**O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI**

**SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI**

**AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA FAKULTETI**
**MATEMATIK MODELLASHTIRISH KAFEDRASI**

Ro’yxatga olindi:
№__________
2019 yil «___» _________

“Tasdiqlayman”
O’quv ishlari bo’yicha prorektor
_______ prof. A.S. Soleev
“___” _________2019 yil

# «DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ »

## O’QUV – USLUBIY MAJMUA

**(Moddle tizimi asosida)**

**Bilim sohasi:** 100 000 – Gumanitar soha

**Ta’lim sohasi:** 140 000 –Pedagogik

**Ta’lim yo’nalishi:** 5110700 – Informatika o’qitish metodikasi

| | |
|---|---|
| **Tuzuvchi:** | SamDU Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasi dotsenti **O’rinboyev Erkin.** SamDU Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasi assistenti **Daliyev Sherzod.** |
| **Kafedra mudiri:** | **Prof. Xo‘jayorov B.** |
| **Fakultet dekani:** | **dots. A.I. Babayarov** |

**Samarqand - 2019**

**O’rinboyev Erkin, Daliyev Sherzod** «Diskret matematika va matematik mantiq» fanidan o’quv – uslubiy majmua («Informatika o’qitish metodikasi» ta’lim yo’nalishi bakalavr talabalari uchun). O’quv-uslubiy majmua. – Samarqand: SamDU nashri, 2019. – 301 bet.

«Diskret matematika va matematik mantiq» fanidan ushbu o’quv-uslubiy majmua oliy o’quv yurtlari 5110700 – Informatika o’qitish metodikasi bakalavriat ta’lim yo’nalishlari 3-kurs talabalariga mo’ljallangan.

**Taqrizchilar**:

fizika-matematika fanlari doktori, prof. A. Soleev
texnika fanlari nomzodi, dots. Q. Bekmurodov

.

SamDU o’quv – uslubiy kengashining 2019 yil _________ dagi ____ -qarori bilan o’quv-uslubiy majmua sifatida nashrga tavsiya etilgan.



**Tuzuvchi:** –Amaliy matematika va informatika fakulteti, “Matematik modellashtirish” kafedrasi dotsenti **O’rinboyev E**

« Diskret matematika va matematik mantiq » fanidan ushbu o’quv – uslubiy majmua Samarqand davlat universitetining «Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash» kafedrasida tayyorlangan. Majmua «Diskret matematika va matematik mantiq» fanini o’rganish jarayonida talabaning mustaqil ishlashini ta’minlovchi o’quv-uslubiy materiallarni o’z ichiga oladi hamda talaba olgan bilimining sifatini doimo nazorat qilishni ta’minlaydi.

Ushbu o’quv - uslubiy majmua « Diskret matematika va matematik mantiq » fani o’quv rejasida mavjud barcha ta’lim yo’nalishlari bakalavr talabalari uchun mo’ljallangan.

“Matematik modellashtirish” kafedrasining 2019 yil ______________dagi __–son majlisida muhokama etilgan va fakultet kengashida muhokama qilish uchun tavsiya etilgan.

**Kafedra mudiri: __________ prof. B.X.Xo’jayorov**

“Amaliy matematika va informatika” fakulteti o’quv-uslubiy kengashining 2019 yil “___” _____________dagi “___”–son qarori bilan tasdiqlangan.

**O’quv-uslubiy kengashi raisi: _________ dots. Sh. Mamatov**

“Amaliy matematika va informatika” fakulteti ilmiy kengashining 2019 yil “___” _____________dagi “___”–son qarori bilan chop qilishga tavsiya etilgan.

**Fakultet kengashi raisi: ________ dots. A.B. Babayarov**

Kelishildi:
O’quv uslubiy boshqarma boshlig’i
_________________ **dots. B.S. Aliqulov**

**ANNOTATSIYA**

1. FANNING NOMI **Diskret matematika va matematik mantiq**

2. TA'LIM YO'NALISHI **5110700 Informatika o'qitish metodikasi**

3. IXTISOSLIK **Informatika o'qitish metodikasi**

4. KLASSIFIKATSIYA (DARAJA) **Bakalavr**

5. FANNI TA'MINLOVCHI BO'LIM **« Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash » kafedrasi**

6. FAN O'QITUVCHILARI **Daliyev Sherzod**

*Email*: **daliyev_sher@mail.ru**

**7. FANNI O'QITISHNING MAQSADI VA VAZIFALARI**

*«* **Diskret matematika va matematik mantiq***" fanining o'qitilishidan maqsad talabalarda diskret va mantiqiy fikrlash qobiliyatini rivojlantirish, xamda matematik kibernetika asoslarini o'rgatishdan iboratdir.Fanning vazifasi esa, talabalarga Diskret matematika va matematik mantiq asoslarini berish, olgan nazariy bilimlarini amaliyotga qo'llay bilishga o'rgatishdan va oqibat natijada ularni abstrakt fikrlash madaniyatini yuksak pogonalarga kыtarishdan iboratdir.*

Boshqariluvchi sistemalarni o'rganuvchi funksional sistemalar nazariyasi va matematik mantiq elementlari bilan tanishtirish kursning asosiy vazifasidir.

**8. TA'LIMDAN OLINADIGAN NATIJA**

*Fanni o'zlashtirish uchun talabaga qo'yiladigan talablar:*

*Bilim:* chiziqli algebra, geometriya va matematik tahlil fanlari usullaridan chuqur bilimga ega bo'lishi, ayniqsa, differensial tenglamalar va matematik fizika tenglamalarini tahlil qila bilishi talab etiladi.

*Ko'nikma:* to'plamlar ustida amallar bajarish, hamda ularga oid xossalarni bilish va tahlil qilish ko'nikmalariga ega bo'lishi kerak.

*Malaka:* Matematikaga oid asosiy tushunchalar hamda hisoblashlar bo'yicha dasturlash tillarini va axborot texnologiyalarini yaxshi bilishlari, masalalarni yechishda ularni erkin foydalana olish malakasiga ega bo'lishi kerak.

*Fanni o'zlashtirgan talabaning kompetentligi:*

*Bilim:* diskret xarakterdagi masalani yechishning asosiy tushunchalari va uni Boshqariluvchi sistemalarni o'rganuvchi funksional sistemalarga qo'llay bilish.

*Ko'nikma:* kompyuter va axborot texnologiyalari imkoniyatlaridan foydalangan holda boshqariluvchi tizimlar bilan bog'liq amaliy masalalarni yechishga qo'llay bilish va olingan natijalarni tahlil qila olish ko'nikmalariga ega bo'lishi kerak.

*Malaka:* Diskret matematika va matematik mantiqga oid asosiy formulalar hamda hisoblash usullari bo'yicha dasturlash tillarini va axborot texnologiyalarini yaxshi bilishlari va masalalarni yechishda erkin qo'llay olish malakasiga ega bo'lishi kerak.

**MUNDARIJA**

## Sillabus
## Umumiy ma’lumotlar

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | **OTM** | **SamDU** | **Manzili: Unisersitet xiyoboni, 15** |
| 2 | **Fakultet** | **Amaliy matematika va informatika** | **Manzili: Bosh bino,hovlisida** |
| 3 | **Kafedra** | **Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash** | **Manzili: Bosh binoning holvisi Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasi binosi** |
| 4 | **Bilim va ta’lim sohasi** | **Bilim sohasi: 100000 – gumanitar soha** | |
| 5 | **Ta’lim yo’nalishi, kurs, guruh** | **5110700 Informatika o’qitish metodikasi** | **205,206 – guruhlar** |
| 6 | **Fan (o’quv soatlari)** | **Diskret matematika va matematik mantiq** | **O’quv soatlari:**<br>**ma’ruza – ___ soat**<br>**amal. mashg’. –____ soat**<br>**mustaqil ish – ___ soat** |
| 7 | **Kursning davomiyligi** | **__ – semestr** | **___.___.201_ – __.__.201_** |
| 8 | **O’qituvchi (lavozimi, unvoni, elektron pochta)** | **Ma’ruza. o’qituvchisi:** | **O’qituvchi: Daliyev Sherzod**<br>**e-mail:**<br>daliyev.sherzod@mail.ru |
| | | **Amaliy m. o’qituvchisi:** | **O’qituvchi: Daliyev Sherzod**<br>**e-mail:**<br>daliyev.sherzod@mail.ru |
| 9 | **Dars joyi va vaqti** | **Ma’ruza** | **Amaliy matematika, _ – aud.,** |
| | | **Amal. Mashg’ulot** | **_ – aud., ___-guruh–___-guruh** |
| 10 | **Konsultasiya joyi va vaqti** | **Ma’ruza** | **Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasi binosi, shanba, soat 14.00 – 15.00** |
| | | **Amaliy mashg’ulot** | **Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasi binosi, shanba, soat 14.00 – 15.00** |
| 11 | **Shaxsiy grafik asosida ishlash vaqti** | **ARM o’quv zali, matematika kabineti** | **Shanba kuni, 15.00 dan 16.00 gacha** |

## Asosiy ma’lumotlar

| | | |
|---|---|---|
| 1 | **Fanning dolzarbligi va qisqacha mazmuni** | Diskret matematika va matematik mantiq fanida to’plamlar nazariyasi yelementlari, |

| | | |
|---|---|---|
| | | munosabatlar, binar munosabatlar, mulohazalar algebrasi, bul funksiyalari, Post teoremalari, mulohazalar hisobi, isbot tushunchasi, “teorema” tushunchasi, predikatlar mantiqi, birinchi tartibli til, birinchi tartibli nazariya, talqin va model tushunchalari va ularga oid bo’lgan masalalar ko’riladi.<br>Algoritmlar nazariyasi va programmalash texnologiyalari kursi Diskret matematika va matematik mantiqning bevosita davomidir. Bundan tashqari kurs barcha informatikaviy fanlar bilan boglangan. Kurs mos ta’lim yo’nalishi bakalavrlarini tayyorlashda yetakchi o’rin tutadi. |
| 2 | **Fanning maqsad va vazifalari** | **Fanning o’qitishdan maqsad** – fanining o’qitilishidan maqsad talabalarda diskret va mantiqiy fikrlash qobiliyatini rivojlantirish, xamda matematik kibernetika asoslarini o’rgatishdan iboratdir<br>**Fanning vazifasi** – talabalarga Diskret matematika va matematik mantiq asoslarini berish, olgan nazariy bilimlarini amaliyotga qo’llay bilishga o’rgatishdan va oqibat natijada ularni abstrakt fikrlash madaniyatini yuksak pogonalarga ko’tarishdan iboratdir.<br>Boshqariluvchi sistemalarni o’rganuvchi funksional sistemalar nazariyasi va matematik mantiq yelementlari bilan tanishtirish kursning asosiy vazifasidir |
| 3 | **Fanning o’quv rejadagi fanlar bilan alaqasi** | Matematikada “Diskret matematika va matematik mantiq” fanining tutgan o’rni beqiyos. Ko’pgina matematik obektlarni o’rganishda, avvalo ularga mos keladigan matematik modellar tuzib olinadi. Zamonaviy kompyuterlar uchun dasturlar yaratish va axborot texnologiyalarining nazariy asoslarida Diskret matematika va matematik mantiq usullari keng qo’llaniladi.<br>“Diskret matematika va matematik mantiq” fani matematikaning boshqa bo’limlaridan foydalanadi va aksincha. Masalan, matematik analiz, geometriya va algebra, algoritmlar nazariyasi va h.k. lar bilan chambarchas bog’langan. |
| 4 | **El. pochta va boshqa elektron vositalar orqali aloqa tartibi** | O’qituvchi va talaba o’rtasidagi aloqa elektron pochta orqali ham amalga oshirilishi mumkin. Elektron pochtani ochish vaqti soat 15.00 dan 20.00 gacha. Baholash masalasi elektron pochta yoki |

| | | |
|---|---|---|
| | | telefon orqali muhokama qilinmaydi. Baholash faqat universitet hududida, belgilangan xona va belgilangan vaqtda hamda dars davomida (JN) amalga oshiriladi. |
| 5 | **Talaba uchun asosiy talablar** | - Universitet ichki tartib-qoidalariga va kiyinish madaniyatiga rioya qilish;<br>- Darslarga kechikib kelmaslik va sababsiz qoldirmaslik, qoldirilgan darslarni muddatida qayta o'zlashtirish;<br>-Uyali telefonni dars va nazoratlar paytida o'chirib qo'yish ;<br>-Darslarga tayyorlanib kelish va faol ishtirok etish;<br>-Ma'ruza, amaliy mashg'ulot, mustaqil ish va uy vazifasi uchun alohida daftar tutish va talab darajasida yuritish;<br>- Berilgan uy vazifasi, mustaqil ish va boshqa topshiriqlarni o'z vaqtida sifatli bajarish;<br>-Nazoratlarga puxta tayyorgarlik ko'rib kelish va yetarli ball to'plamagan holda takroriy nazoratlarni belgilangan muddatlarda topshirish;<br>-Nazorat paytlarida ko'chirmachilik (plagiat) qilmaslik va ushbu holat ro'y berganda nazoratdan chetlashtirilishini e'tiborda tutish;<br>- Qo'yilgan balga e'tirozi bo'lsa, ball e'lon qilingandan keyin bir kun mobaynida o'qituvchi, kafedra mudiri yoki dekanga (yakuniy nazoratlar bo'yicha apelyasiya komissiyasiga) murojaat qilish;<br>- Dars paytida va undan tashqarida o'qituvchi va boshqalarga nisbatan odob-axloq doirasida hurmat bilan munosabatda bo'lish. |

## Fan mavzulari va ularga ajratilgan soatlar taqsimoti

| T/r | Mavzular nomi | ma'ruza | Amaliy mashg'ulot |
|---|---|---|---|
| 1 | Kirish. Matematika va informatikada "Diskret matematika va matematik mantiq" fanining tutgan o'rni. | 2 | 2 |
| 2 | To'plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar. | 2 | 2 |
| 3 | Binar munosabatlar. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to'plamlar.. | 2 | 2 |
| 4 | Mantiqiy bog'lovchilar. Chinlilik jadvali. | 2 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Formula, qism formula | | |
| 5 | Formulalarning teng kuchliligi.. Mulohazalar algebrasi formulasini soddalashtirish texnologiyalari | 2 | 4 |
| 6 | Bul funksiyalari soni. Elementar bul funksiyalari. Formula tushunchasi. Funksiyalarni formulalar ko'rinishda ifodalash. Formulalarning ekvivalentligi. Ikkilamchi funksiyalar.. | 2 | 4 |
| 7 | Mulohazalar algebrasi formulasining normal formasi tushunchasi. Mukammal diz'yunktiv va konyunktiv normal forma | 2 | 2 |
| 8 | Jegalkin ko'phadi. Funksiyalar sistemasining to'liqligi va yopiqligi. Muhim yopiq sinflar. Post teoremalari. | 2 | 4 |
| 9 | Funksional elementlar | 2 | 2 |
| 10 | Sxemalar yasash. Kontaktli sxemalarni sintez qilish. | 2 | 2 |
| 11 | Qisqartirilgan diz'yunktiv normal shakl. Karno karta metodi. Bleyk metodi. Mantiqiy elementlardan foydalanib qisqartirish. | 2 | 4 |
| 12 | Predikat (mantiqiy funksiya) tushunchasi. Predmetlar sohasi. O'zgarmas predmetlar va o'zgaruvchi mulohazalar. Elementar formulalar. Kvantorlar. Predikatlar mantiqining alfaviti. | 2 | 2 |
| 13 | Formula ta'rifi. Teng kuchli formulalar. Asosiy tengh kuchli formulalar. Bajariluvchi formulalar. Aynan chin formula. Aynan yolg'on formula | 2 | 2 |
| 14 | Formulaning normal shakli. Yechilish muammosi. Chekli sohalarda yechilish muammosi. Yopiq formula. | 2 | 2 |
| 15 | Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashgan normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi | 2 | 2 |
| Jami: | | 30 | 38 |

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Ro'yxatga olindi:
№ 2069

"__" ______2019 yil

"TASDIQLAYMAN"
O'quv ishlari bo'yicha prorektori:
_______ prof. A. Soliev
2019 yil "__" ________

DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ FANINING

I S H C H I  O ' Q U V  D A S T U R I

Bilim sohasi: 100000 – Gumanitar soha

Ta'lim sohasi: 110000- Pedagogika

Ta'lim yo'nalishi: 5110700 –Informatika o'qitish metodikasi

Samarqand 2019

Fanning ishchi o'quv dasturi o'quv reja va o'quv dasturga muvofiq ishlab chiqildi.

**Tuzuvchilar:**

Urunbayev E. - SamDU, "Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash" kafedrasi dotsenti, t.f.n.
Daliyev Sh. - SamDU, "Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash" kafedrasi assitenti.

**Taqrizchilar:**
Bekmurodov Q.A. – TATU Samarqand filiali "Komputer tizimlari" Kafedra mudiri dotsenti, t.f.n.
Ro'zimurodov H. - SamDU, "Algebra va geometriya" kafedra mudiri dotsenti, f.m.-f.n.

Ishchi o'quv dasturi Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasining 2019 yil "__" _______dagi "___"-son majlis bayoni bilan ma'qullangan.

Kafedra mudiri: prof. B. Xo'jayorov

Ishchi o'quv dasturi Amaliy matematika va informatika fakulteti o'quv-uslubiy kengashining 2019 yil "__" _______dagi "___"-son majlis bayoni bilan ma'qullangan.

O'quv uslubiy kengash raisi: dots. Sh. Mamatov

Ishchi o'quv dasturi Amaliy matematika va informatika fakulteti ilmiy kengashining 2019 yil "__" _______dagi "___"-son majlis bayoni bilan ma'qullangan.

Fakultet kengashi raisi: dots. A. Babayarov

Kelishildi:
O'quv-uslubiy
boshqarma boshlig'i
__________ dots. B. Aliqulov.

## KIRISH

«Diskret matematika va matematik mantiq» fani «Informatika o‘qitish metodikasi» ta’lim yo’nalishida o’qitiladigan fanlaridan biri bo’lib, ushbu dastur umumiy o’rta ta’lim maktab, akademik litsey, kasb-hunar kollejlari matematika fanlarining Davlat Ta’lim Standartlarini hisobga olgan holda, «5110700 – Informatika o‘qitish metodikasi » yo’nalishi o’quv reja va o’quv dasturi asosida tuzilgan.

### Fanining maqsadi va vazifalari

Mazkur kurs maqsadi talabalarda diskret va mantiqiy fikrlash qobiliyatini rivojlantirish, xamda matematik kibernetika asoslarini o’rgatishdan iboratdir.Fanning vazifasi esa, talabalarga Matematik mantiq va diskret matematika asoslarini berish, olgan nazariy bilimlarini amaliyotga qo’llay bilishga o’rgatishdan va oqibat natijada ularni abstrakt fikrlash madaniyatini yuksak pog’onalarga ko’tarishdan iboratdir.

Boshqariluvchi sistemalarni o’rganuvchi funksional sistemalar nazariyasi va matematik mantiq elementlari bilan tanishtirish kursning asosiy vazifasidir.

### Fan bo’yicha talabaning malakasiga qo’yiladigan talablar

«Matematik mantiq va diskret matematika» o’quv fanini o’zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida bakalavr:

- matematikada Matematik mantiq va diskret matematika fanining tutgan o’rni va uning rivojlanish tarixiy etaplari, to’plamlar va ular ustida amallar, munosabatlar, mulohazalar, bul funksiyalari, aksiomatik nazariya, mulohazalar hisobi, birinchi tartibli nazariya, kvantorlar, predikatlar mantiqi, predikatlar hisobi xakida ***bilishi kerak***;
- to’plamlar ustida amallar bajarish, rostlik jadvalidan foydalanish, formulalarni mukammal normal shaklga keltirish, nazariyalar qurish ***k***o’***nikmalariga ega b***o’***lishi kerak;***
- to’plamlar nazariyasi, mantikiy fikrlash prinsiplari, formulalarning normal shakllariga keltirish, “isbot”larni qurish, to’liqlikni aniqlash, nazariyaning ziddiyatsizligini ***ko’rsatish malakasiga ega bo’lishi kerak***;

### O’quv rejadagi boshqa fanlar bilan bog’liqligi

Matematikada Matematik mantiq va diskret matematika fanining tutgan o’rni beqiyos. Ko’pgina matematik obyektlarni o’rganishda, avvalo ularga mos keladigan matematik modellar tuzib olinadi. Zamonaviy kompyuterlarni dasturlashda va axborot texnologiyalarining nazariy asoslarida Matematik mantiq va diskret matematika metodlari keng qo’llaniladi.

Matematik mantiq va diskret matematika fani matematikaning boshqa bo’limlaridan foydalanadi va aksincha. Masalan, matematik analiz, geometriya va algebra, algoritmlar nazariyasi bilan chambarchas bog’langan.

## Fanni o’qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

O’quv jarayoni bilan bog’liq ta’lim sifatini belgilovchi holatlar quyidagilar: yuqori ilmiy-pedagogik darajada dars berish, muammoli ma’ruzalar o’qish, darslarni savol-javob tarzida qiziqarli tashkil qilish, ilg’or pedagogik texnologiyalardan va mul’timedia vositalaridan foydalanish, tinglovchilarni undaydigan, o’ylantiradigan muammolarni ular oldiga qo’yish, talabchanlik, tinglovchilar bilan individual ishlash, erkin muloqot yuritishga, ilmiy izlanishga jalb qilish.

«Diskret matematika va matematik mantiq» kursini loyihalashtirishda quyidagi asosiy konseptual yondoshuvlardan foydalaniladi:

**Shaxsga yo’naltirilgan ta’lim.** Bu ta’lim o’z mohiyatiga ko’ra ta’lim jarayonining barcha ishtirokchilarini to’laqonli rivojlanishlarini ko’zda tutadi. Bu esa ta’limni loyihalashtirilayotganda, albatta, ma’lum bir ta’lim oluvchining shaxsini emas, avvalo, kelgusidagi mutaxassislik faoliyati bilan bog’liq o’qish maqsadlaridan kelib chiqqan holda yondoshilishni nazarda tutadi.

**Tizimli yondoshuv.** Ta’lim texnologiyasi tizimning barcha belgilarini o’zida mujassam etmog’i lozim: jarayonning mantiqiyligi, uning barcha bo’g’inlarini o’zaro bog’langanligi, yaxlitligi.

**Faoliyatga yo’naltirilgan yondoshuv.** Shaxsning jarayonli sifatlarini shakllantirishga, ta’lim oluvchining faoliyatni aktivlashtirish va intensivlashtirish, o’quv jarayonida uning barcha qobiliyati va imkoniyatlari, tashabbuskorligini ochishga yo’naltirilgan ta’limni ifodalaydi.

**Dialogik yondoshuv.** Bu yondoshuv o’quv munosabatlarini yaratish zaruriyatini bildiradi. Uning natijasida shaxsning o’z-o’zini faollashtirishi va o’z-o’zini ko’rsata olishi kabi ijodiy faoliyati kuchayadi.

**Hamkorlikdagi ta’limni tashkil etish.** Demokratik, tenglik, ta’lim beruvchi va ta’lim oluvchi faoliyat mazmunini shakllantirishda va erishilgan natijalarni baholashda birgalikda ishlashni joriy etishga e’tiborni qaratish zarurligini bildiradi.

**Muammoli ta’lim.** Ta’lim mazmunini muammoli tarzda taqdim qilish orqali ta’lim oluvchi faoliyatini aktivlashtirish usullaridan biri. Bunda ilmiy bilimni obyektiv qarama-qarshiligi va uni hal etish usullarini,dialektik mushohadani shakllantirish va rivojlantirishni, amaliy faoliyatga ularni ijodiy tarzda qo’llashni mustaqil ijodiy faoliyati ta’minlanadi.

**Axborotni taqdim qilishning zamonaviy vositalari va usullarini qo’llash -** yangi kompyuter va axborot texnologiyalarini o’quv jarayoniga qo’llash.

**O’qitishning usullari va texnikasi.** Ma’ruza (kirish, mavzuga oid, vizuallash), muammoli ta’lim, keys-stadi, pinbord, paradoks va loyihalash usullari, amaliy ishlar.

**O’qitishni tashkil etish shakllari:** dialog, polilog, muloqot hamkorlik va o’zaro o’rganishga asoslangan frontal, kollektiv va guruh.

**O’qitish vositalari:** o’qitishning an’anaviy shakllari (darslik, ma’ruza matni) bilan bir qatorda – kompyuter va axborot texnologiyalari.

**Kommunikasiya usullari:** tinglovchilar bilan operativ teskari aloqaga asoslangan bevosita o’zaro munosabatlar.

**Teskari aloqa usullari va vositalari:** kuzatish, blis-so’rov, oraliq va joriy va yakunlovchi nazorat natijalarini tahlili asosida o’qitish diagnostikasi.

**Boshqarish usullari va vositalari:** o’quv mashg’uloti bosqichlarini belgilab beruvchi texnologik karta ko’rinishidagi o’quv mashg’ulotlarini rejalashtirish, qo’yilgan maqsadga erishishda o’qituvchi va tinglovchining birgalikdagi harakati, nafaqat auditoriya mashg’ulotlari, balki auditoriyadan tashqari mustaqil ishlarning nazorati.

**Monitoring va baholash:** o’quv mashg’ulotida ham butun kurs davomida ham o’qitishning natijalarini rejali tarzda kuzatib borish. Kurs oxirida test topshiriqlari yoki yozma ish variantlari yordamida tinglovchilarning bilimlari baholanadi.

«Diskret matematika» fanini o’qitish jarayonida kompyuter texnologiyasidan, “Maple” tizimidan foydalaniladi. Ayrim mavzular bo’yicha talabalar bilimini baholash test asosida va kompyuter yordamida bajariladi. “Internet” tarmog’idagi rasmiy dasturlardan foydalaniladi, tarqatma materiallar tayyorlanadi, test tizimi hamda tayanch so’z va iboralar asosida oraliq va yakuniy nazoratlar o’tkaziladi.

**«Matematik mantiq va diskret mateamtika» fanidan mashg’ulotlarning mavzular va soatlar bo’yicha taqsimlanishi:**

| T/r | Mavzular nomi | ma’ruza | Amaliy mashg’ulot |
|---|---|---|---|
| 1 | Kirish. Matematika va informatikada “Diskret matematika va matematik mantiq” fanining tutgan o’rni. | 2 | 2 |
| 2 | To’plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar. | 2 | 2 |
| 3 | Binar munosabatlar. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to’plamlar.. | 2 | 2 |
| 4 | Mantiqiy bog’lovchilar. Chinlilik jadvali. Formula, qism formula | 2 | 2 |
| 5 | Formulalarning teng kuchliligi.. Mulohazalar algebrasi formulasini soddalashtirish texnologiyalari | 2 | 4 |
| 6 | Bul funksiyalari soni. Elementar bul funksiyalari. Formula tushunchasi. Funksiyalarni formulalar ko’rinishda ifodalash. Formulalarning ekvivalentligi. | 2 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Ikkilamchi funksiyalar.. | | |
| 7 | Mulohazalar algebrasi formulasining normal formasi tushunchasi. Mukammal diz’yunktiv va konyunktiv normal forma | 2 | 2 |
| 8 | Jegalkin ko’phadi. Funksiyalar sistemasining to’liqligi va yopiqligi. Muhim yopiq sinflar. Post teoremalari. | 2 | 4 |
| 9 | Funksional elementlar | 2 | 2 |
| 10 | Sxemalar yasash. Kontaktli sxemalarni sintez qilish. | 2 | 2 |
| 11 | Qisqartirilgan diz’yunktiv normal shakl. Karno karta metodi. Bleyk metodi. Mantiqiy elementlardan foydalanib qisqartirish. | 2 | 4 |
| 12 | Predikat (mantiqiy funksiya) tushunchasi. Predmetlar sohasi. O’zgarmas predmetlar va o’zgaruvchi mulohazalar. Elementar formulalar. Kvantorlar. Predikatlar mantiqining alfaviti. | 2 | 2 |
| 13 | Formula ta’rifi. Teng kuchli formulalar. Asosiy tengh kuchli formulalar. Bajariluvchi formulalar. Aynan chin formula. Aynan yolg’on formula | 2 | 2 |
| 14 | Formulaning normal shakli. Yechilish muammosi. Chekli sohalarda yechilish muammosi. Yopiq formula. | 2 | 2 |
| 15 | Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashgan normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi | 2 | 2 |
| Jami: | | 30 | 38 |

**Asosiy qism: Fanning uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi**

Asosiy qismda (ma’ruza) fanni mavzulari mantiqiy ketma-ketlikda keltiriladi. Har bir mavzuning mohiyati asosiy tushunchalar va tezislar orqali ochib beriladi. Bunda mavzu bo’yicha talabalarga yetkazilishi zarur bo’lgan bilim va ko’nikmalar to’la qamrab olinishi kerak.

Asosiy qism sifatiga qo’yiladigan talab mavzularning dolzarbligi, ularning ish beruvchilar talablari va ishlab chiqarish ehtiyojlariga mosligi, mamlakatimizda bo’layotgan ijtimoiy-siyosiy va demokratik o’zgarishlar, iqtisodiyotni erkinlashtirish, iqtisodiy-huquqiy va boshqa sohalardagi islohatlarning ustuvor masalalarini qamrab olishi hamda fan va texnologiyalarning so'ngti yutuqlari e'tiborga olinishi tavsiya etiladi.

**«Matematik mantiq va diskret matematika » fani bo'yicha ma'ruza mashg'ulotining rejasi**

| № | O`tiladigan mavzular | Soat |
|---|---|---|
| 1. | Kirish. Matematika va informatikada "Diskret matematika va matematik mantiq" fanining tutgan o'rni. | 2 |
| 2. | To'plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar. | 2 |
| 3. | Binar munosabatlar. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to'plamlar.. | 2 |
| 4. | Mantiqiy bog'lovchilar. Chinlilik jadvali. Formula, qism formula | 2 |
| 5 | Formulalarning teng kuchliligi.. Mulohazalar algebrasi formulasini soddalashtirish texnologiyalari | 2 |
| 6. | Bul funksiyalari soni. Elementar bul funksiyalari. Formula tushunchasi. | 2 |
| 7. | Mulohazalar algebrasi formulasining normal formasi tushunchasi. | 2 |
| 8. | Mukammal diz'yunktiv va konyunktiv normal forma | 2 |
| 9. | Jegalkin ko'phadi. Funksiyalar sistemasining to'liqligi va yopiqligi. Muhim yopiq sinflar. Post teoremalari. | 2 |
| 10 | Funksional elementlar va sxemalar yasash. Kontaktli sxemalarni sintez qilish. | 2 |
| 11 | Qisqartirilgan diz'yunktiv normal shakl. Karno karta metodi. Bleyk metodi. Mantiqiy elementlardan foydalanib qisqartirish. | 2 |
| 12 | Predikat (mantiqiy funksiya) tushunchasi. Predmetlar sohasi. Elementar formulalar. Kvantorlar. | 2 |
| 13 | Formula ta'rifi. Teng kuchli formulalar. Bajariluvchi formulalar. Aynan chin formula. Aynan yolg'on formula | 2 |
| 14 | Formulaning normal shakli. Yechilish muammosi. | 2 |
| 15 | Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashgan normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi | 2 |
| | Jami: | 30 |

**Amaliy mashg'ulotlarini tashkil etish bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar**

Amaliy mashg'ulotni o'tkazishdan maqsad ma'ruza materiallari bo'yicha talabalar bilim va ko'nikmalarini chuqurlashtirish va kengaytirishdan iboratdir.

Shu maqsadda hamma mavzularga doir va yetarli miqdordagi masalalar yechish nazarda tutiladi. Seminar mashg'ulotlarida e'tibor tegishli mavzularni talabalar mustaqil o'rganib, ma'ruza qilishga tayyorlanish, mavzuni tahlil qilib fikrlash va notiqlik qobilyatini oshirishga yo'naltiriladi.

**«Matematik mantiq va diskret matematika » fani bo'yicha amaliy mashg'ulotining rejasi**

| № | O`tiladigan mavzular | Soat |
|---|---|---|
| 1. | To'plamlarva ular ustidaamallar. Munosabatlar. Binar munosabatlar | 2 |
| 2. | Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to'plamlar | 2 |
| 3. | Mantiqiy bog'lovchilar. Chinlilik jadvali.Formula, qism formula | 2 |
| 4. | Mantiqiy bog'lovchilar. Chinlilik jadvali. Formula, qism formula | 2 |
| 5 | Formulalarning tengkuchliligi. Soddalashtirish | 2 |
| 6. | Bul funksiyalari soni. Elementar bul funksiyalari. Formula tushunchasi. | 2 |
| 7. | Mulohazalar algebrasi formulasining normal formasi tushunchasi. | 2 |
| 8. | Mukammal diz'yunktiv va konyunktiv normal forma | 2 |
| 9. | Ikkilamchi funksiyalar. Ikkilamchilik prinsipi | 2 |
| 10 | Jegalkin ko'pxadi. Funksiyalar sistemasining to'liqligi va yopiqligi | |
| 11 | Muhim yopiq sinflar. Post teoremasi va uning natijalari | |
| 12 | Funksional elementlar va sxemalar yasash. Kontaktli sxemalarni sintez qilish. | 2 |
| 13 | Qisqartirilgan diz'yunktiv normal shakl. Karno karta metodi. | 2 |
| 14 | Bleyk metodi. Mantiqiy elementlardan foydalanib qisqartirish. | |
| 15 | Predikat (mantiqiy funksiya) tushunchasi. Predmetlar sohasi. Elementar formulalar. Kvantorlar. | 2 |
| 16 | Formula ta'rifi. Teng kuchli formulalar. Bajariluvchi formulalar. Aynan chin formula. Aynan yolg'on formula | 2 |
| 17 | Formulaning normal shakli. Yechilish muammosi. | 2 |
| 18 | Normal shaklga va Umumqiymatlilikga keltirish algoritmlari | 2 |
| 19 | Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashgan normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi | 2 |

| | Jami: | 38 |
|---|---|---|

## Mustaqil ta'lim va mustaqil ishlar

Mustaqil ishning maqsadi olingan nazariy bilimlarni mustahkamlash, belgilangan mavzular asosida qo'shimcha bilim olishdan iborat. Bunda ushbu ishlarni bajaradilar:

- amaliy mashg'ulotlarga tayyorgarlik;
- nazariy tayyorgarlik ko'rish;
- uy vazifalarni bajarish;
- o'tilgan materiallar mavzularini qaytarish;
- mustaqil ish uchun mo'ljallangan nazariy bilim mavzularini o'zlashtirish.

Bunda talabalar ma'ruzalarda olgan bilimlarini amaliy mashg'ulotlarni bajarishlari bilan mustahkamlashi hamda diskret matematika va matematik mantiqning ba'zi mavzularini tushunishi hamda ularga oid masalalarni yechishlari kerak.

Mustaqil ish mavzularini o'zlashtirish ta'lim jarayonida uzluksiz nazorat qilib boriladi va yozma hisobot sifatida topshiriladi.

**Mustaqil ta'lim va ishning taxminiy mavzulari**

| № | Mavzu | Soat |
|---|---|---|
| **1** | Binar munosabatlar ustida amallar | 2 |
| **2** | Qisman tartiblangan to'plamlar | 2 |
| **3** | Formula, qism formula. Teng kuchli formulalar | 2 |
| **4** | Chinlilik jadvali | 2 |
| **5** | Mukammal konyunktiv normal formalar | 2 |
| **6** | Bul funksiyalari soni | 2 |
| **7** | Elementar bul funksiyalari | 2 |
| **8** | Funksiyalarni formulalar ko'rinishda ifodalash | 2 |
| **9** | Ikkilamchi funksiyalar. Ikkilamchilik prinsipi | 2 |
| **10** | Mukammal kon'yunktiv normal forma | 2 |
| **11** | Monoton funksiyalar sinfi | 2 |
| **12** | Chiziqli funksiyalar sinfi | 2 |
| **13** | Post teoremasi natijalari | 2 |
| **14** | Hisob tushunchasi. Mulohazalar xisobi | 2 |
| **15** | Keltirib chiqarish. Isbot tushunchasi | 2 |
| **16** | Umumlashgan Deduksiya teoremasi | 2 |
| **17** | Mulohazalar hisobining to'liqligi | 2 |
| **18** | Mantiqiy funksiya tushunchasi. Predmetlar sohasi | 2 |
| **19** | O'zgarmas predmetlar va o'zgaruvchi mulohazalar | 2 |
| **20** | Aynan chin formula. Aynan yolg'on formula | 2 |
| **21** | Algoritmlar. Algoritmlar murakkabligi | 2 |
| **22** | Minimizasiya operatori | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| **23** | Funksional elementlar | 2 |
| **24** | Sxemalar yasash. Kontaktli sxemalarni sintez qilish. | 2 |
| **25** | Qisqartirilgan diz'yunktiv normal shakl. Karno karta metodi. Bleyk metodi. Mantiqiy elementlardan foydalanib qisqartirish. | 2 |
| **26** | Predikat (mantiqiy funksiya) tushunchasi. Predmetlar sohasi. O'zgarmas predmetlar va o'zgaruvchi mulohazalar. Elementar formulalar. Kvantorlar. Predikatlar mantiqining alfaviti. | 2 |
| **27** | Formula ta'rifi. Teng kuchli formulalar. Asosiy tengh kuchli formulalar. Bajariluvchi formulalar. Aynan chin formula. Aynan yolg'on formula | 2 |
| **28** | Formulaning normal shakli. Yechilish muammosi. Chekli sohalarda yechilish muammosi. Yopiq formula. | 2 |
| **29** | Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashgan normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi | 2 |
| **30** | Funksional elementlar | 2 |
| **31** | Sxemalar yasash. Kontaktli sxemalarni sintez qilish. | 2 |
| **32** | Qisqartirilgan diz'yunktiv normal shakl. Karno karta metodi. Bleyk metodi. Mantiqiy elementlardan foydalanib qisqartirish. | 2 |
| **33** | Predikat (mantiqiy funksiya) tushunchasi. Predmetlar sohasi. O'zgarmas predmetlar va o'zgaruvchi mulohazalar. Elementar formulalar. Kvantorlar. Predikatlar mantiqining alfaviti. | 2 |
| **34** | Formula ta'rifi. Teng kuchli formulalar. Asosiy tengh kuchli formulalar. Bajariluvchi formulalar. Aynan chin formula. Aynan yolg'on formula | 2 |
| **35** | Formulaning normal shakli. Yechilish muammosi. Chekli sohalarda yechilish muammosi. Yopiq formula. | 2 |
| **36** | Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashgan normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi | 2 |
| | **Jami** | **72** |

***Izoh:*** Mustaqil ta'lim soatlari hajmlaridan kelib chiqqan holda ishchi dasturda mazkur mavzular ichidan mustaqil ta'lim mavzulari shakllantiriladi..

## Asosiy va qo'shimcha o'quv adabiyotlar hamda axborot manbalari

### *Asosiy adabiyotlar*


1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984
3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.

4. Юнусов А.С. Математик мантиқ ва алгоритмлар назарияси элементлари, Т., 2008.
5. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физ.-мат. литература, 1995.

**Qo'shimcha adabiyotlar**

6. Mirziyoyev Sh.M. Erkin va farovon, demokratik O'zbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz. O'zbekiston Respublikasi Prezidenti lavozimiga kirishish tantanali marosimiga bag'ishlangan Oliy Majlis palatalarining qo'shma majlisidagi nutq, Toshkent, 2016. 56-b.
7. Mirziyoyev Sh.M. Tanqidiy tahlil, qat'iy tartib-intizom va shaxsiy javobgarlik – har bir rahbar faoliyatining kundalik qoidasi bo'lishi kerak. Mamlakatimizni 2016 yilda ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirishning asosiy yakunlari va 2018 yilga mo'ljallangan iqtisodiy dasturning eng muhim ustuvor yo'nalishlariga bag'ishlangan Vazirlar Mahkamasining kengaytirilganmajlisidagi ma'ruza,2018 yil 14 yanvar' –Toshkent, O'zbekiston, 2018. 104-b.
8. Mirziyoyev Sh.M. Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini ta'minlash-yurt taraqqiyoti va xalq farovonligining garovi. O'zbekiston Respublikasi Konstitusiyasi qabul qilinganining 24 yilligiga bag'ishlangan tantanali marosimdagi ma'ruza. 2016 yil 7 dekabr- Toshkent, O'zbekiston, 2018. 48-b.
9. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. Mazkur kitobdan O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Shavkat Mirziyoyevning 2016 yil 1 noyabrdan 24 noyabrga qadar Qoraqalpog'iston Respublikasi,viloyatlar va Toshkent shaxri saylovchilari vakillari bilan o'tkazilgan saylovoldi uchrashuvlarida so'zlagan nutqlari o'rin olgan.-Toshkent, O'zbekiston, 2018. 488-b.
10. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
11. To'rayev X.T., Matematik mantik va diskret matematika.- T., O'qituvchi,2003.
12. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука, 1987.
13. Клини С. К. Математическая логика. М.: Мир, 1973
14. Partee B., terMeulen A., Wall R. Mathematical Methods in Linguistics. Dordrecht: Reidel, 1989.
15. Diskret matematika va matematik mantiq(o'quv uslubiy majmua), T., Universitet, 2011
16. Yunusova D., Yunusov A. Algebra va sonlar nazariyasi. Modul texnologiyasi asosida tuzilgan musol va mashqlar to'plami. O'quv qo'llanma. T., "Ilm Ziyo". 2009.
17. Yunusova D., Yunusov A. Algebra va sonlar nazariyasi. Modul texnologiyasi asosida tuzilgan musol va mashqlar to'plami. O'quv qo'llanma. T., "Iqtisod-moliya". 2008.
18. Тухтасинов М., Дискрет математика ва математик мантик.- Т.,

19. Университет, 2005.
20. Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е. Вводный курс математической логики. М.: МГУ, 1991.
21. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. - М.: Наука. -1969.
22. Yunusova D., Yunusov A. Modul texnologiyasi asosida tayyorlangan mustaqil ishlar to’plami. TDPU. 1-qism. 2005y.
23. Курант Р., Роббинс Г. - Что такое математика. pdf (5894,6 Kb) http://ihtik.lib.ru/.
24. Асанов М.О., Баранский В.А. - Дискретная математика. Графы матроиды, алгоритмы. 2001.pdf (2914,6 Kb). http://ihtik.lib.ru/.
25. Популярные лекции по математике - 54. В.А.Успенский. Машина Поста.djvu (1901,7 Kb). http://ihtik.lib.ru/.

**Internet saytlari:**

**1.** http://dimacs.rutgers.edu/
**2.** http://epubs.siam.org/sam-bin/dbq/toclist/SIDMA
**3.** http://www.vsppub.com/journals/jn-DisMatApp.html

# MA’RUZA MATNI

**Mavzu: Kirish. Matematika va informatikada “Diskret matematika va matematik mantiq” fanining tutgan o’rni.**

Mantiq – muhokama yuritishning qonun-qoidalari, usullari va formalari (shakllari) haqidagi fan bo‘lib, uning asoschisi qadimgi yunon mutafakkiri **Aristotel** (miloddan avvalgi 384-322 y.) hisoblanadi. U birinchi bo‘lib deduksiya nazariyasini, ya’ni mantiqiy xulosa chiqarish nazariyasini yaratib, mantiqiy xulosa chiqarishning formal xarakterga ega ekanligini ko‘rsatdi. Aristotelning mantiqiy ta’limoti formal mantiqning (logikaning) asosini tashkil qiladi. Formal mantiq fikrlashning formalari va qonunlarini tekshiradi. Shunday qilib, Aristotel mantiqiy fikrlashning asosiy qonunlarini ochdi.

Aristotel asos solgan mantiq ko‘p asrlar davomida turli mutafakkirlar, faylasuflar va butun falsafiy maktablar tomonidan to‘ldirildi, o‘zgartirildi va takomillashtirildi. Shu jumladan, **Abu Nasr Farobiy, Abu Ali Ibn Sino, Abu Rayxon Beruniy, Muhammad al-Xorazmiy, Umar Xayyom, Alisher Navoiy, Mirzo Bedil** kabi Sharqning buyuk mutafakkirlari ham o‘zlarining katta hissalarini qo‘shdilar.

Mantiqning yangilanishida fransuz olimi **R.Dekartning** (1596-1650) ishlari muhim rol o‘ynadi. R.Dekart analitik usulda fikrlashning asosiy prinsiplarini yaratdi.

Olmon faylasufi va matematigi G.Leybnis (1646-1716) birinchi bo‘lib mantiqiy fikrlashga hisob xarakterini berish zarur degan g‘oya bilan chiqdi. Buning uchun, uning fikricha, hamma ilmiy tushunchalar va mulohazalarni asosiy mantiqiy elementlarga keltirib, ularni ma’lum simvollar bilan belgilash kerak.

G.Leybnis g‘oyalari faqat XIX asrdagina o‘z rivojini topdi. Ingliz olimlari J.Bul (1815-1864), Ch.Pirs (1839-1914), B.Rassel (1872-1970), A.Uaytxed (1861-1947), U.Jevons (1835-1882), olmon olimlari G.Fryoge (1848-1925), D.Gilbert (1862-1943), E.Shryoder (1841-1902), shotlandiyalik matematik O. de Morgan (1806-1871), rus olimlari P.S.Poreskiy (1846-1907), V.I.Glivenko (1897-1940), I.I.Jegalkin (1869-1947) va boshqalar mantiq sohasidagi ishlari bilan simvolik yoki matematik mantiqni (logikani) yaratdilar.

Matematik mantiq asoschilaridan biri bo‘lgan J.Bul (J.Bul mashhur «So‘na» romanining muallifi Lilian Voynichning otasidir) mustaqil ravishda grek, lotin, nemis, fransuz va italyan tillarini hamda matematikani o‘rganadi. U 1847 yilda yozilgan «Mantiqning matematik tahlili», «Mantiqiy hisob» va 1854 yilda yozilgan «Fikrlash qonunlarini tadqiq etish» kitoblarida mantiqni algebraik formaga keltirdi va matematik mantiqning aksiomalar sistemasini yaratdi. Bulning mantiqiy hisobi **bul algebrasi** deb yuritiladi.

J.Bul mantiq va matematika operatsiyalari o‘rtasidagi o‘xshashlikka asoslanib, mantiqiy xulosalarga algebraik simvolikani qo‘lladi. U mantiq operatsiyalarini formallashtirish (rasmiylashtirish) uchun quyidagi simvollarni (belgilarni) kiritdi:

– predmetlarni belgilash uchun ($x$, $y$, $z$, ...) lotin alifbosining (alfavitining) kichik harflarini;

– predmetlar sifatini belgilash uchun ($X$, $Y$, $Z$, ...) lotin alifbosining bosh harflarini;

– biror mulohazaga akslantirilgan hamma predmetlar sinfi 1 ni;

– ko‘rilishi lozim bo‘lgan predmetlar yo‘qligining belgisi 0 ni;

– mulohazalarni mantiqiy qo‘shishning “+” belgisini;

– mulohazalarni mantiqiy ayirishning “–” belgisini;

– mulohazalar tengligining “=” belgisini.

Simvolik bul algebrasida mantiqiy ko‘paytirish amali, xuddi algebraik qiymatlarni ko‘paytirishdagidek kommutativlik

$$xy = yx$$

va assotsiativlik

$$x(yz) = (xy)z$$

xossalariga ega. Mantiqiy qo‘shish amali ham kommutativlik va assotsiativlik xossalariga ega:

$$x + y = y + x, \ (x + y) + z = x + (y + z).$$

Bul algebrasida yig‘indi ko‘paytmaga nisbatan distributivlik qonuniga bo‘ysunadi:

$x(y+z)=xy+xz$.

J.Bul algebraik simvolikalar yordami bilan hamma mantiqiy operatsiyalarni ikki qiymatli (1 va 0) algebra qonunlariga bo‘ysunadigan formal (rasmiy) operatsiyalarga keltirishni o‘yladi. Bul funksiyalari va uning argumentlari faqat ikki qiymat – «chin» va «yolg‘on» qiymatlar qabul qiladi.

Mantiq algebrasi qoidalari orqali oddiy mulohazalardan murakkab mulohazalarni hosil qilish mumkin. Masalan:

$xy$ – bir vaqtda $x$ va $y$ xossalarga ega bo‘lgan predmetlar klassi;

$x(1-y)$ – $x$ xossaga ega va $y$ xossaga ega bo‘lmagan predmetlar klassi;

$(1-x)y$ – $y$ xossaga ega va $x$ xossaga ega bo‘lmagan predmetlar klassi;

$(1-x)(1-y)$ – $x$ va $y$ xossalarga ega bo‘lmagan predmetlar klassi.

Hozirgi matematik mantiq fanini yaratishda fundamental rol o‘ynagan Bul simvolik logikasi mukammallashtirishga muhtoj edi. Masalan, Jevons fikricha mantiqiy ayirish operatsiyasi ayrim noqulaylikka olib keladi.

O. de Morgan Bul g‘oyalarini rivojlantirib, mantiq hisobini ehtimollar nazariyasi teoremalarini asoslashga tatbiq etdi va simvolik hisobni yaratish ustida ishladi.

Ch.Pirs matematikani analiz qilishda mantiqiy munosabatlarni qurol sifatida ishlatishni asoslab berdi, u G.Fryoge ishlaridan xabarsiz holda, mantiqqa kvantor tushunchasini kiritdi.

G.Fryoge matematika prinsiplarini mantiq prinsiplaridan keltirib chiqarish ustida ishlab, mantiq hisobini yaratdi.

Bul va O. de Morgan asarlarida matematik mantiq o‘ziga xos algebra – mantiq algebrasi ko‘rinishida shakllandi.

Keyinchalik Bul usullari U.Jevons, E.Shryoder (1853-1901) va P.S.Poreskiy (1846-1907) asarlarida o‘z rivojini topdi.

Bul algebrasini U.Jevons va E.Shryoder mukammallashtirishdi. U.Jevons «Sof mantiq» (1864), «O‘xshashlarni almashtirish» (1869) va «Fan asosi» (1874) nomli kitoblarida mantiq sohasida almashtirish prinsipiga asoslangan o‘zining nazariyasini tavsiya etdi. 1877 yili E.Shryoder «Der operationskreis des Logikkalkuls» kitobida algebraik mantiq asoslarini yoritdi.

Matematik mantiq fanining rivojlanishiga rus olimi P.S.Poreskiyning ham katta xizmati bor. Bul, Jevons va Shryoderlar yutuqlarini umumlashtirib, «Mantiqiy tenglamalarni yechish usullari va matematik mantiqning teskari usuli haqida» (1884) nomli kitobida mantiq algebrasi apparati rivojini ancha ilgari surdi. Amerikalik olim A.Bleyk P.S.Poreskiy metodini E.Shryoder metodidan ustun qo‘ygan.

P.S.Poreskiy sistemasida quyidagi belgilar qabul qilingan:

1) bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan va bir-biri bilan hech qanday munosabatda bo‘lmagan predmetlar klassini lotin alifbosining kichik harlflari $a$, $b$, $c$, … bilan belgilash;

2) sinflarni inkor etish uchun lotin alifbosining kichik harlflaridan keyin «emas» so‘zini qo‘shish, ya’ni $a$ emas, $b$ emas va hokazo kabi belgilash;

3) $a$, $b$, $c$, … predmetlar sinfi xususiyatiga ega bo‘lmagan predmetlar sinfini $a_1$, $b_1$, $c_1$, … bilan belgilash;

4) ikki yoki ko‘proq sinflar birgalikda bir nechta bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan xossalarga ega bo‘lishini $ab$, $bc$, … ko‘paytmalar bilan belgilash; Bu operatsiya kommutativlik va assotsiativlik xossalariga ega:

$$ab = ba,\ (ab)c = a(bc);$$

5) mantiqiy qo‘shish amalini «+» belgi bilan begilash, bu operatsiya ham kommutativlik va assotsiativlik xossalariga ega:

$$x + y = y + x,\ (x + y) + z = x + (y + z);$$

6) hech qanday mazmunga ega bo‘lmagan sifat formasini 0 (mantiqiy 0) bilan belgilash;

7) mumkin bo‘lgan sinflarni o‘z ichiga olgan sifat formasini 1 (mantiqiy 1) bilan belgilash; 0 va 1 ushbu xossalarga ega:

$$a + 0 = a,\ a \cdot 1 = a;$$

8) $a$ sinfning inkorini $a_1$ sinf bilan belgilash;

9) qo‘shish, ko‘paytirish va inkor amallaridan tashqari ekvivalentlik amalini kiritilgan va uni «=» simvol bilan belgilangan. Bu amal uchta qoidaga bo‘ysunadi: a) agar $a=b$ tenglikning chap va o‘ng tomonlariga bir xil sinflarni qo‘shsak, u holda tenglik o‘rinli, ya’ni $a+c=b+c$ bo‘ladi; b) agar, $a=b$ bo‘lsa, u holda $ad=bd$ bo‘ladi; d) agar, $a=b$ bo‘lsa, u holda $a_1=b_1$ bo‘ladi, bu yerda $a_1=a$ emas, $b_1=b$ emas.

XIX asrning oxirida matematik nazariyalar shunday rivojlandiki, endi mantiq masalalari matematikaning o‘zida ham muhim ahamiyatga ega bo‘lib, mavjud mantiqiy qurollar matematika talablariga javob bera olmay qoldi. Ayrim matematik muammolarni yechishdagi qiyinchiliklar ularning mantiqiy tabiatiga bog‘liqligi aniqlandi. Shuning uchun ham matematik mantiq tor algebraik doiradan chiqib, jadal rivojlana boshladi. Bu yo‘nalishda birinchi bo‘lib G.Fryoge va italyan matematigi J.Peano (1858-1932) tadqiqotlar olib borishdi, ular matematik mantiqni arifmetika va to‘plamlar nazariyasini asoslash uchun qo‘lladilar.

Matematik mantiqning keyingi taraqqiyoti uchun B.Rassel va A.Uaytxedning uch tomlik «Matematika prinsiplari» (1910-1913 y.), D.Gilbertning ishlari, hamda K.Gyodelning tadqiqotlari juda muhim ahamiyatga ega bo‘ldi. Matematik mantiqning rivojlanishida Rossiya matematiklari I.I.Jegalkin, V.I.Glivenko, A.N.Kolmogorov, P.S.Novikov, A.A.Markov va boshqalar o‘zlarining ulkan hissalarini qo‘shdilar.

1903 yili B.Rasselning Londonda nashr etilgan «Matematika prinsiplari» kitobida mulohazalar va sinflar hisob nazariyasi ishlab chiqildi. B.Rasselning A.Uaytxed bilan hamkorlikda yozilgan 3 tomlik «Matematika prinsiplari» kitoblari matematik mantiq fanining rivojlanishida katta rol o‘ynadi. Bu kitoblarda mulohaza, sinf va predikatlar hisobi deyarli to‘liq aksiomalashtirilgandi va formallashtirildi. Ular hozirgi vaqtda o‘rganilayotgan matematik mantiq ko‘rinishini yaratdilar.

D.Gilbert va nemis olimi V.Akkerman 1928 yilda chop etilgan «Nazariy mantiqning asosiy xususiyatlari» kitoblari matematik mantiqning yanada rivojlanishida muhim ahamiyat kasb etdi. Bu kitobning mualliflari mantiqiy amallarda formallashtirish metodini tatbiq etib katta yutuqqa erishdilar.

Bul, Shryoder va Poreskiyning mantiq algebrasiga tayanib, I.I.Jegalkin logik qo‘shish va logik ko‘paytirish amallarini quyidagicha aniqladi:

1) $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=0$;

2) $0 \cdot 0=0$, $0 \cdot 1=0$, $1 \cdot 0=0$, $1 \cdot 1=1$.

Logik (mantiqiy) qo‘shish va ko‘paytirish amalidan $a+a=0$ va $a \cdot a=a$ kelib chiqadi.

Mantiqiy operatsiyalarning simvolik ko‘rinishlari Jegalkin sistemasida quyidagicha bo‘ladi:

$$\overline{p}=p+1;\ \ p=\overline{\overline{p}};\ \ p \vee q=p+q+pq;$$

$$p \to q=1+p+pq;\ \ p \equiv q=1+p+q.$$

Jegalkin simvolik mantiqqa umumiylik va mavjudlik kvantori degan tushunchalarni ham kiritdi va predikatlar algebrasini yaratdi.

XX asrning 50- yillarida ko‘p qiymatli mantiq sohasida ilmiy izlanishlar olib borildi. Ko‘p qiymatli mantiqda mulohazalar chekli (3 va undan ko‘p) va cheksiz chinlik qiymatlari oladi. Matematik mantiqning bu bo‘limining asoschilaridan biri polyak olimi Ya.Lukasevich (1878-1954) hisoblanadi. U dastlab (1920) uch qiymatli, 1954 yilda to‘rt qiymatli va nihoyat cheksiz qiymatli mantiqni yaratdi.

Ko‘p qiymatli mantiq problemalari (muammolari) bilan **E.Post, S.Yaskovskiy, D.Vebb, A.Geyting, A.N.Kolmogorov, D.A.Bochvar, V.I.Shestakov, G.Reyxenbax, S.K.Klini, P.Detush-Fevriye** va boshqa olimlar shug‘ullanganlar.

Konstruktiv matematikaning rivojlanishi konstruktiv mantiq masalalarini yechish usullarini ishlab chiqish vazifasini qo‘ydi. Bu sohada **A.A.Markov, N.A.Shanin** hamda shogirdlarining xizmatlari kattadir.

Diskret matematikaning katta bo‘limlaridan biri algoritmlar nazariyasi hisoblanadi. Algoritm so‘zi IX asrda yashagan o‘z zamonasining buyuk matematigi vatandoshimiz **Muhammad al-Xorazmiy** ismining lotincha Algorithmi formasidan kelib chiqqan.

Algoritmlar nazariyasi algoritmlarning umumiy xususiyatlarini oʻrgatuvchi diskret matematikaning bir boʻlimidir.

XX asrning 20- yillarida birinchi boʻlib intuitsionistlar vakillari L.Brauer va olmon olimi G.Veyler (1934) algoritm tushunchasini oʻrganishga kirishganlar. Algoritmlar nazariyasining asoschilaridan biri boʻlgan A.Chyorch 1936 yilda hisoblanuvchi fuksiya tushunchasiga dastlabki aniqlikni kiritdi va quyidagi tezisni ilgari surdi: **natural argumentlarning barcha qiymatlarida hamma joyda aniqlangan hisoblanuvchi funksiyalar bilan umumiy rekursiv funksiyalar ekvivalentdir (bir xildir).** U hisoblanuvchi funksiya boʻlmagan funksiyani koʻrsatdi.

Algoritmlar nazariyasining keyingi rivojlanishiga amerikalik olimlar **K.Gyodel**, **S.K.Klini** (1957), **E.L.Post** (1943-1947), **X.Rodjers** (1972), ingliz olimi **A.Tyuring** (1936-1937), rus olimlari **A.A.Markov** (1947-1954, 1958, 1967), **A.N.Kolmogorov** (1953, 1958, 1965), **Yu.L.Yershov** (1969-1973), **A.I.Malsev** (1965,) **D.A.Traxtenbrot** (1967, 1970-1974), **P.S.Novikov** (1952), **Yu.V.Matiyasevich** (1970-1972) kabi olimlarning xizmatlari benihoyat kattadir.

Masalan, S.Klini **algoritm yordamida hisoblanuvchi qismiy funksiyalar qismiy rekursiv funksiyalardir** degan gʻoyani ilgari surdi.

A.Tyuring va E.Post (1936) ideallashtirilgan hisoblash mashinalari atamasida birinchi boʻlib, bir-biridan bexabar holda, algoritm tushunchasiga aniqlik kiritishdi. Post va Tyuring algoritmik jarayonlar maʼlum bir tuzilishga ega boʻlgan "mashina" bajaradigan jarayonlar ekanligini koʻrsatdilar. Ular oʻsha paytdagi matematikada maʼlum boʻlgan barcha algoritmik jarayonlarni bajara oladigan "mashinalar" sinfini hosil qilib, ularga aniq matematik atamalar yordamida taʼrif berdilar. Post va Tyuring ushbu mashinalar yordamida hisoblanuvchi barcha funksiyalar sinfi barcha qismiy rekursiv funksiyalar sinfi bilan bir xil ekanligini koʻrsatdilar. Natijada, Chyorch tezisining yana bitta fundamental tasdigʻi hosil boʻldi.

S.Klini va E.Post birgalikda rekursivlik nazariyasini yaratdilar va rekursiv funksiyalar nazariyasini taraqqiy ettirdilar. Ular qisman rekursiv funksiyalar tushunchasini kiritishdi.

Dastlab faqat matematik mantiq, algebra, matematik analiz, matematika asoslari, ehtimollar nazariyasi, geometriya, topologiya, sonlar nazariyasi, modellar nazariyasi kabi matematika fanlarida tatbiq etib kelingan algoritmlar nazariyasi XX asrning 40- yillaridan boshlab hisoblash matematikasi, kiberneteka, axborot nazariyasi, iqtisodiyot, psixologiya, matematik lingvistika, tibbiyot fanlari va diskert texnikada keng qo‘llanilmoqda.

So‘nggi davrlarda matematik mantiqni texnikaga juda samarali tatbiq etish imkoniyatlari borligi ma’lum bo‘ldi.

Matematik mantiqni diskret texnikaga tatbiqi natijasida uning texnik mantiq bo‘limi vujudga keldi. Bu sohada **E.Post, V.I.Shestakov, K.Shennon** (1916 y.t.), **A.Nakashima, M.Xanzava, S.Klini, O.B.Lupanov** (1932 y.t.), **S.V.Yablonskiy** (1924 y.t.), **V.B.Kudryavsev, Yu.I.Juravlyov, V.I.Levenshteyn, V.V.Glagolev, F.Ya.Vetuxnovskiy, Yu.L.Vasilyev** va boshqa olimlar o‘z ilmiy izlanishlari bilan uning taraqqiy etishiga ulkan hissa qo‘shganlar.

Matematik mantiqni texnikaga qo‘llashni birinchi bo‘lib rus fizigi **P.Erenfest** (1910) va gidrotexnika qurilishlari bo‘yicha yetuk mutaxassis **N.M.Gersevanovlar** amalga oshirganlar.

K.Shennon hisoblash mashinalarini yaratishning asosiy metodi sifatida mantiq algebrasini bilgan, u informatsiya va informatsiyani uzatishning matematik nazariyalarni yaratdi, elektron tarmoqlardagi “1” va “0” binar munosabatlar bilan matematik mantiqdagi ikkilik (1 va 0) qiymatlarining mos kelishini va qanday qilib “mantiq mashinasini” yaratishni ko‘rsatdi va hokazo.

Kontakli va rele-kontakli sxemalarga mantiq algebrasini tatbiq etishning isbotini birinchi bo‘lib V.I.Shestakov va K.Shennonlar berdi. A.Nakashima va M.Xanzava matematik mantiqni diskret texnika masalalarini yechishda qo‘llash metodlarini yaratdilar. S.Klini diskret qurilma modelini (chekli avtomat modeli) yaratgani tufayli, matematik mantiqni xotirali diskret qurilmalarni loyihalashda ishlatish imkoni yuzaga keldi.

Moskva davlat universiteti diskret matematika maktabining asoschilaridan biri O.B.Lupanovning asosiy ishlari matematik kibernetika va matematik mantiqqa bag‘ishlangan. U murakkab boshqaruvchi sistemalarning asimptotik qonuniyatlarini, kontakt sxemalar va funksional elementlardan yasalgan sxemalarni (umuman asosiy boshqaruvchi sistemalarni), eng yaxshi asimptotik sintez metodlarini va lokal kodlash prinsipini ishlab chiqdi.

S.V.Yablonskiy optimal sxemalarni sintez qilish va hisoblash qurilmalarini yasash metodini yaratdi.

Mantiq algebrasi elektr sxemalarni loyihalashda va tekshirishda, avtomatik hisoblash mashinalarini loyihalash va programmalashda, diskret avtomatlarni mantiqiy loyihalashda, EHM elementlari va qismlarini loyihalashda, har xil texnik sistemalar, qurilmalar va avtomatik mashinalarni analiz va sintez qilishda keng miqyosda tatbiq etiladi. Matematik mantiq fani elektron hisoblash mashinalarining vujudga kelishiga va uni mukammallashtirishga katta hissa qo‘shdi.

Kombinatorika muammolari bilan XI-XV asrlarda Sharq olimlari, jumladan, Bxaskara Acharya, Nosir ad-Din-Muhammad at-Tusiy, Ali Qushchi, Umar Hayyom shug‘ullanib, olamshumul ahamiyatga ega bo‘lgan ilmiy natijalar olishgan.

Ilmiy adabiyotda **Paskal uchburchagi** deb ataluvchi sonlar jadvali Paskal nomi bilan atalishiga qaramasdan, bunday sonlar jadvali juda qadimdan dunyoning turli mintaqalarida, jumladan, Sharq mamlakatlarida ham ma’lum bo‘lgan: Erondagi Tus shahrida (hozirgi Mashhadda) yashab ijod qilgan Nosir at-Tusiy XIII asrda bu jadvaldan foydalanib, ikkita son yig‘indisining natural darajasini hisoblash usulini o‘zining ilmiy ishlarida keltirgan bo‘lsa, g‘arbda Al-Kashi nomi bilan mashhur Samarqandlik olim Ali Qushchi butun sonning istalgan natural ko‘rsatkichli arifmetik ildizi qiymatini taqribiy hisoblashda bu jadvaldan foydalana bilgan. XVI asrga kelib G‘arbiy Yevropada bu sonlar uchburchagi haqida M. Shtifel arifmetika bo‘yicha qo‘llanmalarida yozgan va u ham butun sondan istalgan natural ko‘rsatkichli arifmetik ildizning taqribiy qiymatini hisoblashda bu uchburchakdan foydalana bilgan. 1556 yilda bu sonlar jadvali bilan N. Tartalya, 1631 yilda U. Otred ham shug‘ullanishgan. Faqatgina 1654 yilga kelib B. Paskal bu sonlar jadvali haqidagi ma’lumotlarni o‘zining “Arifmetik uchburchak haqidagi traktat” nomli asarida e’lon qildi.

Ixtiyoriy $a$ va $b$ haqiqiy sonlar hamda $n$ natural son uchun $(a+b)^n$ ifodaning koʻphad shaklidagi yoyilmasi XVII-XVII asrlarda yashagan Nyuton nomi bilan **Nyuton binomi** deb yuritiladi. Vaholangki, qadimgi greklar $(a+b)^n$ ifodaning qatorga yoyilmasini $n$ning faqat $n=2$ boʻlgan holida bilishgan boʻlsa, Umar Hayyom (1048-1122) va Ali Qushchi (1436 yilda vafot etgan) bu ifodani $n>2$ boʻlgan natural sonlar uchun ham qatorga yoya bilganlar. Nyuton esa 1767 yilda yoyilma formulasini isbotsiz manfiy va kasr $n$ sonlar uchun ham qoʻllagan.

Hozirgi vaqtda kombinatorik tahlil masalalari, asosan, uch turga boʻlinadi. Birinchi tur masalalar elementar kombinatorika masalalari deb yuritiladi va ular, koʻpincha, berilgan toʻplam elementlari bilan bogʻliq mumkin boʻlgan yechimlar sonini aniqlashga keltiriladi. Mumkin boʻlgan kombinatorik yechimlar, ularning mavjudligi va shu kabi masalalar ikkinchi tur masalalar jumlasiga kiradi. Uchinch tur kombinatorik masalalar vositasida mumkin boʻlgan kombinatorik yechimlar orasidan qandaydir maqsadni koʻzlab optimal yechim topish bilan bogʻliq savollarga javob topishga harakat qilinadi.

Kombinatorik tahlil diskret matematikaning nazariy asoslaridan biridir. Bu tahlilni amalga oshirishda tanlashlar sonini bevosita aniqlash usuli, hosil qiluvchi funksiyalar usuli, mantiqiy, ekstremal, geometrik, jadval-sxema va boshqa usullardan foydalaniladi.

1736 yilda L. Eyler tomonidan oʻsha davrda qiziqarli amaliy masalalardan biri hisoblangan Kyonigsberg[1] koʻpriklari haqidagi masalaning qoʻyilishi va yechilishi **graflar nazariyasining** paydo boʻlishiga asos boʻldi.

XIX asrning oʻrtalarida graflar nazariyasi bilan bogʻliq tadqiqotlar G. Kirxgof[2] va A. Keli[3] ishlarida paydo boʻldi.

"Graf" iborasi D. Kyonig[4] tomonidan 1936 yilda graflar nazariyasiga bagʻishlangan dastlabki darslikda[5] uchraydi.

---

[1] Kyonigsberg (Königsberg) – bu shahar 1255 yilda asoslangan boʻlib, Sharqiy Prussiyadagi Pregel daryosi qirgʻoqlarida joylashgan. 1946 yildan boshlab Kaliningrad, hozir Rossiya Federatsiyasi tarkibida.

[2] Kirxgof (Kirchhoff Gustav Robert, 1824-1887) – olmon faylasufi, fizigi.

[3] Keli yoki Keyli (Cayley Artur, 1821-1895) – ingliz matematigi.

[4] Kyonig (Dénes König, 1884-1944) – venger matematigi.

[5] Bu darslik olmon tilida yozilgan.

XIX-XX asrlarda graflar nazariyasining rivojlanashiga daniya matematigi J. Petersen (1839-1910), polyak matematigi K. Kuratovskiy (1896-1980), rus matematigi L. Pontryagin (1908-1988), norvegiya matematigi O. Ore (1899-1968), irlandiya matematigi V.R. Gamilton (1805-1865), daniya matematigi G.A. Dirak (1925-1984), golland matematigi E.V. Deykstra (1930-2002), AQSH matematiklari L.R. Ford (1927) va D.R. Falkerson (1924-1976) kabi olimlarning benihoyat hizmatlari katta.

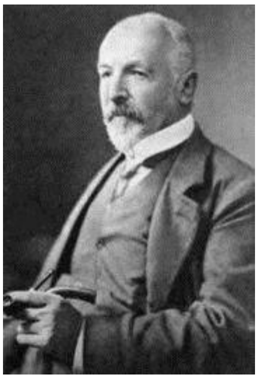
Graflar nazariyasi bo‘yicha tadqiqotlar natijalari inson faoliyatining turli sohalarida qo‘llaniladi. Ulardan ba’zilari quyidagilardir: boshqotirmalarni hal qilish; qiziqarli o‘yinlar; yo‘llar, elektr zanjirlari, integral sxemalari va boshqarish sistemalarini loyihalashtirish; avtomatlar, blok-sxemalar va komp’yuter uchun programmalarni tadqiq qilish va hokazo.

Demak, matematik mantiq, bir tomondan, formal mantiq muammolariga matematik metodlarni qo‘llash natijasida rivojlangan bo‘lsa, ikkinchi tomondan, matematikani asoslashga xizmat qiluvchi fan sifatida rivojlandi. Hozirgi zamon matematik mantiqi avtomatika, mashina matematikasi, bir tildan ikkinchi tilga avtomatik tarzda tarjima qilish, matematik lingvistika, axborot nazariyasi va umuman kibernetika bilan bog‘liqdir.

Shunday qilib, matematik mantiq va diskret matematika fani matematika asoslari, algebra, geometriya, matematik analiz, fuksional analiz, topologiya, ehtimollar nazariyasi kabi fanlarda tatbiq etilishidan tashqari kibernetika, iqtisodiyot, matematik lingvistika, psixologiya, singari fanlarda ham keng qo‘llaniladi.

**Mavzu: To’plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar.**

**To‘plamlar nazariyasining paydo bo‘lishi.** Matematikada, shu jumladan, diskret matematika, kombinatorika va graflar nazariyasida ham, turli **to‘plamlar** bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Masalan, kutubxonadagi barcha kitoblar to‘plami, to‘g‘ri burchakli uchburchaklar to‘plami, suvda hayot kechiruvchi tirik organizmlar to‘plami, natural sonlar to‘plami, koinotdagi yulduzlar to‘plami, to‘g‘ri chiziqda yotuvchi nuqtalar to‘plami va hokazo.



Georg Kantor

To‘plamlar nazariyasiga fan sifatida XIX asrning oxirida matematikani standartlashtirish bo‘yicha o‘z dasturini taklif etgan Kantor[6] tomonidan asos solingan deb hisoblansada, to‘plamlar bilan Kantordan oldinroq Bolsano[7] shug‘ullangan.

Kantor fikricha, istalgan matematik ob’yekt (shu jumladan, to‘plamning o‘zi ham) qandaydir to‘plamga tegishli bo‘lishi shart. Berilgan xossaga ega bo‘lgan barcha ob’yektlar majmuasi uchun umumiy nomni Kantor to‘plam deb tushungan edi. Umuman olganda, to‘plam tushunchasiga qat’iy ta’rif berilmaydi, chunki uni boshqa soddaroq tushuncha orqali ifodalab bo‘lmaydi. Masalan, to‘plamni matematik ibora sifatida tushuntirishda Kantor ham to‘plam so‘ziga sinonim bo‘lgan “majmua” so‘zidan foydalangan. Umuman olganda, to‘plam so‘zining lug‘aviy ma’nosiga ko‘ra, uni tashkil etuvchilarni bir joyga to‘plash (yig‘ish, jamlash) tushunilsada, matematikada to‘plam deganda bunday yig‘ish talab etilmaydi, balki bu tashkil etuvchilarni birgalikda to‘plam sifatida qarash uchun ularning barchasiga tegishli qandaydir umumiy xossaning (belgining) mavjudligi yetarlidir.

**1- ta’rif.** *To‘plamni tashkil etuvchilar shu to‘plamning* ***elementlari*** *deb ataladi.*

To‘plamlar nazariyasida to‘plamning elementlari bir-biridan farqli deb hisoblanadi, ya’ni muayyan bir **to‘plamning elementlari takrorlanmaydi**.

---

[6] Kantor (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845 (Sankt Peterburg) - 1918) – olmon matematigi.

[7] Bolsano (Bernard Bolzano, 1781-1848) – chex matematigi va faylasufi.

To‘plamni tashkil etuvchi elementlar soni chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin. Birinchi holda **chekli to‘plamga**, ikkinchi holda esa, **cheksiz to‘plamga** ega bo‘lamiz.

To‘plamlarni belgilashda, odatda, lotin yoki grek alifbosining bosh harflari, uning elementlari uchun esa alifboning kichik harflari qo‘llaniladi. To‘plamni tashkil etuvchi elementlar figurali qavslar orasiga olinib ifodalanishi mumkin. Masalan, $A$ to‘plamning $a,b,c,d,...,z$ elementlardan tuzilganligini $A=\{a,b,c,d,...,z\}$ ko‘rinishda yozish mumkin. Ko‘pincha (masalan, cheksiz to‘plam yoki to‘plamning elementlari juda ko‘p bo‘lgan holda) to‘plamni belgilashda figurali qavslar orasida, avvalo, to‘plamni tashkil etuvchi elementning umumiy belgisi yozilib, undan so‘ng “|” yoki “:” (ba’zan “/”) belgisi qo‘yiladi, keyin esa, ifodalanayotgan to‘plamning barcha elementlariga xos shartlar yoziladi. Bunda, yozuvni murakkablashtirmaslik maqsadida, ba’zi qisqartirishlarga yoki tushuntiruvchi so‘zlarning qavslardan tashqarida yozilishiga yo‘l qo‘yiladi.

Masalan, toq natural sonlar to‘plamini $B$ deb belgilasak, uni $B=\{m \mid m=2n-1\}$, bunda $n$ – natural son, yoki $B=\{m \mid m=2n-1, n\in \boldsymbol{N}\}$ ko‘rinishda[8] yozish mumkin.

**1.1.2. To‘plamlarning aksiomatik nazariyasi haqida tushunchalar.** XX asrning boshiga kelib, Kantorning matematikani standartlashtirish bo‘yicha dasturining asosi bo‘lgan va “to‘plamlarning sodda nazariyasi” deb ham ataluvchi to‘plamlar nazariyasi mukammal emasligi ma’lum bo‘ldi. To‘plamlarning sodda nazariyasini o‘rganish jarayonida Rassel[9] **paradoksga**[10] kelib qoldi. Kantorning to‘plamlar nazariyasi ichki ziddiyatga ega ekanligi **Rassel paradoksi** sifatida ifodalangan.

**Rassel paradoksi.** Faraz qilaylik, $K$ – o‘zini element sifatida o‘zida saqlamagan barcha to‘plamlar to‘plami bo‘lsin. U holda, $K$ – o‘zini element sifatida saqlaydimi? Agar bu savolga “ha” deb javob berilsa, $K$ to‘plamning

---

[8] $\boldsymbol{N}$ – natural sonlar to‘plami (Kitobdagi asosiy belgilashlarga qarang).

[9] Rassel (Bertrand Arthur William Russell, 1872-1970) – mashhur ingliz faylasufu, 1950 yilda adabiyot sohasida Nobel mukofotiga sazovar bo‘lgan.

[10] Paradóks (grekcha παράδοξος so‘zi kutilmagan, tushunarsiz, g‘ayrioddiy, taajjubli ma’nolarini beradi) – mantiqiy nuqtai nazardan formal ravishda to‘g‘ri fikrlab bir-biriga zid bo‘lgan natijalarni hosil qilish.

aniqlanishiga ko‘ra, u $K$ning elementi bo‘lmasligi kerak – ziddiyat. Agar “yo‘q” deb javob berilsa, yana $K$ to‘plamning aniqlanishiga ko‘ra, u to‘plam sifatida $K$ ning elementi bo‘lishi kerak – yana ziddiyat.

Hozirgi zamon to‘plamlar nazariyasi **aksiomalar**[11] tizimiga asoslangandir. Qandaydir aksiomalarga asoslangan nazariya **aksiomatik nazariya** deb yuritiladi[12]. To‘plamlarning aksiomatik nazariyasida bunday aksiomalar tizimi sifatida standart tizim hisoblangan Sermelo[13]-Frenkel[14] aksiomalari tizimini keltirish mumkin. To‘plamlar nazariyasida, ko‘pincha, bu tizimga **tanlash aksiomasi** deb ataluvchi aksiomani ham qo‘shib olib, **tanlash aksiomasi qatnashgan Sermelo-Frenkel aksiomalari tizimi** bilan ish ko‘riladi. Bu aksiomalar tizimidan tashqari boshqa aksiomalar tizimlaridan ham foydalaniladi. Masalan, fon Neyman[15]-Berneys[16]-Gyodel[17] tizimi.

Quyida tanlash aksiomasi qatnashgan Sermelo-Frenkel aksiomalari tizimiga kiruvchi ba’zi aksiomalarni keltiramiz.

**Hajmiylik aksiomasi.** Ikkita $A$ va $B$ to‘plamlar faqat va faqat aynan bir xil elementlardan iborat bo‘lsagina **tengdir**.

**Bo‘sh to‘plam aksiomasi.** Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam, ya’ni **bo‘sh to‘plam**, mavjud. Bo‘sh to‘plam uchun $\varnothing$ belgisi qo‘llaniladi.

**Juftlik aksiomasi.** Ixtiyoriy $A$ va $B$ to‘plamlar uchun shunday $C$ to‘plam mavjudki, bu to‘plam elementlari faqat $A$ va $B$ to‘plamlardan iboratdir (ya’ni, $A$ va $B$ to‘plamlar $C$ning yagona elementlaridir). $C$ to‘plam $\{A, B\}$ ko‘rinishda belgilanadi. Ushbu $\{A, B\}$ ifoda $A$ va $B$ning **tartiblanmagan juftligi** deb yuritiladi. Agar $A$ va $B$ to‘plamlar teng bo‘lsa, u holda $C$ bitta elementdan iboratdir.

**Tanlash aksiomasi.** Bo‘sh bo‘lmagan va o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlar majmuasidagi har bir to‘plamdan bittadan “vakil”-element tanlab, shu elementlar to‘plami $C$ni tuzish mumkin. $X$ to‘plam shu majmuaning qanday elementi

---

[11] Aksioma – isbotsiz qabul qilinadigan tasdiq.
[12] IV bobga qarang.
[13] Sermelo (Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, 1871-1953) – olmon matematigi.
[14] Frenkel (Adolf Abraham Halevi Fraenkel, **אברהם הלוי (אדולף) פרנקל**, 1891-1965) – olmon va isroil matematigi.
[15] Fon Neyman (John von Neymann, 1903 (Budapesht) – 1957) – AQSh matematigi, iqtisodchisi.
[16] Berneys (Paul Isaak Bernays, 1888 (London) – 1977) – Shveysariya matematigi.
[17] Gyodel (Kurt Gödel, 1906 (Brno) – 1978) – AQSh matematigi.

bo‘lishidan qat’iy nazar $X$ va $C$ to‘plamlar faqatgina bitta umumiy elementga ega bo‘ladi.

Albatta, bu aksiomalar (shu jumladan, tanlash aksiomasi qatnashgan Sermelo-Frenkel aksiomalari tizimining boshqa aksiomalari ham) bizga o‘z-o‘zidan oydin bo‘lgan tasdiqlarga o‘xshab tuyiladi, chunki bizning tafakkurimiz to‘plamlar majmuasini chekli deb tassavvur qilishga o‘rgangan. To‘plamlar majmuasi chekli bo‘lgan holda, masalan, tanlash aksiomasini tushunish qiyin emas. Tanlash aksiomasi cheksiz to‘plamlar uchun qo‘llansa, ba’zan, tortishuvlarga sabab bo‘luvchi juda qiziq tasdiqlar vujudga keladi. Bu fikrni tasdiqlash maqsadida Banax[18]-Tarskiy[19] paradoksi (sharning ikkilanishi) va Xausdorf[20] paradoksi mavjudligini ta’kidlaymiz.

Yuqorida keltirilgan aksiomalardan, jumladan, hajmiylik aksiomasidan, to‘plamlar bo‘yicha ko‘plab tasdiqlarni isbotlashda foydalanamiz. Hajmiylik aksiomasini boshqacha ifodalash ham mumkin. $A$ to‘plamning har bir elementi $B$ to‘plamda ham mavjud va, aksincha, $B$ to‘plamning har bir elementi $A$ to‘plamda ham mavjud bo‘lsa, u holda $A$ va $B$ to‘plamlar tengdir. $A$ va $B$ **to‘plamlarning tengligini** $A=B$ yoki $B=A$ ko‘rinishda ifodalaymiz. Aslida, $A=B$ bo‘lsa, u holda $A$ va $B$ to‘plamlar aynan bitta to‘plamning har xil belgilanishidir. Masalan, o‘nlik sanoq tizimidagi yozuvining oxirgi raqami 1, 3, 5, 7 yoki 9 raqamlaridan biri bo‘lgan natural sonlar to‘plamini $A$ bilan, birni qo‘shganda ikkiga qoldiqsiz bo‘linadigan natural sonlar to‘plamini esa $B$ bilan belgilasak, u holda $A=B$ bo‘ladi. $A=B$ yozuv to‘plamlardagi elementlarning qaysi tartibda joylashishiga bog‘liq emas. Albatta, to‘plamdagi elementlarni qaysi tartibda qo‘yish masalasi ham dolzarbdir.

$A$ va $B$ to‘plamlar teng bo‘lmasa, u holda bu holat $A\neq B$ yoki $B\neq A$ ko‘rinishda ifodalanadi.

To‘plamlar nazariyasida quvvat eng muhim tushunchalardan biri bo‘lib, u to‘plamlarni taqqoslashda katta ahamiyatga egadir. To‘plamning quvvati

---

[18] Banax (Banach Stefan, Банах Стефан, 1892-1945) – Polsha va Ukraina matematigi.
[19] Tarskiy (Tarski Alfred, 1902-1983) – Polsha va AQSh mantiqchisi va matematigi.
[20] Xausdorf (Felix Hausdorff, 1868-1942) –olmon matematigi.

tushunchasi, uning chekli yoki cheksiz bo‘lishiga qarab ta’riflanadi. Quvvat tushunchasi to‘g‘risida batafsil ma’lumotni to‘plamlar nazariyasiga bag‘ishlangan manbalardan topish mumkin. Diskret matematikada, asosan, chekli to‘plamlar bilan ish ko‘riladi. Shu sababli, to‘plamning quvvati tushunchasini faqat chekli to‘plamlar uchun keltirish bilan chegaralanamiz.

**2- ta’rif.** *Chekli to‘plamning elementlari soni shu to‘plamning* ***quvvati*** *deb ataladi.*

Berilgan $A$ to‘plamning quvvati $|A|$ ko‘rinishda belgilanadi.

**1- misol.** Ushbu to‘plamlar berilgan bo‘lsin: $A=\{a\}$, $B=\{a,b\}$,

$C=\{a,b,c,d,e\}$, $D=\{1,2,3,...,n\}$, $E=\{m \mid m=2z\}$, $F=\{2,3,5,7,...,p,...\}$, bu yerda $n$ – natural son, $z$ – butun son, $p$ – tub son. Berilgan oltita to‘plamdan to‘rttasi – $A$, $B$, $C$ va $D$ to‘plamlar chekli, $E$ va $F$ to‘plamlar esa cheksiz to‘plamlardir. Bundan tashqari, $|A|=1$, $|B|=2$, $|C|=5$ va $|D|=n$. ■

Berilgan $A$ to‘plamga $a$ element tegishliligi $a \in A$ yoki $A \ni a$ ko‘rinishda belgilanadi va “$a$ tegishli $A$” deb o‘qiladi. “Tegishli” iborasining o‘rniga, ba’zan, “qarashli” yoki “ta’luqli” iborasi ham qo‘llaniladi. Qandaydir $b$ning $A$ to‘plamga tegishli emasligi, ya’ni $b$ning $A$ to‘plam elementi bo‘lmasligi $b \overline{\in} A$, $b \notin A$ yoki $A \overline{\ni} b$ ko‘rinishda yoziladi. Masalan, $A=\{2,4,6,8,10\}$ to‘plam uchun $4 \in A$, $6 \in A$, va $10 \in A$ (bularni umumlashtirib, $4,6,10 \in A$ ko‘rinishda yozish ham mumkin), lekin $12 \notin A$ va $14 \notin A$ (ya’ni, $12,14 \notin A$).

Tabiiyki, turli to‘plamlar uchun umumiy elementlar mavjud bo‘lishi mumkin. Masalan, $A=\{2,4,6,8,10\}$ va $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ to‘plamlarda $2,4,6,8$ elementlar ikkala to‘plamda ham mavjuddir.

**3- ta’rif.** *Agar $B$ to‘plamning har bir elementi $A$ to‘plamda ham mavjud bo‘lsa, u holda $B$ to‘plam $A$ to‘plamning* ***qism to‘plami*** *deb ataladi.*

$B$ to‘plam $A$ to‘plamning qism to‘plami ekanligi $B \subseteq A$ yoki $A \supseteq B$ ko‘rinishda belgilanadi. Tabiiyki, bu belgilashlar $A$ va $B$ to‘plamlarning teng bo‘lgan holini ham nazarda tutadi. $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo‘lishidan $A=B$ kelib chiqadi. Bu tenglik to‘plamning o‘zi o‘zining qism to‘plami bo‘la olishi mumkinligini ko‘rsatadi, ya’ni $A \subseteq A$ (yoki $A \supseteq A$) ko‘rinishdagi yozuv ham ma’noga egadir. Har qanday to‘plamning o‘zi o‘zining qism to‘plami bo‘la olishi to‘plamlarning **refleksivlik** xossasi deb yuritiladi.

**4- ta’rif.** *$B$ to‘plamning hamma elementlari $A$ to‘plamda bor bo‘lib, shu bilan birga $A$ to‘plamda $B$ga kirmagan element(lar) ham topilsa, u holda $B$ to‘plam $A$ to‘plamning* ***xos qism to‘plami*** *deb ataladi.*

$B$ to‘plam $A$ to‘plamning xos qism to‘plami bo‘lishi $B \subset A$ yoki $A \supset B$ ko‘rinishda belgilanadi.

Ta’kidlash kerakki, $A \subset A$ yoki $A \supset A$ deb yozish mumkin emas[21]. Shuning uchun, bu holatni ifodalash maqsadida, har qanday to‘plam “o‘zi o‘zining xosmas qismi” degan iboradan foydalaniladi.

To‘plamlar nazariyasida bo‘sh to‘plam har qanday bo‘sh bo‘lmagan $A$ to‘plamning qism to‘plami deb qaraladi, ya’ni $\varnothing \subset A$. Tabiiyki, bo‘sh to‘plamning quvvati nolga teng, ammo bo‘sh to‘plamni yagona element sifatida saqlovchi to‘plamning quvvati birga tengdir, ya’ni $|\varnothing| = 0$, lekin $|\{\varnothing\}| = 1$.

Qandaydir $a$ tasdiqning o‘rinli bo‘lishidan boshqa $b$ tasdiqning o‘rinli bo‘lishi kelib chiqsa, bu holat $a \Rightarrow b$ deb belgilanadi. Masalan, $(A \subseteq B \text{ va } B \subseteq A) \Rightarrow A = B$.

**5- ta’rif.** *Agar $a$ va $b$ tasdiqlar uchun $a \Rightarrow b$ va $b \Rightarrow a$ bo‘lsa, u holda bu tasdiqlar* ***o‘zaro ekvivalent tasdiqlar*** *deb ataladi.*

$a$ va $b$ tasdiqlarning o‘zaro ekvivalentligi $a \Leftrightarrow b$ deb belgilanadi (III bobga qarang).

**2- misol.** $\boldsymbol{N}$ natural sonlar to‘plami $\boldsymbol{R}$ haqiqiy sonlar to‘plamining qism to‘plamini tashkil etadi: $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{R}$. ■

**3- misol.** Nukus shahridagi barcha talabalar to‘plami O‘zbekistondagi barcha talabalar to‘plamining qism to‘plamidir. ■

**4- misol.** O‘nli sanoq tizimidagi yozuvining oxirgi raqami 0, 2, 4, 6 yoki 8 raqamlaridan biri bo‘lgan natural sonlar to‘plami ikkiga qoldiqsiz bo‘linadigan natural sonlar to‘plamining qism to‘plamidir. ■

---

[21] Qiyoslang: $a$ haqiqiy son bo‘lsa, u holda $a < a$ va $a > a$ yozuvlar not’g‘ri.

**5- misol.** $A=\{a,b,c,d,e,\}$ to‘plam uchun $B=\{a\}$, $C=\{a,b\}$ to‘plamlarning har biri xos qism to‘plamdir.

**Mavzu: Binar munosabatlar. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to’plamlar**

Ko‘pgina amaliy masalalarni tadqiq qilishda turli diskret (elemenlari soni chekli bo‘lgan) to‘plamlarga duch kelamiz. Masalan, biror predmetlar to‘plami, obyektlar to‘plami, talabalar to‘plami va hokazo. To‘plam tushunchasi matematikada tayanch tushunchalardan bo‘lib, unga ta'rif berilmaydi. “*To‘plam*” so‘zining sinonimlari sifatida “*obyektlar jamlanmasi*” yoki “*elementlar majmuasi*” so‘z birikmalaridan foydalaniladi.

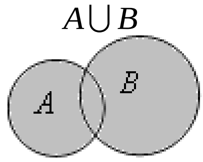
To‘plamlar nazariyasi hozirgi zamon matematikasida, jumladan, kombinatorika va graflar nazariyasida, juda muhim o‘ringa ega. Biz uning ayrim xossalarini o‘rganish bilan cheklanamiz.

To‘plamlar odatda, lotin alifbosining bosh harflari $A, B, \ldots$ ularning elementlarini esa kichik - $a, b, \ldots$ harflar bilan belgilanadi. Biz asosan quyidagi belgilashlardan foydalanamiz.

Matematik simvollarning ma'nolariga to‘xtalamiz. $a \in A$ belgisi “$a$ *element* $A$ *to‘plamga tegishli*” ekanligini bildiradi. Bu tasdiqning inkori $a \notin A$ shaklda yoziladi va “$a$ *element* $A$ *to‘plamga tegishli emas*” deb o‘qiladi. $A \subset B$ belgi “$A$ *to‘plamning barcha elementlari* $B$ *to‘plamga ham tegishli*” ekanligini bildiradi. Bu holda $A$ to‘plam $B$ to‘plamning *qismi* deyiladi. Agar $A$ va $B$ to‘plamlar bir xil elementlardan tashkil topgan bo‘lsa, u holda ular *teng to‘plamlar* deyiladi va $A = B$ shaklda yoziladi. Ko‘pincha, to‘plamlarning tengligini isbotlashda $A \subset B$ va $B \subset A$ munosabatlarning bajarilishi ko‘rsatiladi.

**To‘plamlarning birlashmasi.** Har qanday ikkita to‘plamning barcha elementlaridan, ularni takrorlamasdan, tuzilgan to‘plamga shu **to‘plamlarning birlashmasi** (yoki **yig‘indisi**) deb aytiladi.

$A \cup B$




1.1- shakl

Bu ta’riflardan ko‘rinib turibdiki, to‘plamlarning umumiy elementlari shu to‘plamlarning birlashmasiga faqat bir martadan kiritiladi. Berilgan to‘plamlarning birlashmasidagi har qanday element shu to‘plamlarning hech bo‘lmaganda bittasiga tegishlidir. $A$ va $B$ to‘plamlarning birlashmasi $A\bigcup B$ kabi belgilanadi. Bu yerda “$A$ va $B$ to‘plamlarga birlashma amalini qo‘llab (yoki $A$ va $B$ to‘plamlar ustida birlashma amali bajarilib), $A\bigcup B$ to‘plam hosil qilindi” deyish mumkin. 1.1-shaklda $A$ va $B$ to‘plamlar doiralar ko‘rinishida, $A\bigcup B$ to‘plam esa bo‘yab tasvirlangan.

Yuqoridagi ta’rifni quyidagicha ham keltirish mumkin (ushbu qo‘llanmada $\wedge$ hamda $\vee$ belgilari “va” hamda “yoki” so‘zlariga mos keladi).

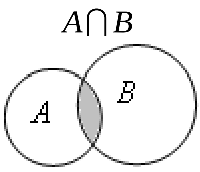
$A\bigcup B=\{x:\ x\in A\vee x\in B\}$

to‘plam $A$ va $B$ to‘plamlarning *yig‘indisi* yoki *birlashmasi* deyiladi.

**1.1-misol.** $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c\}$ va $C=\{e,f,k\}$ bo‘lsin. U holda $E=A\bigcup B=\{a,b,c\}$, $E\bigcup C=\{a,b,c,e,f,k\}$, $C\bigcup B=\{a,b,c,e,f,k\}$, $A\bigcup C=\{a,b,e,f,k\}$ bo‘ladi.

**To‘plamlarning kesishmasi.** Har qanday ikkita to‘plamning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan to‘plamga **to‘plamlarning kesishmasi** (yoki **ko‘paytmasi**) deyiladi.

Berilgan $A$ va $B$ to‘plamlarning kesishmasi $A\bigcap B$ kabi belgilanadi. Bu yerda “$A$ va $B$ to‘plamlarga kesishma amalini qo‘llab, $A\bigcap B$ to‘plam hosil qilindi” deyish mumkin.



1.2- shakl

To‘plamlar kesishmasini quyidagicha izohlash mumkin

$A\bigcap B=\{x:\ x\in A\wedge x\in B\}$

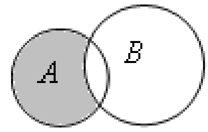
to‘plam $A$ va $B$ to‘plamlarning *kesishmasi* deyiladi.

1.2-shaklda $A$ va $B$ to‘plamlar doiralar ko‘rinishida, $A\bigcap B$ to‘plam esa bo‘yab tasvirlangan. To‘plamlar ustidagi amallarning yuqorida ta’kidlangan o‘ziga xos xususiyatlari to‘plamlar ko‘paytmasini (kesishmasini) topishda ham namoyon bo‘ladi. Masalan, $A\subseteq B$ bo‘lsa, u holda $A\bigcap B=A$ va $B\bigcap A=A$ bo‘ladi.

Bitta ham umumiy elementga ega bo‘lmagan ikkita to‘plamlarning kesishmasi bo‘sh to‘plam bo‘lishi tabiiydir. Kesishmasi bo‘sh bo‘lgan to‘plamlar **o‘zaro kesishmaydigan**, kesishmasi bo‘sh bo‘lmagan to‘plamlar esa **o‘zaro kesishadigan to‘plamlar** deb ataladi.

**1.2-misol.** $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $C=\{e,f,k\}$ bo‘lsa, u holda $D=A\cap B=\{a,b,c\}$, $D\cap C=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$, $D\cap B=\{a,b,c\}$ bo‘ladi.

