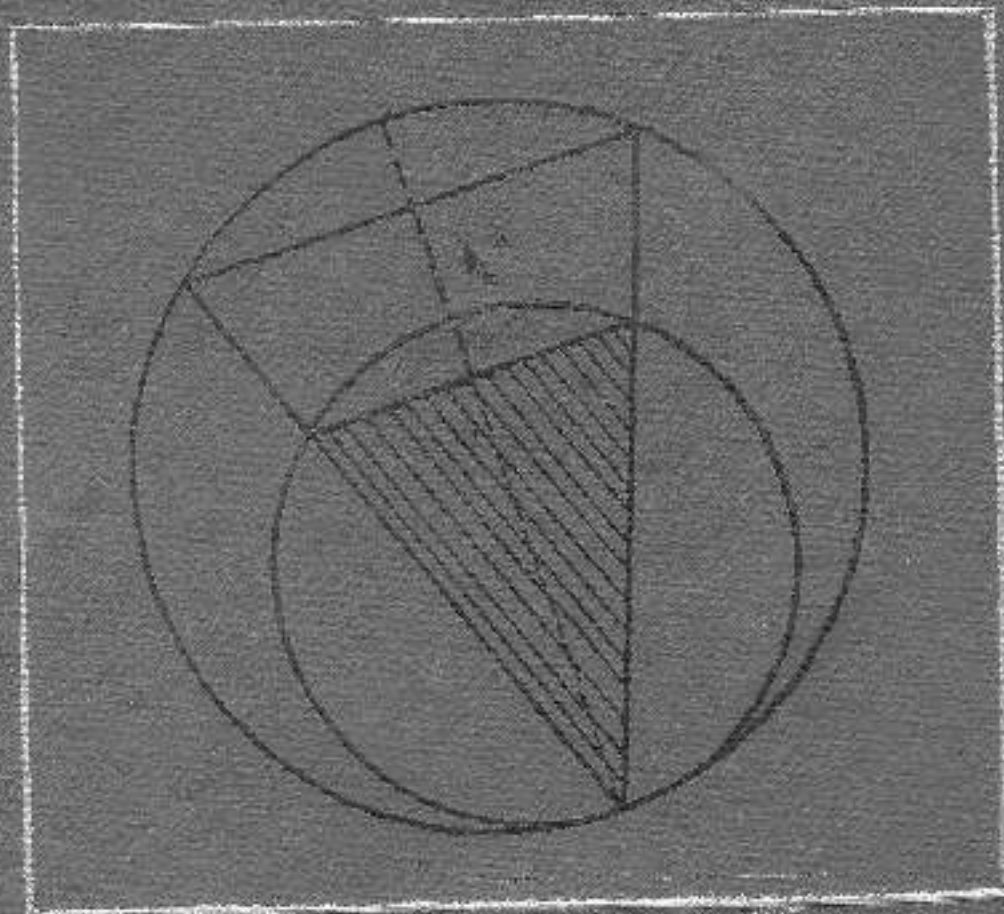


Б. К. СТАХОВИЧ

ГЕОМЕТРИК ЯСАШ МЕТОДЛАРИ



Kitob qo
muddatd

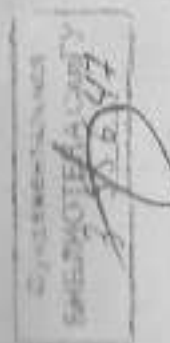
Oldin
miqd

Р. К. ОТАЖОНОВ

ГЕОМЕТРИК ЯСАШ МЕТОДЛАРИ

Педагогика институтларининг студентлари
ва ўрта мактаб ўқитувчилари учун
қўлланма

ТУЗАТИЛГАН ВА ҚАЙТА ИШЛАНГАН ТўRTИНЧИ НАШРИ



«ЎҚИТУВЧИ» НАШРИЁТИ
Тошкент—1978

DENOV TADBIRKORLIK
VA PEDAGOGIKA
INSTITUTI ARM
№ 17461

БИРИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Ўқувчиларнинг фазолий тасаввурларини кенгайтиришда, ижодий ва конструкторлик қобилиятларини ривожлантиришда ва уларни маълумий фикрларга ўрсатишда янада бир геометрия масалалар ечилишнинг аҳамияти ҳаят катгидир.

