajarilishini tekshiramiz: $k = 0 < 1 = n - 1$. $j=2$, $x^{20} = x^{12}$ larni berib, 3-qadamga o'tamiz.

3². $j \geq M$ ning bajarilishini tekshiramiz: $j = 2 < 10 = M$.

4². $k=0$ deb olamiz.

5⁴. $k \leq n - 1$ ning bajarilishini tekshiramiz: $k = 0 < 1 = n - 1$.

6⁴. $\nabla f(x^{20})$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^{20}) = \nabla f(x^{12}) = (-0.05; 0.11)^T$.

7⁴. $\|\nabla f(x^{20})\| < \varepsilon_1$ shartni tekshiramiz: $\|\nabla f(x^{20})\| = 0.12 > 0.1$.

8⁴. $t_0 = 0.25$ ni beramiz.

9⁴. $x^{21} = x^{20} - t_0 \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right)_{x=x^{20}} \cdot e_1$ ni hisoblaymiz, $x^{21} = (-0.02, 0.07)^T$;

10⁴. $f(x^{21}) - f(x^{20}) < 0$ shartni tekshiramiz: $0.0043 - 0.046 = -0.0417 < 0$. 11-qadamga o'tamiz.

11⁴. $\|x^{21} - x^{20}\| < \varepsilon_2, |f(x^{21}) - f(x^{20})| < \varepsilon_2$ shartlarni tekshiramiz:

$$\|x^{21} - x^{20}\| = 0.01 > 0.15, |f(x^{21}) - f(x^{20})| = 0.0417 < 0.15.$$

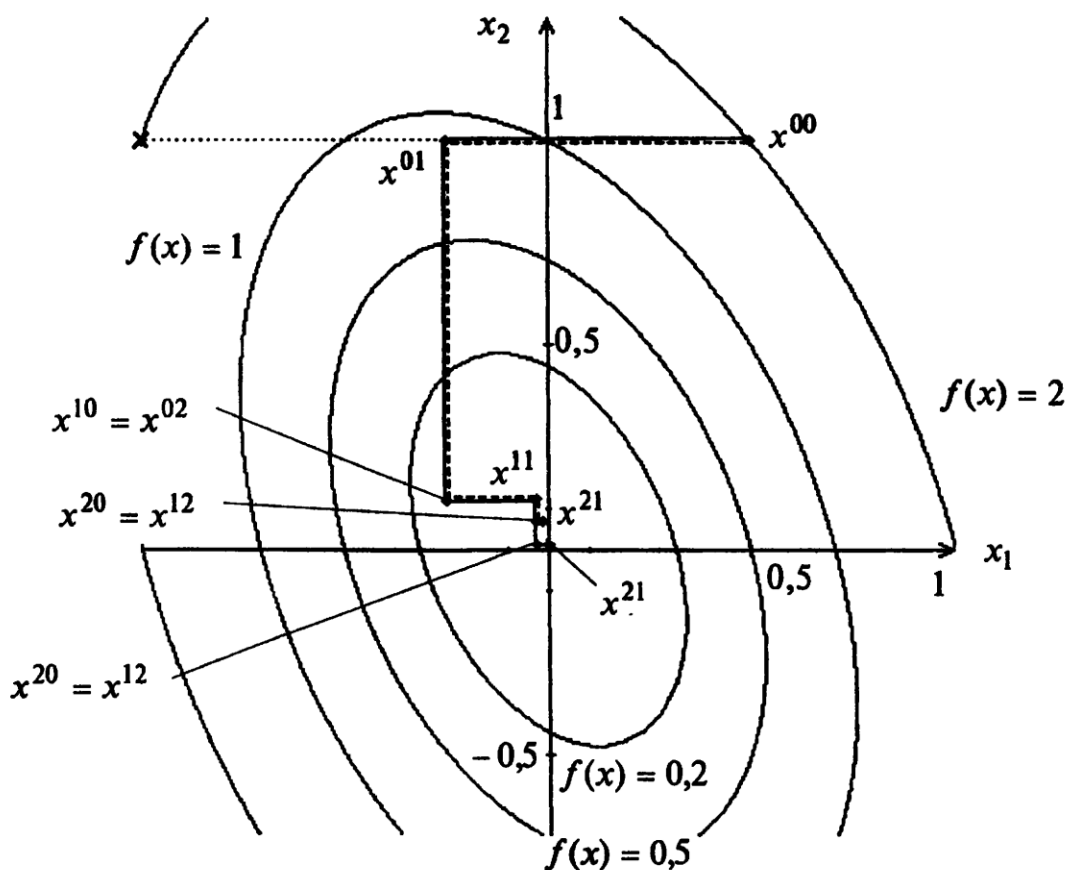


Рис. 6.5

13.2 -chizma

13.2. GAUSS – ZEYDEL USULI

13.2.1. Masalaning qo'yilishi

Faraz qilaylik, R^n to'plamda quyidan chegaralangan va uning barcha nuqtalarida uzluksiz xususiy hosilalarga ega $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

$X = R^n$ joiz yechimlar to'plamida $f(x)$ funksiyaning local minimumini, ya'ni shunday $x^* \in R^n$ nuqtani, topish kerakki, unda

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x)$$

munosabat o'rinli bo'lsin.

13.2.2. Izlash strategiyasi

Gauss-Zeydel usulining strategiyasi shunday $\{x^k\}$, $k = 0, 1, \dots$, nuqtalar ketma-ketligini qurishdan iboratki, ular uchun $f(x^{k+1}) < f(x^k)$, $k = 0, 1, \dots$ munosabatlar bajarilsin.

$\{x^k\}$ ketma-ketlikning nuqtalari quyidagi,

$$x^{jk+1} = x^{jk} - t_k \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{k+1}} \right) |_{x=x^{jk}}, e_{k+1}, \quad (2)$$

qoida bo'yicha hisoblanadi, bunda j – hisoblashlar tsiklining raqami, $j = 0, 1, 2, \dots$; k - tsikl ichidagi $k = 0, 1, \dots, n - 1$ iteratsiya raqami; e_{k+1} - $(k + 1)$ -proyeksiyasi 1 ga teng birlik vektor; x^{00} nuqta foydalanuvchi tomonidan beriladi, t_k qadam kattaligi

$$\varphi(t_k) = f \left(x^{jk} - t_k \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{k+1}} \right) |_{x=x^{jk}}, e_{k+1} \right) \rightarrow \min_{t_k}$$

shartdan tanlanadi. Bu masala,

$$\varphi(t_k) = f \left(x^{jk} - t_k \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{k+1}} \right) |_{x=x^{jk}}, e_{k+1} \right)$$

funksiya minimumini topish talab qilingan bir o'lchovli masaladan iborat. Uni yechish, yoki

$\frac{d\varphi}{dt_k} = 0$, $\frac{d^2\varphi}{dt_k^2} > 0$, shartlardan foydalanilgan holda, yoki $\varphi(t_k) \rightarrow \min_{t_k \in [a, b]}$ masala kabi, bir o'lchovli minimallashtirishning sonli usullari vositasida, bajarilishi mumkin.

Agar $\frac{d\varphi}{dt_k} = 0$ tenglama yuqori darajali bo'lib, uning ildizlarini aniqlash qiyin bo'lganda $\varphi(t_k)$ funksiyaning ikkinchi yoki uchinchi darajali $P(t_k)$ ko'phad bilan approksimatsiya qilish va t_k^* ni $\frac{dP}{dt_k} = 0$, $\frac{d^2P}{dt_k^2} > 0$ shartdan aniqlash mumkin bo'ladi.

Qadam kattaligini sonli usullar yordamida yechishda topilgan t_k qiymatning $\frac{d\varphi}{dt_k} = 0$, $\frac{d^2\varphi}{dt_k^2} > 0$ shartni qanoatlantiradigan t_k^* optimal qiymatga yaqinlik darajasi, $[a, b]$ intervalning berilishi va bir o'lchovli minimallashtirish usullarining aniqligiga bog'liq bo'ladi.

Tanlangan j da bitta k raqamli iteratsiyada x^{jk} nuqtaning $k + 1$ raqamli faqat bitta proyeksiyasi o'zgarishini, j raqamli to'liq tsiklda esa, ya'ni $k = 0$ dan boshlanib, $k = n - 1$ da tamom bo'ladigan tsiklda, x^{j0} nuqtaning barcha n ta proyeksiyalari o'zgarishini oson ko'rish mumkin. Bundan keyin x^{jn} nuqtaga $x^{j+1,0}$ raqam beriladi va u $(j + 1)$ -tsiklda hisoblashlar uchun boshlang'ich nuqta sifatida olinadi.

. Hisoblashlar x^{jk} nuqtada, quyidagi, hisoblashlarni tugatish uchta kriteriyalaridan hech bo'lmaganda bittasi bajarilganda to'xtatiladi:

$$\|\nabla f(x^{jk})\| < \varepsilon_1, \text{ yoki } j \geq M,$$

yoki

$$\|x^{jk+1} - x^{jk}\| < \varepsilon_2, \quad |f(x^{jk+1}) - f(x^{jk})| < \varepsilon_2$$

tengsizliklarning bir vaqtda bajarilishi. Bunda $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - kichik musbat sonlar, M – iteratsiyalar tsikllarining limitik soni.

Hisoblashlar natijasida olingan nuqtalar $\{x^l\}$ ketma-ketlikning elementlari kabi yozilishi mumkin, bunda $l = nj + k$ - nuqtaning tartib raqami, ya'ni $\{x^l\} = \{x^0 = x^{00}, x^1 = x^{01}, \dots, x^n = x^{0n} = x^{10}, x^{n+1} = x^{11}, x^{n+2} = x^{12}, \dots\}$.

13.2.3. Algoritm

1-qadam. $x^{00}, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ larni, hisoblash tsikllari n ga karrali iteratsiyalari limitik soni M ni berish, bunda $n - x$ vektorning o'lchovi. $\nabla f(x)$ gradiyentni topish.

2-qadam. $j = 0$ tsikl raqamini berish.

3-qadam. $j \geq M$ shartni tekshirish:

a) agar $j \geq M$ bo'lsa, hisoblashlar tugaydi va $x^* = x^{jk}$;

b) agar $j < M$ bo'lsa, 4-qadamga o'tish.

4-qadam. $k = 0$ ni berish.

5-qadam. $k \leq n - 1$ shartni tekshirish:

a) agar $k \leq n - 1$ bo'lsa, 6-qadamga o'tish;

b) agar $k = n$ bo'lsa, $j = j + 1$ deb olish va 3-qadamga o'tish.

6-qadam. $\nabla f(x)$ ni hisoblash.

7-qadam. $\|\nabla f(x^{jk})\| < \varepsilon_1$ shart bajarilishini tekshirish:

a) agar shart bajarilsa, hisoblashlar tugaydi va $x^* = x^{jk}$;

b) agar shart bajarilmasa, u holda 8-qadamga o'tish.

8-qadam. t_k^* ni

$$\varphi(t_k) = f\left(x^{jk} - t_k \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{k+1}}\right) \Big|_{x=x^{jk}} \cdot e_{k+1}\right) \rightarrow \min_{t_k}$$

shartdan hisoblash.

9-qadam. $x^{jk+1} = x^{jk} - t_k^* \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{k+1}}\right) \Big|_{x=x^{jk}} \cdot e_{k+1}$ ni hisoblash.

10-qadam. Quyidagi,

$$\|x^{jk+1} - x^{jk}\| < \varepsilon_2, \quad |f(x^{jk+1}) - f(x^{jk})| < \varepsilon_2$$

shartlarning bajarilishini tekshirish:

a) agar ikkita shart ham ikkita, ketma-ket j va $j - 1$ eraqamli tsikllarda bajarilsa, u holda, hisoblashlar tugaydi, natijada, $x^* = x^{jk+1}$ nuqta topildi;

b) agar shartlardan hech bo'lmaganda bittasi bajarilmasa, u holda, $k = k + 1$ deb olish va 5-qadamga o'tish.

Usulning $n = 2$ ushun geometric talqini 13.3-chizmada keltirilgan.

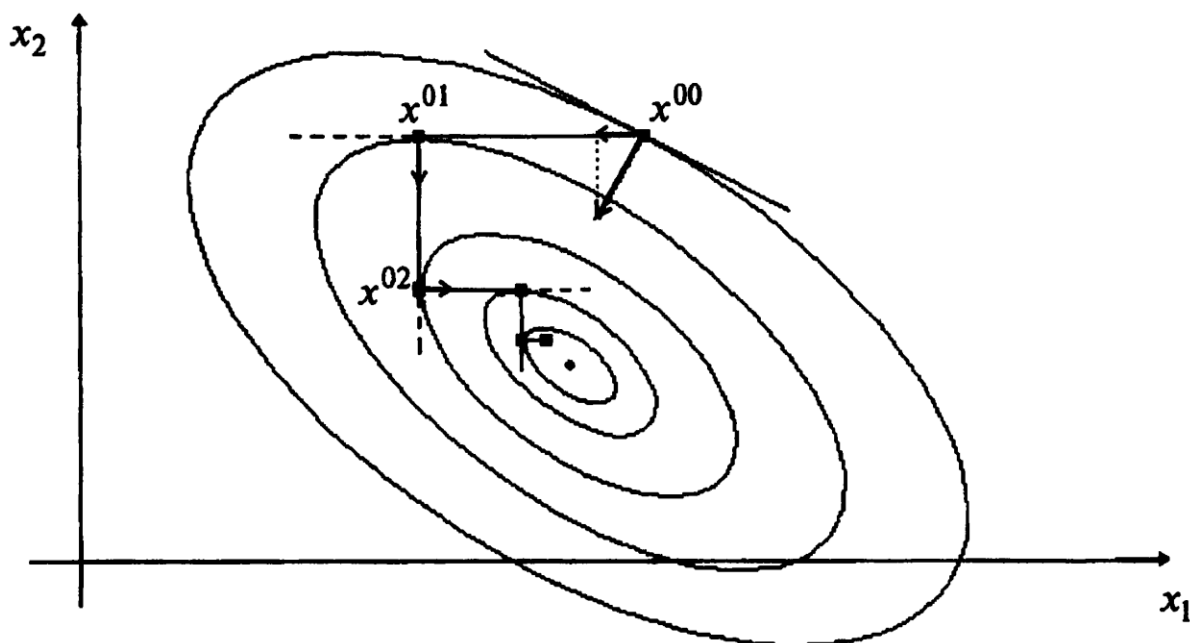


Рис. 6.6

13.3-chizma

13.2- izohlar.

1. Gauss-Zeydel usuli bo'yicha olingan $\{x^k\}$, $k = 0, 1, \dots$, ketma-ketlikning xossalariga nisbatan, 13.1-izohlarning 1-b. o'rinli.
2. Masalani yechish jarayoni gradiyentli tushish usuli (12-ma'ruza)dagi jarayon bilan ustma-ust tushadi.

13.2.4. Misol.

Ushbu

$$f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

funksiyaning lokal minimumi topilsin.

□ 1. $x^{00}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, M: x^{00} = (0,5; 1)^T, \varepsilon_1 = 0,1; \varepsilon_2 = 0,15; M = 10$ larni beramiz.

Funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi $\nabla f(x) = (4x_1 + x_2; x_1 + 2x_2)^T$ gradiyentini topamiz.

2. $j = 0$ ni beramiz.

3⁰. $j \geq M$ shartning bajarilishini tekshiramiz: $j = 0 < 10 = M$.

4⁰. $k = 0$ ni beramiz.

5⁰. $k \leq n - 1$ shartning bajarilishini tekshiramiz: $k = 0 < 1 = n - 1$.

6⁰. $\nabla f(x^{00})$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^{00}) = (3; 2,25)^T$.

7⁰. $\|\nabla f(x^{00})\| < \varepsilon_1$ shartni tekshiramiz: $\|\nabla f(x^{00})\| = 3,9 > 0,1$.

8⁰. t_0^* qadamning miqdorini

$$\varphi(t_0) = f\left(x^{j0} - t_0 \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right) \Big|_{x=x^{j0}} \cdot e_1\right) \rightarrow \min_{t_0}$$

shartdan topamiz.

(2) formuladan $k = 0$ bo'lganda foydalanamiz $k = 0: x^{01} = x^{00} - t_0 \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right) \Big|_{x=x^{00}} \cdot e_1$.

$\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right) \Big|_{x=x^{00}} = 4x_1 + x_2 \Big|_{x=x^{00}} = 2 + 1 = 3, e_1 = (1; 0)^T$, bo'lgani uchun, $x^{01} =$

$(0,5; 1)^T - t_0 \cdot 3 \cdot (1; 0)^T = (0,5 - 3t_0; 1)^T$ yoki $x_1^{01} = 0,5 - 3t_0, x_2^{01} = 1$. Olingan

ifodalarni $f(x)$ ga eltirib qo'yib,

$$\varphi(t_0) = 2(0,5 - 3t_0)^2 + (0,5 - 3t_0) \cdot 1 + 1$$

ifodani olamiz.

Ekstremumning zaruriy shartidan iborat, $\frac{d\varphi(t_0)}{dt_0} = 4 \cdot (0,5 - 3t_0) \cdot (-3) - 3 = 0$ yoki

$36t_0 - 9 = 0$ munosabatdan $t_0^* = \frac{1}{4}$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Modomiki,

$\frac{d^2\varphi(t_0)}{dt_0^2} = 36 > 0$ ekan, topilgan qiymat $\varphi(t_0)$ funksiyaning t_0 bo'yicha minimumini ta'minlaydi.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning tuzilishiga asosan, $-\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)_{x=x^{jk}} \cdot e_1$ yo'nalish bo'yicha qadam x^k ga bog'liq emas va $\frac{1}{4}$ ga teng o'zgarmasdan iborat.

$$9^0. \quad x^{01} = x^{00} - t_0^* \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)_{x=x^{00}} \cdot e_1 \text{ ni aniqlaymiz: } x^{01} = (-0,25; 1)^T.$$

$$10^0. \quad \|x^{01} - x^{00}\| < \varepsilon_2, |f(x^{01}) - f(x^{00})| < \varepsilon_2 \text{ shartlarni tekshiramiz:}$$

$$\|x^{01} - x^{00}\| = 0,25 > 0,15, |f(x^{01}) - f(x^{00})| = |0,875 - 2| = 1,125 > 0,15.$$

$k = 1$ deb olib, 5-qadamga o'tamiz.

$$5^1. \quad k \leq n - 1 \text{ shartning bajarilishini tekshiramiz: } k = 1 = n - 1.$$

$$6^1. \quad \nabla f(x^{01}) \text{ ni hisoblaymiz: } \nabla f(x^{01}) = (0; 1,75)^T.$$

$$7^1. \quad \|\nabla f(x^{01})\| < \varepsilon_1 \text{ shartni tekshiramiz: } \|\nabla f(x^{01})\| = 1,75 > 0,1.$$

$$8^1. \quad t_1^* \text{ ning qiymatini}$$

$$\varphi(t_1) = f\left(x^{j1} - t_1 \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)_{x=x^{j1}} \cdot e_2\right) \rightarrow \min_{t_1}$$

shartdan topamiz.

$k = 1, j = 0$ bo'lganda (2) formuladan foydalanamiz:

$$x^{02} = x^{01} - t_1 \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)_{x=x^{01}} \cdot e_2.$$

$$\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)_{x=x^{01}} = x_1 + 2x_2 \Big|_{x=x^{01}} = -0,25 + 2 = 1,75, e_2 = (0; 1)^T, \text{ bo'lganligidan,}$$

$$x^{02} = (-0,25; 1)^T - t_1 \cdot 1,75 \cdot (0; 1)^T = (0,25; 1 - 1,75 \cdot t_1)^T$$

yoki

$$x_1^{02} = -0,25; x_2^{02} = 1 - 1,75 \cdot t_1.$$

$$\varphi(t_1) = 2(-0,25)^2 + (-0,25) \cdot (1 - 1,75 \cdot t_1) + (1 - 1,75 \cdot t_1)^2.$$

Ekstremumning zaruriy shartidan,

$$\frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = 0,25 \cdot 1,75 + 2 \cdot (1 - 1,75 \cdot t_1) \cdot (-1,75) = 0$$

yoki

$$2 \cdot 1,75^2 t_1 - 1,75^2 = 0,$$

buyerdan $t_1^* = \frac{1}{2}$ ekanligi kelib chiqadi. Modomiki, $\frac{d^2\varphi(t_1)}{dt_1^2} = 2 - 1,75^2 > 0$ ekan, qadamning topilgan qiymati $\varphi(t_1)$ funksiyaning t_1 bo'yicha minimumini ta'minlaydi.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning tuzilishiga asosan, $-\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)_{x=x^{jk}} \cdot e_2$ yo'nalish bo'yicha

qadam x^k ga bog'liq emas va $\frac{1}{2}$ ga teng o'zgarmasdan iborat.

$$9^1. \quad x^{02} = x^{01} - t_1^* \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)_{x=x^{01}} \cdot e_2 \text{ ni hisoblaymiz: } x^{02} = (-0,25; 0,125)^T.$$

$$10^1. \quad \|x^{02} - x^{01}\| = 0,875 > 0,15, |f(x^{02}) - f(x^{01})| = |0,12 - 0,875| = 0,755 > 0,15 \text{ shartlarni tekshiramiz. } k = 2 \text{ deb olib, 5-qadamga o'tamiz.}$$

$$5^2. \quad k \leq n - 1 \text{ shartni tekshiramiz: } k = 2 = n. \quad j = 1, x^{10} = x^{02} \text{ deb olib, 3-qadamga o'tamiz.}$$

$$3^1. \quad j \geq M \text{ shartni tekshiramiz: } j = 1 < 10 = M.$$

$$4^1. \quad k = 0 \text{ ni beramiz.}$$

$$5^3. \quad k \leq n - 1 \text{ shartni tekshiramiz: } k = 0 < 1 = n - 1.$$

6³. $\nabla f(x^{10})$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^{10}) = \nabla f(x^{02}) = (-0,875; 0,00)^T$.

7³. $\|\nabla f(x^{10})\| < \varepsilon_1$ shartni tekshiramiz: $\|\nabla f(x^{10})\| = 0,875 > 0,1$.

8³. $t_0^* = 0,25$ deb olamiz ($8^0 - b.$ ga q.).

9³. $x^{11} = x^{10} - t_0^* \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right) |_{x=x^{10}} \cdot e_1$ ni hisoblaymiz: $x^{11} = (-0,03; 0,125)^T$.

10³. $\|x^{11} - x^{10}\| < \varepsilon_2$, $|f(x^{11}) - f(x^{10})| < \varepsilon_2$ shartlarning bajarilishini tekshiramiz:

$$\|x^{11} - x^{10}\| = 0,22 > 0,15, |f(x^{11}) - f(x^{10})| = |0,013 - 0,1375| = 0,124 < 0,15.$$

$k = 1$, deb olib, 5-qadamga o'tamiz.

5⁴. $k \leq n - 1$ shartni tekshiramiz: $k = 1 = n - 1$.

6⁴. $\nabla f(x^{11})$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^{11}) = (0,005; 0,22)^T$.

7⁴. $\|\nabla f(x^{11})\| < \varepsilon_1$ shartni tekshiramiz: $\|\nabla f(x^{11})\| = 0,22 > 0,1$.

8⁴. $t_1^* = 0,5$ deb olamiz ($8^1 - b.$ ga q.).

9⁴. $x^{12} = x^{11} - t_1^* \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right) |_{x=x^{11}} \cdot e_2$ ni hisoblaymiz: $x^{12} = (-0,03; 0,015)^T$.

10⁴. $\|x^{12} - x^{11}\| < \varepsilon_2$, $|f(x^{12}) - f(x^{11})| < \varepsilon_2$ shartlarning bajarilishini tekshiramiz:

$$|f(x^{12}) - f(x^{11})| = |0,0015 - 0,013| = 0,0115 < 0,15.$$

$k = 2$ deb olamiz va 5-qadamga o'tamiz.

5⁵. $k \leq n - 1$ shartni tekshiramiz: $k = 2 = n$. $j = 2$, $x^{20} = x^{12}$ deb olamiz va 3-qadamga o'tamiz.

3². $j \geq M$ shartni tekshiramiz: $j = 2 < 10 = M$.

4². $k = 0$ ni beramiz.

5⁶. Проверим условие $k \leq n - 1$: $k = 0 < 1 = n - 1$.

6⁵. Вычислим $\nabla f(x^{20})$: $\nabla f(x^{20}) = (-0,105; 0)^T$.

7⁵. Проверим условие $\|\nabla f(x^{20})\| < \varepsilon_1$: $\|\nabla f(x^{20})\| = 0,105 > \varepsilon_1$.

8⁵. Зададим $t_0^* = 0,25$ (см. п. 8⁰).

9⁵. Вычислим $x^{21} = x^{20} - t_0^* \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right) |_{x=x^{20}} \cdot e_1$: $x^{21} = (-0,004; 0,015)^T$.

10⁵. Проверим условия $\|x^{21} - x^{20}\| < \varepsilon_2$, $|f(x^{21}) - f(x^{20})| < \varepsilon_2$: $\|x^{21} - x^{20}\| = 0,026 < 0,015$, $|f(x^{21}) - f(x^{20})| = |0,000197 - 0,0015| = 0,0013 < 0,15$.