**To‘plamlarning ayirmasi.** Ixtiyoriy $A$ va $B$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. $A$ to‘plamning $B$ to‘plamda bo‘lmagan barcha elementlaridan tuziladigan to‘plamni hosil qilish $A$ **to‘plamdan** $B$ **to‘plamni ayirish** deb, tuzilgan to‘plam esa, shu $A$ va $B$ **to‘plamlarning ayirmasi** deb ataladi.



1.3- shakl

$A$ to‘plamdan $B$ to‘plamni ayirish natijasida hosil bo‘lgan to‘plam, ya’ni $A$ va $B$ to‘plamlarning ayirmasi $A\setminus B$ yoki $A-B$ ko‘rinishida belgilanadi. Bu yerda “$A$ to‘plamdan $B$ to‘plamni ayirish amalini qo‘llab, $A\setminus B$ to‘plam hosil qilindi” deyish mumkin.

To‘plamlar ayirmasini quyidagicha ham ta’riflash mumkin $A$ va $B$ to‘plamlarning *ayirmasi* deb

$$A\setminus B=\{x:\ x\in A\wedge x\notin B\}$$

to‘plamga aytiladi.

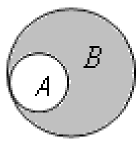
1.3-shaklda $A$ va $B$ to‘plamlar doiralar ko‘rinishida, $A\setminus B$ to‘plam esa bo‘yab tasvirlangan.

Ixtiyoriy $A$ va $B$ to‘plamlar uchun $A\cap B=\varnothing$ bo‘lsa, u holda $A\setminus B=\varnothing$ va $B\setminus A=\varnothing$ bo‘lishi ta’rifdan bevosita kelib chiqadi.

**1.3-misol.** 1.1-misoldagidek, $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c\}$, $C=\{e,f,k\}$ bo‘lsa, u holda $A\setminus B=\varnothing$, $B\setminus A=\{c\}$, $B\setminus C=\varnothing$ bo‘ladi.

**To‘ldiruvchi to‘plam.** Faraz qilaylik, $A$ va $B$ to‘plamlar berilgan va $A\subseteq B$ bo‘lsin. Bu holda $B$ to‘plamning $A$ to‘plamga kirmagan barcha elementlaridan tashkil topgan $B\setminus A$ to‘plam $A$ **to‘plamning** $B$ **to‘plamgacha to‘ldiruvchi to‘plami** deb ataladi.

$A$ to‘plamning $B$ to‘plamgacha to‘ldiruvchi to‘plami, odatda, $\overline{A}_B$ ko‘rinishda belgilanadi. Bu yerda “$\overline{A}_B$ to‘plam $A$ to‘plamni $B$ to‘plamgacha to‘ldiradi” yoki “$A$ to‘plamni $B$ to‘plamgacha to‘ldirish amalini qo‘llab, $\overline{A}_B$ to‘plam hosil qilindi” deyish mumkin. 1.4-shaklda $A$ to‘plam kichik doira, $B$ to‘plam katta doira ko‘rinishida, $\overline{A}_B$ to‘plam esa bo‘yab tasvirlangan.

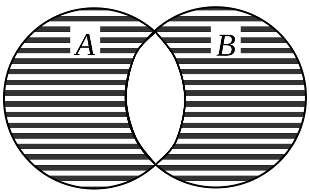


1.4- shakl

To‘plamlar ustidagi yuqorida keltirilgan birlashma, kesishma va to‘ldiruvchi to‘plam tushunchalari ta’riflarini bevosita qo‘llab, $A\cup\overline{A}_B=B$, $A\cap\overline{A}_B=\varnothing$, $A\setminus\overline{A}_B=A$ va $\overline{A}_B\setminus A=\overline{A}_B$ tengliklarni hosil qilish qiyin emas.

**1.4-misol.** Barcha juft sonlar to‘plamini $A=\{2,4,...,2n,...\}$ $(n\in\boldsymbol{N})$ deb belgilasak, $A$ to‘plamni $\boldsymbol{N}$ to‘plamgacha to‘ldirish amalini qo‘llab $\overline{A}_{\boldsymbol{N}}=\{1,3,...,2n-1,...\}$ to‘plamni, ya’ni barcha toq sonlar to‘plamini hosil qilamiz. Demak, barcha toq sonlar to‘plami barcha juft sonlar to‘plamini natural sonlar to‘plamigacha to‘ldiradi. Xuddi shunga o‘xshash, barcha toq sonlar to‘plamini natural sonlar to‘plamigacha to‘ldirish amalini qo‘llab, barcha juft sonlar to‘plamini hosil qilish mumkin.

Ba'zan, $A$ va $B$ to‘plamlarning *simmetrik ayirmasi* tushunchasini kiritish maqsadga muvofiq bo‘ladi. $A\setminus B$ va $B\setminus A$ to‘plamlarning birlashmasidan iborat to‘plamga $A$ va $B$ to‘plamlarning *simmetrik ayirmasi* deyiladi va u odatda $A\Delta B$ ko‘rinishda belgilanadi, ya’ni $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.



1.5-shakl

Bu yerda “ $A\Delta B$ to‘plam $A$ to‘plamdan $B$ to‘plamni ayirib va $B$ to‘plamdan $A$ to‘plamni ayirib so‘ngra hosil bo‘lgan to‘plamlar birlashtirildi” deyish mumkin. 1.5-shaklda $A$ va $B$ to‘plamlarning simmetrik ayirmasi to‘plami $A\Delta B$ to‘plam esa bo‘yab tasvirlangan.

**1.5-misol.** 1.1-misolda qaralgan $A$ va $B$ to‘plamlarning simmetrik ayirmasi $A\Delta B=\{c\}$ to‘plamdan iborat bo‘ladi.

**To‘plam buleani tushunchasi.** To‘plamlar nazariyasida bulean tushunchasi kiritilgan bo‘lib, u muhim tushunchalardan biri hisoblanadi. Berilgan $A$ to‘plamning barcha qism to‘plamlaridan tuzilgan to‘plam $A$ **to‘plamning buleani** ($A$ **to‘plam uchun bulean**) deb ataladi.

$A$ to‘plamning buleani $2^A$ ko‘rinishda belgilanadi.

**1.6-misol.** To‘rtta elementga ega $A=\{a,b,c,d\}$ to‘plam uchun $2^A$ bulean o‘n oltita element-to‘plamlardan iborat bo‘ladi:

$$2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},$$
$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}.$$

Ravshanki, $|A|=4$ va $\left|2^A\right|=16$.

**Kortej tushunchasi.** Matemetikada, jumladan, kombinatorika va graflar nazariyasida, to‘plam tushunchasi bilan bir qatorda kortej tushunchasi alohida o‘rin tutadi. Turli xossalarga ega bo‘lgan obyektlar bilan ish ko‘rganda kortej tushunchasidan foydalanish mumkin. Kortej tushunchasi yordamida kombinatorikaning ko‘plab tushunchalari tabiiy ravishda oson anglanadi. Kortej tushunchasini o‘rganishdan oldin to‘plamning elementlari takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz.

Ixtiyoriy $A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamlarning ixtiyoriy biridan, masalan, $A_{i_1}$ to‘plamdan qandaydir $a_{i_1}$ elementni, $A_{i_1}$ to‘plamdan boshqa istalgan $A_{i_2}$ to‘plamning qandaydir $a_{i_2}$ elementini va hokazo, oxirgi $A_{i_n}$ to‘plamdan qandaydir $a_{i_n}$ elementni olamiz. Bu elementlarni ularning berilgan to‘plamlardan olinishi tartibida joylashtirib $< a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n} >$ tuzilmaga ega bo‘lamiz. Bu tuzilmada har bir element o‘zining qat’iy joylashish o‘rniga ega. Shunday usul bilan boshqa tuzilmalarni ham hosil qilish mumkin. Bu tuzilmalarning har biri **elementar kortej** (qisqacha, **kortej**) deb ataladi. Kortejni boshqa usullar yordamida ham tashkil qilish mumkin. Masalan, faqat bitta to‘plam elementlaridan (hattoki, bu to‘plam yagona elementli bo‘lsa ham) foydalanib, tarkibida elementlari ko‘p bo‘lgan kortej tuzish mumkin. Kortejlarni belgilashda, ko‘pincha, lotin yoki grek alifbosining bosh harflaridan foydalaniladi.

$A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlar ixtiyoriy bo‘lgani uchun bu to‘plamlar umumiy elementlarga ega bo‘lishi ehtimoldan holi emas. Demak, umuman olganda, $K = < a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n} >$ kortej tarkibidagi **elementlar takrorlanishi mumkin**. Berilgan $K$ kortejga $a$ element tegishliligi $a \in K$ yoki $K \ni a$ ko‘rinishda belgilanadi.

Ba’zi hollarda kortej iborasining o‘rniga **vektor** yoki, uning **uzunligini** e’tiborga olgan holda, **juftlik** (uzunligi ikkiga teng kortej), **uchlik**, **to‘rtlik** va hokazo $n$**-lik** (uzunligi $n$ ga teng kortej) iboralari ham ishlatiladi. Uzunligi $n$ bo‘lgan kortej $n$ **o‘rinli kortej** deb ham ataladi. Kortejni tashkil etuvchi elementlar soni, ya’ni kortejning uzunligi shu **kortejning quvvati** deb ataladi. Berilgan $K$ kortejning uzunligi (quvvati) $|K|$ ko‘rinishda belgilanadi.

Kortej tarkibidagi elementlar takrorlanishi mumkinligidan, ularning kortejda tutgan **o‘rinlari** muhim hisoblanadi. Shuning uchun kortejning muayyan elementi nazarda tutilganda, uning o‘rnini aniqlovchi raqam hisobga olinishi kerak.

Uzunliklari teng bo‘lgan ikkita kortejning mos o‘rinlaridagi elementlari aynan bir xil bo‘lsagina bu **kortejlar teng** deb ataladi. Kortejni tashkil qiluvchi elementlar, uning **komponentalari** yoki **koordinatalari** deb ataladi. Ba’zan, kortejni tashkil qiluvchi elementlar uchun, qisqacha qilib, **kortejning elementlari** iborasi ham qo‘llaniladi.

Tabiiyki, uzunliklari teng bo‘lmagan kortejlar teng emas. Kortejlar teng bo‘lishi uchun ularning mos komponentalari o‘zaro bir xil bo‘lishi shart. Masalan, to‘rt komponentali $<1,\{a,b\},c,\{2,5,4\}>$ va $<1,\{b,a\},c,\{5,2,4\}>$ kortejlar o‘zaro tengdir, chunki ularning toq o‘rinlaridagi komponentalari aynan bir xil va juft o‘rinlarida turgan komponentalari esa to‘plamlar sifatida bir-biriga teng bo‘lgani uchun aynan bir xildir.

**1.7-misol.** $X=\{a,b\}$, $Y=\{b,c,d\}$ va $Z=\{e\}$ to‘plamlar uchun ularning berilish tartibiga ($X,Y,Z$) mos keluvchi hamda har bir to‘plamdan faqat bittadan element olish sharti bilan tuzilgan barcha elementar kortejlar quyidagilardir: $<a,b,e>$, $<a,c,e>$, $<a,d,e>$, $<b,b,e>$, $<b,c,e>$, $<b,d,e>$.

**To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi.** Yuqorida turli tabiatli to‘plamlar yordamida aniqlanuvchi kortej tushunchasi bilan tanishdik. O‘z navbatida bu tushunchadan foydalanib to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi tushunchasini kiritish mumkin.

Tartiblangan $A_1,A_2,...,A_n$ to‘plamlar elementlaridan tuzilgan $n$ o‘rinli barcha kortejlar to‘plamiga shu **to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi** (qisqacha, **Dekart ko‘paytmasi**) deb ataladi.

Ba’zan to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi iborasi o‘rniga **to‘plamlarning to‘g‘ri ko‘paytmasi** iborasidan ham foydalaniladi. Tartiblangan $A_1,A_2,...,A_n$

to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ yoki $\prod_{i=1}^{n} A_i$ ko‘rinishda belgilanadi, ya’ni

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{< a_1, a_2, ..., a_n >| \, a_i \in A_i, i = \overline{1,n}\}.$$

To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi tushunchasining aniqlanishida bu ko‘paytmada qatnashuvchi to‘plamlarning soni ham muhim hisoblanadi. Zarur bo‘lganda, $n$ ta to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi iborasi o‘rniga $n$ **o‘rinli Dekart ko‘paytmasi** iborasi ham qo‘llaniladi.

Tabiiyki, agar $A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlarning birortasi bo‘sh to‘plam bo‘lsa, u holda ulardan foydalanib birorta ham kortej tuzish imkoniyati yo‘q. Demak, tarkibida hech bo‘lmasa bitta bo‘sh to‘plam qatnashgan $A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi ham **bo‘sh** to‘plamdir, ya’ni $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \varnothing$.

Dekart ko‘paytmasidan to‘plamlar bilan bog‘liq murakkab tuzilmalarni hosil qilishda va ularda ko‘paytma tushunchasini aniqlashda foydalaniladi. Ammo bunday hollarda aniqlangan ko‘paytirish amali Dekart ko‘paytmasining xossalaridan farqli xossalarga ham ega bo‘lishi mumkin. Jumladan, tuzilmalardan birortasi bo‘sh to‘plam bo‘lsada, ularning ko‘paytmasi bo‘sh bo‘lmagan hollar bor.

To‘plamlarning to‘g‘ri ko‘paytmasi tushunchasidan foydalanib, **to‘plamning darajasi** tushunchasi $A^n = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n \text{ marta}}$ formula asosida kiritiladi. Masalan, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$. Umuman olganda, $A^n = A \times A^{n-1}$.

$n$ o‘rinli $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ va $B = B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$ Dekart ko‘paytmalari berilgan bo‘lsin. Agar $A_1 \subseteq B_1$, $A_2 \subseteq B_2, \dots, A_n \subseteq B_n$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, u holda $A$ Dekart ko‘paytmasi $B$ **Dekart ko‘paytmasining qismi** deyiladi va $A \subseteq B$ kabi belgilanadi.

## Mavzu: Mantiqiy bog’lovchilar. Chinlilik jadvali. Formula, qism formula

Matematik mantiqning **mulohazalar algebrasi** deb atalgan ushbu bo‘limida asosiy tekshirish ob’yektlari bo‘lib gaplar xizmat qiladi. Mulohazalar algebrasida ma’nosiga ko‘ra chin (rost, haqqoniy, to‘g‘ri) yoki yolg‘on (noto‘g‘ri) bo‘lishi mumkin bo‘lgan gaplar bilangina shug‘ullaniladi. Mulohazalar algebrasi **mantiq algebrasi** deb ham yuritiladi.

**1- misol.** “Toshkent – O‘zbekistonning poytaxti.”, “Oy yer atrofida aylanadi.” va “Agar fuqaro oily ta’lim muassasalaridan birini muvaffaqiyatli tamomlasa, u holda unga oily ma’lumotliligini tasdiqlovch diplom beriladi.” degan gaplarning har biri chin, ammo “Yer oydan kichik.”, “$3>5$.” va “Ot, qo‘y, echki, it va mushuk uy hayvonlari emas.” degan gaplarning har biri esa yolg‘ondir. ■

Shuni ham ta’kidlash kerakki, ko‘pchilik gaplarning chin yoki yolg‘onligini darhol aniqlash qiyin. Masalan, “Bugungi tun kechagidan qorong‘iroq.” degan gap qaysi holda, qachon va qaysi joyda aytilishiga (tasdiqlanishiga) qarab chin ham, yolg‘on ham bo‘lishi mumkin.

Albatta, chin yoki yolg‘onligini aniqlash imkoniyati bo‘lmagan gaplar ham bor. Masalan, “Oldimga kel!”, “Uyda bo‘ldingmi?”, “Yangi yil bilan tabriklayman!”, “Agar oldin bilganimda…” degan gaplar shunday gaplar jumlasira kiradi.

Bundan keyin, chin qiymatni, qisqacha, ch, yolg‘on qiymatni esa, yo bilan belgilaymiz. Yozuvni ixchamlashtirish maqsadida chin qiymat 1, yolg‘on qiymat esa, 0 bilan ham belgilanishi mumkin. Bunday belgilash mantiqiy qiymatni sonli qiymat bilan, aniqrog‘i, sonning ikkilik sanoq sistemasidagi ifodalanishi bilan aloqasini o‘rnatishda yordam beradi.

**1- ta’rif.** *Ma’nosiga ko‘ra faqat chin yoki yolg‘on qiymat qabul qila oladigan darak gap* ***mulohaza*** *deb ataladi.*

Bu ta‘rifga ko‘ra har bir mulohaza muayyan holatda chin yoki yolg‘on bo‘lishi mumkin. Mulohazalarni belgilash uchun, asosan, lotin alifbosining kichik harflari (ba’zan indekslari bilan) ishlatiladi:

$$a, b, c, ..., u, v, ..., x, y, z \, .$$

Shunday mulohazalar borki, ular mumkin bo‘lgan barcha hollarda (vaziyatlarda) ch (yoki yo) qiymat qabul qiladi. Bunday mulohazalar **absolyut chin (yolg‘on)** mulohazalar deb ataladi.

Mulohazalar algebrasida, odatda, muayyan o‘zgarmas mulohazalar (ch, yo) bilangina emas, balki istalgan mulohazalar bilan ham shug‘ullaniladi. Bu esa **o‘zgaruvchi mulohaza** tushunchasiga olib keladi. Agar berilgan mulohazani $x$ deb belgilasak, u holda $x$ ch yoki yo qiymat qabul qiladigan o‘zgaruvchi mulohazani ifodalaydi.

Faqat bitta tasdiqni ifodalovchi mulohazani **elementar** (**oddiy**) mulohaza deb hisoblaymiz. Elementar mulohazalar qatoriga ch, yo o‘zgarmas mulohazalar ham kiradi. O‘zbek tilidagi “emas”, “yoki”, “va”, “agar ... bo‘lsa, u holda … bo‘ladi”, “shunda va faqat shundagina ...., qachonki ....” so‘zlar (bog‘lovchilar, so‘zlar majmuasi) vositasida mulohazalar ustidagi (orasidagi) **mantiqiy amallar** deb yuritiluvchi amallar ifodalanishi mumkin. Bu amallar yordamida elementar mulohazalardan **murakkab** mulohaza tuziladi (quriladi, yasaladi). 1- misolda bayon etilgan 1-, 2-, 4- va 5- mulohazalar elementar mulohazalarga, 3- va 6- mulohazalar esa murakkab mulohazalarga misol bo‘la oladi.

Mulohazalar ustidagi mantiqiy amallar matematik mantiqning elementar qismi hisoblangan **mulohazalar mantiqi**, ya’ni mulohazalar algebrasi qismida o‘rganiladi. Har ikkala atama (“mulohazalar mantiqi” va “mulohazalar algebrasi”) sinonim sifatida ishlatiladi, chunki ular mantiqning muayyan qismini ikki nuqtai nazardan ifodalaydi: u ham mantiqdir (o‘z predmetiga ko‘ra), ham algebradir (o‘z usuliga ko‘ra). Mulohazalar algebrasidagi mantiqiy amallar o‘ziga xos xususiyatlarga ega, chunki ularning tarkibiga kiruvchi mulohaza(lar) faqat ikki (ch, yo) qiymatdan birini qabul qilishi mumkin.

Mantiqiy amallarni o‘rganishdan oldin bu amallarda qatnashuvchi o‘zgaruvchilar qiymatlari kombinatsiyalari bilan tanishamiz. Berilgan bitta o‘zgaruvchi elementar mulohaza uchun ikkita ($C_1^0 + C_1^1 = 2^1 = 2$) mumkin bo‘lgan bir-biridan farqli **qiymatlar satrlari** bor:

yo,
ch.

Berilgan ikkita o‘zgaruvchi elementar mulohazalar uchun barcha mumkin bo‘lgan bir-biridan farqli qiymatlar satrlari kombinatsiyalari to‘rtta ( $C_2^0+C_2^1+C_2^2=2^2=4$ ):

$$\begin{array}{l} yo, yo, \\ yo, ch, \\ ch, yo, \\ ch, ch. \end{array}$$

O‘zgaruvchi elementar mulohazalar soni 3, 4 va hokazo bo‘lgan hollarda ham yuqoridagidek mumkin bo‘lgan qiymatlar satrlari kombinatsiyalarini yozish mumkin. Umuman olganda, berilgan $n$ ta o‘zgaruvchi elementar mulohazalar uchun barcha mumkin bo‘lgan bir-biridan farqli qiymatlar satrlari kombinatsiyalari soni $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$ bo‘lishini osonlik bilan isbotlash mumkin (II bobdagi 3- paragrafga qarang). Agar biror amal tarkibiga kiruvchi operandlar (parametrlar, o‘zgaruvchi va hokazo) soni birga teng bo‘lsa, u holda bunday amal **unar** amal deb, operandlar soni ikkiga teng bo‘lganda esa, **binar** amal deb yuritiladi[22].

$$\begin{array}{l} yo, yo, yo, ..., yo, yo, \\ yo, yo, yo, ..., yo, ch, \\ yo, yo, yo, ..., ch, \ yo, \\ yo, yo, yo, ..., ch, \ ch, \\ .............................. \\ ch, yo, yo, ..., yo, yo, \\ .............................. \\ ch, ch, ch, ..., ch, ch. \end{array}$$

Matematik mantiqning ko‘pchilik bo‘limlarida **chinlik jadvali** deb ataluvchi jadvallardan foydalanish qulay hisoblanadi. Quyida unar va binar mantiqiy amallarning chinlik jadvallari keltiriladi. Berilgan bitta $x$ o‘zgaruvchi elementar mulohaza uchun bir-biridan farqli qiymatlar satrlari ikkita bo‘lgani sababli jami $2^{2^1}=2^2=4$ ta[23] turli unar mantiqiy amallar bor. Barcha unar mantiqiy amallar ( $u_i=u_i(x),\ i=\overline{0,3}$ ) natijalari 1- jadvalda (chinlik jadvalida) keltirilgan.

1- jadval

Unar mantiqiy amallar

[22] Amallarni tarkibiga kiruvchi operandlar soniga ko‘ra bunday nomlashni davom ettirish mumkin. Masalan, tarkibidagi operandlari soni 3ga teng amal **ternar** amal deb ataladi.

[23] Darajaga ko‘tarish amallari yuqoridan pastga qarab ketma-ket bajariladi.

| $x$ | $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Berilgan ikkita $x$ va $y$ o‘zgaruvchi elementar mulohazalar uchun jami to‘rtta bir-biridan farqli qiymatlar satrlari kombinatsiyalari tuzish mumkin bo‘lgani sababli barcha turli binar mantiqiy amallar soni $2^{2^2} = 2^4 = 16$ ga teng. Mumkin bo‘lgan barcha turli binar mantiqiy amallar ($b_i = b_i(x, y),\ i = \overline{0, 15}$) natijalari 2- jadvalda (chinlik jadvalida) keltirilgan.

Mantiqiy amallarni yuqoridagi usul bilan o‘rganishni davom ettirib, berilgan uchta $x$, $y$, $z$ o‘zgaruvchi elementar mulohazalar uchun hammasi bo‘lib sakkizta ($2^3 = 8$) bir-biridan farqli qiymatlar satrlari kombinatsiyalari tuzish mumkinligini va, shu sababli, turli $2^{2^3} = 2^8 = 256$ ta ternar mantiqiy amallar borligini ta’kidlaymiz. Tarkibidagi o‘zgaruvchi elementar mulohazalari to‘rtta bo‘lgan turli mantiqiy amallar esa $2^{2^4} = 2^{16} = 65536$ ta.

**Mulohazalar ustida mantiqiy amallar.**

**Asosiy mantiqiy amallar** beshta bo‘lib, ulardan biri unar, to‘rttasi esa binar

2- jadval

Binar mantiqiy amallar

| $x$ | $y$ | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | $b_6$ | $b_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | | | | | | | | | |
| $x$ | $y$ | $b_8$ | $b_9$ | $b_{10}$ | $b_{11}$ | $b_{12}$ | $b_{13}$ | $b_{14}$ | $b_{15}$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

amaldir. Ular quyida bayon etilgan.

**1. Inkor amali.** Inkor amali mulohazalar mantiqining eng sodda amallaridan biri bo‘lib, u unar amaldir, ya’ni inkor amali bitta elementar mulohazaga nisbatan qo‘llaniladi.

**2- ta’rif.** *Berilgan $x$ elementar mulohaza chin bo‘lganda yo qiymat qabul qiluvchi va, aksincha, $x$ yolg‘on bo‘lganda ch qiymat qabul qiluvchi murakkab mulohaza $x$ mulohazaning* ***inkori*** *deb ataladi.*

“Berilgan mulohazaning inkori unga **inkor amalini** qo‘llab hosil qilindi” deb aytish mumkin. Inkor amali 1- jadvalda ifodalangan $u_2$ amalidan iborat bo‘lub, unga o‘zbek tilidagi “emas” sifatdoshi mos keladi. Berilgan $x$ mulohazaning inkori $\bar{x}$ kabi belgilanadi. $\bar{x}$ mulohaza “$x$ emas” deb o‘qiladi. Inkor amalini belgilashda “$\neg$” belgi ham qo‘llanilishi mumkin. Bu holda $x$ mulohazaning inkori $\neg x$ shaklda yoziladi. $x$ mulohazaning $\bar{x}$ inkori uchun chinlik jadvali 3- jadval bo‘ladi (1- jadvalning $x$ va $u_2$ ustunlariga qarang). 3- jadvalni inkor amalining ekvivalent ta’rifi sifatida ham qabul qilish mumkin.

**2- misol.** “Bugun havo sovuq.” degan elementar mulohazasi $x$ bilan belgilangan bo‘lsa, uning inkori $\bar{x}$ “Bugun havo sovuq emas.” ko‘rinishdagi murakkab mulohazadan iboratdir. ■

3- jadval

| $x$ | $\bar{x}$ |
|---|---|
| yo | ch |
| ch | yo |

**2. Kon’yunksiya[24] (mantiqiy ko‘paytma[25]) amali.** Endi ikkita mulohazaga nisbatan qo‘llanilishi mumkin bo‘lgan binar amallardan biri hisoblangan kon’yunksiya (mantiqiy ko‘paytma) amalini o‘rganamiz.

**3- ta’rif.** *Berilgan $x$ va $y$ elementar mulohazalar chin bo‘lgandagina ch qiymat qabul qilib, qolgan hollarda esa, yo qiymat qabul qiluvchi murakkab mulohaza $x$ va $y$ mulohazalarning* ***kon’yunksiyasi*** *deb ataladi.*

“Berilgan mulohazalarning kon’yunksiyasi bu mulohazalarga **kon’yunksiya amalini** qo‘llab hosil qilindi” deb aytish mumkin. Kon’yunksiya amali 2- jadvalda

---

[24] Lotincha “conjunctio” so‘zi o‘zbek tilida “bog‘layman” ma’nosini beradi.
[25] Ushbu bobning 4- paragrafiga qarang.

ifodalangan $b_1$ amali bo‘lub, unga o‘zbek tilidagi “va” bog‘lovchisi mos keladi. Berilgan $x$ va $y$ elementar mulohazalar ustida bajariladigan kon’yunksiya (mantiqiy ko‘paytma) amalini belgilashda “$\wedge$” yoki “&” belgi qo‘llaniladi, ya’ni bu amal natijasida hosil bo‘lgan murakkab mulohaza $x \wedge y$ (yoki $x \& y$) ko‘rinishda belgilanadi. Mantiqiy ko‘paytma amalini ifodalovchi “$\wedge$” yoki “$\&$” belgi ba’zan yozilmasligi (masalan, $x$ va $y$ o‘zgaruvchi mulohazalarning mantiqiy ko‘paytmasi $xy$ ko‘rinishda ifodalanishi), ba’zan esa, nuqta ( $\cdot$ ) belgisi bilan almashtirilishi ( $x \cdot y$ ko‘rinishda yozilishi) mumkin (ushbu bobning 4- paragrafiga qarang). $x \wedge y$ ( $x \& y, x \cdot y,$ $xy$) mulohaza “$x$ va $y$” deb o‘qiladi. $x$ va $y$ elementar mulohazalarning $x \wedge y$ kon’yunksiyasi uchun chinlik jadvali 4- jadval bo‘ladi (2- jadvalning $x$, $y$ va $b_1$ ustunlariga qarang).

**3- misol.** “5 soni toq va tubdir.” ko‘rinishdagi murakkab mulohaza chindir, chunki berilgan mulohaza ikkita “5 soni toqdir.” va “5 soni tubdir.” elementar mulohazalar kon’yunksiyasi sifatida qaralishi mumkin hamda bu ikkita elementar mulohazalarning har biri chindir. ■

**4- misol.** “10 soni 5ga qoldiqsiz bo‘linadi va 7>9.” murakkab mulohaza yolg‘on, chunki bu mulohaza ikkita “10 soni 5ga qoldiqsiz bo‘linadi.” va “7>9.” elementar mulohazalar kon’yunksiyasi sifatida qaralsa, bu ikkita elementar mulohazalardan biri, aniqrog‘i, “7>9.” mulohaza yolg‘ondir. ■

4- jadval

| $x$ | $y$ | $x \wedge y$ |
|---|---|---|
| yo | yo | yo |
| yo | ch | yo |
| ch | yo | yo |
| ch | ch | ch |

**3. Diz’yunksiya[26] (mantiqiy yig‘indi[27]) amali.** Mulohaza mantiqida ishlatiladigan yana bir binar amal, diz’yunksiya (mantiqiy yig‘indi) amali bo‘lib, unga o‘zbek tilidagi “yoki” bog‘lovchisi mos keladi. Shuni ta’kidlash joizki, “yoki” bog‘lovchisidan o‘zbek tilida ikki xil ma’noda foydalaniladi. Bu so‘z, birinchi holda, rad etuvchi “yoki”, ikkinchi holda esa rad etmaydigan “yoki” ma’nosida ishlatiladi. “Yoki” bog‘lovchisi rad etuvchi ma’noda ishlatilganda bog‘lanayotganlardan faqat bittasi, rad etmaydigan ma’noda ishlatilganda esa bog‘lanayotganlarning hech

[26] Lotincha “dizjunctio” so‘zi o‘zbek tilida “ajrataman” ma’nosini beradi.
[27] Ushbu bobning 4- paragrafiga qarang.

bo‘lmaganda biri ro‘yobga chiqishi nazarda tutiladi. Masalan, “Bugun yakshanba yoki men kinoga boraman.” murakkab mulohazani olaylik. Agar haqiqatdan ham bugun yakshanba bo‘lsa va men kinoga borsam, u holda bu mulohaza chinmi, yolg‘onmi? Agar yuqoridagi mulohaza yolg‘on deb hisoblansa, u holda “yoki” bog‘lovchisi rad etuvchi ma’noda, chin deb hisoblaganda esa “yoki” rad etmaydigan ma’noda ishlatilgan bo‘ladi.

Agar $x$ va $y$ mulohazalarning ikkalasi ham yolg‘on bo‘lsa, u holda “$x$ yoki $y$” mulohazasi, shubhasiz, yolg‘on bo‘ladi. $x$ chin va $y$ yolg‘on bo‘lgan holda yoki $x$ yolg‘on va $y$ chin bo‘lganda, “$x$ yoki $y$” mulohazani chin deb hisoblash kerak, bu esa o‘zbek tilidagi “yoki” bog‘lovchisining rad etmaydigan ma’nosiga to‘g‘ri keladi. Tabiiyki, har ikkala $x$ va $y$ mulohazalar chin bo‘lganda “$x$ yoki $y$” mulohaza chin bo‘ladi.

**4- ta’rif.** *Berilgan $x$ va $y$ elementar mulohazalar yolg‘on bo‘lgandagina yo qiymat qabul qilib, qolgan hollarda esa, ch qiymat qabul qiluvchi murakkab mulohaza $x$ va $y$ mulohazalarning* ***diz’yunksiyasi*** *deb ataladi.*

“Berilgan mulohazalarning diz’yunksiyasi bu mulohazalarga **diz’yunksiya amalini** qo‘llab hosil qilindi” deb aytish mumkin. Diz’yunksiya amali 2- jadvalda ifodalangan $b_7$ amali bo‘lub, unga o‘zbek tilidagi rad etmaydigan ma’noda ishlatiladigan “yoki” bog‘lovchisi mos keladi. Diz’yunksiya amalini belgilashda “$\vee$” belgidan foydalaniladi. Berilgan $x$ va $y$ elementar mulohazaning diz’yunksiyasi “$x \vee y$” kabi yoziladi va “$x$ yoki $y$” deb o‘qiladi.

Berilgan $x$ va $y$ elementar mulohazalarning $x \vee y$ diz’yunksiyasi uchun chinlik jadvali 5- jadval bo‘ladi (2- jadvalning $x$, $y$ va $b_7$ ustunlariga qarang).

5- jadval

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ |
|---|---|---|
| yo | yo | yo |
| yo | ch | ch |
| ch | yo | ch |
| ch | ch | ch |

**5- misol.** “10 soni 5ga qoldiqsiz bo‘linadi yoki 7>9.” murakkab mulohaza chin, chunki berilgan mulohaza ikkita “10 soni 5ga qoldiqsiz bo‘linadi.” va “7>9.” elementar mulohazalar diz’yunksiyasi sifatida qaralishi mumkin hamda bu ikkita elementar mulohazalardan biri, aniqrog‘i, “10 soni 5ga qoldiqsiz bo‘linadi.” mulohazasi chindir. ■

**4. Implikatsiya**[28] **amali.** Navbatdagi amalni o‘rganish maqsadida quyidagi misolni qarab chiqamiz.

**6- m i s o l .** Quyidagi mulohazalarni ko‘raylik:

1) “Agar 2×5=10 bo‘lsa, u holda 6×7=42 bo‘ladi.”;

2) “Agar 30 soni 5 ga qoldiqsiz bo‘linsa, u holda 5 juft son bo‘ladi.”;

3) “Agar 3=5 bo‘lsa, u holda 15+2=17 bo‘ladi.”;

4) “Agar 4×3=13 bo‘lsa, u holda 9+3=13 bo‘ladi.”.

Bular murakkab mulohazalar bo‘lib, ularning har biri ikkita elementar mulohazadan “agar ... bo‘lsa, u holda ... bo‘ladi” ko‘rinishdagi qolip (andoza, bog‘lovchilar) asosida tuzilgan. ■

**5- t a ’ r i f .** *Berilgan $x$ va $y$ elementar mulohazalarning birinchisi chin va ikkinchisi yolg‘on bo‘lgandagina yo qiymat qabul qilib, qolgan hollarda esa, ch qiymat qabul qiluvchi murakkab mulohaza $x$ va $y$ mulohazalarning* ***implikatsiyasi*** *deb ataladi.*

“Berilgan mulohazalarning implikatsiyasi bu mulohazalarga **implikatsiya amalini** qo‘llab hosil qilindi” deb aytish mumkin. Implikatsiya amali 2- jadvalda ifodalangan $b_{13}$ binar amaldir.

Implikatsiya amalini belgilashda “$\rightarrow$” (yoki “$\Rightarrow$”) belgidan foydalaniladi. Shuni ta’kidlash kerakki, implikatsiya amali bajarilganda berilgan elementar mulohazalarning o‘rni, ya’ni ulardan qaysi birinchi va qaysi ikkinchi bo‘lishi muhimdir. Berilgan $x$ va $y$ elementar mulohazaning implikatsiyasi “$x \rightarrow y$” kabi yoziladi va “agar $x$ bo‘lsa, u holda $y$ (bo‘ladi)” deb o‘qiladi. $x \rightarrow y$ implikatsiyani “$x$dan $y$ga implikatsiya” deb ham yuritishadi. So‘zlashuv tilida $x \rightarrow y$ implikatsiyani “$x$ bo‘lsa, $y$ bo‘ladi”, “agar $x$ bo‘lsa, u vaqtda $y$ bo‘ladi”, “$x$dan $y$ hosil bo‘ladi”, “$x$dan $y$ kelib chiqadi”, “$y$, agar $x$ bo‘lsa”, “$x$ $y$ uchun yetarli shart” va boshqacha o‘qish holatlari ham uchraydi. $x$ va $y$ elementar mulohazaning $x \rightarrow y$ implikatsiyasi uchun $x$ mulohaza **asos (shart, gipoteza, dalil)**, $y$ mulohaza esa $x$ asosning **oqibati (natijasi, xulosasi)** deb ataladi. $x$ va $y$

---

[28] Lotincha “implicatio” so‘zi o‘zbek tilida “o‘raman (chirmashtiraman)” ma’nosini, “implico” so‘zi esa “zich o‘raman, bog‘layman (birlashtiraman)” ma’nosini beradi.

mulohazalarning $x \to y$ implikatsiyasi uchun chinlik jadvali 6- jadval bo‘ladi (2-jadvalning $x$, $y$ va $b_{13}$ ustunlariga qarang).

Implikatsiya uchun chinlik jadvalining dastlabki ikkita satri yolg‘on asosdan yolg‘on xulosa ham, chin xulosa ham kelib chishi mumkinligini anglatadi. Boshqacha qilib aytganda, “yolg‘ondan har bir narsani kutish mumkin”.

Implikatsiya uchun chinlik jadvalidan ko‘rinadiki, 2- misoldagi mulohazalarning ikkinchisi yolg‘on bo‘lib, qolganlari chindir.

6- jadval

| $x$ | $y$ | $x \to y$ |
|---|---|---|
| yo | yo | ch |
| yo | ch | ch |
| ch | yo | yo |
| ch | ch | ch |

**5. Ekvivalensiya amali.** Matematik mantiqda ko‘pchilik murakkab mulohazalar berilgan elementar mulohazalardan “… zarur va yetarlidir”, “… zarur va kifoyadir”, “faqat va faqat …”, “shunda va faqat shundagina, qachonki …”, “... bajarilishi yetarli va zarurdir” kabi qolip (andoza, bog‘lovchilar) vositasida tuziladi.

**6- ta’rif.** *Berilgan $x$ va $y$ elementar mulohazalarning ikkalasi ham bir xil qiymat qabul qilgandagina ch qiymat qabul qilib, ular turli qiymat qabul qilganda esa yo qiymat qabul qiluvchi murakkab mulohaza $x$ va $y$ mulohazalarning* ***ekvivalensiyasi*** *deb ataladi.*

“Berilgan mulohazalarning ekvivalensiyasi bu mulohazalarga **ekvivalensiya amalini** qo‘llab hosil qilindi” deb aytish mumkin. Ekvivalensiya amali 2- jadvalda ifodalangan $b_9$ binar amaldir. Ekvivalensiya amalini belgilashda “$\leftrightarrow$“ (yoki “$\Leftrightarrow$”) belgidan foydalaniladi. Berilgan $x$ va $y$ elementar mulohazaning ekvivalensiyasi $x \leftrightarrow y$ (yoki $x \Leftrightarrow y$) kabi yoziladi va “$x$ ekvivalent $y$” deb o‘qiladi. $x$ va $y$ mulohazaning $x \leftrightarrow y$ ekvivalensiyasiga “$x$ bo‘lsa (bajarilsa), $y$ bo‘ladi (bajariladi) va $y$ bo‘lsa, $x$ bo‘ladi” degan mulohaza mos keladi. Demak, $x$ va $y$ elementar mulohazaning $x \leftrightarrow y$ ekvivalensiyasi ikkita $x \to y$ va $y \to x$ implikatsiyalarning $(x \to y) \wedge (y \to x)$ kon’yunksiyasi ko‘rinishida ham ifodalanishi mumkin. Shuning uchun ekvivalensiya **ikki tomonli implikatsiyadir**. $x \leftrightarrow y$ ekvivalensiyaga “$x$ dan $y$ kelib chiqadi va $y$ dan $x$ kelib chiqadi” degan mulohazani ham mos qo‘yish mumkin. Boshqacha so‘zlar bilan aytganda, $x \leftrightarrow y$ ekvivalensiyaga matematikada zaruriy va yetarli shartni ifodalovchi tasdiq mos keladi.

Berilgan $x$ va $y$ mulohazalarning ekvivalensiyasi $x \leftrightarrow y$ uchun chinlik jadvali 7- jadval bo‘ladi (2- jadvalning $x$, $y$ va $b_9$ ustunlariga qarang).

7- jadval

| $x$ | $y$ | $x \leftrightarrow y$ |
|---|---|---|
| yo | yo | ch |
| yo | ch | yo |
| ch | yo | yo |
| ch | ch | ch |

**6- misol.** Ushbu tasdiqlarni tekshiramiz: $x =$”Berilgan natural son 3ga qoldiqsiz bo‘linadi.”, $y =$”Berilgan natural sonning o‘nli sanoq sistemasidagi yozuvini tashkil etuvchi raqamlar yig‘indisi 3ga qoldiqsiz bo‘linadi.”. Bu $x$ va $y$ mulohazalarning har biri elementar mulohaza bo‘lib, ularning $x \leftrightarrow y$ ekvivalensiyasi murakkab mulohaza sifatida quyidagicha ifodalanishi mumkin: “Berilgan natural sonning 3ga qoldiqsiz bo‘linishi uchun uning o‘nli sanoq sistemasidagi yozuvini tashkil etuvchi raqamlar yig‘indisi 3ga qoldiqsiz bo‘linishi yetarli va zarurdir.”. ■

Yuqorida keltirilgan inkor, kon’yunksiya, diz’yunksiya, implikatsiya va ekvivalensiya amallarining chinlik jadvallari **asosiy chinlik jadvallari** deb yuritiladi.

**6. Boshqa mantiqiy amallar.** Yuqorida bayon etilgan asosiy mantiqiy amallar 20ta turli unar va binar amallarning 5tasidir, xolos. Qolgan 15ta mantiqiy amallarning ham matematik mantiqda o‘z o‘rinlari bo‘lib, ularning ba’zilariga olimlarning nomlari qo‘yilgan. Jumladan, $b_{14}$ binar mantiqiy amal **Sheffer**[29] **amali** yoki **Sheffer shtrixi** degan nom olgan. Bu amalni, ba’zan, **antikon’yunksiya amali** deb ham atashadi. Sheffer amalini belgilashda “|“ belgidan foydalaniladi. Berilgan $x$ va $y$ mulohazalarga Sheffer amalini qo‘llab $x|y$ murakkab mulohaza hosil qilingan bo‘lsa, $x|y$ yozuv “$x$ Sheffer shtrixi $y$” deb o‘qiladi. $x$ va $y$ elementar

8- jadval

| $x$ | $y$ | $x\|y$ |
|---|---|---|
| yo | yo | ch |
| yo | ch | ch |
| ch | yo | ch |
| ch | ch | yo |

---

[29] Bu amal Ukrainada tug‘ilgan AQShlik mantiqchi Henry Maurice Sheffer (1882-1964) nomi bilan bog‘liq.

mulohazalarga Sheffer amalini qo‘llash natijasi $x|y$ mulohaza uchun chinlik jadvali 8- jadval bo‘ladi (2- jadvalning $x$, $y$ va $b_{14}$ ustunlariga qarang).

Olimning nomi bilan atalgan yana bir mantiqiy amal $b_8$ binar mantiqiy amal bo‘lib, bu amal haqidagi dastlabki ma’lumotlarni Pirs[30] e’lon qilgan. Bu amal **Pirs strelkasi** yoki **Pirs amali** degan nom olgan bo‘lib, uni, ba’zan, **antidiz’yunksiya amali**[31] deb ham atashadi.

Pirs amalini belgilashda “$\downarrow$“ belgidan foydalaniladi. Berilgan $x$ va $y$ mulohazalarga Pirs amalini qo‘llab $x\downarrow y$ murakkab mulohaza hosil qilingan bo‘lsa, $x\downarrow y$ yozuv “$x$ Pirs strelkasi $y$” deb o‘qiladi. $x$ va $y$ elementar mulohazalarga Pirs amalini qo‘llash natijasi $x\downarrow y$ mulohaza uchun chinlik jadvali 9- jadval bo‘ladi (2- jadvalning $x$, $y$ va $b_8$ ustunlariga qarang).

9- jadval

| $x$ | $y$ | $x\downarrow y$ |
|---|---|---|
| yo | yo | ch |
| yo | ch | yo |
| ch | yo | yo |
| ch | ch | yo |

Qolgan 3ta unar va 10ta binar mantiqiy amallarga qisqacha to‘xtalib o‘tamiz. 1. Unar amallar. $u_0$ va $u_3$ amallar vositasida, mos ravishda, absolyut yolg‘on va absolyut chinni hosil qilish mumkin. $u_1$ amali esa $x$ mulohazaning qiymatini o‘zgartirmaydi (1- jadvalga qarang).

2. Binar amallar. $b_0$ va $b_{15}$ amallar vositasida, mos ravishda, absolyut yolg‘on va absolyut chinni hosil qilish mumkin. $b_{11}$ amali $y$ dan $x$ ga implikatsiya amalini ifodalaydi. $b_2$ va $b_4$ amallari, mos ravishda, $y$ dan $x$ ga va $x$ dan $y$ ga implikatsiya **inversiyasi** amallaridir. $b_3$, $b_5$, $b_{10}$ va $b_{12}$ amallar faqat bitta operandga bog‘liqdir. $b_6$ amaliga **ikki modulli qo‘shish** amali degan nom berilgan bo‘lib, bu amalni belgilashda $\oplus$ belgidan foydalaniladi. Berilgan $x$ va $y$ mulohazalarga ikki modulli qo‘shish amalini qo‘llab $x\oplus y$ murakkab mulohaza hosil qilinadi.

## Mavzu: Formulalarning teng kuchliligi. Mulohazalar algebrasi formulasini soddalashtirish texnologiyalari

[30] Pirs Charlz Sanders (Charles Sanders Peirce, 1839-1914) – AQShlik faylasuf, mantiqchi va matematik.
[31] Bu amalni, ba’zan, **Dagger funksiyasi** yoki **Vebb funksiyasi** deb ham atashadi.

Endi mantiqiy amallar orasidagi bog‘lanishlar bilan shug‘ullanamiz. Bunday bog‘lanishlardan biri bilan tanishmiz: ekvivalensiya ikki tomonli implikatsiyadir, aniqrog‘i, berilgan $x$ va $y$ mulohazalarning $x \leftrightarrow y$ ekvivalensiyasi ikkita $x \rightarrow y$ va $y \rightarrow x$ implikatsiyalarning $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$ kon’yunksiyasi shaklida ifodalanadi.

Dastlab mulohazalar algebrasining **formula** tushunchasiga murojaat qilib, intiutiv ravishda, uni berilgan elementar mulohazalardan inkor, diz’yunksiya, kon’yunksiya, implikasiya, ekvivalensiya mantiqiy amallarining chekli kombinatsiyasi va, zarur bo‘lganda, mulohazalar ustida mantiqiy amallarning bajarilish tartibini ko‘rsatuvchi qavslar vositasida hosil qilingan murakkab mulohaza deb tushunamiz. Bu yerda qavslarni ishlatish qoidalari sonlar bilan ish ko‘ruvchi (oddiy) algebradagidek saqlanadi.

**1- misol.** Ushbu $x$, ch, $\text{yo} \leftrightarrow (\text{yo} \vee y)$, $x \leftrightarrow \bar{y} \rightarrow x$, $[x_1 \vee (\overline{x_2} \wedge x_3) \wedge x_1] \rightarrow x_4$, $\bar{y} \rightarrow x$, $(x \rightarrow \bar{y}) \wedge (y \rightarrow z) \rightarrow (z \rightarrow x)$, $[x_1 \wedge (x_3 \rightarrow x_3)] \vee (x_4 \leftrightarrow x_2) \vee \text{yo}$ va $(\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$ ko‘rinishda yozilgan murakkab mulohazalarning har biri formuladir, lekin $[x_1 \vee (\overline{x_2} \rightarrow x_3) \wedge] \leftrightarrow x_1$ va $(x \rightarrow \bar{y}) \wedge (\overline{z \rightarrow (\bar{z} \rightarrow y)}$ yozuvlarni formula sifatida qabul qilish mumkin emas, chunki ularning birinchisida kon’yunksiya belgisidan keyin yopuvchi “]” qavs yozilgan, ikkinchisida esa ikkinchi ochuvchi “(“ qavsga mos yopuvchi “)” qavs yozilmagan. ■

Formula tushunchasiga matematik induksiya usuliga tayangan holda quyidagicha qat’iy ta’rif beriladi.

**1- ta’rif.** 1) *Agar $x$ elementar mulohaza bo‘lsa, u holda $x$ formuladir;*

2) *agar $A$ formula bo‘lsa, u holda $\bar{A}$ formuladir;*

3) *agar $A$ va $B$ formulalar bo‘lsa, u holda $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ va $(A \leftrightarrow B)$ formulalardir;*

4) *1-, 2- va 3- bandlardagidan tashqari boshqa formula yo‘q.*

1- ta’rifga ko‘ra ixtiyoriy formulaga, uning qiymati sifatida, vaziyatga qarab, {ch, yo} to‘plamning biror elementi mos qo‘yiladi. Formula tarkibidagi o‘zgarmas va o‘zgaruvchi (elementar) mulohazalarning har biri **elementar formulalar** deb hisoblanadi. Formula qiymatining $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilarga (elementar mulohazalarga) bog‘liqligini ta’kilash kerak bo‘lgan holda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ko‘rinishdagi yozuvdan foydalaniladi.

Tabiiyki, formula tushunchasiga berilgan 1- ta’rif asosida ish yuritilsa, tuzilgan formula tarkibida qavslar ko’p bo‘ladi. Matematik mantiqda formula tarkibidagi qavslar sonini kamaytirish maqsadida, odatda, quyidagi kelishuvlardan foydalaniladi.

1) biror formula inkor ishorasi ostida bo‘lsa, u qavssiz yoziladi (masalan, $\overline{(x \vee y)} \wedge z$ formulani $\overline{x \vee y} \wedge z$ ko‘rinishda yozish mumkin).

2) kon’yunksiya amali diz’yunksiya, implikatsiya va ekvivalensiya amallariga nisbatan formulalarni mustahkamroq bog‘laydi deb hisoblanadi (masalan, $x \vee (yz)$ formulani $x \vee yz$, $xy \to (yz)$ formulani $xy \to yz$, $(xy) \leftrightarrow (zu)$ formulani esa $xy \leftrightarrow zu$ ko‘rinishda yozish mumkin).

3) diz’yunksiya amali implikatsiya va ekvivalensiya amallariga nisbatan formulalarni mustahkamroq bog‘laydi deb hisoblanadi (masalan, $x \to (y \vee z)$ formulani $x \to y \vee z$, $x \vee y \leftrightarrow (z \vee y)$ formulani esa $x \vee y \leftrightarrow z \vee y$ ko‘rinishda yozish mumkin).

4) implikatsiya amali ekvivalensiya amaliga nisbatan formulalarni mustahkamroq bog‘laydi deb hisoblanadi (masalan, $x \leftrightarrow (y \to z)$ formulani $x \leftrightarrow y \to z$ ko‘rinishda yozish mumkin).

Bu kelishuvlar, yuqorida ta’kidlanganidek, formulalar tarkibidagi qavslar sonini kamaytirish imkonini beradi. Masalan, $(((x \leftrightarrow y) \to (x \wedge z)) \leftrightarrow (((\overline{x \wedge \bar{y}}) \vee (\bar{x} \wedge y)) \vee (x \to z)))$ formulani $(x \leftrightarrow y) \to xz \leftrightarrow \overline{x\bar{y}} \vee \bar{x}y \vee (x \to z)$ ko‘rinishda yozish mumkin.

Umuman olganda, matematik mantiqda **mantiqiy amallarni bajarish imtiyozlari** va **qavslar haqidagi kelishuv** deb ataluvchi qoidalar qabul qilingan.

Qavslarsiz yozilgan mantiqiy amallarni bajarish imtiyozlari (ketma-ketligi) navbat bilan inkor ($\neg$), kon’yunksiya ($\wedge$), diz’yunksiya ($\vee$), implikatsiya ($\to$) amallariga berilgan, eng so‘nggi imtiyozga esa ekvivalensiya ($\leftrightarrow$) amali egadir.

Qavslar haqidagi kelishuv deganda quyidagi qoidalarga amal qilish nazarda tutiladi:

1. Agar formulada tashqi qavslar yozilmagan bo’lsa, u holda ular o‘z joylariga tiklanadi.

2. Agar formulada ikkita bir xil imtiyozga ega mantiqiy amallar qavslarsiz ketma-ket yozilgan bo‘lsa, u holda yozilish tartibiga ko‘ra chapda joylashgan amal uchun qavslar o‘z joylariga tiklanadi.

3. Agar formulada turli xil imtiyozlarga ega mantiqiy amallar qavslarsiz ketma-ket yozilgan bo‘lsa, u holda ularni bajarish ketma-ketligini anglatuvchi qavslar mantiqiy amallarni bajarish imtiyozlarini hisobga olgan holda navbat bilan o‘z joylariga tiklanadi.

**2- misol.** $x \vee \bar{y} \wedge y \leftrightarrow z \rightarrow (z \rightarrow x)$ ko‘rinishda yozilgan formulani tahlil qilaylik. Bu formuladagi amallarni bajarish tartibi faqat bir joyda qavslar bilan aniqlangan. Mantiqiy amallarni bajarish imtiyozlari va qavslar haqidagi kelishuvga ko‘ra berilgan formulani $((x \vee (\bar{y} \wedge y)) \leftrightarrow (z \rightarrow (z \rightarrow x)))$ ko‘rinishda ifodalash mumkin. ■

Tabiiyki, ixtiyoriy formula uchun **chinlik jadvali**[32] tuzish mumkin. Berilgan formulaga mos chinlik jadvalini tuzishda shu formula tarkibidagi amallarga e’tibor bergan holda asosiy chinlik jadvallaridan ketma-ket foydalanish mumkin.

**3- misol.** $(x \wedge y) \rightarrow \overline{\bar{x} \vee y}$ formulaning chinlik jadvali 1- jadval bo‘ladi. ■

1- jadval

| $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $x \wedge y$ | $\bar{x} \vee y$ | $\overline{\bar{x} \vee y}$ | $(x \wedge y) \rightarrow \overline{\bar{x} \vee y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| yo | yo | ch | yo | ch | yo | ch |
| yo | ch | ch | yo | ch | yo | ch |
| ch | yo | yo | yo | yo | ch | ch |
| ch | ch | yo | ch | ch | yo | yo |

[32] Formulalar uchun “chinlik jadvali” iborasi o‘rnida “qiymatlar jadvali” iborasi qo‘llanilishi ham mumkin.

**2- ta’rif.** *Agar berilgan ikkita formula tarkibida ishtirok etuvchi elementar mulohazalarning har bir qiymatlar satri uchun bu formulalarning qiymatlari bir xil bo‘lsa, u holda ular* ***teng kuchli formulalar*** *deb ataladi.*

**3- ta’rif.** *Agar berilgan ikkita formula tarkibida ishtirok etuvchi elementar mulohazalarning qiymatlar satrlaridan hech bo‘lmaganda bittasi uchun bu formulalarning qiymatlari har xil bo‘lsa, u holda ular* ***teng kuchlimas formulalar*** *deb ataladi.*

**Teng kuchli** va **teng kuchlimas** iboralari na faqat formulalarga nisbatan, balki ixtiyoriy mantiqiy mulohazalarga nisbatan ham qo‘llanilisi mumkin. Ba’zan, teng kuchli va teng kuchlimas iboralari o‘rnida, mos ravishda, **ekvivalent** va **ekvivalentmas** iboralari ishlatiladi. Ekvivalentlik tushunchasi ekvivalensiya tushunchasiga ohangdosh bo‘lgani uchun, ularni bir-biridan farq qilish maqsadida ko‘proq teng kuchlilik iborasidan foydalanamiz.

Berilgan formulalarning teng kuchliligini ifodalashda “$\equiv$” belgidan, teng kuchlimasligini ifodalashda esa “$\not\equiv$” belgidan foydalaniladi. Masalan, agar berilgan $A$ va $B$ formulalar teng kuchli formulalar bo‘lsa, u holda $A \equiv B$ deb, $A$ va $B$ formulalar teng kuchlimas formulalar bo‘lganda esa, $A \not\equiv B$ deb yoziladi. Ba’zan, formulalarning teng kuchliligini ifodalashda “$=$” belgidan, teng kuchlimasligini ifodalashda esa “$\neq$”belgidan ham foydalaniladi.

Berilgan formulalarning teng kuchli yoki teng kuchlimas bo‘lishini aniqlashda, odatda, ular uchun tuzilgan chinlik jadvallaridan foydalaniladi.

2- jadval

| $x$ | $x \vee x$ |
|---|---|
| yo | yo |
| ch | ch |

**4- misol.** $x$ va $x \vee x$ formulalar teng kuchli formulalardir. Haqiqatdan ham, berilgan formulalarda faqat bitta $x$ elementar mulohaza ishtirok etgani uchun ikkita qiymatlar satriga ega chinlik jadvalini tuzamiz (2- jadvalga qarang). 2- ta’rifga asosan $x \vee x \equiv x$. ■

3- jadval

| $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $A \equiv \bar{x} \vee y$ | $B \equiv x \to y$ |
|---|---|---|---|---|
| yo | yo | ch | ch | Ch |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| yo | ch | ch | ch | Ch |
| ch | yo | yo | yo | Yo |
| ch | ch | yo | ch | Ch |

**5- misol.** Berilgan $\bar{x} \vee y$ va $x \to y$ formulalarni mos ravishda $A$ va $B$ bilan belgilaymiz: $A \equiv \bar{x} \vee y$, $B \equiv x \to y$. 3- chinlik jadvalidan ko‘rinib turibdiki, $A$ va $B$ formulalar tarkibidagi $x$ va $y$ elementar mulohazalarning to‘rtala qiymatlar satrlari uchun bu formulalarning mos qiymatlari bir xil. Demak, 2- ta’rifga asosan $A \equiv B$, ya’ni $\bar{x} \vee y \equiv x \to y$. ■

**6- misol.** $A \equiv (x \vee \bar{x}) \wedge y$ va $B \equiv y$ formulalar berilgan bo‘lsin. 4- chinlik jadvalini tuzamiz. $A$ va $B$ formulalar tarkibida ishtirok etuvchi $x$ va $y$ elementar mulohazalarning to‘rtala qiymatlar satrlari uchun bu formulalarning mos qiymatlari bir xil.

Demak, berilgan $A$ va $B$ formulalar ekvivalent formulalardir, ya’ni $(x \vee \bar{x}) \wedge y \equiv y$. ■

4- jadval

| $x$ | $B = y$ | $\bar{x}$ | $x \vee \bar{x}$ | $A = (x \vee \bar{x}) \wedge y$ |
|---|---|---|---|---|
| yo | yo | ch | Ch | yo |
| yo | ch | ch | Ch | ch |
| ch | yo | yo | Ch | yo |
| ch | ch | yo | Ch | ch |

**7- misol.** $A \equiv (x \vee \bar{x}) \wedge y$ va $B \equiv x$ formulalar teng kuchlimas formulalardir. Haqiqatdan ham, 5- chinlik jadvalidan ko‘rinib turibdiki, berilgan $A$ va $B$ formulalar tarkibida ishtirok etuvchi $x$ va $y$ elementar mulohazalarning to‘rtta qiymatlar satrlaridan ikkitasi (2- va 3- satrlari) uchun bu formulalarning mos qiymatlari har xil. Demak, 3- ta’rifga asosan, berilgan $(x \vee \bar{x}) \wedge y$ va $x$ formulalar ekvivalentmas formulalardir, ya’ni $A \not\equiv B$. ■

5- jadval

| $B \equiv x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $x \vee \bar{x}$ | $A \equiv (x \vee \bar{x}) \wedge y$ |
|---|---|---|---|---|
| yo | yo | ch | ch | yo |
| yo | ch | ch | ch | ch |
| ch | yo | yo | ch | yo |
| ch | ch | yo | ch | ch |

Odatda, mulohazalar algebrasida ekvivalensiya bilan teng kuchlilik orasidagi farqni anglash maqsadida, ular oddiy algebradagi, mos ravishda, tenglama va ayniyat bilan qiyoslanadi. Tenglamada (masalan, $x$ va $y$ o‘zgaruvchilarga nisbatan $2x + y = 10$ tenglamada) o‘zgaruvchilarning ayrim (masalan, $x = 4$, $y = 2$) qiymatlari uchun tenglik o‘rinli bo‘lib, boshqa (masalan, $x = 1$, $y = 2$) qiymatlari uchun bu tenglik o‘rinli bo‘lmasligi mumkin. Shunga o‘xshash, ekvivalensiyada ishtirok etuvchi (masalan, $x_1 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_3)$ ekvivalensiyadagi $x_1$, $x_2$ va $x_3$) o‘zgaruvchilarning o‘rinlariga qandaydir (masalan, $x_1 = \text{ch}$, $x_2 = \text{ch}$, $x_3 = \text{ch}$) qiymatlar qo‘yganda ekvivalensiya ch qiymat qabul qilib, boshqa (masalan, $x_1 = \text{yo}$, $x_2 = \text{ch}$, $x_3 = \text{ch}$) qiymatlar uchun yo qiymatga erishishi mumkin.

Oddiy algebrada ayniyat deb shunday tenglik tushuniladiki (masalan, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ tenglik), bu tenglik, unda qatnashgan barcha o‘zgaruvchilarning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari uchun, o‘rinlidir. Shunga o‘xshash, matematik mantiqdagi teng kuchlilik shunday mulohazaki (masalan, $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$ mulohaza), bu mulohaza, unda qatnashgan barcha o‘zgaruvchilarning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari uchun to‘g‘ridir.

Matematik mantiqda formula tushunchasi bilan bir qatorda **mantiqiy ifoda** tushunchasi ham qo‘llaniladi. Mantiqiy ifoda shunday murakkab mulohazaki, uning tarkibida berilgan elementar mulohazalardan inkor, diz’yunksiya, kon’yunksiya, implikasiya, ekvivalensiya mantiqiy amallari bilan bir qatorda mulohazalar algebrasidagi boshqa amallarining ham chekli kombinatsiyasi va, zarur bo‘lganda, mulohazalar ustida mantiqiy amallarning bajarilish tartibini ko‘rsatuvchi qavslar qatnashishi mumkin. Mantiqiy ifoda tushunchasiga ham formula tushunchasiga matematik induksiya usuliga tayangan holda berilgan ta’rifga o‘xshash qat’iy ta’rif berilishi mumkin. Mantiqiy ifodalarning teng kuchliligi tushunchasini ham formulalar teng kuchliligi tushunchasiga o‘xshash aniqlash mumkin.

Oddiy algebrada aynan teng qiymatga ega ifodalarni bir-biri bilan almashtirish mumkin bo‘lganidek, mulohazalar algebrasida ham mantiqiy ifoda tarkibidagi qismiy mantiqiy ifodalarni (formulalarni, mulohazalarni) ularga teng kuchli bo‘lgan ifodalar (formulalar, mulohazalar) bilan almashtirish, ya’ni **o‘rniga qo‘yish usulidan** foydalanish mumkin. Bu esa murakkab ifodalarni (formulalarni, mulohazalarni) soddalashtirish imkonini beradi.

Yuqorida tenglama bilan ekvivalensiya va ayniyat bilan teng kuchlilik orasida o‘xshashlik borligini ko‘rdik. Endi tenglik bilan ekvivalensiya orasida farq ham borligini ko‘rsatamiz. Ma’lumki, oddiy algebrada hech qanday almashtirish yordamida tenglikni arifmetik amallar (qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish) vositasida ifodalab bo‘lmaydi. Mulohazalar algebrasida esa ekvivalensiyani boshqa mantiqiy amallar vositasida ifodalash mumkin. Masalan, ekvivalensiyani implikasiya va kon’yunksiya amallari vositasida ifodalash mumkin: berilgan $x$ va

$y$ elementar mulohazalar uchun $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$ teng kuchlilik o‘rinliligi 6- chinlik jadvalidan ham ko‘rinib turibdi.

6- jadval

| $x$ | $y$ | $x \to y$ | $y \to x$ | $x \leftrightarrow y$ | $(x \to y) \wedge (y \to x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| yo | yo | ch | ch | ch | Ch |
| yo | ch | ch | yo | yo | Yo |
| ch | yo | yo | ch | yo | Yo |
| ch | ch | ch | ch | ch | Ch |

Mulohazalar algebrasini oddiy algebra bilan qiyoslashda davom etib, oddiy algebrada tenglik uchun quyidagi xossalar (aksiomalar) o‘rinliligini eslatamiz:

1) ixtiyoriy $a \in \boldsymbol{R}$ son uchun $a = a$ (refleksivlik);

2) ixtiyoriy ikkita $a \in \boldsymbol{R}$ va $b \in \boldsymbol{R}$ sonlar uchun agar $a = b$ bo‘lsa, u holda $b = a$ bo‘ladi (simmetriklik);

3) ixtiyoriy uchta $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$ va $c \in \boldsymbol{R}$ sonlar uchun agar $a = b$ va $b = c$ bo‘lsa, u holda $a = c$ bo‘ladi (tranzitivlik).

Shunga o‘xshash, mulohazalar algebrasidagi teng kuchlilik (ekvivalentlik) ham refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega:

1) ixtiyoriy $x$ mulohaza uchun $x \equiv x$;

2) ixtiyoriy ikkita $x$ va $y$ mulohazalar uchun, agar $x \equiv y$ bo‘lsa, u holda $y \equiv x$ bo‘ladi;

3) ixtiyoriy uchta $x$, $y$ va $z$ mulohazalar uchun agar $x \equiv y$ va $y \equiv z$ bo‘lsa, u holda $x \equiv z$ bo‘ladi.

## Sinov savollari

1. Quyidagi gaplarning qaysilari mulohaza bo‘lishini aniqlang:
   a) “Qarshi shahri O‘zbekiston Respublikasida joylashgan.”;
   b) “Bir piyola suv bering.”; d) “$\sqrt{5} + 4\sqrt{3 - 30}$”;
   c) “Oy Mars planetasining yo‘ldoshidir.”; f) “$a > 0$”;

d) “Yashasin ozodlik!”; h) “Soat necha bo‘ldi?”.

2. Quyidagi mulohazalarning chin yoki yolg‘on ekanligini aniqlang:

a) $2 \in \{x \,|\, 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0, \quad x \in \boldsymbol{R}\}$; b) $\{1\} \in \boldsymbol{N}$;

b) “Yoshi o‘z otasining yoshidan katta odam yo‘q.”.

3. Quyidagi implikatsiyalarning qaysi birlari chin?

   a) agar $2 \times 2 = 4$ bo‘lsa, u holda $2 < 3$ bo‘ladi;

   b) agar $2 \times 2 = 4$ bo‘lsa, u holda $2 > 3$ bo‘ladi;

   c) agar $2 \times 2 = 5$ bo‘lsa, u holda $2 < 3$ bo‘ladi;

   d) agar $2 \times 2 = 5$ bo‘lsa, u holda $2 > 3$ bo‘ladi.

4. “Qodirova talabadir.” mulohazasi $a$ bilan, “Qodirova ingliz tilini biladi.” mulohazasi esa $b$ deb belgilangan bo‘lsin. U holda $\bar{a}$, $\bar{b}$, $a \wedge b$, $b \wedge a$, $a \vee b$, $b \vee a$, $a \to b$, $b \to a$, $a \leftrightarrow b$ va $b \leftrightarrow a$ ko‘rinishdagi murakkab mulohazalarni so‘zlar vositasida ifodalang hamda mumkin bo‘lgan barcha vaziyatlarda bu mulohazalarning chin yoki yolg‘on bo‘lishini tekshirib ko‘ring.

5. Mulohaza bo‘lishi mumkin bo‘lgan va mumkin bo‘lmagan gaplarga 10tadan misol keltiring.

6. Quyidagi murakkab mulohazalarga mos elementar mulohazalarni qandaydir harflar bilan belgilab, ularni mantiqiy algebra amallari vositasida ifodalang:

   a) “100 natural sondir va u 10ga qoldiqsiz bo‘linadi.”;

   b) “Botirning yoshi o‘z singlisining yoshidan katta emas.”;

   c) “Agar fuqaro o‘rta ma’lumotga ega bo‘lsa, u holda u oliy o‘quv muassasalaridan birida o‘qishi mumkin.”.

7. Quyidagi mulohazalarni elementar va murakkab mulohazalarga ajrating va murakkab mulohazalardagi bog‘lovchilarni toping:

   a) “Natural son 10ga qoldiqsiz bo‘linishi uchun uning o‘nli sanoq sistemasidagi yozuvi 0 raqami bilan tugashi zarur va yetarlidir.”;

   b) “Sanamning yoshi o‘z opasining yoshidan katta emas.”

   c) “O‘zbek alifbosida 38ta harf bor.”;

   d) “Agar fuqaro o‘rta ma’lumotga ega bo‘lsa, u holda u oliy o‘quv muassasalaridan birida o‘qishi mumkin.”.

8. Sheffer shtrixi ishtirok etgan mulohazaga misol keltiring.
9. Pirs strelkasi ishtirok etgan mulohazaga misol keltiring.
10. Ikkilik sanoq sistemasida yozilgan natural sonlar ustida qo‘shish va ko‘paytirish amallarini mos ravishda mantiqiy yig‘indi (diz’yunksiya) va mantiqiy ko‘paytma (kon’yunksiya) amallari bilan solishtiring.

***Mustaqil ishlash uchun savollar***

1. Mulohazalar algebrasi deganda nimani tushunasiz?
2. Mulohaza nima?
3. Qanday mulohaza absolyut chin mulohaza deb ataladi?
4. Qanday mulohaza absolyut yolg‘on mulohaza deb ataladi?
5. O‘zgarmas mulohazalar qanday qiymatlar qabul qilishlari mumkin?
6. O‘zgaruvchi mulohazalar qanday qiymatlar qabul qilishlari mumkin?
7. Elementar va murakkab mulohaza tushunchlari bir-biridan nima bilan farq qiladi?
8. Mantiqiy amallar deganda nimani tushunasiz?
9. Nega mulohazalar algebrasi mulohazalar mantiqi deb ham yuritiladi?
10. Qiymatlar satri deganda nimani tushunasiz?

    1- va 2- jadvallarda keltirilgan amaldan boshqa unar va binar bormi?
11. Chinlik jadvali nima?
12. Qaysi amallar asosiy mantiqiy amallar deb yuritiladi?
13. Mulohazaning inkori deganda nimani tushunasiz?
14. Kon’yunksiya amali qanday bajariladi?
15. Diz’yunksiya amaliga o‘zbek tilining qaysi bog‘lovchisi mos keladi?
16. Nima uchun implikatsiyasi amalini bajarganda operandlar o‘rinlari muhim hisoblanadi?
17. Implikatsiyasi amali uchun asos va oqibat tushunchalarini bilasizmi?
18. Mulohazalarning ekvivalensiyasi deganda nimani tushunasiz?
19. Sheffer amali qaysi amalga nisbatan teskari amal hisoblanadi?
20. Pirs amali qaysi amalga nisbatan teskari amal hisoblanadi?
21. Asosiy chinlik jadvallarini bilasizmi?

**Mavzu: Bul funksiyalari soni. Elementar bul funksiyalari. Formula tushunchasi**

**Tavtologiya.** Tabiiyki, berilgan formula uning tarkibida qatnashuvchi elementar mulohazalarning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlar satrlari ucnun turli qiymatlar, jumladan, faqat ch yoki faqat yo qiymat qabul qilishi mumkin.

**1- ta’rif.** *Tarkibidagi elementar mulohazalarning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlar satrlarida faqat ch qiymat qabul qiluvchi formula* ***tavtologiya*** *deb ataladi.*

1- jadval

| $x$ | $y$ | $x \to y$ | $x \wedge (x \to y)$ | $x \wedge (x \to y) \to y$ |
|---|---|---|---|---|
| yo | yo | ch | yo | ch |
| yo | ch | ch | yo | ch |
| ch | yo | yo | yo | ch |
| ch | ch | ch | ch | ch |

Tavtologiya iborasi o‘rnida **aynan chin** yoki **doimo chin formula** iborasi ham qo‘llanilishi mumkin. Tavtologiya, ko‘pincha, $J$ yoki 1 bilan belgilanadi. Aynan chin formula, uning tarkibida ishtirok etuvchi o‘zgaruvchilarning qiymatlariga bog‘liq bo‘lmay, faqat bitta (ch) qiymat qabul qiladi.

Berilgan formula tavtologiya bo‘lishi yoki bo‘lmasligi, odatda, uning qiymatlar jadvali vositasida aniqlanadi.

**1- misol.** $D \equiv x \wedge (x \to y) \to y$ formula tavtologiyadir. Bu tasdiqning

to‘griligini tekshirish uchun 1- jadvalni ($D$ formulaning qiymatlar jadvalini) tuzamiz.

Berilgan $D$ formula uning tarkibida qatnashuvchi $x$ va $y$ elementar mulohazalarning mumkin bo‘lgan hamma qiymatlar satrlarida faqat ch qiymat qabul qilgani uchun, u tavtologiyadir, ya’ni $x \wedge (x \to y) \to y \equiv J$. ■

**2- misol.** Berilgan $B \equiv (\bar{x} \vee y) \to (x \to y) \to z$ formulani tekshirish uchun uning chinlik jadvalini tuzamiz (2- jadvalga qarang).

2- jadval

| $x$ | $y$ | $z$ | $\bar{x}$ | $\bar{x} \vee y$ | $x \to y$ | $(\bar{x} \vee y) \to (x \to y)$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| yo | yo | yo | ch | ch | ch | ch | yo |
| yo | yo | ch | ch | ch | ch | ch | ch |
| yo | ch | yo | ch | ch | ch | ch | yo |
| yo | ch | ch | ch | ch | ch | ch | ch |
| ch | yo | yo | yo | yo | yo | ch | yo |
| ch | yo | ch | yo | yo | yo | ch | ch |
| ch | ch | yo | yo | ch | ch | ch | yo |
| ch | ch | ch | yo | ch | ch | ch | ch |

2- jadvaldan ko‘rinib turibdiki, $(\bar{x} \vee y) \to (x \to y) \equiv J$, lekin $B \not\equiv J$. ■

Aynan chin formulalar mantiqda katta ahamiyatga ega bo‘lib, ular mantiq qonunlarini ifodalaydi. Shu sababli, mantiq algebrasida **yechilish muammosi** deb yuritiluvchi chekli miqdordagi amal yordamida berilgan ixtiyoriy mantiqiy formulaning aynan chin yoki aynan chin emasligini aniqlash masalasi dolzarb muammo hisoblanadi. Yechilish muammosi faqat mulohazalar algebrasi uchungina emas, balki boshqa mantiqiy sistemalar uchun ham qo‘yilishi mumkin. Yechilish muammosi mulohazalar algebrasi uchun ijobiy hal etiladi (ushbu bobning 5-paragrafiga qarang). Tabiiyki, yechilish muammosini turli usullar yordamida hal qilish mumkin. Bunday usullarni **yechuvchi usullar** deb ataymiz. Yechuvchi usul iborasi o‘rnida **yechish protsedurasi** yoki **yechish algoritmi** iboralari ham qo‘llanilishi mumkin.

Yechish protsedurasi sifatida chinlik jadvalini qo‘llashga asoslangan usulni olish mumkin, chunki chinlik jadvali har bir muayan formula uchun yechilish muammosini to‘liq hal qilish imkonini beradi. Agar berilgan formulaga mos keladigan chinlik jadvalning oxirgi ustunida faqat ch bo‘lsa, u holda bu formula aynan chin, agar oxirgi ustunda hech bo‘lmaganda bitta yo bo‘lgan holda esa formula aynan chin emas bo‘ladi. Tabiiyki, amalda bu usulni har doim ham qo‘llab bo‘lavermaydi, chunki u quyidagi asosiy kamchilikka ega. Agar berilgan formulada $n$ ta elementar o‘zgaruvchi mulohazalar qatnashsa, u holda bu formulaning chinlik jadvali $2^n$ ta satrga ega bo‘ladi va $n$ ning yetarli katta qiymatlarida bu yechish protsedurasini, hattoki, komp’yuter yordamida ham oxiriga yetkazib bo‘lmaydi. Lekin, prinsip jihatdan olganda, “chinlik jadvalini qo‘llashga asoslangan usul yordamida chekli miqdordagi amallar bajarib yechilish muammosini hal qilish mumkin” degan tasdiq to‘g‘ridir. Ushbu bobning keyingi paragraflarida boshqa bir yechuvchi protsedurani keltiramiz. Bu yechuvchi protsedura berilgan formulani normal shaklga keltirish usuliga asoslangan. Normal shakllar matematik mantiqning boshqa masalalarida ham ishlatiladi.

**Aynan yolg‘on formulalar**. Formula uning tarkibida ishtirok etuvchi elementar mulohazalarning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlar satrlari ucnun faqat yo qiymat qabul qilishi ham mumkin.

**2- ta’rif.** *Tarkibidagi elementar mulohazalarning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlar satrlarida faqat yo qiymat qabul qiluvchi formula* ***aynan yolg‘on*** **(*doimo yolg‘on*)** ***yoki bajarilmaydigan formula*** *deb ataladi.*

1- va 2- ta’riflardan yaqqol ko‘rinib turibdiki, aynan yolg‘on formula tavtologiyaning inkoridir, va, aksincha, tavtologiya aynan yolg‘on formulaning

inkoridir. Shuning ucnun aynan yolg‘on formulani $\bar{J}$ yoki 0 bilan belgilash joizdir.

Aynan yolg‘on formula ham, aynan chin formula kabi, o‘z tarkibida ishtirok etuvchi o‘zgaruvchilarning qiymatlariga bog‘liq emas, u faqat bitta (yo) qiymat qabul qiladi. Berilgan formulaning bajarilmaydigan formula bo‘lishi yoki bo‘lmasligi ham, odatda, uning qiymatlar jadvali yordamida aniqlanadi.

**3- misol.** $A \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge \overline{x \to y}$ formula aynan yolg‘on formuladir. Haqiqatdan ham, asosiy chinlik jadvallari yordamida $A$ formulaning chinlik jadvalini tuzsak, natijada 3- jadvalga ega bo‘lamiz.

3- jadval

| $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $\bar{x} \vee y$ | $x \to y$ | $\overline{x \to y}$ | $(\bar{x} \vee y) \wedge \overline{x \to y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| yo | yo | ch | ch | ch | Yo | yo |
| yo | ch | ch | ch | ch | Yo | yo |
| ch | yo | yo | yo | yo | Ch | yo |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ch | ch | yo | ch | ch | Yo | yo |

3- jadvalning oxirgi ustuniga ko‘ra $(\bar{x}\vee y)\wedge\overline{x\to y}\equiv \bar{J}$ . ■

**3- ta’rif.** *Agar $A$ va $B$ formulalar uchun $A\to B$ formula tavtologiya bo‘lsa, u holda $B$ formula $A$ formulaning* ***mantiqiy xulosasi*** *deb ataladi.*

**4- ta’rif.** *Agar $A$ va $B$ formulalar uchun $A\leftrightarrow B$ formula tavtologiya bo‘lsa, u holda berilgan formulalar* ***mantiqiy ekvivalent formulalar*** *deb ataladi.*

**4- misol.** 1- misolda $D\equiv x\wedge(x\to y)\to y$ formula tavtologiya bo‘lishini ko‘rgan edik (1- jadvalga qarang). Shu sababli, 3- ta’rifga ko‘ra, $y$ formula $x\wedge(x\to y)$ formulaning mantiqiy xulosasidir.

2- jadvalga ko‘ra (2- misolga qarang) $\bar{x}\vee y$ va $x\to y$ formulalar mantiqiy ekvivalent formulalar bo‘ladi hamda, shu bilan birga, $x\to y$ formula $\bar{x}\vee y$ formulaning mantiqiy xulosasidir degan tasdiqlar to‘g‘ridir. Albatta, $\bar{x}\vee y$ formula $x\to y$ formulaning mantiqiy xulosasidir degan tasdiq ham to‘g‘ri. ■

**1- teorema.** *Agar $A$ va $A\to B$ formulalarning har biri tavtologiya bo‘lsa, u holda $B$ formula ham tavtologiya bo‘ladi.*

**Isboti.** $A$ va $A\to B$ formulalarning har biri tavtalogiya bo‘lsin. Teorema tasdig‘ining teskarisini, ya’ni $A$ va $B$ formulalar tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchilarning hech bo‘lmaganda bitta qiymatlar satrida $B$ formula yo qiymat qabul qilsin deb faraz qilamiz. U holda, $A$ formula tavtologiya bo‘lganligi uchun, o‘zgaruvchilarning o‘sha qiymatlar satr(lar)ida $A$ ch qiymat qabul qiladi. Shu sababli $A\to B$ formula yo qiymat qabul qiladi. Bu esa $A\to B$ formula tavtologiyadir degan tasdiqqa qarama-qarshidir. Demak, $B$ tavtologiyadir. ■

**2- teorema.** *Agar $A_1$ formula tarkibiga bir yoki ko‘p marta kirgan $A$ formula o‘rniga $B$ formulani qo‘yish natijasida $B_1$ formula hosil qilinsa, u holda $(A\leftrightarrow B)\to(A_1\leftrightarrow B_1)$ formula tavtologiya bo‘ladi.*

**Isboti.** Agar tarkibidagi o‘zgaruvchilarning biror qiymatlar satrida $A$ va $B$ formulalar turli qiymatlarga ega bo‘lsa, u holda o‘sha qiymatlar satrida $A\leftrightarrow B$ formulaning qiymati yo bo‘ladi va, natijada, $A_1\leftrightarrow B_1$ formulaning qiymati qanday bo‘lishidan qat’iy nazar, $(A\leftrightarrow B)\to(A_1\leftrightarrow B_1)$ formula ch qiymat qabul qiladi.

Agar tarkibidagi o‘zgaruvchilarning qandaydir qiymatlar satrida $A$ va $B$ formulalar bir xil qiymat qabul qilsa, u holda o‘sha qiymatlar satrida $A_1$ va $B_1$ formulalar ham bir xil qiymat qabul qiladi, chunki teoremaning shartiga asosan $B_1$ formula $A_1$ formuladan $A$ formulaning o‘rniga $B$ formulani qo‘yish natijasida hosil qilingan. Demak, bu holda $A \leftrightarrow B$ va $A_1 \leftrightarrow B_1$ formulalarning ikkalasi ham ch qiymat qabul qiladi. Shuning uchun $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A_1 \leftrightarrow B_1)$ formula ham ch qiymat qabul qiladi.

Shunday qilib, yuqorida qaralgan mumkin bo‘lgan ikkala holda ham $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A_1 \leftrightarrow B_1)$ formula ch qiymat qabul qiladi. Demak, $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A_1 \leftrightarrow B_1)$ formula tavtologiya bo‘ladi. ■

2- teoremaga ko’ra, agar $A_1$ formula tarkibiga bir yoki ko‘p marta kirgan $A$ formula o‘rniga $B$ formulani qo‘yish natijasida $B_1$ formula hosil qilinsa, u holda $A$ va $B$ formulalarning mantiqiy ekvivalentligidan $A_1$ va $B_1$ formulalarning ham mantiqiy ekvivalentligi chiqadi.

**Bajariluvchi formulalar.** Endi berilgan formula uning tarkibida qatnashuvchi elementar mulohazalarning ba’zi qiymatlar satrlari ucnun ch, ba’zilari ucnun esa yo qiymat qabul qilish holini qaraymiz.

**5- ta’rif.** *Tarkibidagi elementar mulohazalarning kamida bitta qiymatlar satrida ch qiymat qabul qiluvchi aynan chin bo‘lmagan formula* ***bajariluvchi formula*** *deb ataladi.*

**5- misol.** $x \rightarrow y$, $x \wedge (x \rightarrow y)$, $\bar{x}$, $\bar{x} \vee y$ va $x \rightarrow y$ formulalar bajariluvchi formulalardir, lekin $x \wedge (x \rightarrow y) \rightarrow y$, $(\bar{x} \vee y) \rightarrow (x \rightarrow y)$ va $(\bar{x} \vee y) \wedge \overline{x \rightarrow y}$ formulalar bajariluvchi formulalar emas (1-, 2- va 3- jadvallarga qarang). ■

## Sinov savollari

11. Quyidagi gaplarning qaysilari mulohaza bo‘lishini aniqlang:
    a) “Qarshi shahri O‘zbekiston Respublikasida joylashgan.”;
    b) “Bir piyola suv bering.”; d) “$\sqrt{5} + 4\sqrt{3 - 30}$”;
    c) “Oy Mars planetasining yo‘ldoshidir.”; f) “$a > 0$”;

d) “Yashasin ozodlik!”; h) “Soat necha bo‘ldi?”.

12. Quyidagi mulohazalarning chin yoki yolg‘on ekanligini aniqlang:

a) $2 \in \{x \mid 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0, \quad x \in \boldsymbol{R}\}$; b) $\{1\} \in \boldsymbol{N}$;

b) “Yoshi o‘z otasining yoshidan katta odam yo‘q.”.

13. Quyidagi implikatsiyalarning qaysi birlari chin?

a) agar $2 \times 2 = 4$ bo‘lsa, u holda $2 < 3$ bo‘ladi;

b) agar $2 \times 2 = 4$ bo‘lsa, u holda $2 > 3$ bo‘ladi;

c) agar $2 \times 2 = 5$ bo‘lsa, u holda $2 < 3$ bo‘ladi;

d) agar $2 \times 2 = 5$ bo‘lsa, u holda $2 > 3$ bo‘ladi.

14. “Qodirova talabadir.” mulohazasi $a$ bilan, “Qodirova ingliz tilini biladi.” mulohazasi esa $b$ deb belgilangan bo‘lsin. U holda $\bar{a}$, $\bar{b}$, $a \wedge b$, $b \wedge a$, $a \vee b$, $b \vee a$, $a \to b$, $b \to a$, $a \leftrightarrow b$ va $b \leftrightarrow a$ ko‘rinishdagi murakkab mulohazalarni so‘zlar vositasida ifodalang hamda mumkin bo‘lgan barcha vaziyatlarda bu mulohazalarning chin yoki yolg‘on bo‘lishini tekshirib ko‘ring.

15. Mulohaza bo‘lishi mumkin bo‘lgan va mumkin bo‘lmagan gaplarga 10tadan misol keltiring.

16. Quyidagi murakkab mulohazalarga mos elementar mulohazalarni qandaydir harflar bilan belgilab, ularni mantiqiy algebra amallari vositasida ifodalang:

a) “100 natural sondir va u 10ga qoldiqsiz bo‘linadi.”;

b) “Botirning yoshi o‘z singlisining yoshidan katta emas.”;

c) “Agar fuqaro o‘rta ma’lumotga ega bo‘lsa, u holda u oliy o‘quv muassasalaridan birida o‘qishi mumkin.”.

17. Quyidagi mulohazalarni elementar va murakkab mulohazalarga ajrating va murakkab mulohazalardagi bog‘lovchilarni toping:

a) “Natural son 10ga qoldiqsiz bo‘linishi uchun uning o‘nli sanoq sistemasidagi yozuvi 0 raqami bilan tugashi zarur va yetarlidir.”;

b) “Sanamning yoshi o‘z opasining yoshidan katta emas.”

c) “O‘zbek alifbosida 38ta harf bor.”;

d) “Agar fuqaro o‘rta ma’lumotga ega bo‘lsa, u holda u oliy o‘quv muassasalaridan birida o‘qishi mumkin.”.

18. Sheffer shtrixi ishtirok etgan mulohazaga misol keltiring.
19. Pirs strelkasi ishtirok etgan mulohazaga misol keltiring.
20. Ikkilik sanoq sistemasida yozilgan natural sonlar ustida qo‘shish va ko‘paytirish amallarini mos ravishda mantiqiy yig‘indi (diz’yunksiya) va mantiqiy ko‘paytma (kon’yunksiya) amallari bilan solishtiring.

***Mustaqil ishlash uchun savollar***

22. Mulohazalar algebrasi deganda nimani tushunasiz?
23. Mulohaza nima?
24. Qanday mulohaza absolyut chin mulohaza deb ataladi?
25. Qanday mulohaza absolyut yolg‘on mulohaza deb ataladi?
26. O‘zgarmas mulohazalar qanday qiymatlar qabul qilishlari mumkin?
27. O‘zgaruvchi mulohazalar qanday qiymatlar qabul qilishlari mumkin?
28. Elementar va murakkab mulohaza tushunchlari bir-biridan nima bilan farq qiladi?
29. Mantiqiy amallar deganda nimani tushunasiz?
30. Nega mulohazalar algebrasi mulohazalar mantiqi deb ham yuritiladi?
31. Qiymatlar satri deganda nimani tushunasiz?

    1- va 2- jadvallarda keltirilgan amaldan boshqa unar va binar bormi?

32. Chinlik jadvali nima?
33. Qaysi amallar asosiy mantiqiy amallar deb yuritiladi?
34. Mulohazaning inkori deganda nimani tushunasiz?
35. Kon’yunksiya amali qanday bajariladi?
36. Diz’yunksiya amaliga o‘zbek tilining qaysi bog‘lovchisi mos keladi?
37. Nima uchun implikatsiyasi amalini bajarganda operandlar o‘rinlari muhim hisoblanadi?
38. Implikatsiyasi amali uchun asos va oqibat tushunchalarini bilasizmi?
39. Mulohazalarning ekvivalensiyasi deganda nimani tushunasiz?
40. Sheffer amali qaysi amalga nisbatan teskari amal hisoblanadi?
41. Pirs amali qaysi amalga nisbatan teskari amal hisoblanadi?
42. Asosiy chinlik jadvallarini bilasizmi?

**Mavzu: Mulohazalar algebrasi formulasining normal formasi tushunchasi**

**Mulohazalar formulasining normal shakllari.** Turli amaliy masalalarni yechishda mantiq algebrasining ahamiyati kattadir. Jumladan, kontakt va rele-kontaktli sxemalar bilan bog‘liq muammolarni hal qilishda, diskret ravishda ish ko‘ruvchi texnikaga oid masalalarni hamda matematik dasturlashqning turli masalalarini yechishda mantiq algebrasi ko‘p qo‘llaniladi. Mantiq algebrasidan foydalanib amaliy masalalarni hal qilishda esa mantiqiy **formulalarning normal shakllari** deb ataluvchi yozuvlar katta ahamiyatga egadir.

Oldingi paragraflarda o‘rganilgan teng kuchliliklar yordamida zarur almashtirishlar bajarib mulohazalar algebrasining berilgan ixtiyoriy formulasini turli ko‘rinishlarda yozish mumkin. Masalan, $\bar{a} \to bc$ formulani $a \vee bc$ yoki $(a \vee b)(a \vee c)$ ko‘rinishlarda yoza olamiz. Ushbu paragrafda quyidagi teng kuchliliklardan foydalanib formulalarning normal shakllari o‘rganiladi:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}, \qquad \overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}, \\ x \to y \equiv \bar{x} \vee y, \qquad \overline{x \to y} \equiv x \wedge \bar{y}, \\ x \leftrightarrow y \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}), \\ \overline{x \leftrightarrow y} \equiv (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y), \\ x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z), \\ x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Formulalarning normal shakllarini o‘rganish jarayonida (1) teng kuchliliklardan tashqari asosiy teng kuchliliklar qatoriga kiruvchi $x \vee y \equiv y \vee x$, $x \wedge y \equiv y \wedge x$, $(x \vee y) \vee z \equiv x \vee (y \vee z)$, $(x \wedge y) \wedge z \equiv x \wedge (y \wedge z)$ teng kuchliliklardan, ikki karra inkorni o‘chirish qonunidan, yutilish qonunlarini ifodalovchi $x \wedge (x \vee y) \equiv x$ va $x \vee x \wedge y \equiv x$ teng kuchliliklardan

$$\left.\begin{array}{l} A \wedge A \equiv A,\ A \vee A \equiv A,\ A \wedge J \equiv A,\ A \vee J \equiv J, \\ A \wedge \bar{J} \equiv \bar{J},\ A \vee \bar{J} \equiv A,\ A \vee \bar{A} \equiv J,\ A \wedge \bar{A} \equiv \bar{J} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

teng kuchliliklardan ham foydalanamiz.

Faraz qilaylik, $\sigma$ – ch yoki yo qiymat qabul qiluvchi qandaydir parametr bo‘lsin. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$x^{\sigma} = x\sigma \vee \bar{x}\bar{\sigma} .$$

Ravshanki,

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, \text{ agar } \sigma = \text{ch bo'lsa,} \\ \bar{x}, \text{ agar } \sigma = \text{yo bo'lsa,} \end{cases}$$

hamda faqat va faqat $x = \sigma$ bo‘lgandagina $x^{\sigma}$ ch qiymat qabul qiladi.

**1- ta’rif.** *Berilgan elementar mulohazalar (o‘zgaruvchilar) yoki ularning inkorlari kon’yunksiyalaridan tashkil topgan formula shu o‘zgaruvchilar* ***elementar kon’yunksiyasi,*** *bu o‘zgaruvchilar yoki ularning inkorlari diz’yunksiyalaridan tashkil topgan formula esa shu o‘zgaruvchilar* ***elementar diz’yunksiyasi*** *deb ataladi.*

Tabiiyki, elementar kon’yunksiya (elementar diz’yunksiya) tarkibida faqat bitta o‘zgaruvchi ishtirok etishi ham mumkin. Shu sababli, bitta (masalan, $x$) o‘zgaruvchining o‘zi yoki uning inkoridan iborat $x$ yoki $\bar{x}$ ko‘rinishdagi ifodalar elementar kon’yunksiya ham elementar diz’yunksiya ham bo‘la oladi.

Umuman olganda, berilgan $n$ ta $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilar elementar kon’yunksiyasi

$$x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n} \tag{3}$$

ko‘rinishdagi, bu o‘zgaruvchilar elementar diz’yunksiyasi esa

$$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \cdots \vee x_n^{\sigma_n} \tag{4}$$

ko‘rinishdagi formuladir. Bu yerda $\sigma_i$ $(i = \overline{1,n})$ ch yoki yo qiymat qabul qiluvchi qandaydir parametrni ifodalaydi hamda $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilar orasida bir xillari bo‘lishi ham mumkin.

**Formulaning normal shakllari.** Formulaning normal shakllari quyidagi ta’rif asosida aniqlanadi.

**2- ta’rif.** *Berilgan formulaning* ***kon’yunktiv normal shakli*** *deb unga teng kuchli va elementar diz’yunksiyalarning kon’yunksiyalaridan tashkil topgan formulaga****,*** ***diz’yunktiv normal shakli*** *deb esa unga teng kuchli va elementar kon’yunksiyalarning diz’yunksiyalaridan tashkil topgan formulaga aytiladi.*

“Kon’yunktiv normal shakl” iborasini, qisqacha, KNSh, “diz’yunktiv normal shakl” iborasini esa, DNSh deb yozamiz.

(3) formula DNShning **kon’yunktiv hadi**, (4) formula esa KNShning **diz’yunktiv hadi** deb ham yuritiladi.

1- va 2- ta’riflarga ko‘ra, teng kuchli almashtirishlar bajarib, mantiq algebrasining ixtiyoriy formulasi uchun turli KNShlar va DNShlar topilishi mumkin.

**1- misol.** Distributivlik va idempotentlik qonunlariga asoslanib, $\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}\wedge(x\rightarrow z)$ formulaning kon’yunktiv normal shakllari, masalan, $(x\vee y)\wedge(\bar{x}\vee z)$, $(x\vee y\vee y)\wedge(\bar{x}\vee z)$ va $(x\vee y)\wedge(\bar{x}\vee z)\wedge(z\vee\bar{x})$ formulalar, $(x\vee y)\wedge(x\vee z)$ formula uchun esa diz’yunktiv normal shakllar, masalan, $x\vee yz$ va $x\vee xz\vee yz$ formulalar bo‘lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas. ■

**1- teorema.** *Mantiq algebrasining ixtiyoriy formulasini KNShga keltirish mumkin.*

**Isboti.** Mantiq algebrasining ixtiyoriy formulasini tahlil qilib, agar berilgan formula KNShda bo‘lmasa, u vaqtda quyidagi ikkita hollardan biri ro‘y berishini ta’kidlaymiz:

a) berilgan formuladagi elementar mulohazalar faqat $\neg$, $\wedge$ va $\vee$ belgilar bilangina birlashtirilgan bo‘lsada, $\wedge$ belgilar eng so‘nggi amallarni ifodalamaydi;

b) berilgan formula tarkibidagi elementar mulohazalar $\neg$, $\wedge$ va $\vee$ belgilardan tashqari $\rightarrow$ va/yoki $\leftrightarrow$ belgilar bilan ham birlashtirilgan.

a) holda, diz’yunksiyaning kon’yunksiyaga nisbatan distributivlik xossasini ifodalovchi $a\vee(b\wedge c)\equiv(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ teng kuchlilikdan foydalanib, ((1)ga qarang) berilgan formulani unga teng kuchli formulaga keltiramiz.

b) holda, (1) teng kuchliliklardan foydalanib, berilgan formulaga teng kuchli va tarkibidagi elementar mulohazalari faqat $\neg$, $\wedge$ va $\vee$ belgilar bilangina birlashtirilgan formulani hosil qilamiz. Agar hosil qilingan formula KNShda bo‘lmasa, u vaqtda u, albatta, a) holda ifodalangan shaklda bo‘ladi. a) hol uchun ifodalangan jarayonni chekli marta qo‘llagandan so‘ng (zarur bo‘lsa (2) teng kuchliliklardan ham foydalanib) berilgan formulaga teng kuchli KNShdagi formulani hosil qilamiz. ■

Teoremaning yuqorida keltirilgan isboti konstruktiv xususiyatga ega, ya'ni bu isbotdan mantiq algebrasining berilgan formulasi uchun KNShni hosil qilishda algoritm sifatida foydalanish mumkin.