Ўқувчиларга бундай қобилиятларни тарбиялаш, айниқса, бизнинг социалистик Ватанимизда катта аҳамиятга эга, чунки техникахизмнинг кенг миқёсда ривожланиб бориши келажакда илмлар, техника ва конструктор бўлиб етишувчи ўқувчиларинингдан шундай қобилиятга эга бўлишни талаб этади. Аmmo конструктив масалалар ечилишда бир алабикетнинг ўзбек тилида жуда камлиги педагогика институти студентларининг конструктор геометрияда етириб даражада нухта билим олишларини ва ўрда мустаб ўқитувчиларининг ишлов анча қийинашотиришмоқда.

Бу китобни ёзишда мақсад ани шу кичиниклини тулатиш йўлида ҳурматли ўқитувчи ва студентларимизга қўлдан келганича ёрдам беришдир.

Китобнинг устуни конструктив геометриянинг асосий назариялари ва усулларини билиб етишда ҳамда уларнинг назарий ва амалий масалалар ечилишда қўлланилишининг кўрсатишда юқорида айтилган вазифани ҳужуми қадар кўпроқ қил қилишга ёрдам бериши ларур эканлиги донх назарда тутилди.

Бунда билиб етишган назария ва усулларнинг тоғвий мазмунини кўпроқ ёришнинг устуни туриш хилдаси масалаларини кўпроқ киртилди; китобга кирган 500 дан иртиқ масаланинг 120 дан ортиқроси ечиб кўрсатилди, 130 дан ортиқросининг ечилиш йўллари китоб охирида билиб қилинди ва 250 дан ортиқроси мулқикит ишлов устуни берилди.

Ечиб кўрсатилган дехрли ҳамма масалалар кетидан топшириқлар, ҳар бир боб охирида маюқ устуни савол ва масалалар берилди.

Китобдаги масалалар уч хил номер билан кўрсатилди; ечиб берилган масалалар билис „масала“ сўзи қўйилиб (масалан, 12- масала тарзида), қоря тўғри рақам билан ёзилди, маюқ

ушун берилген масалалар көрү курско рақамдар билли (масы-
лан, 26 тарвила), топшириқлар эса риги рақамдарни билли бе-
рилади.

Бүтөөб дхирхлх геташлп адибиди рёйхати ёарилли.

бу китобию ёлқини ўқийдиган оёқ соғик тижрибоналарим ва рус тиллиги адабийетдан ҳамда хурузли улусимиз проф. Александр Степанович Суссержавскийдан; дурматан олимларимиз проф. Н. Ф. Чечерухин, проф. Т. П. Қирп Нисанй, доц. М. А. Сайкоров, А. П. Бекоряд, А. М. Нарисовдан ва бошқа ўртоқларимиз! Оғзани ва сизи халсақилларимизни оқолати фидо-динлик.

Қўл ёзмаһини мастур мударрири дон. Ҳ. А. Мустафин ҳа
сэханг үндэ чиқтэ қимиятгн мислахатлар беран.

Бүгдтөсөөрөө чин хүндэтгэсэн үнэмлэхдээрийг бичгээр авч.

Көптеп өкүлүлүлөрүмүздүн аялмай филологияда бар калар болду деп, студенттерикизинин дукларок биана адинига хитра кылар, деген уянашыл.

Хурматлиқ кинотехникларимизнинг кинотўхловдан таъриқдан хушбўхаларини оқибатдан янгиликлар билан қабул қиларкан.

Низомий ноҳли Тошкент Ҷафлат
ҲАҶАТОВИЧ ИНСТИТУТИ

August

5. 2004. 1:37 4.

ИККИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Битових иккинчи вагрон тайёрашда унга, асосан, қўйиладиган таъсирини ва таътирланиш кимиясини:

1. Педагогика классиктары праграммаларына көрсәткән мәдәтләрнең мөһим кәдәр үзгәрешләрнең өч түрәсә: а) өстәткән, б) азайткан, в) башкача үзгәрткән. Бу үзгәрешләрнең сәбәпләре: а) педагогика классикларының үзгәрткән, б) педагогика классикларының үзгәрткән, в) педагогика классикларының үзгәрткән.

П. Матюбоғи көп малаймутовлар баён этиши, конструкция геометриянинг янада бойлигини мумкин қадар равшанроқ ёритишга алоҳида эътибор қилини. Мисалан, кинибла ёридаги деярли ҳамма янадак малаймутовлар V ва VI ёбларини қириқ қисмида ёзилган ёнақан сояларга, ҳумиш қалар ёзув-сўзларида иштирок.