Условия $\|x^{jk+1} - x^{jk}\| < \varepsilon_2$, $|f(x^{jk+1}) - f(x^{jk})| < \varepsilon_2$ выполнены в двух последовательных циклах с номерами $j = 2$ и $j - 1 = 1$. Расчет окончен, найдена точка $x^{21} =$

$(-0,004; 0,015)^T$; $f(x^{21}) = 0,000197$. На рис. 6.5 полученные точки последовательности $x^{00} \rightarrow x^{01} \rightarrow x^{02} = x^{10} \rightarrow x^{11} \rightarrow x^{12} = x^{20} \rightarrow x^{21}$ соединены сплошной линией. Очевидно, метод Гаусса-Зейделя сходится быстрее, чем метод покоординатного спуска.

II. Анализ точки x^{21} .

Точка x^{21} является найденным приближением точки глобального минимума $f(x)$, так как функция $f(x)$ строго выпуклая (см. пример 12.1). ■

14 – ma’ruza

Shartsiz minimallashtirish masalalarini yechishning sonli usullari (Ikkinchi tartibli usullar: Nyuton va Nyuton-Rafson usullari).

14.1. Nyuton usuli

14.1.1. Masalaning qo'yilishi

Faraz qilaylik, R^n to'plamda quyidan chegaralangan va uning barcha nuqtalarida ikkinchi tartibgacha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

$X = R^n$ joiz yechimlar to'plamida $f(x)$ funksiyani lokal minimumini, ya'ni shunday $x^* \in R^n$ nuqtani topish kerakki, unda

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x)$$

munosabat bajarilsin, bunda $f(x) \in C^2$.

14.1.2. Izlash strategiyasi

Nyuton usulining strategiyasi shundan iboratki, unda qurilgan $\{x^k\}$, $k = 0, 1, \dots$, nuqtalar ketma-ketligi uchun

$$f(x^{k+1}) < f(x^k), \quad k = 0, 1, \dots$$

tengsizliklar bajarilsin.

Ketma-ketlikning nuqtalari,

$$x^{k+1} = x^k + d^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (14.1)$$

qoida bo'yicha hisoblanadi, bunda x^0 – foydalanuvchi tomonidan beriladi, tushish yo'nalishi d^k esa, k ning har bir qiymati uchun,

$$d^k = -H^{-1}(x^k) \nabla f(x^k) \quad (14.2)$$

formuladan tanlanadi.

d^k ning (14.2) formula bo'yicha tanlanishi, $H(x^k) > 0$ shart bajarilgan-da, $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ talab bajarilishini ta'minlaydi. (14.2) formula quyidagi mulohazalardan olingan:

1. $f(x)$ funksiya $\{x^k\}$ ketma-ketlikning har bir nuqtasida

$$F_k = f(x^k) + (\nabla f(x^k), d^k) + \frac{1}{2} (d^k, H(x^k) d^k)$$

kvadratik funksiya bilan approksimatsiyalanadi.

2. d^k yo'nalish ekstremumning birinchi tartibli shartidan topiladi: $\frac{dF_k}{dd^k} = 0$. Shunday qilib, $H(x^k) > 0$ shart bajarilganda, ketma-ketlik F_k , $k = 0, 1, \dots$ (14.1-chizma) kvadratik funksiyalarning minimum nuqtalari ketma-ketligidan iborat bo'ladi. $f(x^{k+1}) < f(x^k)$, $k = 0, 1, \dots$, talabning, hatto qandaydir qiymatlarda $H(x^k)$ Hesse matritsasi musbat aniqlangan bo'lmagan holda ham, k ning mos qiymatlarida x^{k+1} nuqtani, qadam miqdori t_k ni $f(x^k - t_k \nabla f(x^k)) < f(x^k)$ shartdan tanlab,

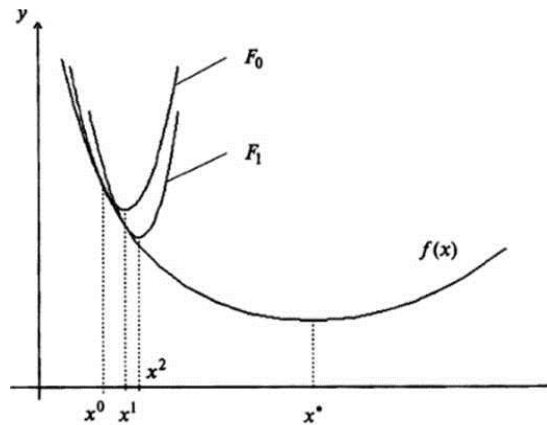
$$x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k)$$

gradiyentli tushish usuli bo'yicha aniqlash mumkin.

$\{x^k\}$ ketma-ketlikni qurish, unda $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon_1$ shart o'rinli bo'ladigan, x^k nuqtada, bunda ε_1 - berilgan yetarli kichik musbat son, yoki $k \geq M$ (M - предельное число итераций) bo'lganda, yoki ikkita,

$$\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_2, \quad |f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_2,$$

tengsizliklar bir vaqtda bajarilganda, bunda ε_2 – yetarli kichik musbat son, tugallanadi. Topilgan x^k nuqtani izlanayotgan minimum nuqtasining yaqinlashishi sifatida olinishi yoki olinmasligi masalasi, qo'shimcha tekshirish o'tkazish yo'li bilan hal etiladi.



14.1-chizma

14.1.3.Algoritm

1-qadam.

M – iteratsiyalarning

$\nabla f(x)$ gradiyentni va $H(x)$ Hesse matritsasini hisoblash.

2-qadam. $k = 0$ deb olish.

3-qadam. $\nabla f(x^k)$ ni hisoblash.

4- qadam. $\|\nabla f(x^k)\| \leq \varepsilon_1$ - hisoblashlar tugashi kriteriysini tekshirish:

- a) agar tengsizlik bajarilsa, u holda, hisoblash tugaydi va $x^* = x^k$;
- o) aks holda, 5-qadamga o'tish.

5- qadam. $k \geq M$ tengsizlikning bajarilishini tekshirish:

- a) agar tengsizlik bajarilsa, u holda, hisoblash tugaydi va $x^* = x^k$;
- o) aks holda, 6-qadamga o'tish.

6- qadam. $H(x^k)$ matritsani hisoblash.

7- qadam. $H^{-1}(x^k)$ matritsani hisoblash.

8- qadam. $H^{-1}(x^k) > 0$ shartning bajarilishini tekshirish:

- a) agar $H^{-1}(x^k) > 0$ bo'lsa, u holda, 9- qadamga o'tish;
- o) aks holda, $d^k = -\nabla f(x^k)$ deb olib, 10-qadamga o'tish.

9- qadam. $d^k = -H^{-1}(x^k) \nabla f(x^k)$ ni aniqlash.

10- qadam. Agar $d^k = -H^{-1}(x^k) \nabla f(x^k)$ bo'lsa, $t_k = 1$ deb, yoki $d^k = -\nabla f(x^k)$ bo'lganda t_k ni $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ shartdan tanlab, $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$ nuqtani topish.

11- qadam. $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_2$, $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_2$ shartlarning bir vaqtda bajarilishini tekshirish:

- a) agar ikkita shart ham joriy k va $k = k - 1$ da bajarilsa, hisoblashlar tugaydi, $x^* = x^{k+1}$;
- o) aks holda, $k = k + 1$ deb olish va 3-qadamga o'tish.

14.1.4. Yaqinlashishi

14.1-tasdiq. Faraz qilaylik, $f(x)$ - R^n da ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi $l > 0$ o'zgarmasli kuchli qavariq funksiya bo'lsin va

$$\|H(x) - H(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in R^n$$

shartni qanoatlantirsin, bunda $L > 0$, boshlang'ich nuqta esa, shundayki, uning uchun, $\|\nabla f(x^0)\| \leq 8 \frac{l^2}{L}$ ya'ni,

$$\|\nabla f(x^0)\| \leq \frac{8l^2 q}{L}, \quad (14.3)$$

bo'lsin, bunda $q \in (0,1)$. U holda, $\{x^k\}$ ketma-ketlik minimum nuqtasiga

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{4lq^2 k}{L}$$

kvadratik tezlik bilan yaqinlashadi.

14.1-izohlar.

1. Nyuton usulining yaqinlashishi, faqat kuchli qavariq funksiyalar va

(14.3) shartdan aniqlanadigan yaxshi boshlang'ich yaqinlashish uchun isbotlangan bo'lib, undan amaliyotda foydalanish ancha qiyinchiliklar tug'diradi, chunki, l va L o'zgarmaslar, odatda, noma'lum yoki ularni aniqlashda ko'p mehnat talab qilinadigan tadqiqotlar olib borishga to'g'ri keladi. Shu sababli, Nyuton usulidan amaliyotda foydalanish quyidagicha amallarni bajarishni taqozo qiladi:

a) $H(x^k)$ matritsani

$$H(x^k) > 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

shartning bajarilishiga tekshirish va u bajarilmaganda

$$x^{k+1} = x^k - H^{-1}(x^k) \nabla f(x^k)$$

formulani

$$x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k)$$

formulaga almashtirish;

o) x^k nuqtaning, u izlanayotgan x^* nuqta uchun topilgan yaqinlashish bo'lishini aniqlash maqsadida, tahlilini amamlga oshirish.

2. Shartsiz maksimumni izlash masalasini yechishda, (14.2) formula o'zgarmaydi, chunki, bu holda $H(x^k) < 0$.

14.1.5. Masalani yechish jarayoni

1. Nyuton usulidan foydalanib, unda hisoblashlarni tugatish kriteriylari-dan hech bo'lmaganda bittasi bajariladigan, x^k nuqtani topish.

2. $f(x) \in C^2$ bo'lgani sababli, minimumning yetarli sharti $H(x^k) > 0$ bajarilishini tekshirish. Agar shart bajarilsa, u holda, x^k nuqta x^* minimum nuqtasi uchun topilgan yaqinlashish sifatida qaralishi mumkin. Yetarli shartlarning bajarilishini tekshirishni $f(x)$ funksiyani qavariqlikka tekshirish bilan almashtirish mumkin.

14.1-misol. Ushbu

$$f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

funksiyaning lokal minimumini Nyuton usulidan foydalanib, toping.

I. Hisoblashlar tugashi kriteriylaridan, hech bo'lmaganda, bittasi bajariladigan x^k nuqtani aniqlash.

1. $x^0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, M$: $x^0 = (0.5; 1)^T$; $\varepsilon_1 = 0.1$; $\varepsilon_2 = 0.15$; $M = 10$ larni beramiz. Funksiyaning $\nabla f(x) = (4x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)^T$ gradiyentini va $H(x) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Hesse matritsasini hisoblaymiz.

2. $k=0$ deb olamiz.

3^o. $\nabla f(x^0)$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^0) = (3; 2.5)^T$.

4^o. $\|\nabla f(x^0)\| \leq \varepsilon_1$ shartning bajarilishini tekshiramiz: $\|\nabla f(x^0)\| = 3.9 > 0.1$. 5-qadamga o'tamiz.

5^o. $k \geq M$ shartning bajarilishini tekshiramiz: $k=0 < 10$. 6-qadamga o'tamiz.

6^o. $H(x^0)$ ni hisoblaymiz: $H(x^0) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7^o. $H^{-1}(x^0)$ ni hisoblaymiz: $H^{-1}(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

8^o. $H^{-1}(x^0) > 0$ shartning bajarilishini tekshiramiz. $\Delta_1 = \frac{2}{7} > 0$, $\Delta_2 = \frac{1}{7} > 0$, bo'lgani uchun, Silvestr kriteriysiga binoan, $H^{-1}(x^0) > 0$.

9^o. $d_0 = -H^{-1}(x^0)\nabla f(x^0) = -\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ ni aniqlay-miz.

10^o. $x^1 = (\frac{1}{2}, 1)^T + (-\frac{1}{2}, -1)^T = (0, 0)^T$ ni hisoblaymiz.

11^o. $\|x^1 - x^0\| < \varepsilon_2$, $|f(x^1) - f(x^0)| < \varepsilon_2$ shartlarning bajarilishini tekshiramiz:
 $\|x^1 - x^0\| = 1.12 > 0.15$; $|f(x^1) - f(x^0)| = 2 > 0.15$.

$k = 1$ deb, 3-qadamga o'tamiz.

3¹. $\nabla f(x^1)$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^1) = (0, 0)^T$.

4¹. $\|\nabla f(x^1)\| < \varepsilon_1$ shartning bajarilishini tekshiramiz: $\|\nabla f(x^1)\| = 0 < 0.1$. Hisoblashlar tugadi. Shuni e'tirof etish kerakki, x^1 nuqtada birinchi tartibli zaruriy shart bajariladi, shu sababli, u statsionar nuqtadan iborat.

II. x^1 nuqtaning tahlili.

$f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ - qat'iy qavaariq funksiyadir, chunki uning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari matritsasi, $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 7 > 0$ bo'lganligidan, musbat aniqlangandir, ya'ni, $H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0$. Demak, topilgan, $x^1 = (0, 0)^T$ nuqta $f(x)$ funksiyaning lokal va bir vaqtning o'zida global minimum nuqtasi ham bo'ladi.

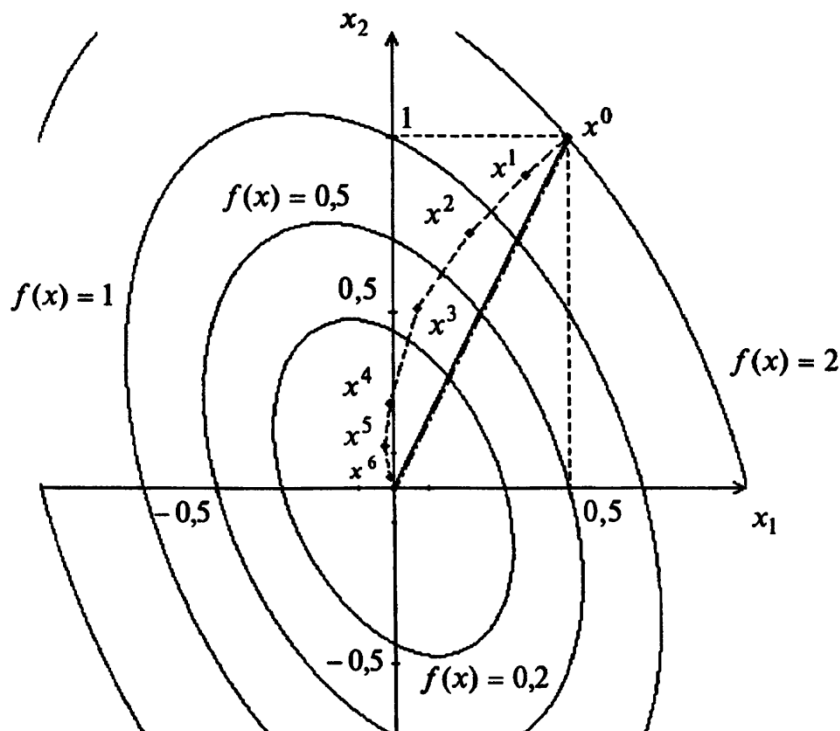


Рис. 7.2

14.2- chizma

14.2 –chizmada tushish trayektoriyasi tutash chiziqlar orqali tasvirlangan. ■

14.2. Nyuton-Rafson usuli

14.2.1. Masalning qo'yilishi.

Faraz qilaylik, R^n to'plamda quyidan chegaralangan va uning barcha nuqtalarida ikkinchi tartbgacha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

$X = R^n$ joiz yechimlar to'plamida $f(x)$ funksiyaning lokal minimumini, ya'ni shunday $x^* \in R^n$ nuqtani topish kerakki, unda

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x)$$

munosabat bajarilsin, bunda $f(x) \in C^2$.

14.2.2. Izlash strategiyasi

Nyuton usulining strategiyasi shundan iboratki, unda qurilgan $\{x^k\}$, $k = 0, 1, \dots$, nuqtalar ketma-ketligi uchun

$$f(x^{k+1}) < f(x^k), \quad k = 0, 1, \dots$$

tengsizliklar bajarilsin. Ketma-ketlikning nuqtalari,

$$x^{k+1} = x^k - t_k H^{-1}(x^k) \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (14.4)$$

qoida bo'yicha izlanadi, bunda x^0 foydalanuvchi tomonidan beriladi, t_r qadam kattaligi

$$\varphi(t_k) = f(x^k - t_k H^{-1}(x^k) \nabla f(x^k)) \rightarrow \min_{t_k} \quad (14.5)$$

shartdan topiladi.

(7.5) masala, yoki minimumning zaririy sharti $\frac{d\varphi}{dt_k} = 0$ dan foydalanish hamda minimumning yetarli sharti $\frac{d^2\varphi}{dt_k^2} > 0$ ni tekshirish vositasida, analitik ravishda, yoki

$$\varphi(t_k) \rightarrow \min_{t_k \in [a, b]}, \quad (14.6)$$

masala sifatida sonli yechilishi mumkin, bunda $[a, b]$ interval foydalanuvchi tomonidan beriladi.

Agar $\varphi(t_k)$ funksiya murakkab bo'lsa, uni $P(t_k)$ ikkinchi yoki uchinchi darajali ko'phad bilan almashtirish imkonini tug'ilishi mumkin va bu holda t_k qadam, $\frac{d^2P}{dt_k^2} > 0$ shart bajariganda, $\frac{dP}{dt_k} = 0$ shartdan topilishi mumkin.

Qadam kattaligini aniqlash asallasini sonli yechishda topilgan t_k qiymatning $\frac{dP}{dt_k} = 0, \frac{d^2P}{dt_k^2} > 0$ shartlarni qanoatlantiradigan t_k^* optimal qiymatga yaqinlik darajasi, $[a, b]$ intervalning berilishi va bir o'lchovli minimallashtirish usullarining aniqligiga bog'liq bo'ladi.

$\{x^k\}$ ketma-ketlikni qurish, unda $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon_1$ shart o'rinli bo'ladigan, x^k nuqtada, bunda ε_1 - berilgan yetarli kichik musbat son, yoki $k \geq M$ (M - предельное число итераций) bo'lganda, yoki ikkita,

$$\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_2, |f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_2,$$

tengsizliklar bir vaqtda bajarilganda, bunda ε_2 - yetarli kichik musbat son, tugallanadi. Topilgan x^k nuqtani izlanayotgan minimum nuqtasining yaqinlashishi sifatida olinishi yoki olinmasligi masalasi, qo'shimcha tekshirish o'tkazish yo'li bilan hal etiladi.

14.2.3. Algoritm

1-qadam. $x^0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, M$ - iteratsiyalarning maksimal soni, larni berish. $\nabla f(x)$ gradiyentni va $H(x)$ Gesse matrisasini hisoblash.

2-qadam. $k = 0$ deb olish.

3-qadam. $\nabla f(x^k)$ ni hisoblash.

4-qadam. $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon_1$ shart bajarilishini tekshirish:

a) agar tengsizlik bajarilsa, u holda hisoblashlar yakunlanadi, $x^* = x^k$;

b) agar tengsizlik bajarilmasa, 5-qadamga o'tish.

5-qadam. $k \geq M$ shartni tekshiramiz:

a) agar tengsizlik bajarilsa, u holda hisoblashlar yakunlanadi, $x^* = x^k$;

b) agar tengsizlik bajarilmasa, 6-qadamga o'tish.

6-qadam. $H(x^k)$ matrisani hisoblash.

7-qadam. $H^{-1}(x^k)$ matrisani hisoblash.

8-qadam. $H^{-1}(x^k) > 0$ shart bajarilishini tekshirish:

a) agar shart bajarilsa, $d^k = -H^{-1}(x^k) \nabla f(x^k)$ ni topish;

b) agar bajarilmasa, $d^k = -\nabla f(x^k)$ deb olish.

9-qadam. $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$ ni aniqlash.

10-qadam. t_k^* qadamni $\varphi(t_k) = f(x^k + t_k d^k) \rightarrow \min_{t_k}$ shartdan topish.

11-qadam. $x^{k+1} = x^k + t_k^* d^k$ ni hisoblash.

12-qadam. $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_2, |f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_2$ tengsizliklar bajarilishini tekshirish:

a) agar joriy k va $k = k - 1$ larda ikkita shart ham bajarilsa, hisoblash yakunlanadi, $x^* = x^{k+1}$;

b) aks holda, $k = k + 1$ deb olish va 3-qadamga o'tish.

14.2.4. Yaqinlashishi

14.2-tasdiq. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya R^n da ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi kuchli qavariq funksiya, uning $H(x)$ Gesse matrisasi,

$$\|H(x) - H(y)\| \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in R^n$$

Lipshits shartini qanoatlantirsin.

U holda *Тогда последовательность $\{x^k\}$ ketma-ketlik, x^0 boshlang'ich nuqtaning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan holda, x^* minimum nuqtasiga*

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \frac{L}{m} \|x^k - x^*\|^2$$

Kvadratik tezlik bilan yaqinlashadi, bunda m - matrisa eng kichik xos qiymatining bahosi.

14.2-izoh. Nyuton-Rafson usulining yaqinlashishi, boshlang'ich yaqinla-shishning tanlanishiga bog'liq bo'lmasdan, faqat kuchli qavariq funksiyalar uchun kafolatlanadi. Shu sababli, Nyuton-Rafson usulini amaliyotda qo'llashda quyidagicha ish ko'rishga to'g'ri keladi:

a) $H(x^k)$ Gesse matrisasini $H(x^k) > 0, k = 0, 1, \dots$, shartning bajarilishiga tekshirish va u bajarilmaganda,

$$x^{k+1} = x^k - t_k H^{-1}(x^k) \nabla f(x^k)$$

formulani,

$$x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k)$$

gradiyentli tushish formulasiga almashtirish;

b) x^k nuqtani, u izlanayotgan x^* nuqta uchun topilgan yaqinlashish ekanligini aniqlash uchun, tahlil qilish.

14.2.5. Masalani yechish jarayoni

1. Nyuton-Rafson algoritmidan foydalanib, unda hisoblashlarni yakunlash kriteriyalaridan hech bo'lmaganda bittasi bajariladigan, x^k nuqtani qurish.

2. $f(x) \in C^2$ bo'lgani uchun, minimumning yetarli sharti $H(x^k) > 0$ ning bajarilishini tekshirish. Agar shart bajarilsa, x^k nuqta x^* minimum nuqtasi uchun topilgan yaqinlashish sifatida qaralishi mumkin. Minimumning yetarli shartlari bajarilishini tekshirish o'rniga $f(x)$ funksiyani qavariqlikka tekshirishni amalga oshirish mumkin.

14.2-misol. Nyuton-Rafson usulidan foydalanib, ushbu

$$f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

funksiyaning lokal minimumini toping.

I. Hisoblashlarni yakunlash kriteriyalaridan hech bo'lmaganda bittasi bajari-ladigan x^k nuqtani aniqlash.

1. $x^0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, M$ larni beramiz: $x^0 = (0.5; 1)^T$, $\varepsilon_1 = 0,1$; $\varepsilon_2 = 0,15$; $M = 10$. Funksiyaning $\nabla f(x) = (4x_1 + x_2; x_1 + 2x_2)^T$ gradiyentini va $H(x) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $k = 0$ deb olamiz.

3⁰. $\nabla f(x^0)$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^0) = (3; 2,5)^T$.

4⁰. $\|\nabla f(x^0)\| \leq \varepsilon_1$ shartning bajarilishini tekshiramiz:

$$\|\nabla f(x^0)\| = 3.9 > 0,1.$$

5⁰. $k \geq M$ shartning bajarilishini tekshiramiz: $k = 0 < 10$. 6-qadamga o'tamiz.

6⁰. $H(x^0)$ ni hisoblaymiz: $H(x^0) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7⁰. $H^{-1}(x^0)$ ni hisoblaymiz: $H^{-1}(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

8⁰. $H^{-1}(x^0) > 0$ shartning bajarilishini tekshiramiz.

$\Delta_1 = \frac{2}{7} > 0$, $\Delta_2 = \frac{1}{7} > 0$, bo'lgani uchun, Silvestr kriteriysiga binoan, $H^{-1}(x^0) > 0$. Shuning uchun, $d^0 = -H^{-1}$

$(x^0)\nabla f(x^0)$ ni topamiz: $d^0 = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)^T$ (14.1-misoldagi 9⁰ qadamga q.).

9⁰. $x^1 = x^0 + t_0 d^0 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)^T + t_0 \left(-\frac{1}{2}, -1\right)^T = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t_0, 1 - t_0\right)^T$ nuqtani aniqlaymiz.

10⁰. t_0 ni $\varphi(t_0) = f(x^0 + t_0 d^0) \rightarrow \min$ shartdan topamiz. U holda,

$$f(x^0 + t_0 d^0) = f\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t_0, 1 - t_0\right)^T\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t_0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t_0\right) \cdot (1 - t_0) + (1 - t_0)^2 = 2 \cdot (1 - t_0)^2 = \varphi(t_0)$$

$$\frac{d\varphi}{dt_0} = 2 \cdot 2 \cdot (1 - t_0) \cdot (-1) = 0 \text{ shartdan, } t_0^* = 1 \text{ ekanligini olamiz. Bunda } \frac{d^2\varphi}{dt_0^2} = 4 > 0, \text{ ya'ni qadamning}$$

topilgan kattaligi $\varphi(t_0)$ funksiyaning minimumini ta'minlaydi.

11⁰. $x^1 = x^0 + t_0^* d^0$ ni hisoblaymiz: $x^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1, 1 - 1\right)^T = (0, 0)^T$.

12⁰. $\|x^1 - x^0\| < \varepsilon_1$, $|f(x^1) - f(x^0)| < \varepsilon_2$ shartlarning bajarilishini tekshiramiz: $\|x^1 - x^0\| = 1, 12 > 0,15$; $|f(x^1) - f(x^0)| = 2 > 0,15$.