**2- misol.** Ushbu $((x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})) \vee (x \wedge (\bar{x} \vee y))$ formulaning biror KNShini topish talab etilgan bo'lsin. Berilgan formulani $P$ bilan belgilab (1) va (2) formulalardan foydalansak, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$P \equiv (((x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})) \vee x) \wedge (((x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})) \vee (\bar{x} \vee y)) \equiv \equiv ((x \vee y) \vee x) \wedge ((\bar{x} \vee \bar{y}) \vee x) \wedge$$
$$\wedge ((x \vee y) \vee (\bar{x} \vee y)) \wedge ((\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee y)) \equiv$$

$$\equiv (x \vee x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee x \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{x} \vee y \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee y) \equiv$$

$$\equiv (x \vee y) \wedge [J \vee \bar{y}] \wedge (J \vee y) \wedge (\bar{x} \vee J) \equiv \equiv (x \vee y) \wedge J \wedge J \wedge J \equiv x \vee y .$$

Demak, $P \equiv x \vee y$. Berilgan formulaning topilgan KNShida $x$ va $y$ o'zgaruvchilarning bittagina elementar diz'yunksiyasi bor, ya'ni berilgan formula uchun KNSh bittagina $x \vee y$ diz'yunktiv haddan iboratdir. ■

**3- misol.** $Q \equiv \overline{x \vee y} \leftrightarrow x \wedge y$ formulani KNShga keltirish maqsadida 2-misoldagidek ish yuritib

$$Q \equiv (\overline{\overline{x \vee y}} \vee (x \wedge y)) \wedge ((\overline{x \vee y}) \vee (\overline{x \wedge y})) \equiv$$

$$\equiv ((x \vee y) \vee (x \wedge y)) \wedge ((\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee \bar{y})) \equiv$$

$$\equiv ((x \vee y \vee x) \wedge (x \vee y \vee y)) \wedge ((\bar{x} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{y})) \equiv$$

$$\equiv (x \vee y) \wedge (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \equiv (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$$

teng kuchliliklarga ega bo'lamiz. Shunday qilib, $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$ formula berilgan $Q$ formula uchun KNSh bo'lib, u ikkita $x \vee y$ va $\bar{x} \vee \bar{y}$ diz'yunktiv hadlarning kon'yunksiyasidan iboratdir. ■

**2- teorema.** *Mantiq algebrasining formulasi tavtologiya bo'lishi uchun uning KNShidagi barcha elementar diz'yunktiv hadlarida kamida bittadan elementar mulohaza o'zining inkori bilan birga qatnashishi zarur va yetarli.*

**Isboti.** 1. Mantiq algebrasining $P$ formulasi

$$P \equiv A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \qquad (5)$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lib, uning KNShidagi barcha $A_i$ $(i=\overline{1,n})$ elementar diz’yunktiv hadlarida kamida bittadan elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham qatnashsin. Faraz qilaylik, $P$ formulaning $A_i$ $(i=\overline{1,n})$ hadida qandaydir $x_i$ elementar mulohaza bilan birga uning $\overline{x}_i$ inkori ham qatnashgan bo‘lsin. U holda $x \vee \overline{x} \equiv J$ va $J \vee A \equiv J$ teng kuchliliklarga asosan barcha $i=\overline{1,n}$ uchun $A_i \equiv J$ o‘rinlidir. Demak, agar barcha $i=\overline{1,n}$ uchun $A_i$ hadlar tarkibida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham qatnashgan bo‘lsa, u holda $P \equiv J \wedge J \wedge ... \wedge J \equiv J$, ya’ni $P$ tavtologiya bo‘ladi.

2. Mantiq algebrasining (5) ko‘rinishda ifodalangan $P$ formulasi tavtologiya bo‘lsin. Teorema tasdig‘iga teskari tasdiq o‘rinli deb faraz qilamiz. Ya’ni, $P$ formula tarkibidagi $A_i$ $(i=\overline{1,n})$ elementar diz’yunktiv hadlardan hech bo‘lmaganda bittasida hech qaysi bir elementar mulohaza o‘zining inkori bilan birga qatnashmagan bo‘lsin. Berilgan $P$ formulaning KNShidagi hech qaysi bir elementar mulohaza o‘zining inkori bilan birga qatnashmagan biror $A_{i'}$ $(1 \le i' \le n)$ elementar diz’yunktiv hadini tahlil qilamiz. Bu formulada hech qaysi bir elementar mulohaza o‘zining inkori bilan birga qatnashmaganligi sababli $A_{i'}$ formula uchun tuzilgan chinlik jadvalining shunday satri topiladiki, unda barcha elementar mulohazalar yo qiymatga ega bo‘ladi va $A_{i'}$ formula tarkibidagi barcha diz’yunksiya amallarini bajarish natijasi ham shu satr uchun yo bo‘ladi. Shuning uchun, kon’yunksiya amalining ta’rifiga ko‘ra, $P$ formula uchun tuzilgan chinlik jadvalining o‘sha satridagi qiymat yo bo‘ladi. Bu esa teorema isbotining “$P$ formula tavtologiya bo‘lsin” degan shartiga ziddir. ■

2- teorema berilgan formula tavtologiya yoki tavtologiya emasligini, chinlik jadvaliga murojaat qilmasdan, aniqlash imkonini beradi. Shuning uchun 2- teorema **chinlik alomati** deb yuritiladi. Chinlik alomatiga ko‘ra, berilgan formulaning tavtologiya bo‘lishi yoki bo‘lmasligini aniqlash uchun, uni KNShga keltirish kerak. Agar formulaning KNShdagi barcha elementar dizyunksiyalar ifodasida hech bo‘lmaganda bitta elementar mulohaza o‘zining inkori bilan birga qatnashgan bo‘lsa, u holda bu formula tavtologiya, aks holda esa tavtologiya emasligi aniqlanadi.

**4- misol.** 2- teoremadan foydalanib $x \wedge \bar{x} \to \overline{y \wedge \bar{y}}$ va $\overline{x \wedge \bar{x}} \wedge (y \wedge \bar{y} \to z)$ formulalarning tavtologiya bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiramiz. Berilgan formulalarni, mos ravishda, $P$ va $Q$ bilan belgilab, (1) va (2) formulalardan foydalansak, quyidagi KNShlarga ega bo‘lamiz:

$$P = \overline{x \wedge \bar{x}} \vee \overline{y \wedge \bar{y}} = \bar{x} \vee x \vee \bar{y} \vee y,$$

$$Q = (\bar{x} \vee x) \wedge (\overline{y \wedge \bar{y}} \vee z) = (\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee y \vee z).$$

Bu formulalarning KNShlarida kamida bittadan elementar mulohaza o‘zining inkori bilan birga qatnashgani uchun berilgan formulalarning har biri tavtologiyadir. ■

**3- teorema.** *Mantiq algebrasining ixtiyoriy formulasini DNShga keltirish mumkin.*

**Isboti.** 1- teoremaga ko‘ra mantiq algebrasining ixtiyoriy formulasini qandaydir $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_m$ KNShga keltirish mumkin, bu yerda $A_i$ $(i = \overline{1,m})$ – elementar dizyunksiyalar. Ravshanki, elementar dizyunksiyning inkori elementar konyunksiya bo‘ladi. Shuning uchun berilgan formulaning inkori

$$\overline{A_1 \wedge A_2 \wedge ...... \wedge A_m} = \overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee ...... \vee \overline{A_m}$$

DNShda bo‘ladi, bunda $\overline{A_i}$ $(i = \overline{1,m})$ – elementar konyunksiyalar. ■

**4- teorema.** *Mantiq algebrasining formulasi aynan yolg‘on bo‘lishi uchun uning DNShdagi barcha elementar kon’yunktiv hadlarida kamida bittadan elementar mulohaza o‘zining inkori bilan birga qatnashishi zarur va yetarli.*

**Isboti.** 1. Mantiq algebrasining $P$ formulasi $P \equiv A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$ ko‘rinishda berilgan bo‘lib, uning DNShidagi barcha $A_i$ $(i = \overline{1,n})$ elementar kon’yunktiv hadlarida kamida bittadan elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham qatnashsin. Berilgan $P$ formulaning $A_i$ $(i = \overline{1,n})$ hadida qandaydir $x_i$ elementar mulohaza bilan birga uning $\bar{x}_i$ inkori ham qatnashgan bo‘lsin deb faraz qilaylik. U holda $x \wedge \bar{x} \equiv \bar{J}$ va $\bar{J} \wedge A \equiv \bar{J}$ teng kuchliliklarga asosan barcha $i = \overline{1,n}$ uchun $A_i \equiv \bar{J}$ o‘rinlidir. Demak, agar barcha $i = \overline{1,n}$ uchun $A_i$ hadlar tarkibida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham qatnashgan bo‘lsa, u holda $P \equiv \bar{J} \vee \bar{J} \vee ... \bar{J} \vee \equiv \bar{J}$, ya’ni $P$ aynan yolg‘on bo‘ladi.

2. Mantiq algebrasining $P$ formulasi aynan yolg‘on bo‘lsin. U holda $P$ formulaning inkori doimo chin bo‘ladi. Shuning uchun, 2- teoremaga asosan, $\overline{P}$ formulaning KNShdagi barcha elementar diz’yunksiyalarida kamida bittadan elementar mulohaza bilan birga uning inkori ham topiladi. Demak, $\overline{\overline{P}} = P$ fopmulaning DNShdagi barcha kon’yunktiv hadlarida kamida bittadan elementar mulohaza o‘zining inkori bilan birga qatnashadi. ■

4- teorema berilgan formulaning doimo yolg‘on bo‘lishi yoki bo‘lmasligini, chinlik jadvaliga murojaat qilmasdan, aniqlash imkonini bergani uchun, uni **yolg‘onlik alomati** deb atash mumkin.

**5- misol.** Berilgan

$$P \equiv (x \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (y \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{x} \wedge z \wedge \bar{z})$$

formulaning doimo yolg‘on formula bo‘lishini ko‘rsatamiz.

Haqiqatdan ham, $P$ formula DNShda yozilgan bo‘lib, uning tarkibidagi 1-elementar kon’yunksiya ifodasida $x$, 2- ifodasida $y$, 3-sida esa $x$ va $z$ elementar mulohazalar o‘zlarining inkorlari bilan birgalikda qatnashganlari uchun, yolg‘onlik alomatiga asosan, $P \equiv \bar{J}$. ■

**5- teorema.** *Mulohazalar algebrasining ixtiyoriy formulasi uchun yechilish muammosi doimo ijobiy hal bo‘ladi.*

**Isboti.** Agar mulohazalar algebrasining berilgan formulasi KNShda bo‘lmasa, uni KNShga keltirgandan so‘ng, 2- teoremaga asosan, bu formulaning tavtologiya bo‘lishi yoki bo‘lmasligi aniqlanadi. Agar berilgan formula tavtologiya bo‘lmasa, uni DNShga keltirib, 4- teorema asosida, formulaning aynan yolg‘on bo‘lishi yoki bo‘lmasligi aniqlanadi. Agar tekshirilayotgan formula doimo chin va doimo yolg‘on bo‘lish shartlarini qanoatlantirmasa, u holda u bajariluvchi formula bo‘ladi. Demak, mulohazalar algebrasining berilgan formulasi tavtologiya, aynan yolg‘on yoki bajariluvchi formula bo‘lishini chekli sondagi qadamlar jarayonida aniqlash mumkin. Shuning uchun mulohazalar algebrasining ixtiyoriy formulasi uchun yechilish muammosi doimo ijobiy hal bo‘ladi.

## Mavzu: Mukammal diz'yunktiv va konyunktiv normal forma

**To'g'ri va to'liq elementar kon'yunksiya va diz'yunksiyalar.** Yuqorida teng kuchli almashtirishlar bajarib, mantiq algebrasining berilgan formulasi uchun turli KNShlar va DNShlar topish mumkinligi haqida ma'lumot berilgan edi. Formulalar uchun turli KNShlar va DNShlar orasida muayyan shartlarni qanoatlantiradiganlari muhim hisoblanadi. Quyida shunday shakllar o'rganiladi.

**1- ta'rif.** *Agar elementar kon'yunksiya (diz'yunksiya) ifodasida ishtirok etuvchi har bir elementar mulohaza shu ifodada faqat bir marta uchrasa, u holda bu ifoda* ***to'g'ri elementar kon'yunksiya (diz'yunksiya)*** *deb ataladi.*

**1- misol.** Berilgan $a \vee b \vee c$ va $\bar{a} \vee d \vee f$ elementar diz'yunksiyalar to'g'ri elementar diz'yunksiyalar, $\bar{a}bdc$ va $\bar{a}e\bar{c}b$ elementar kon'yunksiyalar esa to'g'ri elementar kon'yunksiyalardir. Lekin, $a \vee u \vee u \vee c$ va $u \vee \bar{u} \vee e \vee n$ elementar diz'yunksiyalar ifodasida $u$ elementar mulohaza bir martadan ortiq qatnashganligi sababli, ularning hech biri to'g'ri elementar diz'yunksiya bo'la olmaydi. $x_2$ elementar mulohaza $x_1x_2x_3\bar{x}_2$ va $x_2x_2\bar{x}_2x_2x_6$ elementar kon'yunksiyalar tarkibida bir martadan ortiq qatnashganligi sababli, bu ifodalarning hech qaysisi to'g'ri elementar kon'yunksiya bo'la olmaydi. ■

**2- ta'rif.** *Agar berilgan elementar mulohazalarning har biri elementar kon'yunksiya (diz'yunksiya) ifodasida faqat bir matra qatnashsa, bu ifoda shu* ***elementar mulohazalarga nisbatan to'liq elementar kon'yunksiya (diz'yunksiya)*** *deb ataladi.*

**2- misol.** Ushbu $x_1x_2x_3$, $x_1x_2x_3\bar{x}_2x_3$ va $\bar{x}_1x_5\bar{x}_3x_2$ elementar kon'yunksiyalarning hech qaysi biri $x_1, x_2, x_3, x_4$ elementar mulohazalarga nisbatan to'liq elementar kon'yunksiya emas, lekin ularning birinchisi $x_1, x_2, x_3$ elementar mulohazalarga nisbatan, oxirgisi esa $x_1, x_2, x_3, x_5$ elementar mulohazalarga nisbatan to'liq elementar kon'yunksiyadir.

Berilgan $\bar{a} \vee b \vee d \vee c$ elementar diz'yunksiya $a,b,c,d$ elementar mulohazalarga nisbatan to'liq elementar diz'yunksiyadir, $x_1 \vee x_4 \vee x_3$ elementar diz'yunksiya esa $x_1, x_3, x_4$ elementar mulohazalarga nisbatan to'liq elementar diz'yunksiya bo'lsada, u $x_1, x_2, x_3, x_4$ elementar mulohazalarga nisbatan to'liq elementar diz'yunksiya bo'la olmaydi. ■

**3- ta'rif.** *Agar formulaning KNShi (DNShi) ifodasida bir xil elementar diz'yunksiyalar (kon'yunksiyalar) bo'lmasa va barcha elementar diz'yunksiyalar (kon'yunksiyalar) to'g'ri hamda ifodada qatnashuvchi barcha elementar mulohazalarga nisbatan to'liq bo'lsa, u holda bu ifoda* ***mukammal kon'yunktiv normal shakl*** *(**mukammal diz'yunktiv normal shakl**) deb ataladi.*[33]

**4- ta'rif.** *Berilgan $x_1, x_2, ..., x_n$ elementar mulohazalarga nisbatan formulaning MKNShidagi har bir $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \cdots \vee x_n^{\sigma_n}$ had* ***diz'yunktiv konstituyent,*** *uning MDNShidagi har bir $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n}$ had esa* ***kon'yunktiv konstituyent*** *deb ataladi.*

4- ta'rifda yerda $\sigma_i$ $(i = \overline{1,n})$ ch yoki yo qiymat qabul qiluvchi parametrni ifodalaydi va $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilar orasida bir xillari yo'q.

**3- misol.** Tarkibida faqat bitta asosiy mantiqiy amal qatnashgan formulalarning mukammal normal sakllari (MKNShlari va MDNShlari) 1- jadvalda keltirilgan.

Yuqoridagi tasdiqning to'g'riligini tekshirish o'quvchiga havola qilinadi.

1- jadvaldan ko'rinib turubdiki, $\bar{x}$ formulaning MKNShi ham, MDNShi ham uning o'zidan iborat; $x \wedge y$ formulaning MKNShida uchta ($x \vee y$, $\bar{x} \vee y$ va $x \vee \bar{y}$) diz'yunktiv konstituyentlar bor, uning MDNShi esa bitta kon'yunktiv konstituyentdan (shu formulaning o'zidan) iborat; va hokazo. ■

1- jadval

| Amal | MKNSh | MDNSh |
|---|---|---|
| $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ |
| $x \wedge y$ | $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$ | $x \wedge y$ |
| $x \vee y$ | $x \vee y$ | $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$ |

[33] "Mukammal kon'yunktiv normal shakl" iborasini, qisqacha, MKNSh, "mukammal diz'yunktiv normal shakl" iborasini esa, MDNSh deb yozamiz.

| | | |
|---|---|---|
| $x \to y$ | $\bar{x} \vee y$ | $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$ |
| $x \leftrightarrow y$ | $(\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$ | $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$ |

**1- teorema.** *Elementar mulohazalarning tavtologiyadan farqli ixtiyoriy formulasini MKNShga keltirish mumkin.*

Teoremaning quyidagi konstruktiv **isboti** tavtologiyadan farqli ixtiyoriy **mantiqiy formulani MKNShga keltirish algoritmi** sifatida ishlatilishi mumkin.

1. Berilgan formulani KNShga keltiramiz.

Buning uchun formulani faqat kon’yunksiya, diz’yunksiya va inkor mantiqiy amallari orqali ifodalaymiz (bunda inkor amali faqatgina o‘zgaruvchilarga nisbatan qo‘llanilgan bo‘lishi kerak). Formulani KNShga keltirish jarayonida, vaziyatga qarab, zarur qoida va qonunlardan foydalangan holda mumkin bo‘lgan soddalashtirishlarni bajaramiz.

2. Agar KNSh ifodasida bittadan ko‘p bir xil elementar diz’yunksiyalar topilsa, u holda $A \wedge A \equiv A$ teng kuchlilikdan foydalanib, ulardan faqat bittasini berilgan formulaning ifodasida qoldiramiz.

3. Agar KNSh ifodasidagi barcha elementar diz’yunksiyalar to‘g‘ri elementar diz’yunksiyalar bo‘lsa, u holda algoritmning 4- bandiga o‘tamiz, aks holda barcha elementar diz’yunksiyalarni to‘g‘ri elementar diz’yunksiyalarga aylantiramiz.

Buning uchun, vaziyatga qarab, quyidagi ikki jarayon qo‘llanilishi mumkin:

a) agar biror elementar diz’yunksiya ifodasida birorta o‘zgaruvchi o‘zining inkori bilan birgalikda qatnashgan bo‘lsa, u holda $x \vee \bar{x} \equiv J$, $A \wedge J \equiv A$ va $J \wedge A \equiv A$ teng kuchliliklarga asosan bu elementar kon’yunksiyani KNSh ifodasidan olib tashlaymiz;

b) agar qandaydir elementar diz’yunksiya ifodasida biror o‘zgaruvchi bir necha marta qatnashgan (barcha hollarda yo inkor ishorasi ostida yoki barcha hollarda inkor ishorasi ostida emas) bo‘lsa, u holda $x \vee x \equiv x$ teng kuchlilikka asosan ulardan faqatgina bittasini elementar diz’yunksiya ifodasida qoldiramiz.

Natijada, barcha elementar diz’yunksiyalar to‘g‘ri elementar diz’yunksiyalarga aylanadi.

4. Agar KNSh ifodasidagi barcha elementar diz’yunksiyalar to‘liq elementar diz’yunksiyalar bo‘lsa, u holda algoritmning 6- bandiga o‘tamiz, aks holda barcha elementar diz’yunksiyalarni to‘liq elementar diz’yunksiyalarga aylantiramiz. Agar KNShdagi biror elementar diz’yunksiya to‘liq elementar diz’yunksiya bo‘lmasa, ya’ni biror diz’yunktiv had ifodasidagi elementar mulohazalardan ba’zilari (yoki ularning inkorlari) topilmasa, u holda bunday elementar diz’yunksiyani quyidagi usul yordamida to‘liq elementar diz’yunksiya holiga keltiramiz.

Masalan, tarkibida $a, b, c, ..., u, y, ..., z$ elementar mulohazalalar ishtirok etgan, tavtologiyadan farqli, $F \equiv a \vee b \vee \bar{c} \vee ... \vee u \vee \bar{y} \vee ... \vee z$ elementar diz’yunksiya ifodasida faqat $x$ o‘zgaruvchi yoki uning inkori $\bar{x}$ yo‘q deb faraz qilaylik. U holda $x \wedge \bar{x} \equiv \bar{J}$ va $A \vee \bar{J} \equiv A$ teng kuchliliklardan foydalanib $F$ elementar diz’yunksiyani ikkita to‘liq elementar diz’yunksiyalar kon’yunksiyasiga keltiramiz:

$$F \equiv (a \vee b \vee \bar{c} \vee ... \vee u \vee \bar{y} \vee ... \vee z) \vee (x \wedge \bar{x}) \equiv \equiv (a \vee b \vee \bar{c} \vee ... \vee u \vee x \vee \bar{y} \vee ... \vee z) \wedge$$

$$\wedge (a \vee b \vee \bar{c} \vee ... \vee u \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee ... \vee z).$$

Agar biror elementar diz’yunksiya ifodasida $m$ ta o‘zgaruvchilar qatnashmayotgan bo‘lsa, u holda bu jarayonni har bir o‘zgaruvchi uchun (ya’ni, $m$ marta) yoki $m$ ta o‘zgaruvchilar uchun birdaniga qo‘llash natijasida bitta to‘liq bo‘lmagan elementar diz’yunksiya o‘rnida unga teng kuchli $2^m$ ta to‘liq elementar diz’yunksiyalar kon’yunksiyalariga ega bo‘lamiz.

5. Agar 4- band bajarilishi natijasida KNSh ifodasida bir xil elementar diz’yunksiyalar paydo bo‘lsa, u holda algoritmning 2- bandiga o‘tamiz.

6. Algoritm tugadi.

Demak, formulani MKNShga keltirish algoritmini qo‘llash natijasida berilgan KNSh ifodasida bir xil elementar diz’yunksiyalar qatnashmaydi va barcha elementar diz’yunksiyalar to‘g‘ri va to‘liq bo‘ladi. 1- ta’rifga asosan bunday KNSh MKNShdir. ■

**4- misol.** Formulani MKNShga keltirish algoritmidan foydalanib $x$, $y$, $z$ va $u$ elementar mulohazalarning $A \equiv (\bar{x} \to x) \wedge (y \to \bar{y}) \wedge (z \leftrightarrow u)$ formulasini MKNShga keltiramiz. Dastlab, algoritmning 1- bandiga ko‘ra, berilgan $A$ formulani KNShga keltiramiz. Buning uchun, avvalo, $a \to b \equiv \bar{a} \vee b$ va

$a \leftrightarrow b \equiv (\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b})$ teng kuchliliklardan foydalanib $A$ formulani faqat kon’yunksiya, diz’yunksiya va inkor mantiqiy amallari orqali ifodalaymiz:

$$A \equiv (\bar{\bar{x}} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee \bar{y}) \wedge ((\bar{z} \vee u) \wedge (z \vee \bar{u})).$$

Hosil bo‘lgan formulaga $\bar{\bar{x}} \equiv x$ teng kuchlilikni qo‘llasak, $A$ formula $(x \vee x) \wedge (\bar{y} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{z} \vee u) \wedge (z \vee \bar{u})$ KNShga keladi.

KNSh ifodasida barcha elementar diz’yunksiyalar turlicha bo‘lganligi sababli algoritmning 2- bandini bajarishga hojat yo‘q.

KNSh ifodasidagi 1- va 2- elementar diz’yunksiyalar to‘g‘ri elementar diz’yunksiyalar bo‘lmaganligi uchun algoritmning 3- banda ifodalangan jarayonlarni bajarishga o‘tamiz. KNSh ifodasidagi hech qaysi elementar diz’yunksiya ifodasida birorta ham o‘zgaruvchi o‘zining inkori bilan birgalikda qatnashmaganligi sababli 3- banddagi a) hol bu yerda ro‘y bermaydi. KNSh ifodasidagi 1- elementar diz’yunksiyada $x$, 2- elementar diz’yunksiyada esa $\bar{y}$ ikki marta qatnashgani uchun b) holda bayon qilingandek ish yuritib, $A$ formula uchun barcha elementar diz’yunksiyalari to‘g‘ri elementar diz’yunksiyalardan iborat $x \wedge \bar{y} \wedge (\bar{z} \vee u) \wedge (z \vee \bar{u})$ KNShni hosil qilamiz. Ushbu bobning 5- paragrafidagi 2- teoremaga asosan, $A$ formula tavtologiya emas.

Algoritmning 4- bandini bajaramiz. Ko‘rinib turibdiki, KNShdagi 1- elementar diz’yunksiyada $y$, $z$ va $u$, 2- elementar diz’yunksiyada $x$, $z$ va $u$, 3- va 4- elementar diz’yunksiyalarda esa $x$ va $y$ o‘zgaruvchilar yoki ularning inkorlari yo‘q. Shularni e’tiborga olib, KNSh ifodasidagi to‘rtala elementar diz’yunksiyalarni to‘liq elementar diz’yunksiyalar shakliga keltirish maqsadida 4- bandda ifodalangan jarayonni qo‘llaymiz. Natijada 1- elementar diz’yunksiya ($x$) uchun

$$x \equiv x \vee (y \wedge \bar{y}) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv$$

$$\equiv ((x \vee y) \vee (z \wedge \bar{z})) \wedge ((x \vee \bar{y}) \vee (z \wedge \bar{z})) \equiv$$

$$\equiv (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \equiv$$

$$\equiv ((x \vee y \vee z) \vee (u \wedge \bar{u})) \wedge ((x \vee y \vee \bar{z}) \vee (u \wedge \bar{u})) \wedge$$

$$\wedge ((x \vee \bar{y} \vee z) \vee (u \wedge \bar{u})) \wedge ((x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \vee (u \wedge \bar{u})) \equiv$$

$$\equiv (x \vee y \vee z \vee u) \wedge (x \vee y \vee z \vee \bar{u}) \wedge \wedge (x \vee y \vee \bar{z} \vee u) \wedge (x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{u}) \wedge$$

$$\wedge(x\vee\bar{y}\vee z\vee u)\wedge(x\vee\bar{y}\vee z\vee\bar{u})\wedge$$

$$\wedge(x\vee\bar{y}\vee\bar{z}\vee u)\wedge(x\vee\bar{y}\vee\bar{z}\vee\bar{u}),$$

2- elementar diz'yunksiya ( $\bar{y}$ ) uchun[34]

$$\bar{y}\equiv(x\vee\bar{y}\vee z\vee u)\wedge(x\vee\bar{y}\vee z\vee\bar{u})\wedge\wedge(x\vee\bar{y}\vee\bar{z}\vee u)\wedge(x\vee\bar{y}\vee\bar{z}\vee\bar{u})\wedge$$

$$\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z\vee u)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z\vee\bar{u})\wedge$$

$$\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z}\vee u)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z}\vee\bar{u}),$$

3- elementar diz'yunksiya ( $\bar{z}\vee u$ ) uchun

$$\bar{z}\vee u\equiv(x\vee y\vee\bar{z}\vee u)\wedge(x\vee\bar{y}\vee\bar{z}\vee u)\wedge$$

$$\wedge(\bar{x}\vee y\vee\bar{z}\vee u)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z}\vee u)$$

va 4- elementar diz'yunksiya ( $z\vee\bar{u}$ ) uchun

$$z\vee\bar{u}\equiv(x\vee y\vee z\vee\bar{u})\wedge(x\vee\bar{y}\vee z\vee\bar{u})\wedge$$

$$\wedge(\bar{x}\vee y\vee z\vee\bar{u})\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z\vee\bar{u})$$

teng kuchliliklarga ega bo'lamiz.

Topilgan barcha KNShlar $x$, $y$, $z$ va $u$ elementar mulohazalarga nisbatan to'liq KNShlardir. Bu KNShlarni o'zaro solishtirib, ularning tarkibida bir xil elementar diz'yunksiyalar bor (masalan, 1- va 2- KNShlardagi $x\vee\bar{y}\vee z\vee u$ elementar diz'yunksiya) bo'lgan vaziyat ro'y berganligini aniqlaymiz. Shuning uchun, algoritmning 5- bandi boshqarishni uning 2- bandiga o'tkazadi.

Algoritmning 2- bandini bajarib, $A$ formula uchun

$$(x\vee y\vee z\vee u)\wedge(x\vee y\vee z\vee\bar{u})\wedge(x\vee y\vee\bar{z}\vee u)\wedge$$

$$\wedge(x\vee y\vee\bar{z}\vee\bar{u})\wedge(x\vee\bar{y}\vee z\vee u)\wedge(x\vee\bar{y}\vee z\vee\bar{u})\wedge$$

$$\wedge(x\vee\bar{y}\vee\bar{z}\vee u)\wedge(x\vee\bar{y}\vee\bar{z}\vee\bar{u})\wedge(\bar{x}\vee y\vee z\vee\bar{u})\wedge$$

$$\wedge(\bar{x}\vee y\vee\bar{z}\vee u)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z\vee u)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z\vee\bar{u})\wedge$$

$$\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z}\vee u)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z}\vee\bar{u})$$

KNSh ifodasiga ega bo'lamiz.

Algoritmning 3- bandi boshqarishni uning 4- bandiga, 4- bandi esa 6- bandiga o'tkazadi, chunki oxirgi KNSh ifodasidagi barcha elementar diz'yunksiyalar to'g'ri va to'liq elementar diz'yunksiyalardir. Sunday qilib, berilgan $A$ formula uchun oxirgi formula MKNShdir. ■

---

[34] Bu yerda va keyingi elementar diz'yunksiyalar uchun oralik teng kuchliliklarni tushirib qoldirdik.

Ravshanki, agar formulaning MKNShi tarkibida qatnashuvchi barcha ifodalardagi $\wedge$ belgi o‘rniga $\vee$ belgi va, aksincha, $\vee$ o‘rniga $\wedge$ qo‘yilsa, u holda MDNSh hosil bo‘ladi. Xuddi shuningdek, agar formulaning MDNShi tarkibida qatnashuvchi barcha ifodalarda shunday o‘zgartirishlar bajarilsa, u holda MKNSh hosil bo‘ladi.

**2- teorema.** *Elementar mulohazalarning aynan yolg‘on bo‘lmagan ixtiyoriy formulasini MDNShga keltirish mumkin.*

**Isboti.** Elementar mulohazalarning aynan yolg‘on formulasidan farqli berilgan formulasini $A$ bilan belgilab, avvalo, $\overline{A}$ formulani MKNShga keltiramiz. $\overline{\overline{A}} \equiv A$ teng kuchlilikdan foydalanib, $\overline{A}$ formulaning MKNShi tarkibida qatnashuvchi barcha ifodalardagi $\wedge$ belgi o‘rniga $\vee$ belgi va, aksincha, $\vee$ o‘rniga $\wedge$ hamda elementar mulohazalar o‘rinlariga mos ravishda ularning inkorlari, va, aksincha, elementar mulohazalarning inkorlari o‘rinlariga mos ravishda ularning o‘zlari qo‘yilsa, u holda $A$ formulaning MDNShi hosil bo‘ladi. ■

**5- misol.** 2- teoremadan foydalanib, 4- misolda MKNShi topilgan $A \equiv (\overline{x} \to x) \wedge (y \to \overline{y}) \wedge (z \leftrightarrow u)$ formulani MDNShga keltiramiz. Ushbu bobning 5- paragrafidagi 4- teoremaga asoslanib, berilgan $A$ formulaning doimo yolg‘on emasligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Avvalo mantiqiy formulani MKNShga keltirish algoritmidan foydalanib $\overline{A} \equiv \overline{(\overline{x} \to x) \wedge (y \to \overline{y}) \wedge (z \leftrightarrow u)}$ formulani MKNShga keltiramiz:

$$\overline{A} \equiv \overline{\overline{x} \to x} \vee \overline{y \to \overline{y}} \vee \overline{z \leftrightarrow u} \equiv \overline{x}\overline{x} \vee y\overline{\overline{y}} \vee z\overline{u} \vee \overline{z}u \equiv$$
$$\equiv \overline{x} \vee y \vee z\overline{u} \vee \overline{z}u \equiv (\overline{x} \vee y \vee z \vee \overline{z}u)(\overline{x} \vee y \vee \overline{u} \vee \overline{z}u) \equiv$$
$$\equiv (\overline{x} \vee y \vee z \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee z \vee u)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z} \vee \overline{u})(\overline{x} \vee y \vee \overline{u} \vee u) \equiv$$
$$\equiv (\overline{x} \vee y \vee J)(\overline{x} \vee y \vee z \vee u)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z} \vee \overline{u})(\overline{x} \vee y \vee J) \equiv$$
$$\equiv (\overline{x} \vee y \vee z \vee u)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z} \vee \overline{u}).$$

$\overline{A}$ formulaning topilgan MKNShi tarkibida qatnashgan barcha $\wedge$ belgilar o‘rniga $\vee$ belgi va, aksincha, $\vee$ o‘rniga $\wedge$ hamda $y$, $z$ va $u$ elementar mulohazalar o‘rinlariga mos ravishda $\overline{y}$, $\overline{z}$ va $\overline{u}$, shunga o‘xshash, $\overline{x}$, $\overline{z}$ va $\overline{u}$ inkorlar o‘rinlariga mos ravishda $x$, $y$, $z$ va $u$ qo‘yilsa, u holda $A$ formulaning MDNShi $x\overline{y}\overline{z}\overline{u} \vee x\overline{y}zu$ hosil bo‘ladi. ■

**5- ta'rif.** *Agar formulaning MKNShi (MDNShi) ifodasida qatnashuvchi barcha elementar mulohazalardan tuzish mumkin bo'lgan barcha elementar diz'yunksiyalar (kon'yunksiyalar) shu ifodada ishtirok etsa, u holda bunday MKNSh (MDNSh)* ***to'liq MKNSh (MDNSh)*** *deb ataladi.*

**6- misol.** Ushbu $(x\vee y)(x\vee \bar{y})(\bar{x}\vee y)$ formula $x$ va $y$ elementar mulohazalarga nisbatan MKNShda bo'lsada, u to'liq MKNShda emas. $x$ va $y$ elementar mulohazalarga nisbatan to'liq MKNShi ifodasi $(x\vee y)(x\vee \bar{y})(\bar{x}\vee y)(\bar{x}\vee \bar{y})$ ko'rinishga ega.

MDNShdagi $xyz\vee xy\bar{z}\vee \bar{x}yz\vee x\bar{y}z$ formula $x$, $y$ va $z$ elementar mulohazalarga nisbatan to'liq MDNShda emas, lekin $xyz\vee \bar{x}yz\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{z}\vee \bar{x}\,\bar{y}z\vee \bar{x}y\bar{z}\vee x\bar{y}\bar{z}\vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ formula bu elementar mulohazalarga nisbatan to'liq MDNShdagi formuladir.

## Mavzu: Jegalkin ko'phadi. Funksiyalar sistemasining to'liqligi va yopiqligi. Muhim yopiq sinflar. Post teoremasi

**Mantiq algebrasidagi arifmetik amallar.** {0,1} Bul algebrasidagi kon'yunksiya amali oddiy arifmetikadagi 0 va 1 sonlar ustidagi ko'paytma amaliga mos keladi. Ammo 0 va 1 sonlarini qo'shish natijasi {0,1} to'plam doirasidan chetga chiqadi. Shuning uchun I.I.Jegalkin[35] 2 moduliga asosan qo'shish amalini kiritdi. $x$ va $y$ mulohazalarni 2 moduli bo'yicha qo'shishni $x+y$ deb belgilaymiz. 2 moduli bo'yicha qo'shish, odatda, chinlik jadvali bilan beriladi (1- jadvalga qarang).

1- jadval

| $x$ | $y$ | $x+y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |

[35] Jegalkin Ivan Ivanovich (Жегалкин Иван Иванович 1869-1947) – sovet matematigi. I. I. Jegalkin XX asrning 30- yillari boshida MDUda birinchi bo'lib matematik mantiq bo'yicha ilmiy seminar tashkil etgan.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Chinlik jadvalidan ko‘rinib turibdiki, $x+y=\overline{x\leftrightarrow y}$ bo‘ladi. Mantiq algebrasidagi ko‘paytma va 2 moduli bo‘yicha qo‘shish mantiq amallari uchun kommutativlik, assotsiativlik va distributivlik qonunlari o‘z kuchini saqlaydi.

Bul algebrasidagi asosiy mantiqiy amallarni kiritilgan arifmetik amallar orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\bar{x}=x+1;\ x\wedge y=xy;\ x\vee y=xy+x+y;$$

$$x\to y=xy+x+1;\ x\leftrightarrow y=x+y+1.$$

2 moduli bo‘yicha qo‘shish amalining ta’rifiga asosan $x+x=0$ va $xx=x$ ( $x^n=x$ ).

**Jegalkin ko‘phadi.** Mantiq algebrasidagi istalgan funksiyani yagona arifmetik ko‘phad shakliga keltirish mumkin. Haqiqatan ham, biz oldingi paragraflarda istalgan funksiyani kon’yunksiya va inkor mantiqiy amallar orqali ifodalash mumkinligini ko‘rgan edik. Yuqorida kon’yunksiya, diz’yunksiya va inkor mantiqiy amallarni arifmetik amallar orqali ifodaladik. Demak, istalgan funksiyani arifmetik ko‘phad shakliga keltirish mumkin.

**1- ta’rif.** $\sum x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}+a$ *ko‘rinishdagi ko‘phad* ***Jegalkin ko‘phadi*** *deb ataladi, bu yerda hamma o‘zgaruvchilar birinchi darajada qatnashadi,* $(i_1,...,i_k)$ *qiymatlar satrida hamma* $i_j$ *lar har xil bo‘ladi,* $a\in E_2=\{0,1\}$.

**2- ta’rif.** $x_{i_1}+x_{i_2}+...+x_{i_k}+a$ *ko‘rinishdagi funksiya* ***chiziqli funksiya*** *deb ataladi, bu yerda* $a\in E_2=\{0,1\}$. Chiziqli funksiyaning ifodasidan ko‘rinib turibdiki, $n$ ta argumentli chiziqli funksiyalar soni $2^{n+1}$ ga teng va bir argumentli funksiyalar doimo chiziqli funksiya bo‘ladi.

Jegalkin ko‘phadi ko‘rinishidagi har bir funksiyaning argumentlari soxta emas argumentlar bo‘ladi. Haqiqatan ham, agar $x_1$ shunday argument bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $f(x_1,...,x_n)$ funksiyani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$f(x_1,...,x_n)=x_1\varphi(x_2,...,x_n)+\psi(x_2,...,x_n).$$

Bu yerda $\varphi$ funksiya aynan 0ga teng emas, aks holda $x_1$ argument $f$ funksiyaning (ko‘phadning) argumentlari safiga qo‘shilmasdi.

Endi $x_2,...,x_n$ argumentlarning shunday qiymatlarini olamizki, $\varphi=1$ bo‘lsin. U holda $f$ funksiyaning qiymati $x_1$ argumentning qiymatiga bog‘liq bo‘ladi. Demak, $x_1$ soxta argument emas.

Mantiq algebrasidagi hamma $n$ argumentli chiziqli funksiyalar to‘plamini $L$ bilan belgilaymiz. Uning elementlari soni $2^{n-1}$ ga teng bo‘ladi.

**Teorema.** *Agar $f(x_1,...,x_n)\notin L$ bo‘lsa, u holda undan argumentlari o‘rniga 0 va 1 konstantalarni hamda $x$ va $\bar{x}$ funksiyalarni, ayrim holda $f$ ustiga “–“ inkor amalini qo‘yish usuli bilan $x_1x_2$ funksiyani hosil qilish mumkin.*

**Funksional yopiq sinflar.** Mantiq algebrasining $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi berilgan bo‘lsin.

**1- ta’rif.** *Agar mantiq algebrasining istalgan funksiyasini $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali ifodalash mumkin bo‘lsa, u holda $\Phi$ sistema* ***to‘liq funksiyalar sistemasi*** *deb ataladi.*

Istalgan funksiyani MKNSh yoki MDNSh ko‘rinishida ifodalash mumkinligidan $\{xy, x\vee y, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasining to‘liqligi kelib chiqadi. $\{xy, x+y, 1\}$ funksiyalar sistemasi ham to‘liq bo‘ladi, chunki istalgan funksiyani Jegalkin ko‘phadi ko‘rinishiga keltirish mumkin.

**1- misol.** Quyidagilar to‘liq funksiyalar sistemasi ekanligini isbotlaymiz:

a) $xy,\ \bar{x}$; b) $x\vee y,\ \bar{x}$; d) $xy,\ x+y,\ 1$;

e) $\overline{x\vee y}$; f) $\overline{xy}$; g) $x+y,\ x\vee y, 1$;

h) $x+y+z,\ xy, 0, 1$; i) $x\to y,\ \bar{x}$; j) $x\to y, 0$.

a) $x\vee y=\overline{\bar{x}\,\bar{y}}$, ya’ni diz’yunksiya amalini kon’yunksiya va inkor amallari orqali ifodalash mumkin. Demak, $\{xy,\ \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liqdir;

b) $xy=\overline{\bar{x}\vee\bar{y}}$ ekanligi ma’lum. Demak, istalgan mantiqiy funksiyani diz’yunksiya va inkor amallari orqali ifodalasa bo‘ladi. Shuning uchun $\{x\vee y,\ \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liqdir;

d) mantiq algebrasining ixtiyoriy funksiyasini yagona Jegalkin ko‘phadi ko‘rinishiga keltirish mumkin bo‘lgani uchun $\{xy,\ x+y,\ 1\}$ funksiyalar sistemasi to‘liqdir.

e) va f) mantiq algebrasidagi istalgan funksiyani $\psi(x,y)=\overline{xy}$ va $\varphi(x,y)=\overline{x\vee y}$ Sheffer funksiyalari orqali ifodalash mumkin. Haqiqatan ham, $\bar{x}=\varphi(x,x)$,

$$x\vee y=\overline{\overline{x\vee y}}=\overline{\varphi(x,y)}=\varphi(\varphi(x,y),\varphi(x,y))$$

va

$$xy=\varphi(\bar{x},\bar{y})=\varphi(\varphi(x,x),\varphi(y,y))$$

asosiy mantiqiy amallarni Sheffer funksiyasi orqali ifodalash mumkin. Demak, $\{\overline{x\vee y}\}$ va $\{\overline{xy}\}$ funksiyalar sistemalari to‘liqdir.

g) $x\vee y=xy+x+y$ bo‘lgani uchun $x\vee y+(x+y)=xy$ bo‘ladi. $\{xy,x+y,1\}$ to‘liq sistema ekanligi d) bandda isbot qilingan edi, demak, $\{x+y,x\vee y,1\}$ sistema to‘liqdir.

Xuddi shunday qolgan h), i) va j) funksiyalar sistemalarining to‘liqligini ham isbot qilish mumkin. Bu ish o‘quvchiga havola qilinadi. ■

**1- teorema.** *Agar* $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lsa, u holda unga ikki taraflama bo‘lgan* $\Phi^*=\{\varphi_1^*,...,\varphi_n^*\}$ *funksiyalar sistemasi ham to‘liq bo‘ladi.*

**Isboti.** $\Phi^*$ sistemaning to‘liqligini isbotlash uchun istalgan $f(x_1,...,x_n)$ funksiyani $\Phi^*$ sistemasidagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali ifodalash mumkinligini ko‘rsatish kerak. Buning uchun avval $f^*$ funksiyani $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ sistemadagi funksiyalar orqali ifodalaymiz ($\Phi$ sistema to‘liq bo‘lgani uchun bu protsedurani bajarish mumkin). Keyin ikki taraflama qonunga asosan ikki taraflama funksiyalar superpozitsiyasi orqali $f$ funksiyani hosil qilamiz. ■

**2- misol.** Quyidagilar to‘liq funksiyalar sistemasi emasligini isbotlaymiz:

a) $\bar{x},1$;  b) $xy,\ x\vee y$;  d) $x+y,\ \bar{x}$;

e) $xy\vee yz\vee xz,\ \bar{x}$;  f) $xy\vee yz\vee xz,\ 0,1$.

a) $\bar{x}=x+1$ bo‘lgani uchun $\{\bar{x},1\}$ sistemadagi funksiyalar bir argumentli funksiyalar bo‘ladi. Bizga ma’lumki, bir argumentli funksiyalarning superpozitsiyasi natijasida hosil qilingan funksiya ham bir argumentli funksiya bo‘ladi. Natijada, bu sistemadagi funksiyalar orqali ko‘p argumentli funksiyalarni ifodalab bo‘lmaydi. Shuning uchun $\{\bar{x},1\}$ – to‘liq funksiyalar sistemasi emas.

b) $\{xy,\ x\vee y\}$ sistemadagi funksiyalarning ikkalasi ham monotondir. Monoton funksiyalarning superpozitsiyasi orqali hosil qilingan funksiya ham monoton bo‘lishi isbotlangan edi. Demak, bu ikkala funksiyaning superpozitsiyasi orqali monoton bo‘lmagan funksiyalarni ifodalash mumkin emas va natijada, $\{xy,\ x\vee y\}$ – to‘liq funksiyalar sistemasi emas.

d) $\{x+y,\ \bar{x}\}$ sistemadagi funksiyalar chiziqli funksiyalardir. Shuning uchun bu funksiyalar orqali chiziqlimas funksiyalarni ifodalab bo‘lmaydi. Demak, $\{x+y,\ \bar{x}\}$ – to‘liq funksiyalar sistemasi emas.

e) $\{xy\vee yz\vee xz,\ \bar{x}\}$ sistemadagi funksiyalar o‘z-o‘ziga ikki taraflama funksiyalardir. Bu funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil qilingan har qanday funksiya ham o‘z-o‘ziga ikki taraflama funksiya bo‘ladi. Demak, $\{xy\vee yz\vee xz,\ \bar{x}\}$ – to‘liq funksiyalar sistemasi emas.

f). $\{xy\vee yz\vee xz,\ 0,\ 1\}$ sistemadagi funksiyalarning hammasi monoton funksiyalardir. Monoton emas funksiyalar bu sistemadagi funksiyalar orqali ifodalanmaydi. Demak, $\{xy\vee yz\vee xz,\ 0,\ 1\}$ – to‘liq funksiyalar sistemasi emas. ■

2- misol tahlilidan quyidagi xulosa kelib chiqadi. Berilgan $\Phi$ funksiyalar sistemasining to‘liq emasligini isbotlash uchun sistemadagi funksiyalarning shunday umumiy xususiyatini topish kerakki, bu xususiyat funksiyalar superpozitsiyasi natijasida saqlansin. Haqiqatan ham, u holda bunday xususiyatga ega bo‘lmagan funksiyani $\Phi$ sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali hosil qilib bo‘lmaydi.

Funksiyalarning bunday xususiyatlarini tekshirish uchun odatda **funksional yopiq sinf** tushunchasidan foydalaniladi.

**2- ta’rif.** *Agar $A$ sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil bo‘lgan funksiya ham shu sistemaning elementi bo‘lsa, u holda bunday sistema **superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema** deb ataladi.*

**3- ta’rif.** *Mantiq algebrasining superpozitsiyaga nisbatan yopiq bo‘lgan har qanday funksiyalar sistemasi **funksional yopiq sinf** deb ataladi.*

Ravshanki, muayyan xususiyatga ega bo‘lgan funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinfni tashkil etadi va, aksincha, ma’lum funksional yopiq sinfga kiruvchi funksiyalar bir xil xususiyatga ega bo‘lgan funksiyalardir. Quyidagi funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinflarga misol bo‘la oladi:

a) bir argumentli funksiyalar sinfi;

b) mantiq algebrasining hamma funksiyalari sinfi;

d) $L$ – chiziqli funksiyalar sinfi;

e) $S$ – o‘z-o‘ziga ikki taraflama funksiyalar sinfi;

f) $M$ – monoton funksiyalar sinfi;

g) $P_0$ – nul qiymatni saqlovchi funksiyalar sinfi;

h) $P_1$ – bir qiymatni saqlovchi funksiyalar sinfi.

**4- ta’rif.** *Bo‘sh sinfdan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari to‘plamidan farq qiluvchi funksional yopiq sinf* ***xususiy funksional yopiq sinf*** *deb ataladi.*

Shunday qilib, funksiyalar sistemasining to‘liq bo‘lishi uchun bu sistemada har qanday xususiy funksional yopiq sinfga kirmaydigan funksiya topilishi yetarli va zarurdir.

**5- ta’rif.** *O‘z-o‘zidan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari sinfidan* ($P_2$*dan*) *farq qiluvchi funksional yopiq sinflarga kirmaydigan xususiy funksional yopiq sinf* ***maksimal funksional yopiq sinf*** *deb ataladi.*

Mantiq algebrasida hammasi bo‘lib beshta maksimal funksional yopiq sinf mavjud. Bular quyidagilardir: $P_0$, $P_1$, $M$, $S$, $L$.

**13.2. Post[36] teoremasi.** E. L. Post tomonidan funksiyalar sistemasi to‘liqligining yetarli va zarur shartlari topilgan.

**Post teoremasi.** $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ *funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lishi uchun bu sistemada* $P_0$, $P_1$, $M$, $S$, $L$ *maksimal funksional yopiq sinflarning har biriga kirmaydigan kamida bitta funksiya mavjud bo‘lishi*

Post jadvali

| | $P_0$ | $P_1$ | $S$ | $L$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|

[36] Post (Post Emil Leon, 1897 (Polsha) – 1954) – AQSh matematigi, mantiqchisi.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_1$ | | | | | |
| $\varphi_2$ | | | | | |
| … | … | … | … | … | … |
| $\varphi_n$ | | | | | |

*yetarli va zarur* (*ya'ni* $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *funksiyalar sistemasi faqat* $P_0$, $P_1$, $M$, $S$, $L$ *maksimal funksional yopiq sinflardan birortasining ham qism to'plami bo'lmaganda va faqat shundagina to'liq sistema bo'ladi*).

**I s b o t i .** Zarurligi. $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ to'liq sistema (ya'ni $[\Phi]=P_2$) va $F$ maksimal funksional yopiq sinflarning birortasi bo'lsin deb faraz qilamiz. U vaqtda $F$ sinfning yopiqligini hisobga olib, $P_2[\Phi]\subseteq[F]=F$ munosabatni yozish mumkin, ya'ni $F=P_2$. Ammo bunday bo'lishi mumkin emas. Demak, $\Phi\subseteq F$ munosabat bajarilmaydi.

Yetarliligi isbotini o'quvchiga havola etamiz. ■

**N a t i j a .** *Mantiq algebrasidagi har qanday funksional yopiq sinf* $P_0$, $P_1$, $M$, $S$, $L$ *maksimal funksional yopiq sinflardan birortasining qism to'plami bo'ladi.*

Amalda berilgan $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ funksiyalar sistemasining to'liq yoki to'liq emasligini aniqlash uchun **Post jadvali** deb ataluvchi jadvaldan foydalaniladi. Post jadvali quyida keltirilgan.

Jadvalning xonalariga o'sha satrdagi funksiya funksional yopiq sinflarning elementi bo'lsa "+" ishora, bo'lmasa "–" ishorasi qo'yiladi. $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ sistema to'liq funksiyalar sistemasi bo'lishi uchun, Post teoremasiga asosan, jadvalning har bir ustunida kamida bitta "–" ishorasi bo'lishi yetarli va zarur.

$\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi to'liq bo'lmasligi uchun $P_0$, $P_1$, $M$, $S$, $L$ maksimal funksional yopiq sinflardan birortasining qism to'plami bo'lishi, ya'ni Post jadvalining biror ustunidagi barcha ishoralar "+" bo'lishi kerak.

Funksiyalar sistemasining to'liqligi tushunchasi bilan sinfning (to'plamning) **yopig'i** tushunchasi o'zaro bog'langan.

**6- t a ' r i f .** $A$ *bilan* $P_2$ (*nta argumentli mantiq algebrasining hamma funksiyalarini o'z ichiga olgan*) *to'plamning biror qism to'plamini belgilaymiz.* $A$ *to'plam funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil qilingan hamma Bul funksiyalari to'plami* ($A$ *to'plam funksiyalari orqali ifodalangan hamma bul funksiyalari to'plami*) $A$ *to'plamning* ***yopig'i*** *deb aytiladi va* $[A]$ *kabi belgilanadi.*

**3- misol.** 1. $A=P_2$ bo‘lsin, u holda $[A]=P_2$ bo‘ladi.

2. $A=\{1, x_1+x_2\}$ bo‘lsin, u holda $A$ to‘plamning yopig‘i barcha chiziqli funksiyalar to‘plamidan (ya’ni, $L$ to‘plamdan) iborat bo‘ladi. ■

1- jadval

| | | $P_0$ | $P_1$ | $S$ | $L$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | $0$ | + | – | – | + | + |
| | $xy$ | + | + | – | – | + |
| | $x+y+z$ | + | + | + | + | – |
| b) | $1$ | – | + | – | + | + |
| | $xy$ | + | + | – | – | + |
| | $x+y+z$ | + | + | + | + | – |
| d) | $\{\bar{x}\,\bar{y}\vee\bar{x}\,\bar{z}\vee\bar{y}\,\bar{z}\}$ | – | – | + | – | – |
| e) | $0$ | + | – | – | + | + |
| | $1$ | – | + | – | + | + |
| | $x+y$ | + | – | – | + | – |
| f) | $0$ | + | – | – | + | + |
| | $1$ | – | + | – | + | + |
| | $xy$ | + | + | – | – | + |

To‘plam yopig‘i quyidagi xossalarga ega:

1) $[A]\supseteq A$;

2) $[[A]]=[A]$;

3) agar $A_1\subseteq A_2$ bo‘lsa, u holda $[A_1]\subseteq[A_2]$bo‘ladi;

4) $[A_1\cup A_2]\supseteq[A_1]\cup[A_2]$. ■

**7- ta’rif.** *Agar* $[A]=A$ *bo‘lsa, u holda* $A$ *to‘plam* (*sinf*) ***funksional yopiq sinf*** *deb ataladi.*

**4- misol.** 1. $A=P_2$ funksional yopiq sinfdir.

2. $A=\{1, x_1+x_2\}$ funksional yopiq sinf emas.

3. $L$ funksional yopiq sinfdir. ■

Osongina ko‘rish mumkinki, har qanday $[A]$ funksional sinf yopiq sinf bo‘ladi. Bu hol ko‘pgina funksional yopiq sinflarni topishga yordam beradi.

To‘plam yopig‘i va yopiq sinf tilida funksiyalar sistemasining to‘liqligi ta’rifini (avvalgi ta’rifga ekvivalent bo‘lgan ta’rifni) berish mumkin.

**8- ta’rif.** *Agar* $[A]=P_2$ *bo‘lsa, u holda* $A$ *funksiya-lar sistemasi* ***to‘liq*** *deb ataladi.*

**5- misol.** Quyidagi funksiyalar sistemalarining to‘liq emasligini Post jadvali vositasida isbot qilamiz (1- jadvalga qarang).

a) $\Phi_1=\{0,\ xy,\ x+y+z\}$; b) $\Phi_2=\{1, xy, x=y+z\}$;

d) $\Phi_3=\{\bar{x}\,\bar{y}\vee\bar{x}\,\bar{z}\vee\bar{y}\,\bar{z}\}$; e) $\Phi_4=\{0,1, x+y\}$;

f) $\Phi_5=\{0,1, xy\}$.

Post jadvalidan ko‘rinib turibdiki, yuqorida keltirilgan barcha funksiyalar sistemalari to‘liq emas, chunki har bir sistema uchun jadvalda bitta ustun faqatgina “+” ishoralaridan iborat. Shuni ham ta’kidlash kerakki, har bir sistema uchun bu ustunlar har xil.

Demak, Post teoremasi shartidan $P_0$, $P_1$, $M$, $S$, $L$ maksimal funksional yopiq sinflarning birortasini ham olib tashlash mumkin emas. Bu xulosadan, o‘z navbatida, $P_0$, $P_1$, $M$, $S$, $L$ maksimal funksional yopiq sinflarning birortasi ham boshqasining qism to‘plami bo‘la olmasligi kelib chiqadi. ■

## Sinov savollari

1. Quyidagi funksiyalar sistemalarining har biri funksional yopiq sinf bo‘lishini isbot qiling:

   a) bir argumentli funksiyalar;

   b) mantiq algebrasining hamma funksiyalari;

   d) $x+y+z,\ xy, 0, 1$; e) $x\to y,\ \bar{x}$; f) $x\to y, 0$;

   g) $L$; h) $S$; i) $M$; j) $P_0$; k) $P_1$.

2. Agar $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ va $F=\{f_1,...,f_n\}$ funksional yopiq sinflar bo‘lsa, u holda $\Phi\cap F$ va $\Phi^*=\{\varphi_1^*,...,\varphi_n^*\}$ ham funksional yopiq sinflar bo‘lishini, $\Phi\cup F$ esa funksional yopiq sinf bo‘lmasligini isbotlang.
3. Quyidagi maksimal funksional yopiq $P_0, P_1, S, L, M$ sinflarning har biri boshqasining qism to‘plami bo‘lmasligini isbotlang.
4. Har qanday xususiy funksional yopiq sinf $P_0, P_1, S, L, M$ maksimal funksional yopiq sinflardan birortasining qism to‘plami bo‘lishini isbotlang.
5. Nol saqlamaydigan funksiya yo nomonoton funksiya, yoki o‘z-o‘ziga ikki taraflama bo‘lmagan funksiya ekanligini isbotlang.
6. Post teoremasining isbotini keltiring.

## Mustaqil ishlash uchun savollar

1. To‘liq funksiyalar sistemasi deb nimaga aytiladi?
2. Funksional yopiq sinflar va xususiy funksional yopiq sinflar bir-biridan nima bilan farq qilishadi?
3. Maksimal funksional yopiq sinf nima?
4. Post teoremasi qanday isbotlanadi?
5. Post teoremasining natijasini bilasizmi?
6. To‘plam yopig‘i deganda nimani tushunasiz?
7. Post jadvalidan qanday foydalanish mumkin?

## Mavzu: Funksional elementlar va sxemalar yasash. Kontaktli sxemalarni sintez qilish

**Ko‘p taktli sxema tushunchasi.** Mazkur bobning 1- paragrafida ko‘rilgan funksional elementlar va ulardan yasalgan sxemalar oniy ravishda ishlaydi deb faraz qilingan, ya’ni ularning kirishlariga signallar majmuasi berilgan zahotiyoq ularning chiqishlarida natijaviy signal paydo bo‘ladi deb hisoblangan edi. Boshqacha aytganda, kirishlarga berilgan signallar majmuasini ishlab chiqish uchun hech qanday vaqt sarflanmasligi faraz qilingan edi. Amalda esa funksional element kirishlariga berilgan signallar majmuasiga mos keladigan uning chiqishidagi natijaviy signalni olish uchun vaqt sarf bo‘ladi. Sxemaning kirishlariga berilgan signallar majmuasi uning ichki funksional elementlarining kirishlariga har xil vaqtda yetib keladi, chunki, birinchidan, elementlarning kirishlariga yetib kelgan signallar bir qancha elementlardan o‘tib keladi, ikkinchidan, har bir element kirishlariga yetib kelgan signallarni har xil vaqtlarda ishlab chiqadi. Bu holda sxema kirishlariga berilgan signallar majmuasini yetarlicha uzoq vaqt berib turish mumkinki, toki sxema ichki elementlarining hamma kirishlariga signallar yetib kelsin. Natijada, sxemaning chiqishida ma’lum vaqtdan keyin uning kirishlariga berilgan signallar majmuasiga mos keladigan signal paydo bo‘ladi. Shundan keyin kirishlarga berilayotgan signallar majmuasini to‘xtatish mumkin va bu sxemani u realizatsiya qiladigan funksiya qiymatini argumentlar qiymatining boshqa majmuasida hisoblash uchun ishlatish mumkin.

Funksional elementning yuqorida ifodalangan ikkinchi xil ishlashi quyidagi kamchiliklarga egadir:

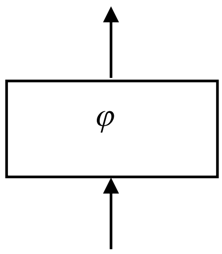
1) kirishga signallar majmuasini ma’lum vaqt davomida berib turish kerak;

2) ma’lum vaqt davomida sxema chiqishida paydo bo‘ladigan signal uning kirishlariga berilgan signallar majmuasiga mos kelmasligi mumkin.

Yangi sharoitda “qanday qurilmani funksional element deb hisoblash kerak?” degan savolga javob beraylik.

**1- ta’rif.** *Agar biror element (1- shakl) uchun aniq bo‘lgan $v$ vaqtdan keyin uning chiqishida kirishlariga berilgan signallar majmuasiga mos keladigan signal (realizatsiya qilinadigan funksiyaning berilgan signallar majmuasidagi qiymati) paydo bo‘lsa, u holda bunday qurilma* ***funksional element*** *deb ataladi.*

Agar kelgusi momentda element kirishlariga yangi signallar majmuasi berilsa, u holda $v$ vaqtdan keyin uning chiqishida berilgan signallar majmuasiga mos keladigan signal paydo bo‘ladi, ya’ni kirishlarga ketma-ket beriladigan signallar majmuasi bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda ishlab chiqiladi.



1- shakl

Vaqtning diskret $t = 1, 2, 3, ..., k$ momentlarini qarab, ikkita qo‘shni vaqt momentlari orasidagi vaqt birligini bir takt deb aytamiz.

**2- t a ’ r i f .** *Element kirishiga berilgan signallar majmuasiga mos keladigan signal uning chiqishida paydo bo‘lishigacha sarf qilingan vaqt (* $\nu$ *vaqt) funksional elementning* ***ushlab turish vaqti*** *deb ataladi.*

Bundan keyin sxemani berilgan ta’rifga mos keladigan yangi ma’nodagi funksional element sifatida qaraymiz. Bunday sxemalarni yasash jarayonida ushlab turish elementlari katta rol o‘ynaydi.

**3- t a ’ r i f .** *Agar funksional element chiqishida ma’lum vaqtdan (taktdan) keyin uning kirishiga berilgan (0 yoki 1) signalning o‘zi paydo bo‘lsa, u holda bunday funksional elementga* ***ushlab turish elementi*** *deb ataladi* (1- shakl).

Ushlab turish elementi funksiyani realizatsiya qiladigan funksional elementdir, ya’ni uning chiqishida ma’lum vaqtdan keyin kirishiga berilgan signalning o‘zi paydo bo‘ladi.

Bundan keyin (agarda maxsus aytilgan bo‘lmasa) hamma funksonal elementlarni bir taktli, ya’ni elementning kirishiga signal berilgandan keyin uning chiqishida natijaviy signal paydo bo‘lguncha bir takt vaqt o‘tadi deb faraz qilamiz.

**4- t a ’ r i f .** *Agar* $S$ *sxemaning* $n$ *ta kirishiga* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *signallar majmuasini bergandan ma’lum* $\nu$ *taktdan keyin uning chiqishida* $f$ *funksiyaning* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *qiymati hosil bo‘lsa, u holda* $S$ *sxema* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiyani* $\nu$ *ushlab turish vaqti bilan* ***realizatsiya qiladi*** *deb ataladi.*

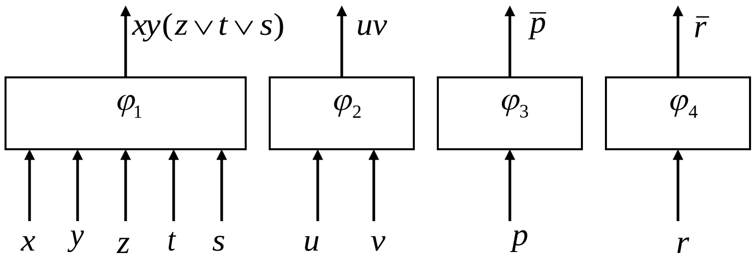
Bunday $S$ sxemani $\nu$ ushlab turish vaqti bilan $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani realizatsiya qiladigan funksional element deb qarash mumkin.

Mantiq algebrasining istalgan funksiyasini realizatsiya qiladigan sxema **to‘g‘ri** sxema deb ataladi.

Bir taktli funksional elementlardan tuzilgan sxemani **ko‘p taktli**, oniy ravishda ishlaydigan funksional elementlardan tuzilgan sxemani esa **nol taktli** sxema deb ataymiz.

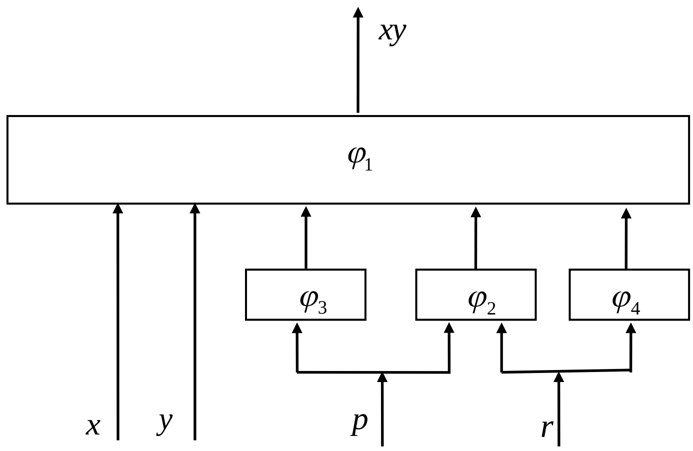
**1- i z o h .** Agar (bir taktli funksional elementlardan tuzilgan) to‘g‘ri sxemadagi hamma funksional elementlarni nol taktli deb faraz qilsak, u holda hosil bo‘lgan nol taktli sxema ham ko‘p taktli sxema realizatsiya qiladigan funksiyani realizatsiya qiladi.

**2- izoh.** $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani realizatsiya qiladigan $S$ to‘g‘ri sxemaning ushlab turish vaqti $v$ doimo sxemaning ketma-ket ulangan ichki funksional elementlari soniga teng emas. Masalan, $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ funksional elementlardan (2- shakl) tuzilgan sxema (3- shakl), ketma-ket ulangan funksional elementlarning soni ikkiga teng bo‘lishiga qaramasdan, $xy$ funksiyani realizatsiya qiluvchi bir taktli sxemadir.




2- shakl

**3- izoh.** Konstantalarni (0 yoki 1) realizatsiya qiladigan sxemalar yoki funksional elementlarning hamma kirishlari soxta kirishlardir. Bunday sxemalarni nol taktli sxemalar deb aytish mumkin.

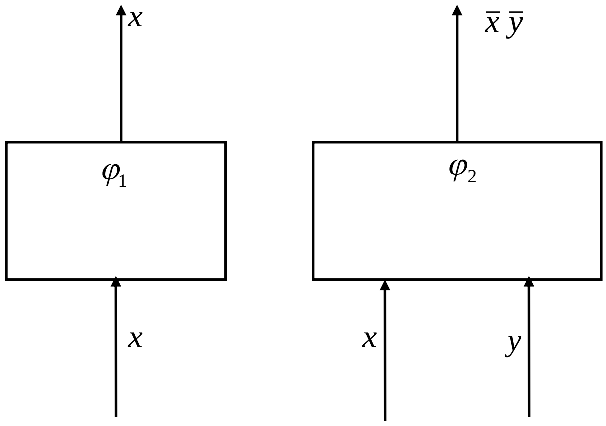



3- shakl

**To‘liq sistema.** Endi $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ bir taktli funksional elementlardan iborat $\Phi$ sistemaning to‘liqlik masalasini ko‘rishga o‘tamiz.

**5- ta’rif.** *Agar mantiq algebrasining istalgan funksiyasini* $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ *sistemasidagi funksional elementlardan tuzilgan sxema orqali realizatsiya qilish mumkin bo‘lsa, u holda* $\Phi$ *sistemasi* ***to‘liq sistema*** *deb ataladi.*

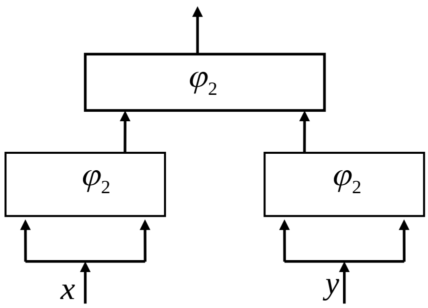
**1- misol.** Bir taktli funksional elementlar sistemasi $\Phi(\varphi_1, \varphi_2)$ berilgan bo‘lsin, bu yerda $\varphi_1$ element $x$ funksiyani realizatsiya qiladigan ushlab turish elementi, $\varphi_2$ esa $x\,|\,y$ Sheffer funksiyasini realizatsiya qiladigan funksional elementdir (4- shakl). Ushbu a) $\bar{x}$, b) $xy$, d) $x \vee y$, e) 1, f) 0, g) $x + y$, h) $x \to y$ va i) $x \leftrightarrow y$ funksiyalarni realizatsiya qiluvchi sxemalarni $\varphi_1$ va $\varphi_2$ funksional elementlar orqali yasash va ushlab turish vaqtini (taktini) aniqlash talab qilingan




4- shakl

bo‘lsin. Yuqorida keltirilgan a)–i) funksiyalarni realizatsiya qiladigan sxemalar 5–12- shakllardagidek tasvirlanishi mumkin. ■

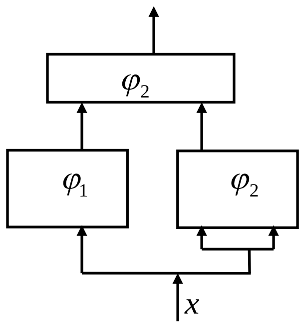
d) $x \vee y = \varphi_2(\bar{x}, \bar{y})$




$v = 2$

7- shakl

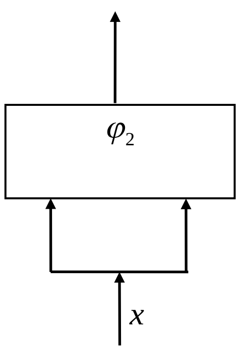
e) $1 = \overline{x\bar{x}} = \varphi_2(x, \bar{x})$




$v = 2$

8- shakl

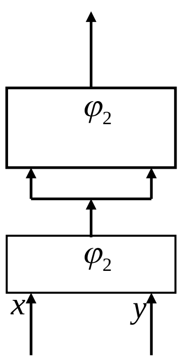
a) $\bar{x} = \varphi_2(x, x)$




$v = 1$

5- shakl

b) $xy = \overline{\varphi_2(x, y)}$



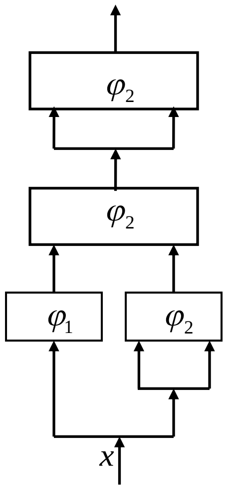

$v = 2$

6- shakl

**2- misol.** 1. Sheffer funksiyasini realizatsiya qiladigan $\varphi$ elementdan iborat $\Phi = \{\varphi\}$ sistema to‘liq bo‘ladimi?

2. $\Phi_1 = \{0{,}1\}$ elementlar sistemasining to‘liqligini isbot qiling. ■

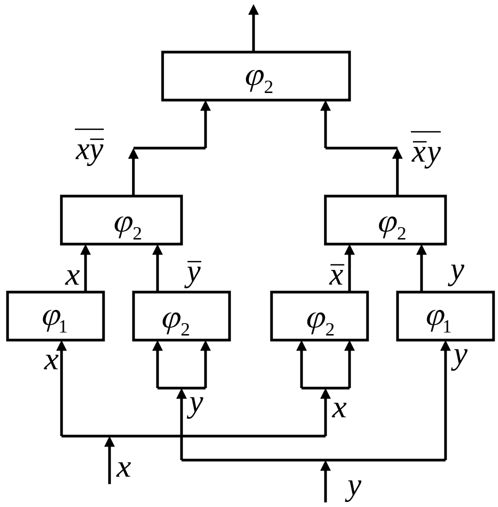
f) $0 = \overline{1}$



$v = 3$

9- shakl

g) $x + y = x\bar{y} \vee \bar{x}y = \varphi_2(\varphi_2(x, \bar{y}), \varphi_2(\bar{x}, y))$



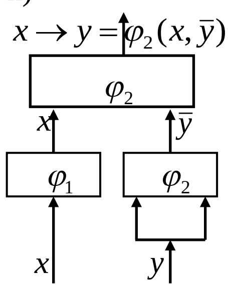
$v = 3$

10- shakl

Misollar yechimlarining tahlilidan ma’lumki, bir taktli $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ funksional elementlar sistemasi $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ ning to‘liqlik shartlari nol taktli $\varphi_1^*, \varphi_2^*, ..., \varphi_n^*$ funksional elementlar sistemasi $\Phi^* = \{\varphi_1^*, \varphi_2^*, ..., \varphi_n^*\}$ ning to‘liqlik shartlariga mos

h)

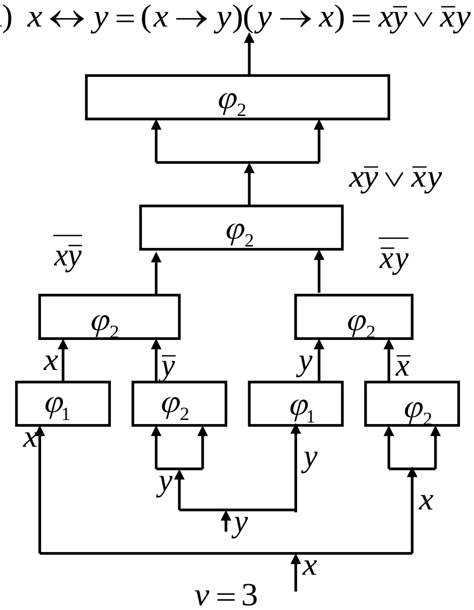
$x \to y = \varphi_2(x, \bar{y})$



$v = 2$

11-

i) $x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x) = \overline{x\bar{y} \vee \bar{x}y}$



$v = 3$

12-

kelmaydi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: 1) mantiq algebrasining elementlari $f(0,0,...,0) = 1$ va $f(1,1,...,1) = 0$ (0 va 1 saqlamovchi funksiyalar, ya’ni argumentlarini aynan tenglashtirganda $f$ funksiyaga teng bo‘ladi) funksiyalardan iborat to‘plamni $Q$ bilan;

2) istalgan qism o‘zgaruvchilar o‘rniga konstantalarni (0 yoki 1) qo‘yib, qolgan qismini aynan tenglashtirganda 0,1 yoki $\bar{x}$ (ya’ni $x$ paydo bo‘lmaydi) hosil bo‘ladigan funksiyalardan iborat to‘plamni $R$ bilan belgilaymiz.

**Teorema.** *Agar* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ *bir taktli funksional elementlar sistemasi realizatsiya qiladigan funksiyalar ichida*

*a) Post teoremasi shartlarini qanoatlantiruvchi funksiyalar sistemasi;*

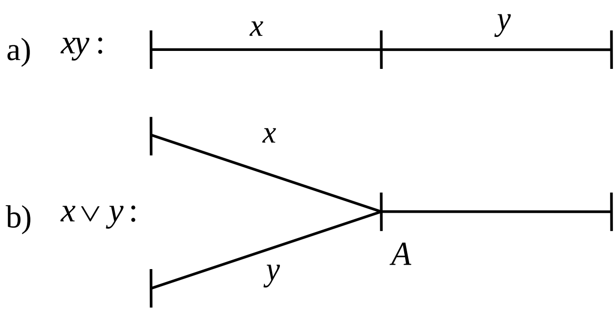
*b) Q to‘plam elementi bo‘lmagan funksiyalar;*

*d) R to‘plam elementi bo‘lmagan funksiyalar mavjud bo‘lganda va faqat shundagina bunday sistema to‘liq bo‘ladi.*

## Rele-kontaktli sxemalar

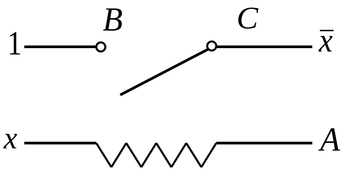
**Mantiq algebrasi funksiyalarini rele-kontaktli sxemalar orqali realizatsiya qilish usuli.** Bu paragrafda mantiq algebrasi funksiyalarini rele-kontaktli sxemalar orqali realizatsiya qilish usulini ko‘ramiz.

Agar har bir o‘tkazgichga $x$ o‘zgaruvchini mos qilib qo‘ysak, u holda $x = 1$ da o‘tkazgichda tok bor va $x = 0$ da o‘tkazgichda tok yo‘q deb hisoblaymiz. U holda o‘tkazgichlarning ketma-ket ulanganishiga o‘zgaruvchilarning kon’yunksiyasi (1-a shakl), parallel ulanganishiga esa o‘zgaruvchilarning diz’yunksiyasi (1-b shakl) mos keladi. O‘tkazgichlarni ketma-ket va parallel ulash natijasida sxema hosil qilamiz. Bu sxema faqatgina monoton funksiyalarni realizatsiya qiladi, chunki kon’yunksiya va diz’yunksiyalarning superpozisiyasi orqali faqat monoton funksiyalarni ifodalash mumkin.

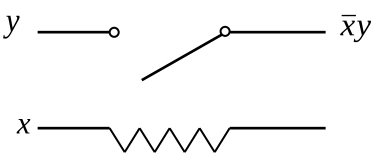



1- shakl

Ixtiyoriy funksiyalarni realizatsiya qilish uchun $\bar{x}$ funksiyani realizatsiya qiladigan qurilma kerak boʻladi. Buni **manfiy kontaktli rele** orqali realizatsiya qilish mumkin. Bunday relening sxemasi 2- shaklda tasvirlangan. Agar $A$ gʻaltak oʻramlari orqali elektr toki oʻtmasa $(x=0)$, u holda prujina $B$ kontaktni yuqoriga tortadi va zanjir ulanadi (tutashadi). Natijada, $C$ chiqishda tok paydo boʻladi ($\bar{x}=1$). Agar $x=1$ boʻlsa va $A$ gʻaltak oʻrami orqali tok oʻtsa, u holda kontakt $B$ pastga tortiladi va $C$ chiqishda tok boʻlmaydi, ya'ni $\bar{x}=0$ boʻladi. Demak, manfiy kontaktli rele $\bar{x}$ funksiyani realizatsiya qiladi. Agar $B$ kontakt kirishiga 1 oʻrniga $y$ signal bersak, u holda $\bar{x}y$ funksiya realizatsiya qilingan boʻladi (3- shakl).

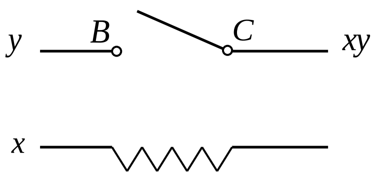



2- shakl




3- shakl

Musbat kontaktli releda agar gʻaltak oʻramida tok boʻlsa ($x=1$), u holda $B$ kontakt ulanadi va $C$ chiqishda tok boʻlmaydi ($x=0$). Shunday qilib, $x$ funksiyani musbat kontaktli rele orqali realizatsiya qilish mumkin (4- shakl).

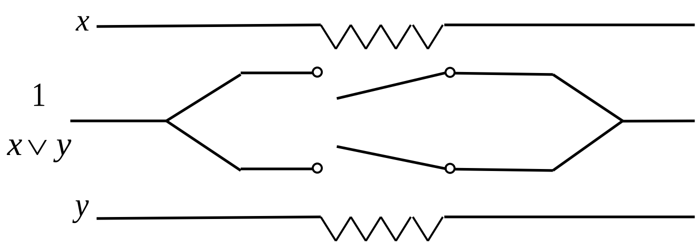



4- shakl

Ma'lumki, agar oʻtkazgichda tok boʻlsa, u holda $y$ har tarafga tarqaladi. Masalan, $x \vee y$ ni 1- shakldagi sxema orqali realizatsiya qilsak, u holda $x=1$ va $y=0$ boʻlganda, tok $A$ nuqtadan har tarafga, shu jumladan $y$ oʻtkazgichga mos boʻlgan oʻtkazgich orqali ham oʻtadi ($y=0$ boʻlishiga qaramasdan). Bunday sharoitda sxemaning ish jarayonida noaniqliklar paydo boʻladi. Bu holdan qutulish uchun faqat bir tomonga tok oʻtkazadigan asboblardan, shu jumladan, musbat kontaktli reledan foydalanish mumkin. Masalan, musbat kontaktli reledan foydalanib, $x \vee y$ ni realizatsiya qiladigan sxemani 5- shaklda tasvirlangandek yasash mumkin.

**Rele-kontaktli sxemaning ishlash vaqti.** Endi rele-kontaktli sxemaning ishlash vaqtini ko‘rib o‘taylik. Tok o‘tkazgichlar bo‘yicha birdaniga tarqaladi va rele ishlashi uchun (kontakt ulanishi uchun) bir takt vaqt ketadi deb hisoblaymiz. Demak, 3- va 4- shakllarda $x$ signalga nisbatan $y$ signali bir taktdan keyin berilishi kerak.

Sxema chiqishidagi signal ($xy$ yoki $\bar{x}y$) $y$ signal bilan bir vaqtda paydo

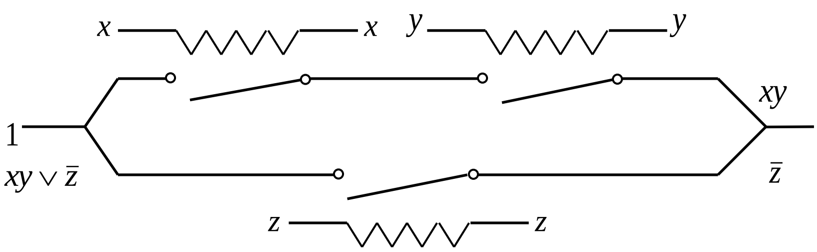


5- shakl

bo‘ladi. Shuning uchun sxemada berilgan signallarni ishlab chiqish uchun sarf bo‘ladigan vaqtni doimo hisobga olish kerak, realizatsiya bo‘ladigan funksiyani o‘zgartirmasdan, ayrim vaqtlarda, bu vaqtni o‘zgartirish kerak. Bu jarayonni, xuddi bir taktli funksional elementlardan yasalgan ko‘p taktli sxemalarda qilganimizday, ushlab turish elementlari yordami bilan bajarish mumkin. Ushlab turish elementi vazifasini musbat kontaktli rele bajaradi (4- shakl). Ushlab turish vaqti 1 taktga teng bo‘ladi.

**T a ’ r i f .** *Agar rele-kontaktli sxemaning kirishlariga* $t$ *momentda* $x_1, x_2, ..., x_n$ *signallar majmuasi berilganda, uning chiqishida* $t+v$ *momentda* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *signal paydo bo‘lsa, u holda rele-kontaktli sxema* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ***funksiyani*** $v$ ***ushlab turish vaqti bilan realizatsiya qiladi*** *deb ataladi.*

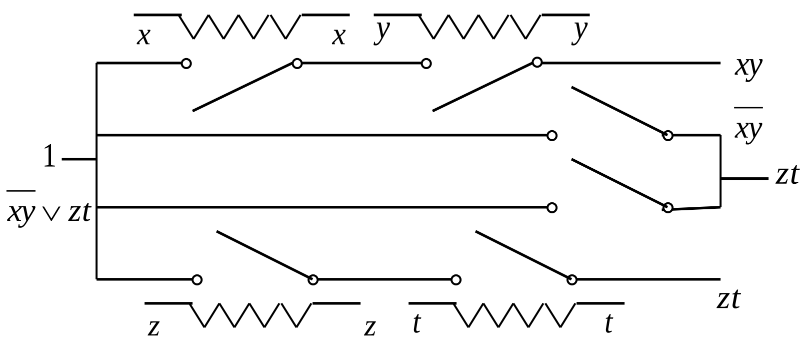
Ketma-ket berilgan signallar bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda ishlab chiqiladi.



6- shakl

Shunday qilib, mantiq algebrasining istalgan funksiyasini ayrim ushlab turish vaqti bilan rele-kontaktli sxema orqali realizatsiya qilish mumkin. (Ushbu xulosani isbot qilishni o‘quvchiga havola qilamiz).

**M i s o l .** Berilgan a) $xy \vee \bar{z}$; b) $\overline{xy} \vee zt$; d) $xy \vee yx \vee xz$ funksiyalarni rele-kontaktli sxema orqali realizaiya qilish masalasini qaraymiz. Bu funksiyalarni sxema orqali realizatsiya qilish uchun o‘tkazgichlarni ketma-ket va parallel ulash natijasida elementar kon’yunksiyalarini va ularning diz’yunksiyalarini realizatsiya qilamiz.

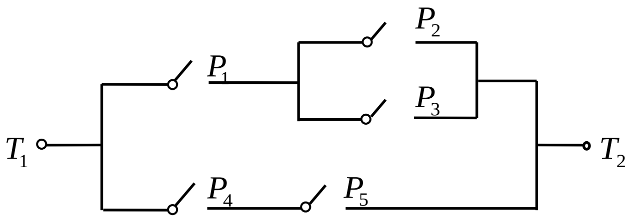


7- shakl

Manfiy kontaktli reledan foydalanib o‘zgaruvchilarning va ayrim elementar kon’yunksiyalarning inkorlarini realizatsiya qilamiz. Musbat kontaktli rele orqali signallarning bir vaqtda yetib kelishini ta’minlaymiz. Natijada, 6–8- shakllarda ko‘rsatilgan sxemalarga ega bo‘lamiz. ■

## Kontaktli sxemalar va ularning sintezi

**Kontaktli sxema tushunchasi.** Har bir avtomat turlicha kontaktli yoki kontaktsiz sxemalardan foydalanish asosida tuziladi. Kontaktli sxemalar bilan jihozlangan avtomatlarning ishini umumiy holda ko‘rib o‘tamiz. Masalan, 1-shaklda ko‘rsatilganidek, o‘tkazgichlar, ikkita $T_1$ va $T_2$ qutb, beshta $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ knopka bilan ta’minlangan kontaktlardan yasalgan tuzilma **kontaktli sxema** deb hisoblanishi mumkin. $T_1$ qutb elektr toki manbaini ifodalaydi, $T_2$ qutb esa avtomatning “chiqishi”da ishni bajaruvchi qurilmani bildiradi. Avtomatning chiqishida ish bajarilganligi haqida xabar beruvchi kontrol lampa o‘rnatish



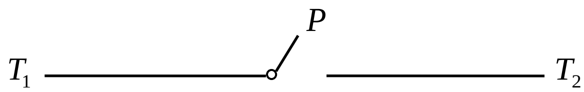

1- shakl

mumkinligidan, $T_2$ qutb mana shu lampani tasvirlaydi deb ayta olamiz.

Sxemada knopkalar tegishli ravishda yoqilsa, va demak, sxema bo‘yicha tok yuradigan bo‘lib kontaktlar tiklansa, $T_1$ qutbdan $T_2$ qutbga borgan tok kontrol lampasini yondiradi.

**Kontaktli sxemalarni sintez qilish.** Avvalo har bir murakkab kontaktli sxemaning tarkibiy qismlarini tashkil etuvchi eng sodda kontaktli sxemalar bilan tanishamiz.

2- shakldagi sxema bitta o‘tkazgichdan, $T_1$ va $T_2$ qutblardan va $P$ knopkali bitta kontaktdan yasalgan.




2- shakl

1- jadval

| $x$ | Sxemada tok |
|---|---|
| ch | bor |
| yo | yo‘q |

$P$ knopka yoqilganda, kontakt tiklanib, tok sxema bo‘yicha $T_1$ dan $T_2$ ga tomon yuradi va kontrol lampa yonadi. $P$ knopka ochiq bo‘lganda kontakt uzilib, tok o‘tmaydi va lampa yonmaydi. $P$ knopkaga $x$ – “$P$ knopka yopiq” degan mulohazani mos qo‘yamiz. $P$ knopka haqiqatan yopiq bo‘lsa, $x$ mulohaza chin bo‘ladi. Bu holda kontrol lampa yonadi. $P$ knopka ochiq bo‘lganda esa, $x$ mulohaza yolg‘on bo‘ladi va bu holda kontrol lampa yonmaydi.

Shunday qilib, $x$ mulohazaning chin-yolg‘onligi bilan tok bor-yo‘qligi (kontrol lampaning yonish-yonmasligi) orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatildi va buni 1- jadval ifodalaydi.

2- jadval

| $x$ | $y$ | Sxemada tok | $x \wedge y$ |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | bor | 1 |
| 1 | 0 | yo‘q | 0 |
| 0 | 1 | yo‘q | 0 |
| 0 | 0 | yo‘q | 0 |

Endi ketma-ket ulangan ikkita $P$ va $Q$ knopkali (ikki ketma-ket kontaktli) sxemani olaylik (3- shakl). $P$ va $Q$ knopkalarga mos ravishda $x$ – ”$P$ knopka yopiq” va $y$ – ”$Q$ knopka yopiq” degan mulohazalarni mos keltiramiz. U holda, sxemada tok bor-yo‘qligi $x \wedge y$ kon’yunksiyaning chin-yolg‘onligiga mos keladi (2- jadval).

Parallel ulangan ikki $P$ va $Q$ knopkali sxemalarga murojaat qilamiz (4- shakl). Demak, parallel ulangan ikki $P$ va $Q$ kontaktli sxemada tok bor-yo‘qligi $x \vee y$ diz’yunksiyaning chin-yolg‘onligi bilan aniqlanadi (3- jadval).

3- jadval

| $x$ | $y$ | Sxemada tok | $x \vee y$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | bor | 1 |
| 1 | 0 | bor | 1 |
| 0 | 1 | bor | 1 |
| 0 | 0 | yo‘q | 0 |

3 va 4- shakllarda berilgan sxemalarni umumlashtirib, $n$ ta $P_1,...,P_n$ knopkalarni ketma-ket va shuningdek parallel ulash mumkin. Buning natijasida $n$ ta ketma-ket va $n$ ta parallel kontaktli sxemalar yasalgan bo‘ladi. Ular mos ravishda $(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n)$ va $(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n)$ funksiyalarni realizatsiya qiladi, bu yerda $x_i$ mulohaza $P_i$ knopka yopiq ekanligini bildiradi.

Shunday juft-juft knopkalar bilan ta’minlangan kontaktli sxemalarni ham yasash mumkinki, har juft knopkaning istalgan biri yopilganda (ochilganda), ikkinchisi ochiladi (yopiladi). Bir juft knopka $\overline{P}$ va $P$ kabi belgilanadi. $P$ knopkaga $x$ mulohaza mos kelganda, $\overline{P}$ knopkaga $\bar{x}$ inkorni mos keltirish tabiiydir, chunki $P$ – yopiq, demak, $x$ chin bo‘lganda, $\overline{P}$ – ochiq, ya’ni $\bar{x}$ yolg‘on bo‘ladi.

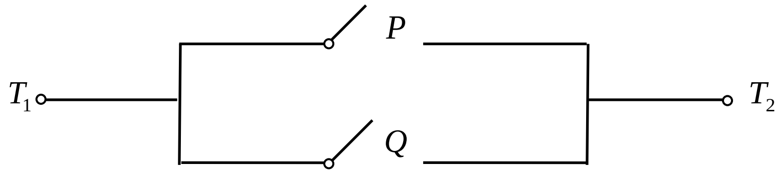
4- jadval

| $x$ | $\bar{x}$ | Sxemada tok | $x \wedge \bar{x}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | yo‘q | 0 |
| 0 | 1 | yo‘q | 0 |

Bir juft knopkali eng sodda sxemalardan biri 5- shakldagidek tasvirlanishi mumkin. Knopkalarning biri ochilganda, ikkinchisi albatta yopilgani uchun, bunday


3- shakl

sxemada hech qachon tok bo‘lmaydi. 5- shaklgi sxema uchun 4- jadvalni tuzish




mumkin. 4-

Bir juft knopkali eng sodda sxemalardan yana birini 6- shakldagidek tasvirlasa bo‘ladi. Bu sxemada tok har doim bor, chunki agar $P$ yopiq bo‘lsa, u holda $\overline{P}$ ochiq bo‘ladi va tok yuqoridagi o‘tkazgichdan $P$ orqali o‘tadi, aksincha, $P$ ochiq bo‘lganda, $\overline{P}$ yopiq bo‘ladi va tok pastdagi o‘tkazgichdan $\overline{P}$ orqali o‘tadi. 6- shakldagi sxema uchun 5- jadvalni tuzish mumkin.

5- jadval

| $x$ | $\bar{x}$ | Sxemada tok | $x \vee \bar{x}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | bor | 1 |
| 0 | 1 | bor | 1 |

Shunday qilib, har bir sodda kontaktli sxema mulohazalar algebrasining ma’lum bir funksiyasini realizatsiya qiladi.

Bu funksiyaga kontaktli sxemaning **o‘tkazuvchanlik funksiyasi** deb ataladi. Yuqorida ko‘rilgan eng sodda sxemalarning o‘tkazuvchanlik funksiyalari quyidagicha

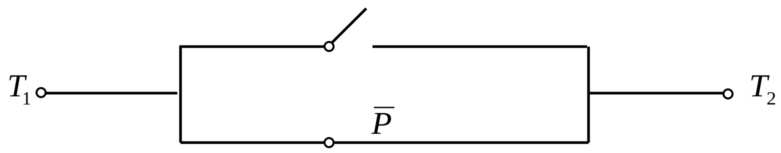

5- shakl

bo‘ladi:

$$x,\ x \wedge y,\ x \vee y,\ x \wedge \bar{x},\ x \vee \bar{x}. \tag{1}$$

Bu funksiyalarning chinlik jadvallari tegishli sxemalarda qachon tok bo‘lishi va qachon bo‘lmasligini ko‘rsatadi.

Sodda sxemalarning turli kombinasiyalaridan, har xil murakkab kontaktli sxemalarni tuzish mumkin. Bunday sxemalarning har biriga (1) funksiyalarning superpozisiyasidan hosil qilingan funksiyalar mos keladi. Aksincha, mulohazalar algebrasining har bir funksiyasiga qandaydir kontaktli sxemani mos qo‘ish mumkin.