III. Назарий мэдлүүхгээр бхришк дээр дагита явдаган бир-
мунча гучайтиралди ченоган;

а) бэрлэни наахдаа фагкт синтетик үсүлдэ төлөөтхик идмхитиришааринга хүрэттигэл бүрса, нхкнган нхирда эси аналитик үсүлдэ идмхитириш хэх үрсамаа бадн этилмх:

6) Айригиш ташрифи қирғиш ва қизил юнгида ҳасанатлиш тасвирлари ҳақида берилган маълумотлар буюрича келайтилади;

а) китоббин борида назирада жибитки берилган бир неча математик жўзлаярыниг жботи шкылчи назира кўрсатилади ва бади таърифуларинг бошкы жботларини хм берилади.

IV. Китебниң мазиули методик жияатдан ҳақ бирмулк
кусмийтирилади, чүнсун;

и) баъзи бобларнинг киритишларида шу бобда берилмаган баъзиларни ўрганишнинг аҳамиятини қисқа тўхтаси ўтказиш:

а) геометрия ўрнлар топиш методини пухтароқ ишлаб чиқиб, унга нид мисалларини қўқитлаб ечим ўсули мумкинмид-

а) кутубга янаи хялгууметлар қўпишда биринчи лаврада

қабул қилинган дидактик қандағарса яшда кўпроқ рикол қи-
лиши.

У. Ёришчи напред содир бўлиш билан камчирилди, тузо-
тисини ва ИИИ дян ортук чизма қайта чизилди.

VI. Конструкция симметричных ячеек ипозитивного дилемматизаторов соотв. формулы, кудайтирилади, уларга тегишли жааоб ва курочимаяар берилади.

VII. Китеб охирилдиги справка сўлимида ўрта мактаб ўқитувларга ушул махсус кўрсатмалар ва ушбуруак асасга доир махсусларчае теркув ва еказиц носителлиди етлимляди аста-релица рўйхати хал берилди.

Иккидан сонгра сайланган кул ёзмаки проф. Ю. К. Узоқов ва дақ. М. А. Собировлар ўқиб чиқиб, қимматли хатла-
ҳишлар бердилар; бу ўртоқларга чуқур миннатдорлик билан-
рамиз.

ASSIST.

25 carbide, 1932.4

УЧИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Китепнин бу катрада дүшкөчү алакан учун ага бет бөд-
дөк ибарат жарур үчүнчүстөр таңыраган бүлөк-дө, лекин
китеп дүжөмүгө калыңашып кетмөгөнгө риюл кылып, бу
дүшүмөктөрдүн айрык рыкына кыялында напир этипте карор
кылып.

Шулдан үзек китебди бу катрга тәһририятда улкан бәләи
§ ларга күрүшмәлар килиш ил икити кәшрият солир бун-
дан бизи кукәләрди түзәтиш билиш чәгәриллилик.

Asnloz.

A. van der, 1972 H.

ТҮРТИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Китобнинг бу нашрига қўйилган ўзгаришлар киритилди:
I. Геометрия аксиоматизишлар ҳақиқати назариясида тўп-
лашлар назариясига ёйилган тарзда талқин этилиш ва ёйи-
лган аксиоматизишларнинг татбиқи янги ўқитилиш ҳақида қў-
шимча маълумотлар берилди.

II. Бир қатор параграфларга қўшимчалар киритилди, мате-
матик символлар ангилари ва олинган яншида учраган хатолар
тузатилади.

Автомат

КИРИШ

1-§. ДАСТЛАБКИ ТУШУНЧАЛАР

1. Конструктив геометрия¹. Нуқталарнинг ҳар қан-
дай тўплами *геометрик фигура* ёки *геометрик образ* деб
аталади. Масалан, битта нуқта (бир элементли фигура), икки
нуқта, кесма (унга тегишли ҳамма нуқталар тўплами), тўрт
тўғри кесик, йўриқ, ўзаро параллел ёки қесилувчи тўғри
чизиқлар, ёй, бўлача ва умуман текисликнинг ҳар қандай бў-
лаги; шунингдек, куб, пирамида, шар ва шу кўбикларнинг ҳар
бири ёки уларнинг бирини тўплами *фигура*дир.