$k = 1$ deb olamiz va 3-qadamga o'tamiz.

3¹. $\nabla f(x^1)$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^1) = (0, 0)^T$.

4¹. $\|\nabla f(x^1)\| < \varepsilon$ shartning bajarilishini tekshiramiz: $\|\nabla f(x^1)\| = 0 < 0,1$. Hisoblashlar yakunlandi: $x^* = x^1$.

II. x^1 nuqtaning tahlili.

$x^* = (0; 0)^T$ – nuqta $f(x)$ funksiyaning ham lokal ham global minimum nuqtasidan iborat (14.1-misolga q.).

14.2-chizmada tushish trayektoriyasi shtrix-punktir chiziq bilan tasvirlangan. ■

O'z-o'zini tekshirish savollari

1. Nyuton usuli qanday strategiyalarga mansub?
2. Nyuton usulida minimumni izlash strategiyasi qanday amalga oshiriladi?
3. Nyuton usulining algoritmini keltiring.
4. Nyuton usulining yaqinlashishi qanday ifodalanadi?
5. Nyuton usulining yaqinlashishi tezligi qanday bo'ladi?
6. Nyuton-Rafson usuli qanday strategiyalarga mansub?
7. Nyuton-Rafson usulida minimumni izlash strategiyasi qanday amalga oshiriladi?
8. Nyuton-Rafson usulining algoritmini keltiring.
9. Nyuton-Rafson usulining yaqinlashishi qanday ifodalanadi?
10. Nyuton-Rafson usulining yaqinlashish tezligi haqida nima deyish mumkin?

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Ushbu

$$f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + Ax_2^2$$

funksiyaning minimum nuqtasini:

a) Nyuton usuli;

b) Nyuton-Rafson usuli dan foydalanib, toping,

bunda A – talabani guruh jurnalidagi tartib raqami.

SHARTLI EKSTREMUMGA QO‘YILGAN MASALALAR

Reja:

15.1. Shartli ekstremumni izlashning sonli usullarini qurishning tamoyillari

1. Shartli ekstremumni izlash masalasining umumiy qo‘yilishi.
2. Sonli usullarning asosiy turlari.

15.2. Jarima funksiyalar usuli.

Tayanch iboralar: joiz yechimlar to‘plami, lokal minimum, madsad funksiyasi, tenglik ko‘rinishidagi bog‘lanish, tengsizlik ko‘rinishidagi bog‘lanish, jarima funksiyalar usuli, to‘siq funksiyalar usuli, Lagranj funksiyasi, umumlashgan Lagranj funksiyasi, gradiyentning proyeksiyasi usuli, joiz yo‘nalish, joiz tushish yo‘nalishi, tushish yo‘nalishi, Zoytendeykning joiz yo‘nalishlar usuli, shartli ekstremumga qo‘yilgan masalada chiziqli bog‘lanishlar, chiziqli programmalashtirish masalalari.

1. Shartli ekstremumni izlash masalasining umumiy qo‘yilishi.

Aralash bog‘lanishlar qatnashgan shartli ekstremumni izlash masalasining umumiy qo‘yilishini qaraymiz.

Faraz qilaylik, bizga ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi maqsad funksiyasi $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ va joiz yechimlar to‘plami X ni, ya’ni

$X = \{x \in R^n | g_j(x) = 0, j = 1, \dots, m; g_j(x) \leq 0, j = m + 1, \dots, p\}$ to‘plamni aniqlaydigan $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ bog‘lanishlar funksiyalari berilgan bo‘lsin.

Maqsad funksiyasining X to‘plamdagi lokal minimum nuqtasini, ya’ni shunday $x^* \in X$ nuqtani topish talab qilinadiki, unda

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x), \quad (15.1)$$

shart bajarilsin, bunda

$$X = \left\{ x \mid \begin{matrix} g_j(x) = 0, j = 1, \dots, m; m < n \\ g_j(x) \leq 0, j = m + 1, \dots, p \end{matrix} \right\}.$$

Matematik analiz kursidan ma’lum bo‘lgan shartli ekstremumning zaruriy va yetarli shartlarini qo‘llash, ularda bu shartlardan hosil qilingan munosabatlar analitik yechimga ega bo‘ladigan, chegaralangan sondagi masalalarda samarali bo‘lishi mumkin.

2. Sonli usullarning asosiy turlari.

Aksariyat amaliy masalalarni yechishda, asosan, ikki guruhga mansub sonli usullardan foydalaniladi.

1. Shartli optimallashtirish masalalarini, yordamchi funksiyalar kiritish yo‘li bilan, shartsiz optimallashtirish masalalari ketma-ketligiga keltirishdan foydalaniladigan usullar: ***ketma-ket shartsiz minimallashtirish usullari***.

2. Shartli optimallashtirish masalalarini, bog‘lanishlarni qanoatlantiradigan bitta nuqtadan, maqsad funksiyasining qiymati yaxshiroq bo‘ladigan boshqa joiz nuqtaga tomon harakatga asoslangan, bevosita yechish usullari. Ular, ko‘pincha, ***joiz yo‘nalishlar usullari*** deyiladi.

Birinchi guruh usullarining asosiy g‘oyasi shundan iboratki, boshlang‘ich shartli ekstremumga qo‘yilgan masala, yechilishi osonroq bo‘lgan yordamchi masala bilan approksimatsiyalanadi. Tabiiyki, faqat bitta yordamchi masala bilan chegaralanganda, umuman olganda, faqat taqribiy yechimni olish mumkin. Agar boshlang‘ich shartli ekstremumga qo‘yilgan masalaga ma‘lum bir ma‘noda «yaqinlashuvchi» masalalar ketma-ketligi qaralsa, aksariyat hollarda, izlanayotgan yechim, mos taqribiy yechimlar ketma-ketligining limitidan iborat bo‘ladi. Bog‘lanishlar qatnashgan masalalarni ma‘lum bir qoida bo‘yicha qurilgan bo‘lanishsiz masalalarga o‘zgartirish g‘oyasi, shartsiz minimallashtirishning biz yuqorida qarab chiqqan samarali va ishonchli usullari borligi bilan ham asoslanadi.

Yagona metodologiya doirasida masalani yechishga yondoshuvning bir necha turlarini qayd etish mumkin.

Ularning birinchisi – ***jarimalar (tashqi jarimalar) usuli*** deb ataladi. Bu usulda maqsad funksiyasiga, bog‘lanishlar buzilishining har bir holi uchun jarima sifatida talqin qilinadigan, funksiya qo‘shiladi. Usul boshlang‘ich masalaning yechimiga yaqinlashuvchi nuqtalar ketma-ketligini quradi.

Ikkinchi yondoshuv - ***to‘siqlar (ichki jarimalar) usuli*** deyiladi. Bunda boshlang‘ich masalaning maqsad funksiyasiga, quriladigan nuqtalarning joiz nuqtalar to‘plami chegarasidan chiqib ketmasligini ta‘minlaydigan, qo‘shiluvchi qo‘shiladi.

Uchinchi yondoshuv – jarima funksiyaning masalaning maqsad funksiyasiga emas, balki uning Lagranj funksiyasiga qo‘shish bilan bog‘liq. Natijada, ***o‘zgartirilgan Lagranj funksiyasi*** yuzaga keladi, bu funksiya yordamchi usullar - ***ko‘paytuvchilar usullari*** deyiladi.

To‘rtinchi yondoshuv – faqat bitta shartsiz minimallashtirish masalasini yechish bilan chegaralanish imkonini beradigan, aniq jarima funksiyalarni kiritishga asoslanadi.

Ikkinchi guruhni tashkil etadigan, shartli optimallashtirish masalasini bevosita yechish usullari,

$$f(x^{k+1}) < f(x^k), k = 0, 1, \dots$$

shartni qanoatlantiradigan, $k \rightarrow \infty$ dagi limiti x^* nuqtadan iborat shunday $\{x^k\}$ joiz nuqtalar ketma-ketligini topish bilan bog‘liqdir. Bunda $\{x^k\}$ ketma-ketlik

$$x^{k+1} = x^k + \delta x^k, k = 0, 1, \dots,$$

qoida bo‘yicha quriladi, bunda δx^k vektor qo‘llanilayotgan usulga bog‘liq ravishda tanlanadi. Bayon qilingan usullar guruhiga, quyida qarab chiqilishi ko‘zda

tutilgan, gradiyentning proyeksiyasi va Zoytendeykning joiz yoʻnalishlar usullari kiradi.

Zoytendeyk usulining har bir iteratsiyasida joiz tushish yoʻnalishi quriladi va, soʻngra shu yoʻnalish boʻylab optimallashtirish oʻtkaziladi.

1-taʼrif. Agar shunday $\delta > 0$ son mavjud boʻlib, $x \in X$ nuqtada barcha $t \in (0, \delta)$ lar uchun $x + td \in X$ munosabat bajarilsa, u holda, nol boʻlmagan d vektor $x \in X$ nuqtada *joiz yoʻnalish* deyiladi.

2-taʼrif. Agar shunday $\delta > 0$ son mavjud boʻlib, $x \in X$ nuqtada barcha $t \in (0, \delta)$ lar uchun $f(x + td) < f(x)$ va $x + td \in X$ munosabat bajarilsa, u holda, nol boʻlmagan d vektor $x \in X$ nuqtada *joiz tushish yoʻnalishi* deyiladi.

15.2. JARIMA FUNKSIYALAR USULI

15.2.1. Masalaning qoʻyilishi

Bizga ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ maqsad funksiyasi va x joiz yechimlar toʻplamini aniqlaydigan, $g_j(x) \leq 0$, $j = 1, \dots, m$, tengsizlik-bogʻlanishlarni qanoatlantiruvchi funksiyalar, berilgan boʻlsin.

Maqsad funksiyasining x toʻplamdagi lokal minimum nuqtasini, yaʼni shunday $x^* \in X$ nuqtani topish talab qilinadiki, unda

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)$$

munosabat bajarilsin, bunda $X = \{x \mid g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}$.

15.2.2. Izlash strategiyasi

Usulning goʻyasi shundan iboratki, shartli ekstremumga qoʻyilgan masala, yordamchi, $F(x, r^k) = f(x) + P(x, r^k)$ funksiyaning, u jarima funksiya deyiladi, minimumini topish haqidagi masalalar ketma-ketligini yechishga keltiriladi, bunda $r^k > 0$ – jarima parametri.

Odatda, quyidagi funksiyalardan foydalaniladi:

a) teskari jarima funksiya: $P(x, r^k) = -r^k \sum_{j=1}^m \frac{1}{g_j(x)}$ (рис. 9.7, a);

b) logarifmik jarima funksiya: $P(x, r^k) = -r^k \sum_{j=1}^m \ln[-g_j(x)]$ (рис. 9.7,

Jarima funksiylarning ha ikkisi ham x , ya'ni $X = \{x | g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}$, to'plamning ichida aniqlangan va chegaralangan, hamda to'plamning chegarasiga ichkaridan yaqinlashganda, cheksizlikka intiladi. Shu sababli ular - **to'siq funksiyalar** deyiladi. $r^k > 0$ bo'lganda, teskari funksiya orqali berilgan jarima funksiya – musbatdir. Logarifmik jarima funksiya esa, $-1 < g(x) < 0$ bo'lganda musbat va $g(x) < -1$ bo'lganda manfiydir, ya'ni to'plamning ichki nuqtalari, uning chegaraviy nuqtalaridan imtiyozliroqdir.

Boshlang'ich nuqta faqat x to'plamining ichida beriladi. Har bir k - iteratsiyada $F_{\{x, r^k\}}$ yordamchi funksiyaning r^k parameter berilgandagi $x^*(r^k)$ minimum nuqtasi, shartsiz minimallashtirish usullarining biridan foydalanilgan holda, topiladi. Topilgan $x^*(r^k)$ nuqta, jarima parametrining kamayib boradigan qiymatida bajariladigan, navbatdagi iteratsiyada, boshlang'ich nuqta sifatida olinadi. $r^k \rightarrow +0$ da $x^*(r^k)$ nuqtalar ketma-ketligi, x^* shartli minimum nuqtasiga yaqinlashadi. To'siq funksiyalar qandaydir ma'noda x to'plamdan chiqib ketishga to'sqinlik qiladi, agar masalaning yechimi chegarada yotsa, u holda, usul jarayoni to'plamning ichidan uning chegarasi tomon harakatga olib keladi.

Shuni e'tirof etish kerakki, bayon etilgan yechish jarayoniga binoan, $x^*(r^k)$ nuqtalar, har bir r^k uchun joiz yechimlar

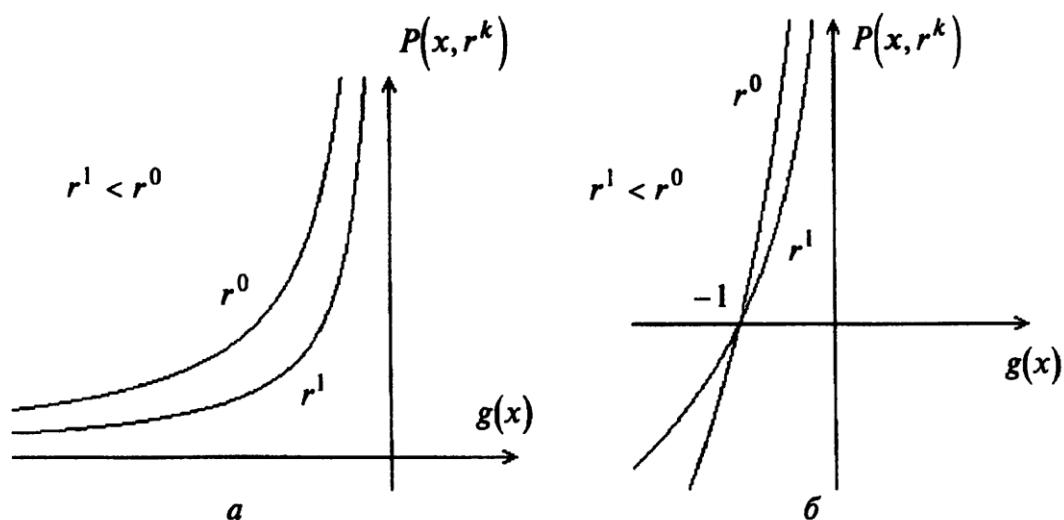


Рис. 9.7

to‘plamining ichida yotadi. Ana shu sababli, to‘siq funksiyalar usuli, ba’zan ichki jarimalar usuli deb ham ataladi.

15.2.3. Algoritm

1-qadam. X to‘plamning ichida boshlang‘ich x^0 nuqtani; $r^k > 0$ jarima parametrining boshlang‘ich qiymatini; jarima parametrini kichraytirish uchun $C > 1$ sonni; algoritmnı to‘xtatish uchun $\varepsilon > 0$ sonni berish. $k = 0$ deb olish.

2-qadam. Yordamchi funktsiyani tuzish:

$$F(x, r^k) = f(x) - r^k \sum_{j=1}^m \frac{1}{g_j(x)} \quad \text{yoki}$$

$$F(x, r^k) = f(x) - r^k \sum_{j=1}^m \ln[-g_j(x)].$$

3-qadam. Shartsiz minimumni izlash (nolinchi, birinchi yoki ikkinchi tartibli) usullaridan birortasi yordamida $F(x, r^k)$ funktsiyaning $x^*(r^k)$ minimum nuqtasini, uning x to‘plamning ichki qismiga tegishliligini tekshirgan holda, topish. Bunda usul tomonidan tanlangan parametrlarning barchasini berish talab qilinadi. Boshlang‘ich nuqta sifatida x^k nuqtani olish hamda

$$P(x^*(r^k), r^k) = -r^k \sum_{j=1}^m \frac{1}{g_j(x^*(r^k))}$$

yoki

$$P(x^*(r^k), r^k) = -r^k \sum_{j=1}^m \ln[-g_j(x^*(r^k))]$$

larni hisoblash.

4-qadam. Yakunlash shartini tekshirish:

a) agar $|P(x^*(r^k), r^k)| \leq \varepsilon$ bo‘lsa, jarayonni tugatish lozim:

$$x^* = x^*(r^k), \quad f(x^*) = f(x^*(r^k));$$

b) agar $|P(x^*(r^k), r^k)| > \varepsilon$ bo‘lsa, $r^{k+1} = \frac{r^k}{C}$; $x^{k+1} = x^*(r^k)$,

$k = k + 1$ deb olish va 2-qadamga o‘tish.

15.2.4. Yaqinlashishi

15.1-tasdiq. Faraz qilaylik, $f(x), g_j(x), j = 1, \dots, m,$ funksiyalar qavariq va chekli, shartli minimumni izlash masalasining yechimlari to'plami X^* bo'sh emas va chegaralangan hamda shunday $x^0 \in X$ nuqta mavjudki, unda $g_j(x^0) < 0, j = 1, \dots, m$ munosabatlar o'rinli bo'lsin. U holda to'siq funksiyalar usulida

$$X_k^* = \text{Arg min } F(x, r^k) \neq \emptyset,$$

$F(x, r^k)$ funksiyalar qavariq, algoritm bo'yicha hosil qilingan $\{x, (r^k)\}$ ketma-ketlik chegaralangan va uning barcha limit nuqtalari X^* to'plamga tegishli bo'ladi, bunda $f(x^*(r^k)) \geq f(x^*), x^* \in X^*$ [34].

15.2-izohlar.

33. Odatda, $r^0 = 1, 10, 100$, C parameter esa, $C = 10; 12; 16$ deb olinadi.

2. $r^k \rightarrow +0$ da yaqinlashish ta'minlanadi, lekin r^k ning kamayishi bilan $F(x, r^k)$ funksiya ko'proq "jarliklashadi". Shu sababli, r^k ni boshdan kichik deb olish maqsadga muvofiq emas.

3. Teskari jarima funksiya Kerrol tomonidan, logarifmik jarima funksiya esa, Frish tomonidan taklif qilingan.

4. Sharsiz ekstremumni izlashning aksariyat usullari diskret qadamlardan foydalanganligidan, chegaraning yaqinidagi nuqtada amalga oshirilgan qadam, joiz sohadan tashqarida yotgan nuqtaga olib kelishi mumkin. Agar algoritmda nuqtaning $\{x | g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}$ to'plamga tegishlilikini tekshirish ko'zda tutilmagan bo'lsa, natija, noto'g'ri muvaffaqiyatga olib kelishi mumkin. Shu sababli, algoritmning 3-qadamida nuqta joiz to'plamdan chiqib ketmatanligini oshkor ravishda tekshirish talab qilinadi. Odatda, izash jarayoni, noldan farqli biror r^k da yakunlanadi. Lekin taqribiy yechim joiz yechimlar to'plamiga tegishli bo'ladi. Bu esa, to'siq funksiyalar usulining afzalliklaridan biridir.

5. Jarima funksiyalar usulida hisoblashlarda kelib chiqadigan

qo‘shimcha

Ifoda, Lagranj ko‘paytuvchilari vektori hisoblanadi:

$$\lambda_j(r^k) = \frac{r^k}{g_j^2(x^*(r^k))} \quad j = 1, \dots, m - \text{teskari jarima funksiyasi uchun};$$

$$\lambda_j(r^k) = \frac{r^k}{g_j(x^*(r^k))} \quad j = 1, \dots, m - \text{logarifmik jarima funksiya uchun};$$

$$\lambda_j^* = \lim_{r^k \rightarrow +0} \lambda_j(r^k)$$

15.1-misol. Ushbu

$$f(x) = x^2 - 4x \rightarrow \min,$$

$$g_j(x) = x - 1 \leq 0,$$

masalada minimumni toping.

□ Masalani har xil jarima funksiyalardan foydalanib, yechamiz.

A. Teskari jarima funksiyaning qo‘llash.

1. Masalada $m = 1$. Uni analitik ravishda yechamiz.

2. Yordamchi jarima funksiyaning tuzamiz:

$$F(x, r^k) = x^2 - 4x - \underbrace{r^k \frac{1}{x-1}}_{P(x, r^k)}$$

3. $F(x, r^k)$ funksiyaning minimumini zaruriy va yetarli shartlar yordamida topamiz:

$$\frac{\partial F(x, r^k)}{\partial x} = 2x - 4 + \frac{r^k}{(x-1)^2} = 0.$$

X to‘plamning ichki nuqtalari qaralayotganligidan, $x - 1 < 0$ bo‘ladi, statsionar nuqtalarni topish uchun tenglama,

$$2x^3 - 8x^2 + 10x + r - 4 = 0$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Uning yechimini Kardan formulasi bo‘icha topamiz. Kanonik ko‘rinishdagi

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

tenglamani, a ga bo‘lib va x ning o‘rnig yangi, $y = x + \frac{b}{3a}$ o‘zgaruvchini kiritib,

$$y^3 + 3py + 2q = 0,$$

ko‘rinishga keltiramiz, bunda $3p = \frac{3ac-b^2}{3a^2}$, $2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$. $a=2, b=-8, c=10,$

$d=r-4$, bo‘lgani uchun, $y = x - \frac{4}{3}$ va $y^3 - \frac{y}{3} + \frac{r}{2} - \frac{2}{27} = 0$, $3p = -\frac{1}{3}$, $2q = \frac{r}{2} - \frac{2}{27}$

va, demak, $p = -\frac{1}{9}$, $q = \frac{r}{4} - \frac{1}{27}$. Diskriminant $D = q^2 + p^3 = \frac{r^2}{16} - \frac{r}{54}$. Agar $D > 0$

bo‘lsa, tenglama yagona haqiqiy yechimga ega bo‘ladi; agar $D < 0$ bo‘lsa, tenglama

uchta har xil yechimlarga ega bo‘ladi; agar $D = 0$ bo‘lsa, tenglama, $p = q = 0$

bo‘lganda bitta yechimga (uchta ustma-ust tushadigan nol ildizga) ega va $p^3 = -q^2 \neq 0$ bo‘lganda ikkita yechimga (uchta yechimdan ikkitasi ustma-ust tushadi)

ega bo‘ladi. При $r^k > \frac{8}{27}$ bo‘lganda $D > 0$ ekanligini, $0 < r^k < \frac{8}{27}$ bo‘lganda

esa, $D < 0$ ekan-ligini olamiz. Izlanayotgan ildizlar,

$$y_1 = u + v, \quad y_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v, \quad y_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v$$

formulalardan topiladi, bunda

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}, \quad v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}; \quad \varepsilon_{1,2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad p < 0 \text{ va}$$

$D \leq 0$ bo‘lganda, $r = \pm\sqrt{|p|}$ ni topish mumkin, r ning ishorasi, q ning ishorasi

bilan ustma-ust tushadi. Keyin, yordamchi, φ miqdor topiladi : $\cos\varphi = \frac{q}{r^3}$, so‘ngra,

$$y_1 = -2r\cos(\frac{\varphi}{3}), y_2 = 2r\cos(60^\circ - \frac{\varphi}{3}), y_3 = 2r\cos(60^\circ + \frac{\varphi}{3})$$

lar topiladi. $r^0 = 1 > \frac{8}{27}$ deb olamiz. U holda, quyidagi tengliklar o‘rinli:

$$p = -\frac{1}{9}, q = \frac{r}{4} - \frac{1}{27} = 0,213; u = -0,151; v = -0,747; y_1 = -0,898; x^*(1)$$

$$= y + \frac{4}{3} = 0,435.$$

$r^1 = 0.1 < \frac{8}{27}$ deb olamiz. U holda, $p = -\frac{1}{9} = -0.111$; $q = \frac{0.1}{4} - \frac{1}{27} =$

−0,012.

Modomiki, $p < 0$ va $D < 0$ ekan, u holda,

$$r = -\sqrt{|-0.111|} = -0.333; \cos\varphi = \frac{-0.012}{(-0.333)^3} = 0.324; \varphi = 71^\circ;$$

$$y_1 = -0.666 \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) = 0.609$$

$$y_2 = -0.666 \cos\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right) = -0.535; y_3 = -0.666 \cos\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) \\ = -0.07.$$

Demak, $x_1 = 1.94$; $x_2 = 0.798$; $x_3 = 1.404$. x_1 va x_3 ildizlar joiz to'plamga tegishli emas (unda yotmaydi). Shu sababli, $x^*(0,1) = x_2 = 0,798$.

$r^2 = 0.01 < \frac{8}{27}$ deb olamiz. U holda, $p = -\frac{1}{9} = -0.111$; $q = \frac{0.01}{4} - \frac{1}{27} = -0,0345$.

$p < 0$ va $D < 0$ ekanligidan,

$$r = -\sqrt{|p|} = -0.333; \cos\varphi = \frac{-0.0345}{(-0.333)^3} = 0.934; \varphi = 21^\circ;$$

$$y_1 = 0.666 \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) = 0.661$$

$$y_2 = -0.666 \cos\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right) = -0.401; y_3 = -0.666 \cos\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) \\ = -0.259.$$

x_1 va x_3 ildizlar joiz to'plamga tegishli emas (unda yotmaydi). Shu sababli, $x^*(0,01) = x_2 = 0,932$.

$r^3 = 0.001$ deb olamiz. U holda, $p = 0.111$; $q = \frac{0.001}{4} - \frac{1}{27} = -0,03678$.