6- shakl

**1- m i s o l .** 7- shaklda tasvirlangan sxemaning o‘tkazuvchanlik funksiyasini topaylik. Avvalo, $P$, $Q$, $R$ knopkalarga mos ravishda $x$, $y$, $z$ mulohazalarni mos kltiramiz. U holda $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ knopkalarga $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ mulohazalar mos keladi. Sxemaning yuqori qismi $\bar{x}\wedge((y\wedge\bar{z})\vee x)$ formula bilan, pastki qismi $z\wedge\bar{y}\wedge(x\vee\bar{y})$ formula bilan ifodalanadi. Yuqori va pastki qismlar parallel ulangani uchun butun sxemaning o‘tkazuvchanlik funksiyasi

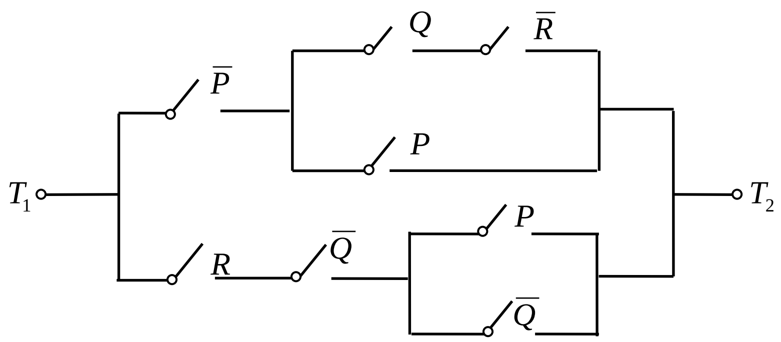
$$f(x,y,z)=(\bar{x}\wedge((y\wedge\bar{z})\vee x))\vee(z\wedge\bar{y}\wedge(x\vee\bar{y}))$$

ko‘rinishda bo‘ladi. ■

**2- m i s o l .** Berilgan

$$f(x,y,z)=(x\vee y)\wedge(\bar{y}\vee z)\wedge(\bar{x}\vee y\vee\bar{z}) \qquad (2)$$

funksiyaning $x$, $y$, $z$ o‘zgaruvchilariga $P_1$, $P_2$, $P_3$ knopkalar mos qo‘yilgan bo‘lsin. U holda (2) funksiyaga 8- shaklda tasvirlangan kontaktli sxema mos keladi. ■

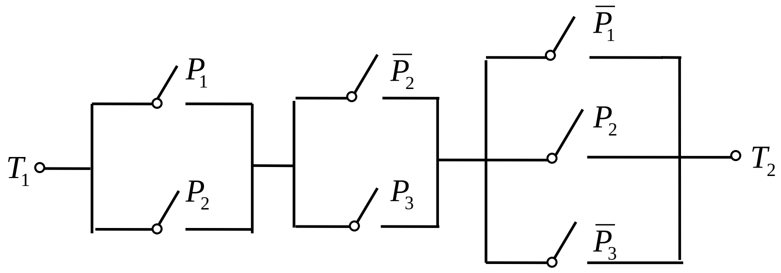



7- shakl

Bundan keyin, sxemalarning ko‘rinishi oddiy bo‘lishi uchun, kontaktni ikki qutbga ega bo‘lgan kesma orqali ifodalaymiz (kesmani **ikki qutbli** deb ataymiz). Agar kesma ulanuvchi bo‘lsa, uni $x$ bilan, ajratuvchi bo‘lsa, $\bar{x}$ bilan belgilaymiz, bu yerda $x$ – g‘altakda realizatsiya qilinadigan o‘zgaruvchi. Har bir g‘altakka bitta o‘zgaruvchi mos keladi va u bilan istalgancha sondagi kontaktlar ulanishi mumkin. Kesmalar qutblari orqali bir-birlari bilan ulanadi. Har bir sxema kirish va chiqishga ega bo‘ladi. Sxemaning kirishiga tok berilganda, uning chiqishida bir taktdan keyin tok paydo bo‘lsa, u holda sxemada **o‘tkazuvchanlik bor** deb, aks holda esa, **o‘tkazuvchanlik yo‘q** deb aytiladi.

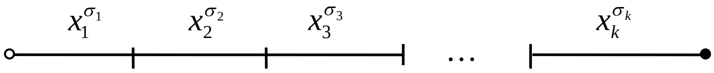
Kesmalarning 9- shakldagidek ketma-ket ulanishini **zanjir** deb ataymiz.

Zanjirda bitta kontakt bir necha marta qatnashishi mumkin. Birinchi kontaktning kirishi sxemaning kirishiga va oxirgi kontaktning chiqishi sxemaning chiqishiga to‘g‘ri keladi. O‘zgaruvchilarning biror qiymatlari majmuida sxemaning (DNSh ko‘rinishidagi funksiyani realizatsiya qiladigan sxemaning) chiqishida tok




8- shakl

bo‘lishi uchun hech bo‘lmaganda birorta zanjirning hamma kontaktlari ulangan bo‘lishi yetarli va zarurdir.




9- shakl

Agar sxemaga kiruvchi har bir $\Gamma$ zanjirga o‘zgaruvchilarning yoki ular inkorlarining $U_\Gamma$ elementar kon’yunksiyasini mos qilib qo‘ysak, u holda sxemaga kiruvchi zanjirlarga mos kelgan $\Gamma$ elementar kon’yunksiyalarning diz’yunksiyasiga sxemaning o‘tkazuvchanlik funksiyasi mos keladi.

Shuni ta’kidlash kerakki, sxemaning o‘tkazuvchanlik funksiyasini hosil qilish uchun ayrim zanjirlarning diz’yunksiyasini olish kifoyadir.

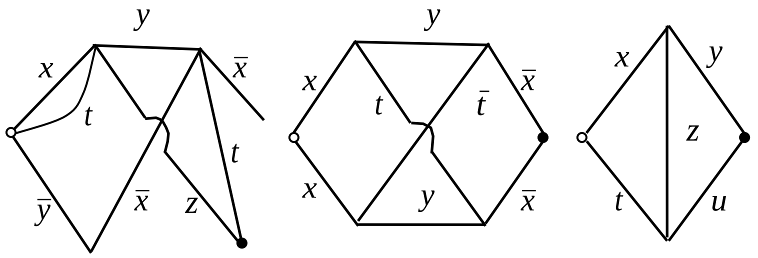
**1- ta’rif.** *Har bir qutbdan bir marta o‘tgan zanjir* ***muhim*** *(**jiddiy**)* ***zanjir*** *deb ataladi.*

Ya’ni, sxemaning kirishi va chiqishiga bittadan kontakt va zanjirning qolgan qutblariga ikkitadan kontakt to‘g‘ri keladigan zanjir muhim zanjirdir.

Har bir sxemada chekli sondagi muhim zanjirlar mavjud bo‘lishini ko‘rsatish mumkin. Bundan tashqari, muhim zanjirlarga mos keluvchi kon’yunksiyalarning diz’yunksiyasi sxemaning o‘tkazuvchanlik funksiyasiga teng kuchli ekanligini ham isbot qilish mumkin. Bularga asosan, sxemaga qarab uning o‘tkazuvchanlik funksiyasini yozsa bo‘ladi.

Bundan keyin bo‘yalmagan doiracha bilan sxemaning kirishi va qora rangli doiracha bilan sxemaning chiqishi belgilaymiz.

**3- m i s o l .** 10- shaklda berilgan sxemalarning o‘tkazuvchanlik funksiyalarini topaylik.



a) b) d)

10- shakl

a) $xyt \vee tyt \vee xz \vee tz \vee \bar{y}\bar{x}t \vee \bar{y}\bar{x}yz = yt \vee xz \vee tz \vee \bar{y}\bar{x}t$ **,**

b) $xy\bar{x} \vee xt\bar{x} \vee xy\bar{t}y\bar{x} \vee xty\bar{t}\bar{x} \vee xy\bar{x} \vee x\bar{t}\bar{x} \vee x\bar{t}yt\bar{x} \vee xyty\bar{x} = 0$,

d) $xy \vee tu \vee xzu \vee tzy$

formulalar mos ravishda 10- shaklning a), b) va d) qismlarida tasvirlangan sxemalarning o‘tkazuvchanlik funksiyalari bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas. ■

Endi teskari masalani ko‘raylik, ya’ni berilgan funksiyaga qarab uni realizatsiya qiladigan sxemani yasash masalasini ko‘ramiz. Buning uchun funksiyani DNSh ko‘rinishiga keltiramiz. DNSh ifodasidagi har bir $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \ldots x_k^{\sigma_k}$ elementar kon’yunksiyaga mos ravishda bitta ketma-ket ulangan kontaktlarni mos qo‘yamiz (9- shakl). Bundan keyin hamma kirishlarni va chiqishlarni mos ravishda aynan tutashtiramiz. Hosil qilingan sxema DNSh ko‘rinishidagi funksiyani realizatsiya qiladi.

**4- m i s o l .** Berilgan a) $(y \vee z) \to x\bar{y}$, b) $z\bar{y} \leftrightarrow xy$, d) $(x + y + z)$ funksiyalarni kontakt sxemalar orqali realizatsiya qilaylik. Buning uchun berilgan funksiyalarni DNSh ko‘rinishiga keltiramiz:

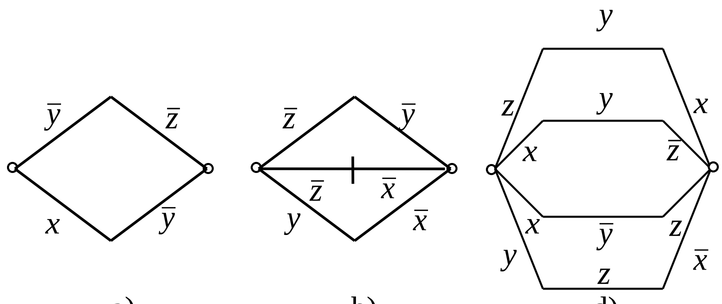
a) $(y \vee z) \to x\bar{y} = \overline{y \vee z} \vee x\bar{y} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}$ (11-a shakl);

b) $z\bar{y} \leftrightarrow yx = (\overline{z\bar{y}} \vee yx)(z\bar{y} \vee \overline{yx}) = (\bar{z} \vee y \vee yx)(z\bar{y} \vee \bar{y} \vee x) =$

$= (\bar{z} \vee y)(\bar{y} \vee \bar{x}) = \bar{z}\,\bar{y} \vee \bar{z}\,\bar{x} \vee y\bar{x}$ (11-b shakl);

d) $x + y + z = xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz$ (11-d shakl). ■

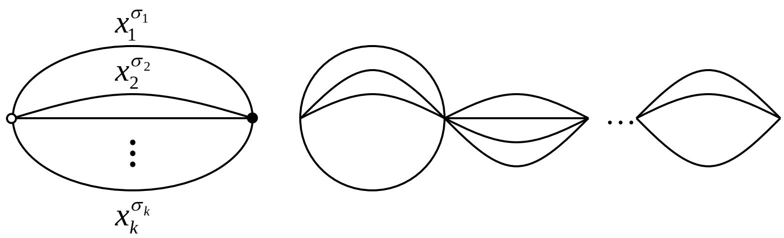
Biz yuqorida DNSh ko‘rinishdagi funksiyani kontakt sxema orqali realizatsiya qilishni ko‘rdik. Tabiiyki, KNSh ko‘rinishdagi funksiyani ham kontakt sxema orqali realizatsiya qilish mumkin. Buning uchun, birinchi navbatda, har bir elementar diz’yunksiyalarni realizatsiya qiladigan sxemalar tuzamiz (12- shakl). Ikkinchi navbatda, elementar diz’yunksiyalarga mos kelgan sxemalardan bittasining chiqishini ikkinchisining kirishiga, ikkinchisining chiqishini uchinchisining kirishiga va hokazo ulab chiqamiz (13- shakl).



a) b) d)

11- shakl

Birinchisining kirishi kontaktli sxemaning kirishi va oxirgisining chiqishi sxemaning chiqishi bo‘ladi. Hosil qilingan sxema KNSh ko‘rinishdagi funksiyani realizatsiya qiladi.



12- shakl 13- shakl

**5- misol.** Yuqorida keltirilgan algoritmdan foydalanib, a) $(y \vee z) \rightarrow x\bar{y}$, b) $z\bar{y} \leftrightarrow xy$ va d) $x + y + z$ funksiyalarni kontaktli sxemalar orqali realizatsiya qilish kerak bo‘lsin.

a) $f_1(x, y, z) = (y \vee z) \rightarrow x\bar{y}$ funksiyani KNSh ko‘rinishga keltiramiz va uni soddalashtirish uchun tanish bo‘lgan ushbu

$$x \vee xy = x, \qquad x\,(x \vee y) = x,$$

$$x \vee \bar{x}y = x \vee y, \qquad \bar{x} \vee xy = \bar{x} \vee y,$$

$$x(\bar{x} \vee y) = xy, \qquad \bar{x}(x \vee y) = \bar{x}y$$

teng kuchli formulalardan foydalanamiz:

$$f_1(x, y, z) = \overline{y \vee z} \vee x\bar{y} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} = \bar{y}(\bar{z} \vee x) \text{ (14-a shakl),}$$

b) $f_2(x,y,z)=z\bar{y}\leftrightarrow yx=(z\bar{y}\vee yx)(\overline{yx}\vee z\bar{y})=$

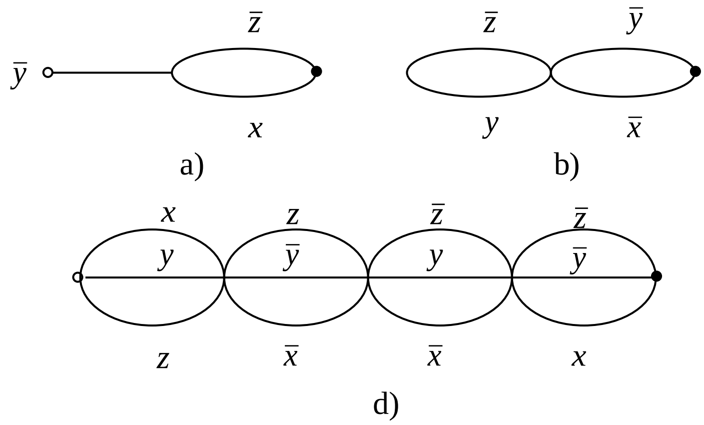
$=(\bar{z}\vee y\vee yx)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z\bar{y})=(\bar{z}\vee y)(\bar{x}\vee\bar{y})$ (14-b shakl),

d) $f_3=x+y+z=(x\vee y\vee z)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})\wedge$

$\wedge(x\vee\bar{y}\vee\bar{z})$ (14-d shakl). ■

Parallel-ketma-ket ulash natijasida hosil qilingan sxemalar klassini induktiv tarzda ifodalaylik.

**2- ta'rif.** *Bir kontaktdan iborat sxema* ***elementar sxema*** *deb ataladi. Elementar sxemalarning ayrimlarini chekli son marta parallel va ketma-ket ulash*




14- shakl

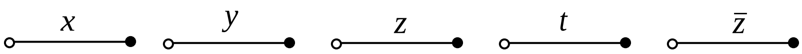
*natijasida hosil bo'lgan kontakt sxema* ***parallel–ketma-ket sxema*** *yoki* ***P-sxema*** *deb ataladi.*

Ravshanki, elementar sxemalardan har qanday usul bilan yasalgan $P$-sxemaga diz'yunksiya, kon'yunksiya va inkor amallari bilan ifodalangan o'tkazuvchanlik funksiyasi mos keladi va, aksincha, har qanday shunday funksiya uchun ma'lum $P$-sxema yasash mumkin.

Ta'kidlaymizki, har qanday kontakt sxema $P$-sxema bo'la olmaydi.

**6- misol.** Berilgan $f_1(x,y,z,t)=(x\vee y\bar{z})(xy\vee zt)$ va $f_2(x,y,z,t)=(\bar{x}(y\vee\bar{z})\vee\bar{t})x$ funksiyalar uchun $P$-sxemalar yasash talab qilingan bo'lsin.

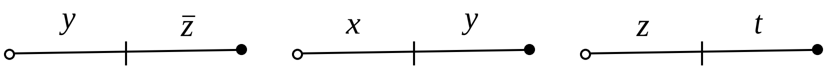
a) $x$, $y$, $z$, $t$, $\bar{z}$ elementar formulalarni realizatsiya qiladigan elementar sxemalarni tuzamiz (15- shakl).




15- shakl

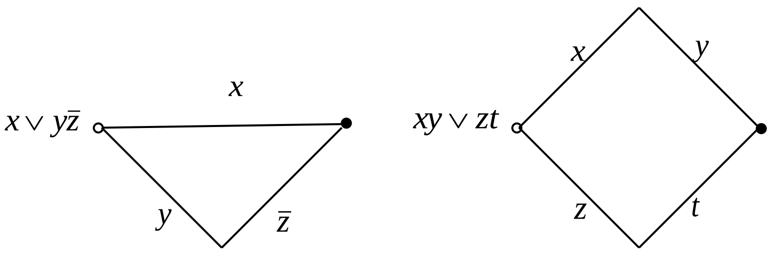
$x$ va $y$ o‘zgaruvchilarga mos kontaktlar ikki donadan bo‘lishi kerak. Endi kontaktlarni ketma-ket ulab, $y\bar{z}$, $xy$ va $zt$ elementar kon’yunksiyalarni realizatsiya qilamiz (16- shakl).

Uchinchi qadamda, parallel ulashdan foydalanib, $x \vee y\bar{z}$ va $xy \vee zt$



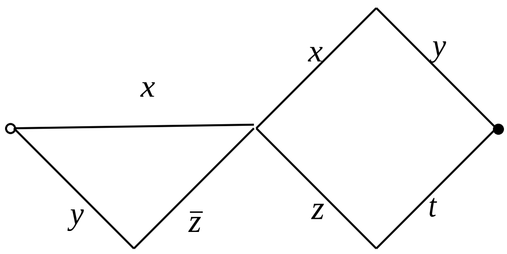

16- shakl

funksiyalarni realizatsiya qilamiz (17- shakl).



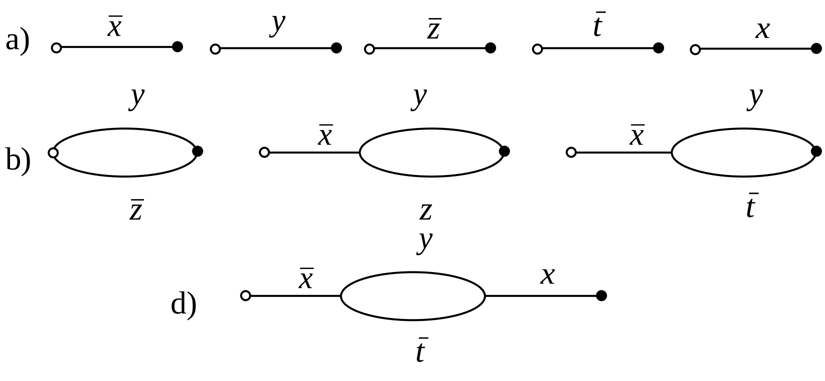

17- shakl

Hosil qilingan sxemalarni ketma-ket ulab, berilgan $f_1(x, y, z, t)$ funksiyani realizatsiya qiladigan $P$-sxemaga ega bo‘lamiz (18- shakl).




18- shakl

b) $f_2(x, y, z, t)$ funksiyani realizatsiya qiladigan $P$-sxema 19- shaklning a), b)




19- shakl

va d) qismlarida ko‘rsatilgan. ■

## Mavzu: Qisqartirilgan diz’yunktiv normal shakl. Karno karta metodi. Bleyk metodi. Mantiqiy elementlardan foydalanib qisqartirish

**Mantiq algebrasining funksiyalarini minimallashtirish muammosining dolzarbligi.** Xalq xo‘jaligi uchun muhim amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan ko‘pchilik masalalarni hal qilishda mantiq algebrasidan foydalanish mumkin. Quyida shunday masalalardan biri mantiq algebrasining funksiyalarini minimallashtirish muammosi sifatida qaralgan.

**1- t a ’ r i f .** *Ushbu*

$$K = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot ... \cdot x_{i_r}^{\sigma_r} \ \ (\gamma \neq \mu \ \textit{bo‘lganda} \ i_\gamma \neq i_\mu) \quad (1)$$

*ifoda* ***elementar kon’yunksiya*** *deb ataladi.* $r$ *son* ***elementar kon’yunksiyaning rangi*** *deyiladi. Konstanta 1 ni rangi 0 ga teng bo‘lgan elementar kon’yunksiya deb hisoblaymiz.*

**2- t a ’ r i f .** *Ushbu*

$$D = \mathop{\vee}_{i=1}^{s} K_i (i \neq j \ bo'lganda \ K_i \neq K_j) \quad (2)$$

*ifoda* ***diz’yunktiv normal shakl*** *(DNSh) deb ataladi, bu yerda* $K_i$ *– rangi* $i$ *ga teng bo‘lgan eyementar kon’yunksiya.*

Ma’lumki, $D$ diz’yunktiv normal shakl mantiq algebrasining ma’lum bir $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyasini realizatsiya qiladi va mantiq algebrasining berilgan funksiyasi bir nechta DNSh ko‘rinishida ifodalanishi mumkin. Mantiq algebrasining har qanday $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(f \neq 0)$ funksiyasini DNSh ko‘rinishiga keltirish mumkinligini, ya’ni

$$D = f(x_1, x_2, ..., x_n) \quad (3)$$

III bobda ta’kidlangan edi.

Bunday DNSh sifatida $f$ funksiyaning mukammal diz’yunktiv normal shaklini (MDNSh) olish mumkin, ya’ni

$$D = \mathop{\vee}_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n} . \quad (4)$$

**1- m i s o l .** $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiya 1- chinlik jadvali bilan berilgan bo‘lsin.

1- jadval

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

U holda $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiya

$$D_1 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3 \qquad (5)$$

MDNSh ko‘rinishida ifodalanishi mumkin.

Ikkinchi tarafdan, shu funksiyaning o‘zini

$$D_2 = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 \qquad (6)$$

DNSh ko‘rinishida ham ifodalash mumkin (chinlik jadvali orqali aniqlashni o‘quvchiga havola etamiz).

Agar $D_1$ bilan $D_2$ ko‘rinishlarini taqqoslasak, u holda $D_1$ ifodasida 15ta o‘zgaruvchi simvollari va 5ta elementar kon’yunksiyalar qatnashayotganligini, $D_2$ ifodasida esa, 3ta o‘zgaruvchi simvollari va 2ta elementar kon’yunksiyalar qatnashayotganligini ko‘ramiz. Demak, $D_2$ formula o‘zgaruvchilar simvoli (elementar kon’yunksiyalar) soniga nisbatan $D_1$ DNShga qaraganda soddaroq formula hisoblanadi.

Agar $D_1$ va $D_2$ ko‘rinishdagi funksiyani:

a) kontaktli sxema orqali realizatsiya qilsak, u holda $D_1$ DNShni realizatsiya qilish uchun 15ta kontakt, $D_2$ DNShni realizatsiya qilish uchun esa 3ta kontakt talab qilinadi;

b) nol taktli funksional elementlardan yasalgan sxema orqali realizatsiya qilsak, u holda $D_1$ni realizatsiya qilish uchun 21 dona funksional element va $D_2$ni realizatsiya qilish uchun 4 dona funksional element sarf bo‘ladi;

d) bir taktli funksional elementlardan yasalgan ko‘p taktli to‘g‘ri sxema orqali realizatsiya qilish talab qilinsa, u holda $D_1$ni realizatsiya qilish uchun 33 dona funksional element, shu jumladan, 12 dona ushlab turish elementi va $D_2$ni realizatsiya qilish uchun 6 dona, shu jumladan, 2 dona ushlab turish elementi kerak bo‘ladi.

Bu mulohazalarning chinligini isbotlashni o‘quvchiga havola etamiz.

Demak, $D_1$ DNShni realizatsiya qiladigan sxemaning (qanday sxema bo‘lishidan qat’iy nazar) tannarxi $D_2$ DNShni realizatsiya qiladigan sxemaning tannarxidan ancha qimmat (ortiq) turadi. ■

1- misoldan ko‘rinib turibdiki, mantiq algebrasining funksiyalarini minimallashtirish muammosi ko‘pchilik hollarda (jumladan, xalq xo‘jaligi uchun) katta amaliy ahamiyatga egadir.

Bu masalani hal qilish uchun DNShning “murakkabligini” ifodalovchi $L(D)$ **soddalik indeksi** tushunchasini kiritamiz.

$L(D)$ funksional uchun qo‘yidagi aksiomalarning bajarilishini talab qilamiz.

**I. Manfiy emasligi haqidagi aksioma.** Har qanday DNSh uchun $L(D) \geq 0$.

**II. Monotonligi haqidagi aksioma** (ko‘paytmaga nisbatan). Agar $D = D^1 \vee x_i^{\sigma_i} K^1$ bo‘lsa, u holda

$$L(D) \geq L(D^1 \vee K^1). \tag{7}$$

**III. Qavariqligi haqidagi aksioma** (qo‘shishga nisbatan). Agar $D = D_1 \vee D_2$ va $D_1 \wedge D_2 \equiv 0$ bo‘lsa, u holda

$$L(D) \geq L(D_1) + L(D_2). \tag{8}$$

**IV. Invariantlik haqidagi aksioma** (izomorfizmga nisbatan). Agar $R^1$ DNSh $R$ DNShdan o‘zgaruvchilarni qayta nomlash (aynan tenglashtirishsiz) usuli bilan hosil qilingan bo‘lsa, u holda $L(D^1) = L(D)$.

Diz’yunktiv normal shakllar uchun **soddalik indekslari** deb ataluvchi quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

1. $L_h(D)$ – berilgan $D$ DNShdagi o‘zgaruvchilar harflarining soni.
2. $L_k(D)$ – berilgan $D$ DNShdagi elementar kon’yunksiyalar soni.
3. $L_i(D)$ – berilgan $D$ DNShdagi inkor ( $\neg$) simvollari soni.

$L_h(D)$, $L_k(D)$ va $L_i(D)$ indekslar yuqorida keltirilgan aksiomalarni qanoatlantiradi.

**2- misol.** 1- misoldagi $D_1$ va $D_2$ DNShlar berilgan bo‘lsin. Ravshanki, $L_h(D_1)=15$ va $L_h(D_2)=3$, ya’ni $D_2$ DNSh o‘zgaruvchilar harflarining soni indeksiga nisbatan $D_1$ DNShga qaraganda soddaroqdir. $D_1$ va $D_2$ DNShlar uchun $L_k(D_1)=5$ va $L_k(D_2)=2$ bo‘lgani uchun $D_2$ DNSh elementar kon’yunksiyalar soni indeksiga nisbatan ham $D_1$ DNShga qaraganda soddaroqdir. $L_i(D_1)=6$ va $L_i(D_2)=2$, ya’ni $D_2$ DNSh inkor simvollari soni indeksi uchun ham $D_1$ DNShga nisbatan soddaroq ekan. ■

Ma’lumki, $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ o‘zgaruvchilar to‘plamidan $3^n$ta elementar kon’yunksiya tuzish mumkin (“bo‘sh” kon’yunksiyaga 1 konstanta mos qilib qo‘yilgan). Bundan o‘z navbatida $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ to‘plam elementlaridan $2^{3^n}$ ta diz’yunktiv normal shakl tuzish mumkinligi kelib chiqadi.

**3- ta’rif.** *Agar $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyani realizatsiya qiluvchi DNSh $L(D)$ indeksga nisbatan minimal bo‘lsa, u holda bunday DNSh $L$ga nisbatan minimal DNSh, $L_k$ indeksga nisbatan minimal bo‘lgan DNSh* ***eng qisqa diz’yunktiv normal shakl*** *deb ataladi.*

Bundan keyin $L_h$ indeksga nisbatan minimal bo‘lgan DNShni **minimal diz’yunktiv shakl** deb ataymiz.

**3- misol.** 1- misoldagi $D_1$ va $D_2$ DNShlarni tahlil qilamiz. $D_2$ DNSh minimal DNShdir, chunki ushbu DNSh orqali ifodalangan $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyaning $x_1,x_2,x_3$ argumentlari muhim (soxta emas) argumentlardir. Shuning uchun uni uchtadan kam harf bilan ifodalash mumkin emas.

$D_2$ DNSh eng qisqa DNShdir, chunki ushbu DNSh bilan ifodalangan $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiya har qanday elementar kon’yunksiyadan farq qiladi.

$D_2$ DNSh $L_i$ indeksga nisbatan ham minimal DNShdir, chunki ushbu DNSh bilan ifodalangan $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiya $x_2$ va $x_3$ o‘zgaruvchilari bo‘yicha o‘suvchi funksiya emas va demak, uni ikkita inkordan kam inkor qatnashgan DNSh ko‘rinishida ifodalash mumkin. ■

Shunday qilib, asosiy muammo matematik mantiqning ixtiyoriy $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyasi uchun $L$ indeksga nisbatan minimal diz'yunktiv normal shaklni topishdan iboratdir. Bu muammo **matematik mantiq funksiyalarini minimallashtirish muammosi** deb ataladi.

**Matematik mantiq funksiyalarini minimallashtirish muammosini hal qilish algoritmining mavjudligi.** Bu bobda matematik mantiq funksiyalarini minimallashtirish muammosini hal qilish usullari bilan shug'ullanamiz. Avvalo bu masala yechimining trivial algoritmi mavjudligini ta'kidlaymiz. Bu algoritm **birma-bir ko'zdan kechirish algoritmi** deb yuritiladi va quyidagi 4 bandda ifodalangan jarayonlarni bajarishni taqazo qiladi.

1. $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ o'zgaruvchilar to'plamida barcha $2^{3^n}$ ta $D_1, D_2, ..., D_{2^{3^n}}$ diz'yunktiv normal shakllarni ma'lum tartibda tuzamiz.

2. Bu DNSh lardan $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani realizatsiya qiladigan DNShlarni ajratib olamiz.

3. Ajratib olingan DNShlar soddalik indekslarining ($L_h$, $L_k$, $L_i$) miqdorlarini hisoblaymiz.

4. $L_h$, $L_k$, $L_i$ indekslar miqdorlarini bir-biri bilan taqqoslash yo'li bilan $L$ ga nisbatan minimal bo'lgan DNShni topamiz. ■

Keltirilgan algoritmni amaliy realizatsiya qilish uchun juda ham ko'p mehnat talab etiladi, chunki kamida $2^{3^n}$ ta sodda amalni (operasiyani) bajarishga to'g'ri keladi. Masalan, $n = 3$ bo'lganda, $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyani realizatsiya qiladigan $L$ indeksga nisbatan minimal diz'yunktiv normal shakllarni topish uchun kamida $2^{3^n} = 2^{3^3} = 134\ 217\ 728$ ta amalni bajarishga to'g'ri keladi. Shuning uchun $n \geq 3$ dan boshlab bu algoritmdan foydalanish (hattoki tez hisoblah imkoniyatiga ega bo'lgan hozilrgi zamon hisoblash mashinalarini ishlatganda ham) mantiqqa to'g'ri kelmaydi. Bu algoritmdan faqatgina $n = 1$ va $n = 2$ bo'lgan hollar uchun foydalanish mumkin.

Demak, umuman olganda, birma-bir ko‘zdan kechirish algoritmi minimal diz’yunktiv normal shaklni topish masalasida amaliy yordam bermaydigan algoritmdir. Shuning uchun mantiq algebrasi funksiyasini minimallashtirishning boshqa usullarini izlashga to‘g‘ri keladi.

**Diz’yunktiv normal shaklni soddalashtirish va tupikli DNSh.**

Mantiq algebrasining DNShdagi ixtiyoriy $D$ formulasi uchun

$$D = D^1 \vee K\,,\ \ D = D^1 \vee x_i^{\sigma_i} K^1\,, \qquad (1)$$

bo‘lsin, bu yerda $D^1$ – biror DNSh, $K$ – berilgan $D$ formulaning biror elementar kon’yunksiyasi, $x_i^{\sigma_i}$ – shu $K$ elementar kon’yunksiyaning birorta ($i$ indeksli) ko‘paytuvchisi, $K^1$ – $K$ ning qolgan ko‘paytuvchilari, ya’ni $K = x_i^{\sigma_i} K^1$. DNShni soddalashtirishning ikki xil yo‘lini (tipini) ko‘rib o‘taylik.

**I. Elementar kon’yunksiyani chetlashtirish operatsiyasi.** $D$ DNShdan $D^1$ DNShga o‘tish uchun $K$ elementar kon’yunksiyani chetlashtirish kerak. Bunday o‘zgartirish $D = D^1$ bo‘lganda va faqat shundagina mumkin.

**II. Ko‘paytuvchini chetlashtirish operatsiyasi.** $D$ DNShdan $D^1 \vee K^1$ DNShga o‘tish operatsiyasi. Buni bajarish uchun $K$ elementar kon’yunksiya ifodasidan $x_i^{\sigma_i}$ ko‘paytuvchini chetlashtirish kerak. Bu almashtirish $D = D^1 \vee K^1$ bo‘lganda aniqlangan.

**1- ta’rif.** *I va II almashtirishlar yo‘llari bilan soddalashtirish mumkin bo‘lmagan $D$ DNSh (I va II almashtirishlarga nisbatan)* ***tupikli DNSh (TDNSh)*** *deb ataladi.*

**1- misol.** $D = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1$ DNSh I va II almashtirishlarga nisbatan tupikli DNShdir. ■

(1) va monotonlik aksiomasiga asosan $L(D^1) \le L(D)$ va $L(D^1 \vee K^1) \le L(D)$ bo‘ladi. Shuning uchun TDNShlar orasida har doim minimal diz’yunktiv normal shakllar mavjud bo‘ladi.

**Diz’yunktiv normal shaklni soddalashtirish.** Endi yuqorida keltirilgan ikkita almashtirish asosida berilgan $f_1(x_1, x_2, x_3)$ **DNShni soddalashtirish algoritmini** keltiramiz.

1. $f_1(x_1, x_2, x_3)$ funksiyani ifodalovchi biror DNShni dastlabki DNSh sifatida olamiz. Masalan, shunday DNSh sifatida uning mukammal diz'yunktiv normal shaklini olamiz (chunki chinlik jadvali asosida uni formula orqali osongina yozish mumkin).

2. Dastlabki diz'yunktiv normal shaklda qo'shiluvchi-larni va har bir qo'shiluvchidagi ko'paytuvchilarni tartibga solamiz. Bu tartiblash bilan DNSh ko'rinishi beriladi.

3. Chapdan o'ngga qarab DNSh ko'rinishi ko'rilib o'tiladi. Navbatdagi $K_i$ ($i = 1,2,...,n$) elementar kon'yunksiyaga nisbatan $K_i$ elementar kon'yunksiyani chetlashtirish operatsiyasi qo'llaniladi, agar bu mumkin bo'lmasa, u vaqtda chapdan o'ngga qarab $K_i = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} ... x_{i_r}^{\sigma_r}$ elementar kon'yunksiyalarning $x_{i_v}^{\sigma_v}$ $(v = 1,2,...,r)$ ko'paytuvchi hadlari ko'rilib chiqiladi va ularga nisbatan mumkin bo'lgunga qadar $x_{i_v}^{\sigma_v}$ ko'paytuvchini chetlashtirish operatsiyasi qo'llaniladi. Shundan so'ng keyingi elementar kon'yunksiyaga o'tiladi.

Oxirgi elementar kon'yuknsiyani ishlab chiqqandan keyin, hosil bo'lgan DNShni yana qaytadan chapdan o'ngga qarab ko'rib chiqiladi va elementar kon'yunksiyani chetlashtirish operatsiyasi sinab ko'riladi. Natijada izlangan diz'yunktiv normal shaklga ega bo'lamiz. ■

**1- teorema.** *Soddalashtirish algoritmini qo'llash natijasida hosil qilingan diz'yunktiv normal shakl (I va II almashtirishlarga nisbatan) minimal DNSh bo'ladi.*

**2- misol.** Chinlik jadvali vositasida berilgan (1- jadval) $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyani ko'rib o'taylik.

1- jadval

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$f(x_1, x_2, x_3)$ funksiya uchun dastlabki DNSh sifatida MDNShni olamiz va ikki tartiblashni o‘tkazamiz:

$$D' = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 ,$$

$$D'' = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_3 \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee x_2 \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_3 x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 .$$

Tartibga solingan $D'$ DNSh uchun algoritmning ishlashini ko‘ramiz.

1. $\overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$ kon’yunksiyani chetlashtirish mumkin emas, ammo $\overline{x}_1$ ko‘paytuvchini chetlashtirish mumkin, chunki $\overline{x}_2 \overline{x}_3 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$. Natijada $\overline{x}_2 \overline{x}_3$ kon’yunksiyaga ega bo‘lamiz, undan birorta ham ko‘paytuvchini chetlashtirish mumkin emas.

2. $\overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3$ kon’yunksiyani ham chetlashtirish mumkin emas. Bu kon’yunksiyadan $\overline{x}_1$ ko‘paytuvchini chetlashtirish mumkin emasligini osongina ko‘rish mumkin, lekin $\overline{x}_2$ ko‘paytuvchiga nisbatan $\overline{x}_2$ ko‘paytuvchini chetlashtirish operatsiyasini qo‘llash mumkin. $\overline{x}_1 x_3$ kon’yunksiyani hosil qilamiz. Ko‘paytuvchini chetlashtirish operatsiyasini ishlatib soddalashtirish mumkin emas.

3. $\overline{x}_1 x_2 x_3$ kon’yunksiyani chetlashtirish mumkin, chunki $\overline{x}_1 x_3 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3$.

4. $x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$ kon’yunksiyani ham chetlashtirish mumkin, chunki $\overline{x}_2 \overline{x}_3 = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$.

5. $x_1 x_2 \overline{x}_3$ kon’yunksiyani chetlashtirish mumkin emas, biroq $x_2$ ko‘paytuvchini tashlab yuborish mumkin. Natijada $x_1 \overline{x}_3$ kon’yunksiyaga ega bo‘lamiz. Bu kon’yunksiyaga nisbatan ko‘paytuvchini chetlashtirish operatsiyasini ishlatib, uni soddalashtirish mumkin emas.

6. $x_1 x_2 x_3$ kon’yunksiyani ham chetlashtirish mumkin emas, ammo undan $x_1$ ko‘paytuvchini chetlashtirish mumkin. Natijada, $x_2 x_3$ kon’yunksiyani hosil qilamiz va uni boshqa soddalashtirish mumkin emas.

Shunday qilib, $\overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 \overline{x}_3 \vee x_2 x_3$ DNShni hosil qilamiz. Bu DNShga nisbatan kon’yunksiyani chetlashtirish operatsiyasini ishlatish natija bermaydi.

Demak, soddalashtirish algoritmini ishlatish natijasida

$$D_1 = \overline{x}_2\,\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\,x_3 \vee x_1\,\overline{x}_3 \vee x_2\,x_3 \qquad (2)$$

DNShni hosil qilamiz. Yuqorida keltirilgan hisoblashlar 2- jadvalda aks ettirilgan.

Agar soddalashtirish algoritmini $D''$ga nisbatan ishlatsak, u holda

$$D_2 = \overline{x}_2\,\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\,x_3 \vee x_1\,x_2 \qquad (3)$$

diz’yunktiv normal shaklga ega bo‘lamiz.

3- jadvalda $D''$ga nisbatan ishlatilgan soddalashtirish algoritmi ishining asosiy bosqichlari keltirilgan. ■

2- misoldan ko‘rinib turibdiki, soddalashtirish algoritmi tatbiqining natijasi dastlabki DNShni qanday tartiblashga bog‘liq bo‘lar ekan.

2- jadval

| Qadam tartib raqami | DNSh va ko‘rilayotgan tartib | Tekshiri-layotgan kon’yunksiya | Operatsiya turi |
|---|---|---|---|
| 1 | $\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3 \vee$ $\vee\, \overline{x}_1\,x_2\,x_3 \vee x_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3 \vee$ $\vee\, x_1\,x_2\,\overline{x}_3 \vee x_1\,x_2\,x_3$ | $\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3$ | $\overline{x}_1$ ni chetlashtirish |
| 2 | $\overline{x}_2\,\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3 \vee$ $\vee\, \overline{x}_1\,x_2\,x_3 \vee x_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3 \vee$ $\vee\, x_1\,x_2\,\overline{x}_3 \vee x_1\,x_2\,x_3$ | $\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3$ | $\overline{x}_2$ ni chetlashtirish |
| 3 | $\overline{x}_2\,\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\,x_3 \vee$ $\vee\, \overline{x}_1\,x_2\,x_3 \vee x_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3 \vee$ $\vee\, x_1\,x_2\,\overline{x}_3 \vee x_1\,x_2\,x_3$ | $\overline{x}_1\,x_2\,x_3$ | $\overline{x}_1\,x_2\,x_3$ ni chetlashtirish |
| 4 | $\overline{x}_2\,\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\,x_3 \vee x_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3 \vee$ $\vee\, x_1\,x_2\,\overline{x}_3 \vee x_1\,x_2\,x_3$ | $x_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3$ | $x_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3$ ni chetlashtirish |
| 5 | $\overline{x}_2\,\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\,x_3 \vee$ $\vee\, x_1\,x_2\,\overline{x}_3 \vee x_1\,x_2\,x_3$ | $x_1\,x_2\,\overline{x}_3$ | $x_2$ ni chetlashtirish |
| 6 | $\overline{x}_2\,\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\,x_3 \vee$ | | $x_1$ni |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$ | $x_1 x_2 x_3$ | chetlashtirish |
| 7 | $x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee$<br>$\vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3$ | | |
| | Ikkinchi ko‘rish yangi natija bermaydi | Algoritmning ishi tugadi | |

Masalan, $L_h(D_1)=8$, $L_h(D_2)=6$, $L_k(D_1)=4$, $L_k(D_2)=3$, $L_i(D_1)=4$, $L_i(D_2)=3$ va bu yerdan $L_h(D_1) \neq L_h(D_2)$, $L_k(D_1) \neq L_k(D_2)$, $L_i(D_1) \neq L_i(D_2)$ munosabatlar kelib chiqadi.

3- jadval

| Qadam tartib raqami | DNSh va ko‘rilayotgan tartib | Tekshiri-layotgan kon’yunksiya | Operatsiya turi |
|---|---|---|---|
| 1 | $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee$<br>$\vee x_2 \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee$<br>$\vee \bar{x}_3 x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ | $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ | $\bar{x}_1$ ni chetlashtirish |
| 2 | $\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee$<br>$\vee x_2 \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee$<br>$\vee \bar{x}_3 x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ | $x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2$ | $x_3$ ni chetlashtirish |
| 3 | $\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee$<br>$\vee x_2 \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee$<br>$\vee \bar{x}_3 x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ | $x_2 \bar{x}_1 x_3$ | $x_2$ ni chetlashtirish |
| 4 | $\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee$<br>$\bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee$<br>$\vee \bar{x}_3 x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ | $x_1 x_2 x_3$ | $x_1$ ni chetlashtirish |
| 5 | $\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee$<br>$\vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee$<br>$\vee \bar{x}_3 x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ | $\bar{x}_3 x_1 x_2$ | $\bar{x}_3$ ni chetlashtirish |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | $\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee$ <br> $\vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee$ <br> $\vee x_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ | $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ | $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ ni chetlashtirish |
| 7 | $\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee$ <br> $\vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2$ | $\bar{x}_2\bar{x}_3$ | qo‘llanilmaydi |
| 8 | $\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee$ <br> $\vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2$ | $\bar{x}_1\bar{x}_2$ | $\bar{x}_1\bar{x}_2$ ni chetlashtirish |
| 9 | $\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee$ <br> $\vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2$ | $\bar{x}_1 x_3$ | qo‘llanilmaydi |
| 10 | $\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee$ <br> $\vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2$ | $x_2 x_3$ | $x_2 x_3$ ni chetlashtirish |
| 11 | $\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2$ | $x_1 x_2$ | qo‘llanilmaydi |
| 12 | $\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2$ | Algoritmning ishi tugadi | |

“Istalgan $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya uchun biror tartiblash oqibatida soddalashtirish algoritmini tatbiq etib minimal DNShni hosil etish mumkinmi yoki yo‘qmi?” degan savol tug‘iladi. Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

**2- teorema.** *$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – matematik mantiq algebrasining ixtiyoriy funksiyasi $(f \neq 0)$ va $D = \bigvee_{i=1}^{n} K_i$ uning ixtiyoriy (I va II almashtirishlarga nisbatan) tupikli DNSh bo‘lsin. U holda MDNShning shunday tartiblashi mavjud bo‘ladiki, undan soddalashtirish algoritmi yordami bilan $D$ tupikli DNShni hosil qilish mumkin.*

**Natija.** *Tupikli DNShlar orasida albatta L indeksga nisbatan minimal DNShlar (hammasi bo‘lishi shart emas) mavjud bo‘lgani uchun, soddalashtirish algoritmi, MDNShni ma’lum ravishda tartiblash natijasida, minimal DNShni ham topishga imkon yaratadi.*

Shunday qilib, minimal DNShni topish uchun MDNShni tartiblash kerak va unga nisbatan soddalashtirish algoritmini ishlatish kerak.

Teoremaning isbotidan[37] soddalashtirish algoritmi yordami bilan tupikli DNShlarni mukammal DNShdan yasash uchun faqat kon’yunksiyalar ifodasida ko‘paytuvchilar joylashishini variatsiyalash yetarligi kelib chiqadi.

Hozirgi vaqtda kon’yunksiyalarni DNSh ifodasidan chetlashtirish va ko‘paytuvchilarni kon’yunksiyalar ifodasidan chetlashtirish mumkinligini tekshirishlar soni (MDNSh tartiblashning hamma turi bo‘yicha)

$$2^{\left(n\log\frac{n}{2}+1\right)\cdot 2^{n}}\cdot(n+2)\cdot 2^{n}$$

sondan ortiq emasligi isbotlangan. Bu son $2^{3^n}$ sondan ancha kamdir, ya’ni soddalashtirish algoritmi birma-bir ko‘zdan kechirish algoritmidan yaxshiroq ekanligi ma’lum bo‘ladi.

### Minimallashtirish masalasining geometrik tarzda qo‘yilishi

**Birlik kub va uning elementlariga mos keladigan funksiya.** Hamma $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ majmua to‘plamini $E^n$ bilan belgilaymiz. $E^n$ to‘plamni birlik kubning hamma uchlari to‘plami sifatida qarash mumkin. Shu sababli $E^n$ to‘plam $n$ **o‘lchovli kub**, $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ esa **kub uchlari** deb ataladi.

$n=3$ o‘lchovli kub 1- shakldagidek tasvirlanishi mumkin.

**1- ta’rif.** $\sigma_{i_1},\sigma_{i_2},...,\sigma_{i_r}$ *shunday 0 va 1 sonlardan iborat tayinlangan sonlar sistemasi bo‘lib,* $1\le i_1<i_2<...<i_r\le n$, *uchun* $\alpha_{i_1}=\sigma_{i_1},\ \alpha_{i_2}=\sigma_{i_2},...,\ \alpha_{i_r}=\sigma_{i_r}$ *bajarilganda* $E^n$ *kubning uchlaridan tuzilgan to‘plam* $(n-r)$ ***o‘lchovli yoq*** *deb ataladi.*

Mantiq algebrasining $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyasi berilgan bo‘lsin. $E^n$ kubning $f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=1$ shartni qanoatlantiradigan barcha uchlaridan tashkil topgan to‘plamni $N_f$ bilan belgilaymiz, ya’ni $f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=1$ bajarilganda va faqat shunda $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in N_f$, bo‘ladi. Masalan, ushbu bobning 2- paragrafidagi 1- jadvalda berilgan $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyaga

$$N_f=\{(0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,1),\ (1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$$

---

[37] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука. 1979. 213- sahifaga qarang.

to‘plam mos keladi.

Ravshanki, $N_f \subseteq E^n$. Agar $N_f$ to‘plam berilgan bo‘lsa, u holda unga mos $f$ funksiyaning analitik ko‘rinishini yozish mumkin.

**1- misol.** Quyidagi to‘plamlarga mos keladigan funksiyalarning analitik ko‘rinishi topamiz:

$$N_{f_1} = \{(0,0,0),(1,0,0),(1,0,1)\};$$

$$N_{f_2} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\}.$$

Berilgan to‘plamlarga mos keladigan funksiyalarning analitik ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3;$$

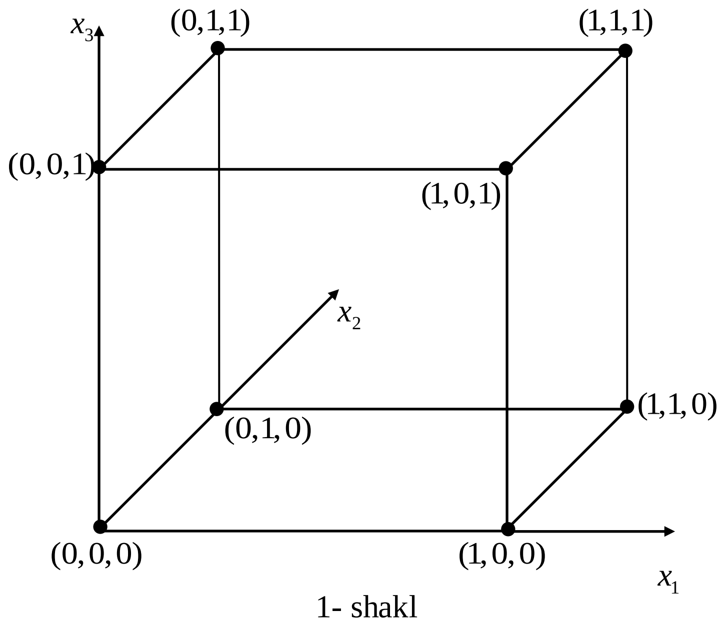
$$f_2(x_1,x_2,x_3) = x_1\,x_2\,x_3 \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3} \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3. \ \blacksquare$$

Shunday qilib, $N_f$ to‘plam berilgan bo‘lsa, u holda unga mos $f$ funksiyani, $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya berilganda esa, $N_f$ to‘plamni topish mumkin.

Dastlabki funksiya sifatida $r$ rangli $k(x_1,x_2,...,x_n) = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} ... x_{i_r}^{\sigma_r}$ elementar kon’yunksiyani olaylik.

**2- ta’rif.** *$K$ kon’yunksiyaga mos $N_k$ to‘plam $r$* ***rangli interval*** *deb ataladi.*

O’z-o‘zidan ravshanki, $r$ rangli $N$ interval $(n-r)$ o‘lchovli yoqni ifodalaydi.



1- shakl

**2- misol.** $k_1(x_1,x_2,x_3)=x_2x_3$, $k_2(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_1\overline{x}_2$, $k_3(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_1$ kon'yunksiyalarga $N_{k_1}=\{(1,1,1),(0,1,1)\}$, $N_{k_2}=\{(0,0,0),(0,0,1)\}$, $N_{k_3}=\{(0,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1)\}$ intervallar mos keladi. Bu intervallar mos ravishda 2, 2 va 1 rangli, hamda va 1 o‘lchovli yoq (qirra), 1 o‘lchovli yoq (qirra) va 2 o‘lchovli yoqdir. ■

Agar $f(x_1,x_2,...,x_n)=g(x_1,x_2,...,x_n)\vee h(x_1,x_2,...,x_n)$ bo‘lsa, u holda

1) $N_g\subseteq N_f$, $N_h\subseteq N_f$;

2) $N_f=N_g\cup N_h$

bo‘ladi.

Umuman olganda, agar $f(x_1,x_2,...,x_n)=D$ va $D=K_1\vee K_2\vee...\vee K_s$ bo‘lsa, u holda yuqoridagi xossalarga asosan $N_{k_i}\subseteq N_f$ $(i=1,2,...,s)$ va $N_f=N_{k_1}\cup N_{k_2}\cup...\cup N_{k_s}$, ya'ni $f$ funksiyaga $N_f$ to‘plamning $N_{k_1}$, $N_{k_2}$, ... , $N_{k_s}$ intervallardan iborat **qobiq** mos keladi va har bir $N_{k_1}$, $N_{k_2}$,..., $N_{k_s}$ intervallardan iborat $N_f$ to‘plamning qobig‘iga $D$ diz'yunktiv normal shaklda ifodalangan $f$ funksiya mos keladi.

Demak, mantiq algebrasining har bir $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyasiga bitta $N_f$ to‘plamning $N_{k_1},N_{k_2},...,N_{k_n}$ intervallardan $(N_{k_j}=N_f)$ iborat qobig‘i va, aksincha, har bir $N_f$ to‘plamning $N_{k_1},N_{k_2},...,N_{k_n}$ intervallardan iborat qobig‘iga bitta

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya mos keladi, ya’ni $N_f$ ning qobig‘i bilan $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik bor.

**3- misol.** Ushbu bobning 2- paragrafidagi 1- jadval bilan berilgan $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiya uchun

$$D_1 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3 \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3} \vee x_1\,x_2\,x_3,$$

$$D_2 = x_2\,\overline{x_3} \vee x_1$$

diz’yunktiv normal shakllar topilgan edi. Bu DNShlarga $N_f = \{(0,0,0), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$ to‘plamning quyidagi ikkita qoplamasi mos keladi:

$$N_f = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup N_{k_3} \cup N_{k_4} \cup N_{k_5}\,,\;\; N_f = N_{k_0^1} \cup N_{k_0^2},$$

bu yerda $N_{k_1} = \{(0,0,0)\}$, $N_{k_2} = \{(1,0,0)\}$, $N_{k_3} = \{(1,0,1)\}$, $N_{k_4} = \{(1,1,0)\}$, $N_{k_5} = \{(1,1,1)\}$, $N_{k_1^0} = \{(0,0,0), (1,0,0)\}$, $N_{k_2^0} = \{(1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$. Birinchi qoplama beshta nuqtadan, ikkinchisi esa qirra va ikki o‘lchovli yoqdan iborat. $N_{k_i}$ intervalning rangi $r_i$ bo‘lsin (u $K_i$ kon’yunksiyaning rangiga teng). U holda

$$r = \sum_{i=1}^{s} r_i \tag{4}$$

**qoplamaning rangi** deb ataladi.

**Mantiq algebrasi funksiyasini minimallashtirish muammosiga ekvivalent qoplamalar haqidagi geometrik masala.** Mantiq algebrasi funksiyasi $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ni minimallashtirish (minimizasiyalash) muammosiga ekvivalent bo‘lgan qoplamalar haqidagi geometrik masala quyidagicha qo‘yiladi. Berilgan $N_f = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup ... \cup N_{k_s}$ to‘plamning $N_{k_1}, N_{k_2}, ..., N_{k_s}$ ($N_{k_j} \subseteq N_f$, $j = 1,2,...,s$) intervallardan iborat shunday qobig‘ini topish kerakki, uning $r$ rangi eng kichik bo‘lsin, ya’ni qaralayotgan masala

$$\min r = \min \sum_{i=1}^{s} r_i \tag{5}$$

topish masalasiga keladi.

Demak, mantiq algebrasi funksiyasini minimallashtirish masalasini ikki formada ko‘rish mumkin: birinchisi – analitik formada, ikkinchisi – geometrik formada. Shuning uchun adabiyotda ikki til ishlatiladi: analitik va geometrik. Ayrim hollarda ikki tilning kombinatsiyasidan foydalaniladi. Masalan, kon’yunksiyani interval va DNShni qoplama deb ataydilar.

## Joiz (ruxsat etilgan) kon’yunksiyalar

**Joiz kon’yunksiya tushunchasi.** Ma’lumki, $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilardan $3^n$ ta elementar kon’yunksiya va $2^{3^n}$ ta diz’yunktiv normal shakl tuzish mumkin. Masalan, $n=3$ bo‘lsa, ya’ni $x_1, x_2, x_3$ o‘zgaruvchilardan

$$1,\ x_1,\ x_2,\ x_3\ \ \overline{x_1},\ \overline{x_2},\ \overline{x_3},\ x_1x_2,\ x_1x_3,\ x_2x_3,\ x_1\overline{x_2},\ \overline{x_1}x_2,\ x_1\overline{x_3},$$
$$\overline{x_1}x_3\ \ x_2\overline{x_3},\ \overline{x_2}x_3,\ \overline{x_1}\,\overline{x_2},\ \overline{x_1}\,\overline{x_3},\ \overline{x_2}\,\overline{x_3},\ x_1x_2x_3,\ \overline{x_1}x_2x_3, \qquad (1)$$
$$x_1\overline{x_2}x_3,\ x_1x_2\overline{x_3},\ \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3,\ \overline{x_1}x_2\overline{x_3},\ x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3},\ \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$$

elementar kon’yunksiya tuzish mumkin. Ammo, bu elementar kon’yunksiyalarning hammasi ham berilgan ixtiyoriy $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyani realizasiya qiladigan diz’yunktiv normal shakllarning ifodasida ishtirok etavermaydi. Shuning uchun “ $3^n$ ta kon’yunksiyalarning qaysilari $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning DNShda ishtirok qiladi?” degan masalani yechishga to‘g‘ri keladi. Buning uchun, birinchi navbatda, $E_n \setminus N_f$ to‘plamning elementlarida 1 qiymat qabul qiladigan kon’yunksiyalarni topish kerak bo‘ladi. Masalan,

$$f_1(x,y,z) = \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz \qquad (2)$$

bo‘lsin. U holda

$$N_{f_1} = \{(0,0,0),\ (0,1,1),\ (0,1,0),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\} \qquad (3)$$

bo‘ladi. Demak, 1- jadvalga ega bo‘lamiz.

1- jadval

| $E_n \setminus N_{f_1}$ | 1 qiymat qabul qiladigan kon’yunksiyalar |
|---|---|
| (0,0,0) | $1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{x}\,\bar{y}, \bar{x}\,\bar{z}, \bar{y}\,\bar{z}, \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ |
| (0,0,1) | $1, \bar{x}, \bar{y}, z, \bar{x}\,\bar{y}, \bar{x}\,z, \bar{y}\,z, \bar{x}\,\bar{y}\,z$ |

Ikkinchi navbatda, (1) kon’yunksiyalar orasidan 1-jadvaldagi kon’yunksiyalarni chetlashtiramiz, chunki $f(x,y,z)$ funksiyaga $N_{f_1}$ ((3)ga qarang) to‘plam mos kelgani uchun 1-jadvaldagi kon’yunksiyalar (2) funksiyani realizasiya qiladigan diz’yunktiv normal shakllar ifodasida umuman qatnashmaydi. Bu operatsiya natijasida $f_1(x,y,z)$ funksiyani realizasiya qiladigan DNShlar ifodasida qatnashishi mumkin bo‘lgan (qatnashishga ruxsat etilgan, qatnashishga joiz) kon’yunksiyalarga ega bo‘lamiz:

$$x\,,\ y\,,\ xy\,,\ xz\,,\ x\bar{y}\,,\ x\bar{z}\,,$$
$$yz\,,\ \bar{x}y\,,\ y\bar{z}\,,\ xyz\,,\ xy\bar{z}\,, \qquad (4)$$
$$\bar{x}yz\,,\ x\bar{y}z\,,\ \bar{x}y\bar{z}\,,\ x\bar{y}\,\bar{z}\,.$$

Shunday qilib, $3^3 = 27$ kon’yunksiyadan 15tasining berilgan $f(x,y,z)$ funksiyani realizasiya qiladigan DNShlar ifodasida qatnashishi joiz ekan.

**1- ta’rif.** *Ixtiyoriy* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiya va unga mos* $N_f$ *to‘plam berilgan bo‘lsin.* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiyani realizasiya qiladigan DNShlar ifodasida qatnashishi mumkin bo‘lgan kon’yunksiyalar, ya’ni* $E_n \setminus N_f$ *to‘plamning nuqtalarida 1 qiymatga ega bo‘lgan kon’yunksiyalardan tashqari qolgan hamma kon’yunksiyalar* ***joiz kon’yunksiyalar*** *deb ataladi.*

Masalan, (4) dagi hamma kon’yunksiyalar joiz kon’yunksiyalar bo‘ladi.

**Joiz kon’yunksiyalarni topish.**

**Misol.** Berilgan

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee$$
$$\vee\, x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \qquad (5)$$

va unga mos $N_{f_2} = \{(0,0,0),\ (0,0,1),\ (1,0,1),\ (1,1,1),\ (1,1,0),\ (0,1,0)\}$ (6)

to‘plam berilgan bo‘lsin.

Joiz kon’yunksiyalarni topish uchun 2- jadvalni tuzamiz.

2- jadval

| $E_n \setminus N_f$ | 1 qiymat qabul qiladigan kon’yunksiyalar |
|---|---|
| (1,0,0) | $1, x_1, \overline{x_2}, \overline{x_3}, x_1\overline{x_2}, x_1\overline{x_3}, \overline{x_2}\,\overline{x_3}, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$ |
| (0,1,1) | $1, \overline{x_1}, x_2, x_3, \overline{x_1}x_2, \overline{x_1}x_3, x_2x_3, \overline{x_1}x_2x_3$ |

U holda (1) dagi kon’yunksiyalardan 2- jadvaldagi kon’yunksiyalarni chetlashtirish natijasida quyidagi joiz kon’yunksiyalarga ega bo‘lamiz:

$$x_1x_2\,,\ x_1x_3\,,\ x_2\overline{x_3}\,,\ \overline{x_2}x_3\,,\ \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,,$$

$$\bar{x}_1\bar{x}_3,\ x_1x_2x_3,\ x_1x_2\bar{x}_3,\ x_1\bar{x}_2x_3, \tag{7}$$

$$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3,\ \bar{x}_1\bar{x}_2x_3,\ \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3.\ \blacksquare$$

O’zgaruvchilar soni $n$ ta bo‘lganda, $3^n$ ta kon’yunksiya va ulardan $2^{3^n}$ ta $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani realizasiya qilishi mumkin bo‘lgan DNSh tuzish mumkinligini aytgan edik. Demak, berilgan ixtiyoriy $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani realizasiya qiladigan tupikli (minimal) DNShlarni $2^{3^n}$ ta DNShlar orasidan izlamasdan, balki $2^{\lambda}$ DNShlar ichidan izlash kerak degan natijaga keldik, bu yerda $\lambda$ – joiz kon’yunksiyalar soni.

## Qisqartirilgan diz’yunktiv normal shakl

### Maksimal interval va oddiy implikant tushunchalari.

**1- ta’rif.** *Agar $N_f$ to‘plamning qism to‘plami bo‘lgan $N_k$ interval uchun:*

*1)* $N_k \subseteq N_k^1 \subseteq N_f$*;*

*2)* $N_k^1$ *intervalning rangi* $N_k$ *intervalning rangidan kichik*

*shartlarni qanoatlantiruvchi* $N_k^1$ *interval mavjud bo‘lmasa, u holda* $N_k$ *(*$N_f$ *ga nisbatan)* ***maksimal interval*** *deb ataladi.*

**1- misol.** $k_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1x_2$, $k_2(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2$, $k_3(x_1, x_2, x_3) = x_2$ bo‘lsin. U holda $N_{k_2}, N_{k_3}$ maksimal intervallar bo‘lib, $N_{k_1}$ interval esa $N_f$ ning maksimal intervali bo‘lmaydi, chunki $N_{k_1} \subset N_{k_3}$ va $N_{k_3}$ ning rangi $N_{k_1}$ ning rangidan kichik. ■

**2- misol.** Ushbu bubning 4- paragrafidagi (4) joiz kon’yunksiyalarga mos kelgan 15ta intervaldan faqat $N_{x_1}$ va $N_{x_2}$ intervallar va o‘sha paragraf, (7) dagi 12ta intervaldan faqat $N_{x_1x_2}$ , $N_{x_1x_3}$ , $N_{x_2\bar{x}_3}$, $N_{\bar{x}_2x_3}$, $N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}$, $N_{\bar{x}_1\bar{x}_3}$, intervallargina mos ravishda $N_{f_1}$ va $N_{f_2}$ to‘plamlarga nisbatan maksimal intervallar bo‘ladi. ■

**2- ta’rif.** $N_f$ *to‘plamning* $N_k$ *maksimal intervaliga mos kelgan* $K$ *kon’yunksiya* $f$ *funksiyaning* ***oddiy implikanti*** *deb ataladi.*

Agar $k^1$ kon’yunksiyaning hamma ko‘paytuvchilari $k$ kon’yunksiyada ham mavjud bo‘lsa, u holda $N_k \subseteq N_{k^1}$ deb yozish mumkin. U holda, ma’lum ma’noda, $f$ funksiyaning $k$ oddiy implikanti ifodasidan birorta ham ko‘paytuvchini chetlashtirish mumkin emas, chunki ko‘paytuvchini chetlashtirish natijasida $N_{k^1} \not\subset N_f$ munosabatda bo‘lgan $k^1$ kon’yunksiyaga ega bo‘lamiz.

Har qanday $N_k$ intervalni $(N_k \subseteq N_f)$ maksimal intervalgacha kengaytirish mumkin.

$N_f$ to‘plamning hamma maksimal intervallari

$$N_{k_1^0}, N_{k_2^0}, ..., N_{k_m^0} \tag{1}$$

lardan iborat bo‘lsin. U holda

$$N_f = N_{k_1^0} \cup N_{k_2^0} \cup ... \cup N_{k_m^0} \tag{2}$$

bo‘ladi, chunki $N_{k_i^0} \subseteq N_f \quad (i = 1,2,...,m)$ va $N_f$ ning har bir nuqtasi (1) dagi maksimal intervallarning birortasining elementi bo‘ladi. (2) tenglik quyidagi munosabatga ekvivalentdir:

$$f = k_1^0 \vee k_2^0 \vee ... \vee k_m^0 . \tag{3}$$

**Qisqartirilgan DNSh tushunchasi.**

**3- ta’rif.** *$f$ funksiyani hamma oddiy implikantlarining diz’yunksiyasi (3)* ***qisqartirilgan DNSh*** *deb ataladi.*

Demak,

$$D_s(f) = k_1^0 \vee k_2^0 \vee ...... \vee k_m^0 \tag{4}$$

$f$ funksiyaning qisqartirilgan DNShi bo‘ladi. $D_s(f)$ qisqartirilgan DNSh $f$ funksiya orqali bir qiymati aniqlanadi va $f$ funksiyani realizasiya qiladi.

**3- misol.** Ushbu bobning 4- paragrafidagi (2) formulada berilgan $f_1(x_1, x_2, x_3)$ uchun maksimal intervallardan iborat

$$N_{f_1} = N_{k_1^0} \cup N_{k_2^0} \tag{5}$$

Qobiqqa va o‘sha yerdagi (5) formulada berilgan $f_2(x_1, x_2, x_3)$ funksiya uchun

$$N_{f_2} = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup N_{k_3} \cup N_{k_4} \cup N_{k_5} \cup N_{k_6} \tag{6}$$

qobiqqa ega bo‘lamiz. Bu yerda $k_1^0 = x_1$, $k_2^0 = x_2$, $k_1 = x_1 x_2$, $k_2 = x_1 x_3$, $k_3 = x_2 \overline{x_3}$, $k_4 = \overline{x_2} x_3$, $k_5 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}$, $k_6 = \overline{x_1}\,\overline{x_3}$. Bu qobiqlarga

$$D_s(f_1) = x_1 \vee x_2 ,$$

$$D_s(f_2) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}$$

qisqartirilgan DNShlar mos keladi. ■

## Qisqartirilgan diz'yunktiv normal shaklni yasash algoritmi

**Qisqartirilgan DNSh yasash algoritmi.** Ixtiyoriy $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning qisqartirilgan diz'yunktiv normal shaklini yasash uchun quyidagi operasiyalarni bajaramiz:

1) $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning istalgan kon'yunktiv normal shaklini olamiz, masalan, mukammal KNSh;

2) qavslarni ochib chiqamiz, ya'ni

$$\wedge\vee \to \vee\wedge$$

turdagi almashtirishni o'tkazamiz;

3) hosil qilingan ifodadan 0 ga teng hadlarni chetlashtiramiz va

$$K_1K_2 \vee K_2 = K_1, \qquad K_1 \vee K_1 = K_1$$

formulalardan foydalanib uni soddalashtiramiz. Natijada, qisqartirilgan DNShga kelamiz. ■

**Misollar.**

**1- misol.** $N_{f_2} = \{(0,0,0),(0,0,1),(1,0,1),(1,1,1),(1,1,0),(0,1,0)\}$ to'plamga mos $f_2(x_1, x_2, x_3)$ funksiyaning MKNShni

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n) \\ f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=0}} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee ... \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}) \qquad (1)$$

formuladan foydalanib yozamiz:

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Algoritmning 2- va 3- qadamlarini bajaramiz:

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) = x_1\bar{x}_1 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_2 \vee$$

$$\vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_3 =$$

$$= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3.$$

Qisqartirilgan DNSh quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$D_s(f_2) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3. \ ■ \qquad (2)$$

**2- misol.** Quyidagi funksiya berilgan bo'lsin:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3.$$

Bu funksiyaga

$$N_{f_1} = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,1,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

to‘plam mos keladi. Funksiyaning MKNSh ko‘rinishi

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) .$$

Algoritmning 2- va 3- qadamlarini bajaramiz:

$$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_1 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee$$

$$\vee \bar{x}_2\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_3 =$$

$$= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 =$$

$$= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 =$$

$$= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 .$$

Demak, funksiyaning qisqartirilgan DNSh quyidagicha bo‘ladi:

$D_s(f_1) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 .$

## Mavzu: Predikat (mantiqiy funksiya) tushunchasi. Predmetlar sohasi. Elementar formulalar. Kvantorlar

**Predikat tushunchasi.** Mantiq algebrasida mulohazalar faqatgina chin yoki yolg‘on qiymat qabul qilishi nuqtai nazaridan qaralib, mulohazalarning strukturasiga ham, hattoki, mazmuniga ham e’tibor berilmaydi. Ammo fanda va amaliyotda mulohazalarning strukturasi va mazmunidan kelib chiqadigan xulosalardan (natijalardan) foydalaniladi. Masalan, «Har qanday romb parallelogrammdir; $ABCD$ – romb; demak, $ABCD$ – parallelogramm».

Asos (shart) va xulosa mulohazalar mantiqining elementar mulohazalari bo‘ladi va ularni bu mantiq nuqtai nazaridan bo‘linmas, bir butun deb va ularning ichki strukturasini hisobga olmasdan qaraladi. Shunday qilib, mantiq algebrasi mantiqning muhim qismi bo‘lishiga qaramasdan, ko‘pgina fikrlarni tahlil qilishga qodir (yetarli) emas. Shuning uchun ham mulohazalar mantiqini kengaytirish masalasi vujudga keldi, ya’ni elementar mulohazalarning ichki strukturasini ham tadqiq eta oladigan mantiqiy sistemani yaratish muammosi paydo bo‘ldi. Bunday sistema mulohazalar mantiqini o‘zining bir qismi sifatida butunlay o‘z ichiga oladigan predikatlar mantiqidir.

**Predikatlar mantiqi** an’anaviy formal mantiq singari elementar mulohazani **subyekt** va **predikat** qismlarga bo‘ladi.

**Subyekt** – bu mulohazada biror narsa haqida nimadir tasdiqlaydi; **predikat** – bu subyektni tasdiqlash.

Masalan, «5 – tub son» mulohazada «5» – subyekt, «tub son» – predikat. Bu mulohazada «5» «tub son bo‘lish» xususiyatiga ega ekanligi tasdiqlanadi. Agar keltirilgan mulohazada ma’lum 5 sonini natural sonlar to‘plamidagi $x$ o‘zgaruvchi bilan almashtirsak, u holda «$x$ – tub son» ko‘rinishidagi mulohaza formasiga (shakliga) ega bo‘lamiz. $x$ o‘zgaruvchining ba’zi qiymatlari (masalan, $x$=13, $x$=3, $x$=19) uchun bu forma chin mulohazalar va $x$ o‘zgaruvchining boshqa qiymatlari (masalan, $x$=10, $x$=20) uchun bu forma yolg‘on mulohazalar beradi.

Ravshanki, bu forma bir ($x$) argumentli funksiyani aniqlaydi va bu funksiyaning aniqlanish sohasi natural sonlar to‘plami ($\boldsymbol{N}$) hamda qiymatlar sohasi $\{1, 0\}$ to‘plam bo‘ladi.

**1- ta’rif.** *$M$ to‘plamda aniqlangan va $\{1, 0\}$ to‘plamdan qiymat qabul qiluvchi bir argumentli $P(x)$ funksiya **bir joyli** (**bir o‘rinli**) **predikat** deb ataladi.*

$M$ to‘plamni $P(x)$ predikatning **aniqlanish sohasi** deb aytamiz.

$P(x)$ predikat chin qiymat qabul qiluvchi hamma $x \in M$ elementlar to‘plamiga $P(x)$ predikatning **chinlik to‘plami** deb ataladi, ya’ni $P(x)$ predikatning chinlik to‘plami $I_P = \{x : x \in M, P(x) = 1\}$ to‘plamdir.

**1- misol.** «$x$ – tub son» ko‘rinishdagi $P(x)$ predikat $\boldsymbol{N}$ to‘plamda aniqlangan va uning $I_P$ chinlik to‘plami barcha tub sonlar to‘plamidan iborat. «$\sin x = 0$» shakldagi $Q(x)$ predikat $\boldsymbol{R}$ haqiqiy sonlar to‘plamida aniqlangan va uning $I_Q$ chinlik to‘plami $I_Q = \{k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\}$, bu yerda $\boldsymbol{Z}$ – butun sonlar to‘plami. «Parallelogramm diagonallari $x$ bir-biriga perpendikulyardir» degan $\Phi(x)$ predikatning aniqlanish sohasi hamma parallelogrammlar to‘plami, chinlik to‘plami esa hamma romblar to‘plami bo‘ladi. Bu misolda keltirilgan predikatlar bir joyli predikat xususiyatlarini ifodalaydi. ■

**2- ta’rif.** *Agar* $M$ *to‘plamda aniqlangan* $P(x)$ *predikat uchun* $I_P = M$ ( $I_P = \varnothing$ ) *bo‘lsa, u* ***aynan chin*** (***aynan yolg‘on***) ***predikat*** *deb ataladi.*

Endi **ko‘p joyli predikat** tushunchasini o‘rganamiz. Ko‘p joyli predikat predmetlar orasidagi munosabatni aniqlaydi.

«Kichik» munosabati ikki predmet orasidagi **binar munosabatni** ifodalaydi[38]. «$x < y$» (bu yerda $x, y \in \boldsymbol{Z}$ ) binar munosabat ikki argumentli $P(x, y)$ funksiyani ifodalaydi. Bu funksiya $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ to‘plamda aniqlangan va qiymatlar sohasi $\{1, 0\}$ to‘plam bo‘ladi.

**3- ta’rif.** $M = M_1 \times M_2$ *to‘plamda aniqlangan va* $\{1, 0\}$ *to‘plamdan qiymat oluvchi ikki argumentli* $P(x, y)$ *funksiya* ***ikki joyli predikat*** *deb ataladi.*

$n$ joyli predikat ham shunga o‘xshash aniqlanadi.

**2- misol.** «$x = y$» shakldagi $Q(x, y)$ **ikki joyli predikat** $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ to‘plamda aniqlangan «$x \perp y$» $x$ to‘g‘ri chiziq $y$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar – $F(x, y)$ **ikki joyli predikat** bir tekislikda yotuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plamida aniqlangan. ■

**3- misol.** Bir joyli predikatlarning aniqlanish sohasi $\boldsymbol{R}$, ikki joyli predikatlarning aniqlanish sohasi esa $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ bo‘lsin. Quyida berilgan mulohazalarni tahlil qilib, ularning qaysilari predikat bo‘la olishini aniqlaymiz:

1) $x + 5 = 1$; 2) $x^2 - 2x + 1 = 0$; 3) $x + 2 < 3x - 4$;

4) $(x + 2) - (3x - 4)$; 5) $x^2 + y^2 > 0$.

1) Tenglik shaklida berilgan ifoda bir joyli predikatdir. Agar uni $A(x)$ deb belgilasak, u holda $I_A = \{-4\}$ bo‘ladi.

2) $x^2 - 2x + 1 = 0$ ifoda bilan berilgan mulohaza ham bir joyli predikatdir. Uni $A(x)$ bilan belgilaymiz. $I_A = \{1\}$.

---

[38] Bir joyli predikatni unar predikat deb atash ham mumkin.

3) Tengsizlik shaklida berilgan ifodani mulohaza deb hisoblasak, bir joyli $A(x)$ predikatga ega bo‘lamiz. Ravshanki, $I_A = (3, +\infty)$.

4) Ikkita ikki hadning ayirmasi shaklidagi ifoda bilan berilgan mulohaza predikat bo‘la olmaydi.

5) Berilgan ifodani ikki joyli $A(x, y)$ predikat deb hisoblash mumkin va $I_A = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \setminus \{(0,0)\}$. ■

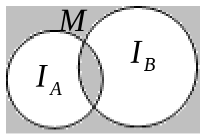
**4- misol.** Quyidagi predikatlarning qaysilari aynan chin bo‘lishini aniqlaymiz:

1) $x^2 + y^2 \geq 0$; 2) $x^2 + y^2 > 0$; 3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

4) $(x+1)^2 > x - 1$; 5) $x^2 + 1 \geq (x+1)^2$.

Ravshanki, 1), 3) va 4) predikatlar aynan chin predikatlardir. 2) predikatda $x = 0,\ y = 0$ qiymatlar uchun tengsizlik o‘rinli emas. 5) predikatda esa, $x$ o‘zgaruvchining hamma musbat qiymatlarida tengsizlik o‘rinli emas. Demak, 2) va 5) predikatlar aynan chin predikatlar bo‘la olmaydi. ■

**5- misol.** $M = M_1 \times M_2 \subset \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ to‘plamda $A(x, y)$ va $B(x, y)$ predikatlar berilgan bo‘lsin. $A(x, y) \leftrightarrow B(x, y)$ predikatning chinlik to‘plamini topamiz.



1- shakl

$$A(x, y) \leftrightarrow B(x, y) = (A(x, y) \to B(x, y)) \wedge (B(x, y) \to A(x, y))$$

bo‘lganligi uchun

$$I_{A \leftrightarrow B} = (I_{A \to B}) \cap (I_{B \to A}) = ((CI_A \cup I_B) \cap (CI_B \cup I_A)) = = (I_A \cap I_B) \cup (CI_A \cap CI_B)$$

$I_A \leftrightarrow I_B$ chinlik to‘plami 1- shakldа bo‘yalgan soha sifatida ko‘rsatilgan. ■

**Predikatlar ustida mantiqiy amallar** Predikatlar ham mulohazalar singari faqatgina chin yoki yolg‘on (1 yoki 0) qiymat qabul qilganliklari tufayli ular ustida mulohazalar mantiqidagi hamma mantiqiy amallarni bajarish mumkin.

Bir joyli predikatlar misolida mulohazalar mantiqidagi mantiqiy amallarning predikatlarga tatbiq etilishini ko‘raylik.

**4 ta’rif.** *Berilgan* $M$ *to‘plamda aniqlangan* $P(x)$ *va* $Q(x)$ ***predikatlarning kon’yunksiyasi*** *deb, faqat va faqat* $x \in M$ *qiymatlarda aniqlangan hamda* $P(x)$ *va* $Q(x)$ *lar bir vaqtda chin qiymat qabul qilgandagina chin qiymat qabul qilib, qolgan barcha hollarda yolg‘on qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi va u* $P(x) \wedge Q(x)$ *kabi belgilanadi.*

$P(x) \wedge Q(x)$ predikatning chinlik sohasi $I_P \cap I_Q$ to‘plamdan, ya’ni $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlar chinlik sohalarining umumiy qismidan iborat bo‘ladi.

**6- misol.** $P(x)$: «$x$ – juft son» va $Q(x)$: «$x$ – toq son» predikatlar uchun «$x$ – juft son va $x$ – toq son»: $P(x) \wedge Q(x)$ predikatlar kon’yunksiyasi mos keladi va uning chinlik sohasi $\varnothing$ – bo‘sh to‘plamdan iborat bo‘ladi. ■

**5- ta’rif.** *Berilgan* $M$ *to‘plamda aniqlangan* $P(x)$ *va* $Q(x)$ ***predikatlarning diz’yunksiyasi*** *deb, faqat va faqatgina* $x \in M$ *qiymatlarda aniqlangan hamda* $P(x)$ *va* $Q(x)$ *predikatlar yolg‘on qiymat qabul qilganda yolg‘on qiymat qabul qilib, qolgan barcha hollarda chin qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi va u* $P(x) \vee Q(x)$ *kabi belgilanadi.*

$P(x) \vee Q(x)$ predikatning chinlik sohasi $I_P \cup I_Q$ to‘plamdan iborat bo‘ladi.

**6- ta’rif.** *Agar hamma* $x \in M$ *qiymatlarda* $P(x)$ *predikat chin qiymat qabul qilganda yolg‘on qiymat va* $x \in M$ *ning barcha qiymatlarida* $P(x)$ *predikat yolg‘on qiymat qabul qilganda chin qiymat qabul qiluvchi predikatga* $P(x)$ ***predikatning inkori*** *deb ataladi va u* $\overline{P}(x)$ *kabi belgilanadi.*

Bu ta’rifdan $I_{\overline{P}} = M \setminus I_P = CI_P$ kelib chiqadi.

**7- ta’rif.** *Faqat va faqatgina* $x \in M$ *lar uchun bir vaqtda* $P(x)$ *chin qiymat va* $Q(x)$ *yolg‘on qiymat qabul qilganda yolg‘on qiymat qabul qilib, qolgan hamma hollarda chin qiymat qabul qiladigan* $P(x) \to Q(x)$ *predikat* $P(x)$ *va* $Q(x)$ ***predikatlarning implikasiyasi*** *deb ataladi.*

Har bir tayinlangan $x \in M$ uchun

$P(x) \to Q(x) \equiv \overline{P}(x) \vee Q(x)$

teng kuchlilik to‘g‘ri bo‘lganligidan $I_{P \to Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q = CI_P \cup I_Q$ o‘rinlidir.

## Umumiylik va mavjudlik kvantorlari

$M$ to‘plamda aniqlangan $P(x)$ predikat berilgan bo‘lsin. Agar $a \in M$ ni $P(x)$ predikatning $x$ argumenti o‘rniga qo‘ysak, u holda bu predikat $P(a)$ mulohazaga aylanadi.

Predikatlar mantiqida yuqorida ko‘rilganlardan tashqari yana ikkita amal mavjudki, ular bir joyli predikatni mulohazaga aylantiradi.

**Umumiylik kvantori.** $M$ to‘plamda aniqlangan $P(x)$ predikat berilgan bo‘lsin. Har qanday $x \in M$ uchun $P(x)$ chin va aks holda yolg‘on qiymat qabul qiluvchi mulohaza ifodasini $\forall x P(x)$ shakldа yozamiz. Bu mulohaza endi $x$ ga bog‘liq bo‘lmay qoladi va u quyidagicha o‘qiladi: «har qanday $x$ uchun $P(x)$ chin». $\forall$ simvol **umumiylik kvantori** deb ataladi. Aytilgan fikrlarni matematik ifodalar vositasida quyidagicha yozish mumkin:

$$\forall x P(x) = \begin{cases} 1, \text{ barcha } x \in M \text{ uchun } P(x) = 1 \text{ bo'lganda}, \\ 0, \text{ aks holda.} \end{cases}$$

$P(x)$ predikatda $x$ ni **erkin (ozod) o‘zgaruvchi** va $\forall x P(x)$ mulohazada $x$ ni umumiylik kvantori $\forall$ bilan **bog‘langan o‘zgaruvchi** deb ataladi.

**Mavjudlik kvantori.** $P(x)$ predikat $M$ to‘plamda aniqlangan bo‘lsin. Hech bo‘lmaganda bitta $x \in M$ uchun $P(x)$ predikat chin va aks holda yolg‘on qiymat qabul qiluvchi mulohaza ifodasini $\exists x P(x)$ shaklda yozamiz. Bu mulohaza $x$ ga bog‘liq emas va uni quyidagicha o‘qish mumkin: «shunday $x$ mavjudki, $P(x) = 1$», ya’ni

$$\exists x P(x) = \begin{cases} 1, \text{ birorta } x \in M \text{ uchun } P(x) = 1 \text{ bo'lganda}, \\ 0, \text{ aks holda.} \end{cases}$$

$\exists$ simvol **mavjudlik kvantori** deb ataladi. $\exists xP(x)$ mulohazada $x$ o‘zgaruvchi $\exists$ kvantori bilan bog‘langan bo‘ladi.

**1- misol.** $N$ natural sonlar to‘plamida $P(x)$ predikat berilgan bo‘lsin: «$x$ – tub son». Kvantorlardan foydalanib ushbu predikatdan quyidagi mulohazalarni hosil qilish mumkin: $\forall xP(x)$ – «Hamma natural sonlar tub sonlar bo‘ladi»; $\exists xP(x)$ – «Shunday natural son mavjudki, u tub son bo‘ladi». Ravshanki, birinchi mulohaza yolg‘on va ikkinchi mulohaza chindir. ■

Ma’lumki, $\forall xP(x)$ mulohaza faqat $P(x)$ aynan chin predikat bo‘lgandagina chin qiymat qabul qiladi. $\exists xP(x)$ mulohaza bo‘lsa, $P(x)$ aynan yolg‘on predikat bo‘lgandagina yolg‘on qiymat qabul qiladi.

Kvantorli amallar ko‘p joyli predikatlarga ham qo‘llaniladi. Masalan, $M$ to‘plamda ikki joyli $P(x,y)$ predikat berilgan bo‘lsin. Agar $P(x,y)$ predikatga $x$ o‘zgaruvchi bo‘yicha kvantorli amallarni qo‘llasak, u holda ikki joyli $P(x,y)$ predikatga bir joyli $\forall xP(x,y)$ (yoki bir joyli $\exists xP(x,y)$) predikatni mos qilib qo‘yadi.

Bir joyli $\forall xP(x,y)$ ($\exists xP(x,y)$) predikat faqat $y$ o‘zgaruvchiga bog‘liq, $x$ o‘zgaruvchiga esa bog‘liq emas. Ularga $y$ bo‘yicha kvantorli amallarni qo‘llaganimizda quyidagi mulohazalarga ega bo‘lamiz:

$\forall y\forall xP(x,y)$, $\exists y\forall xP(x,y)$, $\forall y\exists xP(x,y)$, $\exists y\exists xP(x,y)$.

**2- misol.** To‘g‘ri chiziqlar to‘plamida aniqlangan $P(x,y)$: «$x \perp y$» predikatni ko‘raylik. Agar $P(x,y)$ predikatga nisbatan kvantorli amallarni tadbiq etsak, u holda quyidagi sakkizta mulohazaga ega bo‘lamiz:

1. $\forall x\forall yP(x,y)$ – «Har qanday $x$ to‘g‘ri chiziq har qanday $y$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

2. $\exists y\forall xP(x,y)$ – «Shunday $y$ to‘g‘ri chiziq mavjudki, u har qanday $x$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

3. $\forall y\exists xP(x,y)$ – «Har qanday $y$ to‘g‘ri chiziq uchun shunday $x$ to‘g‘ri chiziq mavjudki, $x$ to‘g‘ri chizig‘i $y$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

4. $\exists y \exists x P(x, y)$ – «Shunday $y$ to‘g‘ri chiziq va shunday $x$ to‘g‘ri chiziq mavjudki, $x$ to‘g‘ri chiziq $y$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

5. $\forall y \forall x P(x, y)$ – «Har qanday $y$ to‘g‘ri chiziq har qanday $x$ to‘g‘ri chiziqqga perpendikulyar».

6. $\forall x \exists y P(x, y)$ – «Har qanday $x$ to‘g‘ri chiziq uchun shunday $y$ to‘g‘ri chiziq mavjudki, $x$ to‘g‘ri chiziq $y$ to‘g‘ri chiziqqga perpendikulyar».

7. $\exists x \exists y P(x, y)$ – «Shunday $x$ to‘g‘ri chiziq va shunday $y$ to‘g‘ri chiziq mavjudki, $x$ to‘g‘ri chiziq $y$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

8. $\exists x \forall y P(x, y)$ – «Shunday $x$ to‘g‘ri chiziq mavjudki, u har qanday $y$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar». ■

Bu misoldan ko‘rinib turibdiki, umumiy holda kvantorlar tartibi o‘zgarishi bilan mulohazaning mazmuni va, demak, uning mantiqiy qiymati ham o‘zgaradi.

Chekli sondagi elementlari bo‘lgan $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ to‘plamda aniqlangan $P(x)$ predikat berilgan bo‘lsin. Agar $P(x)$ predikat aynan chin bo‘lsa, u holda $P(a_1), P(a_2), ..., P(a_n)$ mulohazalar ham chin bo‘ladi. Shu holda $\forall x P(x)$ mulohaza va $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$ kon’yunksiya ham chin bo‘ladi.

Agar hech bo‘lmaganda bitta $a_k \in M$ element uchun $P(a_k)$ yolg‘on bo‘lsa, u holda $\forall x P(x)$ mulohaza va $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$ kon’yunksiya ham yolg‘on bo‘ladi. Demak,

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$$

teng kuchli ifoda to‘g‘ri bo‘ladi.

Yuqoridagidek fikr yuritish yo‘li bilan

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee P(a_n)$$

teng kuchli ifodaning mavjudligini ko‘rsatish mumkin.

Bu yerdan kvantorli amallarni cheksiz sohalarda kon’yunksiya va diz’yunksiya amallarining umumlashmasi sifatida qarash mumkinligi kelib chiqadi.

## Mavzu: Formula ta’rifi. Teng kuchli formulalar. Bajariluvchi formulalar. Aynan chin formula. Aynan yolg’on formula

Predikatlar mantiqida quyidagi simvollardan foydalaniladi:

1. $p, q, r...$ simvollar – 1 (chin) va 0 (yolg‘on) qiymatlar qabul qiluvchi o‘zgaruvchi mulohazalar.

2. $x, y, z,...$ – biror $M$ to‘plamdan qiymat oluvchi predmet o‘zgaruvchilar; $x_0, y_0, z_0,...$ – predmet konstantalar, ya’ni predmet o‘zgaruvchilarning qiymatlari.

3. $P(\cdot),\ F(\cdot)$ – bir joyli o‘zgaruvchi predikatlar; $Q(\underbrace{\cdot,\cdot,...,\cdot}_{nta}),\ R(\underbrace{\cdot,\cdot,...,\cdot}_{nta})$ – $n$ joyli o‘zgaruvchi predikatlar.

4. $P^0(\cdot),\quad Q^0(\cdot,\cdot,...,\cdot)$ – o‘zgarmas predikatlar simvoli.

5. $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ – mantiqiy amallar simvollari.

6. $\forall x,\ \exists x$ – kvantorli amallar simvollari.

7. (, ) va , (qavslar va vergul) – qo‘shimcha simvollar.

**Predikatlar mantiqi formulasining t a ’ r i f i .**

*1. Har qanday o‘zgaruvchi yoki o‘zgarmas mulohaza (elementar) formula bo‘ladi.*

*2. Agar* $F(\underbrace{\cdot,\cdot,...,\cdot}_{nta})$ $n$ *joyli o‘zgaruvchi predikat yoki o‘zgarmas predikat va* $x_1, x_2,..., x_n$ *– predmet o‘zgaruvchilar yoki predmet konstantalar bo‘lsa, u holda* $F(x_1, x_2,..., x_n)$ *formula bo‘ladi. Bunday formulani* ***elementar formula*** *deb ataymiz.*

*Bu formulada predmet o‘zgaruvchilar erkindir, ya’ni kvantorlar bilan bog‘langan emas.*

*3. Agar $A$ va $B$ shunday formulalarki, birorta predmet o‘zgaruvchi birida erkin va ikkinchisida bog‘langan o‘zgaruvchi bo‘lmasa, u holda $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \to B$ ham formula bo‘ladi. Bu formulalarda dastlabki formulalarda erkin bo‘lgan o‘zgaruvchilar erkin, bog‘langan bo‘lgan o‘zgaruvchilar esa bog‘langan o‘zgaruvchilar bo‘ladi.*

*4. Agar $A$ formula bo‘lsa, u holda $\overline{A}$ ham formula bo‘ladi. $A$ formuladan $\overline{A}$ formulaga o‘tishda o‘zgaruvchilarning xarakteri o‘zgarmaydi.*

*5. Agar $A(x)$ formula bo‘lsa va uning ifodasiga $x$ predmet o‘zgaruvchi erkin holda kirsa, u holda $\forall x A(x)$ va $\exists x A(x)$ mulohazalar formula bo‘ladi va $x$ predmet o‘zgaruvchi ularga bog‘langan holda kiradi.*

*6. 1–5- bandlarda formulalar deb atalgan mulohazalardan farq qiluvchi har qanday mulohaza formula bo‘lmaydi.*

**1- misol.** Agar $P(x)$ va $Q(x,y)$ – bir joyli va ikki joyli predikatlar, $q, r$ – o‘zgaruvchi mulohazalar bo‘lsa, u holda quyidagi mulohazalar formulalar bo‘ladi:

$q$, $P(x)$, $P(x) \wedge Q(x^0, y)$, $\forall x P(x) \to \exists x Q(x,y)$, $(\overline{Q(x,y)} \vee q) \to r$.

$\forall x Q(x,y) \to P(x)$ mulohaza formula bo‘la olmaydi, chunki predikatlar mantiqi formulasi ta’rifning 3- bandidagi shart buzilgan: $x$ predmet o‘zgaruvchi $\forall x Q(x,y)$ formulaga bog‘langan holda, $P(x)$ga esa erkin holda kirgan. ■

Predikatlar mantiqi formulasining ta’rifidan ko‘rinib turibdiki, mulohazalar algebrasining har qanday formulasi predikatlar mantiqining ham formulasi bo‘ladi.

**2- misol.** Quyidagi ifodalarning qaysilari predikatlar mantiqining formulasi bo‘lishi va har bir formuladagi bog‘langan va erkin o‘zgaruvchilarni aniqlash talab etilgan bo‘lsin:

1) $\overline{\exists x \forall z (P(x,y) \to P(y,z))}$;

2) $(p \to q) \wedge (\bar{r} \vee \bar{p})$;

3) $P(x) \wedge \forall x Q(x)$;

4) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\exists x P(x) \to \forall x R(x, y))$;

5) $(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \vee \exists y(\forall y R(y))$;

6) $\exists x \forall z(P(x, y) \to P(y, z))$.

Predikatlar mantiqi formulasining ta'rifiga ko'ra 1), 2), 4) va 6) ifodalar formulalardir.

3) va 5) ifodalar formula emas. Haqiqatdan ham, 3) ifodada $\wedge$ amali $P(x)$ va $\forall x Q(x)$ formulalarga nisbatan qo'llanilgan bo'lib, $P(x)$ da $x$ predmet o'zgaruvchi erkin va $\forall x Q(x)$ da esa umumiylik kvantori bilan bog'langan. Bu holat formula ta'rifining 3- bandiga ziddir. Shuning uchun 3) ifoda formula bo'la olmaydi. 5) ifodada esa, $\exists y$ mavjudlik kvantori bilan $\forall y$ umumiylik kvantori orasida ziddiyat bor.

1) formulada $y$ erkin, $x$ va $z$ o'zgaruvchilar esa bog'langan o'zgaruvchilardir. 2) formulada predmet o'zgaruvchilar yo'q. 4) formulada $x$ bog'langan o'zgaruvchi, $y$ esa erkin o'zgaruvchidir. ■

**Predikatlar mantiqi formulasining qiymati tushunchasi.** Endi predikatlar mantiqi formulasining qiymati tushunchasini aniqlaylik. Predikatlar mantiqi formulasining ifodasiga kiruvchi predikatlarning aniqlanish sohasi $M$ to'plam berilgan bo'lsa, bu formulaning mantiqiy qiymati haqida so'z yuritish mumkin. Predikatlar mantiqi formulasining mantiqiy qiymati uch xil o'zgaruvchilar: 1) formulaga kiruvchi o'zgaruvchi mulohazalarning; 2) $M$ to'plamdagi erkin predmet o'zgaruvchilarning; 3) predikat o'zgaruvchilarning qiymatlariga bog'liq bo'ladi.

Uch xil o'zgaruvchilardan har birining ma'lum qiymatlarida predikatlar mantiqining formulasi chin yoki yolg'on qiymat qabul qiluvchi mulohazaga aylanadi.

**3- m i s o l .** Quyidagi formulani tahlil qilamiz:

$$\exists y \forall z(P(x, y) \to P(y, z)). \qquad (1)$$

(1) formulada $P(x, y)$ ikki joyli predikat $M \times M$ to'plamda aniqlangan, bu yerda $M = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$. (1) formula ifodasiga o'zgaruvchi predikat $P(x, y)$ va $x, y, z$

predmet o‘zgaruvchilar kirgan. Bu yerda $y$ va $z$ – kvantorlar bilan bog‘langan o‘zgaruvchilar, $x$ – erkin o‘zgaruvchi.

$P(x,y)$ predikatning ma’lum qiymati sifatida tayinlangan $P^0(x,y)$: «$x<y$» predikatni olamiz, erkin o‘zgaruvchi $x$ ga $x^0=5\in M$ qiymat beramiz. U holda $y$ ning $x^0=5$ dan kichik qiymatlari uchun $P^0(x^0,y)$ predikat yolg‘on qiymat qabul qiladi, $P(x,y)\to P(y,z)$ implikasiya esa $z$ ning hamma $z\in M$ qiymatlari uchun chin bo‘ladi, ya’ni $\exists y\forall z(P^0(x,y)\to P^0(y,z))$ mulohaza chin qiymatga ega bo‘ladi. ■

**4- misol.** Natural sonlar to‘plami $\boldsymbol{N}$ da $P(x)$, $Q(x)$ va $R(x)$ predikatlar berilgan bo‘lsa, $\forall x(P(x)\wedge Q(x)\to R(x))$ formulaning qiymati quyidagi hollarda topilsin:

1) $P(x)$: «$x$ son 3ga qoldiqsiz bo‘linadi», $Q(x)$: «$x$ son 4ga qoldiqsiz bo‘linadi», $R(x)$: «$x$ – juft»;

2) $P(x)$: «$x$ son 3ga qoldiqsiz bo‘linadi», $Q(x)$: «$x$ son 4ga qoldiqsiz bo‘linadi”, $R(x)$: «$x$ son 5ga qoldiqsiz bo‘linadi».