Бир текисликда ётган нуқталар тўплами *текис фигура* деб,
бир текисликка жойлашмаган нуқталар тўплами *фазвий фи-
гура* деб аталади.

Бир ёки бир неча асос қуроли (циркуль, чизма, сўйма ва
бошқалар) ёрдамида маълум талабларга жавоб берувчи гео-
метрик фигура ясашни талаб этган масала *асосга солиб гео-
метрик масала* ёки, қисқача, *конструктив масала* дейилади.

Математиканинг илмига доир геометрик масалалар ечиш ме-
тодларини ўргатувчи қисми *геометрик асослар назарияси*
ёки *конструктив геометрия* деб аталади.

Конструктив геометрияда бу асосий ишдан бошқа асос қўйи-
лашлар ҳам қаралади.

1) конструктив масалаларни типларга ажратиш, тахминан
асос ва ёйлақ бўлақлари чизмада жойлашмаган геометрик
образларни ясаи; конструктив масалалар ечим ушунг энт содда
бўлақларни топиш ва ечилишти соддалик даражасини аниқлаи;
геометрик асослар вақтида содир бўладиган техник хатоларни
ўргатиш;

2) геометрик асосларда фойдаланиладиган қуролавлардан ҳар
бирининг ёки бир нечасининг бирсанида ишлатилиш соддали-
гини аниқлаи ва асос қуролавларининг қайсылари билан қандай
масалаларни ечиш қулкин амалиётини ибодатлаи;

3) конструктив геометрия назариясининг амалий ҳаётда ва
бошқа қўшим фазалар содасида ишлатилиши.

2. Ясаи қуролавлар ҳақидаги дастлабки ту-

¹ „Конструкция“ сўзи қуриш ёки ясаи математикда латинча „con-
structio“ сўзидан келибди.

[illegible][illegible]

Ўшнинг давлатларида яшаш қўрақларининг хиан янон қўнайди, яққи томиши ларинини қизити, бўғия, эдингил қизити ва боп-қинар пайдо бўлади. Булардан бопқа, ўқиниш бопиқ бўйиш медалларда мизитиби қизити, трисектор ва бишқалар ишлатиша боп-қинар.

Ясаи куронавари узоқ вақтларгача системасида ишлатилган, булардан қар бирининг фойдаланиш соҳаси XVII—XIX асрларда синхронизан.

Экспедиция XVI агар охирида бир томонли сажани ва циркула ёрдамида ҳар қандай биринчи ва иккинчи даражада (яъни биринчи ва иккинчи даражада тилгамаля калитриятидан) конструкция масалаларини ечиш мумкинлигини, кейинроқ (1797 йилда Маскерони томонида) уларни фақат дарҳун ёрдамида ҳам етилиш мумкинлиги небот қилинган. А. Адлер 1801 йилда босилган асарда бундай масалаларни томонлари шармел битта қиягач ёки фақат гўша ёрдамида ҳам ечилиш мумкинлигини небот эди. Кейинроқ А. Адлер иккита тўғри бурчак остида ушунча оатўртигани даражада масалаларини етилиш мумкинлигини неботлади. Бир оз ўтган, олим Н. А. Никулин [12] ўзгармас радиус катталигида ишлаган циркула ва ихтидорий бурчак ёрдамида ёки икки томонли пизани да ихтиёрий бурчак воситасида ушунчи ҳамда тўртинчи даражада масалаларни ечилиш мумкинлигини небот қилди.

Бизар ин тугъайи қатор фактор конструкция мавзая енгиза
ясли кўрорларнинг аҳамияти жуда катта эканлигини, уни
конструкция мавзидан олганимизга асос қўйишнинг, енгизарнинг
боя ёки зийли бўлгани — енгизар ишлатилганига кўра турфа
дам бағдас эканлигини олиб қўбганимиз.

Шунино узоқ конструктив геостратегиянинг маҳсули бўлишида яқин дурдоначи назардан ўтказиб келинади.

Bu mablagha muzkur kitobning XIII boʻlibda diyan tashabbuschisi va kitobxon uchun ilmiyliklar qancha adasib ketmasligini [2], [3], [5], [7], [12], [30] va boshqalar.

Биз бу кўлиничага ҳаёган қирқуш ва бир томонли оғитни ўрдинда етказадиган конструктив масалаларнигина қарғамиз.