$p < 0$ va $D < 0$ ekanligidan,

$$r = -\sqrt{|p|} = -0.333; \cos\varphi = \frac{-0.03678}{(-0.333)^3} = 0.993; \varphi = 6^\circ 42';$$

$$y_1 = 0.666 \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) = 0.666$$

$$y_2 = -0.666 \cos\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right) = -0.355; y_3 = -0.666 \cos\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) \\ = -0.3098.$$

$$x_1 = y_1 + \frac{4}{3} = 1.999; x_2 = y_2 + \frac{4}{3} = 0.978; x_3 = y_3 + \frac{4}{3} = 1.023$$

x_1 va x_3 ildizlar joiz to'plamga tegishli emas (unda yotmaydi). Shu sababli, $x^*(0,001) = x_2 = 0,932$.

$r^k \rightarrow +0$ da $x^*(r^k) \rightarrow 1$ bo'lishi ko'rinib turibdi. Bundan tashqari, barcha $x^*(r^k)$ nuqtalarda,

$$\frac{\partial^2 F(x, r^k)}{\partial x^2} = 2 - \frac{2r^k}{[x^*(r^k) - 1]^3} > 0,$$

ya'ni, shartsiz minimumning yetarli sharti bajariladi. Yuqorida keltirilgan izohning 5-b.dagi

$$\lambda_1(r^k) = \frac{2r^k}{[x^*(r^k) - 1]^2}$$

Lagranj ko'paytuvchisini baholaymiz. $r^k = 1; 0,1; 0,01; 0,001$ bo'lganda,

$$\lambda_1(1) = 3,13; \lambda_1(0,1) = 2.45; \lambda_1(0,01) = 2.16; \lambda_1(0,001) = 2.066.$$

Oson ko'rish mumkinki, $r^k \rightarrow +0$ da $\lambda_1(r^k) \rightarrow \lambda_1^* = 2$. Hisoblashlar natijalari quyidagi jadvalda keltirilgan va chizmada tasvirlangan.

Таблица 9.5

k	r^k	$x^*(r^k)$	$F(x^*(r^k), r^k)$	$P(x^*(r^k), r^k)$	$\lambda(r^k) = \frac{r^k}{[x^*(r^k) - 1]^2}$
0	1	0,435	0,219	1,77	3,13
1	0,1	0,798	-2,06	0,495	2,45
2	0,01	0,932	-2,712	0,147	2,16
3	0,001	0,978	-2,91	0,045	2,066
4	0	1	-3	-	2

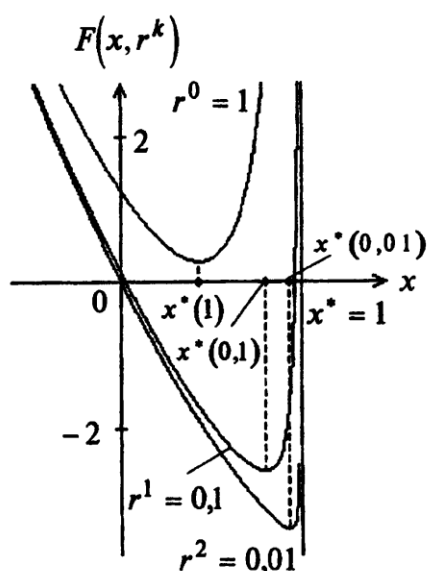


Рис. 9.8

B. Logarifmik jarima funksiyadan foydalanish.

23. Masalada $m = 1$. Uni analitik yo‘l bilan yechamiz.

24. Yordamchi funksiyani tuzamiz:

$$F(x, r^k) = x^2 - 4x - \underbrace{r^k \ln[1 - x]}_{P(x, r^k)}$$

25. Zaruriy va yetarli shartlar yordamida $F(x, r^k)$ funksiyaning minimumini topamiz:

$$\frac{\partial F(x, r^k)}{\partial x} = 2x - 4 + \frac{r^k}{1 - x} = 0.$$

X to‘plamning ichki nuqtalari qaralayotganligidan, $x - 1 < 0$ bo‘ladi. Buyerdan,

$$2x^2 - 6x + 4 - r^k = 0$$

tenglamani hosil qilamiz, uning yechimlari,

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 8(4 - r^k)}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{4 + 8r^k}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{1 + 2r^k}}{2}$$

ko'rinishga ega. $\frac{3 \pm \sqrt{1+2r^k}}{2}$ ildiz X to'plamda yotmaydi, shu sababli,

$$x^*(r^k) = \frac{3 \pm \sqrt{1+2r^k}}{2}.$$

Barcha $x^*(r^k)$ nuqtalarda

$$\frac{\partial^2 F(x^*(r^k), r^k)}{\partial x^2} = 2 + \frac{r^k}{[1 - x^*(r^k)]^2} > 0,$$

ya'ni, shartsiz minimumning yetarli sharti bajariladi.

Таблица 9.6

k	r^k	$x^*(r^k)$	$F(x^*(r^k), r^k)$	$P(x^*(r^k), r^k)$	$\lambda_1(r^k) = -\frac{r^k}{[x^*(r^k) - 1]}$
0	1	0,634	-1,13	1,005	2,73
1	0,1	0,952	-2,59	0,303	2,08
2	0,01	0,995	-2,937	0,053	2
3	0,001	0,9995	-2,99	0,0076	2
4	0	1	-3	-	2

Результаты расчетов приведены в табл. 9.6. ■

15.2-misol. Ushbu

$$f(x) = x \rightarrow \min,$$

$$g_1(x) = 2 - x \leq 0,$$

masalada minimum topilsin.

□ 1. Yechimni teskari jarima funksiyadan foydalanib, analitik yo'l bilan topamiiz.

2. Yordamchi funksiyani tuzamiz: $F(x, r^k) = x - \underbrace{r^k \frac{1}{2-x}}_{P(x, r^k)}$.

3. Zaruriy va yetarli shartlar yordamida $F(x, r^k)$ funksiyaning minimumini topamiz:

$$\frac{\partial F(x, r^k)}{\partial x} = 1 - \frac{r^k}{(2-x)^2} = 0$$

Yoiz yechimlar to'plamining ichida $2 - x < 0$ bo'lganligidan, $x = 2 \pm \sqrt{r^k}$, demak, $x^*(r^k) = 2 \pm \sqrt{r^k}$. Minimumning yetarli sharti bajariladi:

$$\frac{\partial^2 F(x^*(r^k), r^k)}{\partial x^2} = \frac{r^k}{[2 - x^*(r^k)]^3} > 0.$$

Таблица 9.7

k	r^k	$x^*(r^k)$	$F(x^*(r^k), r^k)$	$P(x^*(r^k), r^k)$
0	1	3	4	1
1	0,1	2,31	2,63	0,32
2	0,01	2,1	2,2	0,1
3	0,001	2,03	2,063	0,033
4	0	2	2	-

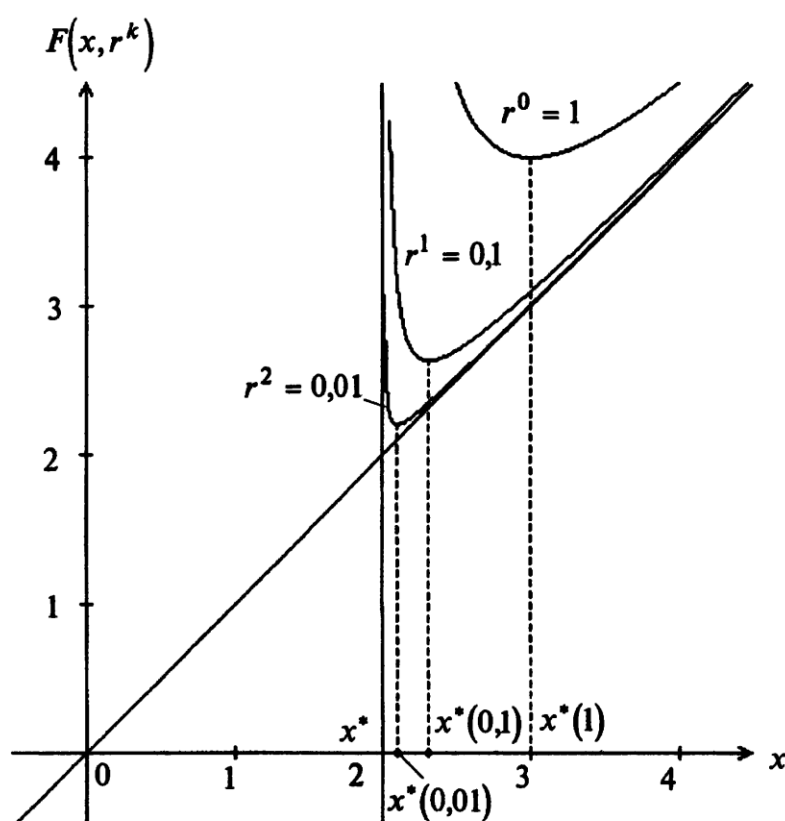


Рис. 9.9

Результаты численных расчетов приведены в табл. 9.7 и отражены на рис. 9.9. ■

15.3-misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 \rightarrow \min,$$

$$g_1(x) = 1 - x_1 \leq 0,$$

$$g_2(x) = -x_2 \leq 0,$$

masalada minimum topilsin.

□ 1. Yechimni teskari jarima funksiyadan foydalanib, analitik yo'l bilan topamiiz.

2. Yordamchi funktsiyani tuzamiz:

$$F(x, r^k) = \frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2 - \underbrace{r^k \left[\frac{1}{1 - x_1} - \frac{1}{x_2} \right]}_{P(x, r^k)}$$

3. Найдем безусловный минимум $F(x, r^k)$

$$\frac{\partial F(x, r^k)}{\partial x_1} = (x_1 + 1)^2 - \frac{r^k}{(1 - x_1)^2} = 0$$

$$\frac{\partial F(x, r^k)}{\partial x_2} = 1 - \frac{r^k}{x_2^2} = 0$$

Решение этой системы, лежащий внутри множества допустимых решений, имеет вид $x_1^*(r^k) = \sqrt{1 + \sqrt{r^k}}$, $x_2^*(r^k) = \sqrt{r^k}$. При $r^k \rightarrow 0$ имеем $x_1^*(r^k) \rightarrow 1$, $x_2^*(r^k) \rightarrow 0$ Поэтому $x^* = (1, 0)^T$, $f(x^*) = \frac{8}{3}$ ■

Пример 9.8. Найти минимум в задаче

$$f(x) = x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$g_1(x) = x_1^2 - x_2 \leq 0$$

$$g_2(x) = -x_1 \leq 0$$

□ 1. В задаче $m=2$. Решим ее аналитически с помощью логарифмической штрафной функции.

2. Составим вспомогательную функцию

$$F(x, r^k) = x_1 + x_2 - r^k [\ln(x_2 - x_1^2) + \ln(x_1)]$$

3. Найдем безусловный минимум $F(x, r^k)$

$$\frac{\partial F(x, r^k)}{\partial x_1} = 1 + \frac{2x_1 r^k}{x_2 - x_1^2} - \frac{r^k}{x_1} = 0$$

$$\frac{\partial F(x, r^k)}{\partial x_2} = 1 - \frac{r^k}{x_2 - x_1^2} = 0$$

Так как внутри множества допустимых решений $x_1^2 - x_2 < 0$, $-x_1 < 0$, то

$$x_2 = r^k + x_1^2, \quad 1 + 2x_1 - \frac{r^k}{x_1}. \quad \text{Отсюда} \quad 2x_1^2 + x_1 - r^k = 0 \quad \text{и} \quad x_1 =$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+8r^k}}{4}. \text{ Корень } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+8r^k}}{4} \text{ не удовлетворяет требованиям } -x_1 < 0.$$

$$\text{Поэтому} \quad x_1^*(r^k) = \frac{-1 + \sqrt{1+8r^k}}{4}, \quad \text{а} \quad x_2^*(r^k) = r^k + \frac{2+8r^k-2\sqrt{1+8r^k}}{16} =$$

$$\frac{12r^k+1-\sqrt{1+8r^k}}{8}. \text{ При } r^k \rightarrow 0 \text{ имеем } x_1^*(r^k) \rightarrow 0, x_2^*(r^k) \rightarrow 0.$$

16 – ma'ruza

Shartli minimallashtirish masalalarini yechishning sonli usullari (gradiyentning proyeksiyasi usuli).

16.1. Gradiyentning proyeksiyasi usuli

Gradiyentning proyeksiyasi usuli (Rozen usuli) tengliklar va tengsizliklar tipidagi bog'lanishlar qatnashgan shartli ekstremumni topish masalalarida qo'llaniladi.

1. Usulning tengliklar tipidagi bog'lanishlar qatnashgan masalalarda qo'llanilishi

16.1.1. Masalaning qo'yilishi

Differensiallanuvchi $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ funksiyaning minimumini

$$g_j(x) = 0, j = 1, \dots, m,$$

bog'lanishlar bajarilganda topish, ya'ni shunday $x^* \in X$ nuqtani topish talab qilinadiki, unda

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x), \quad (16.1)$$

$$X = \{x | g_j(x) = 0, j = 1, \dots, m; m < n\},$$

munosabat o'inli bo'lsin, bunda $g_j(x) = 0, j = 1, \dots, m$, funksiyalar x ning differensiallanuvchi funksiyalaridir.

16.1.2. Izlash strategiyasi

(16.1) masalaning yechimini gradiyentning proyeksiyasi usuli bilan izlashning strategiyasi, quyidagi,

$$x^{k+1} = x^k + \delta x^k, k = 0, 1, \dots, \quad (16.2)$$

qoida bo'yicha hisoblanadigan, $\{x^k\}$ nuqtalar ketma-ketligini qurishdan iborat, bunda δx^k - har bitta qiymati uchun hisoblanadigan vektor.

δx^k orttirma, $-t_k \nabla f(x^k)$, $k = 0, 1, \dots$, vektorning, $g_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, m$ tenglamalar bilan berilgan sirtini x^k , $k = 0, 1, \dots$, nuqtada approksimatsiyalaydigan,

$$A_k \delta x = \tau_k \quad (16.3)$$

tenglama bilan berilgan approksimatsiyalovchi tekislikka proyeksiyasi shartidan aniqlanadi. Bunda A_k - $m \times n$ o'lchovli,

$$A_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x^k}, \quad (16.4)$$

ko'rinishdagi matrisa, τ_k esa, -ustun vektor, $\tau_k = -(g_1(x^k), \dots, g_m(x^k))^T$.

16.1 – chizmada

$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \rightarrow \min$, $g_1(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 16 = 0$ masala uchun $x^k = (1; 0,5)^T$ nuqtada approksimatsiyalovchi to'g'ri chiziqli qurilgan bo'lib, uning tenglamasi $x_1 + 2x_2 = 9$ kabi bo'ladi, chunki

$$A_k = (2x_1; 8x_2)|_{x^k=(1;0,5)^T} = (2,4);$$

$\delta x = (x_1 - x_1^k; x_2 - x_2^k)^T = (x_1 - 1; x_2 - 0,5)^T$; $A_k \delta x = \tau_k = -(g_1(x^k))$ va, demak, $2(x_1 - 1) + 4(x_2 - 0,5) = 14$.

δx vektor

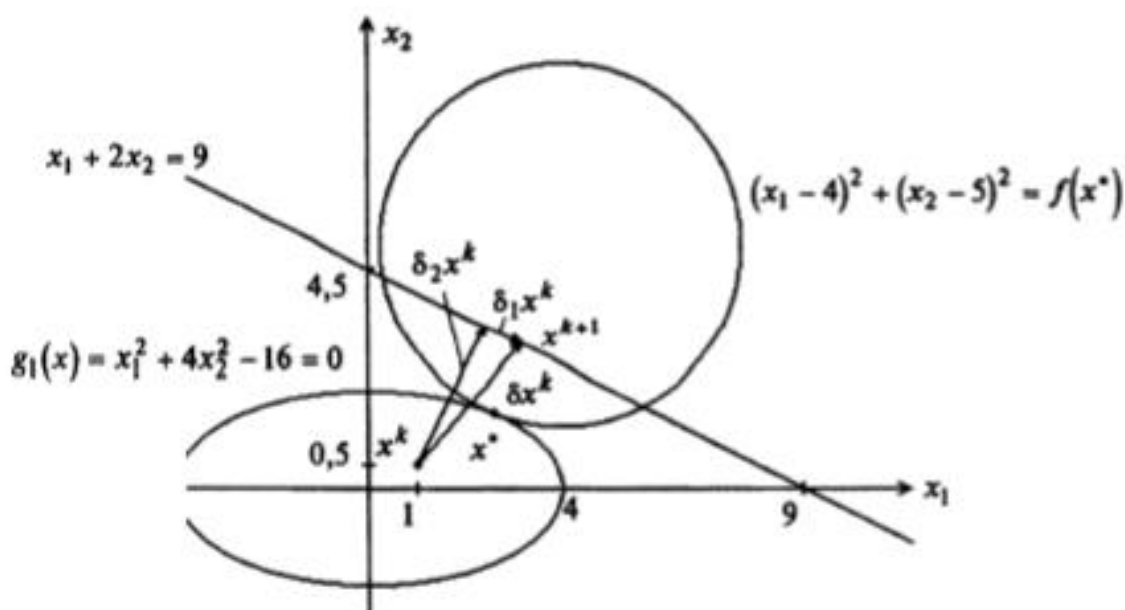
$$\delta x^k = \delta_1 x^k + \delta_2 x^k,$$

formuladan aniqlanadi, bunda $\delta_1 x^k$ – orttirmaning gradiyentli qo'shiluvchisi deyiladi va

$$\delta_1 x^k = -t_k [E - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f(x^k) = -t_k \Delta x^k \quad (16.6)$$

ko'rinishga ega bo'lib, u quyidagi xossaga ega: orttirmaning gradiyentli qo'shiluvchisi $\delta_1 x^k$ chiziqli yaqinlashishda bog'lanishlar shartlari chetlanish vektorini o'zgartirmaydi. Buning ma'nosi shundan iboratki, orttirmaning gradiyentli qo'shiluvchisi ta'siri ostida x^k nuqta yoki $A_k \delta x = \tau_k$ tekislik bo'yicha yoki unga parallel ravishda harakat qiladi (16.1-chizma). $\delta_2 x^k$ qo'shiluvchi – orttirmaning kompensatsiyalovchi (o'rnini to'ldiruvchi) qo'shiluvchisi deyiladi va

$\delta_2 x^k = A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} \tau_k$ ga teng. Bu qo'shiluvchi, chiziqli yaqinlashishda, bog'lanishlar shartlari chetlanish vektorini τ_k miqdorga o'rnini to'ldirish xossasiga ega. $\delta_2 x^k$ qo'shiluvchi ta'siri ostida x^k nuqtaning $A_k \delta x = \tau_k$ tekislikka proyeksiyasi amalga oshiriladi (16.1-chizma).



16.1-chizma

τ_k qadam kattaligi, x^k nuqtadan $x^k - t_k[E - A_k^T(A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f(x^k)$ nuqtaga o'tishda $f(x)$ funksiyaning kamayishi shartidan, yoki

$$\varphi(t_k) = f(x^k - t_k[E - A_k^T(A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f(x^k)) \rightarrow \min_{t_k} \quad (16.7)$$

shartdan aniqlanishi mumkin.

(16.7) masala, sonli usullardan birortasidan foydalanilgan holda, yechilishi ham mumkin.

Hisoblashlar, $\|\Delta x^k\| \leq \varepsilon$, $\|\delta_2 x^k\| \leq \varepsilon$ munosabatlar bajarilgan x^k nuqtada yakunlanadi, bunda ε –berilgan son. Topilgan x^k nuqtada (16.1) masala maqsad funksiyasi minimumining yetarli shartlari bajarilishini tekshirish shart.

$$\delta_1 x^k = -t_k[E - A_k^T(A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f(x^k) = 0$$

aniq tenglik, minimumning zaruriy sharti aniq bajarilishidan dalolat beradi, bunda Lagranj ko'paytuvchilari vektori ushbu

$$\lambda^k = -A_k^T(A_k A_k^T)^{-1} A_k \nabla f(x^k). \quad (16.8)$$

formula bo'yicha topiladi. (16.8) formula orqali aniqlanadigan λ^k larning λ^* ga yaqinlashishini bilish, x^k nuqtada yetarli shartlarning bajarilishini tekshirish imkonini beradi.

16.1-izoh. Agar (16.1) masalaning bog'lanishlari chiziqli, ya'ni $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$, $i = 1, \dots, m$, ko'rinishda bo'lsa, u holda, A matrisa o'zgarmas bo'ladi. Buning ma'nosi shundan iboratki, $\delta_2 x^k$ o'rnini to'ldiruvchi qo'shiluvchining xossasiga binoan, u x^0 nuqtada faqat bir marta hisoblanadi. Bunda boshlang'ich nuqta bitta iteratsiyadan so'ng joiz yechimlar to'plamiga tushadi. $\{x^k\}$ ketma-ketlikni qurishning keyingi jarayoni $\delta_1 x^k$ qo'shiluvchini hisoblash bilan bog'liq bo'ladi.

16.1.3.Algoritm

1-qadam. x^0 , $\varepsilon \geq 0$, larni, hamda M-iteratsiyalar sonini berish.

2-qadam. $k = 0$ deb olish.

3-qadam. $k \geq M$ shartning bajarilishini tekshirish:

a) agar tengsizlik bajarilsa, hisoblashlar tugaydi. Unda λ^k ni hisoblash, minimumning zaruriy shartini tekshirish va natijani baholash;

b) agar tengsizlik bajarilmasa, u holda, 4-qadamga o'tish.

4-qadam. $[E - A_k^T(A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f(x^k)$ matrisani hisoblash,

$$A_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x^k}.$$

5-qadam. $\tau_k = -(g_1(x^k), \dots, g_m(x^k))^T$ ni hisoblash.

6-qadam. $\delta_2 x^k = A_k^T(A_k A_k^T)^{-1} \tau_k$ ni hisoblash.

7-qadam. $\|\delta_2 x^k\|$ ni hisoblash.

8-qadam. $\nabla f(x^k)$ ni hisoblash.

9-qadam. $\Delta x^k = -[E - A_k^T(A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f(x^k)$ ni hisoblash.

10-qadam. $\|\Delta x^k\| \leq \varepsilon$ va $\|\delta_2 x^k\| \leq \varepsilon$ shartlarni tekshirish:

a) agar $\|\Delta x^k\| \leq \varepsilon$ va $\|\delta_2 x^k\| \leq \varepsilon$ bo'lsa, hisoblashlar tugaydi. (16.8) formula bo'yicha λ^k ni hisoblashga o'tish va minimumning yetarli shartlarini tekshirishga o'tish;

b) agar $\|\Delta x^k\| > \varepsilon$, $\|\delta_2 x^k\| \leq \varepsilon$ bo'lsa, u holda, $\delta_2 x^k = 0$ deb olish va 11-qadamga o'tish;

c) agar $\|\Delta x^k\| \leq \varepsilon$, $\|\delta_2 x^k\| > \varepsilon$ bo'lsa, u holda, $\Delta x^k = 0$ deb olish va 13-qadamga o'tish;

d) agar $\|\Delta x^k\| > \varepsilon$, $\|\delta_2 x^k\| > \varepsilon$ bo'lsa, u holda, 11-qadamga o'tish.

11-qadam. $x^k + t_k^* \Delta x^k$ nuqtani olish.

12-qadam. t_k^* ni $f(x^k + t_k^* \Delta x^k) \rightarrow \min_{t_k}$ shartdan topish.

13-qadam. $x^{k+1} = x^k + t_k^* \Delta x^k + \delta_2 x^k$ ni hisoblash. $k = k + 1$ deb olib, 3-qadamga o'tish.

16.2-izoh. Agar masalaning bog'lanishlari chiziqli bo'lsalar, u holda, 3-qadamda $k \geq 1$ bo'lganda 8-qadamga o'tamiz. 10-qadamda $\|\delta_2 x^k\| = 0$ deb olish lozim.

16.1.4. Yaqinlashishi

Modomiki, $-t_k \nabla f(x^k)$ vektoring proyeksiyasi har bir k uchun

$$Q = \{x | A_k(x - x^k) = \tau_k, x \in R^n\}$$

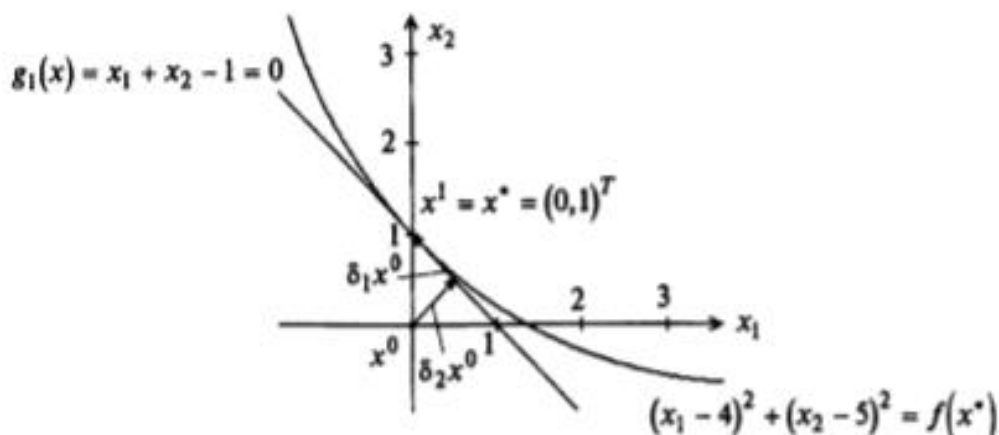
to'plamga amalga oshirilgan ekan, gradiyentning proyeksiyasi usulining algoritmi, R^n da qavariq, differensiallanuvchi va gradiyenti Lipshtits shartini qanoatlantiradigan $f(x)$ funksiyalar uchun yaqinlashuvchi bo'ladi.