Ikkala holda ham $P(x)\wedge Q(x)$ formula «$x$ son 12ga qoldiqsiz bo‘linadi» degan tasdiqni ifodalaydi. O‘z navbatida hamma $x$ lar uchun $x$ son 12ga qoldiqsiz bo‘linsa, u holda $x$ son 2ga ham bo‘linadi (juft bo‘ladi). Demak, 1) holda formulaning qiymati chindir.

$x$ sonning 12ga qoldiqsiz bo‘linishidan ba’zi $x$ lar uchun $x$ ning 5ga qoldiqsiz bo‘linishi, bundan esa 2) holda formulaning yolg‘on ekanligi kelib chiqadi. ■

**5- misol.** $P(x,y)$ predikat $M=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ to‘plamda aniqlangan va $P^0(x,y)$: «$x$ son $y$ sondan kichik» bo‘lganda $\forall x\exists yP(x,y)\to\exists x\forall yP(x,y)$ formulaning mantiqiy qiymatini topamiz.

$P(x,y)$ predikatning ko‘rsatilgan qiymati uchun $\forall x\exists yP(x,y)$: «har qanday $x$ natural son uchun shunday $y$ natural son topiladiki, u $x$ dan katta bo‘ladi” degan chin mulohazani bildiradi. $\exists x\forall yP(x,y)$ esa «shunday $x$ natural son mavjudki, u har qanday $y$ natural sondan kichik bo‘ladi” degan tasdiqni bildiradi. Bu tasdiq yolg‘ondir. Demak, berilgan formulaning mantiqiy qiymati yolg‘on bo‘ladi. ■

**Predikatlar mantiqining teng kuchli formulalari.** Predikatlar mantiqida ham teng kuchli formulalar tushunchasi mavjud.

**1- ta’rif.** *Predikatlar mantiqining ikkita* $A$ *va* $B$ *formulasi o‘z tarkibiga kiruvchi* $M$ *sohaga oid hamma o‘zgaruvchilarning qiymatlarida bir xil mantiqiy qiymat qabul qilsa, ular* $M$ ***sohada teng kuchli formulalar*** *deb ataladi.*

**2- ta’rif.** *Agar ixtiyoriy sohada* $A$ *va* $B$ *formulalar teng kuchli bo‘lsa, u holda ular* ***teng kuchli formulalar*** *deb ataladi va* $A \equiv B$ *ko‘rinishda yoziladi.*

Agar mulohazalar algebrasidagi hamma teng kuchli formulalar ifodasi tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchi mulohazalar o‘rniga predikatlar mantiqidagi formulalar qo‘yilsa, u holda ular predikatlar mantiqining teng kuchli formulalariga aylanadi. Ammo, predikatlar mantiqi ham o‘ziga xos asosiy teng kuchli formulalarga ega. Bu teng kuchli formulalarning asosiylarini ko‘rib o‘taylik. $A(x)$ va $B(x)$ – o‘zgaruvchi predikatlar va $C$ – o‘zgaruvchi mulohaza bo‘lsin. U holda predikatlar mantiqida quyidagi asosiy teng kuchli formulalar mavjud.

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$.
2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$.
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$.
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$.
5. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [A(x) \wedge B(x)]$.
6. $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [C \wedge B(x)]$.
7. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x [C \vee B(x)]$.
8. $C \to \forall x B(x) \equiv \forall x [C \to B(x)]$.
9. $\forall x [B(x) \to C] \equiv \exists x B(x) \to C$.
10. $\exists x [A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.
11. $\exists x [C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists x B(x)$.

12. $\exists x[C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists x B(x)$.

13. $\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y[A(x) \wedge B(y)]$.

14. $\exists x[C \to B(x)] \equiv C \to \exists x B(x)$.

15. $\exists x[B(x) \to C] \equiv \forall x B(x) \to C$.

16. $\forall x A(x) \equiv \forall y A(y)$.

17. $\exists x A(x) \equiv \exists y A(y)$.

Bu teng kuchli formulalarning ayrimlarini isbot qilamiz.

Birinchi teng kuchli formula quyidagi oddiy tasdiqni (dalilni) bildiradi: agar hamma $x$ lar uchun $A(x)$ chin bo‘lmasa, u holda shunday $x$ topiladiki, $\overline{A(x)}$ chin bo‘ladi.

2- teng kuchlilik: agar $A(x)$ chin bo‘ladigan $x$ mavjud bo‘lmasa, u holda hamma $x$ lar uchun $\overline{A(x)}$ chin bo‘ladi degan mulohazani bildiradi.

3- va 4- teng kuchliliklar 1- va 2- teng kuchliliklarning ikkala tarafidan mos ravishda inkor olib va ikki marta inkor qonunini foydalanish natijasida hosil bo‘ladi.

5- teng kuchlilikni isbot qilaylik. Agar $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar bir vaqtda aynan chin bo‘lsa, u holda $A(x) \wedge B(x)$ predikat ham aynan chin bo‘ladi va, demak,

$\forall x A(x)$, $\forall x B(x)$, $\forall x[A(x) \wedge B(x)]$

mulohazalar ham chin qiymat qabul qiladi. Shunday qilib, bu holda 5- teng kuchlilikning ikkala tarafi ham chin qiymat qabul qiladi.

Endi hech bo‘lmaganda ikkita predikatdan birortasi, masalan, $A(x)$ aynan chin bo‘lmasin. U holda $A(x) \wedge B(x)$ predikat ham aynan chin bo‘lmaydi va, demak, $\forall x A(x)$, $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$, $\forall x[A(x) \wedge B(x)]$ mulohazalar yolg‘on qiymat qabul qiladi, ya’ni bu holda ham 5- teng kuchlilikning ikki tarafi bir xil (yolg‘on) qiymat qabul qiladi. Demak, 5- teng kuchlilikning to‘g‘riligi isbotlandi.

Endi 8- teng kuchlilikning to‘g‘riligini isbot qilamiz. O‘zgaruvchi mulohaza $C$ yolg‘on qiymat qabul qilsin. U holda $C \to B(x)$ predikat aynan chin bo‘ladi va $C \to \forall x B(x)$, $\forall x[C \to B(x)]$ mulohazalar chin bo‘ladi. Demak, bu holda 8- teng kuchlilikning ikkala tarafi ham bir xil (chin) qiymat qabul qiladi.

Endi o‘zgaruvchi mulohaza $C$ chin qiymat qabul qilsin. Agar bu holda o‘zgaruvchi predikat $B(x)$ aynan chin bo‘lsa, u vaqtda $C \to B(x)$ predikat ham aynan chin bo‘ladi va, demak,

$$\forall x B(x),\ C \to \forall x B(x),\ \forall x[C \to B(x)]$$

mulohazalar ham chin qiymat qabul qiladi, ya’ni bu holda 8- teng kuchlilikning ikkala tarafi ham bir xil (chin) qiymat qabul qiladi. Agar $B(x)$ predikat aynan chin bo‘lmasa, u holda $C \to B(x)$ predikat ham aynan chin bo‘lmaydi va, demak,

$$\forall x B(x),\ C \to \forall x B(x),\ \forall x[C \to B(x)]$$

mulohazalar yolg‘on qiymat qabul qiladi. Shunday qilib, bu holda ham 8- teng kuchliliklarning ikkala tarafi bir xil (yolg‘on) qiymat qabul qiladilar. Demak, 8- teng kuchlilik o‘rinlidir.

Shuni ta’kidlab o‘tamizki, $\forall x[A(x) \vee B(x)]$ formula $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ formulaga va $\exists x[A(x) \wedge B(x)]$ formula $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ formulaga teng kuchli emas.

Ammo, quyidagi teng kuchliliklar o‘rinlidir:

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \equiv \forall x A(x) \vee \forall y B(y) \equiv$$

$$\equiv \forall x[A(x) \vee \forall y B(y)] \equiv \forall x \forall y[A(x) \vee B(y)],$$

$$\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \equiv \exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv$$

$$\equiv \exists x[A(x) \wedge \exists y B(y)] \equiv \exists x \exists y[A(x) \wedge B(y)].$$

$\forall x[A(x) \vee B(x)]$ formula $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ formulaga teng kuchli emasligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $\forall x$ kvantor $\vee$ diz’yunksiya amaliga nisbatan distributiv emasligiga misol keltirish yetarlidir. Faraz qilaylik, $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A(x)$:« $(x-1)(x-2)=0$» va $B(x)$: « $(x-3)(x-4)(x-5)=0$»

bo‘lsin. Ravshanki, $M$ sohada $\forall xA(x)$ va $\forall xB(x)$ mulohazalar yolg‘on va, demak, $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$ mulohaza ham yolg‘ondir. Agar $\forall x$ kvantor $\vee$ ga nisbatan distributiv, ya’ni

$$\forall x[A(x)\vee B(x)]=\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$$

bo‘lganda edi, $\forall x[A(x)\vee B(x)]$ chin mulohaza bo‘lganligi uchun qarama-qarshilik hosil bo‘lar edi. Demak, $\forall x[A(x)\vee B(x)]\neq\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$ o‘rinlidir.

Endi bu teng kuchliliklarning o‘ng tomoni har doim chap tomonidagi mulohaza bilan bir xil qiymat qabul qilishini ko‘rsatamiz. Agar $\forall xA(x)\equiv 1$ yoki $\forall xB(x)\equiv 1$ bo‘lsa, u holda bu teng kuchlilik to‘g‘ri ekanligi aniq, chunki bu holda teng kuchlilikning ikkala tomoni ham bir vaqtda chin qiymat qabul qiladi. Bu holda faqat $\forall xB(x)\equiv\forall yB(y)$ ekanligini ko‘rsatish kifoya. Ammo oxirgi teng kuchlilik tabiiydir, chunki $x$ predmet o‘zgaruvchi ham, $y$ predmet o‘zgaruvchi ham $M$ sohaning har bir elementini qiymat sifatida qabul qiladi.

Endi $\forall xA(x)\equiv 0$ va $\forall xB(x)\equiv 0$ bo‘lsin. U holda teng kuchlilikning chap tarafi 0 (yolg‘on) qiymat qabul qiladi. O‘ng tomonida $\forall x$ kvantorning ta’sir sohasi $A(x)\vee B(y)$ formula bo‘lsada, $B(y)$ predikatda $x$ predmet o‘zgaruvchi qatnashmaganligi sababli, $\forall x$ kvantorning ta’siri faqat $A(x)$ga tarqaladi. Xuddi shu kabi, $\forall y$ kvantor faqat $B(y)$ga ta’sir etadi. Demak, $\forall x\forall y[A(x)\vee B(y)]$ formula ham yolg‘on qiymatga ega bo‘ladi.

Keltirilgan ikkinchi teng kuchlilikni ham xuddi shu kabi isbot qilish mumkin. (Bu ishni o‘quvchiga havola etamiz.)

**6- misol.** $\exists x\forall y(A(x)\wedge B(y))\equiv\forall y\exists x(A(x)\wedge B(y))$ teng kuchlilik o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz.

$$\exists x\forall y(A(x)\wedge B(y))\equiv\exists x(A(x)\wedge\forall yB(y))\equiv\exists xA(x)\wedge\forall yB(y),$$

$$\forall y\exists x(A(x)\wedge B(y))\equiv\forall y(\exists xA(x)\wedge B(y))\equiv\exists xA(x)\wedge\forall yB(y).$$

Demak, keltirilgan teng kuchlilik o‘rinlidir. ■

## Mavzu: Formulaning normal shakli. Yechilish muammosi

## Predikatlar mantiqi formulasining normal shakli.

**1- ta’rif.** *Agar predikatlar mantiqi formulasi ifodasida faqat inkor, kon’yunksiya, diz’yunksiya* $(\neg, \wedge, \vee)$ *amallari va kvantorli amallar* $(\forall, \exists)$ *qatnashib, inkor amali elementar formulalarga* (*predmet o‘zgaruvchilar va o‘zgaruvchi predikatlarga*) *tegishli bo‘lsa, bunday formula* ***deyarli normal shaklda*** *deyiladi.*

Ravshanki, predikatlar mantiqi va mulohazalar algebrasidagi asosiy teng kuchliliklardan foydalanib, predikatlar mantiqining har bir formulasini **deyarli normal shaklga** keltirish mumkin.

**1- misol.** $(\exists xP(x) \to \forall yQ(y)) \to R(z)$ formulani deyarli normal shaklga keltiramiz.

$$(\exists xP(x) \to \forall yQ(y)) \to R(z) \equiv (\overline{\exists xP(x)} \vee \forall yQ(y)) \to R(z) \equiv$$
$$\equiv \overline{\overline{\exists xP(x)} \vee \forall yQ(y)} \vee R(z) \equiv \overline{\overline{\exists xP(x)}} \vee \overline{\forall yQ(y)} \vee R(z) \equiv$$
$$\equiv \exists xP(x) \wedge \exists y\overline{Q(y)} \vee R(z).$$

Demak,

$$(\exists xP(x) \to \forall yQ(y)) \to R(z) \equiv \exists xP(x) \wedge \exists y\overline{Q(y)} \vee R(z). \ \blacksquare$$

Predikatlar mantiqining deyarli normal shakldagi formulalari orasida **normal shakldagi formulalar** muhim rol o‘ynaydi. Bu formulalarda kvantorli amallar yo butunlay qatnashmaydi, yoki ular mulohazalar algebrasining hamma amallaridan keyin bajariladi, ya’ni normal shakldagi formula quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$(\sigma\, x_1)(\sigma\, x_2) \ldots\ldots (\sigma\, x_n)\ A\,(x_1, x_2, \ldots, x_m),\ n \le m,$$

bunda $(\sigma\, x_i)$ simvoli o‘rnida $\forall x_i$ yoki $\exists x_i$ kvantorlardan biri yoziladi deb tushuniladi va $A$ formula ifodasida kvantorlar bo‘lmaydi.

**1- teorema.** *Predikatlar mantiqining har qanday formulasini normal shaklga keltirish mumkin.*

**Isboti.** Formula deyarli normal shaklga keltirilgan deb hisoblaymiz va uni normal shaklga keltirish mumkinligini ko‘rsatamiz.

Agar bu formula elementar formula bo‘lsa, u holda uning ifodasida kvantorlar bo‘lmaydi va, demak, u normal shakl ko‘rinishida bo‘ladi.

Endi faraz qilamizki, teorema ko‘pi bilan $k$ amalni qamragan formula uchun to‘g‘ri bo‘lsin va uni shu faraz asosida $k+1$ amalni qamragan formula uchun isbot qilamiz.

$A$ formula $k+1$ amalni o‘z ichiga olgan formula va uning ko‘rinishi $\sigma xL(x)$ shaklda bo‘lsin, bu yerda $\sigma x$ kvantorlarning birini ifodalaydi.

$L(x)$ formula $k$ amalni o‘z ichiga olganligi tufayli uni normal shaklga keltirilgan deb hisoblaymiz. U holda $\sigma xL(x)$ formula ta’rifiga asosan normal shaklda bo‘ladi.

$A$ formula $\overline{L}$ ko‘rinishda bo‘lsin, bunda $L$ formula normal shaklga keltirilgan va $k$ amalni o‘z ichiga olgan deb hisoblanadi. U holda

$\overline{\forall xA(x)} \equiv \exists x\overline{A(x)}$ va $\overline{\exists xA(x)} = \forall x\overline{A(x)}$

teng kuchliliklardan foydalanib, inkor amalini predikatlar ustiga tushiramiz. Natijada $A$ formulani normal shaklga keltirgan bo‘lamiz.

Endi $A$ formula $L_1 \vee L_2$ ko‘rinishda bo‘lsin. Bu yerda $L_1$ va $L_2$ normal shaklga keltirilgan formulalar deb qaraladi.

$L_2$ formulada bog‘langan predmet o‘zgaruvchilarni shunday qayta nomlaymizki, $L_1$ va $L_2$ formulalardagi hamma bog‘langan predmet o‘zgaruvchilar har xil bo‘lsin. U holda $L_1$ va $L_2$ formulalarni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$L_1 \equiv (\sigma x_1)(\sigma x_2)\dots(\sigma x_m)\ \alpha_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $m \le n$,

$L_2 \equiv (\sigma y_1)(\sigma y_2)\dots(\sigma y_p)\ \alpha_2\ (y_1, y_2, \dots, y_q)$, $p \le q$.

$C \vee \forall xB(x) = \forall x[C \vee B(x)]$ va $\overline{\forall xA(x)} = \exists x\overline{A(x)}$ teng kuchliliklardan foydalanib, $L_2$ formulani $(\sigma x_1), (\sigma x_2), \dots, (\sigma x_m)$ kvantor amallari ostiga kiritamiz, ya’ni $A$ formulani ushbu ko‘rinishga keltiramiz:

$A \equiv (\sigma x_1)(\sigma x_2)\dots(\sigma x_m)(\alpha_1(x_1, x_2, .., x_n) \vee \vee(\sigma y_1)(\sigma y_2)\dots(\sigma y_p)\alpha_2(y_1, y_2, \dots, y_q))$.

So‘ngra $\alpha_1\ (x_1, x_2, \dots, x_n)$ formulani

$(\sigma y_1), (\sigma y_2), \dots, (\sigma y_p)$

kvantor amallari ostiga kiritamiz. Natijada $A$ formulaning normal shaklini hosil qilamiz:

$$A \equiv (\sigma x_1)(\sigma x_2)...(\sigma x_m)(\sigma y_1)(\sigma y_2)...(\sigma y_p)\ (\alpha_1(x_1, x_2, ..., x_n) \vee \alpha_2(y_1, y_2, ..., y_q)).$$

$L_1 \wedge L_2$ ko‘rinishdagi $A$ formulani normal shaklga keltirishning isboti xuddi yuqorida kabi bajariladi. ■

Agar formulani normal shaklga keltirish jarayonida $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ yoki $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ ko‘rinishdagi ifodalarni ko‘rishga to‘g‘ri kelsa, u holda

$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) = \forall x [A(x) \wedge B(x)],$$

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) = \exists x [A(x) \vee B(x)]$$

teng kuchliliklardan foydalanish kerak bo‘ladi.

**2- misol.** $A \equiv \forall x \exists y P(x, y) \wedge \overline{\exists x \forall y Q(x, y)}$ formulani normal shaklga keltirish talab etilsin. $A$ formulada teng kuchli almashtirishlarni o‘tkazib, uni normal shaklga keltiramiz:

$$A \equiv \forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \exists y \overline{Q(x, y)} \equiv \forall x (\exists y P(x, y) \wedge \exists z \overline{Q(x, z)}) \equiv$$

$$\equiv \forall x \exists y (P(x, y) \wedge \exists z \overline{Q(x, z)}) \equiv \forall x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge \overline{Q(x, z)}).$$ ■

## Bajariluvchi va umumqiymatli formulalar.

**2- ta’rif.** *Agar $A$ formula ifodasiga kiruvchi va $M$ sohaga oid o‘zgaruvchilarning shunday qiymatlari mavjud bo‘lib, bu qiymatlarda $A$ formula chin qiymat qabul qilsa, u holda predikatlar mantiqining $A$ formulasi $M$* ***sohada bajariluvchi formula*** *deb ataladi.*

**3- ta’rif.** *Agar shunday soha mavjud bo‘lib, unda $A$ formula bajariladigan bo‘lsa, u holda $A$* ***bajariluvchi formula*** *deb ataladi.*

Demak, agar biror formula bajariluvchi bo‘lsa, bu hali uning istalgan sohada bajariluvchanligini bildirmaydi.

**4- ta’rif.** *Agar $A$ning ifodasiga kiruvchi va $M$ sohaga oid hamma o‘zgaruvchilarning qiymatlarida $A$ formula chin qiymat qabul qilsa, u holda $A$ formula $M$ sohada* ***aynan chin formula*** *deb ataladi.*

**5- ta’rif.** *Agar $A$ formula har qanday sohada aynan chin bo‘lsa, u holda $A$* ***umumqiymatli formula*** *deb ataladi.*

**6- t a ’ r i f .** *Agar $A$ formula ifodasiga kiruvchi va $M$ sohaga oid hamma o‘zgaruvchilarning qiymatlarida $A$ formula yolg‘on qiymat qabul qilsa, u holda $A$ formula $M$ sohada* ***aynan yolg‘on formula*** *deb ataladi.*

Keltirilgan ta’riflardan ushbu tasdiqlar kelib chiqadi.

1. Agar $A$ umumqiymatli formula bo‘lsa, u holda u har qanday sohada ham bajariluvchi formula bo‘ladi.

2. Agar $A$ formula $M$ sohada aynan chin formula bo‘lsa, u holda u shu sohada bajariluvchi formula bo‘ladi.

3. Agar $M$ sohada $A$ aynan yolg‘on formula bo‘lsa, u holda u bu sohada bajarilmaydigan formula bo‘ladi.

4. Agar $A$ bajarilmaydigan formula bo‘lsa, u holda u har qanday sohada ham aynan yolg‘on formula bo‘ladi.

Demak, predikatlar mantiqi formulalarini ikki sinfga ajratish mumkin: **bajariluvchi** sinflar va **bajarilmas** (bajarilmaydigan) sinflar formulalari.

**7- t a ’ r i f .** *Umumqiymatli formula* ***mantiq qonuni*** *deb ataladi.*

**3- m i s o l .** $\forall x \exists y P(x, y)$ formula bajariluvchidir. Haqiqatan ham, agar $P(x, y)$: «$x < y$» predikat $M = E \times E$ sohada aniqlangan (bu yerda $E = \{0,1,2,...,n,...\}$) bo‘lsa, u holda $\forall x \exists y P(x, y)$ formula $M$ sohada aynan chin formula bo‘ladi, demak, bu sohada u bajariluvchi formuladir. Ammo, agar $E_1 = \{0,1,2,...,k\}$ uchun «$x < y$» predikat chekli $M_1 = E_1 \times E_1$ sohada aniqlangan bo‘lsa, u holda $\forall x \exists y P(x, y)$ formula $M_1$ sohada aynan yolg‘on formula bo‘ladi va, demak, $M_1$ sohada $\forall x \exists y P(x, y)$ formula bajariluvchi emas. Ravshanki, $\forall x \exists y P(x, y)$ umumqiymatli formula bo‘lmaydi. ■

**4- m i s o l .** $\exists x \exists y [P(x) \wedge \overline{P(y)}]$ formula bajariluvchidir. Haqiqatan ham, agar $P(x)$: «$x$ – juft son» predikat $E = \{0,1,2,...,n,...\}$ uchun $M = E \times E$ sohada aniqlangan bo‘lsa, u holda bu formula $M$ sohada aynan chin bo‘ladi, demak, u $M$ sohada bajariluvchi formuladir. Ammo, agar $P(x)$: «$x$ – juft son» predikat $E_1 = \{2,4,6,8, ...\}$ uchun $M_1 = E_1 \times E_1$ sohada aniqlangan bo‘lsa, u holda

$\exists x \exists y[P(x) \wedge \overline{P(y)}]$ formula $M_1$ sohada aynan yolg'on formula bo'ladi, demak, bu sohada u bajarilmas formuladir. ■

**5- m i s o l .** $\forall x[P(x) \vee \overline{P(x)}]$ formula ixtiyoriy $M$ sohada aynan chin bo'ladi. Demak, u umumqiymatli formula, ya'ni bu formula mantiqiy qonundir. ■

**6- m i s o l .** $\forall x[P(x) \wedge \overline{P(x)}]$ formula ixtiyoriy $M$ sohada aynan yolg'on va shuning uchun ham u bajarilmas formuladir. ■

Endi predikatlar mantiqidagi formulalarning umumqiymatliligi va bajariluvchanligi orasidagi munosabatni ko'rib o'taylik.

**2- t e o r e m a .** *$A$ umumqiymatli formula bo'lishi uchun uning inkori $\overline{A}$ bajariluvchi formula bo'lmasligi zarur va yetarlidir.*

**I s b o t i .** Z a r u r l i g i . $A$ umumqiymatli formula bo'lsin. U holda, ravshanki, $\overline{A}$ istalgan sohada aynan yolg'on formula bo'ladi va shuning uchun ham u bajarilmas formuladir.

Y e t a r l i l i g i . $\overline{A}$ istalgan sohada bajariluvchi formula bo'lmasin. U holda bajarilmas formulaning ta'rifiga asosan $\overline{A}$ istalgan sohada aynan yolg'on formuladir. Demak, $A$ istalgan sohada aynan chin formula bo'ladi va u umumqiymatlidir. ■

**3- t e o r e m a .** *$A$ bajariluvchi formula bo'lishi uchun $\overline{A}$ ning umumqiymatli formula bo'lmasligi zarur va yetarlidir.*

**I s b o t i .** Z a r u r l i g i . $A$ bajariluvchi formula bo'lsin. U holda shunday $M$ soha va $A$ formula tarkibiga kiruvchi o'zgaruvchilarning shunday qiymatlar majmui (satri) mavjudki, $A$ formula bu qiymatlar satrida chin qiymat qabul qiladi. Ravshanki, o'zgaruvchilarning bu qiymatlar satrida $\overline{A}$ formula yolg'on qiymat qabul qiladi va, demak, $\overline{A}$ umumqiymatli formula bo'la olmaydi.

Y e t a r l i l i g i . $\overline{A}$ umumqiymatli formula bo'lmasin. U holda shunday $M$ soha va $A$ formula tarkibiga kiruvchi o'zgaruvchilarning shunday qiymatlar satri mavjudki, $\overline{A}$ formula bu qiymatlar satrida yolg'on qiymat qabul qiladi. Bu qiymatlar satrida $A$ formula chin qiymat qabul qilganligi uchun u bajariluvchi formula bo'ladi. ■

**7- misol.** $A \equiv \forall x(P(x) \to \overline{Q(x)}) \to \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)}$ formulaning umumqiymatliligini isbotlaymiz. $A$ formula istalgan $M$ sohada aniqlangan deb hisoblab, quyidagi teng kuchli almashtirishlarni bajaramiz:

$$\equiv \overline{\forall x(P(x) \to \overline{Q(x)})} \vee \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(\overline{\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}}) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \overline{\forall x Q(x)} \equiv$$

$$A \equiv \forall x(P(x) \to \overline{Q(x)}) \to \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv \equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \exists x \overline{Q(x)} \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$

$$\equiv (\exists x P(x) \vee \overline{\exists x P(x)}) \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv 1 \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv 1,$$

ya'ni $A$ formula istalgan sohada har qanday $P(x)$ va $Q(x)$ bir joyli predikatlar uchun aynan chin, demak, u umumqiymatli formuladir. ■

**8- misol.** $A \equiv \exists x[(F(x) \to \overline{F(x)}) \wedge (\overline{F(x)} \to F(x))]$ formulaning aynan yolg'on formula ekanligini ko'rsatamiz. $(F(x) \to \overline{F(x)}) \wedge (\overline{F(x)} \to F(x)) \equiv F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$ o'rinli va $F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$ formula aynan yolg'on formula bo'lgani uchun $A \equiv \exists x(F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)})$ ham aynan yolg'on formuladir. ■

## Yechilish muammosi.

Predikatlar mantiqida yechilish muammosi mulohazalar algebrasida qanday qo'yilgan bo'lsa, xuddi shunday qo'yiladi: predikatlar mantiqining istalgan formulasi yo umumqiymatli, yo bajariluvchi, yoki aynan yolg'on (bajarilmas) formula ekanligini aniqlab beruvchi algoritm mavjudmi yoki yo'qmi? Bu masala **yechilish muammosi** deb ataladi. Agar bunday algoritm mavjud bo'lsa edi, u (xuddi mulohazalar algebrasidagidek) predikatlar mantiqidagi istalgan formulani aynan chinligini aniqlab beruvchi kriteriyga keltirilgan bo'lar edi.

Agar ushbu muammo mulohazalar algebrasi uchun oson yechilgan bo'lsa, predikatlar mantiqi uchun bu muammoni yechish jarayonida katta qiyinchiliklar borligi aniqlandi. XX asrning 30- yillarida algoritm tushunchasiga aniq ta'rif berilgandan so‘ng mazkur muammo umumiy holda ijobiy hal etilishi mumkin emasligi, ya’ni izlangan algoritm mavjud emasligi aniqlandi. 1936 yilda A. Chyorch[39] predikatlar mantiqining **yechilish muammosi** umumiy holda algoritmik yechilmasligini isbotladi, ya’ni predikatlar mantiqining istalgan formulasi qaysi formulalar (umumqiymatli, bajariluvchi yoki bajarilmas) sinfiga kirishini aniqlab beradigan algoritm mavjud emasligini isbotladi.

Yechilish muammosi predikatlar mantiqi uchun ijobiy hal etilmasada, predikatlar mantiqi formulalarining ba’zi sohalari uchun bu muammo ijobiy hal bo‘lishi mumkin. Quyida shunday sohalardan ba’zilarini o‘rganamiz.

**Chekli sohalarda yechilish muammosi.** Yechilish muammosi chekli sohalarda ijobiy hal bo‘ladi. Haqiqatan ham, bu holda kvantorli amallarni kon’yunksiya va diz’yunksiya amallari bilan almashtirish mumkin. Natijada predikatlar mantiqi formulasi mulohazalar algebrasi formulasiga keltiriladi. Ma’lumki, mulohazalar algebrasi uchun yechilish muammosi ijobiy hal bo‘ladi.

Masalan, $\forall x \exists y [P(x,y) \vee \overline{P(x,x)}]$ formula $M = \{a,b\}$ ikki elementli chekli sohada aniqlangan bo‘lsin. U holda uni quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin:

$$\forall x \exists y [P(x,y) \vee \overline{P(x,x)}] \equiv \forall x [P(x,a) \vee \overline{P(x,x)} \vee \overline{P(x,b)}] \equiv$$

$$\equiv [P(a,a) \vee \overline{P(a,a)} \vee P(a,b)] \wedge [P(b,a) \vee \overline{P(b,b)} \vee P(b,b)].$$

Hosil qilingan kon’yunktiv normal shakldagi formulaning har bir elementar diz’yunksiyasi ifodasida bitta mulohaza o‘zining inkori bilan birgalikda qatnashmoqda. Demak, mulohazalar algebrasining bu formulasi doimo chin qiymat qabul qiladi, ya’ni u aynan chindir.

## Mavzu: Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashuvchi normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi.

**1- ta’rif.** *Agar predikatlar mantiqi formulasi tarkibida erkin predmet o‘zgaruvchilar bo‘lmasa, u holda bunday formula* ***yopiq*** *formula deb ataladi.*

**2- ta’rif.** *Agar predikatlar mantiqi formulasi* $C$ *tarkibida* $x_1, x_2, ..., x_n$ *erkin o‘zgaruvchilar mavjud bo‘lsa, u holda* $A \equiv \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(x_1, x_2, ..., x_n)$ *formula* $C$

[39] Chyorch (Alonzo Church, 1903-1995) – AQShlik matematik, mantiqchi.

*formulaning* ***umumiy yopilishi*** *va* $B=\exists x_1\exists x_2...\exists x_n C(x_1,x_2,...,x_n)$ *formula* $C$ *formulaning* ***mavjudligini yopish*** *deb ataladi.*

**1- teorema.** *Agar predikatlar mantiqining normal shakldagi yopiq formulasi, tarkibida (ifodasida) faqat* $n$ *ta mavjudlik kvantori qatnashgan hamda bir elementli istalgan sohada aynan chin bo‘lsa, u holda u umumqiymatli formuladir.*

**Isboti.** Predikatlar mantiqining normal shakldagi formulasi

$$B\equiv\exists x_1\exists x_2...\exists x_n C(q_1,q_2,...,P_1,P_2,...,Q_1,Q_2,...) \qquad (1)$$

ko‘rinishda bo‘lsin, bu yerda $C$ formula ifodasida kvantorlar qatnashmaydi, $q_i$ – mantiqiy o‘zgaruvchi, $P_i$ – bir joyli predikatlar, $Q_i$ – ikki joyli predikatlar. Bu formulaning chinlik qiymati uning tarkibida qatnashayotgan $q_1,q_2,...$ mantiqiy o‘zgaruvchilar hamda $P_1,P_2,...$ va $Q_1,Q_2,...$ predikatlarga bog‘liq.

Teoremaning shartiga asosan bitta $a$ elementli istalgan $M=\{a\}$ sohada bu formula aynan chin, ya’ni

$$C(q_1,q_2,...,P_1(a),P_2(a),...,Q_1(a,a),Q_2(a,a),...) \qquad (2)$$

formula aynan chin bo‘ladi. Ravshanki, (2) formula mulohazalar algebrasining formulasi bo‘ladi.

(1) formula umumqiymatli emas deb faraz qilamiz. U holda shunday $M_1$ soha va o‘zgaruvchilarning shunday qiymatlar majmuasi $q_1^0,q_2^0,...,P_1^0,P_2^0,...,Q_1^0,Q_2^0,...$ mavjudki, unda (1) formula yolg‘on qiymat qabul qiladi, ya’ni

$$\exists x_1\exists x_2...\exists x_n C(q_1^0,q_2^0,...,P_1^0,P_2^0,...,Q_1^0,Q_2^0,...)=0. \qquad (3)$$

(3) formulaning inkorini aniqlaymiz:

$$\overline{\exists x_1\exists x_2...\exists x_n(q_1^0,q_2^0,...,P_1^0,P_2^0,...,Q_1^0,Q_2^0,...)}\equiv$$

$$\equiv\forall x_1\forall x_2...\forall x_n\overline{C(q_1^0,q_2^0,...,P_1^0,P_2^0,...,Q_1^0,Q_2^0,...)}=1.$$

Bu yerdan $C(q_1^0,q_2^0,...,P_1^0,P_2^0,...,Q_1^0,Q_2^0,...)$ formulaning $M_1$ sohaga oid predmet o‘zgaruvchilarning qanday olinishidan qat’iy nazar aynan chinligi kelib chiqadi. $M_1$ sohadan ixtiyoriy $x_0$ elementni olib, uni yuqorida ifodalangan formuladagi predmet o‘zgaruvchilar o‘rniga qo‘yib chiqamiz. U holda

$$\overline{C(q_1^0,q_2^0,...,P_1^0(x_0),P_2^0(x_0),...,Q_1^0(x_0,x_0),Q_2^0(x_0,x_0),...)}=1.$$

Demak,

$$C(q_1^0,q_2^0,...,P_1^0(x_0),P_2^0(x_0),...,Q_1^0(x_0,x_0),Q_2^0(x_0,x_0),...)=0\,.$$

Bu natija (2) formulaning aynan chin ekanligiga ziddir va (1) formula umumqiymatli emas degan farazimizning noto‘g‘riligini ko‘rsatadi. Shunday qilib, (1) formula umumqiymatlidir. ■

**2- teorema.** *Agar predikatlar mantiqining normal shakldagi yopiq formulasi ifodasida* $n$ *ta umumiylik kvantori qatnashsa va bu formula ko‘pi bilan* $n$ *ta elementli har qanday to‘plamda (sohada)* ***aynan chin*** *bo‘lsa, u holda u umumqiymatli bo‘ladi.*

**Isboti.** Predikatlar mantiqining normal shakldagi formulasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lsin:

$$A\equiv\forall x_1\forall x_2...\forall x_n C(q_1,q_2,...,P_1,P_2,...,Q_1,Q_2,...)\,, \qquad (5)$$

bu yerda $q_1,q_2,...$ – mantiqiy o‘zgaruvchilar, $P_1,P_2,...$ – bir joyli predikatlar, $Q_1,Q_2,...$ – ikki joyli predikatlar. (1) formula umumqiymatli emas deb faraz qilamiz. U holda $n$ tadan ortiq elementga ega bo‘lgan $M_1$ soha mavjudki, bunda (1) formula aynan chin bo‘lmaydi. Boshqacha qilib aytganda, o‘zgaruvchilarning shunday $q_1^0,q_2^0,...,P_1^0,P_2^0,...,Q_1^0,Q_2^0,...$
qiymatlar majmuasi mavjudki,

$$\forall x_1\forall x_2...\forall x_n C(q_1^0,q_2^0,...,P_1^0,P_2^0,...,Q_1^0,Q_2^0,...)\equiv 0\,. \qquad (6)$$

Bu yerdan

$$\overline{\forall x_1\forall x_2...\forall x_n C(q_1^0,q_2^0,...,P_1^0,P_2^0,...,Q_1^0,Q_2^0,...)}\equiv$$

$$\equiv\exists x_1\exists x_2...\exists x_n \overline{C(q_1^0,q_2^0,...,P_1^0,P_2^0,...,Q_1^0,Q_2^0,...)}\equiv 1.$$

Shunday qilib, predmet o‘zaruvchilarning shunday $x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\in M_1$ qiymatlari mavjudki,

$$\overline{C(q_1^0,q_2^0,...,P_1^0,P_2^0,...,Q_1^0,Q_2^0,...)}\equiv 1,$$

ya’ni $C(q_1^0,q_2^0,...,P_1^0,P_2^0,...,Q_1^0,Q_2^0,...)\equiv 0$ bo‘ladi.

Demak, $M_1$ sohadan ko‘pi bilan $n$ ta elementi bo‘lgan shunday $M$ sohani ajratish mumkinki, u yerda bu formula aynan chin bo‘lmaydi. Bu natija teoremaning shartiga ziddir va u (1) formula umumqiymatli emas degan noto‘g‘ri farazimizdan kelib chiqdi. Demak, (1) formula umumqiymatli formuladir. ■

Tarkibida faqat bir joyli (bitta predmet o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lgan) predikatlar qatnashgan formulalar uchun yechilish muammosi ijobiy hal etilishi quyidagi teoremadan ko‘rinadi.

**3- teorema.** *Predikatlar mantiqining tarkibiga n ta bir joyli predikat kirgan* $A$ *formulasi biror* $M$ *to‘plamda bajariluvchi bo‘lsa, u holda bu formula elementlari soni* $2^n$ *dan katta bo‘lmagan* $M_1$ *to‘plamda ham bajariluvchi bo‘ladi.*

3- teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

**Natija.** *Predikatlar mantiqining tarkibiga faqat* $n$ *ta bir joyli predikat kirgan* $A$ *formulasi elementlari soni* $2^n$ *dan ko‘p bo‘lmagan ixtiyoriy to‘plamda aynan chin bo‘lsa, u holda bu formula ixtiyoriy to‘plamda ham aynan chin bo‘ladi.*

Quyidagi teorema ham predikatlar mantiqining katta sinfini tashkil qiluvchi formulalari uchun yechilish muammosi ijobiy hal bo‘lishini tasdiqlaydi.

**4- teorema.** *Agar predikatlar mantiqining* $A$ *formulasi biror cheksiz sohada bajariluvchi bo‘lsa, u holda u chekli sohada ham bajariluvchi bo‘ladi.*

## GLOSSARIY

Kitobda quyidagi asosiy belgilashlar qabul qilingan.

$\boldsymbol{N}$ – natural sonlar to‘plami,
$\boldsymbol{Z}$ – butun sonlar to‘plami,
$\boldsymbol{R}$ – haqiqiy sonlar to‘plami,
$\varnothing$ – bo‘sh to‘plam,
$\boldsymbol{U}$ – universal to‘plam,
$|A|$ – $A$ to‘plamning quvvati,
$\bigcup$ – birlashma belgisi,
$\bigcap$ – kesishma belgisi,
$A \setminus B$ – $A$ to‘plamdan $B$ to‘plamni ayirish natijasida hosil bo‘lgan to‘plam,
$\overline{A}_B$ – $A$ to‘plamni $B$ to‘plamgacha to‘ldiruvchi to‘plam,
$\overline{A}$ – $A$ to‘plamni $\boldsymbol{U}$ universal to‘plamgacha to‘ldiruvchi to‘plam,
$2^A$ – $A$ to‘plam uchun bulean,
$P_n$ – $n$ ta elementli to‘plam uchun o‘rin almashtirishlar soni,
$A_n^m$ – $n$ ta elementdan $m$ tadan o‘rinlashtirishlar soni,
$C_n^m$ – $n$ ta elementdan $m$ tadan gruppalashlar soni,
$C_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ – $n$ ta komponentali kortej uchun takrorli o‘rin almashtirishlar soni ( $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ ),
$\overline{A}_n^m$ – $n$ ta turli elementlardan $m$ tadan takrorli o‘rinlashtirishlar soni,
$\overline{C}_n^m$ – $n$ ta elementdan $m$ tadan takrorli gruppalashlar soni,
$B(n,k)$ – qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda natural $n$ sonning $k$ ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni,
$B(n)$ – qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda natural $n$ sonning $k$ ta qo‘shiluvchilarga barcha bo‘laklanishlari soni,
$R(n,k)$ – qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda natural $n$ sonning $k$ ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni,
$R(n)$ – qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda natural $n$ sonning barcha bo‘laklanishlari soni,
■ – teorema, natija, lemma, xossaning isboti yoki misol, algoritm tugaganligi.

## Mustaqil ta'lim mavzulari

| № | Mavzu | Soat |
|---|---|---|
| **1** | Binar munosabatlar ustida amallar | 2 |
| **2** | Qisman tartiblangan to'plamlar | 2 |
| **3** | Formula, qism formula. Teng kuchli formulalar | 2 |
| **4** | Chinlilik jadvali | 2 |
| **5** | Mukammal konyunktiv normal formalar | 2 |
| **6** | Bul funksiyalari soni | 2 |
| **7** | Elementar bul funksiyalari | 2 |
| **8** | Funksiyalarni formulalar ko'rinishda ifodalash | 2 |
| **9** | Ikkilamchi funksiyalar. Ikkilamchilik prinsipi | 2 |
| **10** | Mukammal kon'yunktiv normal forma | 2 |
| **11** | Monoton funksiyalar sinfi | 2 |
| **12** | Chiziqli funksiyalar sinfi | 2 |
| **13** | Post teoremasi natijalari | 2 |
| **14** | Hisob tushunchasi. Mulohazalar xisobi | 2 |
| **15** | Keltirib chiqarish. Isbot tushunchasi | 2 |
| **16** | Umumlashgan Deduksiya teoremasi | 2 |
| **17** | Mulohazalar hisobining to'liqligi | 2 |
| **18** | Mantiqiy funksiya tushunchasi. Predmetlar sohasi | 2 |
| **19** | O'zgarmas predmetlar va o'zgaruvchi mulohazalar | 2 |
| **20** | Aynan chin formula. Aynan yolg'on formula | 2 |
| **21** | Algoritmlar. Algoritmlar murakkabligi | 2 |
| **22** | Minimizasiya operatori | 2 |
| **23** | Funksional elementlar | 2 |
| **24** | Sxemalar yasash. Kontaktli sxemalarni sintez qilish. | 2 |
| **25** | Qisqartirilgan diz'yunktiv normal shakl. Karno karta metodi. Bleyk metodi. Mantiqiy elementlardan foydalanib qisqartirish. | 2 |
| **26** | Predikat (mantiqiy funksiya) tushunchasi. Predmetlar sohasi. O'zgarmas predmetlar va o'zgaruvchi mulohazalar. Elementar formulalar. Kvantorlar. Predikatlar mantiqining alfaviti. | 2 |
| **27** | Formula ta'rifi. Teng kuchli formulalar. Asosiy tengh kuchli formulalar. Bajariluvchi formulalar. Aynan chin formula. Aynan yolg'on formula | 2 |
| **28** | Formulaning normal shakli. Yechilish muammosi. Chekli sohalarda yechilish muammosi. Yopiq formula. | 2 |
| **29** | Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashgan normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi | 2 |
| **30** | Funksional elementlar | 2 |
| **31** | Sxemalar yasash. Kontaktli sxemalarni sintez qilish. | 2 |
| **32** | Qisqartirilgan diz'yunktiv normal shakl. Karno karta metodi. | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| | Bleyk metodi. Mantiqiy elementlardan foydalanib qisqartirish. | |
| **33** | Predikat (mantiqiy funksiya) tushunchasi. Predmetlar sohasi. O’zgarmas predmetlar va o’zgaruvchi mulohazalar. Elementar formulalar. Kvantorlar. Predikatlar mantiqining alfaviti. | 2 |
| **34** | Formula ta’rifi. Teng kuchli formulalar. Asosiy tengh kuchli formulalar. Bajariluvchi formulalar. Aynan chin formula. Aynan yolg’on formula | 2 |
| **35** | Formulaning normal shakli. Yechilish muammosi. Chekli sohalarda yechilish muammosi. Yopiq formula. | 2 |
| **36** | Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashgan normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi | 2 |
| **Jami** | | **72** |

## Asosiy va qo’shimcha adabiyotlar

### Asosiy adabiyotlar:


1. Elliott Mendelson. Introduction to mathematical logic / Elliott Mendelson. 2010 by New York.
2. Seymour L., Marc Lipson, Discrete Mathematics 2007 by New York.
3. Мендельсон Э . Введение в математическую логику. М.: Наука. 1984
4. Яблонский С.В., Введение в дискретную математику. М: Наука, 1986
5. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari..,2008


### *Qo’shimcha adabiyotlar*


1. To’rayev H.T., Diskret matematika va matematik mantiq (I-qism), Samarqand: SamDU nashr-matbaa markazi, 2000, 174 b.
2. To’rayev H.T., Diskret matematika va matematik mantiq (II-qism), Samarqand: SamDU nashr-matbaa markazi, 2001, 201 b.
3. Iskandarov R.I., Matematik logika yelementlari, Samarqand: SamDU, 1970, 324 b.
4. Mendelson E., Vvedeniye v matematicheskuyu logiku. M: Nauka, 1976, 320 s.
5. Malsev A.I., Algoritmы i rekursivnыye funksii. M: Nauka, 1965.
6. Gorbatov V.A. Osnovы diskretnoy matematiki. M: Vыsshaya shkola. 1986. –311 s. 1977, 367 s.
7. Ore O. Teoriya grafov. M: Nauka, 1980, 336 s.
8. I. V. Kuzmin, V. A. Kodrus. Osnovы teorii informasii i kodirovaniya. M.

1986, 367 s.

### *Internet manbalari*

1. http://dimacs.Rutgers.yedu/
2. http://yepubs.siam.org/sam-bin/dbq.toclist/SIDMA
3. http://www.uni-bonn.de/logic/world.html
4. http://www.vsppub.com/jornals/jn-DisMatapp.html
5. http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/
6. http://www.math.uu.se/logic-server/
7. http://dmoz.org/Sciyencye/Math/logic/

## TARQATMA MATERIALLAR

**Xorijiy manbalar (elektron resurslar)**

http://alexqart.narod.ru/library - elektron kitoblar

http://andersen-cafe.ru/matematika/chislennye_metody – adabiyotlarning elektron varianti.

http://biblioteki.net - elektron kitoblar

http://bigor.bmstu.ru/ - elekton ma’ruzalar va kitoblar

http://book.invlad.ru/ - elektron kitoblar

http://bookfi.org/ - electron kutubxona

http://books.tr200.ru - electron kutubxona

http://bookzooka.com/book - elektron kitoblar

http://by-chgu.ru/category/mathematics - elektron kitoblar

http://cmm-ct.psu.ru - elektron kitoblar

http://cnit.ssau.ru/TechFEM/ - elektron kitoblar

http://comp-science.narod.ru - elektron kitoblar

http://crecs.ru/ru/ - hisoblash matematikasidan praktikum

http://dic.academic.ru/ - elektron kitoblar

http://dmvn.mexmat.net/prog.php - elektron kitoblar

http://dolivanov.ru/ - elektron kitoblar

http://eek.diary.ru/p178707231.htm – adabiyotlarning elektron varianti.

http://elib.bsu.by/- elektron kitoblar

http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numerics.htm - elektron kitoblar

http://fast-const.ru/ - elektron kitoblar

http://kniga-free.ru - elektron kitoblar

http://komp-model.narod.ru/ - elektron kitoblar

http://mirknig.com/knigi/estesstv_nauki/ - elektron kitoblar

http://mmfd.nsu.ru - elektron kitoblar

http://mmph.narod.ru/ - elektron kitoblar

http://my.safaribooksonline.com/book/math-and-science/ - elektron kitoblar

http://pedagog-kniga.net/ - elektron kitoblar

http://pers.narod.ru/study/methods/

http://portfelchik.su/ - elektron kitoblar

http://pyrkova.fizteh.ru/educational/WMath/ - hisoblash matematikasidan elekton kitoblar

http://revolution.allbest.ru/mathematics - elektron kitoblar

http://ru.bookos.org - elektron kitoblar

http://ru.bookos.org – eng katta bepul elektron kitoblar kutubxonasi.

http://ru.wikipedia.org – erkin ensiklopediya «Vikipediya».

http://ru.wikiversity.org/wiki - elektron kitoblar ҳамда таянч тушунчалар манбаи

http://sdb.su/vich-mat/ - elektron kitoblar

http://stud.sci.pfu.edu.ru - elektron kitoblar

http://tehnick-8.narod.ru - elektron kitoblar

http://toe-rgr.ru - elektron kitoblar

http://umkd.volpi.ru/course/ - ma'ruzalar matni

http://www.4tivo.com/education - elektron kitoblar

http://www.bookshop.ua/ - elektron kitoblar

www.books.atrunet.ru - elektron kitoblar

http://www.crec.mipt.ru/prep/numlabs - laboratoriya ishlari

http://www.edu.ru – ta'lim sayti.

http://www.edu.uz – ta'lim sayti.

http://www.eqworld.ru – adabiyotlarning elektron varianti.

http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numerics.htm - elektron kitoblar

http://www.exponenta.ru/ - elekton ma'ruzalar va kitoblar

http://www.ict.nsc.ru/matmod - elektron kitoblar

http://www.inm.ras.ru/library.htm - elektron kitoblar

http://www.intuit.ru – masofaviy ta'lim sayti.

http://www.kodges.ru - elektron kitoblar

www.math.msu.su - elektron kitoblar

http://www.mat.net.ua/mat - elektron kitoblar

http://www.myshared.ru - elektron kitoblar

http://www.ozon.ru/catalog/1140641/ - elektron kitoblar

http://www.ph4s.ru - elektron kitoblar

http://www.prepodu.net - referatlar

http://www.techgidravlika.ru – adabiyotlarning elektron varianti.

www.techno.edu.ru - elektron kitoblar

http://www.twirpx.com – adabiyotlarning elektron varianti.

http://www.uchites.ru/chislennye_metody/posobie - elektron leksiyalar

http://www.ziyonet.uz - adabiyotlarning elektron variantlari

**O'quv fanining talablari:**

"Diskret matematika va matematik mantiq" fanini o'zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida talaba:

- Diskret matematika va matematik mantiq fanining nazariy va amaliy sohalarda erishilgan asosiy yutuqlari, muammolar va ularning rivojlanish istiqbollari haqida tasavvurga ega bo'lishi;

- Davlat va huquqning kelib chiqishi, davlat tushunchasi, belgilari, mohiyati va tiplari, davlat funksiyalari, davlatning shakllari, davlat hokimiyatini amalga oshirish mexanizmi, ijtimoiy munosabatlar va huquq, huquqiy ong va huquqiy madaniyat, huquq normalari, huquq shakllari (manbalari), huquq ijodkorligi, huquq tizimi, huquqiy munosabatlar, huquqni amalga oshirish, huquq normalarini sharhlash, yuridik amaliyot, huquqiy hulq-atvor, huquqbuzarlik va yuridik javobgarlik, huquqiy tartibga solish mexanizmi, qonuniylik va huquqiy tartibot, hozirgi zamonning asosiy huquqiy tizimi va oilalari, davlat va huquqning rivojlanish istiqboli va yo'llari, ma'muriy huquq asoslari, moliya xuquqi asoslari, fuqarolik huquqi asoslari, mehnat huquqi asoslari, tadbirkorlik xuquqi asoslari, oila huquqi asoslari, ekologiya xuquqi asoslari, qishloq xo'jaligi xuquqi asoslari, jinoyat huquqi asoslari, xalqaro xuquq asoslari haqida nazariy bilimlarga ega bo'lishi;

-talaba amaliy vazifalarni meyoriy-huquqiy hujjatlarda belgilangan qoidalar asosida hal eta bilish, qonunbuzarlik holatlari bo'lishiga huquqiy xulosalar bera bilish;

– kasbiy mehnat faoliyati davomida o'z sohasiga oid normativ-huquqiy hujjatlardan to'g'ri foydalanish va huquq, erkinliklari, majburiyatlarini qonunchilik doirasida qo'llash;

– kasbiy faoliyatning tegishli sohalarida huquqiy-me'yoriy va faktik ma'lumotlarni to'plash, kasbiy faoliyatiga doir huquqiy normalar va huquqiy munosabatlarni tahlil etish, muammolarning huquqiy yechimini asoslab berish kabi amaliy ko'nikmalarni egallashi;

-talaba normativ-huquqiy hujjatlarni sharhlash va amaliyotda qo'llash, huquqiy xususiyatdagi hujjatlarni tuzish, qonun doirasida huquqiy qarorlar qabul qilish va boshqa huquqiy harakatlarni amalga oshirish;

- huquqiy xususiyatdagi hujjatlarni tuzish, qonun doirasida huquqiy qarorlar qabul qilish, normativ-huquqiy aktlarni sharhlash, huquqiy harakatlarni amalga oshirish;

**O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI**
**OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIMI VAZIRLIGI**

**SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI**

Informatika o’qitish metodikasi bakalavriat ta’lim yo’nalishlari talabalari uchun

# “DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ”

fanini o’qitishda

**INOVATSION TA’LIM TEXNOLOGIYALARI**

**Samarqand – 20__**

## Diskret matematika va matematik mantiq fanini o'qitishda inovatsion ta'lim texnologiyalari

Fan moduli–davlat ta'lim standarti va fan dasturida belgilangan talabalar tomonidan egallanishi lozim bo'lgan bilim, ko'nikma, malaka va kompetensiyalarni shakllantirishni, o'quv jarayonini kompleks loyihalash asosida kafolatlangan natijalarni olishni, mustaqil bilim olish va o'rganishni hamda nazoratni amalga oshirishni ta'minlaydigan, talabaning ijodiy qobiliyatlarini rivojlantirishga yo'naltirilgan o'quv –uslubiy manbalar, didaktik vositalar va materiallar, elektron ta'lim resurslari, o'qitish texnologiyasi, baholash metodlari va mezonlarini o'z ichiga oladi. Fanning moduli komponentlarining mazmuni Davlat ta'lim standarti asosida tuzilgan fan dasturiga muvofiq, hamda shaxsga yo'naltirilgan, rivojlantiruvchi va mustaqil ta'lim olish texnolologiyalari, tamoyillari va talablari asosida ishlab chiqiladi. Fan modulini yaratish buyicha tavsiyalar

Fan bo'yicha o'quv moduli yaratishda mualliflar jamoasi tuziladi. Mualliflar jamoasiga fan o'qituvchisi, soha mutaxassislari, Davlat ta'lim standarti va fan dasturlarini ishlab chiquvchilari, elektron ta'lim resurslarini yaratish bo'yicha muhandis dasturchilar va dizaynerlar, metodistlar, psixologlar kiritish tavsiya etiladi. Yaratiladigan modulning sifati mualliflarning pedagogik va kasbiy mahoratiga, ularning bilimdonligiga bog'liq bo'ladi.

Dastlab ta'lim yo'nalishi (mutaxassislik) davlat ta'lim standarti va o'quv rejasi bilan tanishish tavsiya etiladi. So'ngra yaratiladigan o'quv moduli tarkibi ishlab chiqiladi. Har bir komponent mazmuni fan bo'yicha qo'yilgan maxsus talablardan kelib chiqqan holda shaxsga yo'naltirilgan, rivojlantiruvchi va mustaqil ta'lim talablari va tamoyillari asosida ishlab chiqilishi kerak

Mualliflar birinchi navbatda yaratiladigan fan modulining konsepsiyasini yozma ravishda tavsiya etishlari, reja tuzishlari, mazmuniy-uslubiy tizimni bayon qilishlari, komponentlar orasidagi o'zaro integrasiyani joriy qilish yo'llarini izohlashlari va shu bilan birga o'zlarining ijodiy qobiliyatlarini namoyish etishlari kerak. Fan modulini yaratish va takomillashtirishga doir seminarlar va o'qishlar tashkil etilishi tavsiya etiladi.

Bir necha kishidan iborat mualliflar birgalikda fan modulini yaratishda quyidagi imkoniyatlar yaratiladi:

O’zaro fikr almashish uchun tez-tez uchrashish orqali shaxsiy munosabatni o’rganish;

barcha ish rejalarni tuzish va muhim qarorlarni birgalikda qabul qilish;

vazifalarni mantiqiy va maqsadli taqsimlash;

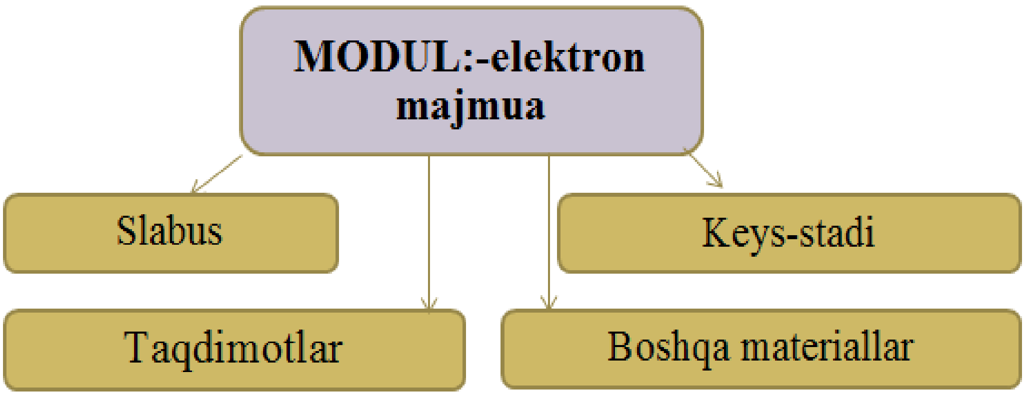
Modulni yaratish muddatlarini belgilab olish va ularga amal qilish;

yagona yondashuvni saqlab qolish uchun komponentlar shakl va tuzilmasini belgilab olish.

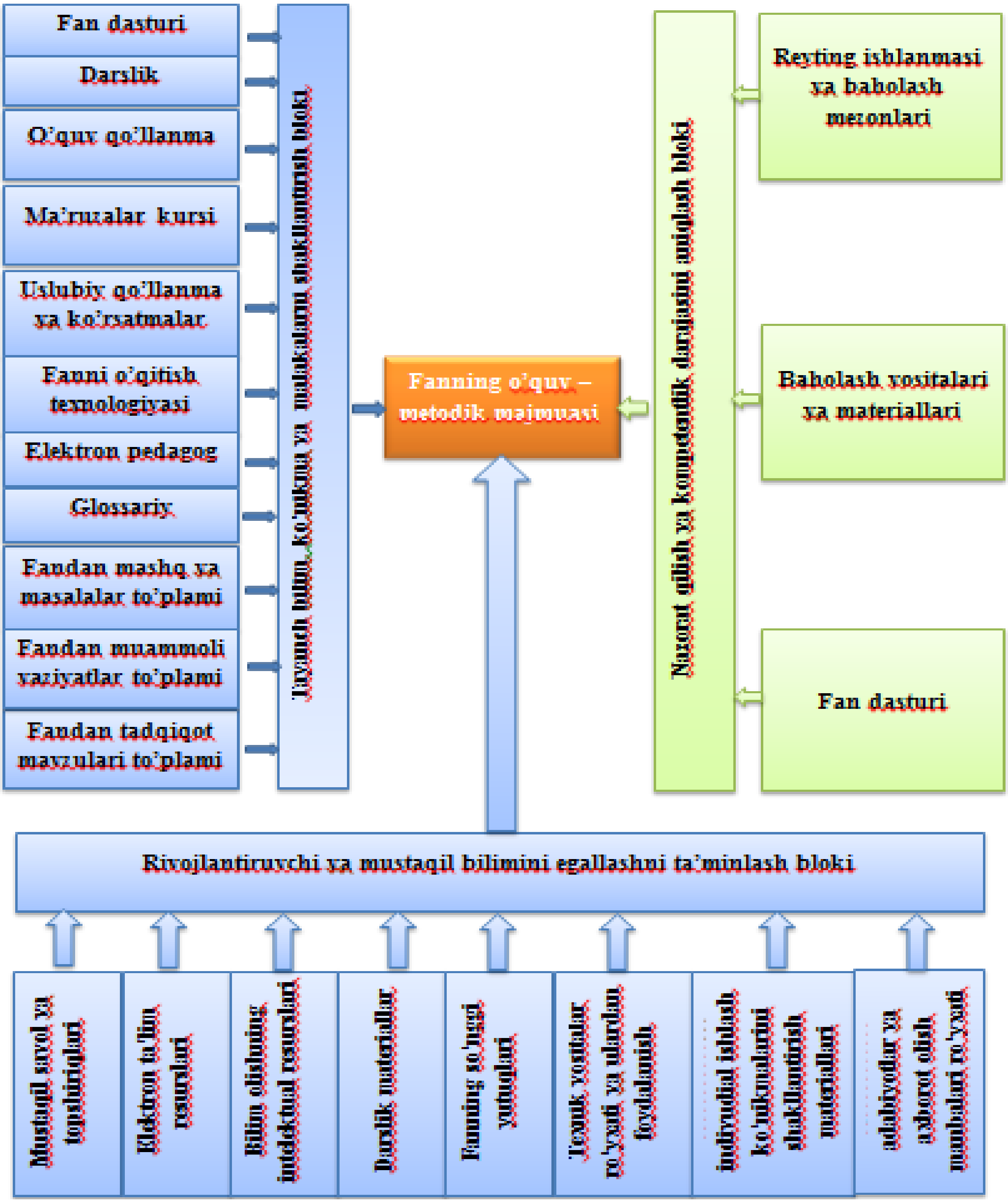
Fan o’qituvchisi uchun yangi yaratilgan moduldan samarali foydalanishi uchun uslubiy maslahatlar va ko’rsatmalar berilishi kerak.

Modul- pedagogik texnologiyani tashkil etuvchi, uning tarkibiy bo’lak-larini ifodalovchi tushunchadir. Bunday bo’laklar kichik modul, birlamchi modul, modullar to’plami,modullar darajasi va modullarning majmuaviy tuzilmasi kabi turlardan iborat bo’ladi.

Modulli o’qitish-pedagogik jarayonni ilmiy va metodik jihatdan tartibi va maqsadga muvofiq bajarishga xizmat qiladi




“Diskret matematika va matematik mantiq” fanidan tuzilgan fanning o’quv-metodik majmuasi keltirilgan talablar va bandlar asosida ishlab chiqilgan bo’lim universitet Axborot-resurs markazining elektron adabiyotlar bo’limida elektron shaklda foydalanib kelinmoqda.




**Fan dasturlari.**

Fan dasturlari – uslubiy me’yoriy hujjat bo’lib, davlat ta’lim standartining muayyan fan bo’yicha bakalavr (magistr) bilim, ko’nikma, va malakalariga hamda kompetensiyasiga quyilgan talablarga muvofiq ishlab chiqiladi.

Fan dasturi tarkibida fanning maqsadi, vazifalari va o’rganadigan muammolari, talabalarning fan bo’yicha egallashi lozim bo’lgan bilim, ko’nikma va malakalar tavsifi, kompetensiyasi, nazariy, amaliy (laboratoriya, seminar) va mustaqil ish mashg’ulotlari hajmi va mazmuni, metodik tavsiyalar, taqvimiy mavzuiy rejalar, o’quv-uslubiy adabiyotlar va didaktik vositalar ro’yxati hamda baholash mezonlari, shaxsning qaysi fazilatlarini shakllantirishga yo’nalganligi kiradi.

Dasturda fan, texnika, texnologiyaning so’nggi yutuqlari, oliy ta’lim rivojlanishining jahon tendensiyasi hisobga olinishi, respublikada joriy etilgan uzluksiz ta’lim tizimining ta’lim turlari o’rtasidagi uzviylik va uzluksizlikni ta’minlashi shart.

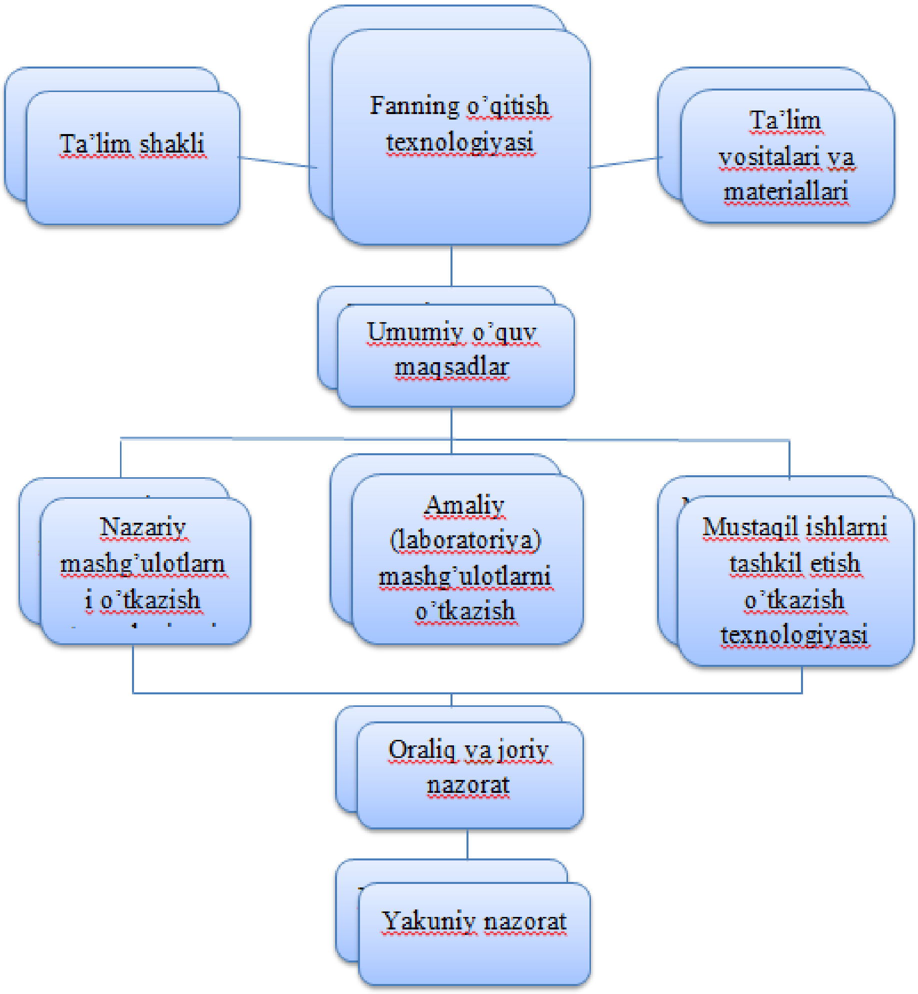
Fan dasturini ishlab chiqishda ta’lim oluvchilarning mustaqil bilim olish va o’rganish, o’qitish jarayonini shaxsga yo’naltirilgan va rivojlantiruvchi ta’lim talablari asosida tashkil etishga, mavzularning bir xil talqinda takrorlanmasligiga e’tibor berilishi zarur.

Ushbu dastur asosida “Amaliy matematika” kafedrasida ishchi o’quv dasturi tuzilib, universitetning o’quv ishlari bo’yicha prorektori tomonidan tasdiqlanib foydalanib kelinmoqda.

**Fanni o’qitish texnologiyasi.**

O’qituvchi tomonidan fannining shaxsga yo’naltirilgan va rivojlantiruvchi ta’limga asoslangan o’qitish texnologiyasi bo’yicha metodik qo’llanma ishlab chiqiladi. Fanni o’qitish texnologiyasi ta’lim jarayonini loyihalashtirish, tashkil etish, o’tkazish, bilim va ko’nikmalarni baholash jarayonini o’z ichiga oladi. Har bir mashg’ulot uchun texnologik xaritalari ishlab chiqiladi. Texnologik xaritani loyihalash pedagogik mahorat cho’qqisi hisoblanadi, chunki mashg’ulot davomida bajariladigan amaliy ish jarayoni texnologik xaritada ketma-ketlik qoidasi asosida tasvirlanadi.

Quyidagi sxemalarda metodik qo’llanmani ishlab chiqishda fanni o’qitish texnologiyasining umumiy namunaviy tuzilmasi tavsiya etilgan.




**Mustaqil ish**

Mustaqil ishlar talabaning umumiy rivojlanishiga va kasbiy mahoratini o'stirishga xizmat qilishi kerak. Shuningdek talabalarning mustaqil va ijodiy ishlarini tashkil qilish tarbiyaviy, ta'limiy ahamiyatga ham ega bo'lishi kerak. Tarbiyaviylik ahamiyati shundaki talaba o'z bilimini oshirish va mustahkamlash uchun o'zini-o'zini tarbiyalab boradi. Ta'limiy ahamiyati esa talaba bo'sh vaqtdan samarali foydalangan holda mustaqil bilim olish jarayonining shakllanishiga olib keladi.

Mustaqil ishlarning turlari, shakllarini tanlashda "oddiydan-murakkabga" hamda "umumiydan-xususiyga", "mavhumdan-aniqlikka" tamoyillariga amal qilish lozim. Mustaqil va ijodiy ish topshiriqlarini ishlab chiqishda har bir talaba shaxsiy imkoniyatlari, tushunuvchanlik, o'quv materialini o'zlashtirish darajasi inobatga olinishi, shaxsga yo'naltirilgan o'qitish texnologiyalarini qo'llash maqsadga muvofiqdir.

**Mashg'ulotlarni tashkil etish shakllari**

Nazariy, amaliy va mustaqil ish mashg’ulotlar jamoaviy kichik guruhlarda hamda individual shaklda olib boriladi. Individual shakl asosan ijodiy topshiriqlarni bajarishga yo’naltiriladi. Har bir talaba o’zining individual (jismoniy, psixik va b.) xususiyatlariga egaki, bu uning o’quv faoliyatiga katta ta’sir etadi. Pedagogning bu xususiyatlarni o’rganishi va inobatga olishi o’qitish sifatini oshirish hamda har bir talabaning ijodiy qobiliyatlarini rivojlantirish uchun sharoit yaratadi.

Kichik guruhlarda ishlash maxsus bilimlar bilan bir qatorda amaliy ko’nikmalar o’rganilishi kerak bo’lganda, shuningdek talabalarda mustaqil ishlash qobiliyatlarini rivojlantirish uchun qo’llaniladi.

**Didaktik vositalar va materiallar.**

O’quv-didaktik materiallarga o’qitilishi va o’rganilishi lozim bo’lgan bilimlarni beruvchi har qanday axborot tashuvchilar tushuniladi. Nazariy va amaliy mashg’ulotlarda o’quv-didaktik materiallar sifatida qullaniladigan matnli - vizual vositalar, amaliy mashg’ulotlarda kurs materiallari, uslubiy qo’llanmalar, jadvallar, jihoz yoki asbobni ishlatish bo’yicha ko’rsatmalar hamda elektron ta’lim resurslari ruyhati beriladi.

**Talabalar bilimini baholash mezonlari.**

**Joriy, oraliq baholash.** Talabalar tomonidan o’quv materiallari o’zlashtirilganligini, ko’nikma va malakalar hosil bo’lganligini tekshirish hamda baholash ta’lim jarayonining zaruriy tarkibiy qismi hisoblanadi. Bu faqat o’qitish natijalarini baholash emas, balki o’qitish jarayoni davrida talabalar bilim olish va mustaqil ish faoliyatiga rahbarlik qilish hamdir. O’qituvchi tomonidan joriy va oraliq baxolash metodlari va mezonlari ishlab chiqiladi.

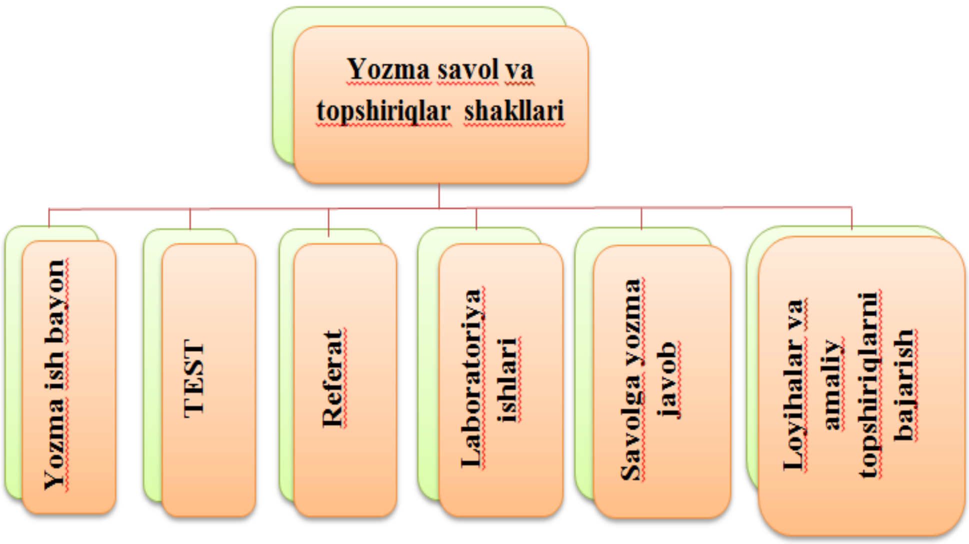
Joriy baholash muntazam ravishda o’tkazib boriladi. U ta’lim jarayonidagi yutuq va kamchiliklarni, samarasini tezkor aniqlab borish, o’quv jarayonini muvofiqlashtirish hamda ta’lim beruvchi va ta’lim oluvchi o’rtasidagi qaytar aloqani ta’minlash imkonini beradi. Oraliq baholash fan asosiy bo’limlari bo’yicha mashg’ulotlar o’tib bo’lingandan keyin talabalarning bilim va ko’nikmalarni o’zlashtirganliklari baholanadi.

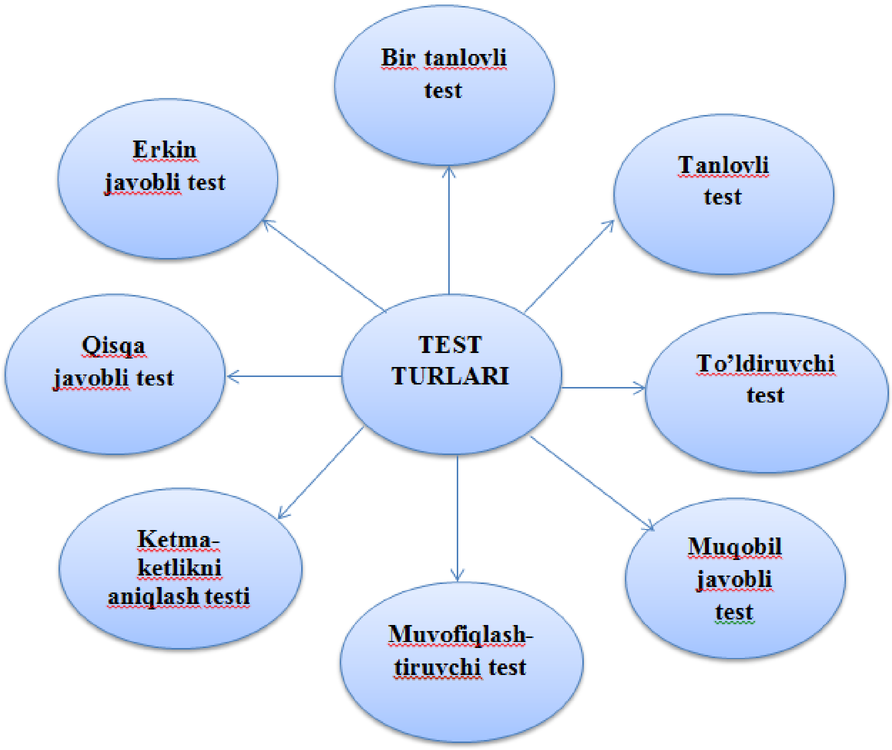
**Yakuniy baholash.** Yakuniy baholash talabaning fan bo'yicha o'zlashtirish natijalarini belgilangan mezon va standartlarga javob berishini aniqlaydi. Yakuniy baholash fanni o'qitish jarayonining yakunida o'tkaziladi.

**Baholash vositalari va mezonlari.** Fan buyicha nazariy bilim va amaliy ko'nikmalarni baholash uchun savol va testlar, topshiriqlar va mashqlar, loyihalar, yozma ishlar va h.k.lar beriladi.

Nazorat savollari va testlar talabalarni bilim olishga qiziqishlarini, mustaqil fikrlash faoliyatini rivojlantirishga, taqqoslash, umumlashtirish, tahlil qilish usullaridan foydalana olish mahoratlarini shakllantirishga yo'naltirilgan bo'lishi kerak. Yozma savollar va topshiriqlar o'qituvchi tomonidan ta'lim oluvchiga yozma tarzda javob olishga mo'ljallab ishlab chiqilgan baholash vositalari hisoblanadi.

Testlarning bir qator turlari mavjud bo'lib ta'lim oluvchining nazariy bilimi va aqliy layoqatlarini baholashda foydalaniladi. Amaliy kunikmalarni baholashda asosan amaliy topshiriqlardan foydalaniladi. Amaliy topshiriqlar ta'lim oluvchiga ma'lum bir mehnat faoliyatini bajarish bo'yicha vazifa beriladi. O'qituvchi ta'lim oluvchining faoliyatini kuzatib oldindan ishlab chiqqan mezonlar asosida baholashi kerak.






**O'quv fani mazmuni xususiyatlari asosida ta'lim shakllarini tanlash.**

Ta'lim jarayoni ishtirokchilari (O'qituvchi va tahsil oluvchilar)ning ma'lum belgilangan tartibda amalga oshiriladigan hamkorlikdagi faoliyatining tashqi ko'rinishi kasbiy ta'limning tashkiliy shaklini anglatadi.

Hozirgi paytda kasbiy ta'limning tashkiliy shakllari quyidagi hususiyatlariga binoan turlanadi:

1. Tahsil oluvchilar soniga ko'ra-ommaviy, jamoaviy, guruhli, individual.
2. O'qitish joyiga ko'ra-ta'lim-tarbiya muassasalarida va ta'lim muassasalaridan tashqarida (o'quv ustaxonalarida, mashq maydonlarda, korxonalarda, uy ishlari, sayohat va shu kabilar).
3. O'quv vaqtining davomiyligiga ko'ra-40 minutlik, juftlik (80 min). Amaliyotda sinf-dars tizimi keng ko'lamda qo'llanilganligi sababli dars ta'lim tarbiya ishining asosiy shakli deb yuritiladi. Sinf-dars tizimining asosiy o'ziga hos jihatlari quyidagilar hisoblanadi:

-deyarli bir xil tarkib, yosh va tayyorgarlik darajadagi tahsil oluvchilar ishtirok etadi;

-ta'lim-tarbiya jarayoni o'zaro bog'liq alohida-alohida qismlar ko'rinishiga ega bo'ladi;

-har bir dars o’quv rejasiga kirgan ma’lum bir o’quv predmetiga oid bo’ladi;

-darslar muntazam ravishda almashib turadi;

-kasb ta’lim darslariga o’qituvchi muhandis-pedagog, tajribali mutaxassis kabilar rahbarlik qiladi;

-tahsil oluvchilar turli ko’rinishdan o’quv-bilish faoliyatida ishtirok etadilar.

Quyidagilar sinf-dars tizimining ijobiy tomonlari hisoblanadi:

-qat’iy tashkiliy tuzilmaga egaligi;

-iqtisodiy ko’rsatgichlarining nisbatan yuqoriligi. Chunki bir o’qituvchi bir vaqtni o’zida ko’p sonli tahsil oluvchilar bilan ishlaydi;

-o’zaro hamkorlik faoliyatini amalga oshirishga qulay sharoit yaratiladi.

Shu bilan birga sinf-dars tizimining quyidagi kamchiliklari ham e’tirof etilgan:

-o’rtacha tahsil oluvchiga mo’ljallanganligi;

-har bir tahsil oluvchilar bilan individual ishlash imkoniyatining yo’qligi.

Ijtimoiy talablar, kasb ta’limining maqsad va vazifalari, tahsil oluvchilarning talab hamda ehtiyojlari, ta’lim-tarbiya qonuniyatlari, prinsiplari kabilarga ko’ra kasbiy-ta’lim darslariga quyidagi talablar qo’yilishi kelib chiqadi:

1. Fan-texnika va ishlab chiqarish texnologiyalarining so’nggi yutuqlari, ilg’or pedagogik tajribalardan imkon qadar foydalanish, ta’lim-tarbiya qonuniyatlariga asosanib dars tuzilmasini maqbullashtirish:
2. Darsda barcha didaktik prinsiplarning maqbul nisbatini ta’minlash:
3. Tahsil oluvchilarning qiziqishi, ehtiyojlari, moyilligini hisobga olgan holda mahsulli o’quv-bilish faoliyatiga shart-sharoit yaratish;
4. O’quv materialini mukammal o’zlashtirilishi uchun fanlararo aloqadorlikka amal qilish;
5. Tahsil oluvchilar tomonidan ilgari o’zlashtirilgan bilimlar va ularning hayotiy tajribalariga tayangan holda ish ko’rish;
6. Tahsil oluvchilarning barcha ijobiy jihatlarini rag’batlantirish, o’quv-bilish faoliyatini faollashtirish yo’li bilan rivojlantirishga erishish;

7. Darsning barcha bosqichlarida mantiqiy va emosional his-tuyg’ularga asoslanish;
8. Didaktik materiallar va vositalardan samarali foydalanish;
9. Nazariy materialni amaliyot bilan uzviy bog’lab o’rganish;
10. Zaruriy bilim, ish harakat usullari, oqilona fikrlash va amaliy faoliyat ko’rsatish usullarini tarkib topdirish:
11. Tahsil oluvchilarda uzluksiz ravishda o’qib-o’rganish, o’z bilimi va kasbiy mahoratini oshira borish malakasini shakllantirish:
12. Darslarni mukammal rejalashtirish natijalarini oldindan bashorat etish va tashhislash.

**Fani o’qitishning pedagogik texnologiyalar turlari.**

Talabani fanga qiziqtira bilish o’ta muhim omil hisoblanadi. Fanni o’qituvchining o’z tajribasidan, atrof muhitdan olingan misollarga asoslanib o’qitish esa eng samarali usuldir. Demak, tabiiy fanlarni o’qitish jarayonida biz bugungi kunda quyidagilarni hisobga olishimiz zarur:

- ✓ iloji boricha talabaga tanish bo’lgan va hayotiy xodisalarga asoslanish;
- ✓ darsni talabaning atrof muhitiga bog’liq bo’lgan holda o’tish imkonini yaratish. Odatda oila sharoiti, talabalar davrasi, bo’lajak kasb sharoiti kabi hayotiy misollarni qo’llash mumkin;
- ✓ fanni o’rgatishda dastlab uning hayotdagi ahamiyati, uni o’rganishning talaba uchun foydali tomonlarini tushuntirishdan boshlash maqsadga muvofiq;
- ✓ talabani izlanishga undash, bilimini oshirish maqsadida alohida chuqurlashtirilgan savollar berilishi mumkin;
- ✓ har bir fan bo’yicha albatta amaliy mashg’ulotlar bo’lishi va talabaning o’z oldiga ma’lum maqsadlar qo’yishida yordamchi materiallar berilishi hamda uning fanni yanada chuqurroq o’rganishga qodir ekanini o’zi sezishiga undash lozim.

Ta’lim berish, har bir mavzuning mag’zini talabalar ongiga yetkazish mahorati o’qituvchidan ko’p izlanishni, ko’p mutola qilishni talab qiladi. Bilim ummoniga boy bo’lgan ustozgina mavzuni mag’zini talabalar ongiga mohirona yetkaza oladi. Mavzuning maqsadiga qarab, ta’lim metodlarini tanlay biladi. Ta’lim metodlaridan oqilona foydalanib, ilmiy dars o’tish, talabalarni o’z o’rnini topishga, ongning shakllanishiga katta asos bo’lib xizmat qiladi. O’qituvchining ma’lum fan ilmini talabalar ongiga yetkaza olish mahorati, ularni bo’lg’usi yo’llarini tanlashda muhim ahamiyatga ega. Ta’limning mohiyati inson kamolotini shakllantirishga xizmat qiladi. Ta’lim metodi ta’lim maqsadi va vazifalariga bog’liq.

Talabalar o’zlashtirib olgan bilimlarini imkoniyatlariga qarab sekin- asta amaliyotga qo’llay boshlaydilar. Talabalar bilan bo’lgan muloqotda, ularga bilim berish jarayonida o’qituvchi ta’lim - tarbiya jarayonini samarali boshqarishi lozim. Ta’lim tarbiya jarayoni uzviy jarayondir. Ta’lim berish jarayonida tarbilayotganligimizni unutmasli-gimiz kerak.

Suxandonli, kinoyasiz so’zlash o’qituvchiga xos kiyinish etikasi. Fikrni erkin bayon qilish va ta’masiz yetkaza olish xususiyatlari talabalar uchun amaliy ko’rgazma ekanligini unutmasligimiz kerak. Ta’lim berishda o’qitish metodlari asosiy o’rinni egallaydi.

Metod ─ yunoncha atama bo’lib, aynan nimagadir yo’l degan ma’noni anglatadi. Ya’ni maqsadga erishish yo’lini bildiradi. Metodlar (usullar) ni har qanday muammoni (maqsadni) uzatish va qabul qilish xarakteriga qarab quyidagi turlarga ajratish mumkin:

So’z orqali ifodalanadigan metod;

Ko’rgazmali metod;

Amaliy metod.

Ta’lim mazmunini o’zlashtirishda talabalarning bilim saviyasi, o’zlashtirish qobiliyati, ta’lim manbai, didaktik vazifalarga qarab, munosib ravishda quyidagi metodlar qo’llaniladi:

-o’qitishning ma’ruza (suxbat) metodi;

-o’qitishning amaliy ishlar metodi;

-Laboratoriya ishlar metodi;

-Ilmiy-tadqiqod metodlari;

-O’qitishning induktiv va didaktiv metodi;

-O’qitishning nazorat va o’z-o’zini nazorat qilish metodi.

Metodlar quyidagi guruhchalarni o’z ichiga oladi:

Birinchi guruh metodlari:- so’z orqali uzatish va informasiyani eshitish orqali qabul qilish metodlari (og’zaki metodlar: hikoya, ma’ruza, suhbat va boshqalar).

Ikkinchi guruh metodlari – o’quv informasiyasini ko’rgazmali uzatish va ko’rish orqali qabul qilish metodlari (ko’rgazmali metod, tasviriy namoyish qilish va boshqalar).

Uchinchi guruh metodlari o’quv informasiyani amaliy mexnat harakatlari orqali berish (amaliy metodlar, mashqlar, laboratoriya ishlari, dastur tuzish, pedagogik masalalarni yechish, mehnat harakatlari va boshqalar).

Ta’limning rag’batlantirish metodlari:

Ta’limga qiziqishni rag’batlantirish metodi.

Ta’limga burch va ma’suliyatni rag’batlantirish metodi.

Xuddi shuningdek, ta’limga nazorat va o’zini – o’zi nazorat qilish qilish metodlari quyidagilar.

1.Og’zaki nazorat va o’z - o’zini nazorat qilish

2. Yozma nazorat va o’z - o’zini nazorat qilish

3. Laboratoriya va amaliy nazorat va o’z - o’zini nazorat qilish

4. Test nazorati.

Bu metodlarni talabalarda bilish faoliyatini, qaror qabul qilish, anglash va amalda qo’llash faoliyatini shakllantirishda foydalaniladi.

Diskret matematika va matematik mantiq fanini o’qitish ma’ruza amaliyot va mustaqil ta’limdan iboratdir. Ma’ruza darslarida talabalar dastur asosida Diskret matematika va matematik mantiq nazariyasini to’liq eshitadilar. Fanni to’liq o’zlashtirishda faqat ma’ruza yetarli emas. Fani o’zlashtirishda talabalarning fikrlash jarayonini to’g’ri yo’lga solish uchun amaliyot darsi asosiy negizdir. Amaliy mashg’ulot darslarida masalalar yechilib, ma’ruza darslarida olgan bilimlarini mustahkamlaydilar. Masalalarni albatta talabalar o’qiyotgan yo’nalishlarini hisobga olgan xolda tanlash maqsadga muvofiqdir.

Ma’ruza, amaliyot darslarining bilim olishdagi ahamiyati katta bo’lsada, bilimlarini mustaxkamlash uchun mustaqil ishlar, hisob-grafik ishlarini bajarish muhimdir.

**« DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ »**
**KURSI BO’YICHA TA’LIM TEXNOLOGIYASI**

**« DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ»**
**KURSI BO’YICHA TA’LIM TEXNOLOGIYASINING KONSEPTUAL ASOSLARI**

**MA’RUZA**

**AMALIYOT**

**MASHG’ULOTLARNI O’QITISH TEXNOLOGIYALARI**

**KLASTER TEXNOLOGIYASI**

**KUTISH YO’LDOSHI TEXNOLOGIYASI**

**INSERT TEXNOLOGIYASI**

**BBB TEXNOLOGIYASI**

**BUMERANG TEXNOLOGIYASI**

**ZIG-ZAG TEXNOLOGIYASI**

**SWOT TAHLIL TEXNOLOGIYASI**

**BLISS SO’ROV TEXNOLOGIYASI**

**GURUHLARDA ISHLASH USULI**

**AQLIY HUJUM USULI**

**SIKVEYN USULI**

**VENN DIAGRAMMASI**

Strategiya o’quvchi (talaba)larni mavzu xususida keng va har tomonlama fikr yuritish, o’z tasavvurlari, g’oyalaridan ijobiy foydalanishga doir ko’nikma, malakalarni hosil qilishga rag’batlantiradi. U yordamida tashkil etilgan mashg’ulotlarda ixtiyoriy muammolar yuzasidan bir necha orginal (o’ziga xos) yechimlarni topish imkoniyati tug’iladi. Strategiya mavzu doirasida ma’lum qarashlarni aniqlash, ularga muqobil g’oyalarni tanlash uchun sharoit yaratadi.

Mashg'ulotda strategiyani qo'llashda quyidagilarga e'tibor qaratish lozim:

O'quvchi (talaba)larni muammo doirasida keng fikr yuritishga undash, ular tomonidan mantiqiy fikrlarning bildirilishiga erishish

Har bir o'quvchi (talaba) tomonidan bildirilayotgan fikrlar rag'batlantirilib boriladi, bildirilgan fikrlar orasidan eng maqbullari tanlab olinadi; fikrlarning rag'batlantirilishi navbatdagi yangi fikrlarning tug'ilishiga olib keladi

Har bir o'quvchi (talaba) o'zining shaxsiy fikrlariga asoslanishi va ularni o'zgartirishi mumkin; avval bildirilgan fikrlarni umumlashtirish, turkumlashtirish yoki ularni o'zgartirish ilmiy asoslangan fikrlarning shakllanishiga zamin hozirlaydi

Mashg'ulotda o'quvchi (talaba)lar faoliyatini standart talablar asosida nazorat qilish, ular tomonidan bildiriladigan fikrlarni baholashga yo'l qo'yilmaydi (zero, fikrlar baholanib borilsa, o'quvchi (talaba)lar diqqatlarini shaxsiy fikrlarni himoya qilishga qaratadi, oqibatda yangi fikrlar ilgari surilmaydi; metodni qo'llashdan ko'zlangan asosiy maqsad o'quvchi (talaba)larni muammo bo'yicha keng fikr yuritishga undash ekanligini yodda tutib, ularni baholab borishdan voz kechishdir)

## "BILAMAN. BILISHNI HOHLAYMAN. BILIB OLDIM" (BBB) GRAFIK ORGANAYZERI

Grafik organayzer o'quvchi (talaba)larga muayyan mavzular bo'yicha bilimlari darajasini baholay olish imkonini beradi. Uni qo'llashda o'quvchi (talaba)lar guruh yoki jamoada ishlashlari mumkin. Guruhda ishlashda mashg'ulot yakunida guruhlar tomonidan bajarilgan ishlar tahlil qilinadi.

Guruhlar faoliyati quyidagi ko'rinishda tashkil etilishi mumkin:

Har bir guruh umumiy sxema asosida o'qituvchi tomonidan berilgan topshiriqlarni bajaradi; mashg'ulot yakunida loyiha bandlari bo'yicha guruhlarning munosabatlari umumlashtiriladi

Guruhlar umumiy sxemaning alohida bandlari bo'yicha o'qituvchi tomonidan berilgan topshiriqlarni bajarib, g'oyalarni umumlashtiradi

yok

quyidagi sxema asosida tashkil etiladi:

| Bilaman | Bilishni xohlayman | Bilib oldim |
|---|---|---|
| | | |
| | | |

**Grafik organayzerdan foydalanish uch bosqich asosida amalga oshiriladi:**

O'quvchilarning o'rganilishi rejalashtirilayotgan mavzu bo'yicha tushunchalarga egalik darajalari aniqlanadi

O'quvchilarning mavzu bo'yicha mavjud bilimlarini boyitishga bo'lgan ehtiyojlari o'rganiladi

O'quvchilar mavzuga oid ma'lumotlar bilan batafsil tanishtiriladi

## "BLIS-SO'ROV" METODI

"Blis-so'rov" (inglizcha "blis" – tezkor, bir zumda) metodi berilgan savollarga qisqa, aniq va lo'nda javob qaytarilishini taqozo etadigan metod sanaladi. Ta'lim muassasalarida ushbu metodga muvofiq savollar, asosan, o'qituvchi tomonidan beriladi. Berilgan savollarga javoblar jamoaviy, guruhli, juftlik yoki individual tarzda qaytarilishi mumkin. Javob qaytarish shakli mashg'ulot turi, o'rganilayotgan mavzuning murakkabligi, o'quvchi (talaba)larning qamrab olinishiga ko'ra belgilanadi.

Mashg'ulotlarda metodni qo'llash quyidagicha kechadi:

O'qituvchi o'rganilgan mavzu, muayyan tarkibiy qismlar mohiyatining ochib berilishini talab etadigan savollarni ishlab chiqib, o'quvchilar e'tiboriga havola qiladi

O'quvchi (talaba)lar berilgan savolga qisqa muddatda lo'nda, aniq javob beradi

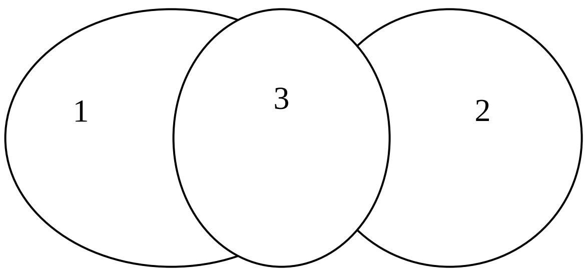
Guruh (juftlik)da ishlashda bir nafar o'quvchi berilgan savolga javob qaytaradi (uning guruhdoshlari javobni to'ldiradi, (biroq, fikrlar akrorlanmasligi lozim)

Metodni qo'llashda mavzuga doir tayanch tushunchalar, asosiy g'oyalarning mohiyati o'quvchi (talaba)lar tomonidan og'zaki, yozma yoki tasvir (jadval, diagramma) tarzida yoritilishi mumkin.

## "VENN DIAGRAMMASI" GRAFIK ORGANAYZERI

Grafik organayzer o'quvchi (talaba)larda mavzuga nisbatan tahliliy yondashuv, ayrim qismlar negizida mavzuning umumiy mohiyatini o'zlashtirish (sintezlash) ko'nikmalarini hosil qilishga yo'naltiriladi. U kichik guruhlarni shakllantirish asosida aniq sxema bo'yicha amalga oshiriladi.

Yozuv taxtasi o'zaro teng to'rt bo'lakka ajratiladi va har bir bo'lakka quyidagi sxema chiziladi:



Grafik organayzer o’quvchi (talaba)lar tomonidan o’zlashtirilgan o’zaro yaqin nazariy bilim, ma’lumot yoki dalillarni qiyosiy tahlil etishga yordam beradi. Undan muayyan bo’lim yoki boblar bo’yicha yakuniy darslarni tashkil etishda foydalanish yanada samaralidir.