8. Диркуль ва чиданга аксиомалари, Ўртаги сон геометрия қассияларни диркуль ва чиданга ёрдаида ечилиш кубидига аксиомалар турки дей қабул қилинади, яъни бу аксиомаларда кўрсатибган қассияларни бажариш мумкин дей эхтиёжиз:

1. Берилган пикси худуддаги тўғри эъзак ўтказилиш ёки шу худудларни тутатирувчи асоса чизил мумкин (эъзали Ард-хизра).

2. Меркзэн өс рашуун берилгэн айлава ён меркзэн өс ниски учир берилгэн ён чиглэл мумкин (жиркуль ёрдэвчилэл).

3. Барилсан икки тэгрл чинсгыншг кесининг нэгдсэнлг (агэр улар кесншлг) тэглш нүмжлг (чээглч ёрдмнгл).

4. Берилян иккә айланмалы кыштык нукталарыни (акто бундәй нукталар хавжуз бұйса) тоиш мүмкүл (директа бр-дихица).

5. Берилген тәғри чыңың балан берилген айлананың кесипиң нукталарыни (агар бүтлә) нурлар мавжуд булса) толеш мумкин (чыхыч ва циркуль булганда).

Шу беш якинева-геометрик яванларга нисбатлашкан ку-
руллардан шакллен ва тизлинен хоссаларини абстракт мате-
матик формалда ифодалайди.

Южирда хийгэлэн бөд эхлэмэни төхлү сойма ишлэтиги бүлү бодол ечлэцигия тасалар члэни би циркум есина-сина ечлэцигин дэргэлээр дөргөлдө.

4. Ёниш методлари ҳақиқат дастлабки тушунчалар. Метод суяк трекка *methodos* сўзидан олинган бўлиб, усул ёки йўл деген маънони берилади. Ўша методларга муайян йўл ёки қатъий андаж деган маънони берган бўлиши. Ёниш методлари ётоқликнинг ижодий иккинчилигини қўлайлаштириш зарур шартларида ётади.

Яахад дундговьтос хамгаалалтын бичигдээд илэр үхтүү-
члалынхаа сүүлчээр татрибагчид ба методистаархиг хамга-

¹ Көзгөтүлүп кеткен тексттердин санын көрсөтүү үчүн кыскартылган маалымат берилди.

Бу ерда баришга фотураси еткан, 9 мазога ширинлик мазлуи. Эки патирери та мазб баришга фотураси мазбосига интилади.

ҳаттаари аёсанда нуқулда қалган ҳама ўқитиш ишларида те-
бара тақомиллаштиб бораётган мустақил ҳунилатилардир:

1) түгриялш метод; 2) нуқтазаринг нуқтаийг түгриял-
ринг таниш метод; 3) язалуу нуқтаийг түгриялзареж ишла-
тиш метод; 4) синметрия метод; 5) параллел кучириш ме-
тод; 6) нуқта атрофиде аялантириш метод; 7) ухлантилак
белг хомоготегие метод; 8) инварианс метод; 9) яагиринг яа-
лалш метод (алгоритм метод).

Бу методларнинг олтинчи саккизтаси *геометрик методлар* дейилади, chunki булар ёрдамиди масалалар ечимиди асосий геометрик фактларни таяниб муҳажжа тартибидан; булардан 4—8. методлар *геометрик анализнинг методлари* дейилади, chunki бу методлар билан масалалар ечимиди телметрик анализнинг қонунларидан фойдаланилади.

Бўлган методдан қўллашга масала егитица малабраница геометрияга татбиқ этилган, чиница малабраница босқичица бажарица малабраница қонунлари аниқка катга аҳамиятта эга бўлганлига учун бу 9- метод малабраница аниқка методди деб аталади.

[illegible]

Шүүнэгт үзүүл китобыннг биржичи баби түг үмүсий методдн баби эгэлсн багшнзбдн.

1505

**ЯСАШГА ДОИР МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШДАГИ
АСОСИЙ БОСКИЧЛАР**

2-^o БИИШ БОСҚИЧЛАРИ ҲАҚИДА УМУМИЙ МАЪЛУМОТ

Одатда янгилаб доир геометрик масалаларни енгилди елга-
лаштирувчи ва унинг тула олиқлиқини таъинловчи тўртта
босқичга риоя қилинган. Ҳар аниқла, маъш, ибодатин ва тек-
ширини йиқитиладирди; бу босқичлар бранзаван тўрт аир му-
қабалар юзун олиқлиқини таъинловчи янгилашди.