16.1-tasdiq. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya R^n da qavariq, differensiallanuvchi bo'lib, uning gradiyenti Q to'plamda L o'zgarmasli Lipshtits shartini qanoatlantirsin. Shuningdek, Q - qavariq va yopiq to'plam, masalaning yechimlari to'plami $X^* = \operatorname{Arg} \min_{x \in Q} f(x)$ bo'sh bo'lmasin hamda $0 < t_k < \frac{2}{L}$ bo'lsin. U holda $x^k \rightarrow x^* \in X^*$ va, agar $f(x)$ kuchli qavariq bo'lsa, $x^k \rightarrow x^*$ geometrik progressiya tezligida bo'ladi.

16.1-misol. Ushbu masalada minimumni toping:

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \rightarrow \min,$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 = 0.$$



16.2-chizma

□ Masalaning o'ziga xos xususiyati shundan iboratki, uning bog'lanishlari chiziqlidir (16.2-chizma).

1. $x^0 = (0; 0)^T$; $\varepsilon = 0$; $M = 5$ larni beramiz.

2. $k = 0$ deb olamiz

3⁰. $k \geq M$ shartni tekshiramiz: $k = 0 < 5 = M$

4⁰. A_0 matrisani hisoblaymiz: $A_0 = (1 \ 1)$.

5⁰. $\tau_0 = -g_1(x^0)$ ni hisoblaymiz: $\tau_0 = 1$.

6⁰. $\delta_2 x^0$ ni topamiz: $\delta_2 x^0 = (1; 1)^T \cdot 0,5 \cdot 1 = (0,5; 0,5)^T$.

7⁰. $\|\delta_2 x^0\|$ ni hisoblaymiz: $\|\delta_2 x^0\| = 0,707$.

8⁰. $\nabla f(x^0)$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^0) = (-8; -10)^T$.

9⁰. Δx^0 ni hisoblaymiz:

$$\Delta x^0 = - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0,5 \cdot (1 \ 1) \right] \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10⁰. $\|\Delta x^0\| \leq \varepsilon$, $\|\delta_2 x^0\| \leq \varepsilon$ shartlarning bajarilishini tekshiramiz:

$\|\Delta x^0\| = 1,41 > \varepsilon = 0$, $\|\delta_2 x^0\| = 0,707 > \varepsilon = 0$. 11-qadamga o'tamiz.

11⁰. $x^0 + t_0^* \Delta x^0$ nuqtani olamiz: $x^0 + t_0^* \Delta x^0 (-t_0^*, t_0^*)^T$.

12⁰. t_0^* ni $f(x^0 + t_0^* \Delta x^0) = \min_{t_0} f(x^0 + t_0 \Delta x^0)$ shartdan topamiz:

$$t_0^* = 0,5.$$

13⁰. $x^1 = x^0 + t_0^* \Delta x^0 + \delta_2 x^0$ ni hisoblaymiz:

$$x^1 = (0; 0)^T + (-0,5; 0,5)^T + (0,5; 0,5)^T = (0; 1)^T$$

$k = 1$ deb olamiz va 3-qadamga o'tamiz.

3¹. $k \geq M$ shartni tekshiramiz: $k = 1 < 5 = M$.

8¹. $\nabla f(x^1)$ ni hisoblaymiz: $\nabla f(x^1) = (-8; -8)^T$

9¹. Δx^1 ni hisoblaymiz: $\Delta x^1 = (0; 0)^T$.

10¹. $\|\Delta x^1\| \leq \varepsilon$, $\|\delta_2 x^1\| \leq \varepsilon$ shartlarning bajarilishini tekshiramiz:

$\|\Delta x^1\| = 0 = \varepsilon$, $\|\delta_2 x^1\| = 0 = \varepsilon$. Hisoblashlar yakuniga yetdi. λ^* Lagranj ko'paytuvchisini topamiz: $\lambda^* = -(A_0 A_0^T)^{-1} A_0 \nabla f(x^1) = -(0,5; 0,5)(-8; -8)^T = 8$. Minimumning yetarli shartini tekshiramiz. Lagranj funksiyasining ikkinchi differensial $d^2 L = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$ dan iborat. Qo'shimcha shart: $dx_1 + dx_2 = 0$, buyerdan $dx_1 = -dx_2$. Bu ifodani $d^2 L$ ga keltirib qo'ysak, $d^2 L = 4dx_1^2 > 0$ munosabatni hosil qilamiz. Xulosa: $x^1 = (0; 1)^T = x^*$ - nuqta minimum nuqtasidan iborat. ■

16.2- misol. Ushbu masalada minimumni toping:

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \rightarrow \min,$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2^2 - 4 = 0.$$

□1. Зададим $x^0 = (0; 0)^T$; $\varepsilon = 0,05$; $M = 5$.

2. Зададим $k = 0$.

3⁰. Проверяем условие $k \geq M$: $0 < 5$.

4⁰. Вычислим матрицу A_0 : $A_0 = (1 \ 2x_2)_{x^0} = (1 \ 0)$.

5⁰. Вычисляем τ_0 : $\tau_0 = -(0 + 0 - 4) = 4$.

6⁰. Получаем $\delta_2 x^0$: $\delta_2 x^0 = (1; 0)^T \cdot 1 \cdot 4 = (4; 0)^T$.

7⁰. Вычисляем $\|\delta_2 x^0\|$: $\|\delta_2 x^0\| = 4$.

8⁰. Вычисляем $\nabla f(x^0)$: $\nabla f(x^0) = (-8; -10)^T$.

9⁰. Вычисляем Δx^0 : $\Delta x^0 = - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 0,5 \cdot (1 \ 0) \right] \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

10⁰. Проверяем выполнение условий $\|\Delta x^0\| \leq \varepsilon$, $\|\delta_2 x^0\| \leq \varepsilon$:

$\|\Delta x^0\| = 10 > \varepsilon = 0,05$; $\|\delta_2 x^0\| = 4 > \varepsilon = 0,05$.

11⁰. Получаем точку $x^0 + t_0^* \Delta x^0$: $x^0 + t_0^* \Delta x^0 = (0; 10t_0^*)^T$.

12⁰. Определяем t_0^* из условия $f(x^0 + t_0^* \Delta x^0) = \min_{t_0} f(x^0 +$

$t_0 \Delta x^0)$: $t_0^* = 0,5$.

13⁰. Вычисляем $x^1 = x^0 + t_0^* \Delta x^0 + \delta_2 x^0$: $x^1 = (0; 0)^T + (0; 5)^T + (0; 4)^T = (4; 5)^T$ (рис.10.3.). Полагаем $k = 1$ и переходим к шагу 3.

3¹. Проверяем условие $k \geq M$: $k = 1 < 5 = M$

4¹. Вычислим матрицу A_1 : $A_1 = (1; 10)^T$.

5¹. Вычисляем τ_1 : $\tau_1 = -(4 + 25 - 4) = -25$.

6¹. Получаем $\delta_2 x^1$: $\delta_2 x^1 = (-0,248; 2,48)^T$.

7¹. Вычисляем $\|\delta_2 x^1\|$: $\|\delta_2 x^1\| = 2,49$.

8¹. Вычисляем $\nabla f(x^1)$: $\nabla f(x^1) = (0; 0)^T$

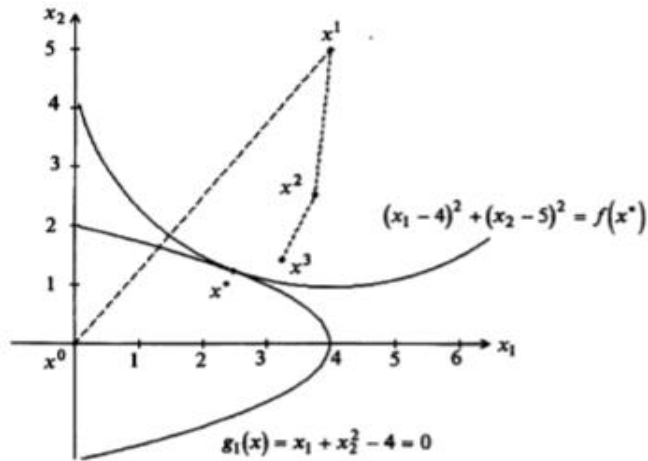


Рис.10.3

9¹. Вычисляем Δx^0 : $\Delta x^0 = (0,0)^T$.

10¹. Проверяем выполнение условий $\|\Delta x^1\| \leq \varepsilon$, $\|\delta_2 x^1\| \leq \varepsilon$:

$\|\Delta x^1\| = 0 > \varepsilon = 0,05$; $\|\delta_2 x^1\| = 2,49 > \varepsilon = 0,05$, переходим к шагу 13.

13¹. Вычисляем $x^2 = x^1 + \delta_2 x^1$: $x^2 = (4,5)^T + (-0,248; -2,48)^T = (3,752; 2,52)^T$ (рис.10.3.). Полагаем $k = 2$ и переходим к шагу 3.

3². Проверяем условие $k \geq M$: $k = 2 < 5 = M$

4². Вычислим матрицу A_2 : $A_2 = (1; 5,04)$.

5². Вычисляем τ_2 : $\tau_2 = -(3,752 + 6,32 - 4) = -6,07$.

6². Получаем $\delta_2 x^2$: $\delta_2 x^2 = (-0,23; -1,16)^T$.

7². Вычисляем $\|\delta_2 x^2\|$: $\|\delta_2 x^2\| = 1,18$.

8². Вычисляем $\nabla f(x^2)$: $\nabla f(x^2) = (-0,496; -4,96)^T$.

9². Вычисляем Δx^2 :

$$\begin{aligned} \Delta x^2 &= -\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,038 & 0,19 \\ 0,19 & 0,69 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -0,475 \\ 0,103 \end{bmatrix} = \\ &= -\begin{bmatrix} 0,962 & -0,19 \\ -0,19 & 0,04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,475 \\ 0,103 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0,475 + 0,95 \\ 0,095 - 0,198 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,475 \\ 0,103 \end{bmatrix} = \\ &= -\begin{bmatrix} -0,475 + 0,95 \\ 0,095 - 0,198 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,475 \\ 0,103 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

10². Проверяем выполнение условий $\|\Delta x^2\| \leq \varepsilon$, $\|\delta_2 x^2\| \leq \varepsilon$:

$\|\Delta x^2\| = 0,486 > \varepsilon = 0,05$; $\|\delta_2 x^2\| = 1,18 > \varepsilon = 0,05$. Переходим к шагу 11.

11². Получаем $x^2 + t_2^* \Delta x^2$: $x^2 + t_2^* \Delta x^2 = (3,752 - t_2^* \cdot 0,475; 2,52 + t_2^* \cdot 0,103)^T$.

12². Определяем t_2^* : $t_2^* = \frac{0,138}{0,236} = 0,585$.

13². Вычисляем $x^3 = x^2 + t_2^* \Delta x^2 + \delta_2 x^2$:

$x^3 = (3,752; 2,52)^T + 0,585 \cdot (-0,475; 0,103)^T + (-0,23; -1,16)^T = (3,244; 1,42)^T$ (рис.10.3.). Полагаем $k = 3$ и переходим к шагу 3.

3³. Проверяем условие $k \geq M$: $k = 3 < 5 = M$

4³. Вычислим матрицу A_3 : $A_3 = (1; 2,84)$.

5³. Вычисляем τ_3 : $\tau_3 = -(3,244 + 2,02 - 4) = -1,26$.

6³. Получаем $\delta_2 x^3: \delta_2 x^3 = (-0,139; -0,394)^T$.

7³. Вычисляем $\|\delta_2 x^3\|: \|\delta_2 x^3\| = 0,41$.

8³. Вычисляем $\nabla f(x^3): \nabla f(x^3) = (-1,512; -7,160)^T$.

9³. Вычисляем Δx^3 :

$$\Delta x^3 = - \begin{bmatrix} 0,89 & -0,314 \\ -0,19 & 0,11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,512 \\ 7,16 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1,35 + 2,24 \\ 0,476 - 0,79 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,89 \\ 0,314 \end{bmatrix}.$$

10³. Проверяем выполнение условий $\|\Delta x^3\| \leq \varepsilon, \|\delta_2 x^3\| \leq \varepsilon$:

$\|\Delta x^3\| = 0,94 > \varepsilon = 0,05; \|\delta_2 x^3\| = 0,41 > \varepsilon = 0,05$. Переходим к шагу 11.

11³. Получаем точку $x^3 + t_3^* \Delta x^3: x^3 + t_3^* \Delta x^3 = (3,244 - 0,89t_3^*; 1,42 + 0,314t_3^*)^T$.

12³. Определяем $t_3^*: t_3^* = \frac{0,445}{0,89} = 0,5$.

13³. Вычисляем $x^4 = x^3 + t_3^* \Delta x^3 + \delta_2 x^3$:

$x^4 = (3,244; 1,42)^T + 0,5(-0,89; 0,314)^T + (-0,139; -0,394)^T = (2,66; 1,18)^T$ (рис.10.3.). Полагаем $k = 4$ и переходим к шагу 3.

3⁴. Проверяем условие $k \geq M: k = 4 < 5 = M$

4⁴. Вычислим матрицу $A_4: A_4 = (1; 2,36)$.

5⁴. Вычисляем $\tau_4: \tau_4 = -(2,66 + 1,39 - 4) = -0,05$.

6⁴. Получаем $\delta_2 x^4: \delta_2 x^4 = (-0,0076; -0,018)^T$.

7⁴. Вычисляем $\|\delta_2 x^4\|: \|\delta_2 x^4\| = 0,019$.

8⁴. Вычисляем $\nabla f(x^4): \nabla f(x^4) = (-2,72; -7,64)^T$.

9⁴. Вычисляем Δx^4 :

$$\Delta x^4 = - \begin{bmatrix} 0,848 & -0,64 \\ -0,36 & 0,152 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,72 \\ 7,64 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -2,3 + 2,75 \\ 0,98 - 1,16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,45 \\ 0,18 \end{bmatrix}.$$

10⁴. Проверяем выполнение условий $\|\Delta x^4\| \leq \varepsilon, \|\delta_2 x^4\| \leq \varepsilon$:

$\|\Delta x^4\| = 0,48 > \varepsilon = 0,05; \|\delta_2 x^4\| = 0,019 > \varepsilon = 0,05$. Положим $\delta_2 x^4 = 0$ и переходим к шагу 11.

11⁴. Получаем точку $x^4 + t_4^* \Delta x^4: x^4 + t_4^* \Delta x^4 = (2,66 - 0,45t_4^*; 1,18 + 0,18t_4^*)^T$.

12⁴. Определяем $t_4^*: t_4^* = \frac{0,09}{0,237} = 0,39$.

13⁴. Вычисляем $x^5 = x^4 + t_4^* \Delta x^4 + \delta_2 x^4$, где $\delta_2 x^4 = 0$:

$x^5 = (2,66; 1,18)^T + 0,39(-0,45; 0,18)^T = (2,48; 1,25)^T$ (рис.10.3.).

Полагаем $k = 5$ переходим к шагу 3.

3⁵. Проверяем условие $k \geq M: k = 5 = M$.

Расчет окончен, переходим к вычислению λ^5 и проверке необходимых и достаточных условий минимума. Находим

$$\lambda^5 = - \left(\frac{1}{7,25} \right) (1; 2,5) \begin{bmatrix} -3,04 \\ -7,5 \end{bmatrix} = 2,96.$$

Выпишем необходимые условия экстремума (см. разд. 3.2) с учетом вида функции Лагранжа $L(x, \lambda) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \lambda (x_1 + x_2^2 - 4)$:

$$\begin{aligned} 2(x_1 - 4) + \lambda &= 0, \\ 2(x_2 - 5) + 2\lambda x_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2^2 - 4 = 0.$$

Будем считать, что необходимые условия экстремума выполнены, если абсолютная величина невязки любого из этих равенств не превышает 0,1. В результате подстановки точки x^5 и λ^5 получаем

$$2(2,48 - 4) + 2,96 = -0,08;$$

$$2(1,25 - 5) + 2 \cdot 2,96 = -0,1;$$

$$2,48 + 1,25^2 - 4 = 0,04.$$

Отсюда следует, что необходимые условия выполняются. Проверим достаточные условия экстремума. Получаем $d^2L: d^2L = 2dx_1^2 + 2(1 + \lambda)dx_2^2 = 2dx_1^2 + 7,92dx_2^2$. Дополнительное условие $dx_1 + 2x_2dx_2 = 0$. Отсюда $d^2L = 20,42dx_2^2 > 0$.

Вывод точка $x^5 = (2,48; 1,25)^T$ есть найденное приближение точки минимума x^* (строка 1 табл. 3.1). ■

3. Применение метода в задаче с ограничениями типа неравенств.

Постановка задачи

Найти минимум дифференцируемой функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ при ограничениях $g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m$, т.е. такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

$$X = \{x | g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m; m < n\},$$

где функции $g_j(x), j = 1, \dots, m$, являются дифференцируемыми функциями x .

Стратегия поиска

Стратегия поиска решения задачи (10.9) учитывает тот факт, что решение x^* может лежать как внутри, так и на границе множества допустимых решений (рис.10.4, а, б).

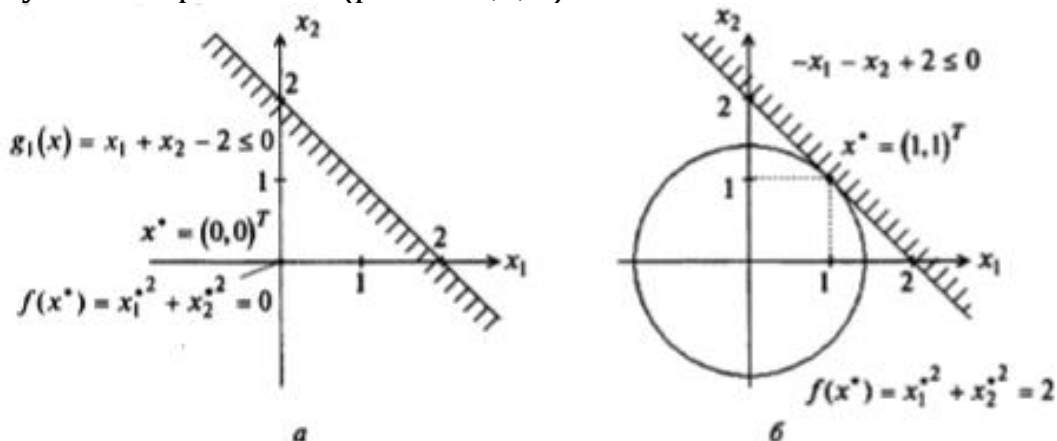


Рис.10.4

Для определения приближения решения x^* строится последовательность точек $\{x^k\}: x^{k+1} = x^k + \delta x^k, k = 0, 1, \dots$, где приращение δx^k , определяется в каждой точке x^k в зависимости от того, где ведется поиск-внутри или на границе множества допустимой

области. Обход границ множества допустимых решений связан с выявлением активных в точке x^k ограничений $g_A = (g_1, \dots, g_2)^T$, аппроксимацией их плоскостью

$$A_k \delta x = \tau_k, \quad (10.10)$$

где $A_k \left[\frac{\partial g_j}{\partial x_j} \right]_{x=x^k}$ - матрица размера $p \times n$, $p \leq n$; $\tau_k = -g_A(x^k)$,

проекцией на нее вектора $-t_k \nabla f(x^k)$. Для выявления неравенств, активных в точке x^k , задается погрешность определения активных ограничений $\varepsilon_1 \leq 0$. Активными считаются те ограничения, для которых $\varepsilon_1 \leq g_j \leq 0$. Число p ограничений, активных в точке x^k , не должно превышать n -размерности вектора x .

Поиск ограничений, активных в точке x^k , рассматривается как самостоятельная задача которая может быть решена путем последовательных приближений. Задается точка x^k и вычисляется $g_j(x)$, $j = 1, \dots, m$. Если $g_j(x) < \varepsilon_1$, то выбираются любые p ограничений с наименьшими по абсолютной величине невязками $\rho_j^k = g_j(x^k)$ в точке x^k , строится матрица A_k , вычисляется τ_k и находится точка

$$x^{k+1} = x^k + A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} \tau_k \quad (10.11)$$

Затем снова вычисляется невязки выбранных p ограничений.

Уточнение по формуле (10.11) осуществляется до тех пор, пока не будет найдена точка x^k , в которой активны p ограничений, определяется точкой

$$x^{k+1} = x^k - t_k [E - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f(x^k), \quad (10.12)$$

Где приращение $\delta x^k = -t_k [E - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f(x^k)$ осуществляет движение по плоскости $A_k \delta x = \tau_k$ в направлении убывания $f(x)$.

Величина t_k выбирается так:

$$t_k = \min[t_k^* \geq 0, t_{k \max} \geq 0], \text{ где } t_k^* \text{ есть шаг, при котором}$$

$$f(x^k - t_k^* [E - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f(x^k)) = \min_{t_k} f(x^k - t_k [E -$$

$$A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f(x^k)),$$

а $t_{k \max}$ -наименьший шаг, при котором

$$g_j(x^k - t_{k \max} [E - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f(x^k)) \leq 0$$

Для всех ограничений, которые не были активными в точке x^k .

Разумеется, невязка ограничений в точке x^{k+1} изменяется, и поэтому вычислению точки x^{k+2} должна предшествовать процедура выбора активных ограничений, описания выше.

Процедура вычисления точек последовательности $\{x^k\}$ обеспечивает последовательное движение вдоль границы допустимой области. При выполнении неравенства $\|\Delta x^k\| = \|[E - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f(x^k)\| \leq \varepsilon_2$, где ε_2 - заданное достаточно

малое положительное число, вычисляется приближение λ^k вектора множителей Лагранжа λ^* :

$$\lambda^k = -A_k^T(A_k A_k^T)^{-1} A_k \nabla f(x^k). \quad (10.13)$$

Если $\lambda^k \geq 0$, то в точке x^k выполнены необходимые условия минимума и в ней должны быть проверены достаточные условия. Если среди множителей λ_j^k есть отрицательные, то это означает, что x^k не является приближением точки x^* , так как в ней не выполнены необходимые условия минимума $f(x)$ при ограничениях $g_j(x)$, $j = 1, \dots, m$ (см. утверждение 3.4). Однако выбор шага t_k позволяет говорить о том, что значение $f(x)$ не может быть уменьшено при заданном составе активных ограничений и следовательно, процесс минимизации $f(x)$ необходимо продолжить, уменьшив их число: в число переводится то из ограничений, которому соответствует наибольший по абсолютному значению отрицательный множитель λ_j^k . Такая процедура поиска позволяет отыскать решение, лежащее как на границе, так и внутри множества допустимых решений.

Алгоритм

Шаг 1. Задать x^0 , $\varepsilon_1 \leq 0$, $\varepsilon_2 > 0$ число итерации M .

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Проверить выполнение условия $k \geq M$:

а) если неравенство выполнено, то расчет окончен, перейти к вычислению λ^k , и оценке результата;

б) в противном случае перейти к шагу 4.

Шаг 4. Вычислить $g_j(x)$, $j = 1, \dots, m$.

Шаг 5. Проверить выполнение условия $\varepsilon_1 \leq g_j(x^k) \leq 0$, $j = 1, \dots, m$:

а) Если неравенство выполнено хотя бы для одного j , вычислить $\nabla f(x^k)$.

Если $\nabla f(x^k) \neq 0$ перейти к шагу 7. Если $\nabla f(x^k) = 0$ при $k > 0$, перейти к шагу 9. В противном случае задать заново точку x^0 на принадлежность области допустимых решений. Если $x^0 \in X$ перейти к шагу 9. в противном случае задать заново точку x^0 и перейти к шагу 4;

б) если ни одно из условий не выполнено, перейти к шагу 6.

Шаг 6. Вычислить точку x^v , в которой будет выполнено условие $\varepsilon_1 \leq g_j(x^v) \leq 0$, по крайней мере для одного значения j : $x^v = x^k +$

$$A_k^T(A_k A_k^T)^{-1} \tau_k$$

Положить $x^k = x^v$ и перейти к шагу 7;

Шаг 7. Вычислить $\Delta x^k = -[E - A_k^T(A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f(x^k)$.

Шаг 8. Проверить условия $\|\Delta x^k\| \leq \varepsilon_2$:

а) если условие выполняется перейти к шагу 9;

б) если нет - к шагу 10.

Шаг 9. Вычислить вектор $\lambda^k = -(A_k A_k^T)^{-1} A_k \nabla f(x^k)$. Если $\lambda^k \geq 0$, то расчет окончен, проверить достаточные условия минимума. Если нет, то исключить из состава активных ограничение (оно приводится в пассивные),

соответствует наибольший к модулю отрицательный множитель, и перейти к шагу 7 (при этом из матрицы A_k удаляется строка, соответствующая исключаемому ограничению).

Шаг 10. Проверить точку $x^k + t_k^* \Delta x^k$.

Шаг 11. . Определить t_k . Для этого следует:

а) вычислить t_k^* из условия $f(x^k + t_k^* \Delta x^k) \rightarrow \min_{t_k \geq 0}$.

б) для всех пассивных в точке x^k ограничений, кроме переведенных в пассивные на шаге 9, определить величину t_k^j из условия $g_i(x^k + t_k \Delta x^k) = 0$, $t_k \geq 0$ (если условие $g_i(x^k + t_k \Delta x^k) = 0$ выполняется только при $t_k < 0$, то t_k^j не вычисляется);

в) найти величину $t_{k \max} = \min_j \{t_k^j\}$;

Шаг 12. . Вычислить $x^{k+1} = x^k + t_k \Delta x^k$. Положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 3.