Uni qo’llash bosqichlari quyidagilardan iborat:

O’quvchi (talaba)lar to’rt guruhga bo’linadi

Yozuv taxtasiga topshiriqni bajarish mohiyatini aks ettiruvchi sxema chiziladi

Har bir guruhga o’zlashtirilayotgan mavzu (bo’lim, bob) yuzasidan alohida topshiriqlar beriladi

Topshiriqlar bajarilgach, guruh a’zolari orasidan liderlar tanlanadi

Liderlar guruh a’zolari tomonidan bildirilgan fikrlarni umumlashtirib, yozuv taxtasida aks etgan diagrammani to’ldiradi

Grafik organayzerni qo’llash jarayonida har bir guruh muayyan mavzuga oid topshiriqlarni bajaradi. O’quvchi (talaba)larning e’tiborlariga quyidagi jadvalni taqdim etish mumkin:

## “DEBAT” METODI

“Debat” (fransuzcha “debattere” so’zidan olingan bo’lib, “debas” – “bahslashmoq”) texnologiyasi yig’ilish, majlis yoki mashg’ulotlarda biror-bir mavzu yuzasidan ishtirokchilar o’rtasida o’zaro bahs uyushtirish, ularning o’zaro fikr almashishlarini ta’minlashga xizmat qiladi.

O’quv mashg’ulotlarida debat quyidagi tartibda uyushtiriladi:

O’rganilayotgan mavzu yuzasidan bahs yuritilishi zarur bo’lgan muammo tanlanadi

Bahslashish uchun ikki nafar o’quvchi (talaba, guruh yoki juftlik) larning e’tiborlariga tanlangan muammo havola etiladi

Muammo yuzasidan alohida o’quvchi (talaba), guruh yoki juftliklar tomonidan bildiriladigan fikrlar tahlil qilinadi

Ekspertlarning fikrlari tinglanadi

Debatda bildirilgan fikrlar yuzasidan xulosa chiqariladi

Debat yakunlanadi

## “KLASTER” GRAFIK ORGANAYZERI

“Klaster” (g’uncha, to’plam, bog’lam) grafik organayzeri puxta o’ylangan strategiya bo’lib, uni o’quvchi (talaba)lar bilan yakka tartibda, guruh asosida tashkil etiladigan mashg’ulotlarda qo’llash mumkin. Klasterlar ilgari surilgan g’oyalarni umumlashtirish, ular o’rtasidagi aloqalarni topish imkoniyatini yaratadi. Grafik organayzer shartlari:

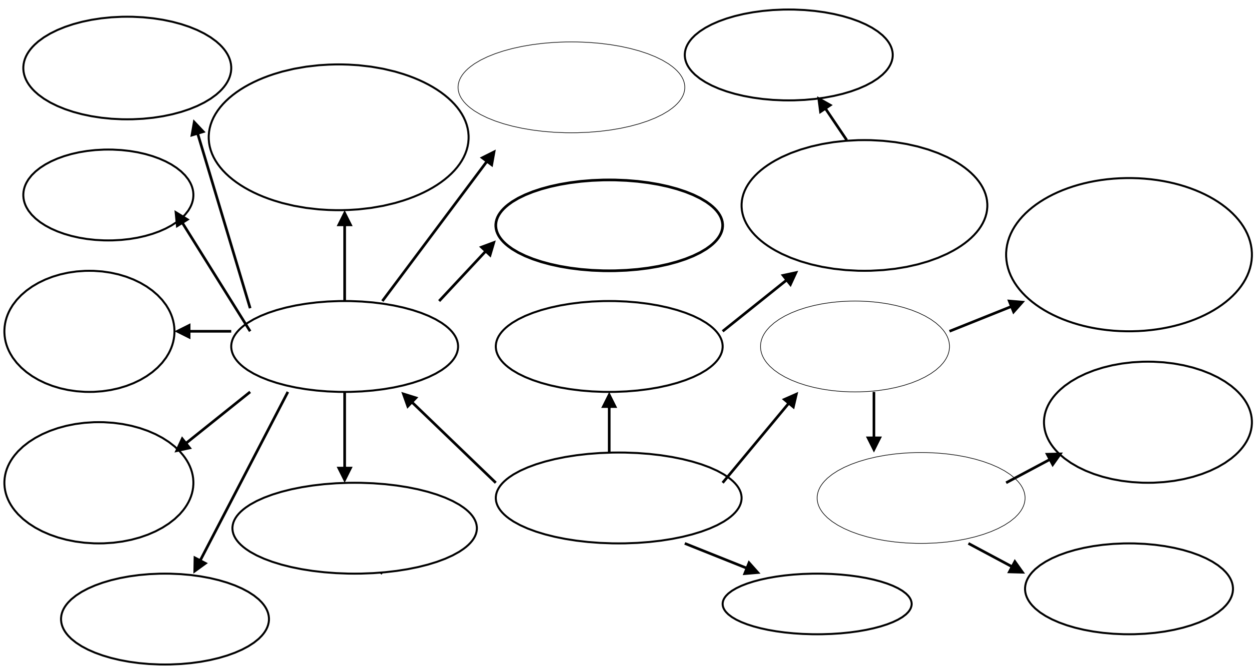
Nimani o’ylagan bo’lsangiz, uni qog’ozga yozing! Fikringizning sifati haqida o’ylab o’tirmay, shunchaki yozib boring!

Yozuvingizning orfografiyasi yoki boshqa jihatlariga e’tibor bermang!

Belgilangan vaqt nihoyasiga yetmagunicha, yozishdan to’xtamang! Agar ma’lum muddat o’ylay olmasangiz, u holda qog’ozga biror narsaning rasmini chiza boshlang! Bu harakatni yangi g’oya tug’ilguniga qadar davom ettiring!

**Grafik organayzer yordamida o’quvchi (talaba)lar topshiriq bo’yicha fikrlarini klaster (mayda, alohida qismlar) tarzida quyidagicha ifodalaydi:**

Muayyan tushuncha doirasida imkon qadar ko’proq yangi g’oyalarni ilgari surish, ular o’rtasidagi o’zaro aloqadorlik, bog’liqlikni ko’rsating!



## “NILUFAR GULI” TEXNOLOGIYaSI

Texnologiya didaktik muammolarni yechishning samarali vositalaridan bo’lib, nilufar guli ko’rinishiga ega. Asos, unga birikkan to’qqizta “gulbarg” (kvadrat, to’rtburchak yoki aylanalar)larni o’z ichiga oladigan bu metod yordamida asosiy muammo va uning mazmunini yoritishga imkon beradigan xususiy masalalar hal etiladi.

O’quvchilarda hal etilayotgan masala yuzasidan mantiqiy, izchil fikrlash, ichki mohiyatini tahlil qilish ko’nikmalarini shakllantiruvchi texnologiyani qo’llash quyidagi tartibda amalga oshiriladi:

Hal etiladigan masala aniqlashtiriladi

O’quvchilar topshiriq mazmuni va uni yechish shartlari bilan tanishtiriladi

O’quvchi (talaba)lar kichik guruh (yoki juftlik)larga biriktiriladi

Guruh yoki juftlik a’zolari markaziy to’rtburchak (kvadrat, aylana)da asosiy muammo (g’oya, vazifa)ni qayd etadi

Guruh (juftlik)lar masalaning yechimi yuzasidan fikr yuritib, markaziy to’rtburchak (kvadrat, aylana) atrofida sakkizta shunday qo’shimcha chizmalarni hosil qiladi (ularda masalaning xususiy yechimlari bayon etiladi)

Qo’shimcha chizmalardagi g’oyalar gulning “gulbarglari”ga, ya’ni shunday alohida majmuaga olib chiqadi (ularning har biri yana bir muammo ko’rinishini oladi)

Yordamchi chizmalardagi yetakchi muammo (g’oya, vazifa) atrofidagi “gulbarglar”da xususiy masala va yechimlar aks ettiriladi

O’rganilayotgan masalaning mohiyatidan kelib chiqib, bu jarayon bir necha bor takrorlanishi mumkin

Har bir guruh yoki juftliklar topshiriq yuzasidan o’z yechimlarini taqdimot tarzida bayon etadi

Guruhlarning yechimlari muhokama qilinib, eng to’g’ri variant aniqlanadi

O’qituvchi har bir guruh ishiga baho berib, mashg’ulotni yakunlaydi

## “SWOT-TAHLIL” STRATEGIYASI

Strategiya muammoning asosiy to’rt jihatini yoritishga xizmat qiladi. O’quvchilar mavzuning mazmuniga mos muammolarni atroflicha o’rganish orqali mohiyatini yoritadi, ularni keltirib chiqaruvchi omillarni izlab, hal qilish imkoniyatlarini topadi.

U yordamida muammoning quyidagi to’rt jihati tahlil qilinadi:

**S** ⇒ Kuchli (ustun) jihatlari **(**hal etilayotgan muammoning afzalliklarini yoritish)

**W** ⇒ Kuchsiz (zaif) jihatlari **(**maqsadga erishish yo’lida tashkil etilayotgan harakatlarga ichki omillarining ta’sirini o’rganish)

**O** ⇒ Imkoniyatlarni chamalash (belgilangan vazifalarni hal etishning eng maqbul yo’llarini izlash)

**T** ⇒ Tahdidni o’rganish **(**maqsadga erishish yo’lida tashkil etilayotgan harakatlarga tashqi omillarining ta’siri aniqlash)

Mashg’ulotlarda strategiyani qo’llash tartibi quyidagicha:

O’qituvchi o’quvchi (talaba)larni strategiyaning mohiyati bilan tanishtiradi

↓

O’qituvchi o’quvchi (talaba)larni kichik guruhlarga ajratadi

↓

Guruhlarga bir xil yoki bir necha xil muammoni hal etish topshirig’i beriladi

↓

Topshiriqni bajarish uchun vaqt hajmi (6-10 daqiqa) belgilanadi

↓

Guruhlar topshiriqni bajarishga kirishadi

↓

Belgilangan vaqt nihoyasiga yetgach, har bir guruhdan 1 nafar vakil guruh ishi bilan jamoani tanishtiradi

↓

Guruhlarning ishlari o’qituvchi va jamoa tomonidan muhokama qilinadi

↓

O’qituvchi jamoaning fikriga tayangan holda eng yaxshi ishni e’lon qiladi

↓

O’qituvchi har bir guruh ishiga baho berib, mashg’ulotni yakunlaydi

**Izoh:** strategiyani qo’llash muayyan qiyinchiliklarni keltirib chiqarish ehtimoli mavjud. Bunday hollarda o’qituvchi strategiyaning asosiy mohiyati yoki biror bosqichini o’quvchining yoshiga moslab, unga tushunarli so’zlar bilan ifodalashi (o’zgartirishi) mumkin. O’qituvchi tomonidan o’quvchi (talaba)larga strategiyaning mohiyati, afzalliklari haqida yetarlicha ma’lumot berilishi ular tomonidan hal etiladigan muammo mohiyatining to’la tushunilishini ta’minlash va kutilgan natijaga erishishga yordam beradi.

## “SINKVEYN” STRATEGIYASI

J.Still, K.Meredis, Ch.Temil tomonidan ishlab chiqilgan “O’qish va yozish asosida tanqidiy fikrlashni rivojlantirish dasturi”da har bir o’quvchi (talaba) va o’quvchi (talaba)lar guruhlarining fikrlash faolligini oshirish, ularda tanqidiy fikrlash qobiliyatini rivojlantirish uchun “Sinkveyn” strategiyasini qo’llash samarali ekanligi aytiladi.

Bu o’rinda strategiyaning mohiyati bilan tanishib o’tish maqsadga muvofiqdir.

**Sinkveyn** (fransuzcha “besh qator” ma’nosini anglatadi) ma’lumotlarni sintezlash (alohida ma’lumotlar asosida yaxlit g’oyalarni shakllantirish)ga yordam beradigan qofiyasiz she’r bo’lib, u asosida o’rganilayotgan mavzu (tushuncha, hodisa, voqyea)larga oid ma’lumotlar to’planadi; har bir o’quvchi (talaba) ushbu ma’lumotlar yig’indisi (qofiyasiz she’r)ni o’z so’zlari bilan turli variant yoki nuqtai nazarlar orqali ifodalash imkoniyatiga ega

**Sinkveyn tuzish** – murakkab g’oya, sezgi va hissiyotlarni bir necha so’z orqali yaqqol, yorqin ifodalash malakasi bo’lib, bu jarayon mavzuni puxtaroq o’zlashtirish, ma’lumotlarni yaxshiroq anglashga yordam beradi

Sinkveyn tuzish murakkab jarayon bo’lib, uni samarali tashkil etish uchun muayyan qoidalarga amal qilish talab etiladi. Odatda, sinkveyn tuzish besh bosqichli harakatlarni tashkil etish orqali amalga oshiriladi. Misol uchun:

1-bosqich — Mavzu bir so’z bilan ifodalanadi (odatda ot tanlanadi)

2-bosqich — Mavzu ikkita sifat bilan ifodalanadi (odatda 2 ta sifat tanlanadi)

3- bosqich — Mavzu doirasida tashkil etiladigan xatti-harakat uchta so’z bilan ifodalanadi (3 ta fe’l yoki ravishdosh yoziladi)

4- bosqich — Mavzuga nisbatan munosabatni anglatadigan to’rtta so’zdan iborat fikr yoziladi (4 ta so’zdan iborat jumla yoziladi)

5- bosqich — Mavzu mohiyatini takrorlovchi, ma’nosi unga yaqin bo’lgan bitta gap yoziladi (mavzuga doir sinonimlar asosida gap yoziladi)

Sinkveynlar quyidagi holatlarda samarali sanaladi:

| Murakkab axborotni sintezlashda | O’quvchi (talaba)larning bilimlarini baholashda | O’quvchi (talaba) tomonidan ijodiy ishlanmalarning taqdim etilishida |
|---|---|---|

Sinkveynlar samaralidir

**INSERT USULI**

**Grafik tashkil etuvchining turi, ahamiyati va xususiyatlari**

**“INSERT” jadvali**
Mustaqil o’qish vaqtida olgan ma’lumotlarni, eshitgan ma’ruzalarni tizimlashtirishni ta’minlaydi; olingan ma’lumotni tasdiqlash, aniqlash, chetga chiqish, kuzatish. Avval o’zlashtirgan ma’lumotlarni bog’lash qobiliyatini shakllantirishga yordam beradi.

**O’quv faoliyatini tashkillashtirishning jarayonli tuzilmasi**

Insert jadvalini to’ldirish qoidasi bilan tanishadilar. Alohida o’zlari to’ldiradilar.

O’qish jarayonida olingan ma’lumotlarni alohida o’zlari tizimlashtiradilar - jadval ustunlariga “kiritadilar” matnda belgilangan quyidagi belgilarga muvofiq:
“V”- men bilgan ma’lumotlarga mos;
“-“ - men bilgan ma’lumotlarga zid;

“+” - men uchun yangi ma’lumot;
“?” - men uchun tushunarsiz yoki ma’lumotni aniqlash, to’ldirish talab etiladi.

**« DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ » FANIDAN**

# TARQATMA MATERIALLAR

## Asosiy va qo’shimcha adabiyotlar


### Asosiy adabiyotlar:

1. Elliott Mendelson. Introduction to mathematical logic / Elliott Mendelson. 2010 by New York.
2. Seymour L., Marc Lipson, Discrete Mathematics 2007 by New York.
3. Мендельсон Э . Введение в математическую логику. М.: Наука. 1984
4. Яблонский С.В., Введение в дискретную математику. М: Наука, 1986

### *Qo’shimcha adabiyotlar*

1. To’rayev H.T., Diskret matematika va matematik mantiq (I-qism), Samarqand: SamDU nashr-matbaa markazi, 2000, 174 b.
2. To’rayev H.T., Diskret matematika va matematik mantiq (II-qism), Samarqand: SamDU nashr-matbaa markazi, 2001, 201 b.
3. Iskandarov R.I., Matematik logika yelementlari, Samarqand: SamDU, 1970, 324 b.
4. Mendelson E., Vvedeniye v matematicheskuyu logiku. M: Nauka, 1976, 320 s.
5. Malsev A.I., Algoritmы i rekursivnыye funksii. M: Nauka, 1965.
6. Gorbatov V.A. Osnovы diskretnoy matematiki. M: Vыsshaya shkola. 1986. –311 s. 1977, 367 s.
7. Ore O. Teoriya grafov. M: Nauka, 1980, 336 s.
8. I. V. Kuzmin, V. A. Kodrus. Osnovы teorii informasii i kodirovaniya. M. 1986, 367 s.

### *Internet manbalari*

1. http://dimacs.Rutgers.yedu/
2. http://yepubs.siam.org/sam-bin/dbq.toclist/SIDMA
3. http://www.uni-bonn.de/logic/world.html
4. http://www.vsppub.com/jornals/jn-DisMatapp.html
5. http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/
6. http://www.math.uu.se/logic-server/
7. http://dmoz.org/Sciyencye/Math/logic/

### Xorijiy manbalar (elektron resurslar)

http://alexqart.narod.ru/library - elektron kitoblar
http://andersen-cafe.ru/matematika/chislennye_metody – adabiyotlarning elektron varianti.
http://biblioteki.net - elektron kitoblar
http://bigor.bmstu.ru/ - elekton ma’ruzalar va kitoblar
http://book.invlad.ru/ - elektron kitoblar
http://bookfi.org/ - electron kutubxona
http://books.tr200.ru - electron kutubxona

http://bookzooka.com/book - elektron kitoblar
http://by-chgu.ru/category/mathematics - elektron kitoblar
http://cmm-ct.psu.ru - elektron kitoblar
http://cnit.ssau.ru/TechFEM/ - elektron kitoblar
http://comp-science.narod.ru - elektron kitoblar
http://crecs.ru/ru/ - hisoblash matematikasidan praktikum
http://dic.academic.ru/ - elektron kitoblar
http://dmvn.mexmat.net/prog.php - elektron kitoblar
http://dolivanov.ru/ - elektron kitoblar
http://eek.diary.ru/p178707231.htm – adabiyotlarning elektron varianti.
http://elib.bsu.by/- elektron kitoblar
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numerics.htm - elektron kitoblar
http://fast-const.ru/ - elektron kitoblar
http://kniga-free.ru - elektron kitoblar
http://komp-model.narod.ru/ - elektron kitoblar
http://mirknig.com/knigi/estesstv_nauki/ - elektron kitoblar
http://mmfd.nsu.ru - elektron kitoblar
http://mmph.narod.ru/ - elektron kitoblar
http://my.safaribooksonline.com/book/math-and-science/ - elektron kitoblar
http://pedagog-kniga.net/ - elektron kitoblar
http://pers.narod.ru/study/methods/
http://portfelchik.su/ - elektron kitoblar
http://pyrkova.fizteh.ru/educational/WMath/ - hisoblash matematikasidan elekton kitoblar
http://revolution.allbest.ru/mathematics - elektron kitoblar
http://ru.bookos.org - elektron kitoblar
http://ru.bookos.org – eng katta bepul elektron kitoblar kutubxonasi.
http://ru.wikipedia.org – erkin ensiklopediya «Vikipediya».
http://ru.wikiversity.org/wiki - elektron kitoblar ҳамда таянч тушунчалар манбаи
http://sdb.su/vich-mat/ - elektron kitoblar
http://stud.sci.pfu.edu.ru - elektron kitoblar
http://tehnick-8.narod.ru - elektron kitoblar
http://toe-rgr.ru - elektron kitoblar
http://umkd.volpi.ru/course/ - ma’ruzalar matni
http://www.4tivo.com/education - elektron kitoblar
http://www.bookshop.ua/ - elektron kitoblar
www.books.atrunet.ru - elektron kitoblar
http://www.crec.mipt.ru/prep/numlabs - laboratoriya ishlari
http://www.edu.ru – ta’lim sayti.
http://www.edu.uz – ta’lim sayti.
http://www.eqworld.ru – adabiyotlarning elektron varianti.
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numerics.htm - elektron kitoblar
http://www.exponenta.ru/ - elekton ma’ruzalar va kitoblar
http://www.ict.nsc.ru/matmod - elektron kitoblar
http://www.inm.ras.ru/library.htm - elektron kitoblar
http://www.intuit.ru – masofaviy ta’lim sayti.

http://www.kodges.ru - elektron kitoblar
www.math.msu.su - elektron kitoblar
http://www.mat.net.ua/mat - elektron kitoblar
http://www.myshared.ru - elektron kitoblar
http://www.ozon.ru/catalog/1140641/ - elektron kitoblar
http://www.ph4s.ru - elektron kitoblar
http://www.prepodu.net - referatlar
http://www.techgidravlika.ru – adabiyotlarning elektron varianti.
www.techno.edu.ru - elektron kitoblar
http://www.twirpx.com – adabiyotlarning elektron varianti.
http://www.uchites.ru/chislennye_metody/posobie - elektron leksiyalar
http://www.ziyonet.uz - adabiyotlarning elektron variantlari

***Adabiyotlar ro'yxati (yangi)***

1. Юнусов А.С. Математик мантик ва алгоритмлар назарияси элементлари, Т., 2003.
2. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физ.-мат. литература, 1995.
3. Тухтасинов М., Дискрет математика ва математик мантик.- Т., Университет, 2005.
4. Дискрет математика ва математик мантиқ(ўқув услубий мажмуа), Т., Университет, 2011
5. To'rayev H., Otaqulov S., Azizov I.Kombinatorika va graflar nazariyasi. O'quv qo'llanma. Toshkent:- Ziyokor нашриёти, 2009 .
6. To'rayev H., Urunbayev E. Математик мантиқ ва дискрет математика. СамДУ илмий услубий Кенгаши томонидан 27.06.2006 йиғилишида электрон дарслик сифатида тавсия этилган.
7. H.T. To'rayev. Azizov I. Diskret matematika va matematik mantiq, 1-jild. Toshkent: - Tafakur bo'stoni nashriyoti. 2011.
8. H.T. To'rayev. Azizov I. Diskret matematika va matematik mantiq, 2-jild. Toshkent: - Tafakur bo'stoni nashriyoti. 2011.

**«Diskret matematika va matemati mantiq » fanidan o'zbek tilida adabiyotlar ro'yxati**

1. Искандаров Р.И., Математик логика элементлари, Самарқанд: СамДУ, 1970, 324 б.
2. Ёқубов Т., Каллибеков С. Математик мантиқ элементлари. Тошкент, «Ўқитувчи», 1996
3. Тўраев Ҳ.Т., Математик мантиқ ва дискрет математика (1-қисм), Самарқанд: СамДУ нашр-матбаа маркази, 2000, 174 б.
4. Тўраев Ҳ.Т., Математик мантиқ ва дискрет математика (2-қисм), Самарқанд: СамДУ нашр-матбаа маркази, 2001, 201 б.
5. Юнусов А.С. Математик мантик ва алгоритмлар назарияси элементлари, Т., 2003.
6. Тўраев Ҳ.Т., Математик мантиқ ва дискрет математика, Тошкент: Ўқитувчи нашриёти, 2003, 378 б.

7. Тухтасинов М., Дискрет математика ва математик мантик.- Т., Университет, 2005.
8. Дискрет математика ва математик мантиқ(ўқув услубий мажмуа), Т., Университет, 2011
9. To'rayev H., Otaqulov S., Azizov I.Kombinatorika va graflar nazariyasi. O'quv qo'llanma. Toshkent:- Ziyokor нашриёти, 2009 .
10. To'rayev H., Urunbayev E. Математик мантиқ ва дискрет математика. СамДУ илмий услубий Кенгаши томонидан 27.06.2006 йиғилишида электрон дарслик сифатида тавсия этилган.
11. H.T. To'rayev. Azizov I. Diskret matematika va matematik mantiq, 1-jild. Toshkent: - Tafakur bo'stoni nashriyoti. 2011.
12. H.T. To'rayev. Azizov I. Diskret matematika va matematik mantiq, 2-jild. Toshkent: - Tafakur bo'stoni nashriyoti. 2011.

**« Diskret matematika va matematik mantiq » fani bo'yicha xorijiy adabiyotlar ro'yxati (rus tilida)**

1. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984
2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
3. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физ.-мат. литература, 1995.
4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. - М.: Наука. -1969.
5. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука, 1987.
6. Клини С. К. Математическая логика. М.: Мир, 1973
7. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. – *М.: Наука*, 1972.
8. Мальцев А. И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970.
9. Журавлёв Ю.И., Мазурик В.П., Столяров Л.Н. Элементы математической логики. М., Изд-во МФТИ, 1975.
10. Захарова Л. Е. Алгоритмы дискретной математики: Учебное пособие. М., Изд-во Московского государственного института электроники и математики, 2002.
11. Зыков А.А. Основы теории графов. М., «Наука», 1987.
12. Липский В. Комбинаторика для программистов. М., «Мир», 1988.
13. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. Санкт-Петербург, «Лань», 1999.
14. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. М., «Наука», 1990.
15. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. Саратов, Изд-во Саратовского университета, 1991.
16. Игошин В.И. Задачник-практикум по математической логике. М., «Просвещение», 1986.
17. Ф. А. Новиков. Дискретная математика для программистов. СПб, Питер, 2000,304 с.

18. Б. Н. Иванов. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Учебное пособие.-М.:Лаборатория Базовых Знаний, 2003, 288с

**Bilimni baholash tartibi va mezoni**

“Diskret matematika matematik mantiq” fani bo’yicha reyting jadvallari, nazorat turi, shakli, soni hamda har bir nazoratga ajratilgan maksimal ball, shuningdek joriy va oraliq nazoratlarining saralash ballari haqidagi ma’lumotlar fan bo’yicha birinchi mashg’ulotda talabalarga e’lon qilinadi.

Fan bo’yicha talabalarning bilim saviyasi va o’zlashtirish darajasining Davlat ta’lim standartlariga muvofiqligini ta’minlash uchun quyidagi nazorat turlari o’tkaziladi:

**joriy nazorat (JN)** – talabaning fan mavzulari bo’yicha bilim va amaliy ko’nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Joriy nazorat fanning xususiyatidan kelib chiqqan holda amaliy mashg’ulotlarda og’zaki so’rov, test o’tkazish, suhbat, nazorat ishi, kollekvium, uy vazifalarini tekshirish va shu kabi boshqa shakllarda o’tkazilishi mumkin;

**oraliq nazorat (ON)** – semestr davomida o’quv dasturining tegishli (fanlarning bir necha mavzularini o’z ichiga olgan) bo’limi tugallangandan keyin talabaning nazariy bilim va amaliy ko’nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Oraliq nazorat bir semestrda ikki marta o’tkaziladi va shakli (yozma, og’zaki, test va hokazo) o’quv faniga ajratilgan umumiy soatlar hajmidan kelib chiqqan holda belgilanadi;

**yakuniy nazorat (YaN)** – semestr yakunida muayyan fan bo’yicha nazariy bilim va amaliy ko’nikmalarni talabalar tomonidan o’zlashtirish darajasini baholash usuli. Yakuniy nazorat asosan tayanch tushuncha va iboralarga asoslangan “Yozma ish” shaklida o’tkaziladi. ***Nazorat topshiriqlari*** **(JN, ON, YaNlar bo’yicha savollar va testlar).**

## Joriy, oraliq va yakuniy nazorat uchun savollari.

1. Diskret matematika va matematik mantiq tarixi va uning asoslari.
2. Tarixiy ma’lumotlar.
3. Diskret matematika va matematik mantiqning umumiy tushunchalari va uning zamonaviy amaliy masalalarni yechishdagi o’rni.
4. Mulohaza. Mulohazalar ustida mantiqiy amallar.
5. Formulalar. Teng kuchli formulalar.
6. Aynan chin, aynan yolg’on va bajariluvchi formulalar.
7. Asosiy tengkuchliliklar. Teng kuchli formulalarga doir teoremalar.
8. Formulalarning normal shakllari. Diz’yunktiv va kon’yunktiv normal shakllar.
9. Mukammal kon’yunktiv va diz’yunktiv normal shakllar.
10. Formulalarning asosiy xossalari.
11. Tengkuchlimas formulalar soni. Bul algebrasi.
12. Mantiq algebrasidagi ikkitaraflamalik qonuni.
13. Mantiq algebrasidagi arifmetik amallar. Jegalkin ko’phadi.
14. Mantiq algebrasidagi monoton funksiyalar.

15. Funksiyalar sistemasining to'liqligi.
16. Funksional yopiq sinflar va Post teoremasi.
17. Matematik mantiqning diskret texnikaga tatbiqlari.
18. Funksional elementlar va ulardan sxemalar yasash.
19. Ko'ptaktli sxemalar. Rele – kontaktli sxemalar.
20. Kontaktli sxemalar va ularning sintezi.
21. Chekli avtomat haqida umumiy tushunchalar. Mili va Mur avtomatlari.

## DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ FANIDAN TEST TOPShIRIQLARI

| Qiyinlik darjasi | Test topshirig'i | To'g'ri javob | Muqobil javob | Muqobil javob | Muqobil javob |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | n ta o'zgaruvchiga bog'liq o'z-o'ziga qo'shma mantiqiy funksiyalar soni qancha ? | * $2^{2^n-1}$ | $2^{2n}$ | $2^{n+1}$ | $2^n$ |
| 1 | Tavtologiya bu-? | * Tarkibidagi elementar mulohazalarning mumkin bo'lgan barcha qiymatlar satrlarida faqat chin qiymat qabul qiluvchi formula tavtologiya deb ataladi. | Tarkibidagi elementar mulohazalarning mumkin bo'lgan barcha qiymatlar satrlarida faqat yolg`on qiymat qabul qiluvchi formula tavtologiya deb ataladi | Tarkibidagi elementar mulohazalarning mumkin bo'lgan barcha qiymatlar satrlarida ixtiyoriy qiymat qabul qiluvchi formula tavtologiya deb ataladi | Tarkibidagi elementar mulohazalarning mumkin bo'lgan barcha qiymatlar satrlarida chinlik jadvali simmetrik bo`lgan formula tavtologiya deb ataladi |
| 1 | A(x) va V(x) ixtiyoriy predikatlar bo'lsin. $A(x) \vee B(x)$ formulaga teng kuchli formulani aniqlang | * $\overline{A(x)} \to B(x)$ | $\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$ | $\overline{B(x)} \leftrightarrow A(x)$ | $\overline{\overline{A(x)} \wedge B(x)}$ |
| 2 | $M = \{1, 2, 3, ..., 20$ to'plamda quyidagi predikatlar berilgan: $A(x)$: «x 5 ga bo'linmaydi»; B(x): « $x$-juft son»; $D(x)$: « $x$ 3 ga karrali». $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x$ predikatning chinlik to'plamini toping. | * $\{6,12,18\}$. | $\{1,2,5,7,11,13,15,17,19\}$ | $\{1,2,4,5,6,7,8,9, 10,11,12,13, 14,15,16,17, 18,19,20\}$ | $\{1,2,5,7,11,13,17,19\}$ |
| 2 | $N_{f_1} = \{(0,0,0), (1,0,0), (1,0,1)\}$ | * $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,x_3$ | $(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge$ | $(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$ | $(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | qiymatlarida chin qiymat qabul qiladigan funksiyaning Takomil dizyunktiv normal shakl ko'rinishi aniqlang. | | $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$ | | |
| 3 | $N_{f_1} = \{(0,0,0),$ $(1,0,0),(1,0,1)\}$ to'plamga mos keladigan funksiyaning Takomil konyunktiv normal shakl ko'rinishi aniqlang. | * $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge$ $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge$ $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge$ $(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge$ $(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$ | $(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge$ $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge$ $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$ | $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee$ $x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3$ | $(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge$ $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$ |
| 3 | Chinlik to`plami $f(\widetilde{x}^3)$ =(01101000) ko`rinishida bo`lgan funksiyaning Jegalkin ko'phadini toping. | * $x \oplus y \oplus z \oplus x \wedge y \wedge z$ | 1 | 0 | $x \wedge y \wedge z \oplus x \wedge$ $y \oplus x \wedge z \oplus y \wedge$ $z \oplus y \oplus z$ |
| 3 | f(x,y,z)=$(x \to y)$ $\to$ $((x \vee z) \to (y \vee z))$ funksiyaning chinlik to'plamini aniqlang. | *aynan chin formula | f(x,y,z)=(0011011 1) | aynan yolg'on formula | f(x,y,z)=(001101 11) |
| 2 | B=$x \to (y \to z)$ fomulaga teng kuchli formulani aniqlang. | * $\overline{x} \vee \overline{y} \vee z$. | $(x \leftrightarrow y) \to z$ | aynan chin formula | aynan yolg'on formula |
| 3 | $A = x \vee (y \sim z)$, $B = (x \vee y) \sim (x \vee$ formulalar tengkuchlimi? | *teng kuchli | Teng kuchli emas | $\overline{A} = B$ | $A = \overline{B}$ |
| 3 | $f(\widetilde{x}^2)$ = $(x_1 \vee x_2) \to x_2$ funksiyaning soxta o'zgaruvchilarini aniqlang | *soxta o'zgaruvchi yo'q | $x_2$ o'zgaruvchi soxta | $x_3$ o'zgaruvchi soxta | $x_1$ va $x_2$ o'zgaruvchilar soxta |
| 3 | A= $x \,\&\, (y \sim z)$, B=$(x \,\&\, y) \sim$ $(x \,\&\, z)$ formulalar tengkuchlimi? | *Teng kuchli emas | Teng kuchli | $\overline{A} = B$ | $A = \overline{B}$ |
| 3 | Chinlik to`plami $f(\widetilde{x}^2)$ =(1001) ko`rinishda bo`lgan funksiyaning Jegalkin ko'phadini toping. | * $x_1 \oplus x_2 \oplus 1$ | $x \wedge y \oplus 1$ | 1 | 0 |
| 3 | $f(\widetilde{x}^3)$= $(x_1 \to (x_1 \vee x_2)) \to$ funksiyaning soxta o'zgaruvchilarini aniqlang. | *$x_1$ va $x_2$ o'zgaruvchilar soxta | soxta o'zgaruvchi yo'q | $x_2$ o'zgaruvchi soxta | $x_3$ o'zgaruvchi soxta |
| 2 | $f = x \oplus y$ funksiyaga qo'shma | * $g = x \sim y$ | $g = y \to x$ | $g = xy \oplus xz \oplus yz$ | $g = x \oplus y \oplus z$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | funksiyani aniqlang. | | | | |
| 3 | $f = xy \vee xz \vee yz$ ,<br>funksiyaga qo'shma funksiyani aniqlang. | * $g = xy \vee xz \vee yz$ | $g = \overline{y \to x}$ | $g = x \sim y$ | $g = x \oplus y \oplus z$ |
| 1 | Tyuring mashinasining $a_i q_j a_{ij} q_{ij} L$ komandasiga mos ta'rifni aniqlang. | *mashina $q_j$ holatda bo'lganda, lentada $a_i$ belgi bo'lsa: $a_i$ belgi $a_{ij}$ belgi bilan almashtiriladi, mashina $q_{jj}$ holatga o'tadi va lenta bo'ylab chap tomonga 1 yacheykaga suriladi | mashina $q_j$ holatda bo'lganda, lentada $a_i$ belgi bo'lsa: $a_i$ belgi $a_{ij}$ belgi bilan almashtiriladi, mashina $q_{jj}$ holatga o'tadi va lenta bo'ylab o'ng tomonga 1 yacheykaga suriladi | mashina $q_j$ holatda bo'lganda, lentada $a_i$ belgi bo'lsa: $a_i$ belgi $a_{ij}$ belgi bilan almashtiriladi, mashina $q_{jj}$ holatga o'tadi va lenta bo'ylab qo'zg'almaydi | to'g'ri javob ko'rsatilmagan. |
| 2 | f(x,y,z)=<br>$((x \oplus y) \sim z)(x \to$<br>funksiyaning chinlik to'plamini aniqlang. | *f(x,y,z)=(10010000) | aynan chin formula; | aynan yolg'on formula; | f(x,y,z)=(00110111); |
| 3 | Chinlik to`plami<br>$f(\tilde{x}^3)$<br>=(11111000) ko`rinishida bo`lgan funksiyaning Jegalkin ko'phadini toping. | *$x_1 x_2 x_3 + 1$ | $x \wedge y \oplus 1$ | 1 | 0 |
| 1 | Quyidagi jadvalda qanday mantiqiy amal ko'rsatilgan.<br>A V<br>---!---!---<br>1 ! 1 ! 1<br>1 ! 0 ! 0<br>0 ! 1 ! 0<br>0 ! 0 ! 0 | *A va V | A yoki V | A $\to$ V | A emas |
| 1 | A = rost, V = yolg'on, S = rost, D = yolg'on bo'lsa, quyidagi mantiqiy ifoda natijasini aniqlang.<br>____________________<br>______<br>((A /\ $\vee$<br>(C /\ ) /\ (A $\vee$ D) | *yozuvda xato bor | yolg'on | rost | bajariluvchi |
| 1 | n ta o'zgaruvchiga bog'liq $P_0$ sinfga tegishli mantiqiy funksiyalar soni qancha ? | * $2^{2^n - 1}$ | $2^{2n}$ | $2^{n+1}$ | $2^{n-1}$ |
| 1 | Qaysi javoblar satrida idempotentlik qonunlari keltirilgan | * $x \wedge x \equiv x$ ,<br>$x \vee x \equiv x$ | $x \vee \bar{x} \equiv$ ch | $x \wedge \bar{x} \equiv$ yo | $x \wedge (x \vee y) \equiv x$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | A(x) va B(x) ixtiyoriy predikatlar bo’lsin. $\overline{A(x)} \to \overline{B(x)}$ formulaga teng kuchli formulani aniqlang. | * $\overline{\overline{A(x)} \wedge B(x)}$ | $\overline{A(x)} \to B(x)$ | $\overline{B(x)} \to A(x)$ | $\overline{A(x) \wedge \overline{B(x)}}$ |
| 3 | $M = \{1, 2, 3, ..., 20$ to’plamda quyidagi predikatlar berilgan: $A(x)$: « $x$ 5 ga bo’linmaydi»; $C(x)$ : « $x$-tub son»; $D(x)$: « $x$ 3 ga karrali». $(A(x) \wedge C(x)) \to \overline{D}$ ; predikatning chinlik to’plamini toping. | * $\begin{Bmatrix} 1,2,4,5,6,7, \\ 8,9,10,11,12, \\ 13,14,15,16, \\ 17,18,19,20 \end{Bmatrix}$ | $\{1,2,5,7,11,13,15,17,19\}$ | $\{6,9,12,18\}$ | $\varnothing$ |
| 3 | n ta o’zgaruvchiga bog’liq $P_0 \cap P_1$ sinfga tegishli mantiqiy funksiyalar soni qancha? | * $2^{2^n-2}$ | $2^{2n}$ | $2^{n+1}$ | $2^{n-1}$ |
| 1 | Konyuktiv normal shakl bu-? | *Berilgan formulaning unga teng kuchli va elementar diz’yunksiyalarning kon’yunksiyalaridan tashkil topgan formula; | Berilgan formulaning unga teng kuchli va elementar kon’yunksiyalarning diz’yunksiyalaridan tashkil topgan formula; | Berilgan elementar mulohazalar (o‘zgaruvchilar) yoki ularning inkorlari kon’yunksiyalaridan tashkil topgan formula; | O‘zgaruvchilar yoki ularning inkorlari diz’yunksiyalaridan tashkil topgan formula; |
| 2 | A(x) va B(x) ixtiyoriy predikatlar bo’lsin. $A(x) \to B(x)$ formulaga teng kuchli formulani aniqlang. | * $\overline{A(x) \wedge \overline{B(x)}}$ | $\overline{A(x)} \to B(x)$ | $\overline{B(x)} \to A(x)$ | $\overline{\overline{A(x)}} \wedge B(x)$ |
| 3 | $M = \{1, 2, 3, ..., 20$ to’plamda quyidagi predikatlar berilgan: $C(x)$: « $x$ - tub son»; $D(x)$: « $x$ 3 ga karrali». $D(x) \to \overline{C}(x)$ predikatning chinlik to’plamini toping. | * $\begin{Bmatrix} 1,2,4,5,7,8,10, \\ 11,13,14,16, \\ 17,19,20 \end{Bmatrix}$ | $\{6,12,18\}$ | $\varnothing$ | M |
| 3 | $f(\tilde{x}^2) = (x_1 \oplus x_2)(x_1 \downarrow x_2)$ funksiyaning soxta o’zgaruvchilarini aniqlang. | *$x_1$ va $x_2$ o’zgaruvchilar soxta | soxta o’zgaruvchi yo’q; | $x_1$ o’zgaruvchi soxta; | $x_3$ o’zgaruvchi soxta; |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 1 | $f = x \to y$, funksiyaga qo'shma funksiyani aniqlang. | * $g = \overline{y \to x}$ | $g = xy \oplus xz \oplus yz$ | $g = x \oplus y \oplus z$ | $g = x \vee y$ |
| 1 | A= $x \to (y \sim z)$,B$=(x$ formulalar tengkuchlimi? | *Teng kuchli emas | Teng kuchli | $\overline{A} = B$ | $A = \overline{B}$ |
| 1 | Mantiq qonunlapi nima uchun ishlatiladi: | *Rostlik jadvalini tuzish uchun. | Masalalar yechish uchun. | Muloxazani bo'laklarga ajpatish uchun. | To'g'ri javob ko'rsatilmagan |
| 1 | A = rost, B = yolg'on, C = rost, D = yolg'on bo'lsa, quyidagi mantiqiy ifoda natijasini aniqlang. A&BVC&D | *yolg'on | To`g`ri javob keltirilmagan | rost | tavtologiya |
| 2 | n ta o'zgaruvchiga bog'liq $\{P_0 \vee P_1\}$ sinfga tegishli mantiqiy funksiyalar soni qancha? | * $2^{2^n-1}$ | $2^{2n}$ | $2^{n+1}$ | $2^{n-1}$ |
| 3 | Dizyunktiv normal shakl bu-? | *Berilgan formulaning unga teng kuchli va elementar kon'yunksiyalarning diz'yunksiyalaridan tashkil topgan formula; | Berilgan formulaning unga teng kuchli va elementar diz'yunksiyalarning kon'yunksiyalaridan tashkil topgan formula; | Berilgan elementar mulohazalar (o'zgaruvchilar) yoki ularning inkorlari kon'yunksiyalaridan tashkil topgan formula; | O'zgaruvchilar yoki ularning inkorlari diz'yunksiyalaridan tashkil topgan formula; |
| 3 | A(x) va B(x) ixtiyoriy predikatlar bo'lsin. $\overline{A(x)} \to \overline{B(x)}$ formulaga teng kuchli formulani aniqlang. | * $\overline{\overline{A(x)} \wedge B(x)}$ | $\overline{A(x)} \to B(x)$ | $\overline{B(x)} \to A(x)$ | $\overline{A(x) \wedge \overline{\overline{B(x)}}}$ |
| 3 | $M = \{1, 2, 3, ..., 20$ to'plamda quyidagi predikatlar berilgan: $A(x)$: « $x$ 5 ga bo'linmaydi»; $C(x)$: « $x$-tub son»; $D(x)$: « $x$ 3 ga karrali». $(A(x) \wedge C(x)) \to \overline{L}$ ; predikatning chinlik to'plamini toping. | * $\left\{\begin{matrix}1,2,4,5,6,7,8,9,\\10,11,12,13,14,\\15,16,17,18,19,20\end{matrix}\right\}$ | $\left\{\begin{matrix}1,2,5,7,11,13,\\15,17,19\end{matrix}\right\}$ | $\{6,9,12,18\}$ | $\varnothing$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | $N_{f_1} = \{(0,0,0),$ $(1,0,0),(1,0,1)\}$ to’plamga mos keladigan funksiyaning Takomil dizyunktiv normal shakl ko’rinishi aniqlang. | * $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee$ $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3$ | $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge$ $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge$ $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$ | $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge$ $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge$ $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge$ $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge$ $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$ | 0 |
| 3 | $N_{f_1} = \{(0,0,1),$ $(1,0,0),(1,0,1)\}$ to’plamga mos keladigan funksiyaning Takomil konyunktiv normal shakl ko’rinishi aniqlang. | $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge$ $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge$ $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge$ $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge$ * $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$ | $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge$ $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge$ $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$ | 0 | 1 |
| 2 | Quyidagi jadvalda qanday mantiqiy amal keltirilgan:<br>A V<br>---!---!---<br>1 ! 1 ! 0<br>1 ! 0 ! 1<br>0 ! 1 ! 1<br>0 ! 0 ! 1 | * $\bar{A} \vee \bar{B}$ | A $\rightarrow$ V | A | V |
| 3 | A= $x \rightarrow (y \sim z)$,B$=$(x formulalar teng kuchlimi? | *Teng kuchli emas | Teng kuchli | 0 | $\bar{A} \vee \bar{B}$ |
| 3 | f(x,y,z)= $(x \rightarrow y) \rightarrow$ $((x \vee z) \rightarrow (y \vee$ funksiyaning chinlik to’plamini aniqlang. | *aynan chin formula; | f(x,y,z)=(00110111); | aynan yolg’on formula; | 0 |
| 2 | U= $(x \rightarrow y) \rightarrow z)$ fomulaga teng kuchli formulani aniqlang. | * $x \wedge \bar{y} \vee z$ | aynan chin formula; | $(x \leftrightarrow y) \rightarrow z$ | $(x \rightarrow y) \leftrightarrow z$ |
| 3 | f(x,y,z)= $(x \rightarrow y) \oplus$ $((y \rightarrow z) \oplus (z$ - funksiyaning chinlik to’plamini aniqlang. | *f(x,y,z)=(10000001); | aynan yolg’on formula; | f(x,y,z)=(100000101); | f(x,y,z)=(100100001); |
| 3 | $f(\tilde{x}^3)$ =(11111000) funksiyaning Jegalkin ko’phadini toping. | *To`g`ri javob yo`q. | 0 | 1 | $(x \rightarrow y)$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 3 | Quyidagi jadvalda qanday mantiqiy amal keltirilgan:<br>A B<br>---!---!---<br>1 ! 1 ! 0<br>1 ! 0 ! 0<br>0 ! 1 ! 0<br>0 ! 0 ! 1 | * $\overline{A} \wedge \overline{B}$ | A | B | $\overline{A} \to \overline{B}$ |
| 3 | A= $x \& (y \sim z)$,<br>B= $(x \& y) \sim$<br>$(x \& z)$ formulalar tengkuchlimi? | *tengkuchli emas; | $\overline{A} = \overline{B}$ | $A = \overline{B}$ | $\overline{A} = B$ |
| 2 | $f = x \oplus y \oplus z$, funksiyaga qo'shma funksiyani aniqlang. | * $g = x \oplus y \oplus z$ | $g = y \to x$ | $g = xy \oplus xz \oplus yz$ | $g = x \vee y$ |
| 2 | $f(\tilde{x}^3)$ =(01101000) funksiyaning Jegalkin ko'phadini toping. | $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus$<br>* $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ | $x \wedge y \oplus 1$ | 1 | 0 |
| 3 | $f(\tilde{x}^2)$ =<br>$(x_1 \oplus x_2)$<br>$(x_1 \downarrow x_2)$<br>funksiyaning soxta o'zgaruvchilarini aniqlang. | *$x_1$ va $x_2$ o'zgaruvchilar soxta; | $x_1$ o'zgaruvchi soxta; | $x_3$ o'zgaruvchi soxta; | aniqlab bo'lmaydi. |
| 2 | $f = x \oplus y$ funksiyaga qo'shma funksiyani aniqlang. | * $g = x \sim y$ | $g = y \to x$ | $g = xy \oplus xz \oplus yz$ | $g = x \oplus y \oplus z$ |
| 1 | A = rost, B = yolg'on, C = rost, D = yolg'on bo'lsa, quyidagi mantiqiy ifoda natijasini aniqlang.<br>((A /\ B) \/ (C /\D ) | *rost | yolg'on | yozuvda xato bor | tavtologiya |
| 2 | $f(\tilde{x}^2)$ =(1001) funksiyaning Jegalkin ko'phadini toping. | * $x_1 \oplus x_2 \oplus 1$ | $x \wedge y \oplus 1$ | 0 | 1 |
| 3 | A = rost, B = yolg'on, C = rost, D = yolg'on bo'lsa, quyidagi mantiqiy | *rost | yolg'on | yozuvda xato bor | tavtologiya |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | ifoda natijasini aniqlang. $\overline{((A \wedge B) \vee (C \wedge B}$ $) \wedge (A \vee D)$ | | | | |
| 1 | $f = x \to y$, funksiyaga qo'shma funksiyani aniqlang. | * $g = \overline{y \to x}$ | $g = xy \oplus xz \oplus yz$ | $g = x \oplus y \oplus z$ | $g = x \vee y$ |
| 1 | A= $x \vee (y \sim z), B = (x$ $(x \vee z)$ formulalar tengkuchlimi? | *tengkuchli; | tengkuchli emas; | $\overline{A} = \overline{B}$ | $A = \overline{B}$ |
| 3 | $f = xy \vee xz \vee yz$, funksiyaga qo'shma funksiyani aniqlang. | * $g = xy \vee xz \vee yz$ | $g = \overline{y \to x}$ | $g = x \oplus y \oplus z$ | $g = x \vee y$ |
| 1 | $f(\tilde{x}^2) =$ $(x_1 \vee x_2) \to x_2$ funksiyaning soxta o'zgaruvchilarini aniqlang. | *soxta o'zgaruvchi yo'q; | $x_2$ o'zgaruvchi soxta; | $x_1$ va $x_2$ o'zgaruvchilar soxta; | aniqlab bo'lmaydi. |
| 3 | A(x) va B(x) ixtiyoriy predikatlar bo'lsin. $A(x) \to B(x)$ formulaga teng kuchli formulani aniqlang. | * $\overline{A(x) \wedge \overline{B(x)}}$ | $\overline{A(x)} \to B(x)$ | $\overline{B(x)} \to A(x)$ | $\overline{\overline{A(x)} \wedge B(x)}$ |

### *Ta'lim texnologiyalarining samaradorligiga oid tajribalar.*

"Diskret matematika va matematik mantiq" o'qitishda Klaster usulini qo'llash

Klasterlarga ajratish pedagogik strategiya bo'lib, u ko'p variantli fikrlashni o'rganilayotgan tushuncha (xodisa) lar o'rtasida aloqa o'rnatish malakalarini rivojlantirishda, biror mavzu talabalarni erkin va ochiqdan-ochiq fikrlashiga yordam beradi. «Klaster» so'zi g'uncha bog'lam ma'nosini anglatadi. Klasterlarga ajratishni da'vat, anglash va mulohaza qilish bosqichlaridagi fikrlashni uyg'otish, mavjud bilimlarga o'tib borish strategiyasi bo'lib, muayyan mavzu bo'yicha yangicha fikr yuritishga chorlaydi. Biror mavzu bo'yicha klasterlar tuzishni, bu mavzuni mukammal o'rganmasdan oldin foydalanish maqsadga muvofiq.

**Klasterlar tuzish ketma-ketligi.**

1.Auditoriya yozuv taxtasi o'rtasida katta qog'oz varag'iga asosiy so'z yoki gapni yozing.

2. Sizning fikringizcha bu mavzuga tegishli bo’lgan so’zlar yoki gaplarni yozing.

3. Tushuncha va g’oyalar to’g’risidagi o’zaro bog’lanishni o’rnating.

4. Eslagan variantlaringizni hammasini yozing.

Klaster tuzishda guruhlardagi barcha talabalarning ishtirok etishi, bu guruhda paydo bo’lgan g’oyalarning o’zagini aniqlashni ta’minlaydi.

Klaster tuzishni muayyan tushuncha yoki g’oyani “anglash” fazasida qo’llash maqsadga muvofiq bo’ladi. Chunki, bunda talaba o’quv materialini nafaqat mustaqil va faol o’zlashtirishi, balki o’z tushunchalarini ham kuzatib borishlari kerak. Asosiy tushuncha va munosabatlarning Klaster tarkibidagilar o’rtasidagi mumkin bo’lgan bog’lanishlarni aniqlash, variativ fikr yuritishni rivojlantiradi, uning “atrofiga” turlicha nazar tashlashga majbur etadi.

Diskret matematika va matematik mantiq fanining Statika qismidan ma’ruza va amaliy mashg’ulotlar borasida “Mulohaza tushunchasi. Rostlik jadvallari, mantiqiy natijalar” mavzusini tushuntirishda klasterlar tuzildi.

Diskret matematika va matematik mantiq fani “Mulohaza tushunchasi. Rostlik jadvallari, mantiqiy natijalar” mavzusida

**«Domino» metodini qo’llash**

Mavzu mazmuni

Domino metodi-ta’lim oluvchilarni faollashtirishga, mustaqil fikrlashga, hamda o’z fikrini boshqalarga yetkazib berib uni asoslab berishga qaratilgan.

Ushbu metod o’tilgan mavzularni takrorlash yoki biror bob tugaganda qo’llanilishi mumkin.

Metodning mavzuga qo’llash tartibi quyidagicha:

kichik guruhlarni rakamli kartochkalar yoki sanoq asosida shakllantirish;

tayyorlangan dominolarni xar bir guruhga tarqatish;

dominoni joylashtirish uchun vaqt ajratish;

xatolar ustida ishlash.

Domino metodini tayyorlash. Domino kichik guruhlarda bir xil beriladi. Dominoning bir tomoniga savol, ikkinchi tomoniga javob yozilgan bo’ladi. Ta’lim oluvchilar savollarga javob, javobni esa savolini boshqa kartochkalardan topib to’g’ri joylashtirishlari kerak.

Talabalarga tarqatiladigan dominoda keltirilgan savollarni va javovlarni o’rni almashtiriladi, ularni bugungi o’tilgan fanni takrorlash sifatida talabalar to’g’ri javoblarni topishlari kerak bo’ladi.

**“Domino” metodining afzalliklari:**

Ta’lim oluvchilarda mustaqil fikrlash qobiliyatlarini shakllanti radi;

Ta’lim oluvchilar birgalikda ishlash ko’nikmasi oshadi;

Bir-birini  eshitish va bir-biriga o’z fikrlarini asoslab berishni o’rganadi;

Ta’lim oluvchilar natijalarni tahlil qilishni o’rganadilar.

**Domino metodini amalga oshirish bosqichlari**

Ta’lim beruvchi tomonidan topshiriqlar ishlab chiqiladi

↓

Kichik guruhlar

↓ ↓ ↓ ↓

| 1-guruh | 2-guruh | 3-guruh | 4-guruh |
|---|---|---|---|

Kichik guruhlarda domino kartochkalarini tarqatish

↓

Kichik guruh ishtirokchilari berilgan kartochkalarning savoliga javob, javobiga esa savollar topib joylashtiradi

↓

Kichik guruh ishtirokchilari bajargan topshiriqlarni tekshirish va uchta o’rinni berish

↓

Bajarilgan vazifalar tekshiriladi

↓

Ta’lim beruvchi tomonidan xulosa qilinadi

Domino metodini o’quv jarayonida qo’llanilinishini o’quv jarayonini texnologik modeli va o’quv jarayonini texnologik xaritasida kiritiladi va talabalarga tushuntiriladi. Domino kartochkalarini talabalarga berilishidan oldin to’g’ri javoblar o’rni almashtiriladi va kartochkalar alohida qilib kesib chiqiladi.

**Domino kartochkalarini tuzish**

| | |
|---|---|
| ***Mulohazazalar*** | *Faqat chin yoki yolg’on qiymat qabul qila oladigan darak gaplarga ________________ deb aytamiz* |
| ***Kon’yunksiya amali*** | *“Va” bog’lovchisiga mos keluvchi mantiqiy amalga ____________ deb aytamiz. $x$ va $y$ mulohazazalarning kon’yunksiyasi $x$ va $y$ mulohazazalar chin bo’lgandagina chin qiymatni qabul qilib, qolgan hollarda esa, yolg’on qiymatni qabul qiladi* |
| ***Diz’yunksiya*** | *Rad etmaydigan ma’noda ishlatiladigan “yoki” mantiqiy amal __________________ (lotincha disjunctio - farq qilaman so’zidan) deyiladi. Ikkita $x$ va $y$ mulohazazaning diz’yunksiyasi “$x \vee y$” kabi yoziladi va “$x$ yoki $y$” deb uqiladi* |
| ***Implikasiyasi*** | *Ikki $x$ va $y$ mulohazazalarning ______________ deb shunday mulohazazaga aytiladiki, u faqat $x$ chin va $y$ yolg’on bo’lgandagina yolg’on bo’lib, qolgan hamma hollarda chindir* |
| ***Chin bo’ladi*** | *Murakkab mulohazaza $x \leftrightarrow y$ __________, agar $x$ va $y$ lar chin yoki $x$ va $y$ lar yolg’on bo’lsa, boshqa hollarda u yolg’ondir. Boshqacha qilib aytganda faqat va faqat $x$ va $y$ mulohazazalar bir xil qiymat qabul kilgandagina* |

| | |
|---|---|
| | $x \leftrightarrow y$ *chin bo'ladi* |
| **Idempotentlik qonuni** | $x \cdot x \equiv x, \quad x \vee x \equiv x$ berilgan tengkuchlilik qanday qnunga asoslanadi |
| ***Tavtologiya*** | *Elementar mulohazazalarning hamma qiymatlar satrlarida faqat chin qiymatni qabul qiluvchi formula aynan chin (doimo chin) formula yoki ___________________ deb ataladi va* $J$ *bilan belgilanadi* |
| ***Tavtologiya*** | *Agar* $A$ *va* $A \to B$ *aynan chin formulalar (tavtologiyalar) bo'lsa, u holda* $B$ *formula ham ______________bo'ladi* |
| ***Bajariluvchi formula*** | *Elementar mulohazazalarning kamida bitta qiymatlar satrida chin qiymat qabul qiluvchi va aynan chin bulmagan formulaga bajariluvchi formula deb aytiladi* |

Domino savollari soni juft bo'lishi va 10-12dan kam bo'lmasligi maqsadga muvofiqdir.

Domino kartochkalari bir xil o'lchamda tayyorlanib, javoblar o'rni almashtirilgandan so'ng kesib chiqiladi. Agar guruh 4ta guruhchalarga bo'linsa domino kartochkalari 4 nusxada tayyorlanadi. Guruxni guruhchalarga bo'lish uchun o'qituvchi oldindan tayyorlangan 1dan 4gacha sonlar yozilgan xar xil rangli kartochkalarni va konvertga solingan domino kartochkalarini tayyorlab keladi.

Bu usulni qo'llash orqali talabalar tomonidan bugungi mavzu qanday o'zlashtirilganligiga baho berishingiz mumkin bo'ladi.

**Ushbu usulni fanni aniq bir modulini tugatgandan so'ng ham, amaliy mashg'ulotlarda har bir guruhchalarga alohida domino kartochkalari tarqatilib talabalar bilimini baholash mumkin bo'ladi**

**Quyidagi formulalarning chinlik jadvallari tuzilsin:**

1. $((x \to \bar{y}) \vee (x \oplus z)) \cdot (y \mid z)$;
2. $((\bar{x} \cdot y) \downarrow (x \mid y)) \to (z \to \bar{y})$ ;
3. $\overline{(x \sim y) \vee (y \to z)} \downarrow ((x \oplus z) \vee y)$;
4. $\overline{\bar{x} \to y} \oplus ((x \to z) \sim y) \cdot z$;
5. $\overline{(x \vee \overline{y}) \to ((x \downarrow \bar{y}) \mid z)} \downarrow y$;
6. $\overline{(x \sim y) \to (\bar{x} \cdot \bar{z} \to y)} \to \bar{x} \cdot z$;
7. $(((x \downarrow y) \mid z) \mid x) \downarrow y$;
8. $((x \to y) \oplus (x \to y \cdot z)) \mid (x \downarrow y)$;

9. $(x_2 \to x_1) \cdot (x_2 \downarrow x_2)$;
10. $(x_1 \sim x_2) \cdot (x_1 \mid x_2)$;
11. $((x_1 \oplus x_2) \to x_3) \cdot (\overline{x_3 \to x_2})$;
12. $((x_1 \vee x_2) \to x_1 \sim x_3) \cdot x_1 \to (x_2 \vee x_3)$;

13. $((x_1 \vee x_2 \cdot x_3) \sim (\bar{x}_1 \to \bar{x}_2 \cdot x_3)) \cdot (x_2 \downarrow x_3)$;

14. $((x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \to (x_1 \cdot x_2 \mid x_3)) \oplus (x_2 \to x_1) \cdot x_3$

15. $(x_1 \to ((x_2 \to x_3) \to x_4)) \sim \bar{x}_1 \cdot (x_2 \to x_3) \cdot \bar{x}_4$;

16. $(x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_1 \cdot x_4) \to (x_1 \to (x_2 \to x_3))$;

17. $((x_1 x_2 \vee x_3 x_4) \cdot (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \to x_4) \oplus (x_1 x_2 (x_3 \to x_4) \vee x_3 x_4)$;

18. $((x_1 \mid x_2) \downarrow ((x_1 \mid x_4) \mid (x_3 \mid x_4))) \mid ((x_1 \mid x_3) \mid x_2)$;

19. $((x_1 \vee x_2) \to x_1 \cdot x_2) \oplus (x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_1)$;

20. $(x_1 \to ((x_2 \to x_1) \to x_2))) \sim (x_1 \vee x_2)$;

21. $(x_1 \oplus (x_2 \to (x_1 \sim x_2))) \vee (\overline{x_1 \to x_2})$;

22. $(x_1 \cdot x_2 \oplus (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \sim x_1 \cdot x_2)$;

23. $(\bar{x}_1 \cdot x_2 \to (\bar{x}_1 \to \bar{x}_2)) \to x_1 \cdot \bar{x}_2$;

24. $(x_1 \to x_2 \cdot x_3) \cdot (x_2 \to x_1 \cdot x_3) \vee (x_1 \sim x_2)$;

25. $(x_1 \to \bar{x}_2) \oplus (x_2 \to \bar{x}_3)) \oplus (x_2 \to x_3)$;

## Sinov savollari

1. Mulohazalar algebrasi deganda nimani tushunasiz?
2. Mulohaza nima?
3. Qanday mulohaza absolyut chin mulohaza deb ataladi?
4. Qanday mulohaza absolyut yolg‘on mulohaza deb ataladi?
5. O‘zgarmas mulohazalar qanday qiymatlar qabul qilishlari mumkin?
6. O‘zgaruvchi mulohazalar qanday qiymatlar qabul qilishlari mumkin?
7. Elementar va murakkab mulohaza tushunchlari bir-biridan nima bilan farq qiladi?
8. Mantiqiy amallar deganda nimani tushunasiz?
9. Nega mulohazalar algebrasi mulohazalar mantiqi deb ham yuritiladi?
10. Qiymatlar satri deganda nimani tushunasiz?
11. Chinlik jadvali nima?
12. Qaysi amallar asosiy mantiqiy amallar deb yuritiladi?
13. Mulohazaning inkori deganda nimani tushunasiz?
14. Kon’yunksiya amali qanday bajariladi?
15. Diz’yunksiya amaliga o‘zbek tilining qaysi bog‘lovchisi mos keladi?
16. Nima uchun implikatsiyasi amalini bajarganda operandlar o‘rinlari muhim hisoblanadi?
17. Implikatsiyasi amali uchun asos va oqibat tushunchalarini bilasizmi?
18. Mulohazalarning ekvivalensiyasi deganda nimani tushunasiz?
19. Sheffer amali qaysi amalga nisbatan teskari amal hisoblanadi?
20. Pirs amali qaysi amalga nisbatan teskari amal hisoblanadi?
21. Asosiy chinlik jadvallarini bilasizmi?

## Tengkuchliliklarni isbotlang.

1. $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;

2. $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;;

3. $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$;;

4. $xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y} \equiv x \to y$;

5. $x \to \bar{y} \equiv y \to \bar{x}$;

8. $x \to (y \to z) \equiv x \wedge y \to z$;

7. $x \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$);

8. $(x \vee y) \wedge (z \vee t) \equiv xz \vee yz \vee xt \vee yt$;

9. $xy \vee zt \equiv (x \vee z)(y \vee z)(x \vee t)(y \vee t)$;

10. $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \to y \equiv x_1 \to (x_2 \to (\ldots \to (x_n \to y)\ldots))$.

11. $x \vee y = (x \to y) \to y$;

12. $x \sim y = (x \to y) \cdot (y \to x)$;

13. $x \downarrow y = ((x \mid x) \mid (y \mid y)) \mid ((x \mid x) \mid (y \mid y))$;

14. $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;

15. $x(y \sim z) = ((xy) \sim (xz)) \sim x$;

16. $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;

17. $x \vee (y \to z) = (x \vee y) \to (x \vee z)$;

18. $x(y \to z) = (x \to y) \to (xz)$;

19. $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;

20. $x \to (yz) = (x \to y)(x \to z)$;

21. $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$;

***A*** va ***B*** formulalarning tengkuchli ekanligini isbotlang.

22. $A = (\bar{x} \to y) \to (\bar{x}y \sim (x \oplus y)), \quad B = (\overline{xy} \to y) \to y$;

23. $A = (xy \vee (\bar{x} \to yz)) \sim ((\bar{x} \to \bar{y}) \to z), \quad B = (x \to y) \oplus (y \oplus z)$;

24. $A = (x \oplus y \cdot z) \to (\bar{x} \to (y \to z)), \quad B = x \to ((y \to z) \to x)$;

25. $A = (x \to (\bar{y} \to (x \sim z))) \cdot (x \sim (y \to (z \vee (x \to y)))), \quad B = (x \to (y \to z)) \to x$;

**Quyidagi formulalar soddalashtirilsin:**

1. $((x_1 \oplus x_2) \sim x_3) \cdot (\overline{x_3 \to x_2})$;

2. $((x_1 \vee x_2) \to x_1 \sim x_3) \cdot x_1 \to (x_2 \otimes x_3)$;

3. $((x_1 \vee x_2 \cdot x_3) \sim (\bar{x}_1 \to \bar{x}_2 \cdot x_3)) \cdot (x_2 \sim x_3)$;

4. $((x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \sim (x_1 \cdot x_2 \mid x_3)) \oplus (x_2 \to x_1) \cdot x_3$

5. $(x_1 \to ((x_2 \oplus x_3) \to x_4)) \sim \bar{x}_1 \cdot (x_2 \to x_3) \cdot \bar{x}_4$;

6. $(x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_1 \cdot x_4) \to (x_1 \to (x_2 \vee x_3))$;

7. $((x_1 x_2 \vee x_3 x_4) \cdot (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \to x_4) \oplus (x_1 x_2 (x_3 \sim x_4) \vee x_3 x_4)$;

8. $((x_1 \mid x_2) \downarrow ((x_1 \vee x_4) \mid (x_3 \vee x_4))) \mid ((x_1 \mid x_3) \mid x_2)$;

9. $((x_1 \vee x_2) \to x_1 \cdot x_2) \oplus (x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \sim x_1)$;

10. $(x_1 \to ((x_2 \sim x_1) \to x_2))) \sim (x_1 \vee x_2)$;

11. $((x \to \bar{y}) \vee (x \sim z)) \cdot (y \mid z)$;

12. $((\bar{x} \cdot y) \sim (x \mid y)) \to (z \to \bar{y})$;

13. $\overline{(x \Leftrightarrow y) \vee (y \to z)} \downarrow ((x \sim z) \vee y)$ ;

14. $\overline{\bar{\bar{x}} \to y} \sim ((x \to z) \sim y) \cdot z$;

15. $\overline{(x \vee \overline{y}) \sim ((x \downarrow \bar{y}) \mid z)} \downarrow y$;

16. $\overline{(x \sim y) \sim (\bar{x} \cdot \bar{z} \to y)} \to \bar{x} \cdot z$;

17. $(((x \downarrow y) \mid z) \to x) \downarrow y$ ;

18. $((x \to y) \sim (x \to y \cdot z)) \mid (x \downarrow y)$;

19. $(x_2 \sim x_1) \cdot (x_2 \oplus x_2)$;

20. $(x_1 \oplus x_2) \sim (x_1 \mid x_2)$;

21. $((x_1 \to x_2 \to \bar{x}_3) \downarrow (x_1 \cdot x_2 \to x_3)) \to (x_2 \sim x_1) \cdot x_3$

22. $(x_1 \vee ((x_2 \sim x_3) \downarrow x_4)) \sim \bar{x}_1 \cdot (x_2 \oplus x_3) \downarrow \bar{x}_4$;

23. $(x_1 \to \bar{x}_2 \oplus x_3) \cdot (x_2 \vee x_1 \cdot x_4) \sim (x_1 \to (x_2 \oplus x_3))$;

24. $((x_1 \vee x_2 \Leftrightarrow x_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \to x_2 \vee x_3) \to x_4) \to x_3 x_4$;

25. $((x_1 \mid x_2) \oplus ((x_1 \mid x_4) \mid (x_3 \sim x_4))) \mid x_2$;

## Sinov savollari

1. Formula tushunchasiga intiutiv ravishda qanday ta'rif beriladi?
2. Formula tushunchasiga matematik induksiya usuliga tayangan holda qat'iy ta'rif qanday beriladi?
3. Elementar formula deganda nimani tushunasiz?
4. Qavslarsiz ketma-ket yozilgan mantiqiy amallarni bajarish imtiyozlarini bilasizmi?
5. Qavslar haqidagi kelishuvga ko'ra qanday qoidalarga amal qilinadi?

6. Teng kuchli formulalar deganda nimani tushunasiz?
7. Qanday holda formulalar teng kuchlimas bo‘lishadi?
8. Odatda berilgan formulalarning teng kuchli yoki teng kuchlimas bo‘lishini aniqlashda qaysi usuldan foydalaniladi?
9. Mantiqiy ifoda nima?
10. Ekvivalensiya bilan teng kuchlilik orasida qanday o‘xshashlik va farqlarni bilasiz?

**Quyida berilgan variantlardagi formulalarning DNSh, KNSh, mukammal DNSh va KNSh larini hosil qiling.**

1. $(x \vee y) \to z$;
2. $(x \to y) \otimes (x \mid yz)$;
3. $(x \to yzt)(z \to x\overline{y})$;
4. $(x \oplus y)(z \to \overline{y}t)$;
5. $xy \oplus z$;
6. $x \downarrow y$;
7. $xy \oplus z$;
8. $(x \vee y \vee z)t \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z})$;
9. $x \to (y \to zt)$;
10. $\overline{x\,\overline{y} \to \overline{z}}$;
11. $(x \mid y)\overline{z})$;
12. $xy \sim (y \sim \overline{z})$;
13. $(x \vee \overline{y} \vee z)\overline{t} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z})$;
14. $x \to ((yz \to t) \to \overline{y})$;
15. $((x \mid y) \downarrow z) \mid (y \downarrow t)$;
16. $(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})(xy \vee z)$;
17. $(\overline{x}y \oplus z)(xz \to y)$;
18. $(x \sim y) \vee (x\,z \oplus (y \to z))$;
19. $(x \downarrow yz) \downarrow ((\overline{x} \mid y) \downarrow z)$;
20. $\overline{x \to (y \to z)} \oplus (x \mid (y \oplus z))$;
21. $\overline{x\overline{y} \vee z} \sim (x \to y\overline{z})$;
22. $(x \vee y\overline{z})(x\overline{y} \vee z)(\overline{xy} \vee z)$;
23. $(x \vee y\,\overline{z}\,\overline{t})((\overline{x} \vee t) \oplus yz) \vee \overline{y}(z \vee \overline{x\overline{t}})$;
24. $(x \to y)(y \to \overline{z})(z \to x\overline{t})$;
25. $(x \downarrow y)((y \mid z) \vee x\overline{t})(x \downarrow (z \mid t))$;

## Sinov savollari

1. Formulalarning normal shakllarini o‘rganish jarayonida qaysi teng kuchliliklardan foydalaniladi?
2. Elementar kon’yunksiya va elementar diz’yunksiya deganda nimani tushunasiz?
3. Formulaning kon’yunktiv normal shakli bilan uning diz’yunktiv normal shakli tushunchalari orasida qanday o‘xshashlik va farq bor?
4. DNShning kon’yunktiv hadi ifodasida bir xil o‘zgaruvchilar bo‘lishi mumkinmi?
5. KNShning diz’yunktiv hadi qanday aniqlanadi?
6. Mantiq algebrasining berilgan formulasi KNShga qanday keltiriladi?
7. Mantiq algebrasining formulasi tavtologiya bo‘lishi uchun qanday zarur va yetarli shartlar bor?
8. Mantiq algebrasining qanday formulasini DNShga keltirish mumkin?
9. Mantiq algebrasining formulasi doimo yolg‘on bo‘lishi uchun qanday zarur va yetarli shartlar bor?
10. Yechilish muammosi qanday shartlarda ijobiy hal bo‘ladi?
11. To‘g‘ri elementar kon’yunksiya va to‘g‘ri elementar diz’yunksiya deganda nimalarni tushunasiz?
12. Berilgan elementar kon’yunksiya (diz’yunksiya) to‘liq elementar kon’yunksiya (diz’yunksiya) bo‘lishi uchun qanday shartlar bajarilishi kerak?
13. Formulaning mukammal kon’yunktiv normal shakli deganda nimani tushunasiz?
14. Formulaning diz’yunktiv normal shakli bilan uning mukammal diz’yunktiv normal shakli orasida qanday farq bor?
15. Qanday vaziyatda mantiqiy formulani MKNShga keltirish algoritmini qo‘llash mumkin?
16. Formulani MKNShga keltirish jarayonida agar qandaydir elementar diz’yunksiya ifodasida biror o‘zgaruvchi bir necha marta qatnashgan (barcha hollarda yo inkor ishorasi ostida yoki barcha hollarda inkor ishorasi ostida emas) bo‘lsa, u holda nima qilinadi?
17. Formulani MKNShga keltirish jarayonida agar elementar diz’yunksiya ifodasida biror o‘zgaruvchi yoki uning inkori topilmasa, uholda bu o‘zgaruvchini formulaning tarkibiga qanday qilib kiritish mumkin?
18. Nima uchun formulani MKNShga keltirish algoritmining 3- bandida agar KNSh ifodasidagi barcha elementar diz’yunksiyalar to‘g‘ri elementar diz’yunksiyalar bo‘lsa, u holda algoritmning 6- bandiga o‘tilmasdan uning 4- bandiga o‘tiladi?
19. Qanday qilib berilgan formulaning inkori uchun aniqlangan MKNShdan uning MDNShi topiladi?
20. To‘liq MKNSh va to‘liq MDNSh deganda nimani tushunasiz?

## Quyidagi funksiyalar o’z – o’ziga ikkitaraflamami, aniqlang.

1. $((x \to \bar{y}) \vee (x \oplus z)) \cdot (y \mid z)$;
2. $((\bar{x} \cdot y) \downarrow (x \mid y)) \to (z \to \bar{y})$;
3. $\overline{(x \sim y) \vee (y \to z)} \downarrow ((x \oplus z) \vee y)$;

4. $\overline{\bar{x} \to y} \oplus ((x \to z) \sim y) \cdot z$;

5. $\overline{(x \vee \overline{y}) \to ((x \downarrow \bar{y}) \mid z)} \downarrow y$;

6. $\overline{(x \sim y) \to (\bar{x} \cdot \bar{z} \to y)} \to \bar{x} \cdot z$;

7. $(((x \downarrow y) \mid z) \mid x) \downarrow y$;

8. $((x \to y) \oplus (x \to y \cdot z)) \mid (x \downarrow y)$;

9. $(x_2 \to x_1) \cdot (x_2 \downarrow x_2)$;

10. $(x_1 \sim x_2) \cdot (x_1 \mid x_2)$;

11. $((x_1 \oplus x_2) \to x_3) \cdot \overline{(x_3 \to x_2)}$;

12. $((x_1 \vee x_2) \to x_1 \sim x_3) \cdot x_1 \to (x_2 \vee x_3)$;

13. $((x_1 \vee x_2 \cdot x_3) \sim (\bar{x}_1 \to \bar{x}_2 \cdot x_3)) \cdot (x_2 \downarrow x_3)$;

14. $((x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \to (x_1 \cdot x_2 \mid x_3)) \oplus (x_2 \to x_1) \cdot x_3$

15. $(x_1 \to ((x_2 \to x_3) \to x_4)) \sim \bar{x}_1 \cdot (x_2 \to x_3) \cdot \bar{x}_4$;

16. $(x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_1 \cdot x_4) \to (x_1 \to (x_2 \to x_3))$;

17. $((x_1 x_2 \vee x_3 x_4) \cdot (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \to x_4) \oplus (x_1 x_2 (x_3 \to x_4) \vee x_3 x_4)$;

18. $((x_1 \mid x_2) \downarrow ((x_1 \mid x_4) \mid (x_3 \mid x_4))) \mid ((x_1 \mid x_3) \mid x_2)$;

19. $((x_1 \vee x_2) \to x_1 \cdot x_2) \oplus (x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_1)$;

20. $(x_1 \to ((x_2 \to x_1) \to x_2))) \sim (x_1 \vee x_2)$;

21. $(x_1 \oplus (x_2 \to (x_1 \sim x_2))) \vee \overline{(x_1 \to x_2)}$;

22. $(x_1 \cdot x_2 \oplus (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \sim x_1 \cdot x_2)$;

23. $(\bar{x}_1 \cdot x_2 \to (\bar{x}_1 \to \bar{x}_2)) \to x_1 \cdot \bar{x}_2$;

24. $(x_1 \to x_2 \cdot x_3) \cdot (x_2 \to x_1 \cdot x_3) \vee (x_1 \sim x_2)$;

25. $(x_1 \to \bar{x}_2) \oplus (x_2 \to \bar{x}_3)) \oplus (x_2 \to x_3)$;

## Sinov savollari

1. Mulohazalar algebrasining asosiy elementar funksiyalariga ikki taraflama bo‘lgan funksiyalarni toping.
2. Hamma ikki argumentli o‘z-o‘ziga ikki taraflama bo‘lgan funksiyalarni toping.
3. $n$ ta argumentli o‘z-o‘ziga ikki taraflama bo‘lgan funksiyalarning sonini aniqlang.
4. $f = (\bar{x} \vee y\bar{z})(xy \vee x\bar{z})$ va $\varphi = (x \vee \bar{y})z\bar{t} \vee \bar{x}t$ funksiyalarga ikki taraflama bo‘lgan funksiyalarni toping.

**Quyidagi funksiyalarni chiziqlikka tekshiring.**

1. $((x \,\&\, y) \sim (x \,\&\, z)) \sim x$;
2. $(x \to y) \to (x \,\&\, z)$;
3. $(y \vee z) \to (x \to y) \vee (x \to z)$;

4. $(y \& z) \vee (x \to y) \& (x \to z)$;

5. $(y \to z) \sim (x \to y) \to (x \to z)$;

6. $(\bar{x} \to y) \to (\bar{x}z \sim (x \oplus y))$ ;

7. $(\overline{xy} \to y) \to (y \oplus z)$;

8. $(xy \vee (\bar{x} \to yz)) \sim ((\bar{x} \to \bar{y}) \to z)$,

9. $(x \to y) \oplus (y \oplus z) \to y$;

10. $(x \oplus y \cdot z) \to (\bar{x} \to (y \to z))$,

11. $x \to ((y \sim z) \to x)$;

12. $(x \to (\bar{y} \to (x \sim z))) \cdot (x \sim (y \to z \to y))$,

13. $(\bar{x} \vee \bar{y}z) \to ((x \to y) \to ((y \vee z) \to \bar{x}))$,

14. $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x}) \sim (z \to x)$;

15. $(x\bar{y} \sim \bar{x}z) \oplus ((y \to z) \to \bar{x}y)$,

16. $(x \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z}) \oplus y) \oplus z$;

17. $x \to ((\bar{x} \cdot \bar{y} \to (\bar{x} \cdot \bar{z} \to y)) \to y)z$,

18. $(z \to y \to x) \vee \overline{x \cdot (y \to \bar{z})}$;

19. $\overline{(x \sim y) \to (x \to \bar{z})} \vee (x \oplus \bar{y}z)$,

20. $(y \to x) \sim (z \to y)$;

21. $\overline{(x \vee \bar{y} \cdot \bar{z}) \cdot (\bar{x} \to \bar{y}z)} \cdot (x \to (y \sim z))$,

22. $((x \to y) \sim (y \to (x \to z))) \oplus x \cdot (y \cdot z)$;

23. $\overline{((x \vee y) \to y \cdot z) \vee (y \to x \cdot z)} \vee (x \to (\bar{y} \to z))$,

24. $(x \to y) \oplus ((y \to z) \to xy)$,

25. $(x \vee \bar{y}) \downarrow (\bar{x} \to (y \to z))$,

**Quyidagi funksiyalar chiziqlimi, aniqlang:**

1. $((x_1 \oplus x_2) \sim x_3) \cdot (\overline{x_3 \to x_2})$;

2. $((x_1 \vee x_2) \to x_1 \sim x_3) \cdot x_1 \to (x_2 \otimes x_3)$;

3. $((x_1 \vee x_2 \cdot x_3) \sim (\bar{x}_1 \to \bar{x}_2 \cdot x_3)) \cdot (x_2 \sim x_3)$;

4. $((x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \sim (x_1 \cdot x_2 \mid x_3)) \oplus (x_2 \to x_1) \cdot x_3$

5. $(x_1 \to ((x_2 \oplus x_3) \to x_4)) \sim \bar{x}_1 \cdot (x_2 \to x_3) \cdot \bar{x}_4$;

6. $(x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_1 \cdot x_4) \to (x_1 \to (x_2 \vee x_3))$;

7. $((x_1x_2 \vee x_3x_4) \cdot (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \to x_4) \oplus (x_1x_2(x_3 \sim x_4) \vee x_3x_4)$;

8. $((x_1 \mid x_2) \downarrow ((x_1 \vee x_4) \mid (x_3 \vee x_4))) \mid ((x_1 \mid x_3) \mid x_2)$;

9. $((x_1 \vee x_2) \to x_1 \cdot x_2) \oplus (x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \sim x_1)$;

10. $(x_1 \to ((x_2 \sim x_1) \to x_2))) \sim (x_1 \vee x_2)$;

11. $((x \to \overline{y}) \vee (x \sim z)) \cdot (y \mid z)$;

12. $((\overline{x} \cdot y) \sim (x \mid y)) \to (z \to \overline{y})$;

13. $\overline{(x \Leftrightarrow y) \vee (y \to z)} \downarrow ((x \sim z) \vee y)$ ;

14. $\overline{\overline{x} \to y} \sim ((x \to z) \sim y) \cdot z$ ;

15. $\overline{(x \vee \overline{y}) \sim ((x \downarrow \overline{y}) \mid z)} \downarrow y$;

16. $\overline{(x \sim y) \sim (\overline{x} \cdot \overline{z} \to y)} \to \overline{x} \cdot z$ ;

17. $(((x \downarrow y) \mid z) \to x) \downarrow y$ ;

18. $((x \to y) \sim (x \to y \cdot z)) \mid (x \downarrow y)$;

19. $(x_2 \sim x_1) \cdot (x_2 \oplus x_2)$;

20. $(x_1 \oplus x_2) \sim (x_1 \mid x_2)$;

21. $((x_1 \to x_2 \to \overline{x}_3) \downarrow (x_1 \cdot x_2 \to x_3)) \to (x_2 \sim x_1) \cdot x_3$

22. $(x_1 \vee ((x_2 \sim x_3) \downarrow x_4)) \sim \overline{x}_1 \cdot (x_2 \oplus x_3) \downarrow \overline{x}_4$ ;

23. $(x_1 \to \overline{x}_2 \oplus x_3) \cdot (x_2 \vee x_1 \cdot x_4) \sim (x_1 \to (x_2 \oplus x_3))$;

24. $((x_1 \vee x_2 \Leftrightarrow x_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \to x_2 \vee x_3) \to x_4) \to x_3 x_4$;

25. $((x_1 \mid x_2) \oplus ((x_1 \mid x_4) \mid (x_3 \sim x_4))) \mid x_2$ ;

## Sinov savollari

1. Mantiq algebrasidagi chiziqli funksiyalar deganda nimani tushunchasiz?
2. Chiziqli funksiyalarning qaysilari monoton funksiyalar bo‘ladi?
3. Mantiq algebrasidagi arifmetik amallarni bilasizmi?
4. Jegalkin ko‘phadi nima?

**Quyida berilgan funksiyalar sinfining to’liqligini Post jadvali yordamida tekshiring;**

1. $F$=**{** $(x \vee y) \to z$ ; $(x \to y) \otimes (x \mid yz)$ ; $(x \to yzt)(z \to x\overline{y})$ ; **},**
2. $F$=**{** $(x \oplus y)(z \to \overline{y}t)$ ; $xy \oplus z$ ; $(x_1 \to \overline{x}_2) \oplus (x_2 \to \overline{x}_3)) \sim (x_2 \to x_3)$**},**
3. $F$=**{**$(x_1 \to x_2 \cdot x_3) \vee (x_2 \to x_1 \cdot x_3) \vee (x_1 \sim x_2)$ $(x \vee y \vee z)t \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z})$ ;
   $x \to (y \to zt)$ ; **},**
4. $F$=**{** $\overline{x\overline{y} \to \overline{z}}$ ; $((x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \to (x_1 \vee x_2 \mid x_3)) \oplus (x_2 \to x_1) \cdot x_3$ $xy \sim (y \sim \overline{z})$ ; **},**
5. $F$=**{**$(x \vee \overline{y} \vee z)\overline{t} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z})$ ; $x \to ((yz \to t) \to \overline{y})$ ; $((x \mid y) \downarrow z) \mid (y \downarrow t)$ ; **},**
6. $F$=**{**$(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})(xy \vee z)$ ; $(\overline{x}y \oplus z)(xz \to y)$ ; $(x \sim y) \vee (xz \oplus (y \to z))$ ; **},**

7. $F$={ $(x\downarrow yz)\downarrow((\bar{x}\mid y)\downarrow z)$; $\overline{x\to(y\to z)}\oplus(x\mid(y\oplus z))$; $\overline{x\bar{y}\vee z}\sim(x\to y\bar{z})$;
},

8. $F$={ $(x\vee y\bar{z})(x\bar{y}\vee z)(\overline{xy}\vee z)$; $(x\vee y\bar{z}\,\bar{t})((\bar{x}\vee t)\oplus yz)\vee\bar{y}(z\vee\overline{x\bar{t}})$;
$(x\to y)(y\to\bar{z})(z\to x\bar{t})$;},

9. $F$={ $(x\downarrow y)((y\mid z)\vee x\bar{t})(x\downarrow(z\mid t))$; $((x\to y)\oplus(\bar{x}\mid y))(x\sim y(x\to y))$;
$\overline{xy}\vee(x\downarrow(y\vee(\bar{x}\to y)))$;},

10. $F$={ $x\bar{y}\vee\bar{y}z\vee(x\to yz)$; $(\bar{x}\to(y\to z))\oplus x\bar{y}z$; $(x\sim(y\to z))\vee(y\to xz)$;},

11. $F$={$(x\sim y)\vee(xz\to t)\vee y\bar{z}$; $((x_1\to x_2)\to x_1\sim x_3)\cdot x_1\to(x_2\vee x_3)$;
$((x_1\vee x_2\cdot x_3)\sim(\bar{x}_1\to\bar{x}_2\cdot x_3))\cdot(x_2\vee x_3)$; },

12. $F$={$((x_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)\to(x_1\vee x_2\mid x_3))\oplus(x_2\to x_1)\cdot x_3$;
$(x_1\to(x_2\to x_3))\sim\bar{x}_1\cdot(x_2\to x_3)$; $xy\sim(y\sim\bar{z})$;},

13. $F$={$(x_1x_2\vee x_3x_4)\cdot(x_1\oplus x_2\oplus x_3)\to x_4$; $(x\oplus y)(z\to\bar{y}t)$;
$((x_1\mid x_2)\vee((x_1\mid x_4)\vee(x_3\mid x_4)))\mid((x_1\vee x_3)\mid x_2)$;},

14. $F$={$((x_1\vee x_2)\to x_1\cdot x_2)\oplus(x_1\to x_2)\cdot(x_2\vee x_1)$;
$(x_1\to((x_2\vee x_1)\to x_2)))\sim(x_1\vee x_2)$; $(x\oplus y)(z\to\bar{y}t)$;},

15. $F$={$(x_1\oplus(x_2\to(x_1\sim x_2)))\vee(x_1\to x_2)$; $(x_1\cdot x_2\oplus(x_1\vee x_2))\to(x_1\sim x_1\cdot x_2)$;
$(x\mid y)\bar{z}$;},

16. $F$={$(\bar{x}_1\cdot x_2\to(\bar{x}_1\sim\bar{x}_2))\to x_1\cdot\bar{x}_2$; $(x_1\to x_2\cdot x_3)\vee(x_2\to x_1\cdot x_3)\vee(x_1\sim x_2)$;
$x\downarrow y$;},

17. $F$={$(x_1\to\bar{x}_2)\oplus(x_2\to\bar{x}_3))\sim(x_2\to x_3)$; $(x_2\to x_1)\cdot(x_2\downarrow x_2)$;
$((x_1\vee x_2\cdot\bar{x}_3)\to(x_2\to x_1\cdot x_3))\sim(x_1\vee x_3)$; },

18. $F$={ $((x_1\vee(x_2\mid x_3))\vee(x_2\mid(x_1\vee x_3)))\downarrow(x_1\vee x_2)$;
$(x_1x_2\oplus x_3x_4)\vee((x_1\cdot x_3\sim x_2)\to x_4)\vee\bar{x}_1x_3$; $(((x\downarrow y)\mid z)\mid x)\downarrow y$;},

19. $F$={$((x_1\sim x_2)\to x_1\sim x_3)\cdot x_1\to(x_2\vee x_3)$;
$(x_1\to x_2\cdot x_3)\sim(x_2\to x_1\cdot x_3)\sim(x_1\vee x_2)$; $(x\mid y)\bar{z}$; },

20. $F$={ $\overline{(x\vee\overline{\bar{y}})\to((x\downarrow\bar{y})\mid z)}\downarrow y$; $\overline{(x\sim y)\to(\bar{x}\cdot\bar{z}\to y)}\to\bar{x}\cdot z$;
$(x_2\to x_1)\cdot(x_2\downarrow x_2)$; },

21. $F$={ $(((x\downarrow y)\mid z)\mid x)\downarrow y$; $((x\to y)\oplus(x\to y\cdot z))\mid(x\downarrow y)$;
$(x_2\to x_1)\cdot(x_2\downarrow x_2)$; },

22. $F$={$(x_1\sim x_2)\cdot(x_1\mid x_2)$; $((x_1\oplus x_2)\to x_3)\cdot(\overline{x_3\to x_2})$;
$((x_1\vee x_2)\to x_1\sim x_3)\cdot x_1\to(x_2\vee x_3)$; },

23. $F$= $((x_1\vee x_2\cdot x_3)\sim(\bar{x}_1\to\bar{x}_2\cdot x_3))\cdot(x_2\downarrow x_3)$; $(((x\downarrow y)\mid z)\mid x)\downarrow y$;
$((x_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)\to(x_1\cdot x_2\mid x_3))\oplus(x_2\to x_1)\cdot x_3$},

24. $F$={ $((x \& y) \sim (x \& z)) \sim x$; $(x \to y) \to (x \& z)$;
$(y \vee z) \to (x \to y) \vee (x \to z)$; },

25. $F$={ $(y \& z) \vee (x \to y) \& (x \to z)$; $(y \to z) \sim (x \to y) \to (x \to z)$;
$(\bar{x} \to y) \to (\bar{x}z \sim (x \oplus y))$ ;},

**Sinov savollari**

1. To‘liq funksiyalar sistemasi deb nimaga aytiladi?
2. Funksional yopiq sinflar va xususiy funksional yopiq sinflar bir-biridan nima bilan farq qilishadi?
3. Maksimal funksional yopiq sinf nima?
4. Post teoremasi qanday isbotlanadi?
5. Post teoremasining natijasini bilasizmi?
6. To‘plam yopig‘i deganda nimani tushunasiz?
7. Post jadvalidan qanday foydalanish mumkin?

**Quyida berilgan variantlardagi formulalarni soddalashtiring va $\varphi_1 = \bar{a}, \quad \varphi_2 = a \vee b, \quad \varphi_3 = a \wedge b$ larga mos funksional sxema tuzing.**

1. $(x \vee y) \to z$;
2. $(x \to y) \otimes (x \mid yz)$;
3. $(x \to yzt)(z \to x\bar{y})$;
4. $(x \oplus y)(z \to \bar{y}t)$;
5. $xy \oplus z$;
6. $x \downarrow y$;
7. $xy \oplus z$;
8. $(x \vee y \vee z)t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z})$;
9. $x \to (y \to zt)$;
10. $\overline{x\bar{y} \to \bar{z}}$;
11. $(x \mid y)\bar{z})$;
12. $xy \sim (y \sim \bar{z})$;
13. $(x \vee \bar{y} \vee z)\bar{t} \vee \bar{x}\, y\, \bar{z})$;
14. $x \to ((yz \to t) \to \bar{y})$;
15. $((x \mid y) \downarrow z) \mid (y \downarrow t)$;
16. $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(xy \vee z)$;
17. $(\bar{x}y \oplus z)(xz \to y)$;
18. $(x \sim y) \vee (xz \oplus (y \to z))$;
19. $(x \downarrow yz) \downarrow ((\bar{x} \mid y) \downarrow z)$;

20. $\overline{x \to (y \to z)} \oplus (x \mid (y \oplus z))$;

21. $\overline{x\overline{y} \vee z} \sim (x \to y\overline{z})$;

22. $(x \vee y\overline{z})(x\overline{y} \vee z)(\overline{xy} \vee z)$;

23. $(x \vee y\overline{z}\,\overline{t})((\overline{x} \vee t) \oplus yz) \vee \overline{y}(z \vee \overline{x\overline{t}})$;

24. $(x \to y)(y \to \overline{z})(z \to x\overline{t})$;

25. $(x \downarrow y)((y \mid z) \vee x\overline{t})(x \downarrow (z \mid t))$;

**Sinov savollari**

1. Funksional elementlar va ulardan sxemalar yasashni bilasizmi?
2. Sxema matematik induksiya metodi vositasida qanday ta’riflanadi?
3. Funksional elementlar sistemasining to‘liqligi haqidagi teoremani bilasizmi?
4. Sikl deb nimaga aytiladi?
5. Ushlab turish vaqti va ushlab turish elementi deganda nimani tushunasiz?
6. Kontaktlarni parallel va ketma-ket ulashga qanday funksiya mos qo‘yiladi?
7. O‘tkazuvchanlik funksiyasi nima?
8. Muhim zanjir va $P$-sxemalar haqida nima bilasiz?
9. Minimal sxema nima?

**Quyida berilgan variantlardagi formulalarning minimal DNSh larini hosil qiling.**

1. $(x \vee y) \to z$;

2. $(x \to y) \otimes (x \mid yz)$;

3. $(x \to yzt)(z \to x\overline{y})$;

4. $(x \oplus y)(z \to \overline{y}t)$;

5. $xy \oplus z$;

6. $x \downarrow y$;

7. $xy \oplus z$;

8. $(x \vee y \vee z)t \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z})$;

9. $x \to (y \to zt)$;

10. $\overline{x\overline{y} \to \overline{z}}$;

11. $(x \mid y)\overline{z})$;

12. $xy \sim (y \sim \overline{z})$;

13. $(x \vee \overline{y} \vee z)\overline{t} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z})$;

14. $x \to ((yz \to t) \to \overline{y})$;

15. $((x \mid y) \downarrow z) \mid (y \downarrow t)$;

16. $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(xy \vee z)$;

17. $(\bar{x}y \oplus z)(xz \to y)$;

18. $(x \sim y) \vee (xz \oplus (y \to z))$;

19. $(x \downarrow yz) \downarrow ((\bar{x} \mid y) \downarrow z)$;

20. $\overline{x \to (y \to z)} \oplus (x \mid (y \oplus z))$;

21. $\overline{x\bar{y} \vee z} \sim (x \to y\bar{z})$;

22. $(x \vee y\bar{z})(x\bar{y} \vee z)(\overline{xy} \vee z)$;

23. $(x \vee y\bar{z}\bar{t})((\bar{x} \vee t) \oplus yz) \vee \bar{y}(z \vee \overline{x\bar{t}})$;

24. $(x \to y)(y \to \bar{z})(z \to x\bar{t})$;

25. $(x \downarrow y)((y \mid z) \vee x\bar{t})(x \downarrow (z \mid t))$;

## Sinov savollari

1. Fiktiv o'zgruvchi qanday aniqlanadi?
2. Qisqartirilgan diz'yunktiv normal shakl deganda nimani tushunasiz?
3. Funksiyani qisqartirilgan diz'yunktiv normal shaklga keltirish algoritmini bilasizmi?