Сходимость

Утверждение 10.2. Пусть $f(x)$ выпуклая дифференцируемая на R^n функция, градиент которой удовлетворяет условию Липшица с константой L . Пусть множество Q - выпуклое и замкнутое, множество $X^* =$

$\text{Arg} \min_{x \in Q} f(x)$ не пусто, а величина t_k удовлетворяет условию $0 < t_k < \frac{2}{L}$.

Тогда $x^k \rightarrow x^* \in X^*$ и, если $f(x)$ сильно выпукла, то $x^k \rightarrow x^*$ то со скоростью геометрической прогрессии [34].

Пример 10.3. Найти минимум в задаче

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \rightarrow \min,$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0.$$

$$g_2(x) = x_1 \leq 0,$$

$$g_3(x) = x_2 \leq 0.$$

1. Зададим $x^0 = (0; 0)^T$; $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$, $M = 5$.

2. Зададим $k = 0$.

3. Проверяем условие $k \geq M$: $k = 0 < 5 = M$.

4. Вычислим матрицу $g_j(x^0)$, $j = 1, 2, 3$: $g_1(x^0) = -1 < 0$, $g_2(x^0) = 0$, $g_3(x^0) = 0$.

5. В точке x^0 активны ограничения $g_2(x^0) \leq 0$, $g_3(x^0) \leq 0$ они формируют матрицу A_0 . Так как $\nabla f(x^0) = (-8; -10)^T \neq 0$, переходим к шагу 7.

7. Вычисляем Δx^0 : $\Delta x^0 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, так как $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Проверяем условие $\|\Delta x^0\| \leq \varepsilon_2$: $\|\Delta x^0\| = 0$, переходим к шагу 9.

9. Вычисляем λ^0 : $\lambda^0 = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix}$, удаляем третье ограничение $-x_2 \leq 0$ (оно переходит в пассивные), которому

соответствует наибольший по модулю отрицательный множитель -10, и переходим к шагу 7 (при этом исключается вторая строка из матрицы A_0)

7¹. Вычисляем Δx^0 : $\Delta x^0 = - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (-1 \ 0) \right] \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, так как $A_0 = (-1; \ 0)$.

8¹. Проверяем условие $\|\Delta x^0\| \leq \varepsilon_2$: $\|\Delta x^0\| = 10 > \varepsilon_2 = 0$.

10⁰. Получаем точку $x^0 + t_0 \Delta x^0$: $x^0 + t_0 \Delta x^0 (0; 10t_0)^T$.

11⁰. Определяем $t_0 = \min\{t_0^*, t_{0\max}\}$: величину t_0^* находим из условия $f(x^0 + t_0^* \Delta x^0) = \min_{t_0 \geq 0} f(x^0 + t_0 \Delta x^0)$: $t_0^* = 0,5$; так как первое ограничение пассивно в точке x^0 , то из условий $10t_0 - 1 = 0$ и $t_0 \geq 0$ находим $t_0^1 = \frac{1}{10}$; третье ограничение в аналогичной процедуре не участвует, поскольку переведено в пассивные только на шаге 9;

$t_{0\max} = \min_j \{t_0^j\} = \frac{1}{10}$; $\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right\} = \frac{1}{10}$.

12⁰. Вычисляем $x^1 = x^0 + t_0 \Delta x^0$: $x^1 = (0; 0)^T + \frac{1}{10} (0; 10)^T = (0; 1)^T$ (рис.10.5.). Полагаем $k = 1$ и переходим к шагу 3.

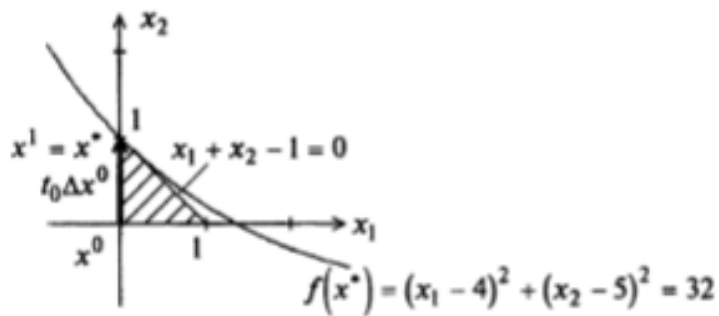


Рис.10.5

3¹. Проверяем условие $k \geq M$: $k = 0 < 5 = M$.

4¹. Вычислим матрицу $g_j(x^1)$, $j = 1, 2, 3$: $g_1(x^1) = -1 < 0$, $g_2(x^1) = 0$, $g_3(x^1) = -1 < 0$.

5¹. Проверяем условие $\varepsilon_1 \leq g_j(x^1) \leq 0$: $g_2(x^1) = 0$, $g_2(x^1) < \varepsilon_1$.

Активны первое и второе ограничения, они формируют матрицу A_0 , $\nabla f(x^1) \neq 0$.

7². Вычисляем Δx^1 : $\Delta x^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, так как $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8². Проверяем условие $\|\Delta x^1\| \leq \varepsilon_2$: $\|\Delta x^1\| = 0$, переходим к шагу 9.

9¹. Вычисляем λ^1 : $\lambda^1 = - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\lambda_1^1 = 8$, $\lambda_2^1 = 0$. Необходимые условия минимума выполнены.

Проверяем достаточные условия минимума: $d^2 L = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$.
Дополнительные условия $dx_1 + dx_2 = 0$, $-dx_1 \leq 0$. Отсюда $dx_1 =$

$-dx_2 \geq 0$. Следовательно, $d^2L = 4dx_2^2 > 0$. Точка $x^1 = (0; 1)^T$ - точка минимума $f(x)$ (строка 1 табл. 3.3). ■

Пример 10.4. Найти минимум в задаче

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \rightarrow \min,$$

$$g_1(x) = x_1 - x_2^2 + 4 \leq 0.$$

$$g_2(x) = -x_1 \leq 0,$$

$$g_3(x) = -x_2 \leq 0.$$

□1. Зададим $x^0 = (0; 0)^T$; $\varepsilon_1 = -0,1$; $\varepsilon_2 = 0,1$; $M = 5$.

2. Зададим $k = 0$.

3⁰. Проверяем условие $k \geq M$: $0 < 5$.

4⁰. Вычислим матрицу $g_j(x^0)$, $j = 1, 2, 3$: $g_1(x^0) = 4$, $g_2(x^0) = 0$; $g_3(x^0) = 0$

5⁰. Проверяем условие $\varepsilon_1 \leq g_j(x^0) \leq 0$: $g_1(x^0) > 0$, $\varepsilon_1 < g_2(x^0) = 0$, $\varepsilon_1 < g_3(x^0) = 0$. Активны первое и второе ограничения, они формируют матрицу A_0 , $\nabla f(x^0) \neq 0$.

7⁰. Вычисляем Δx^0 : $\Delta x^0 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, так как $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

8⁰. Проверяем условие $\|\Delta x^0\| \leq \varepsilon_2$: $\|\Delta x^0\| = 0$, переходим к шагу 9.

9⁰. Вычисляем λ^0 : $\lambda^0 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix}$,

удаляем третье ограничение $-x_2 \leq 0$ (оно переходит в пассивные), которому соответствует наибольший по модулю множитель -10, и переходим к шагу 7 (при этом исключается вторая строка из матрицы A_0 удаляется вторая строка).

7¹. Вычисляем Δx^0 : $\Delta x^0 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, так как $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8¹. Проверяем условие $\|\Delta x^0\| \leq \varepsilon_2$: $\|\Delta x^0\| = 10 > \varepsilon_2 = 0,1$.

10⁰. Находим точку $x^0 + t_0 \Delta x^0$: $x^0 + t_0 \Delta x^0 (0; 10t_0)^T$.

11⁰. Определяем t_0 : $t_0^* = 0,5$ так как первое ограничение пассивно в точке x^0 , то из условий $-100t_0^2 + 4 = 0$ и $t_0 \geq 0$ находим $t_0^1 = \frac{1}{5}$;

третье ограничение в аналогичном процедуре не участвует, поскольку переведено в пассивные только на шаге 9; $t_{0 \max} =$

$$\min_j \{t_0^j\} = \frac{1}{5}; \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right\} = \frac{1}{5}$$

12⁰. Вычисляем $x^1 = x^0 + t_0 \Delta x^0$: $x^1 = (0; 2)^T + \frac{1}{10} (0; 10)^T = (0; 1)^T$ (рис.10.6.). Полагаем $k = 1$ и переходим к шагу 3.

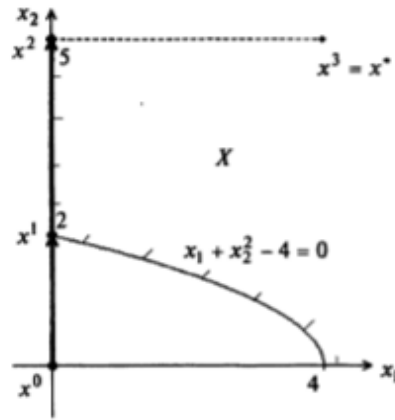


Рис.10.6

3¹. Проверяем условие $k \geq M$: $k = 1 < 5 = M$.

4¹. Вычислим матрицу $g_j(x^1)$, $j = 1, 2, 3$: $g_1(x^1) = 0$; $g_2(x^1) = 0$, $g_3(x^1) = -2 < 0$.

5¹. Проверяем условие $\varepsilon_1 \leq g_j(x^0) \leq 0$:

$$\varepsilon_1 < g_1(x^0) > 0, \quad \varepsilon_1 < g_2(x^0) = 0, \quad g_3(x^0) = 0$$

Активны первое и второе ограничения, поэтому $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$\nabla f(x^1) \neq 0.$$

$$7^2. \text{ Вычисляем } \Delta x^1: \Delta x^1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8². Проверяем условие $\|\Delta x^1\| \leq \varepsilon_2$: $\|\Delta x^1\| = 0$.

$$9^1. \text{ Вычисляем } \lambda^1: \lambda^1 = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{4} \\ -\frac{30}{4} \end{bmatrix}.$$

Удаляем первое ограничение (оно переходит в пассивные), которому соответствует наибольший по модулю отрицательный множитель, и переходим к шагу 7 (при этом из матрицы A_0 исключается первая строка).

$$7^3. \text{ Вычисляем } \Delta x^1: \Delta x^1 = - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (-1 \ 0) \right] \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix},$$

так как $A_1 = (-1; 0)$.

8³. Проверяем условие $\|\Delta x^1\| \leq \varepsilon_2$: $\|\Delta x^1\| = 6 > \varepsilon_2$.

$$10^1. \text{ Находим точку } x^1 + t_1 \Delta x^1: x^1 + t_1 \Delta x^1 (0; 2 + 6t_1)^T.$$

11¹. Определяем $t_1^* = 0,5$ так как третье ограничение пассивно в точке x^1 , но условий $-(2 + 6t_1)^T$ выполняется только при $t_1 < 0$, поэтому t_1^3 не вычисляется первое ограничение в аналогичном процедуре не участвует, поскольку переведено в пассивные только на шаге 9; следовательно $t_{1 \max}$ не вычисляется и $t_1 = t_1^* = 0,5$

12¹. Вычисляем $x^2 = x^1 + t_1 \Delta x^1$: $x^2 = (0; 5)^T$ (рис.10.6.). Полагаем $k = 2$ и переходим к шагу 3.

3². Проверяем условие $k \geq M$: $k = 2 < 5 = M$.

4². Вычислим матрицу $g_j(x^1)$, $j = 1, 2, 3$: $g_1(x^2) = -21$; $g_2(x^2) = 0$, $g_3(x^2) = -5$.

5². Проверяем условие $\varepsilon_1 \leq g_j(x^2) \leq 0$:

$$\varepsilon_1 < g_1(x^2) > 0, \quad \varepsilon_1 < g_2(x^2) = 0, \quad g_3(x^2) < \varepsilon_1$$

Активно второе ограничение, оно формирует матрицу

$$A_2; \nabla f(x^2) = (-8, 0)^T \neq 0.$$

7⁴. Вычисляем Δx^2 : $\Delta x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, так как $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8⁴. Проверяем условие $\|\Delta x^2\| \leq \varepsilon_2$: $\|\Delta x^2\| = 0$.

9². Вычисляем $\lambda^2 = -(-1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = -8$. Удаляем второе

ограничение $g_2 \leq 0$ и переходим к шагу 7

7⁵. Вычисляем Δx^1 : $\Delta x^1 = -E \nabla f(x^2) = (8; 0)^T$

8⁵. Проверяем условие $\|\Delta x^2\| \leq \varepsilon_2$: $\|\Delta x^2\| = 8 > \varepsilon_2$.

10². Находим точку $x^2 + t_2 \Delta x^2$: $x^2 + t_2 \Delta x^2 (8t_2; 5)^T$.

11². Вычисляем t_2 : $t_2 = t_2^* = 0,5$.

12². Вычисляем $x^3 = x^2 + t_2 \Delta x^2$: $x^3 = (4; 5)^T$ (рис.10.6.). Полагаем $k = 3$ и переходим к шагу 3.

3³. Проверяем условие $k \geq M$: $k = 1 < 5 = M$.

4³. Вычислим $g_j(x^3)$, $j = 1, 2, 3$: $g_1(x^3) = -25$; $g_2(x^4) = 4$, $g_3(x^3) = -5$.

5³. Проверяем условие $\varepsilon_1 \leq g_j(x^3) \leq 0$:

$$g_1(x^3) < \varepsilon_1, \quad g_2(x^3) < \varepsilon_1, \quad g_3(x^3) < \varepsilon_1$$

Вычисляем $\nabla f(x^3)$: $\nabla f(x^3) = (0; 0)^T$.

9³. Вычисляем λ^3 : $\lambda_1^3 = 0$, $\lambda_2^3 = 0$, $\lambda_3^3 = 0$. Необходимые условия минимума выполнены.

Проверяем достаточные условия: $d^2L = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 > 0$.

Дополнительные условия отсутствуют, так как все три ограничения в точке x^3 пассивны. Точка $x^3 = x^*$ - точка минимума (строка 1 табл. 3.3). ■

17-ma'ruza

Chiziqli programmashtirish masalasini yechishning grafik usuli

Reja:

17.1. Ikki noma'lumli chiziqli tengsizliklarni yechishning grafik usuli.

17.2. Ikki noma'lumli chiziqli tengsizliklar sistemasini yechishning grafik usuli.

17.3. Chiziqli programmashtirish masalasining qo'yilishi.

17.4. Chiziqli programmashtirish masalasini grafik usulda yechish.

17.1. Ikki noma'lumli chiziqli tengsizliklarni yechishning grafik usuli.

Biz litsey matematikasida ikki noma'lumli chiziqli tengsizliklar bilan tanishganmiz va uning yechimi deganda noma'lumlar qiymatlarining ular shu tengsizlikni qanoatlantiradigan jufti tushunilgan edi.

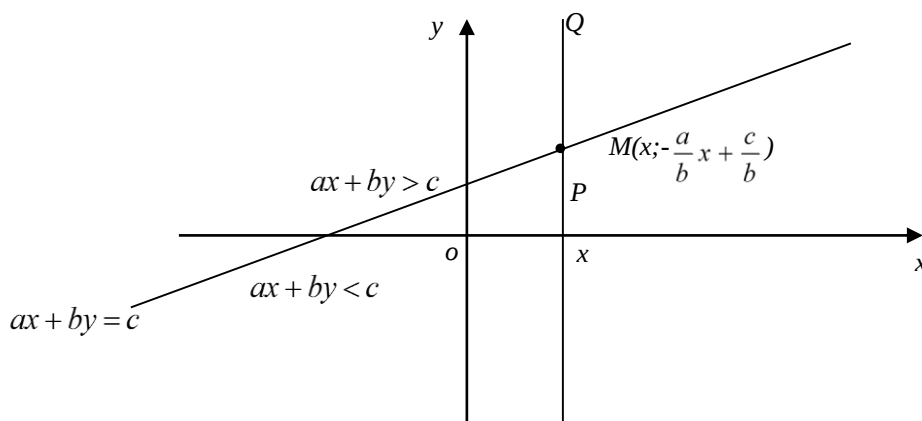
Har bir ikki noma'lumli chiziqli tengsizlik uchun, noma'lumlarning bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi juftlari cheksiz to'plamini ko'rsatish mumkin.

Masalan, $7x - 3y \geq 21$ tengsizlikni,

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 100, \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{va h.k. juftlar qanoatlantiradi.}$$

1-teorema. $ax + by = c$ to'g'ri chiziq tekislikni shunday ikkita yarim tekislikka bo'ladiki, birinchi yarim tekislik nuqtalarining koordinatalari $ax + by > c$ tengsizlikni, ikkinchi yarim tekislik nuqtalarining koordinatalari esa, $ax + by < c$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

Δ Tekislikda xOy to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini olamiz va, aniqlik uchun, $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$ deb olib, $ax + by = c$ to'g'ri chiziqni quramiz. U holda, $ax + by = c$ to'g'ri chiziq tekislikni ikkita – chap-yuqori hamda o'ng-quyi



17.1-chizma.

yarim tekisliklarga bo'ladi (17.1-chizma).

Ixtiyoriy x absissa uchun $ax + by = c$ to'g'ri chiziqda yotuvchi M nuqtaning ordinatasi $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ bo'ladi. Shunday qilib, $ax + by = c$ to'g'ri chiziqning ixtiyoriy M nuqtasi, $(x, -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b})$ koordinatalarga ega bo'ladi.

Endi $M(x, -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b})$ nuqta orqali, ordinatalar o'qiga parallel raishda Q to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqda tekislikning x absissali barcha

nuqtalari yotadi. Bu to'g'ri chiziqlarning M nuqtadan pastda joylashgan barcha P nuqtalari, M nuqtaning ordinatasidan kichik y ordinatalarga ega bo'ladi, ya'ni

$y < -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Oxirgi tengsizlikda, $-\frac{a}{b}x$ qo'shiluvchini tengsizlikning chap tomoniga o'tkazib va tengsizlikning ikki tomonini $b > 0$ ga bo'lib, $ax + by = c$ to'g'ri chiziqqa nisbatan o'ng-quyi yarim tekislikning barcha nuqtalari uchun, $ax + by < c$ tengsizlik o'rinli bo'lishini olamiz.

Q to'g'ri chiziqlarning M nuqtadan yuqorida joylashgan barcha P nuqtalari, M nuqtaning ordinatasidan katta y ordinatalarga ega bo'ladi, ya'ni $y > -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Buyerdan, $ax + by = c$ to'g'ri chiziqqa nisbatan chap-yuqori yarim tekislikning barcha nuqtalari uchun, $ax + by > c$ tengsizlik o'rinliliigi kelib chiqadi. ▲

Isbotlangan teorema ikki noma'lumli chiziqli tengsizlikni yechishning grafik usulini ifoda qiladi. Demak, ikki noma'lumli chiziqli tengsizlikni grafik usulda yechish uchun: bu tengsizlikka mos keluvchi tenglamani yozish va tanlangan koordinatalar sistemasida to'g'ri chiziqni qurish, so'ngra, to'g'ri chiziq tomonidan hosil qilingan yarim tekisliklardan berilgan tengsizlikni qanoatlantiradiganini tanlash, lozim.

17.2. Ikki noma'lumli chiziqli tengsizliklar sistemasini yechishning grafik usuli.

Masalaning mohiyatini yaxshiroq tushunish uchun, quyidagi ishlab chiqarish masalasini qaraymiz.

M a s a l a. Korxonaning transformator tsexi ikki turdagi transformator ishlab chiqaradi. Birinchi turdagi har bitta transformator uchun 5 kg transformator temiri va 3 kg sim sarf qilinadi, ikkinchi turdagi har bitta transformator uchun esa, 3 kg transformator temiri va 2 kg sim sarf qilinadi. Agar tsexda 480 kg temir va 300 kg sim bo'lsa, tsexda har ikki turdagi transformatordan qancha miqdorda ishlab chiqarish mumkin?

□ Dastlab masalaning matematik modelini tuzamiz. Buning uchun, ishlab chiqariladigan birinchi turdagi transformatorlar sonini x orqali, ikkinchi turdagi transformatorlar sonini esa, y orqali belgilaymiz. Masalaning shartiga ko'ra, tsexda 480 temir borligidan, birinchi turdagi x sondagi transformator va ikkinchi turdagi y sondagi transformatorni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan temir miqdori, uning umumiy miqdori - 480 kg dan oshmasligi lozim, ya'ni

$$5x + 3y \leq 480.$$

Sarflanadigan simning umumiy miqdori uchun ham yuqoridagi kabi mulohaza yuritib,

$$3x + 2y \leq 300$$

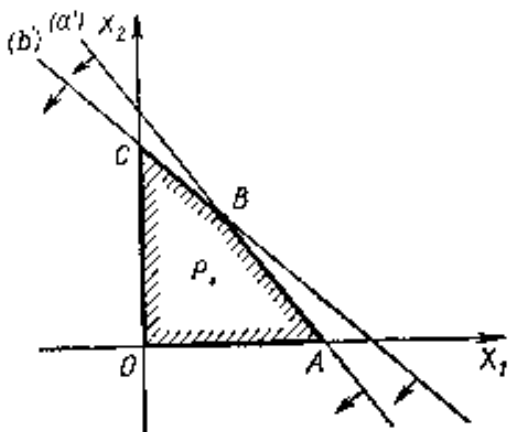
tengsizlikni olamiz. Bundan tashqari, transformatorlar soni manfiy sonlar orqali ifodalanmasligidan,

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

tengsizliklarni olamiz.

U holda, masalani yechish quyidagi:

$$\begin{cases} 5x + 3y \leq 480 & (a) \\ 3x + 2y \leq 380 & (b) \\ x \geq 0, & (c) \\ y \geq 0. & (d) \end{cases}$$



17.2-chizma.

ikki noma'lumli chiziqli tengsizliklar sistemasini yechishga keltiriladi. Bu sistemani grafik usulda yechish uchun, sistemaning har bir tengsizligi uchun 17.1-bandda bayon qilingan usulni qo'llaymiz.

(a) tengsizlikning yechimi,

$$5x + 3y = 480 \quad (a')$$

to'g'ri chiziqqa nisbatan chap-quyi yarim tekislikning nuqtalari koordinatalaridan iborat (17.2-chizma).

(b) tengsizlikning yechimi,

$$3x + 2y = 300. \quad (b')$$

to'g'ri chiziqqa nisbatan chap-quyi yarim tekislikning nuqtalari koordinatalaridan iborat (17.2-chizma).

U holda, $ABCO$ burchakning ichida va uning tomonlarida yotgan nuqtalarning koordinatalari, (a) va (b) tengsizliklarning ikkisini ham qanoatlantiradi.

(c) va (d) tengsizliklarning yechimlari, koordinatalar teisligning birinchi choragida joylashgan nuqtalarning koordinatalaridan iborat bo'ladi, va demak, berilgan sistemaning yechimi, $ABCO$ ko'pburchakning ichida va uning chegarasida yotgan nuqtalarning koordinatalaridan iborat ekan. Yechim chizmada shtrix orqali tasvirlangan.

Chiziqli tengsizliklar sistemasining yechimlari to'plami – yechimlar sohasi deyiladi. Demak, (a)-(d) sistemaning yechimlari sohasi $ABCO$ ko'pburchak nuqtalarining koordinatalaridan iborat va bu ko'pburchak – yechimlar ko'pburchagi deyiladi.

Shunday qilib, korxonaning tsexi transformatorlar ishlab chiqarish rejasini tuzganda, masalaga mos kelgan tengsizliklar sistemasi yechimlar sohasiga e'tibor berishi kerak bo'ladi. Masalan, tsex 150 dona ikkinchi turdagi transformator ishlab chiqarib, bir dona ham birinchi tur transformator ishlab chiqarmasligi mumkin (chizmada $C(0;150)$ nuqtaning koordinatalari) yoki 50 dona birinchi turdagi va 60 dona ikkinchi turdagi transformatorlar ishlab chiqarishi mumkin (chizmada $P(50;60)$ nuqtaning koordinatalari). ■

Chiziqli tengsizliklar sistemasining yechimlari sohasi – cheksiz sondagi yechimlar to'plamidan, chekli sondagi yechimlar to'plamidan iborat bo'lishi yoki

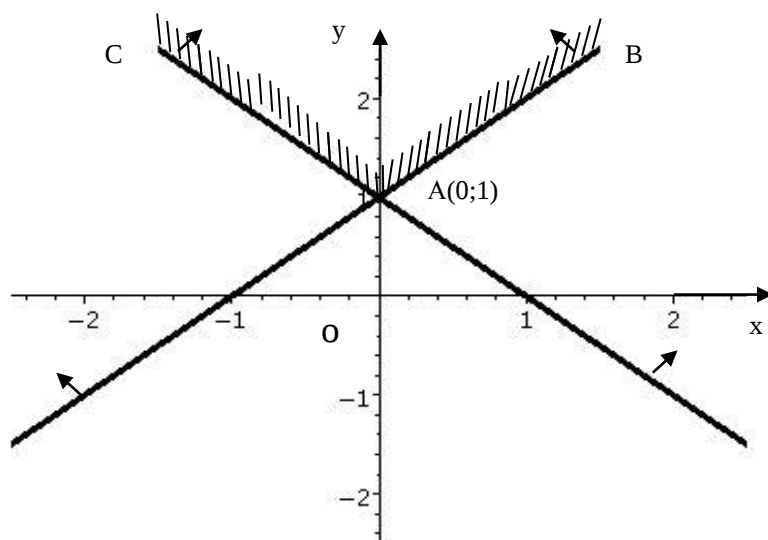
o'zida yechimni saqlamasligi ham mumkin. Oxirgi holda yechimlar sohasi bo'sh to'plam deyiladi.