## Quyidagi formulalar uchun takomil DNSh tuzing.

1. $((x_1 \oplus x_2) \sim x_3) \cdot (\overline{x_3 \to x_2})$;

2. $((x_1 \vee x_2) \to x_1 \sim x_3) \cdot x_1 \to (x_2 \otimes x_3)$;

3. $((x_1 \vee x_2 \cdot x_3) \sim (\bar{x}_1 \to \bar{x}_2 \cdot x_3)) \cdot (x_2 \sim x_3)$;

4. $((x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \sim (x_1 \cdot x_2 \mid x_3)) \oplus (x_2 \to x_1) \cdot x_3$

5. $(x_1 \to ((x_2 \oplus x_3) \to x_4)) \sim \bar{x}_1 \cdot (x_2 \to x_3) \cdot \bar{x}_4$;

6. $(x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_1 \cdot x_4) \to (x_1 \to (x_2 \vee x_3))$;

7. $((x_1x_2 \vee x_3x_4) \cdot (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \to x_4) \oplus (x_1x_2(x_3 \sim x_4) \vee x_3x_4)$;

8. $((x_1 \mid x_2) \downarrow ((x_1 \vee x_4) \mid (x_3 \vee x_4))) \mid ((x_1 \mid x_3) \mid x_2)$;

9. $((x_1 \vee x_2) \to x_1 \cdot x_2) \oplus (x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \sim x_1)$;

10. $(x_1 \to ((x_2 \sim x_1) \to x_2))) \sim (x_1 \vee x_2)$;

11. $((x \to \bar{y}) \vee (x \sim z)) \cdot (y \mid z)$;

12. $((\bar{x} \cdot y) \sim (x \mid y)) \to (z \to \bar{y})$;

13. $\overline{(x \Leftrightarrow y) \vee (y \to z)} \downarrow ((x \sim z) \vee y)$;

14. $\overline{\bar{x} \to y} \sim ((x \to z) \sim y) \cdot z$;

15. $\overline{(x \vee \overline{y}) \sim ((x \downarrow \overline{y}) \mid z)} \downarrow y$;

16. $\overline{(x \sim y) \sim (\overline{x} \cdot \overline{z} \to y)} \to \overline{x} \cdot z$;

17. $(((x \downarrow y) \mid z) \to x) \downarrow y$;

18. $((x \to y) \sim (x \to y \cdot z)) \mid (x \downarrow y)$;

19. $(x_2 \sim x_1) \cdot (x_2 \oplus x_2)$;

20. $(x_1 \oplus x_2) \sim (x_1 \mid x_2)$;

21. $((x_1 \to x_2 \to \overline{x}_3) \downarrow (x_1 \cdot x_2 \to x_3)) \to (x_2 \sim x_1) \cdot x_3$

22. $(x_1 \vee ((x_2 \sim x_3) \downarrow x_4)) \sim \overline{x}_1 \cdot (x_2 \oplus x_3) \downarrow \overline{x}_4$;

23. $(x_1 \to \overline{x}_2 \oplus x_3) \cdot (x_2 \vee x_1 \cdot x_4) \sim (x_1 \to (x_2 \oplus x_3))$;

24. $((x_1 \vee x_2 \Leftrightarrow x_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \to x_2 \vee x_3) \to x_4) \to x_3 x_4$;

25. $((x_1 \mid x_2) \oplus ((x_1 \mid x_4) \mid (x_3 \sim x_4))) \mid x_2$;

## Sinov savollari

1. Tupikli diz'yunktiv normal shaklga keltirish algoritmini bilasizmi?
2. Keltirilmaydigan qoplamalar deganda nimani tushunasiz?
3. Qisqartililgan, tupikli va minimal DNShlar orasida qanday munosabatlar bor?
4. Tupikli DNShlar yasashni qanday soddalashtirish mumkin?

**Quyidagi formulaning chinlik to'plamini tuzing:**

$$A(x) \wedge B(x) \to C(x)$$

**Ushbu formula quyidagi predikatlar asosida berilgan:**

1. $A(x):\ 3+4x \geq 5;\quad B(x):\ 0{,}25^{x} \geq 0{,}5^{4x-8};\quad C(\mathrm{x}):\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$

2. $A(x):\ 2x - 3(x-1) > -1;\quad B(x):\ 2^{\sqrt{x}-1}(4x^2 - 4x + 1) > 0;$

   $C(\mathrm{x}):\ \sin^2 x - \dfrac{5}{2}\sin x + 1 < 1;$

3. $A(x):\ (x+1)^2 > (x+2)^2;\quad B(x):\ \left(\sqrt{6}\right)^x \leq \dfrac{1}{36};\quad C(\mathrm{x}):\ 2\sin 2x \geq ctg\,\dfrac{\pi}{4};$

4. $A(x):\ 7x+3 \geq 9x-1;\quad B(x):\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{20-2x} > 1,\quad C(\mathrm{x}):\ \sin x \cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{4};$

5. $A(x):\ 7x+3 \geq 9x-1;\quad B(x):\ 2^{3-6x} > 1,$

$C(\mathrm{x}):\ \sin 5x \cos 4x + \cos 5x \sin 4x > \dfrac{1}{2};$

6. $A(x):\ 20x-3x\ge 4x-15;\ \ B(x):\ \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\dfrac{4x-1}{4x+8}<0,$

$C(\mathrm{x}):\ 1-2\sin 4x<\cos^2 4x;$

7. $A(x):\ x^2+x+1\ge 0;\ \ B(\mathrm{x}):\ \log_{x-1}(4x+5)<0;\ \ C(\mathrm{x}):\ \sin 4x>-\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

8. $A(x):\ 3x-4(x-7)\ge 16-3x;\ \ B(x):\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{20-2x}>1;\ \ C(\mathrm{x}):\ 2\sin x\ge\sqrt{2};$

9. $A(x):\ 2+3(x-1)\le 4x+3;\ \ B(x):\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1}>\dfrac{1}{16},$

$C(\mathrm{x}):\ \cos^2 x-\dfrac{5}{2}\cos x+1>0;$

10. $A(x):\ 5x-2\ge 2x+1;\ \ B(x):\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{20-2x}>1,\ \ C(\mathrm{x}):\ \cos^2 x-\dfrac{5}{2}\cos x+1\le 0;$

11. $A(x):\ 2x+3\le 18-3x;\ \ B(x):\ 3^{8x}-4\cdot 3^{4x}\le -3,$

$C(\mathrm{x}):\ \cos^2 x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sin^2 x;$

12. $A(x):\ 4(x-3)-3>8x+1;\ \ B(x):\ 3^{\frac{1}{x+1}}>9,\ \ C(\mathrm{x}):\ 1-2\cos 2x>\sin^2 2x;$

13. $A(x):\ 2+x(x+3)\le (x+2)^2+5;\ \ B(x):\ (0,7)^{2+4+..+2n}>(0,7)^{72},$

$C(\mathrm{x}):\ \cos 2x\le -\dfrac{1}{2};$

14. $A(x):\ 5x-2\ge 2x+1;\ \ B(x):\ 9^{-x}-28\cdot 3^{-x-1}+3<0,$

$C(\mathrm{x}):\ \sin^2 3x-\cos^2 3x\le -\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

15. $A(x):\ 2x^2-5x+2>0,\ \ B(x):\ 3^{|x|+2}\le 81,\ \ C(\mathrm{x}):\ \sin 4x>\dfrac{1}{2};$

16. $A(x):\ x-\dfrac{2x-8}{5}\ge 1-2x,\ \ B(x):\ 0,5^{x^2-4}>0,5^{3x},\ \ C(\mathrm{x}):\ 4\cos^2 x-3\ge 0;$

17. $A(x):\ (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)\ge 120,\ \ B(x):\ 5^{\frac{1}{x}}+5^{\frac{1}{x}+2}>130,$

$C(\mathrm{x}):\ \cos 5x\cos 4x+\sin 5x\sin 4x<\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

18. $A(x):\ (x+\dfrac{1}{x})^2-2(x+\dfrac{1}{x})-3\ge 0,\ \ B(x):\ 3^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}+3}>84,$

$C(\mathrm{x}):\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos x>0;$

19. $A(x):\ 1+\dfrac{2x^2-5x+3}{(10x-5)(x-1)}<0,\quad B(x):\ 4^x-5\cdot 3^{x+1}+16\le 0,$

$C(\text{x}):\ \sin x<\cos x;$

20. $A(x):\ 2+\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}\le -2{,}5,\quad B(x):\ \dfrac{1}{8}2^{4x-2}>\left(\sqrt{2}\right)^{10},$

$C(\text{x}):\ tg(x+\frac{\pi}{4})\ge 1;$

21. $A(x):\ \dfrac{2}{3-x}+\dfrac{1}{2}>\dfrac{6}{x(3-x)},\quad B(x):\ 3^{3x-2}+3^{3x+1}-3^{3x}<57,$

$C(\text{x}):\ \sin 2x<\cos 2x;$

22. $A(x):\ \dfrac{2}{x-3}\le\dfrac{x+5}{x^2-9},\quad B(x):\ 3^{x+2}+3^{x+3}\le 972,\quad C(\text{x}):\ 2^{\frac{1}{2}}\le 2^{\sin x};$

23. $A(x):\ x^4-(\sqrt{5}+\sqrt{3})x^2+\sqrt{15}<0,\quad B(x):\ \log_{0,5}(x+5)^4>\log_{0,5}(3x-1)^4,$

$C(\text{x}):\ \cos(\sin x)<0;$

24. $A(x):\ \dfrac{3x^2+8x-3}{x+3}\ge x^2-x+2,\quad B(x):\ \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\dfrac{4x-1}{4x+8}<0,$

$C(\text{x}):\ \sin x>\sqrt{3}\cos x;$

25. $A(x):\ \dfrac{x+8}{3}>x-\dfrac{x-3}{x},\quad B(x):\ \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x-5)+2\log_{\sqrt{3}}(x-5)<4,$

$C(\text{x}):\ \sqrt{\cos^2 x-\cos x+\dfrac{1}{4}}\ge\dfrac{1}{2};$

**Sinov savollari**

1. Predikat tushunchasini bilasizmi?
2. Predikatlar ustida qanday mantiqiy amallar bajarish mumkin?
3. Predikatlarni qanday qilib bir joyli va ko‘p joyli predikatlarga ajratish mumkin?
4. Predikatning chinlik to‘plamini aniqlash uchun nima qilish kerak?

**Quyidagi formulalarni deyarli normal shaklga keltiring.**

1. $\forall x(A(x)\to B(y))\to\exists y(B(y)\to A(x))$
2. $\forall x(A(x)\to\exists x(C(x)))\to\forall x((C(x)\to A(x))$
3. $\forall x(A(x)\to\exists x(B(x)))\to\exists y(A(x)\vee C(y)\vee C(y)B(x))$
4. $\forall x(A(x)\to\exists x(B(y)))\to\exists x(A(x)\to B(y))$
5. $\forall x(A(x)\to B(y))\forall y(A(x)\to(B(y)\to C(z))\to\exists z(A(x)\to C(z))$
6. $\forall x(A(x)\to\exists y(B(y)\to C(z)))\to\forall z(A(x)B(y)\to C(z))$
7. $\forall x(A(x)\to B(y))\to\exists y(B(y)\to A(x))$
8. $\forall x(A(x)\to B(z))\forall y(C(y)\to A(x))\to\exists z(C(y)\to B(z))$

9. $\forall x(A(x)\to B(y))\to\forall y((C(y)\lor A(x))\to(C(y)\lor\exists y(B(y)))$
10. $\forall x(A(x)\to B(y))\forall y(A(x)\to(B(y)\to C(z)))\to(A(x)\to\exists z(C(z)))$
11. $\forall x(A(x)\to B(y)A(x)\to\forall y(B(y)\to C(z)))\to(A(x)\to\exists z(C(z)))$
12. $\forall x(A(x)\to\exists z(B(y)\to C(z)))\to\forall y(B(y)\to(A(x)\to C(z)))$
13. $(\forall x(A(x))\to\exists x(B(x)))\to\forall z((B(x)\to C(z))\to(A(x)\to C(z)))$
14. $(\exists x(A(x))\to\forall x(B(x)))\to( B(x)\lor A(x))$
15. $(\forall x(A(x)))\to(\forall x(B(x)))\to\exists y(C(y)A(x)\to C(y)B(x))$
16. $\forall x(A(x)\to\exists y(B(y)))\to( B(y)\to A(x))$
17. $(\forall x(B(x))\to\exists x(A(x)))\exists y((A(x)\to C(y))\to( C(y)B(x)))$
18. $\forall x(A(x)\to\exists y(B(y)))\to(B(y)\lor A(x))$
19. $\forall x(A(x)\to\exists y(B(y)))\to(B(y)\to A(x))$
20. $\forall x(A(x)\to B(x))\exists y(B(x)\to C(y)\exists z(C(y)\to D(z)))$
21. $(\forall x(A(x)\to B(x))\forall z(C(z)\to A(x)))\to\exists y(C(z)\to B(y))$
22. $(\forall x(B(x)\to\forall y(A(y)))(\forall y(B(y)\to(A(x)\to C(z))))\to\exists z(C(z))$
23. $\forall x(B(x))\to\exists y(A(y)\to B(x))$
24. $\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall y(C(y)\to A(x))\to\exists z(C(z)\to B(x)))$
25. $\forall x(B(x)\to A(y))(B(x)\to\forall y(A(y)\to C(z)))\to\exists z(C(z)))$

## Sinov savollari

1. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari deganda nimani tushunasiz?
2. Berilgan predikatning aynan chin yoki aynan yolg‘on predikat bo‘lishini qanday aniqlash mumkin?
3. Predikatlar mantiqining simvollari va formulasi tushunchalarini bilasizmi?
4. Predikatlar mantiqi formulasining qiymati deganda nimani tushunasiz?
5. Qaysi formulalar asosiy teng kuchli formulalar deb yuritiladi?
6. Formulaning deyarli normal shakli deganda nimani tushunasiz?
7. Formulaning normal shakli uning deyarli normal shaklidan nimasi bilan farq qiladi?
8. Qanday formulani normal shaklga keltirish mumkin?

**Quyidagi formulalar umumqiymatlimi?**

1. $\forall x(A(x)\to\exists x(C(x)))\to\forall x((C(x)\to A(x))$
2. $\forall x(A(x)\to\exists x(B(x)))\to\exists y(A(x)\lor C(y)\lor C(y)B(x))$
3. $\forall x(A(x)\to\exists x(B(y)))\to\exists x(A(x)\to B(y))$
4. $\forall x(A(x)\to B(y))\forall y(A(x)\to(B(y)\to C(z))\to\exists z(A(x)\to C(z))$
5. $\forall x(A(x)\to\exists y(B(y)\to C(z)))\to\forall z(A(x)B(y)\to C(z))$
6. $\forall x(A(x)\to B(z))\forall y(C(y)\to A(x))\to\exists z(C(y)\to B(z))$
7. $\forall x(A(x)\to B(y))\to\exists y(B(y)\to A(x))$
8. $\forall x(A(x)\to B(y))\to\forall y((C(y)\lor A(x))\to(C(y)\lor\exists y(B(y)))$
9. $\forall x(A(x)\to B(y))\forall y(A(x)\to(B(y)\to C(z)))\to(A(x)\to\exists z(C(z)))$
10. $\forall x(A(x)\to B(y)A(x)\to\forall y(B(y)\to C(z)))\to(A(x)\to\exists z(C(z)))$
11. $\forall x(A(x)\to\exists z(B(y)\to C(z)))\to\forall y(B(y)\to(A(x)\to C(z)))$
12. $(\forall x(A(x))\to\exists x(B(x)))\to\forall z((B(x)\to C(z))\to(A(x)\to C(z)))$

13. $(\exists x(A(x))\rightarrow\forall x(B(x)))\rightarrow( B(x)\vee A(x))$
14. $(\forall x(A(x)))\rightarrow(\forall x(B(x)))\rightarrow\exists y(C(y)A(x)\rightarrow C(y)B(x))$
15. $\forall x(A(x)\rightarrow\exists y(B(y)))\rightarrow( B(y)\rightarrow A(x))$
16. $(\forall x(B(x))\rightarrow\exists x(A(x))\exists y((A(x)\rightarrow C(y))\rightarrow( C(y)B(x)))$
17. $\forall x(A(x)\rightarrow\exists y(B(y)))\rightarrow(B(y)\vee A(x))$
18. $\forall x(A(x)\rightarrow\exists y(B(y)))\rightarrow(B(y)\rightarrow A(x))$
19. $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))\exists y(B(x)\rightarrow C(y)\exists z(C(y)\rightarrow D(z)))$
20. $(\forall x(A(x)\rightarrow B(x))\forall z(C(z)\rightarrow A(x)))\rightarrow\exists y(C(z)\rightarrow B(y))$
21. $(\forall x(B(x)\rightarrow\forall y(A(y)))(\forall y(B(y)\rightarrow(A(x)\rightarrow C(z))))\rightarrow\exists z(C(z))$
22. $\forall x(B(x))\rightarrow\exists y(A(y)\rightarrow B(x))$
23. $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))\rightarrow(\forall y(C(y)\rightarrow A(x))\rightarrow\exists z(C(z)\rightarrow B(x)))$
24. $\forall x(B(x)\rightarrow A(y))(B(x)\rightarrow\forall y(A(y)\rightarrow C(z)))\rightarrow\exists z(C(z)))$
25. $\exists x(A(x)\rightarrow B(z))\rightarrow\exists y(C(y)\vee A(x)\rightarrow\forall z(C(y)\vee B(z)))$

**Sinov savollari**

1. Bajariluvchi va umumqiymatli formulalar deganda nimani tushunasiz?
2. Aynan chin va aynan yolg‘on formulalarning bir-biridan farqi nimada?
3. Bajariluvchi va umumqiymatli formulalar haqidagi teoremalarni bilasizmi?

# AMALIY

# MASHG‘ULOTLAR

**Mavzu: To’plamlarva ular ustidaamallar. Munosabatlar. Binar munosabatlar**

**Hajmiylik aksiomasi.** Ikkita $A$ va $B$ to‘plamlar faqat va faqat aynan bir xil elementlardan iborat bo‘lsagina **tengdir**.

**Bo‘sh to‘plam aksiomasi.** Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam, ya’ni **bo‘sh to‘plam**, mavjud. Bo‘sh to‘plam uchun $\varnothing$ belgisi qo‘llaniladi.

**Juftlik aksiomasi.** Ixtiyoriy $A$ va $B$ to‘plamlar uchun shunday $C$ to‘plam mavjudki, bu to‘plam elementlari faqat $A$ va $B$ to‘plamlardan iboratdir (ya’ni, $A$ va $B$ to‘plamlar $C$ning yagona elementlaridir). $C$ to‘plam $\{A,B\}$ ko‘rinishda belgilanadi. Ushbu $\{A,B\}$ ifoda $A$ va $B$ning **tartiblanmagan juftligi** deb yuritiladi. Agar $A$ va $B$ to‘plamlar teng bo‘lsa, u holda $C$ bitta elementdan iboratdir.

**Tanlash aksiomasi.** Bo‘sh bo‘lmagan va o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlar majmuasidagi har bir to‘plamdan bittadan “vakil”-element tanlab, shu elementlar to‘plami $C$ni tuzish mumkin. $X$ to‘plam shu majmuaning qanday elementi bo‘lishidan qat’iy nazar $X$ va $C$ to‘plamlar faqatgina bitta umumiy elementga ega bo‘ladi.

Albatta, bu aksiomalar (shu jumladan, tanlash aksiomasi qatnashgan Sermelo-Frenkel aksiomalari tizimining boshqa aksiomalari ham) bizga o‘z-o‘zidan oydin bo‘lgan tasdiqlarga o‘xshab tuyiladi, chunki bizning tafakkurimiz to‘plamlar majmuasini chekli deb tassavvur qilishga o‘rgangan. To‘plamlar majmuasi chekli bo‘lgan holda, masalan, tanlash aksiomasini tushunish qiyin emas. Tanlash aksiomasi cheksiz to‘plamlar uchun qo‘llansa, ba’zan, tortishuvlarga sabab bo‘luvchi juda qiziq tasdiqlar vujudga keladi. Bu fikrni tasdiqlash maqsadida Banax[40]-Tarskiy[41] paradoksi (sharning ikkilanishi) va Xausdorf[42] paradoksi mavjudligini ta’kidlaymiz.

Yuqorida keltirilgan aksiomalardan, jumladan, hajmiylik aksiomasidan, to‘plamlar bo‘yicha ko‘plab tasdiqlarni isbotlashda foydalanamiz. Hajmiylik

---

[40] Banax (Banach Stefan, Банах Стефан, 1892-1945) – Polsha va Ukraina matematigi.
[41] Tarskiy (Tarski Alfred, 1902-1983) – Polsha va AQSh mantiqchisi va matematigi.
[42] Xausdorf (Felix Hausdorff, 1868-1942) –olmon matematigi.

aksiomasini boshqacha ifodalash ham mumkin. $A$ to‘plamning har bir elementi $B$ to‘plamda ham mavjud va, aksincha, $B$ to‘plamning har bir elementi $A$ to‘plamda ham mavjud bo‘lsa, u holda $A$ va $B$ to‘plamlar tengdir. $A$ va $B$ **to‘plamlarning tengligini** $A=B$ yoki $B=A$ ko‘rinishda ifodalaymiz. Aslida, $A=B$ bo‘lsa, u holda $A$ va $B$ to‘plamlar aynan bitta to‘plamning har xil belgilanishidir. Masalan, o‘nlik sanoq tizimidagi yozuvining oxirgi raqami 1, 3, 5, 7 yoki 9 raqamlaridan biri bo‘lgan natural sonlar to‘plamini $A$ bilan, birni qo‘shganda ikkiga qoldiqsiz bo‘linadigan natural sonlar to‘plamini esa $B$ bilan belgilasak, u holda $A=B$ bo‘ladi. $A=B$ yozuv to‘plamlardagi elementlarning qaysi tartibda joylashishiga bog‘liq emas. Albatta, to‘plamdagi elementlarni qaysi tartibda qo‘yish masalasi ham dolzarbdir.

$A$ va $B$ to‘plamlar teng bo‘lmasa, u holda bu holat $A\neq B$ yoki $B\neq A$ ko‘rinishda ifodalanadi.

To‘plamlar nazariyasida quvvat eng muhim tushunchalardan biri bo‘lib, u to‘plamlarni taqqoslashda katta ahamiyatga egadir. To‘plamning quvvati tushunchasi, uning chekli yoki cheksiz bo‘lishiga qarab ta’riflanadi. Quvvat tushunchasi to‘g‘risida batafsil ma’lumotni to‘plamlar nazariyasiga bag‘ishlangan manbalardan topish mumkin. Diskret matematikada, asosan, chekli to‘plamlar bilan ish ko‘riladi. Shu sababli, to‘plamning quvvati tushunchasini faqat chekli to‘plamlar uchun keltirish bilan chegaralanamiz.

**2- ta’rif.** *Chekli to‘plamning elementlari soni shu to‘plamning* ***quvvati*** *deb ataladi.*

Berilgan $A$ to‘plamning quvvati $|A|$ ko‘rinishda belgilanadi.

**1- misol.** Ushbu to‘plamlar berilgan bo‘lsin: $A=\{a\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{a,b,c,d,e\}$, $D=\{1,2,3,...,n\}$, $E=\{m\,|\,m=2z\}$, $F=\{2,3,5,7,...,p,...\}$, bu yerda $n$ – natural son, $z$ – butun son, $p$ – tub son. Berilgan oltita to‘plamdan to‘rttasi – $A$, $B$, $C$ va $D$ to‘plamlar chekli, $E$ va $F$ to‘plamlar esa cheksiz to‘plamlardir. Bundan tashqari, $|A|=1$, $|B|=2$, $|C|=5$ va $|D|=n$. ■

Berilgan $A$ to‘plamga $a$ element tegishliligi $a\in A$ yoki $A\ni a$ ko‘rinishda belgilanadi va “$a$ tegishli $A$” deb o‘qiladi. “Tegishli” iborasining o‘rniga, ba’zan, “qarashli” yoki “ta’luqli” iborasi ham qo‘llaniladi. Qandaydir $b$ ning $A$ to‘plamga tegishli emasligi, ya’ni $b$ ning $A$ to‘plam element bo‘lmasligi $b \overline{\in} A$, $b \notin A$ yoki $A \ni b$ ko‘rinishda yoziladi. Masalan, $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ to‘plam uchun $4 \in A$, $6 \in A$, va $10 \in A$ (bularni umumlashtirib, $4, 6, 10 \in A$ ko‘rinishda yozish ham mumkin), lekin $12 \notin A$ va $14 \notin A$ (ya’ni, $12, 14 \notin A$).

Tabiiyki, turli to‘plamlar uchun umumiy elementlar mavjud bo‘lishi mumkin. Masalan, $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ va $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ to‘plamlarda $2, 4, 6, 8$ elementlar ikkala to‘plamda ham mavjuddir.

**3- ta’rif.** *Agar $B$ to‘plamning har bir elementi $A$ to‘plamda ham mavjud bo‘lsa, u holda $B$ to‘plam $A$ to‘plamning* ***qism to‘plami*** *deb ataladi.*

$B$ to‘plam $A$ to‘plamning qism to‘plami ekanligi $B \subseteq A$ yoki $A \supseteq B$ ko‘rinishda belgilanadi. Tabiiyki, bu belgilashlar $A$ va $B$ to‘plamlarning teng bo‘lgan holini ham nazarda tutadi. $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo‘lishidan $A = B$ kelib chiqadi. Bu tenglik to‘plamning o‘zi o‘zining qism to‘plami bo‘la olishi mumkinligini ko‘rsatadi, ya’ni $A \subseteq A$ (yoki $A \supseteq A$) ko‘rinishdagi yozuv ham ma’noga egadir. Har qanday to‘plamning o‘zi o‘zining qism to‘plami bo‘la olishi to‘plamlarning **refleksivlik** xossasi deb yuritiladi.

**4- ta’rif.** *$B$ to‘plamning hamma elementlari $A$ to‘plamda bor bo‘lib, shu bilan birga $A$ to‘plamda $B$ ga kirmagan element(lar) ham topilsa, u holda $B$ to‘plam $A$ to‘plamning* ***xos qism to‘plami*** *deb ataladi.*

$B$ to‘plam $A$ to‘plamning xos qism to‘plami bo‘lishi $B \subset A$ yoki $A \supset B$ ko‘rinishda belgilanadi.

Ta’kidlash kerakki, $A \subset A$ yoki $A \supset A$ deb yozish mumkin emas[43]. Shuning uchun, bu holatni ifodalash maqsadida, har qanday to‘plam “o‘zi o‘zining xosmas qismi” degan iboradan foydalaniladi.

To‘plamlar nazariyasida bo‘sh to‘plam har qanday bo‘sh bo‘lmagan $A$ to‘plamning qism to‘plami deb qaraladi, ya’ni $\varnothing \subset A$. Tabiiyki, bo‘sh to‘plamning quvvati nolga teng, ammo bo‘sh to‘plamni yagona element sifatida saqlovchi to‘plamning quvvati birga tengdir, ya’ni $|\varnothing| = 0$, lekin $|\{\varnothing\}| = 1$.

---

[43] Qiyoslang: $a$ haqiqiy son bo‘lsa, u holda $a < a$ va $a > a$ yozuvlar not’g‘ri.

Qandaydir $a$ tasdiqning o‘rinli bo‘lishidan boshqa $b$ tasdiqning o‘rinli bo‘lishi kelib chiqsa, bu holat $a \Rightarrow b$ deb belgilanadi. Masalan, $(A \subseteq B \text{ va } B \subseteq A) \Rightarrow A = B$.

**5- t a ’ r i f .** *Agar $a$ va $b$ tasdiqlar uchun $a \Rightarrow b$ va $b \Rightarrow a$ bo‘lsa, u holda bu tasdiqlar* ***o‘zaro ekvivalent tasdiqlar*** *deb ataladi.*

$a$ va $b$ tasdiqlarning o‘zaro ekvivalentligi $a \Leftrightarrow b$ deb belgilanadi (III bobga qarang).

**2- m i s o l .** $\boldsymbol{N}$ natural sonlar to‘plami $\boldsymbol{R}$ haqiqiy sonlar to‘plamining qism to‘plamini tashkil etadi: $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{R}$. ■

**3- m i s o l .** Nukus shahridagi barcha talabalar to‘plami O‘zbekistondagi barcha talabalar to‘plamining qism to‘plamidir. ■

**4- m i s o l .** O‘nli sanoq tizimidagi yozuvining oxirgi raqami 0, 2, 4, 6 yoki 8 raqamlaridan biri bo‘lgan natural sonlar to‘plami ikkiga qoldiqsiz bo‘linadigan natural sonlar to‘plamining qism to‘plamidir. ■

**5- m i s o l .** $A = \{a, b, c, d, e,\}$ to‘plam uchun $B = \{a\}$, $C = \{a, b\}$ to‘plamlarning har biri xos qism to‘plamdir.

**Mavzu: Binar munosabatlar. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to’plamlar**

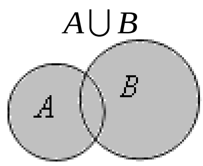
Ko‘pgina amaliy masalalarni tadqiq qilishda turli diskret (elemenlari soni chekli bo‘lgan) to‘plamlarga duch kelamiz. Masalan, biror predmetlar to‘plami, obyektlar to‘plami, talabalar to‘plami va hokazo. To‘plam tushunchasi matematikada tayanch tushunchalardan bo‘lib, unga ta'rif berilmaydi. “*To‘plam*” so‘zining sinonimlari sifatida “*obyektlar jamlanmasi*” yoki “*elementlar majmuasi*” so‘z birikmalaridan foydalaniladi.

To‘plamlar nazariyasi hozirgi zamon matematikasida, jumladan, kombinatorika va graflar nazariyasida, juda muhim o‘ringa ega. Biz uning ayrim xossalarini o‘rganish bilan cheklanamiz.

To‘plamlar odatda, lotin alifbosining bosh harflari $A, B, \ldots$ ularning elementlarini esa kichik - $a, b, \ldots$ harflar bilan belgilanadi. Biz asosan quyidagi belgilashlardan foydalanamiz.

Matematik simvollarning ma'nolariga to‘xtalamiz. $a \in A$ belgisi “$a$ *element* $A$ *to‘plamga tegishli*” ekanligini bildiradi. Bu tasdiqning inkori $a \notin A$ shaklda yoziladi va “$a$ *element* $A$ *to‘plamga tegishli emas*” deb o‘qiladi. $A \subset B$ belgi “$A$ *to‘plamning barcha elementlari* $B$ *to‘plamga ham tegishli*” ekanligini bildiradi. Bu holda $A$ to‘plam $B$ to‘plamning *qismi* deyiladi. Agar $A$ va $B$ to‘plamlar bir xil elementlardan tashkil topgan bo‘lsa, u holda ular *teng to‘plamlar* deyiladi va $A = B$ shaklda yoziladi. Ko‘pincha, to‘plamlarning tengligini isbotlashda $A \subset B$ va $B \subset A$ munosabatlarning bajarilishi ko‘rsatiladi.

**To‘plamlarning birlashmasi.** Har qanday ikkita to‘plamning barcha elementlaridan, ularni takrorlamasdan, tuzilgan to‘plamga shu **to‘plamlarning birlashmasi** (yoki **yig‘indisi**) deb aytiladi.



1.1- shakl

Bu ta’riflardan ko‘rinib turibdiki, to‘plamlarning umumiy elementlari shu to‘plamlarning birlashmasiga faqat bir martadan kiritiladi. Berilgan to‘plamlarning birlashmasidagi har qanday element shu to‘plamlarning hech bo‘lmaganda bittasiga tegishlidir. $A$ va $B$ to‘plamlarning birlashmasi $A \cup B$ kabi belgilanadi. Bu yerda “$A$ va $B$ to‘plamlarga birlashma amalini qo‘llab (yoki $A$ va $B$ to‘plamlar ustida birlashma amali bajarilib), $A \cup B$ to‘plam hosil qilindi” deyish mumkin. 1.1-shaklda $A$ va $B$ to‘plamlar doiralar ko‘rinishida, $A \cup B$ to‘plam esa bo‘yab tasvirlangan.

Yuqoridagi ta’rifni quyidagicha ham keltirish mumkin (ushbu qo‘llanmada $\wedge$ hamda $\vee$ belgilari “va” hamda “yoki” so‘zlariga mos keladi).

$$A \cup B = \{x: \ x \in A \vee x \in B\}$$

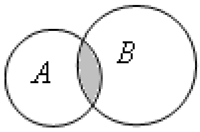
to‘plam $A$ va $B$ to‘plamlarning *yig‘indisi* yoki *birlashmasi* deyiladi.

**1.1-misol.** $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$ va $C = \{e, f, k\}$ bo‘lsin. U holda $E = A \cup B = \{a, b, c\}$, $E \cup C = \{a, b, c, e, f, k\}$, $C \cup B = \{a, b, c, e, f, k\}$, $A \cup C = \{a, b, e, f, k\}$ bo‘ladi.

**To‘plamlarning kesishmasi.** Har qanday ikkita to‘plamning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan to‘plamga **to‘plamlarning kesishmasi** (yoki **ko‘paytmasi**) deyiladi.

Berilgan $A$ va $B$ to‘plamlarning kesishmasi $A\bigcap B$ kabi belgilanadi. Bu yerda “$A$ va $B$ to‘plamlarga kesishma amalini qo‘llab, $A\bigcap B$ to‘plam hosil qilindi” deyish mumkin.

$A\bigcap B$



1.2- shakl

To‘plamlar kesishmasini quyidagicha izohlash mumkin

$A\bigcap B=\{x:\ x\in A\wedge x\in B\}$

to‘plam $A$ va $B$ to‘plamlarning *kesishmasi* deyiladi.

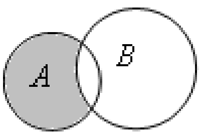
1.2-shaklda $A$ va $B$ to‘plamlar doiralar ko‘rinishida, $A\bigcap B$ to‘plam esa bo‘yab tasvirlangan. To‘plamlar ustidagi amallarning yuqorida ta’kidlangan o‘ziga xos xususiyatlari to‘plamlar ko‘paytmasini (kesishmasini) topishda ham namoyon bo‘ladi. Masalan, $A\subseteq B$ bo‘lsa, u holda $A\bigcap B=A$ va $B\bigcap A=A$ bo‘ladi.

Bitta ham umumiy elementga ega bo‘lmagan ikkita to‘plamlarning kesishmasi bo‘sh to‘plam bo‘lishi tabiiydir. Kesishmasi bo‘sh bo‘lgan to‘plamlar **o‘zaro kesishmaydigan**, kesishmasi bo‘sh bo‘lmagan to‘plamlar esa **o‘zaro kesishadigan to‘plamlar** deb ataladi.

**1.2-misol.** $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $C=\{e,f,k\}$ bo‘lsa, u holda $D=A\bigcap B=\{a,b,c\}$, $D\bigcap C=\varnothing$, $A\bigcap C=\varnothing$, $B\bigcap C=\varnothing$, $D\bigcap B=\{a,b,c\}$ bo‘ladi.

**To‘plamlarning ayirmasi.** Ixtiyoriy $A$ va $B$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. $A$ to‘plamning $B$ to‘plamda bo‘lmagan barcha elementlaridan tuziladigan to‘plamni hosil qilish $A$ **to‘plamdan** $B$ **to‘plamni ayirish** deb, tuzilgan to‘plam esa, shu $A$ va $B$ **to‘plamlarning ayirmasi** deb ataladi.

$A\setminus B$



1.3- shakl

$A$ to‘plamdan $B$ to‘plamni ayirish natijasida hosil bo‘lgan to‘plam, ya’ni $A$ va $B$ to‘plamlarning ayirmasi $A\setminus B$ yoki $A-B$ ko‘rinishida belgilanadi. Bu yerda “$A$ to‘plamdan $B$ to‘plamni ayirish amalini qo‘llab, $A\setminus B$ to‘plam hosil qilindi” deyish mumkin.

To‘plamlar ayirmasini quyidagicha ham ta’riflash mumkin $A$ va $B$ to‘plamlarning *ayirmasi* deb

$$A \setminus B = \{x:\ x \in A \wedge x \notin B\}$$

to‘plamga aytiladi.

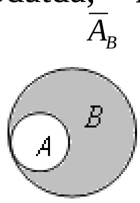
1.3-shaklda $A$ va $B$ to‘plamlar doiralar ko‘rinishida, $A \setminus B$ to‘plam esa bo‘yab tasvirlangan.

Ixtiyoriy $A$ va $B$ to‘plamlar uchun $A \cap B = \varnothing$ bo‘lsa, u holda $A \setminus B = \varnothing$ va $B \setminus A = \varnothing$ bo‘lishi ta’rifdan bevosita kelib chiqadi.

**1.3-misol.** 1.1-misoldagidek, $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{e, f, k\}$ bo‘lsa, u holda $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = \{c\}$, $B \setminus C = \varnothing$ bo‘ladi.

**To‘ldiruvchi to‘plam.** Faraz qilaylik, $A$ va $B$ to‘plamlar berilgan va $A \subseteq B$ bo‘lsin. Bu holda $B$ to‘plamning $A$ to‘plamga kirmagan barcha elementlaridan tashkil topgan $B \setminus A$ to‘plam $A$ **to‘plamning** $B$ **to‘plamgacha to‘ldiruvchi to‘plami** deb ataladi.

$A$ to‘plamning $B$ to‘plamgacha to‘ldiruvchi to‘plami, odatda, $\overline{A}_B$ ko‘rinishda belgilanadi. Bu yerda “$\overline{A}_B$ to‘plam $A$ to‘plamni $B$ to‘plamgacha to‘ldiradi” yoki “$A$ to‘plamni $B$ to‘plamgacha to‘ldirish amalini qo‘llab, $\overline{A}_B$ to‘plam hosil qilindi” deyish mumkin. 1.4-shaklda $A$ to‘plam kichik doira, $B$ to‘plam katta doira ko‘rinishida, $\overline{A}_B$ to‘plam esa bo‘yab tasvirlangan.

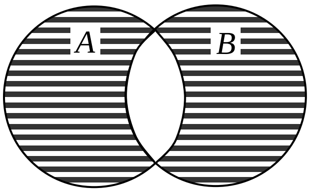


1.4- shakl

To‘plamlar ustidagi yuqorida keltirilgan birlashma, kesishma va to‘ldiruvchi to‘plam tushunchalari ta’riflarini bevosita qo‘llab, $A \cup \overline{A}_B = B$, $A \cap \overline{A}_B = \varnothing$, $A \setminus \overline{A}_B = A$ va $\overline{A}_B \setminus A = \overline{A}_B$ tengliklarni hosil qilish qiyin emas.

**1.4-misol.** Barcha juft sonlar to‘plamini $A = \{2, 4, ..., 2n, ...\}$ $(n \in \boldsymbol{N})$ deb belgilasak, $A$ to‘plamni $\boldsymbol{N}$ to‘plamgacha to‘ldirish amalini qo‘llab $\overline{A}_N = \{1, 3, ..., 2n-1, ...\}$ to‘plamni, ya’ni barcha toq sonlar to‘plamini hosil qilamiz. Demak, barcha toq sonlar to‘plami barcha juft sonlar to‘plamini natural sonlar to‘plamigacha to‘ldiradi. Xuddi shunga o‘xshash, barcha toq sonlar to‘plamini natural sonlar to‘plamigacha to‘ldirish amalini qo‘llab, barcha juft sonlar to‘plamini hosil qilish mumkin.

Ba'zan, $A$ va $B$ to‘plamlarning *simmetrik ayirmasi* tushunchasini kiritish maqsadga muvofiq bo‘ladi. $A \setminus B$ va $B \setminus A$ to‘plamlarning birlashmasidan iborat to‘plamga $A$ va $B$ to‘plamlarning *simmetrik ayirmasi* deyiladi va u odatda $A\Delta B$ ko‘rinishda belgilanadi, ya’ni $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.



1.5-shakl

Bu yerda “$A\Delta B$ to‘plam $A$ to‘plamdan $B$ to‘plamni ayirib va $B$ to‘plamdan $A$ to‘plamni ayirib so‘ngra hosil bo‘lgan to‘plamlar birlashtirildi” deyish mumkin. 1.5-shaklda $A$ va $B$ to‘plamlarning simmetrik ayirmasi to‘plami $A\Delta B$ to‘plam esa bo‘yab tasvirlangan.

**1.5-misol.** 1.1-misolda qaralgan $A$ va $B$ to‘plamlarning simmetrik ayirmasi $A\Delta B=\{c\}$ to‘plamdan iborat bo‘ladi.

## Mavzu: Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to’plamlar

**To‘plam buleani tushunchasi.** To‘plamlar nazariyasida bulean tushunchasi kiritilgan bo‘lib, u muhim tushunchalardan biri hisoblanadi. Berilgan $A$ to‘plamning barcha qism to‘plamlaridan tuzilgan to‘plam $A$ **to‘plamning buleani** ($A$ **to‘plam uchun bulean**) deb ataladi.

$A$ to‘plamning buleani $2^A$ ko‘rinishda belgilanadi.

**1.6-misol.** To‘rtta elementga ega $A=\{a,b,c,d\}$ to‘plam uchun $2^A$ bulean o‘n oltita element-to‘plamlardan iborat bo‘ladi:

$2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},$
$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$.

Ravshanki, $|A|=4$ va $\left|2^A\right|=16$.

**Kortej tushunchasi.** Matemetikada, jumladan, kombinatorika va graflar nazariyasida, to‘plam tushunchasi bilan bir qatorda kortej tushunchasi alohida o‘rin tutadi. Turli xossalarga ega bo‘lgan obyektlar bilan ish ko‘rganda kortej tushunchasidan foydalanish mumkin. Kortej tushunchasi yordamida kombinatorikaning ko‘plab tushunchalari tabiiy ravishda oson anglanadi. Kortej tushunchasini o‘rganishdan oldin to‘plamning elementlari takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz.

Ixtiyoriy $A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamlarning ixtiyoriy biridan, masalan, $A_{i_1}$ to‘plamdan qandaydir $a_{i_1}$ elementni, $A_{i_1}$ to‘plamdan boshqa istalgan $A_{i_2}$ to‘plamning qandaydir $a_{i_2}$ elementini va hokazo, oxirgi $A_{i_n}$ to‘plamdan qandaydir $a_{i_n}$ elementni olamiz. Bu elementlarni ularning berilgan to‘plamlardan olinishi tartibida joylashtirib $< a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n} >$ tuzilmaga ega bo‘lamiz. Bu tuzilmada har bir element o‘zining qat’iy joylashish o‘rniga ega. Shunday usul bilan boshqa tuzilmalarni ham hosil qilish mumkin. Bu tuzilmalarning har biri **elementar kortej** (qisqacha, **kortej**) deb ataladi. Kortejni boshqa usullar yordamida ham tashkil qilish mumkin. Masalan, faqat bitta to‘plam elementlaridan (hattoki, bu to‘plam yagona elementli bo‘lsa ham) foydalanib, tarkibida elementlari ko‘p bo‘lgan kortej tuzish mumkin. Kortejlarni belgilashda, ko‘pincha, lotin yoki grek alifbosining bosh harflaridan foydalaniladi.

$A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlar ixtiyoriy bo‘lgani uchun bu to‘plamlar umumiy elementlarga ega bo‘lishi ehtimoldan holi emas. Demak, umuman olganda, $K =< a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n} >$ kortej tarkibidagi **elementlar takrorlanishi mumkin**. Berilgan $K$ kortejga $a$ element tegishliligi $a \in K$ yoki $K \ni a$ ko‘rinishda belgilanadi.

Ba’zi hollarda kortej iborasining o‘rniga **vektor** yoki, uning **uzunligini** e’tiborga olgan holda, **juftlik** (uzunligi ikkiga teng kortej), **uchlik**, **to‘rtlik** va hokazo $n$**-lik** (uzunligi $n$ga teng kortej) iboralari ham ishlatiladi. Uzunligi $n$ bo‘lgan kortej $n$ **o‘rinli kortej** deb ham ataladi. Kortejni tashkil etuvchi elementlar soni, ya’ni kortejning uzunligi shu **kortejning quvvati** deb ataladi. Berilgan $K$ kortejning uzunligi (quvvati) $|K|$ ko‘rinishda belgilanadi.

Kortej tarkibidagi elementlar takrorlanishi mumkinligidan, ularning kortejda tutgan **o‘rinlari** muhim hisoblanadi. Shuning uchun kortejning muayyan elementi nazarda tutilganda, uning o‘rnini aniqlovchi raqam hisobga olinishi kerak.

Uzunliklari teng bo‘lgan ikkita kortejning mos o‘rinlaridagi elementlari aynan bir xil bo‘lsagina bu **kortejlar teng** deb ataladi. Kortejni tashkil qiluvchi elementlar, uning **komponentalari** yoki **koordinatalari** deb ataladi. Ba’zan, kortejni tashkil qiluvchi elementlar uchun, qisqacha qilib, **kortejning elementlari** iborasi ham qo‘llaniladi.

Tabiiyki, uzunliklari teng bo‘lmagan kortejlar teng emas. Kortejlar teng bo‘lishi uchun ularning mos komponentalari o‘zaro bir xil bo‘lishi shart. Masalan, to‘rt komponentali $<1,\{a,b\},c,\{2,5,4\}>$ va $<1,\{b,a\},c,\{5,2,4\}>$ kortejlar o‘zaro tengdir, chunki ularning toq o‘rinlaridagi komponentalari aynan bir xil va juft o‘rinlarida turgan komponentalari esa to‘plamlar sifatida bir-biriga teng bo‘lgani uchun aynan bir xildir.

**1.7-misol.** $X=\{a,b\}$, $Y=\{b,c,d\}$ va $Z=\{e\}$ to‘plamlar uchun ularning berilish tartibiga ($X,Y,Z$) mos keluvchi hamda har bir to‘plamdan faqat bittadan element olish sharti bilan tuzilgan barcha elementar kortejlar quyidagilardir: $<a,b,e>$, $<a,c,e>$, $<a,d,e>$, $<b,b,e>$, $<b,c,e>$, $<b,d,e>$.

**To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi.** Yuqorida turli tabiatli to‘plamlar yordamida aniqlanuvchi kortej tushunchasi bilan tanishdik. O‘z navbatida bu tushunchadan foydalanib to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi tushunchasini kiritish mumkin.

Tartiblangan $A_1,A_2,...,A_n$ to‘plamlar elementlaridan tuzilgan $n$ o‘rinli barcha kortejlar to‘plamiga shu **to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi** (qisqacha, **Dekart ko‘paytmasi**) deb ataladi.

Ba’zan to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi iborasi o‘rniga **to‘plamlarning to‘g‘ri ko‘paytmasi** iborasidan ham foydalaniladi. Tartiblangan $A_1,A_2,...,A_n$ to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi $A_1\times A_2\times...\times A_n$ yoki $\prod_{i=1}^{n}A_i$ ko‘rinishda belgilanadi, ya’ni

$$A_1\times A_2\times...\times A_n=\prod_{i=1}^{n}A_i=\{<a_1,a_2,...,a_n>|\ a_i\in A_i, i=\overline{1,n}\}.$$

To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi tushunchasining aniqlanishida bu ko‘paytmada qatnashuvchi to‘plamlarning soni ham muhim hisoblanadi. Zarur bo‘lganda, $n$ ta to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi iborasi o‘rniga $n$ **o‘rinli Dekart ko‘paytmasi** iborasi ham qo‘llaniladi.

Tabiiyki, agar $A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlarning birortasi bo‘sh to‘plam bo‘lsa, u holda ulardan foydalanib birorta ham kortej tuzish imkoniyati yo‘q. Demak, tarkibida hech bo‘lmasa bitta bo‘sh to‘plam qatnashgan $A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi ham **bo‘sh** to‘plamdir, ya’ni $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \varnothing$.

Dekart ko‘paytmasidan to‘plamlar bilan bog‘liq murakkab tuzilmalarni hosil qilishda va ularda ko‘paytma tushunchasini aniqlashda foydalaniladi. Ammo bunday hollarda aniqlangan ko‘paytirish amali Dekart ko‘paytmasining xossalaridan farqli xossalarga ham ega bo‘lishi mumkin. Jumladan, tuzilmalardan birortasi bo‘sh to‘plam bo‘lsada, ularning ko‘paytmasi bo‘sh bo‘lmagan hollar bor.

To‘plamlarning to‘g‘ri ko‘paytmasi tushunchasidan foydalanib, **to‘plamning darajasi** tushunchasi $A^n = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n \text{ marta}}$ formula asosida kiritiladi. Masalan, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$. Umuman olganda, $A^n = A \times A^{n-1}$.

$n$ o‘rinli $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ va $B = B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$ Dekart ko‘paytmalari berilgan bo‘lsin. Agar $A_1 \subseteq B_1$, $A_2 \subseteq B_2, \ldots, A_n \subseteq B_n$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, u holda $A$ Dekart ko‘paytmasi $B$ **Dekart ko‘paytmasining qismi** deyiladi va $A \subseteq B$ kabi belgilanadi.

## Mavzu: Mantiqiy bog’lovchilar. Chinlilik jadvali.Formula, qism formula

Mantiqiy amallar orasida bog’lanishlar mavjudligini ko’rsatamiz. Buning uchun tengkuchli muloxazalar tushunchasini kiritamiz.

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n \qquad \textbf{(1)}$$

$n$ **ta muloxaza berilgan bo’lsin.**

**1**-ta’rif. (1) muloxazalarni inkor, diz’yunksiya, kon’yunksiya, implikasiya va ekvivalensiya mantiqiy amallar vositasi bilan ma’lum tartibda birlashtirib hosil etilgan murakkab muloxazaga formula deb aytamiz.

Masalan:

$[x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)] \to x_4$;   $[x_1 \wedge (x_2 \to x_3)] \vee (x_4 \leftrightarrow x_5)$;   $(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)$; $(x \to y) \wedge (y \to z) \to (z \to x)$ murakkab muloxazalar formulalar bo'ladilar. Kavslar muloxazalar ustida mantiqiy amallarning qay tartibda bajarilishini ko'rsatadi.

Endi formula tushunchasiga matematik ta'rif beraylik. Bu tushuncha quyidagicha aniklanadi.

***2-ta'rif. 1) har qanday*** $x_1, x_2, ..., x_n$ ***muloxazalarning istalgan biri formuladir;***
***2) agar*** $A$ ***va*** $B$ ***larning har biri formula bo'lsa, u holda (***$A \wedge B$***), (***$A \vee B$***), (***$A \to B$***), (***$A \leftrightarrow B$***) va*** $\overline{A}$ ***lar ham formulalardir.***
***3) 1 va 2-bandlarda ko'rsatilgan ifodalardan tashkari boshqa xech qanday ifoda formula bo'la olmaydi.*** $x_1, x_2, ..., x_n$ ***o'zgaruvchilarni elementar formulalar deb atаymiz.*****Keyinchalik formulani lozim bo'lgandagina** $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ **funksiya shaklida belgilashdan foydalanamiz. Har qanday formula uchun chinlik jadvali tuzish mumkin. Buning uchun asosiy chinlik jadvallaridan ketma-ket foydalanish kerak. Masalan,** $(x \wedge y) \to (\overline{\bar{x} \vee y})$ **formulaning chinlik jadvali quyidagicha bo'ladi:**

| $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $x \wedge y$ | $\bar{x} \vee y$ | $\overline{\bar{x} \vee y}$ | $(x \wedge y) \to (\overline{\bar{x} \vee y})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ch | ch | yo | ch | ch | yo | Yo |
| ch | yo | yo | yo | yo | ch | Ch |
| yo | ch | ch | yo | ch | yo | ch |
| yo | yo | ch | yo | ch | yo | ch |

Shunday qilib, har qanday formulaga {ch, yo} tuplamining bir elementi mos qilib quyiladi.

**3-ta'rif.** $A$ *va* $B$ *formulalar berilgan bo'lsin. (1) elementar muloxazalarning har bir qiymatlari satri uchun* $A$ *va* $B$ *formulalarning mos qiymatlari bir xil bo'lsa,* $A$ *va* $B$ *formulalarga tengkuchli formulalar deb aytiladi* *va bu $A = B$ tarzda belgilanadi. (1) katorning kamida bitta kiyatlari satri uchun $A$ va $B$ formulalarning mos qiymatlari bir xil bulmasa, u holda $A$ va $B$ formulalarga tengkuchlimas formulalar deb aytiladi va $A \neq B$ ko'rinishda belgilanadi.*

$A$ va $B$ formulalarning tengkuchli bulish-bulmasligi ular uchun tuzilgan chinlik jadvallari yordamida aniklanadi.

Ekvivalentlik bilan tengkuchlilik orasidagi farqni tushunish uchun ularni algebraik tenglama va ayniyat bilan solishtiramiz. Tenglama (masalan, $2x + y = 10$) deb shunday harflarning ayrim qiymatlari (masalan, $x = 4$, $y = 2$) uchun bajarib, boshqa qiymatlar (masalan, $x = 1$, $y = 2$) uchun bajarilmaydi. Shunga o'xshash ekvivalentlik $A \leftrightarrow B$ deb, shunday (masalan, $x_1 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_3)$) muloxazaga aytiladiki, unga $x_1, x_2, ..., x_n$ harflarning urinlariga bir xil konkret muloxazalar qo'yganda u chin qiymat qabul qilib, boshqa konkret qiymatlar qo'yganda yolg'on qiymatni qabul qiladi. Ayniyat deb, shunday tenglikka (masalan, $a^2 - b^2 = (a - b)\ (a + b)$) aytiladiki, unda katnashadigan barcha harflar uchun bajariladi. Shunga o'xshash, $A \equiv B$ muloxazada katnashadigan barcha $x_1, x_2, ..., x_n$ harflarning urniga ixtiyoriy konkret muloxazalarni qo'yganda u chin qiymat qabul qilsa, bunday muloxaza tengkuchlilik deyiladi.

Algebrada ayniy ifodalarni bir-biri bilan almashtirish mumkin bo'lganidek, mantiq algebrasida tengkuchli muloxazalarni (formulalarni) ham bir-biri bilan almashtirish mumkin. Bu esa murakkab formulalarni (muloxazalarni) soddalashtirish imkonini beradi.

Biz tenglama va ayniyat bilan ekvivalentlik va tengkuchlilik orasidagi o'xshashlikni keltirdik. Endi esa ular orasidagi farqni ko'rsatamiz. Ma'lumki, algebrada xech qanday almashtirish yordamida tenglikni amallar ( qo'shish, ayirish, darajaga kutarish, bulish va xokazo) bilan almashtirib bulmaydi. Mantiq algebrasida esa ekvivalentlikni implikasiya $(\rightarrow)$ yoki kon'yunksiya $(\wedge)$, diz'yunksiya $(\vee)$ va inkor $(-)$ amallari orqali ifodalash mumkinligini biz yuqorida ko'rsatgan edik (1-§ dagi (1) formulaga karang). (1) formulaning to'g'riligini chinlik jadvali orqali ko'rsatamiz.

| $x$ | $y$ | $x \to y$ | $y \to x$ | $x \leftrightarrow y$ | $(x \to y) \wedge (y \to x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ch | Ch | Ch | ch | ch | ch |
| yo | Ch | Ch | yo | yo | yo |
| ch | Yo | Yo | ch | yo | yo |
| yo | Yo | Ch | ch | ch | ch |

Jadvaldan ko'rinadiki, oxirgi ikki ustunning chinlik qiymati ustma-ust tushadi. Shu bilan (1) formula isbotlanadi.

Oddiy algebrada tenglik belgisi «=» quyidagi aksiomalarni kanoatlantiradi: 1) ixtiyoriy a son uchun $a = a$ (refleksivlik); 2) agar $a = b$ bo'lsa, u holda $b = a$ (simmetriklik); 3) agar $a = b$, $b = c$ bo'lsa, u holda $a = c$ (tranzitivlik) bo'ladi.

Shunga o'xshash, muloxazalar algebrasida, ekvivalentlik ta'rifidan osonlik bilan kurish mumkinki, u refleksiv, simmetrik va tranzitiv, ya'ni

1) ixtiyoriy x muloxaza uchun $x \equiv x$;

2) ixtiyoriy ikki $x$ va $y$ muloxazalar uchun, agar $x \equiv y$ bo'lsa, u holda $y \equiv x$;

3) ixtiyoriy $x, y, z$ uchta muloxazalar uchun $x \equiv y$ va $y \equiv z$ bo'lsa, u holda $x \equiv z$.

## Mavzu: Formulalarning tengkuchliligi. Soddalashtirish

Algebrada ma'lum bo'lgan ayniyatlarga o'xshashlarini keltiramiz. Ma'lumki, qo'shish va ko'paytirish amali quyidagi qonuniyatlarga buysunadi:

1) $x+y=y+x$ (qo'shishning kommutativlik qonuni);

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (qo'shishning assosiativlik qonuni);

3) $xy=yx$ (ko'paytirishning kommutativlik qonuni);

4) $(xy)z=x(yz)$ (ko'paytirishning assosiativlik qonuni);

5) $x(y+z)=xy+xz$ (ko'paytirishning yigindiga nisbatan distributivlik qonuni).

Shu ayniyatlarga o'xshash mantiq algebrasida quyidagi tengkuchliliklar urinlidir:

$$x\wedge y=y\wedge x \tag{3}$$

$$(x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z) \tag{4}$$

$$x\vee y=y\vee x \tag{5}$$

$$(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z) \tag{6}$$

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z) \tag{7}$$

$$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z) \tag{8}$$

Bu tengkuchliliklarni tekshirish uchun chinlik jadvalidan foydalansa bo'ladi. Bu yerda biz (8)ni tekshiradigan jadvalni keltirishimiz bilan kifoyalanamiz:

| $x$ | $y$ | $z$ | $y\wedge z$ | $x\vee y$ | $x\vee z$ | $x\vee(y\wedge z)$ | $(x\vee y)\wedge(x\vee z)$ | $x\vee(y\wedge z)\equiv$ $\equiv(x\vee y)\wedge(x\vee z)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| yo | yo | yo | yo | yo | yo | yo | yo | ch |
| yo | yo | ch | yo | yo | ch | yo | yo | ch |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| yo | ch | yo | yo | ch | yo | yo | yo | ch |
| yo | ch | ch | ch | ch | ch | ch | ch | ch |
| ch | yo | yo | yo | ch | ch | ch | ch | ch |
| ch | yo | ch | yo | ch | ch | ch | ch | ch |
| ch | ch | yo | yo | ch | ch | ch | ch | ch |
| ch | ch | ch | ch | ch | ch | ch | ch | ch |

Diz'yunksiya $(\vee)$ amali kommutativlik va assosiativlik xossasiga egadir. (7)-(8) tengkuchliliklar esa $\wedge$ va $\vee$ amallarning bir-biriga nisbatan distributiv xossasiga ega ekanligini ko'rsatadi. Shuni ham ta'kidlash kerakki, (8) tengkuchlilikka o'xshash oddiy algebrada ayniyat yuk (chunki $x+yz=(x+y)(x+z)$ ayniyat emas). Yuqoridagi o'xshashlik asosida $x\vee y$ ni mantiqiy yigindi, $x\wedge y$ ni esa mantiqiy ko'paytma deb olishimiz mumkin. Bu o'xshashlikni kuchaytirish uchun, algebraik ko'paytmada nukta $(\cdot)$ yozilmaganidek (masalan, $x\cdot y=xy$), mantiqiy ko'paytirish belgisi $(\wedge)$ ni yozmaymiz, ya'ni $x\wedge y$ ning urniga $xy$ ni yozamiz. Bundan keyin mantiqiy ifodalarni soddalashtirish, ularda kavslarni kamaytirish maksadida quyidagicha shartlashamiz:

1) biror mantiqiy ifoda inkor ishorasi ostida bo'lsa, uni kavssiz yozamiz, ya'ni $\overline{(x\vee y)}\wedge z$ ning urniga $\overline{x\vee y}\wedge z$ ni, yoki $\overline{x\vee y}\,z$ ni yozamiz.

2) kon'yunksiya belgisi diz'yunksiya, implikasiya va ekvivalentlik belgilariga nisbatan mustaxkamrok bog'laydi deb hisoblaymiz, ya'ni $(xy)\vee z$ urniga $xy\vee z$, $x\to(yz)$ urniga $x\to yz$, $(xy)\leftrightarrow(zu)$ urniga $xy\leftrightarrow zu$ yozamiz.

3) diz’yunksiya belgisi implikasiya va ekvivalentlik belgilariga nisbatan mustaxkamrok bog’laydi deb hisoblaymiz, ya’ni $(x \vee y) \to z$ urniga $x \vee y \to z$ va $(x \vee y) \leftrightarrow z$ urniga $x \vee y \leftrightarrow z$ yozamiz.

4) implikasiya belgisi ekvivalentlik belgisiga nisbatan mustaxkamrok bog’laydi deb hisoblaymiz, ya’ni $(x \to y) \leftrightarrow z$ urniga $x \to y \leftrightarrow z$ bu kelishuvlar mantiqiy ifodalarni yozishni soddalashtiradi, masalan,

$$(((x \leftrightarrow y) \to (x \wedge z)) \leftrightarrow (((\overline{x \wedge \bar{y}}) \vee (\bar{x} \wedge y)) \vee (x \to z)))$$ o’rniga

$$(x \leftrightarrow y) \to \overline{xz} \leftrightarrow x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee (x \to z)$$ ni yozamiz.

Yuqoridagi (1)-tengkuchlilik yordamida $\leftrightarrow$ belgisini $\to$ va $\wedge$ belgilari orqali ifodalashimiz mumkin. Endi $x \to y$ implikasiyani quraylik. Faqatgina $x$ chin va $y$ yolg’on bo’lgandagina $\bar{x} \vee y$ muloxaza yolg’on, bundan esa faqatgina $x$ chin (ya’ni $\bar{x}$ yolg’on) va $y$ yolg’on bo’lgandagina $\bar{x} \vee y$ muloxaza yolg’on bulishi kelib chikadi. Shunday qilib, yana bir tengkuchlilikka ega bo’lamiz:

$$x \to y \equiv \bar{x} \vee y. \qquad (9)$$

Demak, $\to$, $\leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, – belgilarni uz ichiga olgan ixtiyoriy murakkab muloxazani unga tengkuchli bo’lgan shunday muloxaza bilan almashtirish mumkinki, natijada faqat $\vee$, $\wedge$, – belgilar katnashgan muloxazalarga ega bo’lamiz. Bunday almashtirish mantiq algebrasining elektrotexnikadagi tadbiki uchun katta ahamiyatga ega, chunki u yerda ishlatiladigan ifodalarda faqat uchta $\vee$, $\wedge$, – belgilar katnashadi. Endi, $\vee$ belgini $\wedge$ va – belgilar orqali ifodalaymiz. Buni ikki karra inkorni uchirish qonuni deb ataluvchi $\bar{\bar{x}} = x$ tengkuchlilikdan va

$$\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}, \qquad (10)$$

$$\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}. \qquad (11)$$

de Morgan qonunlari deb ataluvchi hamda chinlik jadvali yordamida osongina tekshiriladigan tengkuchliliklar yordamida bajarish mumkin.

Haqiqatan ham,

$$x \vee y \equiv \overline{\overline{x \vee y}} \equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \qquad (12)$$

va shunga o’xshash

$$x \wedge y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \qquad (13)$$

ekanligi kelib chikadi.

Shunday qilib, mantiq algebrasining ixtiyoriy ifodasini unga tengkuchli bo’lgan shunday ifoda bilan almashtirish mumkinki, oxirgi ifodada faqat $\wedge$ va – yoki $\vee$ va – belgilar katnashadi. Shunga o’xshash barcha mantiq amallarni $\rightarrow$ va – amallar bilan almashtirish mumkin.

Shuni ham aytish kerakki, barcha amallarni faqatgina Sheffer shtrixi bilan almashtirish ham mumkin:

$$\bar{x} \equiv x|x, \quad x \wedge y \equiv (x|y)\,|\,(x|y), \quad \overline{x \wedge y} \equiv x|y, \quad x \vee y \equiv \bar{x}|\bar{y}, \quad x \rightarrow y \equiv x|\bar{y}.$$

Bu tengkuchliliklarni, Sheffer amali ta’rifidan foydalanib, chinlik jadvali yordamida osongina ko’rsatish mumkin.

Endi misol sifatida $(x \rightarrow y)\,(y \rightarrow x) \rightarrow (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y})$ ifodani shunday almashtiramizki, natijada faqat $\wedge$, $\vee$ va – belgilar katnashsin. Buning uchun avvalo (9), (2) va (3) tengkuchliliklardan foydalanamiz:

$$(x \rightarrow y)\,(y \rightarrow x) \rightarrow (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) \equiv (x \rightarrow y) \cdot (y \rightarrow x) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \cdot (\bar{y} \rightarrow \bar{x}) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x} \vee y)\,(\bar{y} \vee x) \rightarrow (\bar{\bar{x}} \vee \bar{y})\,(\bar{\bar{y}} \vee \bar{x}) \equiv \overline{(x \vee \bar{y})\,(y \vee \bar{x})} \vee (\bar{x} \vee y) \cdot (\bar{y} \vee x).$$

Kommutativlik va distributivlik qonunlaridan foydalanib, bu ifodani quyidagi ko’rinishda yozishimiz mumkin:

$$(x \to y) \cdot (y \to x) \to (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) \equiv (\bar{x} \cdot y \vee \bar{y} \cdot x \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \vee x \cdot y \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y\ .$$

Endi shunday savol tugiladi: agar hamma mantiqiy amallar ikkita (–, $\wedge$) yoki hatto bitta $\bar{\bar{x}} = x$ ga keltirishning xojati bormi? Sabab shundaki, faqat ikkita yoki bitta belgi orqali almashtirganda mantiqiy ifodalar juda chuzilib ketadi va uni kuzdan kechirish kiyinlashadi.

Ikkinchi tomondan, mantiqiy xulosalarning qonuniyatlarini bayon etayotganda, yuqorida kiritilgan $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ amallar katta ahamiyatga ega. Bu xususan $\to$ amaliga tegishlidir. Yana bir nechta muhim tengkuchliliklarni keltiramiz:

$x \cdot \bar{x} \equiv$ yo (karama-karshilik qonuni) (14)

$x \vee \bar{x} \equiv$ yo (uchinchisi istisno qonuni) (15)

$x \cdot x \equiv x, \quad x \vee x \equiv x$ (idempotentlik qonuni) (16)

$x \cdot (x \vee y) \equiv x, \quad x \vee x \cdot y \equiv x$ (yutish qonunlari) (17)

$x \vee$ yo $\equiv x$, $x \vee$ ch $\equiv$ ch, $x \cdot$ ch $\equiv x$, $x \cdot$ yo $\equiv$ yo (18)

Keltirilgan tengkuchliliklar ixtiyoriy mantiqiy ifodalarni kerakli ko’rinishga keltirishga imkon beradi.

## Mavzu: Bul funksiyalari soni. Elementar bul funksiyalari. Formula tushunchasi

### Aynan chin, aynan yolg’on va bajariluvchi formulalar.

4-ta’rif. *Elementar muloxazalarning hamma qiymatlar satrlarida faqat chin qiymatni qabul qiluvchi formula aynan chin (doimo chin) formula yoki tavtologiya deb ataladi va* $J$ *bilan belgilanadi.*

$A$ formulaning tavtologiya ekanligi yoki emasligi qiymatlar jadvalini tuzish orqali bilinadi.

Misollar:

1. $J = x \wedge (x \to y) \to y$ formula tavtologiyadir. Haqiqatan:

| $x$ | $y$ | $x \to y$ | $x \wedge (x \to y)$ | $x \wedge (x \to y) \to y$ |
|---|---|---|---|---|
| ch | ch | Ch | ch | ch |
| ch | yo | Yo | yo | ch |
| yo | ch | Ch | yo | ch |
| yo | yo | Ch | yo | ch |

2. $J = (\overline{x} \vee y) \to (x \to y)$ formula ham tavtalogiyadir:

| $x$ | $y$ | $\overline{x}$ | $\overline{x} \vee y$ | $x \to y$ | $(\overline{x} \vee y) \to (x \to y)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ch | ch | Yo | Ch | ch | ch |
| ch | yo | Yo | Yo | yo | ch |
| yo | ch | Ch | Ch | ch | ch |
| yo | yo | Ch | Ch | ch | ch |

5-ta’rif. *Elementar muloxazalarning hamma qiymatlar satrlarida faqat yolg’on qiymatni qabul qiluvchi formulalar aynan yolg’on (doimo yolg’on) yoki bajarilmaydigan formulalar deyiladi va* $\overline{J}$ *bilan belgilanadi.*

Masalan, $\overline{J} = (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{x \to y})$ aynan yolg’on formuladir:

| $x$ | $y$ | $\overline{x}$ | $\overline{x} \vee y$ | $x \to y$ | $\overline{x \to y}$ | $(\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{x \to y})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ch | ch | yo | ch | ch | yo | yo |
| ch | yo | yo | yo | yo | ch | yo |
| yo | ch | ch | ch | ch | yo | yo |
| yo | yo | ch | ch | ch | yo | yo |

Ma’lumki, aynan chin formulaning inkori aynan yolg’on formula bo’ladi va aksincha. Aynan chin va aynan yolg’on formulalar unga kiradigan o’zgaruvchilarga boglik bulmay, faqat bitta qiymat qabul qiladi.

6-ta’rif. Agar $(A \leftrightarrow B)$ tavtologiya bo’lsa, u holda $A$ va $B$ lar mantiqiy ekvivalent deb aytiladi. Agar $(A \to B)$ tavtologiya bo’lsa, u holda $B$ $A$ ning mantiqiy xulosasi deb aytiladi.

Endi E.Mendelsonning [39] kitobida bayon etilgan tavtologiyalarga tegishli ayrim teoremalarni keltiramiz:

**1-teorema.** *Agar $A$ va $A \to B$ aynan chin formulalar (tavtologiyalar) bo’lsa, u holda $B$ formula ham tavtologiya bo’ladi.*

**2-teorema**. *Agar $x_1, x_2, ..., x_n$ o’zgaruvchilarga boglik bo’lgan $A$ formula tavtologiya va $B$ formula $A$ formuladan $x_1, x_2, ..., x_n$ o’zgaruvchilar o’rniga mos ravishda $A_1, A_2, ..., A_n$ formulalarni ko’yish natijasida hosil etilgan bo’lsa, u holda $B$ formula tavtologiya bo’ladi, ya’ni tavtologiyada o’rniga ko’yish yana tavtologiyani keltiradi.*

7-ta’rif. *Elementar muloxazalarning kamida bitta qiymatlar satrida chin qiymat qabul qiluvchi va aynan chin b*u*lmagan formulaga bajariluvchi formula deb aytiladi.*

## 3.Namunaviy masqlar va ularning yechimlari

**1- misol.** Ushbu $x$, ch, $\text{yo}\leftrightarrow(\text{yo}\vee y)$, $x\leftrightarrow\bar{y}\to x$, $[x_1\vee(\overline{x_2}\wedge x_3)\wedge x_1]\to x_4$, $\bar{y}\to x$, $(x\to\bar{y})\wedge(y\to z)\to(z\to x)$, $[x_1\wedge(x_3\to x_3)]\vee(x_4\leftrightarrow x_2)\vee\text{yo}$ va $(\bar{x}\vee y)\wedge(x\vee\bar{y})$ ko‘rinishda yozilgan murakkab mulohazalarning har biri formuladir, lekin $[x_1\vee(\overline{x_2}\to x_3)\wedge]\leftrightarrow x_1$ va $(x\to\bar{y})\wedge(\overline{z\to(\bar{z}\to y)}$ yozuvlarni formula sifatida qabul qilish mumkin emas, chunki ularning birinchisida kon’yunksiya belgisidan keyin yopuvchi “]” qavs yozilgan, ikkinchisida esa ikkinchi ochuvchi “(“ qavsga mos yopuvchi “)” qavs yozilmagan.

**2- misol.** $x\vee\bar{y}\wedge y\leftrightarrow z\to(z\to x)$ ko‘rinishda yozilgan formulani tahlil qilaylik. Bu formuladagi amallarni bajarish tartibi faqat bir joyda qavslar bilan aniqlangan. Mantiqiy amallarni bajarish imtiyozlari va qavslar haqidagi kelishuvga ko‘ra berilgan formulani $((x\vee(\bar{y}\wedge y))\leftrightarrow(z\to(z\to x)))$ ko‘rinishda ifodalash mumkin.

**3- misol.** $(x\wedge y)\to\overline{\bar{x}\vee y}$ formulaning chinlik jadvali 1- jadval bo‘ladi. ■

1- jadval

| $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $x\wedge y$ | $\bar{x}\vee y$ | $\overline{\bar{x}\vee y}$ | $(x\wedge y)\to\overline{\bar{x}\vee y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| yo | Yo | ch | yo | ch | yo | ch |
| yo | Ch | ch | yo | ch | yo | ch |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ch | Yo | yo | yo | yo | ch | ch |
| ch | Ch | yo | ch | ch | yo | yo |

**4- misol.** $x$ va $x \vee x$ formulalar teng kuchli formulalardir. Haqiqatdan ham, berilgan formulalarda faqat bitta $x$ elementar mulohaza ishtirok etgani uchun ikkita qiymatlar satriga ega chinlik jadvalini tuzamiz (2- jadvalga qarang). 2- ta'rifga asosan $x \vee x \equiv x$. ■

3- jadval

| $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $A \equiv \bar{x} \vee y$ | $B \equiv x \to y$ |
|---|---|---|---|---|
| yo | yo | ch | ch | ch |
| yo | ch | ch | ch | ch |
| ch | yo | yo | yo | yo |
| ch | ch | yo | ch | ch |

**5- misol.** Berilgan $\bar{x} \vee y$ va $x \to y$ formulalarni mos ravishda $A$ va $B$ bilan belgilaymiz: $A \equiv \bar{x} \vee y$, $B \equiv x \to y$. 3- chinlik jadvalidan ko'rinib turibdiki, $A$ va $B$ formulalar tarkibidagi $x$ va $y$ elementar mulohazalarning to'rtala qiymatlar satrlari uchun bu formulalarning mos qiymatlari bir xil. Demak, 2- ta'rifga asosan $A \equiv B$, ya'ni $\bar{x} \vee y \equiv x \to y$. ■

**6- misol.** $A \equiv (x \vee \bar{x}) \wedge y$ va $B \equiv y$ formulalar berilgan bo'lsin. 4- chinlik jadvalini tuzamiz. $A$ va $B$ formulalar tarkibida ishtirok etuvchi $x$ va $y$ elementar mulohazalarning to'rtala qiymatlar satrlari uchun bu formulalarning mos qiymatlari bir xil.

**7-** Demak, berilgan $A$ va $B$ formulalar ekvivalent formulalardir, ya'ni $(x \vee \bar{x}) \wedge y \equiv y$. ■

4- jadval

| $x$ | $B = y$ | $\bar{x}$ | $x \vee \bar{x}$ | $A = (x \vee \bar{x}) \wedge y$ |
|---|---|---|---|---|

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| yo | Yo | ch | ch | yo |
| yo | Ch | ch | ch | ch |
| ch | Yo | yo | ch | yo |
| ch | ch | yo | ch | ch |

**8- misol.** $A \equiv (x \vee \bar{x}) \wedge y$ va $B \equiv x$ formulalar teng kuchlimas formulalardir. Haqiqatdan ham, 5- chinlik jadvalidan ko‘rinib turibdiki, berilgan $A$ va $B$ formulalar tarkibida ishtirok etuvchi $x$ va $y$ elementar mulohazalarning to‘rtta qiymatlar satrlaridan ikkitasi (2- va 3- satrlari) uchun bu formulalarning mos qiymatlari har xil. Demak, 3- ta’rifga asosan, berilgan $(x \vee \bar{x}) \wedge y$ va $x$ formulalar ekvivalentmas formulalardir, ya’ni $A \not\equiv B$.

**Mavzu: Mulohazalar algebrasi formulasining normal formasi tushunchasi**

**Formulalarning normal shakllarini keltirib chiqarish jarayonini o'rganish.**

**Elementar kon'yunksiya va elementar diz'yunksiya tushunchalari.** Turli amaliy masalalarni yechishda mantiq algebrasining ahamiyati kattadir. Jumladan, kontakt va rele-kontaktli sxemalar bilan bog'liq muammolarni hal qilishda, diskret ravishda ish ko'ruvchi texnikaga oid masalalarni hamda matematik dasturlashqning turli masalalarini yechishda mantiq algebrasi ko'p qo'llaniladi. Mantiq algebrasidan foydalanib amaliy masalalarni hal qilishda esa mantiqiy **formulalarning normal shakllari** deb ataluvchi yozuvlar katta ahamiyatga egadir.

Oldingi paragraflarda o'rganilgan teng kuchliliklar yordamida zarur almashtirishlar bajarib mulohazalar algebrasining berilgan ixtiyoriy formulasini turli ko'rinishlarda yozish mumkin. Masalan, $\bar{a} \to bc$ formulani $a \vee bc$ yoki $(a \vee b)(a \vee c)$ ko'rinishlarda yoza olamiz. Ushbu paragrafda quyidagi teng kuchliliklardan foydalanib formulalarning normal shakllari o'rganiladi:

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}, \qquad \overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}, \\
x \to y \equiv \bar{x} \vee y, \qquad \overline{x \to y} \equiv x \wedge \bar{y}, \\
x \leftrightarrow y \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}), \\
\overline{x \leftrightarrow y} \equiv (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y), \\
x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z), \\
x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z).
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Formulalarning normal shakllarini o'rganish jarayonida (1) teng kuchliliklardan tashqari asosiy teng kuchliliklar qatoriga kiruvchi $x \vee y \equiv y \vee x$, $x \wedge y \equiv y \wedge x$, $(x \vee y) \vee z \equiv x \vee (y \vee z)$, $(x \wedge y) \wedge z \equiv x \wedge (y \wedge z)$ teng kuchliliklardan, ikki karra inkorni o'chirish qonunidan, yutilish qonunlarini ifodalovchi $x \wedge (x \vee y) \equiv x$ va $x \vee x \wedge y \equiv x$ teng kuchliliklardan

$$\left.\begin{array}{l}
A \wedge A \equiv A,\ A \vee A \equiv A,\ A \wedge J \equiv A,\ A \vee J \equiv J, \\
A \wedge \bar{J} \equiv \bar{J},\ A \vee \bar{J} \equiv A,\ A \vee \bar{A} \equiv J,\ A \wedge \bar{A} \equiv \bar{J}
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

teng kuchliliklardan ham foydalanamiz.

Faraz qilaylik, $\sigma$ – ch yoki yo qiymat qabul qiluvchi qandaydir parametr bo‘lsin. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$x^{\sigma} = x\sigma \vee \bar{x}\bar{\sigma} .$$

Ravshanki,

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, \text{ agar } \sigma = \text{ch bo'lsa}, \\ \bar{x}, \text{ agar } \sigma = \text{yo bo'lsa}, \end{cases}$$

hamda faqat va faqat $x = \sigma$ bo‘lgandagina $x^{\sigma}$ ch qiymat qabul qiladi.

**1- ta’rif.** *Berilgan elementar mulohazalar (o‘zgaruvchilar) yoki ularning inkorlari kon’yunksiyalaridan tashkil topgan formula shu o‘zgaruvchilar* ***elementar kon’yunksiyasi,*** *bu o‘zgaruvchilar yoki ularning inkorlari diz’yunksiyalaridan tashkil topgan formula esa shu o‘zgaruvchilar* ***elementar diz’yunksiyasi*** *deb ataladi.*

Tabiiyki, elementar kon’yunksiya (elementar diz’yunksiya) tarkibida faqat bitta o‘zgaruvchi ishtirok etishi ham mumkin. Shu sababli, bitta (masalan, $x$) o‘zgaruvchining o‘zi yoki uning inkoridan iborat $x$ yoki $\bar{x}$ ko‘rinishdagi ifodalar elementar kon’yunksiya ham elementar diz’yunksiya ham bo‘la oladi.

Umuman olganda, berilgan $n$ ta $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilar elementar kon’yunksiyasi

$$x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n} \qquad (3)$$

ko‘rinishdagi, bu o‘zgaruvchilar elementar diz’yunksiyasi esa

$$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \cdots \vee x_n^{\sigma_n} \qquad (4)$$

ko‘rinishdagi formuladir. Bu yerda $\sigma_i$ $(i = \overline{1,n})$ ch yoki yo qiymat qabul qiluvchi qandaydir parametrni ifodalaydi hamda $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilar orasida bir xillari bo‘lishi ham mumkin.

**Formulaning normal shakllari.** Formulaning normal shakllari quyidagi ta’rif asosida aniqlanadi.

**2- ta’rif.** *Berilgan formulaning* ***kon’yunktiv normal shakli*** *deb unga teng kuchli va elementar diz’yunksiyalarning kon’yunksiyalaridan tashkil topgan formulaga*, ***diz’yunktiv normal shakli*** *deb esa unga teng kuchli va elementar kon’yunksiyalarning diz’yunksiyalaridan tashkil topgan formulaga aytiladi.*

“Kon’yunktiv normal shakl” iborasini, qisqacha, KNSh, “diz’yunktiv normal shakl” iborasini esa, DNSh deb yozamiz.

(3) formula DNShning **kon’yunktiv hadi**, (4) formula esa KNShning **diz’yunktiv hadi** deb ham yuritiladi.

1- va 2- ta’riflarga ko‘ra, teng kuchli almashtirishlar bajarib, mantiq algebrasining ixtiyoriy formulasi uchun turli KNShlar va DNShlar topilishi mumkin.

**1- teorema.** *Mantiq algebrasining ixtiyoriy formulasini KNShga keltirish mumkin.*

**2- teorema.** *Mantiq algebrasining formulasi tavtologiya bo‘lishi uchun uning KNShidagi barcha elementar diz’yunktiv hadlarida kamida bittadan elementar mulohaza o‘zining inkori bilan birga qatnashishi zarur va yetarli.*

2- teorema berilgan formula tavtologiya yoki tavtologiya emasligini, chinlik jadvaliga murojaat qilmasdan, aniqlash imkonini beradi. Shuning uchun 2- teorema **chinlik alomati** deb yuritiladi. Chinlik alomatiga ko‘ra, berilgan formulaning tavtologiya bo‘lishi yoki bo‘lmasligini aniqlash uchun, uni KNShga keltirish kerak. Agar formulaning KNShdagi barcha elementar dizyunksiyalar ifodasida hech bo‘lmaganda bitta elementar mulohaza o‘zining inkori bilan birga qatnashgan bo‘lsa, u holda bu formula tavtologiya, aks holda esa tavtologiya emasligi aniqlanadi.

**3- teorema.** *Mantiq algebrasining ixtiyoriy formulasini DNShga keltirish mumkin.*

**4- teorema.** *Mantiq algebrasining formulasi aynan yolg‘on bo‘lishi uchun uning DNShdagi barcha elementar kon’yunktiv hadlarida kamida bittadan elementar mulohaza o‘zining inkori bilan birga qatnashishi zarur va yetarli.*

4- teorema berilgan formulaning doimo yolg‘on bo‘lishi yoki bo‘lmasligini, chinlik jadvaliga murojaat qilmasdan, aniqlash imkonini bergani uchun, uni **yolg‘onlik alomati** deb atash mumkin.

**5- teorema.** *Mulohazalar algebrasining ixtiyoriy formulasi uchun yechilish muammosi doimo ijobiy hal bo‘ladi.*

## Mavzu: Mukammal diz’yunktiv va konyunktiv normal forma

**To‘g‘ri va to‘liq elementar kon’yunksiya va diz’yunksiyalar.** Yuqorida teng kuchli almashtirishlar bajarib, mantiq algebrasining berilgan formulasi uchun turli KNShlar va DNShlar topish mumkinligi haqida ma’lumot berilgan edi. Formulalar uchun turli KNShlar va DNShlar orasida muayyan shartlarni qanoatlantiradiganlari muhim hisoblanadi. Quyida shunday shakllar o‘rganiladi.

**3- ta’rif.** *Agar elementar kon’yunksiya (diz’yunksiya) ifodasida ishtirok etuvchi har bir elementar mulohaza shu ifodada faqat bir marta uchrasa, u holda bu ifoda **to‘g‘ri elementar kon’yunksiya (diz’yunksiya)** deb ataladi.*

**4- ta’rif.** *Agar berilgan elementar mulohazalarning har biri elementar kon’yunksiya (diz’yunksiya) ifodasida faqat bir matra qatnashsa, bu ifoda shu **elementar mulohazalarga nisbatan to‘liq elementar kon’yunksiya (diz’yunksiya)** deb ataladi.*

**5- ta’rif.** *Agar formulaning KNShi (DNShi) ifodasida bir xil elementar diz’yunksiyalar (kon’yunksiyalar) bo‘lmasa va barcha elementar diz’yunksiyalar (kon’yunksiyalar) to‘g‘ri hamda ifodada qatnashuvchi barcha elementar mulohazalarga nisbatan to‘liq bo‘lsa, u holda bu ifoda **mukammal kon’yunktiv normal shakl (mukammal diz’yunktiv normal shakl)** deb ataladi.*[44]

**6- ta’rif.** *Berilgan* $x_1, x_2, ..., x_n$ *elementar mulohazalarga nisbatan formulaning MKNShidagi har bir* $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \cdots \vee x_n^{\sigma_n}$ *had **diz’yunktiv konstituyent,** uning MDNShidagi har bir* $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n}$ *had esa **kon’yunktiv konstituyent** deb ataladi.*

4- ta’rifda yerda $\sigma_i$ $(i = \overline{1, n})$ ch yoki yo qiymat qabul qiluvchi parametrni ifodalaydi va $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilar orasida bir xillari yo‘q.

1- jadval

| Amal | MKNSh | MDNSh |
|---|---|---|
| $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ |

[44] “Mukammal kon’yunktiv normal shakl” iborasini, qisqacha, MKNSh, “mukammal diz’yunktiv normal shakl” iborasini esa, MDNSh deb yozamiz.

| | | |
|---|---|---|
| $x \wedge y$ | $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$ | $x \wedge y$ |
| $x \vee y$ | $x \vee y$ | $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$ |
| $x \rightarrow y$ | $\bar{x} \vee y$ | $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$ |
| $x \leftrightarrow y$ | $(\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$ | $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$ |

**6- teorema.** *Elementar mulohazalarning tavtologiyadan farqli ixtiyoriy formulasini MKNShga keltirish mumkin.*

Ravshanki, agar formulaning MKNShi tarkibida qatnashuvchi barcha ifodalardagi $\wedge$ belgi o‘rniga $\vee$ belgi va, aksincha, $\vee$ o‘rniga $\wedge$ qo‘yilsa, u holda MDNSh hosil bo‘ladi. Xuddi shuningdek, agar formulaning MDNShi tarkibida qatnashuvchi barcha ifodalarda shunday o‘zgartirishlar bajarilsa, u holda MKNSh hosil bo‘ladi.

**7- teorema.** *Elementar mulohazalarning aynan yolg‘on bo‘lmagan ixtiyoriy formulasini MDNShga keltirish mumkin.*

**7- ta’rif.** *Agar formulaning MKNShi (MDNShi) ifodasida qatnashuvchi barcha elementar mulohazalardan tuzish mumkin bo‘lgan barcha elementar diz’yunksiyalar (kon’yunksiyalar) shu ifodada ishtirok etsa, u holda bunday MKNSh (MDNSh)* ***to‘liq MKNSh (MDNSh)*** *deb ataladi.*

### 3.Namunaviy masqlar va ularning yechimlari

**1-misol.** Distributivlik va idempotentlik qonunlariga asoslanib, $\overline{x \wedge y} \wedge (x \rightarrow z)$ formulaning kon’yunktiv normal shakllari, masalan, $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z)$, $(x \vee y \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z)$ va $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) \wedge (z \vee \bar{x})$ formulalar, $(x \vee y) \wedge (x \vee z)$ formula uchun esa diz’yunktiv normal shakllar, masalan, $x \vee yz$ va $x \vee xz \vee yz$ formulalar bo‘lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

**2-misol.** Ushbu $((x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})) \vee (x \wedge (\bar{x} \vee y))$ formulaning biror KNShini topish talab etilgan bo‘lsin. Berilgan formulani $P$ bilan belgilab (1) va (2) formulalardan foydalansak, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$P \equiv (((x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})) \vee x) \wedge (((x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})) \vee (\bar{x} \vee y)) \equiv \equiv ((x \vee y) \vee x) \wedge ((\bar{x} \vee \bar{y}) \vee x) \wedge$$
$$\wedge ((x \vee y) \vee (\bar{x} \vee y)) \wedge ((\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee y)) \equiv$$
$$\equiv (x \vee x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee x \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{x} \vee y \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee y) \equiv$$
$$\equiv (x \vee y) \wedge [J \vee \bar{y}] \wedge (J \vee y) \wedge (\bar{x} \vee J) \equiv \equiv (x \vee y) \wedge J \wedge J \wedge J \equiv x \vee y.$$

Demak, $P \equiv x \vee y$. Berilgan formulaning topilgan KNShida $x$ va $y$ o‘zgaruvchilarning bittagina elementar diz’yunksiyasi bor, ya’ni berilgan formula uchun KNSh bittagina $x \vee y$ diz’yunktiv haddan iboratdir.

**3-misol.** $Q \equiv \overline{x \vee y} \leftrightarrow x \wedge y$ formulani KNShga keltirish maqsadida 2-misoldagidek ish yuritib

$$Q \equiv (\overline{\overline{x \vee y}} \vee (x \wedge y)) \wedge ((\overline{x \vee y}) \vee (\overline{x \wedge y})) \equiv$$

$$\equiv ((x \vee y) \vee (x \wedge y)) \wedge ((\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee \bar{y})) \equiv$$

$$\equiv ((x \vee y \vee x) \wedge (x \vee y \vee y)) \wedge ((\bar{x} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{y})) \equiv$$

$$\equiv (x \vee y) \wedge (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \equiv (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$$

teng kuchliliklarga ega bo‘lamiz. Shunday qilib, $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$ formula berilgan $Q$ formula uchun KNSh bo‘lib, u ikkita $x \vee y$ va $\bar{x} \vee \bar{y}$ diz’yunktiv hadlarning kon’yunksiyasidan iboratdir. ■

**4-misol.** 2- teoremadan foydalanib $x \wedge \bar{x} \to \overline{y \wedge \bar{y}}$ va $\overline{x \wedge \bar{x}} \wedge (y \wedge \bar{y} \to z)$ formulalarning tavtologiya bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiramiz. Berilgan formulalarni, mos ravishda, $P$ va $Q$ bilan belgilab, (1) va (2) formulalardan foydalansak, quyidagi KNShlarga ega bo‘lamiz:

$$P = \overline{x \wedge \bar{x}} \vee \overline{y \wedge \bar{y}} = \bar{x} \vee x \vee \bar{y} \vee y,$$

$$Q = (\bar{x} \vee x) \wedge (\overline{y \wedge \bar{y}} \vee z) = (\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee y \vee z).$$

Bu formulalarning KNShlarida kamida bittadan elementar mulohaza o‘zining inkori bilan birga qatnashgani uchun berilgan formulalarning har biri tavtologiyadir. ■

**5-misol.** Berilgan

$$P \equiv (x \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (y \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{x} \wedge z \wedge \bar{z})$$

formulaning doimo yolg‘on formula bo‘lishini ko‘rsatamiz.

Haqiqatdan ham, $P$ formula DNShda yozilgan bo‘lib, uning tarkibidagi 1-elementar kon’yunksiya ifodasida $x$, 2- ifodasida $y$, 3-sida esa $x$ va $z$ elementar mulohazalar o‘zlarining inkorlari bilan birgalikda qatnashganlari uchun, yolg‘onlik alomatiga asosan, $P \equiv \bar{J}$. ■

**6-misol.** Berilgan $a \vee b \vee c$ va $\bar{a} \vee d \vee f$ elementar diz’yunksiyalar to‘g‘ri elementar diz’yunksiyalar, $\bar{a}bdc$ va $\bar{a}e\bar{c}b$ elementar kon’yunksiyalar esa to‘g‘ri elementar kon’yunksiyalardir. Lekin, $a \vee u \vee u \vee c$ va $u \vee \bar{u} \vee e \vee n$ elementar diz’yunksiyalar ifodasida $u$ elementar mulohaza bir martadan ortiq qatnashganligi sababli, ularning hech biri to‘g‘ri elementar diz’yunksiya bo‘la olmaydi. $x_2$ elementar mulohaza $x_1x_2x_3\bar{x}_2$ va $x_2x_2\bar{x}_2x_2x_6$ elementar kon’yunksiyalar tarkibida bir martadan ortiq qatnashganligi sababli, bu ifodalarning hech qaysisi to‘g‘ri elementar kon’yunksiya bo‘la olmaydi. ■

**7-misol.** Ushbu $x_1x_2x_3$, $x_1x_2x_3\bar{x}_2x_3$ va $\bar{x}_1x_5\bar{x}_3x_2$ elementar kon’yunksiyalarning hech qaysi biri $x_1, x_2, x_3, x_4$ elementar mulohazalarga nisbatan to‘liq elementar kon’yunksiya emas, lekin ularning birinchisi $x_1, x_2, x_3$ elementar mulohazalarga nisbatan, oxirgisi esa $x_1, x_2, x_3, x_5$ elementar mulohazalarga nisbatan to‘liq elementar kon’yunksiyadir.

Berilgan $\bar{a} \vee b \vee d \vee c$ elementar diz’yunksiya $a,b,c,d$ elementar mulohazalarga nisbatan to‘liq elementar diz’yunksiyadir, $x_1 \vee x_4 \vee x_3$ elementar diz’yunksiya esa $x_1, x_3, x_4$ elementar mulohazalarga nisbatan to‘liq elementar diz’yunksiya bo‘lsada, u $x_1, x_2, x_3, x_4$ elementar mulohazalarga nisbatan to‘liq elementar diz’yunksiya bo‘la olmaydi. ■

**8-misol.** Tarkibida faqat bitta asosiy mantiqiy amal qatnashgan formulalarning mukammal normal sakllari (MKNShlari va MDNShlari) 1-jadvalda keltirilgan.

Yuqoridagi tasdiqning to‘g‘riligini tekshirish o‘quvchiga havola qilinadi.

1- jadvaldan ko‘rinib turubdiki, $\bar{x}$ formulaning MKNShi ham, MDNShi ham uning o‘zidan iborat; $x \wedge y$ formulaning MKNShida uchta ($x \vee y$, $\bar{x} \vee y$ va $x \vee \bar{y}$) diz’yunktiv konstituyentlar bor, uning MDNShi esa bitta kon’yunktiv konstituyentdan (shu formulaning o‘zidan) iborat; va hokazo. ■

**9-misol.** Formulani MKNShga keltirish algoritmidan foydalanib $x$, $y$, $z$ va $u$ elementar mulohazalarning $A \equiv (\bar{x} \to x) \wedge (y \to \bar{y}) \wedge (z \leftrightarrow u)$ formulasini MKNShga keltiramiz. Dastlab, algoritmning 1- bandiga ko‘ra, berilgan $A$

formulani KNShga keltiramiz. Buning uchun, avvalo, $a \to b \equiv \bar{a} \vee b$ va $a \leftrightarrow b \equiv (\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b})$ teng kuchliliklardan foydalanib $A$ formulani faqat kon’yunksiya, diz’yunksiya va inkor mantiqiy amallari orqali ifodalaymiz:

$$A \equiv (\bar{\bar{x}} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee \bar{y}) \wedge ((\bar{z} \vee u) \wedge (z \vee \bar{u})).$$

Hosil bo‘lgan formulaga $\bar{\bar{x}} \equiv x$ teng kuchlilikni qo‘llasak, $A$ formula $(x \vee x) \wedge (\bar{y} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{z} \vee u) \wedge (z \vee \bar{u})$ KNShga keladi.

KNSh ifodasida barcha elementar diz’yunksiyalar turlicha bo‘lganligi sababli algoritmning 2- bandini bajarishga hojat yo‘q.

KNSh ifodasidagi 1- va 2- elementar diz’yunksiyalar to‘g‘ri elementar diz’yunksiyalar bo‘lmaganligi uchun algoritmning 3- banda ifodalangan jarayonlarni bajarishga o‘tamiz. KNSh ifodasidagi hech qaysi elementar diz’yunksiya ifodasida birorta ham o‘zgaruvchi o‘zining inkori bilan birgalikda qatnashmaganligi sababli 3- banddagi a) hol bu yerda ro‘y bermaydi. KNSh ifodasidagi 1- elementar diz’yunksiyada $x$, 2- elementar diz’yunksiyada esa $\bar{y}$ ikki marta qatnashgani uchun b) holda bayon qilingandek ish yuritib, $A$ formula uchun barcha elementar diz’yunksiyalari to‘g‘ri elementar diz’yunksiyalardan iborat $x \wedge \bar{y} \wedge (\bar{z} \vee u) \wedge (z \vee \bar{u})$ KNShni hosil qilamiz. Ushbu bobning 5- paragrafidagi 2- teoremaga asosan, $A$ formula tavtologiya emas.