1-masala. Ushbu

$$\begin{cases} x + y - 1 \geq 0, \\ -x + y - 1 \geq 0 \end{cases}$$

chiziqli tengsizliklar sistemasini yeching.

□ Sistemaning birinchi tengsizligini grafik usulda yechamiz. Uning



17.3-chizma.

yechimlari $x + y - 1 = 0$ to'g'ri chiziqqa nisbatan chap-yuqori yarim tekislikda yotgan nuqtalarning koordinatalaridan iborat (17.3-chizma).

Ikkinchi tengsizlikning yechimlari

$$-x + y - 1 = 0$$

to'g'ri chiziqqa nisbatan chap-yuqori yarim tekislikda yotgan nuqtalarning koordinatalaridan iborat (17.3-chizma).

Nihoyat, BAC burchak-

ning ichida va uning chegarasida yotgan nuqtalarning koordinatalari tengsizliklarning har ikkisini ham qanoatlantiradi va demak, berilgan sistemaning yechimlari sohasi bo'ladi.

Bu sistemaning yechimlari sohasi - BAC burchakning ichida va uning chegarasida yotgan cheksiz sondagi nuqtalarning koordinatalaridan iborat ekan. ■

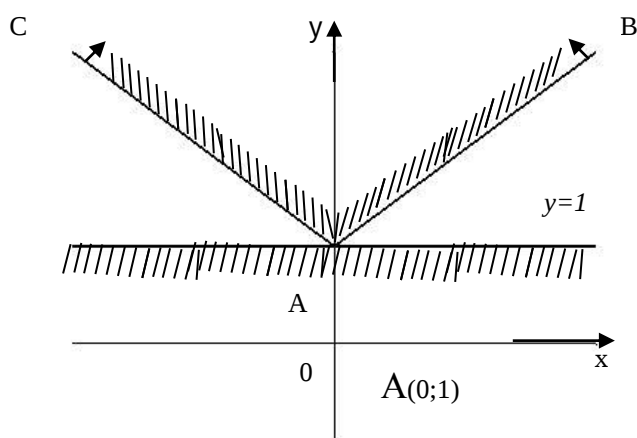
Bunday sohalar, ko'pburchak ko'rinishidagi yopiq sohalardan farqli ravishda, *ochiq sohalar* deyiladi.

2-masala. Ushbu

$$\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ -x + y - 1 \geq 0, \\ y \leq 1 \end{cases}$$

chiziqli tengsizliklar sistemasining yechimlari sohasini toping.

□ 1-masalani qaraganda biz, sistemaning dastlabki ikkita tengsizligi yechimlari, BAC burchakning ichida va uning chegarasida yotgan cheksiz sondagi nuqtalarning koordinatalaridan iborat ekanligiga ishonch hosil qildik. Uchinchi tengsizlikning yechimi esa, $y = 1$ to'g'ri chiziqda va undan pastda yotgan



17.4-chizma.

nuqtalarning koordinatalaridan iborat. U holda, berilgan sistemaning yechimi faqat bitta A nuqtaning koorddinatalari, ya'ni $(0;1)$ lardan iborat bo'ladi (17.4-chizma). ■

3-masala. Ushbu

$$\begin{cases} 3x + 4y \geq 4, \\ 3x + 4y \leq 2 \end{cases}$$

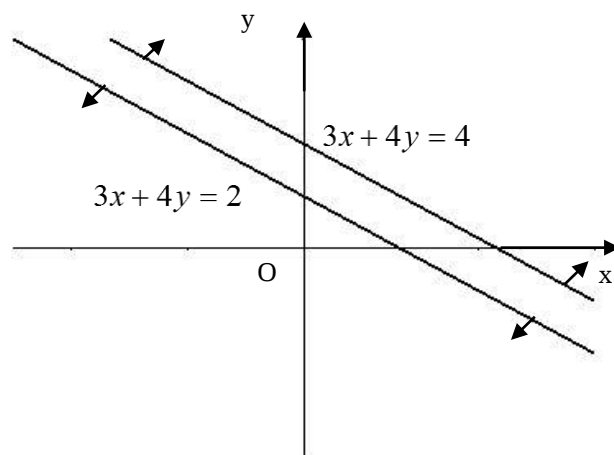
chiziqli tengsizliklar sistemasining yechimlari sohasini toping.

□ Sistema birinchi tengsizligining yechimi $3x + 4y = 4$ to'g'ri chiziqqa

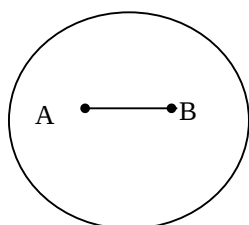
nisbatan o'ng-yuqori yarim tekislikda yotgan nuqtalarning koordinatalaridan, ikkinchi tengsizlikning yechimi esa, $3x + 4y = 2$ to'g'ri chiziqqa nisbatan chap-quyi yarim tekislikda yotgan nuqtalarning koordinatalaridan iborat (17.5-chizma).

Natijada, berilgan sistemaning har ikki tengsizligini ham bir vaqtda qanoatlantiradigan birorta ham nuqta mavjud emasligiga ishonch hosil qilamiz, demak, berilgan sistemaning yechimlari sohasi bo'sh ekan.

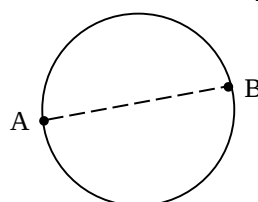
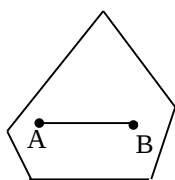
1-ta'rif. Agar tekislikdagi yoki fazodagi biror nuqtalar to'plami o'zining ixtiyoriy ikkita A va B nuqtalari bilan birga ularni tutashtiruvchi AB kesmani ham o'kesmani ham o'zida saqlasa, bu to'plam



17.5-chizma



a)



b)

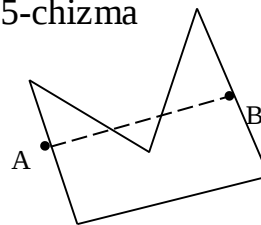


Рис.25.6.

qavariq deyiladi. 17.6-chizmada qavariq va qavariq bo'lmagan to'plamlarga misollar tasvirlangan.

Chiziqli tengsizliklar sistemasining yechimlari sohasi doimo qavariq to'plam bo'ladi, uning qavariqligi qurish usulidan kelib chiqadi, chunki, har bir tengsizlikning yechimi yarim tekislik bo'lib, u qavariq to'plamdir. Sistema

yechimlari sohasi berilgan tengsizliklarga mos yarim tekisliklarning kesishmasidan iborat. Quyidagi teorema tasdig'imizning o'rinaligini ko'rsatadi.

2-teorema. Ixtiyoriy sondagi qavariq to'plamlarning (bo'sh bo'lmagan) kesishmasi qavariq to'plamdir.

17. 3. Постановка задачи линейного программирования.

З а д а ч а 1. Трансформаторный цех производит два типа трансформаторов. На каждый трансформатор первого типа расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг провода, а на каждый трансформатор второго типа - 3 кг железа и 2 кг провода. Цех от продажи одной штуки трансформаторов первого типа получает прибыль в 12000 сумов, а от продажи одной штуки трансформаторов второго типа – прибыль в 10 000 сумов. Если в цехе имеется 480 кг железа и 300 кг провода, для получения наибольшей прибыли сколько трансформаторов каждого типа должен производить цех?

Как в § 2, построим математическую модель(формулировку) задачи. Пусть x_1, x_2 - количество трансформаторов, производимых цехом, соответственно, первого и второго типов. Для их производства потребуется $5x_1 + 3x_2$ кг железа и $3x_1 + 2x_2$ кг провода. Тогда, по условию, должны выполняться неравенства

$$5x_1 + 3x_2 \leq 480,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 300.$$

Неравенства появляются за счет неполного расхода имеющихся в цехе железа и провода.

Цех, от производства первого типа трансформаторов в количестве x_1 штук, и производства трансформаторов второго типа в количестве x_2 штук, получает прибыль в размере

$$F(x) = 12000x_1 + 10000x_2$$

сумов.

Под решением задачи мы понимаем нахождение наибольшего(максимального) значения линейной функции двух переменных

$$F(x) = F(x_1, x_2) = 12000x_1 + 10000x_2$$

при условии, что переменные x_1 и x_2 удовлетворяют системе неравенств

$$5x_1 + 3x_2 \leq 480,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 300,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

З а д а ч а 2. В животноводческой ферме для кормления животных в их рацион нужно добавить питательное вещество вида A в количестве, не меньше чем 33 единиц, питательное вещество вида B в количестве, не меньше чем 23 единиц, а питательное вещество вида C в количестве, не меньше чем 12 единиц. Для кормления животных готовится три вида пищи. В нижеприведенной таблице приведены количество питательных веществ

каждого вида в каждой пище и стоимость единицы каждого питательного вещества:

	А	В	С	Стоимость одной единицы
Пища вида 1, в ед. веса	4ед.	3ед.	1ед.	20 сум
Пища вида 2, в ед. веса	3ед.	2ед.	1ед.	20 сум
Пища вида 3, в ед. веса	2ед.	1ед.	2ед.	10 сум

Требуется составить самый дешевый рацион кормления животных таким образом, чтобы каждый из животных получил необходимое количество из каждого вида питательных веществ A , B , C .

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_1 , x_2 , x_3 количество пищи 1-, 2- и 3-го видов.

Тогда каждое животное из питательного вещества вида A потребляет $4x_1 + 3x_2 + 2x_3$ единиц и это число должно быть не меньше 33 единиц, т.е.

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 33.$$

Из питательного вещества B каждое животное потребляет $3x_1 + 2x_2 + x_3$ единиц, а из питательного вещества C потребляет $x_1 + x_2 + 2x_3$ единиц, при этом количество первого из них должно быть не меньше 23 единиц, второго – не меньше 12 единиц, т.е.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 23,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 12.$$

При таком расходе пищи стоимость дневного рациона составит

$$F(x) = F(x_1, x_2, x_3) = 20x_1 + 20x_2 + 10x_3$$

сумов. Если учесть неравенства

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0,$$

которые следуют из смысла задачи, решение задачи состоит в нахождении наименьшего(минимального) значения линейной функции трех переменных

$$F(x) = F(x_1, x_2, x_3) = 20x_1 + 20x_2 + 10x_3$$

при условии, что переменные x_1 , x_2 , x_3 удовлетворяют системе линейных неравенств

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 33 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 23, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

В каждой из рассмотренных задач, с математической точки зрения, требуется найти такие неотрицательные значения неизвестных, удовлетворяющие заданной системе линейных неравенств, что при этих значениях данная линейная функция многих переменных достигает своего наибольшего(в задаче 1) или наименьшего(в задаче 2) значений.

$$z = f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

достигает своего наименьшего(наибольшего) значения.

Так как система ограничений задачи представляет собой систему линейных неравенств, областью ее решений будет выпуклый многоугольник M , лежащий в первой четверти координатной плоскости. С учетом этого, задачу можно сформулировать следующим образом: среди точек выпуклого многоугольника M найти те, в которых достигается минимальное (максимальное) значение линейной функции

$$z = f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2.$$

Если выбрать какое-нибудь значение функции $z = d$, то получим линейное уравнение с двумя неизвестными $c_1 x_1 + c_2 x_2 = d$, графиком которого является прямая в плоскости. При изменении значения d от $-\infty$ до $+\infty$, прямая $c_1 x_1 + c_2 x_2 = d$, передвигаясь параллельно самой себе, начертит всю плоскость (рис.25.8).

Пусть M - многоугольник решений ограничений задачи. При изменении значения d от $-\infty$ до $+\infty$, прямая $c_1 x_1 + c_2 x_2 = d$ при каком-то значении $d = d_1$ касается многоугольника M и имеет с ним общую точку A (рис.25.9), эту точку назовем точкой «входа»(во множество M). Потом прямая $c_1 x_1 + c_2 x_2 = d$, проходя весь многоугольник M , при каком-то значении

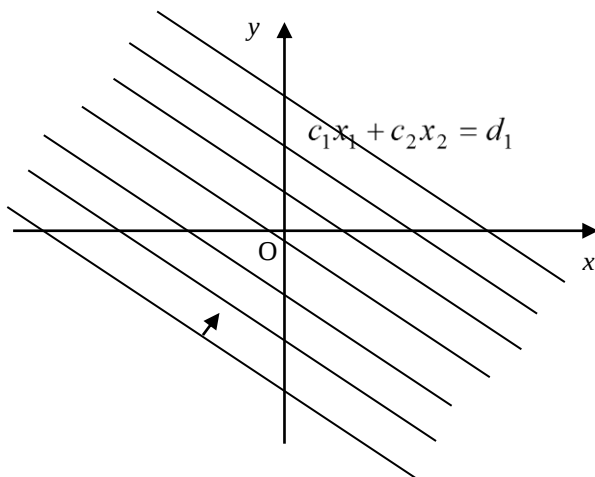


Рис.25.8.

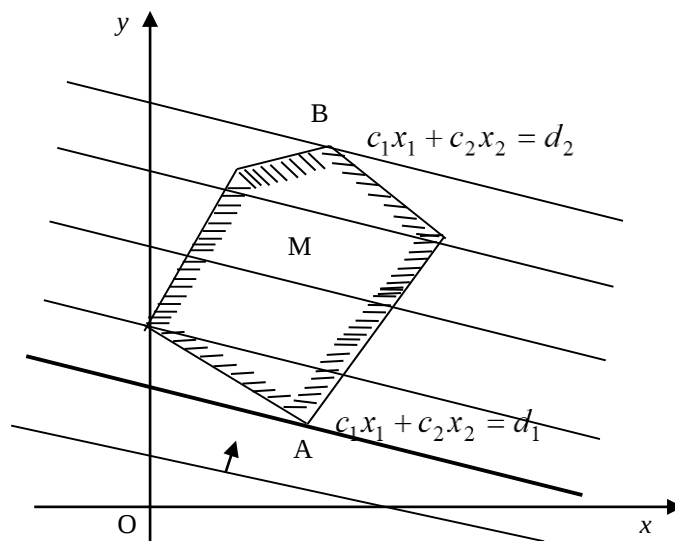


Рис.25.9.

$d = d_2$ будет иметь с многоугольником M последнюю общую точку B , эту точку назовем точкой «выхода»(из множества M).

Ясно, что целевая функция

$$z = f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

достигает своего наименьшего значения в точке A «входа» и достигает своего наибольшего значения в точке B «выхода».

Может случиться и такое, что «вход» в многоугольник решений («выход» из многоугольника) M прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = d$ может осуществляться по сторонам многоугольника (рис.25.10, рис. 25.11).

Это может случиться тогда, когда в многоугольнике M имеются стороны, параллельные прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = d$. При этом, число точек «входа» («выхода») бесконечно и, значит, целевая функция достигает своего минимального(максимального) значения во всех точках этой стороны многоугольника M .

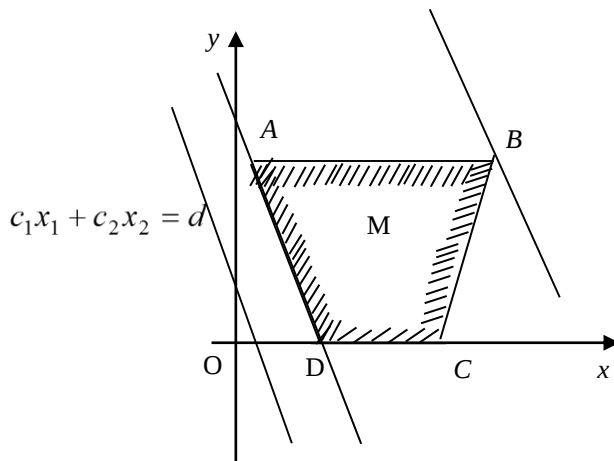


Рис.25.10.

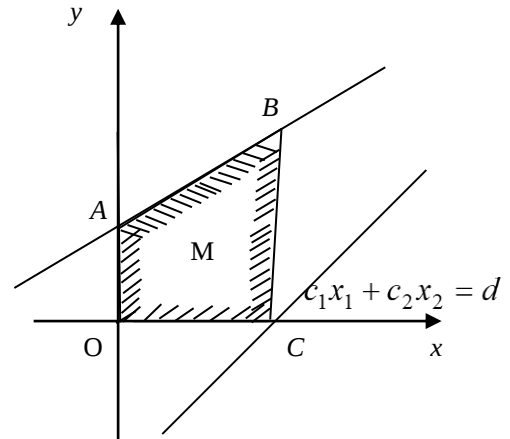


Рис.25.11.

Точнее говоря, координаты всех точек отрезка AB (рис.25.11) максимизируют значения целевой функции.

В случае, когда область решений ограничений задачи открыта, прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = d$, при изменении значения d от $-\infty$ до $+\infty$ не будет иметь точку «выхода» из области решений. Тогда целевая функция не достигает своего максимального значения.

Так как целевая функция достигает своего оптимального значения в точках «входа» и «выхода», т.е. в вершинах области решений, можно предложить следующую схему решения задачи линейного программирования с двумя неизвестными графическим методом:

- построить область решений системы ограничений задачи;
- построить прямую, соответствующую целевой функции задачи;
- переносить параллельно эту прямую, по требованию задачи, определить координаты точек «входа» или «выхода»;
- вычислить значение функции при найденных координатах.

В целях демонстрации приведенной схемы, решим задачу 1 из § 3. В задаче требовалось найти наибольшее значение функции

$$z = f(x_1, x_2) = 12000x_1 + 10\,000x_2$$

, при условии, что переменные x_1 и x_2 удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 480, & (a) \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 300 & (b) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

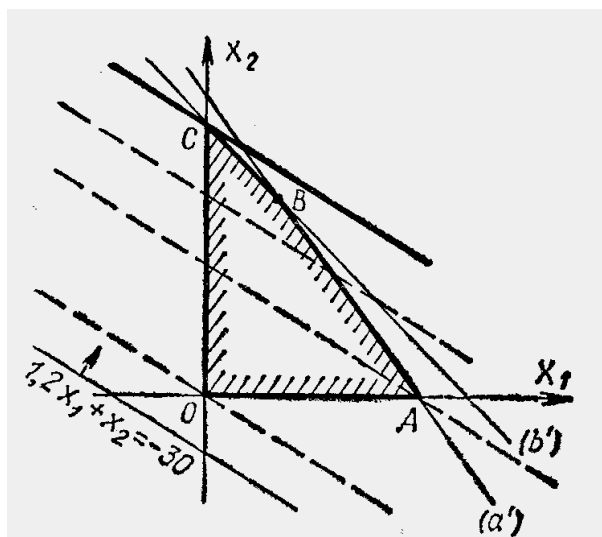


Рис.25.12.

Р е ш е н и е. На плоскости построим многоугольник $ABCO$, представляющий собой множество решений системы ограничений задачи (рис.25.12). Выбираем какое-нибудь значение целевой функции

$$z = 12000x_1 + 10\,000x_2,$$

например, значение $z = -30000$ и построим прямую $12000x_1 + 10\,000x_2 = -30000$, или $6x_1 + 5x_2 = -15$. Переносим эту прямую параллельно в направлении, указанном стрелкой (увеличивая значение z), убедимся в том, что точкой «выхода» из многоугольника является его вершина C . Точка C получается пересечением прямой b' , соответствующей неравенству (b) и оси ординат Ox_2 , значит, его координаты определяются из системы неравенств

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 300, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, для точки C получим координаты $x_1 = 0$, $x_2 = 150$. Вычислим значение целевой функции $z = 12000x_1 + 10000x_2$ при этих координатах:

$$z = 12000 \cdot 0 + 10\,000 \cdot 150 = 1\,500\,000.$$

Значит, целевая функция достигает максимального значения 1500000 при $x_1 = 0$, $x_2 = 150$.

З а д а ч а 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2$$

при условии, что переменные x_1 и x_2 удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, & (a) \\ -x_1 + x_2 \leq 1, & (b) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Построим фигуру $CBAD$, являющуюся областью решений системы ограничений задачи (рис.25.13). Выбирая значение $z = -2$ целевой функции, построим прямую $2x_1 + 2x_2 = -2$. Эту прямую, в направлении, указанной стрелкой

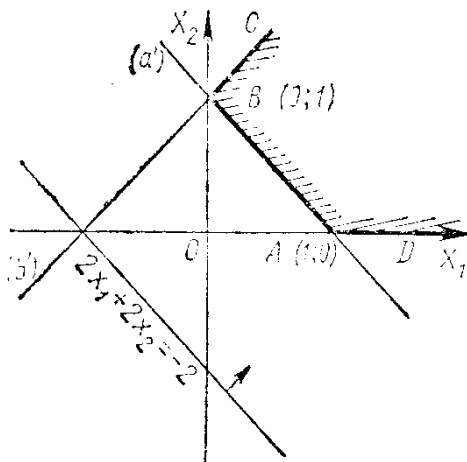


Рис.25.13.

(увеличивая значение Z), переносим параллельно. В результате, точками «входа» будут две вершины A и B фигуры $CBAD$, потому, что прямая $2x_1 + 2x_2 = -2$ параллельна прямой AB . Значит, функция $z = 2x_1 + 2x_2$ во всех точках прямой AB принимает своё наименьшее значение и оно есть $z = 2$. Функция не достигает своего наибольшего значения, потому, что область решений – открытое множество.

Историческая

справка.

Впервые постановка задачи линейного программирования прозвучала в тридцатые годы прошлого столетия в работах советского математика А.Н. Толстого в виде предложения по составлению такого плана перевозки груза между пунктами, чтобы общий пробег транспорта был наименьшим.

Линейное программирование – новый раздел математики, возникший в сороковые годы прошлого столетия в связи с потребностями организации производства. В 1939 году Л.В.Канторович опубликовал работу «Математические методы организации и планирования производства», в которой сформулировал новый класс задач на экстремум функций при наличии дополнительных ограничений (типа равенств и неравенств) и разработал эффективный метод их решения, таким образом были заложены основы математического аппарата для решения задач линейного программирования.

Американский учёный Дж.Данциг в середине сороковых годов разработал симплекс-метод решения задачи линейного программирования и считается «отцом линейного программирования» на западе.

Вопросы и задания для повторения.

1. Что изображает на плоскости уравнение $ax + by + c = 0$, где a, b, c – вещественные числа?
2. Какую часть плоскости изображают множество точек, удовлетворяющее неравенству $ax + by + c > 0$?
3. Какая из данных точек $A(-3;1)$, $B(-2;-1)$, $C(0;1)$ удовлетворяет неравенству $x - 2y + 5 > 0$?
4. Сколько неравенств-условий нужно задать, чтобы определить множество внутренних точек треугольника?
5. Дайте определение выпуклого множества и приведите примеры.

6. Сформулируйте теорему о пересечении выпуклых множеств.
7. Постановка задачи линейного программирования.
8. Что такое целевая функция задачи линейного программирования?
9. Что такое множество планов задачи линейного программирования?
10. Что называется оптимальным планом задачи линейного программирования?
11. Напишите схему решения задачи линейного программирования графическим методом.
12. В каких точках выпуклого множества целевая функция задачи линейного программирования достигает своего максимума (минимума)?

Задачи для самостоятельного решения

А.

1. Координаты какой из данных точек $A(2;2)$, $B(3;2)$, $C(0;4)$ удовлетворяют неравенству $2x - 4y + 3 > 0$?

О т в е т: В.

2. При каких значениях x нинг координаты точки $K(x;3)$ удовлетворяют неравенству $2x - 3y + 1 > 0$?

О т в е т: при $x > 4$.

3. На плоскости определить множество, координаты точек которого удовлетворяют неравенству $x - 2y - 6 < 0$.

4. Даны две параллельные прямые $x = -1$ и $x = 3$. Написать систему неравенств, соответствующих точкам, лежащим между этими прямыми.

О т в е т: $-1 \leq x \leq 3$.

5. Определить, сколько точек с целыми координатами удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ 3x + 2y - 6 < 0. \end{cases}$$

О т в е т: одна.

6. Найти неотрицательные решения ситемы неравенств

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 4, \\ -x_1 \leq -1, \\ x_2 \geq -1. \end{cases}$$

7. На плоскости найти множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1, \\ -x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 2. \end{cases}$$

В.

8. Область D в плоскости ограничена прямыми $x_1 - 2x_2 + 4 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_1 + x_2 - 7 = 0$. Составить систему неравенств, которым удовлетворяют точки области D и начертить область D .

О т в е т:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4 \geq 0, \\ x_1 + x_2 - 7 \leq 0, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

9. Даны вершины $A(3,4)$, $B(-1,2)$, $C(1,1)$, $D(6,3)$ четырехугольника $ABCD$. Составить систему неравенств, которым будут удовлетворять внутренние точки четырехугольника.

О т в е т:
$$\begin{cases} x - 2y + 5 \geq 0, \\ 2x - 5y + 3 \leq 0, \\ x + 2y - 3 \geq 0, \\ x + 3y - 15 \leq 0. \end{cases}$$

10. Найти и начертить область D , заданную системой неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + 5x_2 \geq 4, \\ x_1 \leq 3, \quad x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

11. В какой точке многоугольника $OABC$, указанного на рис.25.14 функция $F(x) = 5x_1 + 2x_2$ принимает свое наибольшее значение?