Algoritmning 4- bandini bajaramiz. Ko‘rinib turibdiki, KNShdagi 1- elementar diz’yunksiyada $y$, $z$ va $u$, 2- elementar diz’yunksiyada $x$, $z$ va $u$, 3- va 4- elementar diz’yunksiyalarda esa $x$ va $y$ o‘zgaruvchilar yoki ularning inkorlari yo‘q. Shularni e’tiborga olib, KNSh ifodasidagi to‘rtala elementar diz’yunksiyalarni to‘liq elementar diz’yunksiyalar shakliga keltirish maqsadida 4- bandda ifodalangan jarayonni qo‘llaymiz. Natijada 1- elementar diz’yunksiya ( $x$ ) uchun

$$x \equiv x \vee (y \wedge \bar{y}) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv$$

$$\equiv ((x \vee y) \vee (z \wedge \bar{z})) \wedge ((x \vee \bar{y}) \vee (z \wedge \bar{z})) \equiv$$

$$\equiv (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \equiv$$

$$\equiv ((x \vee y \vee z) \vee (u \wedge \bar{u})) \wedge ((x \vee y \vee \bar{z}) \vee (u \wedge \bar{u})) \wedge$$

$$\wedge ((x \vee \bar{y} \vee z) \vee (u \wedge \bar{u})) \wedge ((x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \vee (u \wedge \bar{u})) \equiv$$

$$\equiv (x\vee y\vee z\vee u)\wedge (x\vee y\vee z\vee \bar{u})\wedge \wedge (x\vee y\vee \bar{z}\vee u)\wedge (x\vee y\vee \bar{z}\vee \bar{u})\wedge$$

$$\wedge (x\vee \bar{y}\vee z\vee u)\wedge (x\vee \bar{y}\vee z\vee \bar{u})\wedge$$

$$\wedge (x\vee \bar{y}\vee \bar{z}\vee u)\wedge (x\vee \bar{y}\vee \bar{z}\vee \bar{u}),$$

2- elementar diz'yunksiya ( $\bar{y}$ ) uchun[45]

$$\bar{y}\equiv (x\vee \bar{y}\vee z\vee u)\wedge (x\vee \bar{y}\vee z\vee \bar{u})\wedge \wedge (x\vee \bar{y}\vee \bar{z}\vee u)\wedge (x\vee \bar{y}\vee \bar{z}\vee \bar{u})\wedge$$

$$\wedge (\bar{x}\vee \bar{y}\vee z\vee u)\wedge (\bar{x}\vee \bar{y}\vee z\vee \bar{u})\wedge$$

$$\wedge (\bar{x}\vee \bar{y}\vee \bar{z}\vee u)\wedge (\bar{x}\vee \bar{y}\vee \bar{z}\vee \bar{u}),$$

3- elementar diz'yunksiya ( $\bar{z}\vee u$) uchun

$$\bar{z}\vee u\equiv (x\vee y\vee \bar{z}\vee u)\wedge (x\vee \bar{y}\vee \bar{z}\vee u)\wedge$$

$$\wedge (\bar{x}\vee y\vee \bar{z}\vee u)\wedge (\bar{x}\vee \bar{y}\vee \bar{z}\vee u)$$

va 4- elementar diz'yunksiya ( $z\vee \bar{u}$ ) uchun

$$z\vee \bar{u}\equiv (x\vee y\vee z\vee \bar{u})\wedge (x\vee \bar{y}\vee z\vee \bar{u})\wedge$$

$$\wedge (\bar{x}\vee y\vee z\vee \bar{u})\wedge (\bar{x}\vee \bar{y}\vee z\vee \bar{u})$$

teng kuchliliklarga ega bo'lamiz.

Topilgan barcha KNShlar $x$, $y$, $z$ va $u$ elementar mulohazalarga nisbatan to'liq KNShlardir. Bu KNShlarni o'zaro solishtirib, ularning tarkibida bir xil elementar diz'yunksiyalar bor (masalan, 1- va 2- KNShlardagi $x\vee \bar{y}\vee z\vee u$ elementar diz'yunksiya) bo'lgan vaziyat ro'y berganligini aniqlaymiz. Shuning uchun, algoritmning 5- bandi boshqarishni uning 2- bandiga o'tkazadi.

Algoritmning 2- bandini bajarib, $A$ formula uchun

$$(x\vee y\vee z\vee u)\wedge (x\vee y\vee z\vee \bar{u})\wedge (x\vee y\vee \bar{z}\vee u)\wedge$$

$$\wedge (x\vee y\vee \bar{z}\vee \bar{u})\wedge (x\vee \bar{y}\vee z\vee u)\wedge (x\vee \bar{y}\vee z\vee \bar{u})\wedge$$

$$\wedge (x\vee \bar{y}\vee \bar{z}\vee u)\wedge (x\vee \bar{y}\vee \bar{z}\vee \bar{u})\wedge (\bar{x}\vee y\vee z\vee \bar{u})\wedge$$

$$\wedge (\bar{x}\vee y\vee \bar{z}\vee u)\wedge (\bar{x}\vee \bar{y}\vee z\vee u)\wedge (\bar{x}\vee \bar{y}\vee z\vee \bar{u})\wedge$$

$$\wedge (\bar{x}\vee \bar{y}\vee \bar{z}\vee u)\wedge (\bar{x}\vee \bar{y}\vee \bar{z}\vee \bar{u})$$

KNSh ifodasiga ega bo'lamiz.

Algoritmning 3- bandi boshqarishni uning 4- bandiga, 4- bandi esa 6- bandiga o'tkazadi, chunki oxirgi KNSh ifodasidagi barcha elementar

---

[45] Bu yerda va keyingi elementar diz'yunksiyalar uchun oralik teng kuchliliklarni tushirib qoldirdik.

diz’yunksiyalar to‘g‘ri va to‘liq elementar diz’yunksiyalardir. Sunday qilib, berilgan $A$ formula uchun oxirgi formula MKNShdir. ■

**10-misol.** 2- teoremadan foydalanib, 4- misolda MKNShi topilgan $A \equiv (\bar{x} \to x) \wedge (y \to \bar{y}) \wedge (z \leftrightarrow u)$ formulani MDNShga keltiramiz. Ushbu bobning 5-paragrafidagi 4- teoremaga asoslanib, berilgan $A$ formulaning doimo yolg‘on emasligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Avvalo mantiqiy formulani MKNShga keltirish algoritmidan foydalanib $\bar{A} \equiv \overline{(\bar{x} \to x) \wedge (y \to \bar{y}) \wedge (z \leftrightarrow u)}$ formulani MKNShga keltiramiz:

$$\bar{A} \equiv \overline{\bar{x} \to x} \vee \overline{y \to \bar{y}} \vee \overline{z \leftrightarrow u} \equiv \bar{x}\bar{x} \vee y\bar{\bar{y}} \vee z\bar{u} \vee \bar{z}u \equiv$$
$$\equiv \bar{x} \vee y \vee z\bar{u} \vee \bar{z}u \equiv (\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{z}u)(\bar{x} \vee y \vee \bar{u} \vee \bar{z}u) \equiv$$
$$\equiv (\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z \vee u)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{u})(\bar{x} \vee y \vee \bar{u} \vee u) \equiv$$
$$\equiv (\bar{x} \vee y \vee J)(\bar{x} \vee y \vee z \vee u)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{u})(\bar{x} \vee y \vee J) \equiv$$
$$\equiv (\bar{x} \vee y \vee z \vee u)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{u}).$$

$\bar{A}$ formulaning topilgan MKNShi tarkibida qatnashgan barcha $\wedge$ belgilar o‘rniga $\vee$ belgi va, aksincha, $\vee$ o‘rniga $\wedge$ hamda $y$, $z$ va $u$ elementar mulohazalar o‘rinlariga mos ravishda $\bar{y}$, $\bar{z}$ va $\bar{u}$, shunga o‘xshash, $\bar{x}$, $\bar{z}$ va $\bar{u}$ inkorlar o‘rinlariga mos ravishda $x$, $y$, $z$ va $u$ qo‘yilsa, u holda $A$ formulaning MDNShi $x\bar{y}\bar{z}\bar{u} \vee x\bar{y}zu$ hosil bo‘ladi. ■

**11-misol.** Ushbu $(x \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)$ formula $x$ va $y$ elementar mulohazalarga nisbatan MKNShda bo‘lsada, u to‘liq MKNShda emas. $x$ va $y$ elementar mulohazalarga nisbatan to‘liq MKNShi ifodasi $(x \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$ ko‘rinishga ega.

MDNShdagi $xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z$ formula $x$, $y$ va $z$ elementar mulohazalarga nisbatan to‘liq MDNShda emas, lekin $xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ formula bu elementar mulohazalarga nisbatan to‘liq MDNShdagi formuladir

## Mavzu: Ikkilamchi funksiyalar. Ikkilamchilik prinsipi.

**Ikki taraflama funksiya.** Endi ikki taraflama (qo‘shma) funksiya tushunchasini kiritamiz. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaga ikki taraflama bo‘lgan funksiyani topish uchun $f$ funksiyaning chinlik jadvalida hamma o‘zgaruvchilarni ularning inkoriga almashtirish kerak, ya’ni hamma joyda 1ni 0ga va 0ni 1ga almashtirish kerak.

**1- ta’rif.** *Quyidagicha aniqlangan*

$$f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$$

1- jadval

| Berilgan funksiya | Ikki taraflama funksiya |
|---|---|
| $f_1(x) = x$ | $f_1^*(x) = x$ |
| $f_2(x) = \bar{x}$ | $f_2^*(x) = \bar{x}$ |
| $f_3(x, y) = xy$ | $f_3^* = x \vee y$ |
| $f_4(x, y) = x \vee y$ | $f_4^* = xy$ |
| $f_5(x, y) = x \to y$ | $f_5^* = \overline{y \to x}$ |
| $f_6(x, y) = x \leftrightarrow y$ | $f_6^* = \overline{x \leftrightarrow y}$ |
| $f_7 = 1$ | $f_7^* = 0$ |
| $f_8 = 0$ | $f_8^* = 1$ |

*funksiyaga* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiyaning **ikki taraflama funksiyasi** deb aytiladi.*

**2- ta’rif.** *Agar*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$$

*munosabat bajarilsa, u holda* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ***o‘z-o‘ziga ikki taraflama funksiya** deb ataladi.*

Ta’rifga asosan, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ikki taraflama funksiya $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ va $(\bar{\alpha}_1, ..., \bar{\alpha}_n)$ qiymatlar satrida qarama-qarshi qiymatlar qabul qiladi.

**Teorema.** *Agar*

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = f(f_1(x_{11}, ..., x_{1p_1}), ..., f_m(x_{m1}, ..., x_{mp_m}))$$

*bo‘lsa, u holda*

$$\Phi^*(x_1,...,x_n) = f^*(f_1^*(x_{11},...,x_{1p_1}),..., f_m^*(x_{m1},...,x_{mp_m}))$$

*bo‘ladi.*

**Ikki taraflama qonun.** 1- teoremaning isbotidan ikki taraflama qonun kelib chiqadi.

**Ikki taraflama qonun.** $\varphi_1, \varphi_2,..., \varphi_m$ *funksiyalarning superpozisiyasiga ikki taraflama bo‘lgan funksiya mos ravishda* $\varphi_1^*, \varphi_2^*,..., \varphi_m^*$ *ikki taraflama funksiyalar superpozisiyasiga teng kuchlidir, ya’ni agar* $A = C[\varphi_1, \varphi_2,..., \varphi_m]$ *formula* $f(x_1,...,x_n)$ *funksiyani realizasiya etsa, u holda* $C[\ \varphi_1^*, \varphi_2^*,..., \varphi_m^*\ ]$ *formula* $f^*(x_1,...,x_n)$ *funksiyani realizasiya etadi.*

Bu formula $A$ formulaga **ikki taraflama bo‘lgan formula** deb aytiladi va u $A^*$ deb belgilanadi. Demak, $A^* = C[\varphi_1^*, \varphi_2^*,..., \varphi_m^*]$.

Ushbu qonundan o‘z-o‘ziga ikki taraflama bo‘lgan funksiyalarning superpozisiyasi yana o‘z-o‘ziga ikki taraflama funksiya bo‘lishligi kelib chiqadi, ya’ni agar $\varphi_1, \varphi_2,..., \varphi_m$ o‘z-o‘ziga ikki taraflama funksiya bo‘lsa, u holda $\Phi^* = \varphi^*(\varphi_1^*,...\varphi_m^*)$ funksiya ham o‘z-o‘ziga ikki taraflama bo‘ladi. Haqiqatan ham,

$$\Phi^* = \varphi^*(\varphi_1^*,...\varphi_m^*) = \varphi(\varphi_1,...\varphi_m) = \Phi .$$

Agar funksiya formula orqali ifodalangan va bu formula o‘z navbatida $\wedge$, $\vee$, $\neg$ mantiq amallari orqali ifodalangan bo‘lsa, u holda bu funksiyaga (formulaga) ikki taraflama bo‘lgan funksiyani (formulani) topish uchun $\vee$ belgini $\wedge$ belgiga, $\wedge$ni $\vee$ga, 1ni 0ga va 0ni 1ga almashtirish kifoya. Bu prinsipni teng kuchli formulalarga nisbatan ishlatganda, yana teng kuchli formulalar hosil qilamiz, ya’ni $A(x_1,...,x_n) = B(x_1,...,x_n)$ bo‘lsa, u holda $A^*(x_1,...,x_n) = B^*(x_1,...,x_n)$.

Ushbu prinsipga tayanib mantiq algebrasining bir formulasidan boshqa formulasini, bir teoremasidan boshqa teoremasini, bir ta’rifidan esa boshqa ta’rifini hosil qilish mumkin.

Mantiq algebrasida elementlari $n$ ta argumentli o‘z-o‘ziga ikki taraflama funksiyalardan iborat bo‘lgan to‘plamni $S$ bilan belgilaymiz, uning elementlari soni $2^{2^n - 1}$ ga tengdir.

Endi o‘z-o‘ziga ikki taraflama bo‘lmagan funksiyalar haqidagi lemmani ko‘rib chiqaylik.

**L e m m a .** *Agar* $\varphi(x_1,...,x_n)\notin S$ *bo‘lsa, u holda undan argumentlarining o‘rniga* $x$ *va* $\bar{x}$ *funksiyalarni qo‘yish usuli bilan bir argumentli o‘z-o‘ziga ikki taraflama bo‘lmagan funksiya, ya’ni konstantani hosil qilish mumkin.*

## 1. Namunaviy mashqlar va ularning yechimlari

**1- m i s o l .** Mulohazalar algebrasining asosiy elementar funksiyalariga ikki taraflama bo‘lgan funksiyalarni topamiz (1- jadvalga qarang). Demak, ta’rifga asosan, $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar o‘z-o‘ziga ikki taraflama funksiya bo‘ladi. ■

**2- m i s o l .** $f(x,y,z)=xy\vee yz\vee xz$ funksiyaning o‘z-o‘ziga ikki taraflama funksiya ekanligini isbot qilamiz. Haqiqatdan ham

$$f^*(x,y,z)=\overline{\bar{x}\bar{y}\vee\bar{y}\bar{z}\vee\bar{x}\bar{z}}=\overline{\bar{x}\bar{y}}\wedge\overline{\bar{y}\bar{z}}\wedge\overline{\bar{x}\bar{z}}=(x\vee y)(y\vee z)(x\vee z)=$$

$$=[(x\vee y)y\vee(x\vee y)z](x\vee z)=[y\vee yz\vee xz](x\vee z)=$$

$$=(y\vee xz)(x\vee z)=xy\vee yz\vee x(x\vee z)z=xy\vee yz\vee xz$$

Demak, $f(x,y,z)=f^*(x,y,z)$ ekanligi uchun $f$ o‘z-o‘ziga ikki taraflama funksiyadir. ■

**3- m i s o l .** Ushbu bobning 9- paragrafida keltirilgan (2), (3), (6), (8), (10), (12) teng kuchli formulalarga ushbu prinsipni qo‘llasak, (4), (5), (7), (9), (11), (13) teng kuchli formulalar kelib chiqadi. ■

F= $x\vee y, x\to y$ } funksiyalarni o’z-o’ziga qo’shmaligini tekshirish uchun funksiyalarning chinlik jadvalini tuzamiz

| $x$ | $y$ | $x\vee y$ | $x\to y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Chinlik jadvali yordamida funksiyalarning S-o'z-o'ziga qo'shma funksiyalar sinfiga kirishini tekshiramiz. Buning uchun chinlik jadvalida funksiyalarni qiymatlari satrini chiziq bilan o'rtasidan ajratib, shu chiziqqa nisbatan qiymatlarning simmetrikligini tekshiramiz

Jadvaldan ko'rinib turibdiki $x \vee y$ va $x \to y$ funksiyalar o'z-o'ziga qo'shma emas, chunki funksiyalarning chinlik to'plami simmetrik emas.

## Mavzu: Jegalkin ko'pxadi. Funksiyalar sistemasining to'liqligi va yopiqligi

**Nazariy qism:**

**Funksional yopiq sinflar.** Mantiq algebrasining $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi berilgan bo'lsin.

**1- ta'rif.** *Agar mantiq algebrasining istalgan funksiyasini* $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ *sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali ifodalash mumkin bo'lsa, u holda* $\Phi$ *sistema* ***to'liq funksiyalar sistemasi*** *deb ataladi.*

**2- ta'rif.** *Mantiq algebrasining superpozitsiyaga nisbatan yopiq bo'lgan har qanday funksiyalar sistemasi* ***funksional yopiq sinf*** *deb ataladi.*

**3- ta'rif.** *O'z-o'zidan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari sinfidan (*$P_2$ *dan) farq qiluvchi funksional yopiq sinflarga kirmaydigan xususiy funksional yopiq sinf* ***maksimal funksional yopiq sinf*** *deb ataladi.*

Mantiq algebrasida hammasi bo'lib beshta maksimal funksional yopiq sinf mavjud. Bular quyidagilardir: $P_0, P_1, M, S, L$.

**Post teoremasi.** E. L. Post tomonidan funksiyalar sistemasi to'liqligining yetarli va zarur shartlari topilgan.

**Post teoremasi.** $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ *funksiyalar sistemasi to'liq bo'lishi uchun bu sistemada* $P_0, P_1, M, S, L$ *maksimal funksional yopiq sinflarning har biriga kirmaydigan kamida bitta funksiya mavjud bo'lishi*

### Ikki taraflama funksiya.

**1- t a ’ r i f .** *Quyidagicha aniqlangan*

$$f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$$

1- jadval

| Berilgan funksiya | Ikki taraflama funksiya |
|---|---|
| $f_1(x) = x$ | $f_1^*(x) = x$ |
| $f_2(x) = \bar{x}$ | $f_2^*(x) = \bar{x}$ |
| $f_3(x, y) = xy$ | $f_3^* = x \vee y$ |
| $f_4(x, y) = x \vee y$ | $f_4^* = xy$ |
| $f_5(x, y) = x \to y$ | $f_5^* = \overline{y \to x}$ |
| $f_6(x, y) = x \leftrightarrow y$ | $f_6^* = \overline{x \leftrightarrow y}$ |
| $f_7 = 1$ | $f_7^* = 0$ |
| $f_8 = 0$ | $f_8^* = 1$ |

*funksiyaga* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiyaning* ***ikki taraflama funksiyasi*** *deb aytiladi.*

**2- t a ’ r i f .** *Agar*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$$

*munosabat bajarilsa, u holda* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ***o‘z-o‘ziga ikki taraflama funksiya*** *deb ataladi.*

**3.11.2. Jegalkin ko‘phadi.**

**1- t a ’ r i f .** $\sum x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k} + a$ *ko‘rinishdagi ko‘phad* ***Jegalkin ko‘phadi*** *deb ataladi, bu yerda hamma* $x_{i_j}$ *o‘zgaruvchilar birinchi darajada qatnashadi,* $(i_1, ..., i_k)$ *qiymatlar satrida hamma* $i_j$ *lar har xil bo‘ladi,* $a \in E_2 = \{0, 1\}$.

**2- t a ’ r i f .** $x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_k} + a$ *ko‘rinishdagi funksiya* ***chiziqli funksiya*** *deb ataladi.*

**Mantiq algebrasidagi monoton funksiyalar.**

**Tartiblash.** 0<1 munosabati orqali {0,1} to‘plamini tartiblashtiramiz. $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ va $\beta=(\beta_1,...,\beta_n)$ qiymatlar satrlari bo‘lsin.

**1- ta’rif.** *Agar* $\alpha_i \le \beta_i$ *tengsizlik hech bo‘lmaganda bitta* $i$ *uchun bajarilsa yoki* $\alpha$ *va* $\beta$ *qiymatlar satrlari ustma-ust tushsa, u holda* $\alpha$ ***qiymatlar satri*** $\beta$ ***qiymatlar satridan oldin keladi*** *deb aytamiz va* $\alpha \prec \beta$ *shaklda yozamiz.*

**2- ta’rif.** *Agar* $\alpha \prec \beta$ *munosabatdan* $f(\alpha_1,...,\alpha_n) \le f(\beta_1,...,\beta_n)$ *tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda* $f(x_1,...,x_n)$ *funksiya* ***monoton funksiya*** *deb ataladi.*

**3- ta’rif** *Agar* $\alpha \prec \beta$ *munosabatdan* $f(\alpha_1,...,\alpha_n) > f(\beta_1,...,\beta_n)$ *tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda* $f(x_1,...,x_n)$ ***nomonoton funksiya*** *deb ataladi.*

**1- teorema.** *Monoton funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil qilingan funksiya ham monoton funksiya bo‘ladi.*

**2- teorema.** *Agar* $f(x_1,...,x_n) \in M$ *bo‘lsa, u holda undan argumentlari o‘rniga 0, 1 va x funksiyani qo‘yish usuli bilan* $\bar{x}$ *funksiyani hosil qilish mumkin.*

**4-ta’rif.** *Agar* $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *funksiya uchun* $f(0,0,...,0)\equiv 0$ *bo’lsa, u holda u* ***0 saqlovchi funksiya****,* $f(1,1,...,1)\equiv 1$ *bo’lganda esa* ***1 saqlovchi funksiya*** *deb ataladi.*

| Post jadvali | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $P_0$ | $P_1$ | $S$ | $L$ | $M$ |
| $\varphi_1$ | | | | | |
| $\varphi_2$ | | | | | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $\varphi_n$ | | | | | |

Amalda berilgan $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ funksiyalar sistemasining to‘liq yoki to‘liq emasligini aniqlash uchun **Post jadvali** deb ataluvchi jadvaldan foydalaniladi. Post jadvali quyida keltirilgan.

Jadvalning xonalariga o‘sha satrdagi funksiya funksional yopiq sinflarning elementi bo‘lsa “+” ishora, bo‘lmasa “–” ishorasi qo‘yiladi. $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ sistema to‘liq funksiyalar sistemasi bo‘lishi uchun, Post teoremasiga asosan, jadvalning har bir ustunida kamida bitta “–” ishorasi bo‘lishi yetarli va zarur.

Demak, Post teoremasi shartidan $P_0, P_1, M, S, L$ maksimal funksional yopiq sinflarning birortasini ham olib tashlash mumkin emas. Bu xulosadan, o‘z navbatida, $P_0, P_1, M, S, L$ maksimal funksional yopiq sinflarning birortasi ham boshqasining qism to‘plami bo‘la olmasligi kelib chiqadi. ■

**XULOSA**

1. Funksiyalar sistemasining to’liqligi tushunchasi maliy jihatdan muhim ahamiyatga ega ekanligi ko’rsatildi.

2.Funksional yopiq sinflarnig ta’rifiga ko’ra, 0 va 1 saqlovchi hamda monoton, o’z-o’ziga qo’shma, chiziqli funksiyalar xususiyati o’rganildi;

3. Post teoremasi natijalarini amaliy tadbiqi o’rganildi.

**Amaliy qism: Quyida berilgan funksiyalar sinfining to’liqligini Post jadvali yordamida tekshiring;**

$$F = \{((x_1 \to \overline{x_2}) \oplus (x_2 \to \overline{x_3})) \leftrightarrow (x_2 \to x_3);\ (x_2 \to x_1) \cdot (x_2 \downarrow x_2);$$

$$((x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}) \to (x_2 \to x_1 \cdot x_3)) \leftrightarrow (x_1 \vee x_3)\};$$

**Berilgan funksiyalar sinfining to’liqligini Post jadvali yordamida tekshirish uchun quyidagi ketma-ketlikdagi ishlarni amalga oshiramiz:**

**Amaliy qism uchun ta'riflar:**

**1-ish.** Berilgan formulada qatnashayotgan o'zgaruvchilar sonini aniqlab, jadvalning o'zgaruvchilar ustunini to'ldiramiz.

Berilgan formulada uchta o\`zgaruvchi qatnashgan, ya'ni *x* , *y va z* o\`zgaruvchilar. Demak N=$2^n$ formula orqali o\`zgaruvchilarning nechta qiymat qabul qilishini topamiz.

Berilgan formulada uchta o\`zgaruvchi qatnashganligi uchun o\`zgaruvchilarning har biri 8 tadan qiymat qabul qiladi. Buni quydagi jadvalda o\`zgaruvchilarning va ularning inkorlarini qiymatlarini keltiramiz. (1-jadval).

**1.1-ish.** Quyidagi formulani chinlik jadvalini yuqoridagi ta'riflardan foydalanib tuzamiz:

$$F = \{((x_1 \to \overline{x_2}) \oplus (x_2 \to \overline{x_3})) \leftrightarrow (x_2 \to x_3);$$

**1.2-ish.** $((x_1 \to \overline{x_2}) \oplus (x_2 \to \overline{x_3})) \leftrightarrow (x_2 \to x_3)$ ning qiymatini topamiz: (1-jadval)

**1-jadval**

$a = x_1 \to \overline{x_2};\ b = x_2 \to \overline{x_3};\ c = x_2 \to x_3;$ deb belgilash kiritib olamiz.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\overline{x_2}$ | $\overline{x_3}$ | $x_1 \to \overline{x_2}$ | $x_2 \to \overline{x_3}$ | $x_2 \to x_3$ | $a \oplus b$ | $(a \oplus b) \leftrightarrow c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

**Xulosa:** Ushbu $((x_1 \to \overline{x_2}) \oplus (x_2 \to \overline{x_3})) \leftrightarrow (x_2 \to x_3)$ formulaning chinlik jadvali {00110000}.

**2-ish .** Endi quyidagi formulani chinlik jadvalini yuqoridagi ta'riflardan foydalanib tuzamiz:

$$(x_2 \to x_1) \cdot (x_2 \downarrow x_2);$$

**2.1-ish.** $(x_2 \to x_1) \cdot (x_2 \downarrow x_2);$ ning qiymatini topamiz: (2-jadval)

**2-jadval**

| $x_1$ | $x_2$ | $x_2 \to x_1$ | $x_2 \downarrow x_2$ | $(x_2 \to x_1) \cdot (x_2 \downarrow x_2)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

**Xulosa:** Ushbu $(x_2 \to x_1) \cdot (x_2 \downarrow x_2);$ formulaning chinlik jadvali *f*={1010}.

**3-ish .** Endi quyidagi formulani chinlik jadvalini yuqoridagi ta'riflardan foydalanib tuzamiz:

$$((x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}) \to (x_2 \to x_1 \cdot x_3)) \leftrightarrow (x_1 \vee x_3);$$

**3.1-ish.** $((x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}) \to (x_2 \to x_1 \cdot x_3)) \leftrightarrow (x_1 \vee x_3);$ ning qiymatini topamiz.(3-jadval)

**3-jadval**

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\overline{x_3}$ | $x_2\overline{x_3}$ | $a$ | $x_1x_3$ | $b$ | $a \to b$ | $c$ | $(a \to b) \leftrightarrow c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$a = x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}$ **;**

$b = x_2 \to x_1 \cdot x_3;$

$c = x_1 \vee x_3;$

deb belgilash kiritib oldim.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Xulosa: Ushbu $((x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}) \to (x_2 \to x_1 \cdot x_3)) \leftrightarrow (x_1 \vee x_3);$ formulaning chinlik jadvali *f*={01111101}.

Kiyingi qiladigan ishim 3 ta funksiyani ham **Post** jadvaliga tekshiramiz.

**1-ish.** Formulalarni $P_0$ yopiq sinfga tegishli yoki tegishli emasligi tekshiramiz.

1) $f_1(x,y,z) = ((x_1 \to \overline{x_2}) \oplus (x_2 \to \overline{x_3})) \leftrightarrow (x_2 \to x_3)$

$f_1(0,0,0) = ((0 \to 1) \oplus (0 \to 1)) \leftrightarrow (0 \to 0) = 0$ demak $f_1$ formula $P_0$ yopiq sinfga tegishli ekan.

2) $f_1(x,y,z) = (x_2 \to x_1) \cdot (x_2 \downarrow x_2);$

$f_2(0,0,0) = (0 \to 0)(0 \downarrow 0) = 1$ demak $f_2$ formula $P_0$ yopiq sinfga tegishli emas ekan.

3) $f_3(x,y,z) = ((x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}) \to (x_2 \to x_1 \cdot x_3)) \leftrightarrow (x_1 \vee x_3);$

$f_3(0,0,0) = ((0 \vee 0 \cdot 1) \to (0 \to 0 \cdot 0)) \leftrightarrow (0 \vee 0) = 0$ demak $f_3$ formula $P_0$ yopiq sinfga tegishli ekan.

**2-ish**. Formulalarni $P_1$ yopiq sinfga tegishli yoki tegishli emasligi tekshiramiz.

1) $f_1(x,y,z) = ((x_1 \to \overline{x_2}) \oplus (x_2 \to \overline{x_3})) \leftrightarrow (x_2 \to x_3)$

$f_1(1,1,1) = ((1 \to 0) \oplus (1 \to 0)) \leftrightarrow (1 \to 1) = 0$ demak $f_1$ formula $P_1$ yopiq sinfga tegishli emas ekan.

2) $f_1(x,y,z) = (x_2 \to x_1) \cdot (x_2 \downarrow x_2);$

$f_2(1,1,1) = (1 \to 1)(1 \downarrow 1) = 0$ demak $f_2$ formula $P_1$ yopiq sinfga tegishli emas ekan.

3) $f_3(x,y,z)=((x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}) \to (x_2 \to x_1 \cdot x_3)) \leftrightarrow (x_1 \vee x_3);$

$f_3(1{,}1{,}1)=((1 \vee 1 \cdot 0) \to (1 \to 1 \cdot 1)) \leftrightarrow (1 \vee 1)=1$ demak $f_3$ formula $P_1$ yopiq sinfga tegishli ekan.

**3-ish.** o‘z-o‘ziga ikki taraflama funksiyalar sinfi;

**1)** $F=\overline{((\overline{x_1} \to x_2) \oplus (\overline{x_2} \to x_3)) \leftrightarrow (\overline{x_2} \to \overline{x_3})};$

$a=\overline{x_1} \to x_2;\ b=\overline{x_2} \to x_3;\ c=\overline{x_2} \to \overline{x_3};$ deb belgilash kiritib olamiz.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\overline{x_1}$ | $\overline{x_2}$ | $\overline{x_3}$ | $\overline{x_1} \to x_2$ | $\overline{x_2} \to x_3$ | $a \oplus b$ | $\overline{x_2} \to \overline{x_3}$ | $(a \oplus b) \leftrightarrow c$ | $F^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

**Demak:** $F^* \neq F$ funksiya o’z-o’ziga ikki taraflama emas ekan.

**2)** $F^*=\overline{(\overline{x_2} \to \overline{x_1})(\overline{x_2} \downarrow \overline{x_2})};$

| $\overline{x_1}$ | $\overline{x_2}$ | $\overline{x_2} \to \overline{x_1}$ | $\overline{x_2} \downarrow \overline{x_2}$ | $F^*$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

**Demak:** $F^* = F$ funksiya o'z-o'ziga ikki taraflama ekan.

**3)** $F^* = \overline{((\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \cdot x_3) \to (\overline{x_2} \to \overline{x_1}\,\overline{x_3})) \leftrightarrow (\overline{x_1} \vee \overline{x_3})}$;

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\overline{x_1}$ | $\overline{x_2}$ | $\overline{x_3}$ | $\overline{x_2}x_3$ | $a$ | $\overline{x_1}\,\overline{x_3}$ | $b$ | $c$ | $a \to b$ | $(a \to b) \leftrightarrow c$ | $F^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

$a = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \cdot x_3$;**;** $b = \overline{x_2} \to \overline{x_1}\,\overline{x_3}$; $c = \overline{x_1} \vee \overline{x_3}$; deb belgilash kiritib oldim.

**Demak:** $F^* \neq F$ funksiya o'z-o'ziga ikki taraflama emas ekan.

**4-ish.** Formulalarni chiziqli yoki chiziqli emasligiga tekshiramiz. Buning uchun chinlik jadvalidagi oxirgi natijalardan foydalanamiz.

1) $f_1(x, y, z) = ((x_1 \to \overline{x_2}) \oplus (x_2 \to \overline{x_3})) \leftrightarrow (x_2 \to x_3)$

$L_1 = a_0xyz + a_1xy + a_2xz + a_3yz + a_4x + a_5y + a_6z + b$;

$f(0,0,0) = 0 = a_0000 + a_100 + a_200 + a_30 + a_40 + a_50 + a_60 + b$, demak $b = 0$

$f(0,0,1) = 0 = a_61 + 0$ demak $a_6 = 0$

$f(0,1,0) = 1 = a_51 + 0$ demak $a_5 = 1$

$f(0,1,1) = 1 = a_311 + a_51 + a_61 + 0$ demak $a_3 = 0$

$f(1,0,0) = 0 = a_41 + 0$ demak $a_4 = 0$

$f(1,0,1) = 0 = a_211 + a_4 + a_6 + 0$ demak $a_2 = 0$

$f(1,1,0) = 0 = a_111 + a_4 + a_5 + 0$ demak $a_1 = 1$

$f(1,1,1) = 0 = a_0111 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0$ demak $a_0 = 0$ bundan kelib chiqadiki

$L = xy + y$ chiziqli emas ekan.

2) $f_1(x,y,z) = (x_2 \to x_1)\cdot(x_2 \downarrow x_2);$

$L_1 = a_0xy + a_1x + a_2y + b;$

$f(0,0) = 1 = a_0 00 + a_1 0 + a_2 0 + b,$ demak $b = 1$

$f(0,1) = 0 = a_0 01 + a_1 0 + a_2 1 + 1$ demak $a_2 = 1$

$f(1,0) = 1 = a_0 10 + a_1 1 + a_2 0 + 1$ demak $a_1 = 1$

$f(1,1) = 0 = a_0 11 + a_1 1 + a_2 1 + 1$ demak $a_0 = 1$ bundan kelib chiqadiki

$L = xy + x + y + 1$chiziqli emas ekan.

3) $f_1(x,y,z) = ((x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}) \to (x_2 \to x_1 \cdot x_3)) \leftrightarrow (x_1 \vee x_3);$

$L_1 = a_0xyz + a_1xy + a_2xz + a_3yz + a_4x + a_5y + a_6z + b;$

$f(0,0,0) = 0 = a_0 000 + a_1 00 + a_2 00 + a_3 0 + a_4 0 + a_5 0 + a_6 0 + b,$ demak $b = 0$

$f(0,0,1) = 1 = a_6 1 + 0$ demak $a_6 = 1$

$f(0,1,0) = 1 = a_5 1 + 0$ demak $a_5 = 1$

$f(0,1,1) = 1 = a_3 11 + a_5 1 + a_6 1 + 0$ demak $a_3 = 1$

$f(1,0,0) = 1 = a_4 1 + 0$ demak $a_4 = 1$

$f(1,0,1) = 1 = a_2 11 + a_4 + a_6 + 0$ demak $a_2 = 1$

$f(1,1,0) = 0 = a_1 11 + a_4 + a_5 + 0$ demak $a_1 = 0$

$f(1,1,1) = 1 = a_0 111 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0$ demak $a_0 = 0$ bundan kelib chiqadiki

$L = xz + yz + x + y + z$ chiziqli emas ekan.

5-ish formulalarni monotonlikka tekshiramiz.

1) $f_1(x,y,z) = ((x_1 \to \overline{x_2}) \oplus (x_2 \to \overline{x_3})) \leftrightarrow (x_2 \to x_3)$

$(0,1,1) \prec (1,0,0)$ va $f(0,1,1) > f(1,0,0)$ demak $f_1$ formula monoton emas.

2) $f_1(x,y,z) = (x_2 \to x_1)\cdot(x_2 \downarrow x_2);$

$(0,0) \prec (0,1)$ va $f(0,0) > f(0,1)$ demak $f_2$ formula monoton emas

3) $f_1(x,y,z) = ((x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}) \to (x_2 \to x_1 \cdot x_3)) \leftrightarrow (x_1 \vee x_3);$

$(1,0,1) \prec (1,1,0)$ va $f(1,0,1) > f(1,1,0)$ demak $f_3$ formula monoton emas

**Endi Post jadvalini tuzamiz:**

| | $P_0$ | $P_1$ | $S$ | $L$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | + | - | - | - | - |
| $f_2$ | - | - | + | - | - |
| $f_3$ | + | + | - | - | - |

Berilgan funksiyalar sistemasi to’liq emas.

## Mavzu: Funksional elementlar va sxemalar yasash. Kontaktli sxemalarni sintez qilish

**1- misol.** $F_1=\{xy, x\vee y, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lganligi uchun, $F_1$ ning elementlarini mos ravishda realizatsiya qiladigan $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ elementlardan iborat $\Phi_1=\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ sistema to‘liq bo‘ladi. ■

**2- misol.** $F_2=\{xy, x\vee y\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lmagani uchun, $F_2$ ning elementlarini mos ravishda realizatsiya qiladigan $\varphi_1,\varphi_2$ elementlardan iborat $\Phi_2=\{\varphi_1,\varphi_2\}$ sistema to‘liq bo‘lmaydi. ■

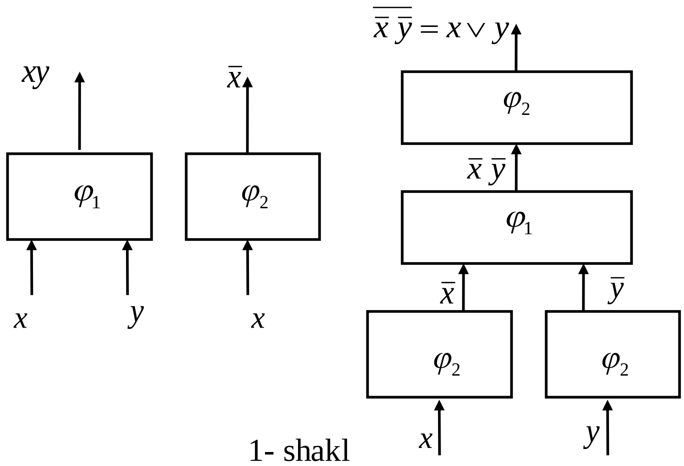
**3- misol.** $F_3=\{xy, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lgani uchun, $F_3$ ning elementlarini mos ravishda realizatsiya qiladigan $\varphi_1,\varphi_3$ elementlardan iborat $\Phi_3=\{\varphi_1,\varphi_3\}$ sistema ham to‘liq bo‘ladi. ■

**4- misol.** $F_4=\{x\vee y, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lgani uchun, $F_4$ ning elementlarini mos ravishda realizatsiya qiladigan $\varphi_2,\varphi_3$ elementlardan iborat $\Phi_4=\{\varphi_2,\varphi_3\}$ sistema ham to‘liq bo‘ladi. ■

5- misol. $\Phi_1=\{\varphi_1,\varphi_2\}$ va $F_1=\{xy, \bar{x}\}$ bo‘lsin. $\varphi_1$ funksional element $xy$ funksiyani, $\varphi_2$ esa $\bar{x}$ funksiyani realizatsiya qiladi. Bu funksional elementlar orqali $x\vee y$, $x\rightarrow y$, $x\leftrightarrow y$, $x+y$, $0$ va $1$ elementar funksiyalarni realizatsiya qilish talab etilsin.

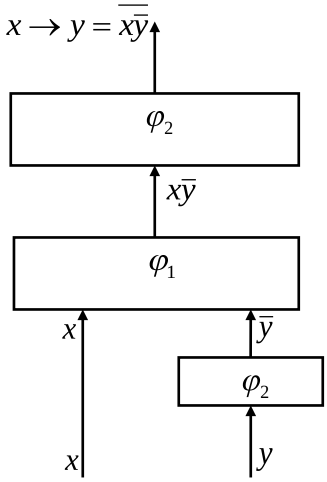
1) $x\vee y$ funksiyani realizatsiya qilish uchun $x\vee y=\overline{\bar{x}\bar{y}}$ formuladan foydalanamiz. Agar $\varphi_2$ ning kirishiga $\bar{x}\bar{y}$ signal bersak, u holda uning chiqishida $\overline{\bar{x}\bar{y}}=x\vee y$ signal paydo bo‘ladi. $\bar{x}\bar{y}$ signalni hosil qilish uchun $\varphi_1$ element kirishlarining biriga $\bar{x}$ va ikkinchisiga $\bar{y}$ signallarni beramiz. Natijada, uning chiqishida $\bar{x}\bar{y}$ signal paydo bo‘ladi va uni $\varphi_2$ ning kirishi bilan ulaymiz. $\bar{x}$ va $\bar{y}$ ni hosil qilish uchun ikkita $\varphi_2$ elementdan birining kirishiga $x$, ikkinchisining kirishiga esa $y$ signal berib, ularning chiqishlari $\varphi_1$ ning kirishlari bilan ulanadi. Shunday qilib, 5- shaklda ifodalangan $(x\vee y)$ funksiyani realizatsiya qiladigan $S_1$ sxemaga ega bo‘lamiz.

2) $x \to y$ funksiyani sxema orqali realizatsiya qilish uchun $x \to y = \bar{x} \vee y = \overline{x\bar{y}}$ formuladan foydalanamiz. Agar $\varphi_2$ elementning kirishiga $x\bar{y}$ signal berilsa, u holda uning chiqishida berilgan signalning inkori, ya'ni $\overline{x\bar{y}} = x \to y$ signal paydo bo'ladi. O'z navbatida $x\bar{y}$ signalni hosil qilish uchun $\varphi_1$ element kirishlarining biriga $x$ va ikkinchisiga $\bar{y}$ signalni berish kerak hamda uning chiqishini $x\bar{y}$ funksiyani realizatsiya qiladigan $\varphi_2$ elementning kirishiga ulash kerak. $\bar{y}$ signalni hosil qilish uchun $\varphi_2$ elementning kirishiga $y$ signal berib, uning chiqishini $\varphi_1$ning ikkinchi kirishiga ulaymiz. Natijada, $x \to y = \overline{x\bar{y}}$ funksiyani realizatsiya qiladigan $S_2$ sxemaga ega bo'lamiz .

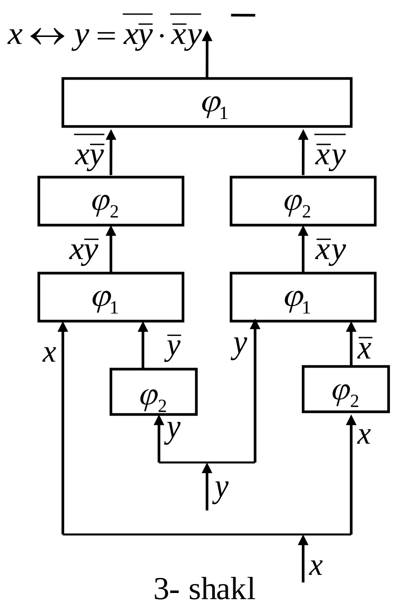



1- shakl

3) $x \leftrightarrow y$ funksiyani realizatsiya qiladigan sxemani yasash uchun $x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x) = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y}) = \overline{x\bar{y}} \cdot \overline{\bar{x}y}$ formuladan foydalanamiz. Yuqorida aks ettirilgan uslubdan foydalanib, $x \leftrightarrow y = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y}) = \overline{x\bar{y}} \cdot \overline{\bar{x}y}$ funksiyani realizatsiya qiladigan $S_3$ sxemani hosil qilamiz (2- shakl).

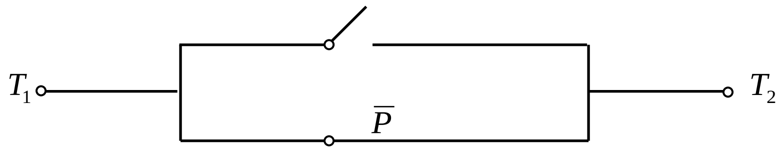



2- shakl




3- shakl

4) 1 konstantani realizatsiya qilish uchun $x \vee \bar{x} = 1$ formuladan, 0ni realizatsiya qilish uchun esa $x\bar{x} = 0$ formulalardan foydalanamiz. Ularni realizatsiya qiladigan sxemalar 8- shaklda keltirilgan. ■




4- shakl

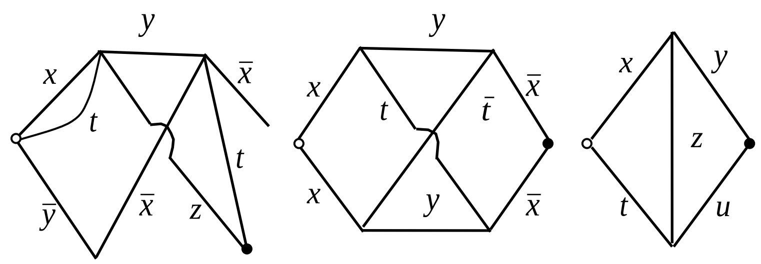
**6- misol.** 2- shaklda tasvirlangan sxemaning o‘tkazuvchanlik funksiyasini topaylik. Avvalo, $P$, $Q$, $R$ knopkalarga mos ravishda $x$, $y$, $z$ mulohazalarni mos kltiramiz. U holda $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}$ knopkalarga $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ mulohazalar mos keladi. Sxemaning yuqori qismi $\bar{x} \wedge ((y \wedge \bar{z}) \vee x)$ formula bilan, pastki qismi $z \wedge \bar{y} \wedge (x \vee \bar{y})$ formula bilan ifodalanadi. Yuqori va pastki qismlar parallel ulangani uchun butun sxemaning o‘tkazuvchanlik funksiyasi

$$f(x, y, z) = (\bar{x} \wedge ((y \wedge \bar{z}) \vee x)) \vee (z \wedge \bar{y} \wedge (x \vee \bar{y}))$$

ko‘rinishda bo‘ladi. ■

**7- misol.** Qiyidagi shakllarda berilgan sxemalarning o‘tkazuvchanlik funksiyalarini topaylik.

a) $xyt \vee tyt \vee xz \vee tz \vee \bar{y}\bar{x}t \vee \bar{y}\bar{x}yz = yt \vee xz \vee tz \vee \bar{y}\bar{x}t$ **,**



a) b) d)

b) $xy\bar{x} \vee xt\bar{x} \vee xy\bar{t}y\bar{x} \vee xty\bar{t}\bar{x} \vee xy\bar{x} \vee x\bar{t}\bar{x} \vee x\bar{t}yt\bar{x} \vee xyty\bar{x} = 0$,

d) $xy \vee tu \vee xzu \vee tzy$

formulalar mos ravishda shaklning a), b) va d) qismlarida tasvirlangan sxemalarning o‘tkazuvchanlik funksiyalari bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas. ■

**8- misol.** Berilgan a) $(y \vee z) \to x\bar{y}$, b) $z\bar{y} \leftrightarrow xy$, d) $(x + y + z)$ funksiyalarni kontakt sxemalar orqali realizatsiya qilaylik. Buning uchun berilgan funksiyalarni DNSh ko‘rinishiga keltiramiz:

a) $(y \vee z) \to x\bar{y} = \overline{y \vee z} \vee x\bar{y} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}$

b) $z\bar{y} \leftrightarrow yx = (\overline{z\bar{y}} \vee yx)(z\bar{y} \vee \overline{yx}) = (\bar{z} \vee y \vee yx)(z\bar{y} \vee \bar{y} \vee x) =$

$= (\bar{z} \vee y)(\bar{y} \vee \bar{x}) = \bar{z}\,\bar{y} \vee \bar{z}\bar{x} \vee y\bar{x}$ ;

d) $x + y + z = xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz$ . ■

**9- misol.** Yuqorida keltirilgan algoritmdan foydalanib, a) $(y \vee z) \to x\bar{y}$, b) $z\bar{y} \leftrightarrow xy$ va d) $x + y + z$ funksiyalarni kontaktli sxemalar orqali realizatsiya qilish kerak bo‘lsin.

a) $f_1(x, y, z) = (y \vee z) \to x\bar{y}$ funksiyani KNSh ko‘rinishga keltiramiz va uni soddalashtirish uchun tanish bo‘lgan ushbu

$x \vee xy = x$, $\qquad x\,(x \vee y) = x$,

$x \vee \bar{x}y = x \vee y$, $\qquad \bar{x} \vee xy = \bar{x} \vee y$,

$x(\bar{x} \vee y) = xy$, $\qquad \bar{x}(x \vee y) = \bar{x}y$

teng kuchli formulalardan foydalanamiz:

$$f_1(x, y, z) = \overline{y \vee z} \vee x\bar{y} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} = \bar{y}(\bar{z} \vee x) \text{ (14-a shakl),}$$

b) $f_2(x, y, z) = z\bar{y} \leftrightarrow yx = (z\bar{y} \vee yx)(\overline{yx} \vee z\bar{y}) =$

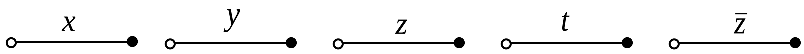
$= (\bar{z} \vee y \vee yx)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z\bar{y}) = (\bar{z} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$ (14-b shakl),

d) $f_3 = x + y + z = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge$

$\wedge(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$. ■

**10- misol.** Berilgan $f_1(x,y,z,t) = (x \vee y\bar{z})(xy \vee zt)$ va $f_2(x,y,z,t) = (\bar{x}(y \vee \bar{z}) \vee \bar{t})x$ funksiyalar uchun $P$-sxemalar yasash talab qilingan boʻlsin.

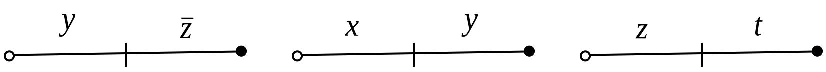
a) $x$, $y$, $z$, $t$, $\bar{z}$ elementar formulalarni realizatsiya qiladigan elementar sxemalarni tuzamiz (5- shakl).




5- shakl

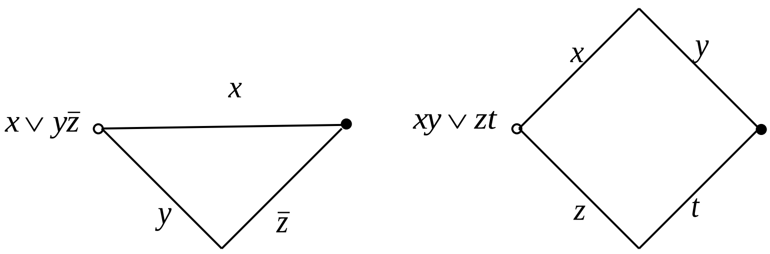
$x$ va $y$ oʻzgaruvchilarga mos kontaktlar ikki donadan boʻlishi kerak. Endi kontaktlarni ketma-ket ulab, $y\bar{z}$, $xy$ va $zt$ elementar kon’yunksiyalarni realizatsiya qilamiz (6- shakl).

Uchinchi qadamda, parallel ulashdan foydalanib, $x \vee y\bar{z}$ va $xy \vee zt$



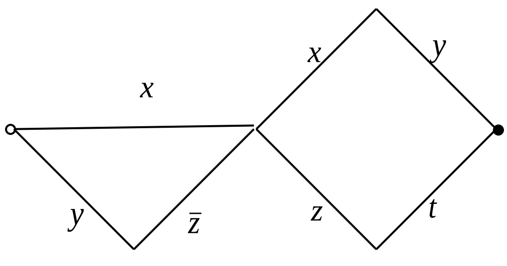

6- shakl

funksiyalarni realizatsiya qilamiz (7- shakl).



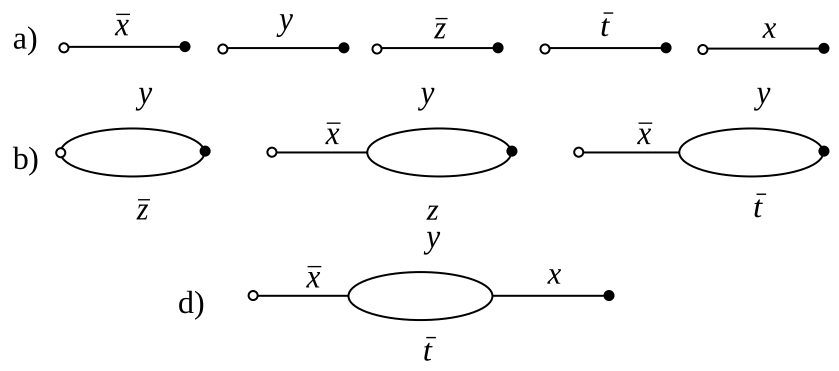

7- shakl

Hosil qilingan sxemalarni ketma-ket ulab, berilgan $f_1(x,y,z,t)$ funksiyani realizatsiya qiladigan $P$-sxemaga ega boʻlamiz (8- shakl).




8- shakl

b) $f_2(x,y,z,t)$ funksiyani realizatsiya qiladigan $P$-sxema 9- shaklning a), b) va d) qismlarida koʻrsatilgan. ■




9- shakl

## Mavzu: Qisqartirilgan diz’yunktiv normal shakl. Karno karta metodi

**Qisqartirilgan DNSh yasash algoritmi.** Ixtiyoriy $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning qisqartirilgan diz’yunktiv normal shaklini yasash uchun quyidagi operasiyalarni bajaramiz:

1) $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning istalgan kon’yunktiv normal shaklini olamiz, masalan, mukammal KNSh;

2) qavslarni ochib chiqamiz, ya’ni

$$\wedge\vee \to \vee\wedge$$

turdagi almashtirishni o‘tkazamiz;

3) hosil qilingan ifodadan 0 ga teng hadlarni chetlashtiramiz va

$$K_1K_2 \vee K_2 = K_1, \qquad K_1 \vee K_1 = K_1$$

formulalardan foydalanib uni soddalashtiramiz. Natijada, qisqartirilgan DNShga kelamiz. ■

### 2. Namunaviy misol va masala hamda uning yechimi.

**1- misol.** $N_{f_2} = \{(0,0,0),(0,0,1),(1,0,1),(1,1,1),(1,1,0),(0,1,0)\}$ to‘plamga mos $f_2(x_1, x_2, x_3)$ funksiyaning MKNShni

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,..,\sigma_n) \\ f(\sigma_1,\sigma_2,..,\sigma_n)=0}} (x_1^{\bar\sigma_1} \vee x_2^{\bar\sigma_2} \vee ... \vee x_n^{\bar\sigma_n}) \qquad (1)$$

formuladan foydalanib yozamiz:

$$f_2(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3).$$

Algoritmning 2- va 3- qadamlarini bajaramiz:

$$(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)=x_1\bar{x}_1\vee x_1x_2\vee x_1x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_2x_2\vee$$

$$\vee\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_3\vee x_2\bar{x}_3\vee x_3\bar{x}_3=$$

$$=x_1x_2\vee x_1x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_3\vee x_2\bar{x}_3.$$

Qisqartirilgan DNSh quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$D_s(f_2)=x_1x_2\vee x_1x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_3\vee x_2\bar{x}_3.\ \blacksquare \qquad (2)$$

**2- misol.** Quyidagi funksiya berilgan bo‘lsin:

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1x_2x_3\vee\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_2x_3\vee x_1x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2x_3.$$

Bu funksiyaga

$$N_{f_1}=\{(1,0,0),(0,1,1),(0,1,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

to‘plam mos keladi. Funksiyaning MKNSh ko‘rinishi

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee x_3).$$

Algoritmning 2- va 3- qadamlarini bajaramiz:

$$(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_1\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_1x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\vee$$

$$\vee\bar{x}_2\bar{x}_2\vee\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_3\vee\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_3\bar{x}_3=$$

$$=\bar{x}_1\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_1x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_3\vee\bar{x}_2\bar{x}_3=$$

$$=\bar{x}_1\vee\bar{x}_1x_3\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_3\vee\bar{x}_2\bar{x}_3=$$

$$=\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_3\vee\bar{x}_2\bar{x}_3=\bar{x}_1\vee\bar{x}_2.$$

Demak, funksiyaning qisqartirilgan DNSh quyidagicha bo‘ladi:

$D_s(f_1)=\bar{x}_1\vee\bar{x}_2.$ (3)

## Mavzu: Bleyk metodi. Mantiqiy elementlardan foydalanib qisqartirish

Aniqlanish sohasi n o’lchovli $E_n^2$ kubning n-k o’lchovli $E_{n-k}^2$ qism kubidan iborat bo’lgan

$$K=x_{i_1}^{\sigma_1}\cdot x_{i_2}^{\sigma_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}^{\sigma_k}$$

elementar konyunksiyasini qaraymiz. $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$, $\tilde{\beta}=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ to'plamlar $E^2_{n-k}$ qism kubning to'plamlari bo'lsin, bu yerda

$$\alpha_j=\begin{cases}\sigma_j\ , & agar\ \ j\in\{i_1,i_2,...,i_k\}\\ 0\ , & aks\ holda\end{cases}$$

$$\beta_j=\begin{cases}\sigma_j\ , & agar\ \ j\in\{i_1,i_2,...,i_k\}\\ 1\ , & aks\ holda\end{cases}$$

Ma'lumki , $E^2_{n-k}$ K konyunksiyaga mos keluvchi n-k o'lchovli $N_k$ intervalni ifodalaydi. $\tilde{\alpha}$ va $\tilde{\beta}$ nomerlar to'plamini mos ravishda $A_{\tilde{\alpha}}$ va $A_{\tilde{\beta}}$ lar orqali

belgilaymiz: $A_{\tilde{\alpha}}=\sum_{i=1}^{n}2^{n-i}\alpha_i$ , $A_{\tilde{\beta}}=\sum_{i=1}^{n}2^{n-i}\beta_i$

**Ta'rif:** **(**$A_{\tilde{\alpha}}, A_{\tilde{\beta}}$) juftlik mos ravishda $\tilde{\alpha}$ va $\tilde{\beta}$ nomerlar to'plamidan tuzilgan K konyunksiyaga mos keluvchi n-k o'lchovli $N_k$ interval deyish mumkin.

Ta'kidlab otish kerakki, agar k=n bo'lsa , u holda $\tilde{\alpha}=\tilde{\beta}$ **(**$A_{\tilde{\alpha}}=A_{\tilde{\beta}}$) bo'ladi va $A_{\tilde{\alpha}}$ ni K konyunksiyaga mos keluvchi 0 o'lchovli $N_k$ intervalga tegishli deb ataymiz.

**Ta'rif:** $\tilde{\alpha}$ to'plamning $|\tilde{\alpha}|$ normasi deb, $\tilde{\alpha}$ ning birlik razryadlar soniga aytiladi.

**1-Lemma:** Agar $A_{\tilde{\alpha}}>A_{\tilde{\beta}}$ bo'lsa, u holda {$\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$} to'plam bir o'lchovli $E^2_n$ intervaldan iborat bo'lmaydi.

**2-Lemma:** Agar $\tilde{\gamma},\tilde{\delta}\in E^2_n$ to'plamlar uchun $|\gamma|=|\delta|$ - 1 , $A_{\tilde{\delta}}$ - $A_{\tilde{\gamma}}=2^l$ , bo'lsa, u holda {$\tilde{\gamma},\tilde{\delta}$} to'plam to'plam bir o'lchovli $E^2_n$ intervalni tasvirlamaydi, bu yerda $\tilde{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)$, $\tilde{\delta}=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)$, $l=(0,1,...,n-1)$ .

**Teorema:** Faraz qilamiz, $K(K')$ elementar konyunksiyalarning k o'lchamli $N_K\,(N_{K'})$ qoplamasi $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\,(\tilde{\alpha}',\tilde{\beta}')$ qiymatlar juftligi bilan aniqlangan va $A,B(A',B')$ lar $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\,(\tilde{\alpha}',\tilde{\beta}')$ larning o'nlik sanoq sistemasidagi nomeri bo'lsin.

Agar $|\alpha| = |\tilde{\alpha}'|$-1, $|\beta| = |\tilde{\beta}'|$-1, shartlar bajarilsa, u holda $A < A', B < B'$ va $|A - A'| = |B < B'| = 2^l$ , $K \vee K'$ uchun k+1 o'lchamli qoplama hosil qiladi.

Mantiq algebrasining $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyasini qaraymiz. Birinchi bosqichda $f(\tilde{\alpha}) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ lar uchun **5-** jadval **:**

| $A_{\tilde{\alpha}}$ | $A_1 A_2 \cdot ... \cdot A_m$ |
|---|---|
| $\|\tilde{\alpha}\|$ | $a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_m$ |

5-jadval.

Bu jadvalda m$\le 2^n$ , $a_1 \le a_2 \le ... \le a_m$ , $0 \le a_1 \le$n, i=1,2,…,n

Ikkinchi bosqichda 5-jadval asosida barcha $(A_i, A_j)$ juftliklar to'plamini olamiz. Berilgan qadamda tasvirlangan bunday juftliklar to'plamini induksiya metodi orali intervallar o'sish tartibida quramiz.

**Induksiyaning 1-qadami:** Barcha $A_i, A_j$ 1$\le$ i , j$\le$m ,5-jadvalda $a_j = k + 1$, $a_i = k$ bo'lganda

$$A_j - A_i = 2^l \qquad (1.1)$$

shartni tekshiramiz, bu yerda 1$\le l \le$n-1.

5-jadvaldan (1.1) shartni qanoatlantiruvchi barcha (A,B) juftliklardan 6-jadvalni tuzamiz:

| $A'$ | $A_1'$ | $A_2'$ | … | $A_{m_1}'$ |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_{m_1}$ |
| $\|\tilde{\alpha}'_{A'}\|$ | $a_1'$ | $a_2'$ | … | $a_{m_1}'$ |
| $\|\tilde{\alpha}'_B\|$ | $b_1$ | $b_2$ | … | $b_{m_1}$ |

6-jadval.

Bu yerda $a_i'$, $b_i$ lar mos ravishda

$0 \le a_i' \le a_m$, $a_i'$+1=$b_i$, i=1,2,…,m , $a_1' \le a_2' \le ... \le a_m'$

shartlarni qanoatlantiruvchi $\tilde{\alpha}'_{A_i'}$, $\tilde{\alpha}_{B_i}$ to'plamning birlik razryadlar soni. 5-jadvalda $A_j$ nomerlarda mavjud bo'lmagan $|a_i - a_j|$=1 shartni qanoatlantiruvchi shunday $A_i$ nomerni fiksirlaymiz(belgilaymiz). Ko'rinib turibdiki, $\tilde{\alpha}_{A_i}$ to'plam $N_f$ dagi maksimal intervalni ifodalaydi.

Oson ko'rsatish mumkinki, agar $a_1$=0 bo'lsa, u holda barcha $a_i$ lar uchun (1.1) shart bajariladi.

i-1 o'lchovli intervalga tegishli barcha C va D juftliklar uchun 7-jadvalni quramiz:

| | |
|---|---|
| C | $C_1C_2...C_{m_{i-1}}$ |
| D | $D_1D_2...D_{m_{i-1}}$ |
| $\|\tilde{\alpha}_C\|$ | $c_1c_2...c_{m_{i-1}}$ |
| $\|\tilde{\alpha}_D\|$ | $d_1d_2...d_{m_{i-1}}$ |

7-jadval.

Bu yerda ($C_j, D_j$), j=1,2,…, juft nomerlar $N_f$ dagi i-1 o'lchovli intervalni qanoatlantiradi, $c_j$, $d_j$ lar mos ravishda $c_j = d_j$ -(i-1), $c_1 \le c_2 \le ... \le c_{m_{i-1}}$, j=1,2,…,$m_{i-1}$ shartni qanoatlantiruvchi $\tilde{\alpha}_{C_j}$, $\tilde{\alpha}_{D_j}$ to'plamlarning normalaridir.

**Induksiyaning 1-qadami:** $d_j$ - $d_i$ =1, $c_j$ - $c_i$ =1, $1 \le i$, j$\le m_{i-1}$ o'rinli bo'ladigan barcha i va j lar uchun,

$$D_j - D_i = C_j - C_i = 2^l, \quad 0 \le l \le n \qquad (1.2)$$

shartni tekshiramiz. (1.2) shart bajariladigan ($C_i, D_i$) juftlik $N_f$ dagi i o'lchovli intervalga tegishli bo'ladi. Bunday juftliklardan 8-jadvalni tuzamiz:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $C'$ | $C_1'$ | $C_2'$ | $\cdots$ | $C_{m_i}'$ |
| $D'$ | $D_1'$ | $D_2'$ | $\cdots$ | $D_{m_i}'$ |
| $\|\alpha_C'\|$ | $c_1'$ | $c_2'$ | $\cdots$ | $c_{m_i}'$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\|\alpha_D'\|$ | $d_1'$ | $d_2'$ | $\cdots$ | $d_{m_i}'$ |

8-jadval.

Bu yerda $c_i'$, $d_i'$ lar mos ravishda $c_i' = d_i'$ -i , $0 \le c_i \le$ n , i=1,2,…, $m_i$ shartni qanoatlantiruvchi $\tilde{\alpha}_{C_i'}, \tilde{\alpha}_{D_i'}$ to'plamlarning normalaridir. Maksimal intervalga tegishli bo'lgan (1.2) shartni qanoatlantiradigan ($C_i, D_i$) juftliklarni 7-jadvalga fiksirlaymiz(belgilaymiz).

Agar barcha (A,B) juftliklar $N_f$ dagi maksimal intervalga tegishli bo'lsa, u holda keyingi biror **p-**qadamda algoritm ishi tugallanadi.

## Qisqartirilgan DHSH ini aniqlash Bleyk algoritmining sonli modifikatsiasi

Ma'lumki Bleyk usulida ixtiyoriy ko'rinishdagi DNSHining qisqartirilgan DHSH ini qurishda quyidagi qoidalardan foydalaniladi:

$$x \cdot K \vee \bar{x} \cdot K' = x \cdot K \vee \bar{x} \cdot K' \vee K \cdot K' \quad , \qquad K \vee K \cdot K' = K$$

Bu yerda $K$ va $K'$ lar elementar konyunksiyalar.

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning ixtiyoriy DNSHisi berilgan bo'lsin :

D(f)= $K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_m$, bu yerda $K_i$ elementar konyunksiya.

Ravshanki, har bir $K_i = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot ... \cdot x_{i_m}^{\sigma_m}$ konyunksiyaga mos kelgan $N_{K_i}$ interval $E_n^2$ to'plamda n-o'lchovli birlik kubning barcha uchlari(qirralari) ni ifodalaydi. $N_{K_i}$ (1=1,2,…,m) intervallar 3 o'lchamli $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ to'plamda quyidagicha beriladi:

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha, & agar \quad x_i \in K_i \;\; va \;\; \sigma_i = \alpha \;\; bo'lsa \\ 2, & aks \quad holda \end{cases}$$

D(f) ga mos kelgan $E_n^2$ ning qismkubi bo'lgan $C_0$ to'plam berilgan bo'lsin :

$$C_0 = \{N_{K_1}, N_{K_2}, ..., N_{K_m}\}$$

$K_j$, $K_i$ konyunksiyaga mos keluvchi ikkita $N_{K_j}$, $N_{K_i}$ qismkublardan iborat $N_{K_{ij}}$ lar umumlashgan birlashtirish qoidasini orqali quyidagi $N_{K_i} = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$, bu yerda

$$\gamma_i = \begin{cases} \beta_i, \ agar \quad \alpha_i > \beta_i \quad bo'lsa \\ \alpha_i, \ agar \quad \alpha_i \le \beta_i \quad bo'lsa \end{cases}$$

ko'rinishga keladi, agar $N_{K_j}$ ,va $N_{K_i}$ lar quyidagi

$$N_{K_i} = (\alpha_1, ..., \alpha_{l-1}, 0, \alpha_{l+1}, ..., \alpha_n)$$

$$N_{K_j} = (\beta_1, ..., \beta_{l-1}, 1, \beta_{l+1}, ..., \beta_n)$$

ko'rinishida bo'lsa. Bu yerda i,j=1,2,…,l-1,l+1,…,n; $\gamma_l$ =20.

$K_i$ da $K_j$ yutilsin. Xuddi shunday, agar $\alpha_i \ge \beta_i$, i=1,2,…,n bo'lsa $N_{K_i} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ da $N_{K_j} = (\beta_1, ..., \beta_n)$ yutilishini ko'rsatish qiyin emas .

f(x) funksiyaning qisqartirilgan DNSHisini $C_0$ qismkub to'plam asosida qadamma-qadam quramiz:

1-bosqichda $C_0$ qismkub to'plamning barcha ($K_j, K_i$) juftliklari uchun umumlashgan birlashtirish qoidasini qo'llash natijasida quyidagi biror $C_0*$ qismkub to'plamni hosil qilamiz.

2-bosqichda $C_1 = C_0 \cup C_0*$ to'plamdan barcha yopishgan qismkublarni chiqarib tashlaymiz.

Xuddi shunday, qandaydir **i**-bosqichda biror $C_i$, i=1,2,…,m qismkub to'plamni hosil qilamiz. $C_i$ to'plamning barcha ($N_{K_j}, N_{K_i}$) juftliklari uchun umumlashgan birlashtirish qoidasini qo'llash natijasida biror $C_0*$ qismkub to'plamga ega bo'lamiz.

$C_{i+1}*=C_i \cup C_i*$ bo'lsin. $C_{i+1}*$ to'plamdan barcha yopishgan qismkublarni chiqarib tashlaymiz.

Agar $C_p$ to'plamga umumlashgan birlashtirish qoidasini qo'llash natijasida hosil qilingan biror $C_p*$ to'plam bo'sh bo'lsa, u holda o'sha **p-**qadamda algoritm tugaydi.

f(x) funksiyaga mos keluvchi qisqartirilgan DNSHi yopishmagan qismkub to'plamda aniqlanadi

## Mavzu: Predikat (mantiqiy funksiya) tushunchasi. Predmetlar sohasi. Elementar formulalar. Kvantorlar

**Predikat tushunchasi.** Mantiq algebrasida mulohazalar faqatgina chin yoki yolg'on qiymat qabul qilishi nuqtai nazaridan qaralib, mulohazalarning strukturasiga ham, hattoki, mazmuniga ham e'tibor berilmaydi. Ammo fanda va amaliyotda mulohazalarning strukturasi va mazmunidan kelib chiqadigan xulosalardan (natijalardan) foydalaniladi. Masalan, «Har qanday romb parallelogrammdir; $ABCD$ – romb; demak, $ABCD$ – parallelogramm».

Asos (shart) va xulosa mulohazalar mantiqining elementar mulohazalari bo'ladi va ularni bu mantiq nuqtai nazaridan bo'linmas, bir butun deb va ularning ichki strukturasini hisobga olmasdan qaraladi. Shunday qilib, mantiq algebrasi mantiqning muhim qismi bo'lishiga qaramasdan, ko'pgina fikrlarni tahlil qilishga qodir (yetarli) emas. Shuning uchun ham mulohazalar mantiqini kengaytirish masalasi vujudga keldi, ya'ni elementar mulohazalarning ichki strukturasini ham tadqiq eta oladigan mantiqiy sistemani yaratish muammosi paydo bo'ldi. Bunday sistema mulohazalar mantiqini o'zining bir qismi sifatida butunlay o'z ichiga oladigan predikatlar mantiqidir.

**Predikatlar mantiqi** an'anaviy formal mantiq singari elementar mulohazani **subyekt** va **predikat** qismlarga bo'ladi.

**Subyekt** – bu mulohazada biror narsa haqida nimadir tasdiqlaydi; **predikat** – bu subyektni tasdiqlash.

Masalan, «5 – tub son» mulohazada «5» – subyekt, «tub son» – predikat. Bu mulohazada «5» «tub son boʻlish» xususiyatiga ega ekanligi tasdiqlanadi. Agar keltirilgan mulohazada ma’lum 5 sonini natural sonlar toʻplamidagi $x$ oʻzgaruvchi bilan almashtirsak, u holda «$x$ – tub son» koʻrinishidagi mulohaza formasiga (shakliga) ega boʻlamiz. $x$ oʻzgaruvchining ba’zi qiymatlari (masalan, $x=13$, $x=3$, $x=19$) uchun bu forma chin mulohazalar va $x$ oʻzgaruvchining boshqa qiymatlari (masalan, $x=10$, $x=20$) uchun bu forma yolgʻon mulohazalar beradi.

Ravshanki, bu forma bir ($x$) argumentli funksiyani aniqlaydi va bu funksiyaning aniqlanish sohasi natural sonlar toʻplami ($\boldsymbol{N}$) hamda qiymatlar sohasi $\{1, 0\}$ toʻplam boʻladi.

**1- ta’rif.** *$M$ toʻplamda aniqlangan va $\{1, 0\}$ toʻplamdan qiymat qabul qiluvchi bir argumentli $P(x)$ funksiya* ***bir joyli*** *(**bir oʻrinli**)* ***predikat*** *deb ataladi.*

$M$ toʻplamni $P(x)$ predikatning **aniqlanish sohasi** deb aytamiz.

$P(x)$ predikat chin qiymat qabul qiluvchi hamma $x \in M$ elementlar toʻplamiga $P(x)$ predikatning **chinlik toʻplami** deb ataladi, ya’ni $P(x)$ predikatning chinlik toʻplami $I_P = \{x : x \in M, P(x) = 1\}$ toʻplamdir.

**2- ta’rif.** *Agar $M$ toʻplamda aniqlangan $P(x)$ predikat uchun $I_P = M$ ($I_P = \varnothing$) boʻlsa, u* ***aynan chin*** *(**aynan yolgʻon**)* ***predikat*** *deb ataladi.*

Endi **koʻp joyli predikat** tushunchasini oʻrganamiz. Koʻp joyli predikat predmetlar orasidagi munosabatni aniqlaydi.

«Kichik» munosabati ikki predmet orasidagi **binar munosabatni** ifodalaydi[46]. «$x < y$» (bu yerda $x, y \in \boldsymbol{Z}$) binar munosabat ikki argumentli $P(x, y)$ funksiyani ifodalaydi. Bu funksiya $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ toʻplamda aniqlangan va qiymatlar sohasi $\{1, 0\}$ toʻplam boʻladi.

---

**3- ta'rif.** *$M = M_1 \times M_2$ to'plamda aniqlangan va $\{1, 0\}$ to'plamdan qiymat oluvchi ikki argumentli $P(x, y)$ funksiya **ikki joyli predikat** deb ataladi.*

**Predikatlar ustida mantiqiy amallar** Predikatlar ham mulohazalar singari faqatgina chin yoki yolg'on (1 yoki 0) qiymat qabul qilganliklari tufayli ular ustida mulohazalar mantiqidagi hamma mantiqiy amallarni bajarish mumkin.

Bir joyli predikatlar misolida mulohazalar mantiqidagi mantiqiy amallarning predikatlarga tatbiq etilishini ko'raylik.

**4 ta'rif.** *Berilgan $M$ to'plamda aniqlangan $P(x)$ va $Q(x)$ **predikatlarning kon'yunksiyasi** deb, faqat va faqat $x \in M$ qiymatlarda aniqlangan hamda $P(x)$ va $Q(x)$ lar bir vaqtda chin qiymat qabul qilgandagina chin qiymat qabul qilib, qolgan barcha hollarda yolg'on qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi va u $P(x) \wedge Q(x)$ kabi belgilanadi.*

**5- ta'rif.** *Berilgan $M$ to'plamda aniqlangan $P(x)$ va $Q(x)$ **predikatlarning diz'yunksiyasi** deb, faqat va faqatgina $x \in M$ qiymatlarda aniqlangan hamda $P(x)$ va $Q(x)$predikatlar yolg'on qiymat qabul qilganda yolg'on qiymat qabul qilib, qolgan barcha hollarda chin qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi va u $P(x) \vee Q(x)$ kabi belgilanadi.*

$P(x) \vee Q(x)$ predikatning chinlik sohasi $I_P \cup I_Q$ to'plamdan iborat bo'ladi.

**6- ta'rif.** *Agar hamma $x \in M$ qiymatlarda $P(x)$ predikat chin qiymat qabul qilganda yolg'on qiymat va $x \in M$ ning barcha qiymatlarida $P(x)$ predikat yolg'on qiymat qabul qilganda chin qiymat qabul qiluvchi predikatga $P(x)$ **predikatning inkori** deb ataladi va u $\overline{P}(x)$ kabi belgilanadi.*

Bu ta'rifdan $I_{\overline{P}} = M \setminus I_P = CI_P$ kelib chiqadi.

**7- ta'rif.** *Faqat va faqatgina $x \in M$ lar uchun bir vaqtda $P(x)$ chin qiymat va $Q(x)$ yolg'on qiymat qabul qilganda yolg'on qiymat qabul qilib, qolgan hamma hollarda chin qiymat qabul qiladigan $P(x) \rightarrow Q(x)$ predikat $P(x)$ va $Q(x)$ **predikatlarning implikasiyasi** deb ataladi.*

Har bir tayinlangan $x \in M$ uchun

$$P(x) \to Q(x) \equiv \overline{P}(x) \vee Q(x)$$

teng kuchlilik to‘g‘ri bo‘lganligidan $I_{P\to Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q = CI_P \cup I_Q$ o‘rinlidir.

**Quyidagi formulaning chinlik to’plamini tuzing:**

$$A(x) \wedge B(x) \to C(x)$$

**Ushbu formula quyidagi predikatlar asosida berilgan:**

$$A(x):\ 2x - 3(x-1) > -1; \quad B(x): 2^{\sqrt{x}-1}(4x^2 - 4x + 1) > 0; \ C(x):\ \sin^2 x - \frac{5}{2}\sin x + 1 < 1;$$

**Quyidagicha belgilash kiritamiz:**

**1-ish.** $2x - 3(x-1) > -1;$

$2x - 3x + 3 > -1;$

$-x > -4$

$x < 4$

$I_{A(x)} = (-\infty;4); \quad I_{\overline{A(x)}} = [4;\infty).\ ,$

**2-ish.** $2^{\sqrt{x}-1}(4x^2 - 4x + 1) > 0;$

$2^{\sqrt{x}-1}(2x-1)^2 > 0;$

$2x - 1 > 0 \quad x > \frac{1}{2} \quad x > 0$

$I_{B(x)} = (0.5;\infty),\ I_{\overline{B(x)}} = (-\infty;0.5]$

**3-ish.** $\sin^2 x - \frac{5}{2}\sin x + 1 < 1;$

$\sin^2 x - \frac{5}{2}\sin x < 0;$

$\sin x(\ \sin x - \frac{5}{2}) < 0;$

$\sin x > 0$

$0 < x < \pi, \qquad \pi \approx 3$

$0 < x < 3$

$I_{C(x)} = (0;3)$

**4-ish**. $A(x) \wedge B(x) \to C(x) = \overline{A(x)} \vee \overline{B(x)} \vee C(x)$

**Natija:** $I_{A(x)\wedge B(x)\to C(x)} = I_{\overline{A(x)}\vee\overline{B(x)}\vee C(x)} = (-\infty;3) \cup [4;\infty);$

**Mavzu: Predikat formulalarining deyarli normal formasi.**

**Reja:**

1. Predikatlar mantiqi formulasining normal shakli.
2. Berilgan formulalarni deyarli normal shaklga keltirish.

**Predikat tushunchasi.** Mantiq algebrasida mulohazalar faqatgina chin yoki yolg‘on qiymat qabul qilishi nuqtai nazaridan qaralib, mulohazalarning strukturasiga ham, hattoki, mazmuniga ham e’tibor berilmaydi. Ammo fanda va amaliyotda mulohazalarning strukturasi va mazmunidan kelib chiqadigan xulosalardan (natijalardan) foydalaniladi. Masalan, «Har qanday romb parallelogrammdir; $ABCD$ – romb; demak, $ABCD$ – parallelogramm».

**Predikatlar mantiqi** an’anaviy formal mantiq singari elementar mulohazani **subyekt** va **predikat** qismlarga bo‘ladi.

**Subyekt** – bu mulohazada biror narsa haqida nimadir tasdiqlaydi; **predikat** – bu subyektni tasdiqlash.

$M$ to‘plamni $P(x)$ predikatning **aniqlanish sohasi** deb aytamiz.

$P(x)$ predikat chin qiymat qabul qiluvchi hamma $x \in M$ elementlar to‘plamiga $P(x)$ predikatning **chinlik to‘plami** deb ataladi, ya’ni $P(x)$ predikatning chinlik to‘plami $I_P = \{x : x \in M, P(x) = 1\}$ to‘plamdir.

**Predikatlar ustida mantiqiy amallar** Predikatlar ham mulohazalar singari faqatgina chin yoki yolg‘on (1 yoki 0) qiymat qabul qilganliklari tufayli ular ustida mulohazalar mantiqidagi hamma mantiqiy amallarni bajarish mumkin.

Bir joyli predikatlar misolida mulohazalar mantiqidagi mantiqiy amallarning predikatlarga tatbiq etilishini ko‘raylik.

**1- ta’rif.** *Berilgan* $M$ *to‘plamda aniqlangan* $P(x)$ *va* $Q(x)$ ***predikatlarning kon’yunksiyasi*** *deb, faqat va faqat* $x \in M$ *qiymatlarda aniqlangan hamda* $P(x)$ *va* $Q(x)$*lar bir vaqtda chin qiymat qabul qilgandagina chin qiymat* *qabul qilib, qolgan barcha hollarda yolg‘on qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi va u* $P(x)\wedge Q(x)$ *kabi belgilanadi.*

$P(x)\wedge Q(x)$ predikatning chinlik sohasi $I_P\cap I_Q$ to‘plamdan, ya’ni $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlar chinlik sohalarining umumiy qismidan iborat bo‘ladi.

**2- ta’rif.** *Berilgan* $M$ *to‘plamda aniqlangan* $P(x)$ *va* $Q(x)$ ***predikatlarning diz’yunksiyasi*** *deb, faqat va faqatgina* $x\in M$ *qiymatlarda aniqlangan hamda* $P(x)$ *va* $Q(x)$*predikatlar yolg‘on qiymat qabul qilganda yolg‘on qiymat qabul qilib, qolgan barcha hollarda chin qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi va u* $P(x)\vee Q(x)$ *kabi belgilanadi.*

$P(x)\vee Q(x)$ predikatning chinlik sohasi $I_P\cup I_Q$ to‘plamdan iborat bo‘ladi.

**3- ta’rif.** *Agar hamma* $x\in M$ *qiymatlarda* $P(x)$ *predikat chin qiymat qabul qilganda yolg‘on qiymat va* $x\in M$ *ning barcha qiymatlarida* $P(x)$ *predikat yolg‘on qiymat qabul qilganda chin qiymat qabul qiluvchi predikatga* $P(x)$ ***predikatning inkori*** *deb ataladi va u* $\overline{P}(x)$ *kabi belgilanadi.*

Bu ta’rifdan $I_{\overline{P}}=M\setminus I_P=CI_P$ kelib chiqadi.

**4- ta’rif.** *Faqat va faqatgina* $x\in M$ *lar uchun bir vaqtda* $P(x)$ *chin qiymat va* $Q(x)$ *;yolg‘on qiymat qabul qilganda yolg‘on qiymat qabul qilib, qolgan hamma hollarda chin qiymat qabul qiladigan* $P(x)\rightarrow Q(x)$ *predikat* $P(x)$ *va* $Q(x)$ ***predikatlarning implikasiyasi*** *deb ataladi:*

## Mavzu: Formulaning normal shakli. Yechilish muammosi

**Ta’rif.** *Agar predikatlar mantiqi formulasi ifodasida faqat inkor, kon’yunksiya, diz’yunksiya* ($\neg$, $\wedge$, $\vee$) *amallari va kvantorli amallar* ($\forall$, $\exists$) *qatnashib, inkor amali elementar formulalarga* (*predmet o‘zgaruvchilar va o‘zgaruvchi predikatlarga*) *tegishli bo‘lsa, bunday formula* ***deyarli normal shaklda*** *deyiladi*

**1- teorema.** *Predikatlar mantiqining har qanday formulasini normal shaklga keltirish mumkin.*

**Amaliy qism:**

**Quyidagi teng kuchli formulalardan foydalandim:**

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$. (a)

2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$. (b)

3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$. (c)

4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$. (d)

5. $x \vee xy = x$ (e)

6. $x \to y = \bar{x} \vee y$ (g)

**Quyidagi formulalarni deyarli normal shaklga keltiring:**

$\forall x(A(x) \to \exists x C(x)) \to \forall x(C(x) \to A(x))$;

**1-ish.**

$$\forall x(A(x) \to \exists x C(x)) \to \forall x(C(x) \to A(x)) = \forall x(\overline{A(x)} \vee \exists x C(x)) \to \forall x(\overline{C(x)} \vee A(x)) =$$
$$= \overline{\forall x(\overline{A(x)} \vee \exists x C(x))} \vee \forall x(\overline{C(x)} \vee A(x)) = \exists x(A(x) \wedge \forall x \overline{C(x)}) \vee \forall x(\overline{C(x)} \vee A(x));$$

Bu formula deyarli normal shaklga keltirildi.

## Mavzu: Formula ta'rifi. Teng kuchli formulalar. Bajariluvchi formulalar. Aynan chin formula. Aynan yolg'on formula

**1- misol.** $N$ natural sonlar to'plamida $P(x)$ predikat berilgan bo'lsin: «$x$ – tub son». Kvantorlardan foydalanib ushbu predikatdan quyidagi mulohazalarni hosil qilish mumkin: $\forall x P(x)$ – «Hamma natural sonlar tub sonlar bo'ladi»; $\exists x P(x)$ – «Shunday natural son mavjudki, u tub son bo'ladi». Ravshanki, birinchi mulohaza yolg'on va ikkinchi mulohaza chindir. ■

**2- misol.** To‘g‘ri chiziqlar to‘plamida aniqlangan $P(x,y)$: «$x \perp y$» predikatni ko‘raylik. Agar $P(x,y)$ predikatga nisbatan kvantorli amallarni tadbiq etsak, u holda quyidagi sakkizta mulohazaga ega bo‘lamiz:

1. $\forall x \forall y P(x,y)$ – «Har qanday $x$ to‘g‘ri chiziq har qanday $y$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

2. $\exists y \forall x P(x,y)$ – «Shunday $y$ to‘g‘ri chiziq mavjudki, u har qanday $x$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

3. $\forall y \exists x P(x,y)$ – «Har qanday $y$ to‘g‘ri chiziq uchun shunday $x$ to‘g‘ri chiziq mavjudki, $x$ to‘g‘ri chizig‘i $y$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

4. $\exists y \exists x P(x,y)$ – «Shunday $y$ to‘g‘ri chiziq va shunday $x$ to‘g‘ri chiziq mavjudki, $x$ to‘g‘ri chiziq $y$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

5. $\forall y \forall x P(x,y)$ – «Har qanday $y$ to‘g‘ri chiziq har qanday $x$ to‘g‘ri chiziqqga perpendikulyar».

6. $\forall x \exists y P(x,y)$ – «Har qanday $x$ to‘g‘ri chiziq uchun shunday $y$ to‘g‘ri chiziq mavjudki, $x$ to‘g‘ri chiziq $y$ to‘g‘ri chiziqqga perpendikulyar».

7. $\exists x \exists y P(x,y)$ – «Shunday $x$ to‘g‘ri chiziq va shunday $y$ to‘g‘ri chiziq mavjudki, $x$ to‘g‘ri chiziq $y$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

8. $\exists x \forall y P(x,y)$ – «Shunday $x$ to‘g‘ri chiziq mavjudki, u har qanday $y$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar». ■

**3- misol.** $(\exists xP(x) \to \forall yQ(y)) \to R(z)$ formulani deyarli normal shaklga keltiramiz.

$$(\exists xP(x) \to \forall yQ(y)) \to R(z) \equiv (\overline{\exists xP(x)} \vee \forall yQ(y)) \to R(z) \equiv$$
$$\equiv \overline{\overline{\exists xP(x)} \vee \forall yQ(y)} \vee R(z) \equiv \overline{\overline{\exists xP(x)}} \vee \overline{\forall yQ(y)} \vee R(z) \equiv$$
$$\equiv \exists xP(x) \wedge \exists y\overline{Q(y)} \vee R(z).$$

Demak,

$$(\exists xP(x) \to \forall yQ(y)) \to R(z) \equiv \exists xP(x) \wedge \exists y\overline{Q(y)} \vee R(z). \ ■$$

**4- misol.** $A \equiv \forall x \exists y P(x,y) \wedge \overline{\exists x \forall y Q(x,y)}$ formulani normal shaklga keltirish talab etilsin. $A$ formulada teng kuchli almashtirishlarni o‘tkazib, uni normal shaklga keltiramiz:

$A \equiv \forall x \exists y P(x,y) \wedge \overline{\forall x \exists y Q(x,y)} \equiv \forall x(\exists y P(x,y) \wedge \exists z \overline{Q(x,z)}) \equiv$

$\equiv \forall x \exists y (P(x,y) \wedge \exists z \overline{Q(x,z)}) \equiv \forall x \exists y \exists z (P(x,y) \wedge \overline{Q(x,z)})$ . ■

## Mavzu Normal shaklga va Umumqiymatlilikga keltirish algoritmlari

**1- ta'rif.** *Agar $A$ formula ifodasiga kiruvchi va $M$ sohaga oid o'zgaruvchilarning shunday qiymatlari mavjud bo'lib, bu qiymatlarda $A$ formula chin qiymat qabul qilsa, u holda predikatlar mantiqining $A$ formulasi $M$* ***sohada bajariluvchi formula*** *deb ataladi.*

**2- ta'rif.** *Agar shunday soha mavjud bo'lib, unda $A$ formula bajariladigan bo'lsa, u holda $A$* ***bajariluvchi formula*** *deb ataladi.*

Demak, agar biror formula bajariluvchi bo'lsa, bu hali uning istalgan sohada bajariluvchanligini bildirmaydi.

**3- ta'rif.** *Agar $A$ning ifodasiga kiruvchi va $M$ sohaga oid hamma o'zgaruvchilarning qiymatlarida $A$ formula chin qiymat qabul qilsa, u holda $A$ formula $M$ sohada* ***aynan chin formula*** *deb ataladi.*

**4- ta'rif.** *Agar $A$ formula har qanday sohada aynan chin bo'lsa, u holda $A$* ***umumqiymatli formula*** *deb ataladi.*

**5- ta'rif.** *Agar $A$ formula ifodasiga kiruvchi va $M$ sohaga oid hamma o'zgaruvchilarning qiymatlarida $A$ formula yolg'on qiymat qabul qilsa, u holda $A$ formula $M$ sohada* ***aynan yolg'on formula*** *deb ataladi.*

Demak, predikatlar mantiqi formulalarini ikki sinfga ajratish mumkin: **bajariluvchi** sinflar va **bajarilmas** (bajarilmaydigan) sinflar formulalari.

**6- ta'rif.** *Umumqiymatli formula* ***mantiq qonuni*** *deb ataladi.*

**1- teorema.** *$A$ umumqiymatli formula bo'lishi uchun uning inkori $\overline{A}$ bajariluvchi formula bo'lmasligi zarur va yetarlidir.*

**2- teorema.** *$A$ bajariluvchi formula bo'lishi uchun $\overline{A}$ning umumqiymatli formula bo'lmasligi zarur va yetarlidir.*

**Amaliy qism:**

**Quyidagi teng kuchli formulalardan foydalandim:**

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$.   (a)

2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$. (b)

3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$. (c)

4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$. (d)

5. $x \vee xy = x$ (e)

6. $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$ (f)

**Quyidagi formula umumqiymatlimi?**

$\forall x(A(x) \rightarrow \exists x B(x)) \rightarrow \exists y(A(x) \vee C(y) \vee C(y) B(x))$;

**1-ish.**

$$\forall x(A(x) \rightarrow \exists x B(x)) \rightarrow \exists y(A(x) \vee C(y) \vee C(y) B(x)) = \forall x(\overline{A(x)} \vee \exists x B(x)) \rightarrow \exists y(A(x) \vee C(y) \vee B(x)) =$$
$$= \overline{\forall x(\overline{A(x)} \vee \exists x B(x))} \vee \exists y(A(x) \vee C(y) \vee B(x)) = \exists x(A(x) \wedge \forall x \overline{B(x)}) \vee \exists y(A(x) \vee C(y) \vee B(x)) =$$
$$= \exists x \exists y(A(x) \wedge \forall x \overline{B(x)} \vee A(x) \vee C(y) \vee B(x)) = \exists x \exists y(A(x) \vee B(x) \vee A(x) \vee C(y)) =$$
$$\exists x \exists y(A(x) \vee B(x) \vee C(y));$$

**Demek:** Bizga berilgan formula umumqiymatli emas.

## Mavzu: Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashgan normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi

**1- misol.** $\forall x \exists y P(x, y)$ formula bajariluvchidir. Haqiqatan ham, agar $P(x, y)$: «$x < y$» predikat $M = E \times E$ sohada aniqlangan (bu yerda $E = \{0,1,2,...,n,...\}$) bo‘lsa, u holda $\forall x \exists y P(x, y)$ formula $M$ sohada aynan chin formula bo‘ladi, demak, bu sohada u bajariluvchi formuladir. Ammo, agar $E_1 = \{0,1,2,...,k\}$ uchun «$x < y$» predikat chekli $M_1 = E_1 \times E_1$ sohada aniqlangan bo‘lsa, u holda $\forall x \exists y P(x, y)$ formula $M_1$ sohada aynan yolg‘on formula bo‘ladi va, demak, $M_1$ sohada $\forall x \exists y P(x, y)$ formula bajariluvchi emas. Ravshanki, $\forall x \exists y P(x, y)$ umumqiymatli formula bo‘lmaydi. ■

**2- misol.** $\exists x \exists y [P(x) \wedge \overline{P(y)}]$ formula bajariluvchidir. Haqiqatan ham, agar $P(x)$: «$x$ – juft son» predikat $E = \{0,1,2,...,n,...\}$ uchun $M = E \times E$ sohada aniqlangan bo‘lsa, u holda bu formula $M$ sohada aynan chin bo‘ladi, demak, u $M$ sohada bajariluvchi formuladir. Ammo, agar $P(x)$: «$x$ – juft son» predikat $E_1 = \{2,4,6,8, ...\}$ uchun $M_1 = E_1 \times E_1$ sohada aniqlangan bo‘lsa, u holda $\exists x \exists y [P(x) \wedge \overline{P(y)}]$ formula $M_1$

sohada aynan yolg‘on formula bo‘ladi, demak, bu sohada u bajarilmas formuladir. ■

**3- misol.** $\forall x[P(x) \vee \overline{P(x)}]$ formula ixtiyoriy $M$ sohada aynan chin bo‘ladi. Demak, u umumqiymatli formula, ya’ni bu formula mantiqiy qonundir. ■

**4- misol.** $\forall x[P(x) \wedge \overline{P(x)}]$ formula ixtiyoriy $M$ sohada aynan yolg‘on va shuning uchun ham u bajarilmas formuladir. ■

**5- misol.** $A \equiv \forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)}$ formulaning umumqiymatliligini isbotlaymiz. $A$ formula istalgan $M$ sohada aniqlangan deb hisoblab, quyidagi teng kuchli almashtirishlarni bajaramiz:

$$\equiv \overline{\forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)})} \vee \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(\overline{\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}}) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \overline{\forall x Q(x)} \equiv$$

$$A \equiv \forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv \equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \exists x \overline{Q(x)} \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$

$$\equiv (\exists x P(x) \vee \overline{\exists x P(x)}) \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv 1 \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv 1,$$

ya’ni $A$ formula istalgan sohada har qanday $P(x)$ va $Q(x)$ bir joyli predikatlar uchun aynan chin, demak, u umumqiymatli formuladir. ■

**6- misol.** $A \equiv \exists x[(F(x) \rightarrow \overline{F(x)}) \wedge (\overline{F(x)} \rightarrow F(x))]$ formulaning aynan yolg‘on formula ekanligini ko‘rsatamiz. $(F(x) \rightarrow \overline{F(x)}) \wedge (\overline{F(x)} \rightarrow F(x)) \equiv F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$ o‘rinli va $F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$ formula aynan yolg‘on formula bo‘lgani uchun

$A \equiv \exists x(F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)})$ ham aynan yolg‘on formuladir