О т в е т: В.

12. В какой точке многоугольника $ABCD$, указанного на рис.25.15 функция $F(x) = 2x_1 + 3x_2$ принимает свое наибольшее значение?

О т в е т: С.

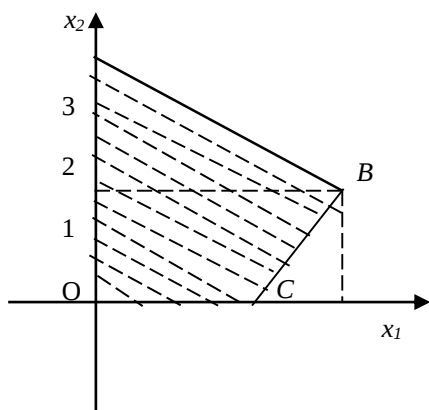


Рис.25.14.

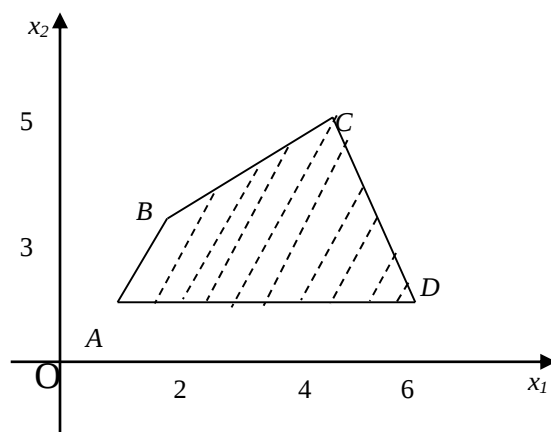


Рис.25.15.

13. Найти наименьшее значение функции $F(x) = 10x_1 + 14x_2$, при условии, что переменные x_1 и x_2 удовлетворяют условиям

$$5x_1 + 7x_2 \geq 35,$$

$$2x_1 \geq 4,$$

$$x_2 \geq 1.$$

О т в е т: $F_{\min} = 70$.

14. Найти наибольшее значение функции $F(x) = 5x_1 + 3x_2$, при условии, что переменные x_1 и x_2 удовлетворяют системе неравенств

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15,$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

О т в е т: $F_{\max} = 12,37$.

С.

15. Решить графическим методом задачу нахождения максимального значения функции $F(x) = 2x_1 + 3x_2$, при условии, что переменные x_1 и x_2 удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8, \\ x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

О т в е т: $(3; 4)$, $F_{\max} = 18$.

16. Решить графическим методом задачу нахождения максимального значения функции $F(x) = x_1 + x_2$, при условии, что переменные x_1 и x_2 удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 24, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

О т в е т: $(14, 0)$, $F_{\max} = 14$.

17. Решить графическим методом задачу нахождения минимального значения функции $F(x) = -2x_1 + x_2$, при условии, что переменные x_1 и x_2 удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

О т в е т: $(10, 9)$, $F_{\min} = -11$.

18. Решить следующую задачу линейного программирования графическим методом:

$$\begin{cases} F(x) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 4x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

О т в е т: (4,8; 3,6), $F_{\max} = 12$.

19. Решить следующую задачу линейного программирования графическим методом:

$$\begin{cases} F(x) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 26, \\ x_1 + 11x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

О т в е т: $\left(\frac{34}{7}, \frac{8}{7}\right)$, $F_{\max} = \frac{50}{7}$.

20. Решить следующую задачу линейного программирования графическим методом:

$$\begin{cases} F(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

О т в е т: (0,3), $F_{\min} = 3$.

21. Решить следующую задачу линейного программирования графическим методом:

$$\begin{cases} F(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

О т в е т: (6,1), $F_{\min} = 7$.

18- маъруза

ДИНАМИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ УСУЛИ

Динамик программалаштириш – кўп босқичли ва динамик жараёнларни математик программалаштириш ҳамда оптимал бошқаришнинг махсус

масалаларини ечиш усулидир. Қуйида бу усулнинг математик программалаш масалаларидан бир типига қўлланилишини кўрамиз.

1. Масаланинг қўйилиши. Математик программалаштиришнинг қуйидаги

$$u = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq (=) b, a_i > 0, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

масаласини қараймиз. Бу масаланинг ўзига хос хусусияти шундан иборатки, унинг мақсад функцияси сепарабелдир, яъни бир ўзгарувчили $f_i(x_i), i = \overline{1, n}$, функциялар йиғиндисидан иборат.

Бир қатор иқтисодий масалаларни (1) масала кўринишида математик моделлаштириш мумкин. Шундай масалалардан бири-ресурслар тақсимооти ҳақидаги масаладир. У

b миқдордаги хомашё (ресурс) ва n -та технологик жараёнлар берилган бўлсин; агар хомашёнинг x миқдорини i -чи технологик жараёнда фойдалансак, $f_i(x)$ миқдордаги

фойда олиниши маълум бўлса, максимал умумий фойда олиш учун хомашёни жараёнлар ўртасида қандай тақсимлаш керак?

Агар x_i деб i -чи жараён учун ажратилган ресурс миқдорини белгиласак, $u = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ -жами фойда, $\sum_{i=1}^n x_i = b, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$, бўлади.

Натижада ресурслар тақсимооти ҳақидаги масала қуйидагича математик моделлаштирилади:

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n x_i = b, \quad x_i \geq 0, i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

2. Масаланинг ечилиши. Америкалик олим Р. Беллман томонидан асосланган схемага кўра, (1) масалани динамик программалаштириш усули билан ечиш қуйидаги босқичларда амалга оширилади.

Биринчи босқичда (1) масалани унга ўхшаш масалалар оиласига инвариант киритамиз, яъни

$$u = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^k a_i x_i \leq (=) y, x_i \geq 0, i = \overline{1, k}, \quad 1 \leq k \leq n, 0 \leq y \leq b \quad (3)$$

масалалар оиласини қараймиз. (3) масала мақсад функциясининг оптимал қийматини $B_k(y)$ деб белгилаймиз:

$$B_k(y) = \max \sum_{i=1}^n f_i(x_i), \sum_{i=1}^k a_i x_i \leq (=) y, x_i \geq 0, i = \overline{1, k}. \quad (4)$$

$B_k(y)$ - Беллман функцияси дейилади.

Иккинчи босқичда рекуррент

$$B_k(y) = \max_{0 \leq z \leq \frac{y}{a_k}} [f_k(z) + B_{k-1}(y - a_k z)], \quad k = \overline{2, n}, \quad 0 \leq y \leq b \quad (3)$$

Беллман тенгламасидан ва $b_1(y) = \max_{0 \leq z \leq y/a_1} f_1(z)$ (асосий боғланиш

тенглик шаклда бўлган ҳолда $b_1(y) = f_1(y/a_1)$ бошланғич шартдан фойдаланиб кетма-кет $B_2(y), B_3(y), \dots, B_n(y)$ функцияларини топамиз.

Охирги, учинчи босқичда (1) масаланинг $\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$ ечимини курамиз: x_n^0 ни $f_n(z) + B_{n-1}(b - a_n z), 0 \leq z \leq b/a_n$ функцияга максимум берувчи нукта сифатида аниқлаймиз, яъни

$$f_n(x_n^0) + B_{n-1}(b - a_n x_n^0) = \max_{0 \leq z \leq b/a_n} [f_n(z) + B_{n-1}(b - a_n z)], \quad x_{n-1}^0 \text{ ни ҳам шунга ўхшаш}$$

$$f_{n-1}(x_{n-1}^0) + B_{n-2}(b_1 - a_{n-1} x_{n-1}^0) = \max_{0 \leq z \leq b/a_{n-1}} [f_{n-1}(z) + B_{n-2}(b_1 - a_{n-1} z)]$$

шартдан аниқлаймиз, бу ерда $b_1 = b - a_n x_n^0$.

Шундай давом этиб, $x_{n-1}^0, i = 2, 3, \dots, n-2$ нукталарни

$$f_{n-i}(x_{n-i}^0) + B_{n-i-1}(b_i - a_{n-i} x_{n-i}^0) = \max_{0 \leq z \leq b_i/a_{n-i}} [f_{n-i}(z) + B_{n-i-1}(b_i - a_{n-i} z)]$$

шартдан топамиз, бу ерда

$$b_i = b - \sum_{k=0}^{i-1} a_{n-k} x_{n-k}^0, i = 2, 3, \dots, n-2.$$

x_1^0 ни эса, $f_1(x_1^0) = \max_{0 \leq z \leq b_{n-1}/a_1} f_1(z)$ шартдан топамиз (асосий боғланиш

тенглик кўринишда бўлганда эса,

$x_1^0 = (b - \sum_{k=0}^{i-1} a_{n-k} x_{n-k}^0) / b_1$ бўлади). (1) масала мақсад функциясининг максимал

қиймати $B_n(b)$ га тенг.

Эслатма. Агар (1) масалада $f_i(x), i = \overline{1, n}$ функциялар ҳам қавариқ бўлсалар, $B_1(y), B_2(y), \dots, B_n(y)$ функциялар ҳам қавариқ бўладилар ва демак қавариқ функцияларнинг хоссаларига кўра (4) тенгламанинг ўнг томонида максимумга ё $z = 0$, ёки $z = y/b_k$ нуқтада эришилади.

1-Мисол. Ресурслар тақсимооти ҳақидаги (2) масалада $n = 3, b = 4, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2 + x, f_3(x) = x^2 - x^3 + 24x$ бўлсин. Шу масалани ечамиз.

Демак, қуйидаги масала берилган:

$$\sum_{i=1}^3 f_i(x_i) = x_1 + x_2^2 + x_2 + x_3^2 + 24x_3 \rightarrow \max, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 4, \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots$$

Унга ухшаш масалалар оиласи қуйидагича бўлади:

$$\sum_{i=1}^k f_i(x_i) \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^k x_i = y, \quad x_i \geq 0, i = \overline{1, k}, \quad k = 1, 2, 3, \quad 0 \leq y \leq 4.$$

Беллман функцияси

$$B_k(y) = \max \sum_{i=1}^k f_i(x_i), \quad \sum_{i=1}^k x_i = y, \quad x_i \geq 0, i = \overline{1, k}, \quad k = 1, 2, 3, \quad 0 \leq y \leq 4.$$

Учун Беллман тенгламасини ёзамиз:

$$B_k(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_k(z) + B_{k-1}(y-z)], \quad k = 2, 3, \quad 0 \leq y \leq 4.$$

Бу тенглама учун бошланғич шарт $B_1(y) = f_1(y) = y$ бўлади. Беллман тенгламасидан кетма-кет $B_2(y)$ ва $B_3(y)$ функцияларни топамиз:

$$B_2(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_2(z) + B_1(y-z)] = \max_{0 \leq z \leq y} [z^2 + z + y - z] = y^2 + y$$

$$B_3(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_3(z) + B_2(y-z)] = \max_{0 \leq z \leq y} [z^2 - z^3 + 24z + (y-z)^2 + y - z]$$

Энди оптимал тақсимотни аниқлаймиз.

$$B_3(4) = \max_{0 \leq z \leq 4} [z^2 - z^3 + 24z + (4-z)^2 + 4 - z] = \max_{0 \leq z \leq 4} [2z^2 - z^3 + 15z + 20] = 56$$

бу ерда максимумга $z = 3$ да эришилади. Демак,

$$b_1 = b - x_3^0 = 1; \quad B_2(1) = \max_{0 \leq z \leq 1} [z^2 + 1] = 2,$$

бу ерда максимумга $z = 1$ да эришилади. Демак, $x_2^0 = 1$. У вақтда

$$x_1^0 = 4 - x_3^0 - x_2^0 = 0.$$

Шундай қилиб, оптимал тақсимот қуйидагича бўлади: $x^0_1=0$, $x^0_2=1$, $x^0_3=3$
: максимал фойда $B_3(4) = 56$ га тенг.

3. Алгоритм. Фараз қилайликки, (1) масалада $a_i, i = \overline{1, n}$, b – бутун сонлар бўлсин ҳамда $x_i, i = \overline{1, n}$, ўзгарувчилар фақат манфий бўлмаган бутун қийматлар қабул қилинсин. Бу ҳолда Беллман тенгламаси

$$B_k(y) = \max_{z=0,1,\dots,[y/a_k]} [f_k(z) + B_{k-1}(y - a_k z)], k = \overline{2, n}, y = 0, 1, \dots, b \quad (5)$$

ва унинг учун бошланғич шарт

$$B_k(y) = \max_{z=0,1,\dots,[y/a_k]} f_1(z) \quad (6)$$

(асосий боғланиш тенглик кўринишида бўлганда $B_1(y) = f_1([y/a_1])$) бўлади, бу ерда $[y/a_1] - y/a_1$ соннинг бутун қисмини ифодалайди.

Қаралаётган ҳолда (1) масалани динамик программалаштириш усули билан ечишни қуйидаги **алгоритм** бўйича амалга ошириш мумкин:

1) $y = 0$ деб оламиз;

2) $f_1(z)$ функциянинг $z = 0, 1, \dots, [y/a_1]$ нуқталардаги қийматларини

ҳисоблаймиз ($\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$ бўлганда. $f_1([y/a_1])$ ҳисобланади).

3) $B_k(y) = \max_{z=0,1,\dots,[y/a_k]} f_1(z) = f_1(x_1(y))$ ($B_1(y) = f_1([y/a_1])$) ни ҳисоблаймиз

ҳамда $B_1(y)$ ва $x_1(y)$ ни эслаб қоламиз;

4) агар $y < b$ бўлса, $y = y + 1$ деб 2) пунктга қайтамиз; акс ҳолда навбатдаги пунктга ўтамиз;

5) $k = 2$, $y = 0$ деб оламиз;

6) $z = 0, 1, \dots, [y/a_1]$ учун $f_k(z) + B_{k-1}(y - a_k z)$ қийматларни ҳисоблаймиз;

7) $B_k(y) = \max_{z=0,1,\dots,[y/a_k]} [f_k(z) + B_{k-1}(y - a_k z)] = f_k(x_k(y)) + B_{k-1}(y - a_k x_k(y))$ ни

ҳисоблаймиз ҳамда $B_k(y)$ ва $x_k(y)$ ни эслаб қоламиз;

8) агар $y < b$ бўлса, $y = y + 1$ деб 6) пунктга қайтамиз; акс ҳолда навбатдаги пунктга ўтамиз;

9) агар $k < n$ бўлса. $k = k + 1$, $y = 0$ деб 6) бандга қайтамиз; акс ҳолда навбатдаги бандга ўтамиз;

10) (1) масалани ечими $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ ни аниқлаймиз:

$$x_n^0 = x_n(b), \quad x_{n-i}^0 = x_{n-i}(b_i), \quad b_i = b - \sum_{j=0}^{i-1} a_{n-j} x_{n-j}^0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (7)$$

$B_k(b)$ -(1) масала мақсад функциясининг оптимал қиймати бўлади.

Эслатма. Агар (7) формулада бирор $i_n, 1 \leq i_n \leq n-1$ учун $b_i = 0$ бўлса, $x_i^0 = 0$, $1 \leq i \leq i_n$ бўлади.

4. Алгоритмдан жадвал ёрдамида фойдаланиш.

$B_k(y)$, $1 \leq k \leq n$, $0 \leq y \leq b$ қийматлар билан бирга (6) га максимум берувчи $x_1(y, y = 0, 1, 2, \dots, b)$ ва (5) га максимум берувчи $x_k(y), k = 1, 2, \dots, n, y = 0, 1, 2, \dots, b$, сонларни ҳам ёзиб қўямиз (агар (5) ва (6) га максимум берувчи нуқталар бир нечта бўлса, уларнинг ҳаммаси ёзилади). Жадвални тўлдиргандан сўнг (7) бўйича формула бўйича (1) масала ечими $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ ни осонгина аниқлаш мумкин.

Алгоритмдан жадвал ёрдамида фойдаланиш қўлда бажариладиган ҳисоблашлар учун тавсия қилинади.

Эслатма. Асосий боғланиш тенглик кўринишда бўлганда (яъни $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$) $x_1(y)$, $y = 0, 1, 2, \dots, b$) сонларни жадвалга ёзиш шарт эмас. Бу ҳолда

(1) масала ечимининг x^0 координатасини $x_1^0 = \left[\left(b - \sum_{j=0}^{n-2} a_{n-j} x_{n-j}^0 \right) / a_1 \right]$ формула

билан топамиз.

1-жадвал

y	0	1	2	..	k	...	b
$B_k(y)$							
$B_1(y)$	$B_1(0)$	$B_1(1)$	$B_1(2)$	..	$B(k)$	...	$B_1(b)$
$x_1(y)$	$x_1(0)$	$x_1(1)$	$x_1(2)$	..	$x(k)$	...	$x_1(b)$

$B_2(y)$	$B_2(0)$	$B_2(1)$	$B_2(2)$	..	$B_2(k)$	...	$B_2(b)$
$x_2(y)$	$x_2(0)$	$x_2(1)$	$x_2(2)$		$x_2(k)$		$x_2(b)$
...	...	...	...	..	...	...	...
$B_n(y)$	$B_n(0)$	$B_n(1)$	$B_n(2)$	..	$B_n(k)$	...	$B_n(b)$
$x_n(y)$	$x_n(0)$	$x_n(1)$	$x_n(2)$		$x_n(k)$		$x_n(b)$

2-мисол. $\frac{x^2}{2} + x_2^2 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \max, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6,$

бу ерда $x \geq 0$, $i = 1, 2, 3$ -бутун қийматлар қабул қилади.

Ечиш. Берилган масала учун $n = 3, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b = 6,$

$$f_1(x) = \frac{x^2}{2}, \quad f_2(x) = x^2 - x, \quad f_3(x) = 2x$$

2-жадвални тўлдирамыз. Биринчи қаторга қуйидаги сонларни ёзамиз:

$$B_k(y) = \max_{z=0,1,\dots,[y/a_k]} f_1(z) = \max_{z=0,1,\dots,y} \frac{z^2}{2} = \frac{y^2}{2}, \quad y = 0, 1, \dots, 6$$

Иккинчи

сатрни

тўлдирамиз:

$$B_2(y) = \max_{z=0,1,\dots,[y/a_k]} [f_2(z) + B_1(y - a_2 z)] = \max_{z=0,1,\dots,[y/a_1]} [z^2 - z + \frac{(y-2z)^2}{2}], \quad y = 0,1,\dots,6$$

$$B_2(0) = [z^2 - z + \frac{4z^2}{2}]_{z=0} = 0, \quad x_2(0) = 0$$

$$B_2(1) = \max_{z=0,[\frac{1}{2}]} \left[z^2 - z + \frac{(1-2z)^2}{2} \right] = \left[z^2 - z + \frac{(1-2z)^2}{2} \right]_{z=0} = \frac{1}{2}, \quad x_2(1) = 0,$$

$$B_2(2) = \max_{z=0,1} \left[z^2 - z + \frac{(2-2z)^2}{2} \right] = \max\{2;0\} = 2, \quad x_2(2) = 0,$$

$$B_2(3) = \max_{z=0,[\frac{3}{2}]} \left[z^2 - z + \frac{(3-2z)^2}{2} \right] = \max\left\{\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right\} = \frac{9}{2}, \quad x_2(3) = 0,$$

$$B_2(4) = \max_{z=0,1,2} \left[z^2 - z + \frac{(4-2z)^2}{2} \right] = \max\{8;2;2\} = 8, \quad x_2(4) = 0,$$

$$B_2(5) = \max_{z=0,1,[\frac{5}{2}]} \left[z^2 - z + \frac{(5-2z)^2}{2} \right] = \max\left\{\frac{25}{2}; \frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right\} = \frac{25}{2}, \quad x_2(5) = 0,$$

$$B_2(6) = \max_{z=0,1,2,3} \left[z^2 - z + \frac{(6-2z)^2}{2} \right] = \max\{18;8;4;6\} = 18, \quad x_2(6) = 0,$$

Худди шунга ўхшаш, жадвалнинг учинчи сатрини $B_3(y)$ функциянинг

$$B_3(y) = \max_{z=0,1,\dots,[y/a_k]} [f_3(z) + B_2(y - a_3 z)] = \max_{z=0,1,\dots,[y/a_1]} [f_3(z) + B_2(y - 3z)], \quad y = 0,1,\dots,6,$$

ифодадан аниқланувчи қийматлар $B_3(0), B_3(1), \dots, B_3(6)$ лар ва бу ифодага максимум берувчи $x_3(0), x_3(1), \dots, x_3(6)$ сонлар билан тўлдирамиз.

2-жадвал

$y \backslash B_k(y)$	0	1	2	3	4	5	6
$B_1(y)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{25}{2}$	18
$x_1(y)$	0	1	2	3	4	5	6
$B_2(y)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{25}{2}$	18
$x_2(y)$	0	0	0	0	0	0	0

$B_3(y)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{25}{2}$	18
$x_3(y)$	0	0	0	0	0	0	0

Тузилган жадвалнинг охириги устуни берилган масала ечимини аниқлайди, чунки (7) формулага кўра.

$$x_3^0 = x_3(6) = 0, \quad x_2^0 = x_2(6 - a_3 x_3^0) = x_2(6) = 0, \quad x_1^0 = x_1(6 - a_3 x_3^0 - a_2 x_2^0) = x(6) = 6$$

Мақсад функциясининг максимал қиймати **$B_3(6) = 18$** .

Мустақил ишлаш учун саволлар

1. Қаралаётган (1) масалани динамик программалаштириш усули билан ечишнинг асосий босқичлари.
2. Беллман функцияси, Беллман тенгламаси.
3. Динамик программалаштириш усули билан ўзгарувчилари бутун қийматли бўлган (1) масалани ечиш алгоритми.
4. Алгоритмдан жадвал ёрдамида фойдаланиш қандай бажарилади?

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Динамик программалаш методидан фойдаланиб қуйидаги масалаларни ечинг:

$$1) \quad x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_2 + 4x_3 \rightarrow \max, \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, 3;$$

$$2) \quad \frac{1}{2}x_1^2 + 3x_2 + x_3^3 - x_3^2 \rightarrow \max, \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, 3;$$

$$3) \quad x_1^3 + 2x_2^2 + 2x_3^3 - x_3 \rightarrow \max, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, 3;$$

$$4) \quad 2x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^3 + 10x_3 \rightarrow \max, \quad 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, 3;$$

$$5) \quad \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 + \frac{1}{12}x_3^2 \rightarrow \max, \quad 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, 3;$$

$$6) \quad e^{x_1} + x_2^4 + 5x_3^2 \rightarrow \max, \quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 14, \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, 3;$$

$$7) \quad 2^{x_1} x_2^2 + x_3^2 - x_3 \rightarrow \max, \quad 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, 3;$$

$$8) \quad \frac{1}{3}x_1^3 + e^{x_2} - x_2 + 8x_3 \rightarrow \max, \quad x_1 + 4x_2 + x_3 = 15, \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, 3;$$

2. Динамик программалаштириш усули билан ўзгарувчилар бутун қийматли бўлган қуйидаги масалаларни ечинг (жадвалдан фойдаланинг):

- 1) $2^{x_1} + \frac{1}{3}x_2^3 + 4x_3^2 + \frac{1}{2}x_4^3 \rightarrow \max, \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 10, \quad x_i \geq 0, i = \overline{1,4};$
- 2) $e^{x_1} + 2x_2^2 + 3x_3^2 - x_3 + x_4^2 \rightarrow \max, \quad 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 10, \quad x_i \geq 0, i = \overline{1,4};$
- 3) $5x_1^2 + 3x_2^4 - 3x_2^2 + x_3^2 + \frac{1}{2}x_4^2 \rightarrow \max, \quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 9, \quad x_i \geq 0, i = \overline{1,4};$
- 4) $\frac{1}{3}x_1^3 - x_1 + 3^{x_2} + 2x_3^2 + 9x_4 \rightarrow \max, \quad x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 10, \quad x_i \geq 0, i = \overline{1,4};$
- 5) $3x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_3} - 6x_3 + x_4^2 \rightarrow \max, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 8, \quad x_i \geq 0, i = \overline{1,4};$
- 6) $4x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + \frac{1}{3}x_4^4 \rightarrow \max, \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 10, \quad x_i \geq 0, i = \overline{1,4};$
- 7) $6x_1^2 + 12x_2 + e^{x_3} + x_4^2 \rightarrow \max, \quad x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 9, \quad x_i \geq 0, i = \overline{1,4};$
- 8) $\frac{1}{2}x_1^3 + x_2^2 + x_3^3 + x_3 + 7x_4 \rightarrow \max, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 8, \quad x_i \geq 0, i = \overline{1,4};$

Adabiyotlar.

- 1. Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
- 2. Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Методы оптимизации. Изд. 2-е, Минск, изд-во БГУ, 1981(Ўзбек тилига таржима қилинган ва 1995 йилда “Ўзбекистон” нашриётида нашр этилган).
- 3. Алексеев В.М, Галеев Э.М, Тихомиров В.М.** Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 2005.
- 4. Ашманов С.А., Тимохов А.В.** Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.
- 5. Исраилов И., Отакулов С.** Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш усуллари курсидан маърузалар. Самарқанд, СамДУ нашри, 1-қисм, 1999.
- 6. Исраилов И. ва б.** Вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш фанидан амалий машғулотлар. Ўқув-услубий қўлланма, 1-қисм, Самарқанд, 1987.