1. *Аюуна* (*ayuna*) грекча сүз бөлүнү, бирер жерге бек жолдонот бөлүлөсүзүрү ажалат текшири деген маани билдирет.

[illegible]

Анализини изашкучени фигура толиқлақ аёф фараз тинчиб, ушк насазлашқан таласини хушхалл қилар қўла жавоб берадиган тарафга тахминан ағзаб қўйлади. Сўнгра бу тахминий фигури (яъни ақалли тизмат) да беришган насазмотларил бор-йўқлиги тизмалади ва ситимизилари маъиял тартити мувофиқ ағзаб қўйлади. Бу фигури исхакки насазмот фигури билим хиллали беришанлар орасидан берадиганлар ақаллади. Сўнгра бу фигурилик қўйиб алектларини қўй тартитида яъни мушкитилари беришанлади.

Бу эл илганумен фигуралары ясап чыккан икът уати-
насы булар.

Азизовда кўнглича хасиятга берилганларга таяниб, шундай ёрдамчи фигура топиш ишлари туғилмадики, бу ёрдамчи фигурадан янадаги фигуратга ўтиш хужжат бўлсин.

Шүнийн үзүүн хэллэнэ — мөсөөг сөнүүлнэ энэ мууна (ижо-
дий) босгычи ём өмбөгдөрлийг бархичи дээ аталга.

2. Янаги миялга кешитилг эмаски Сомбатидир. Бу боскичда анилади туниган паян бейича торкун ва чизгач ёрдакчага изолуччи сируралданг збирга элементларини ва бутун фигурани усталиги ёрдаги чизга билиш тасиб уинлади.

3. Ишбот (сметка). Бу босқич ҳисобни ечишнинг саноат босқичи бўлиб, унда маълумнинг тўғри ечилишани, яъни янгилаш фитурасида масъала танқидларига жавоб бериш ишбот қилинади. Ҳисобда баъжарилган ишларга ва қилишга тегишлиларга таъиний қўйилганди.

4. Текшириш. Бу босқич ҳам масала ечишнинг ижодий босқичи бўлиб, ясаган донр масаланинг ечилиши умуман шу босқичда якунланиши керак.

Бу босқичда масалада берилган маълумотларнинг ўзгариши масала ечилишига қандай таъсир этиши ўрганилади, яъни қайси ҳолатларда ечимнинг бўлиши ва нечта бўлиши, қандай ҳолатларда ечимнинг бўлмаслиги аниқланади.

Ясаган донр масалаларни босқичлаб ечиш, тўғри етиш гаровидир. Лекин шунангеза тулаш лозимки, ҳар қандай масалани етишда ҳам бу тўғрала босқичга қатъий риоя қилиш шарт эмас. Масаланинг осир-энтилигини, содда-мураккаблигини қараб, бу босқичларнинг баъзиларигагина тўхталаш мумкин. Маълумки, етилиш йўли масала шартдан аниқлашиб турган, аниқлашга ҳожат қолмайди, етилишни тўғрисида ақалли ва ясашдан оқибат маълум бўлса, исбот учун эҳтиёж қолмайди.

Едино босқичларнинг моҳиятини турли қўйишдан ҳисоб қилганда масалаларни етиш вақтларига равишанроқ куриш мумкин.

3-5. МАСАЛАЛАРНИ БОСҚИЧЛАБ ЕЧИШГА ОИД БАЪЗИ БИР МИСОЛЛАР

Иккинчиси бу параграфни берилган маҳал турли қўйиш-лашдаги масалалар ечилишида етиш босқичларининг оқибатини кўрсатишдир.

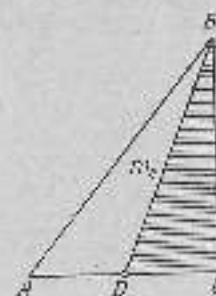
Шу мақсадда анализни ечиб бўлмайдиган масалалардан мисоллар келтириб, бу ишнинг ёрдамчи ҳисоб ўлкасидан анализ қилиш мумкин бўлган энг содда масалани қаратдан ботилаймиз.

Ўқувчи (ёки студент) ларнинг билим савиясига қараб, бу масалалардан бир-иккитасини танлаб уларга кўрсатишни ва қолганларини эса тўғарак машғулотларига ишлатишни тавсия қиламиз.

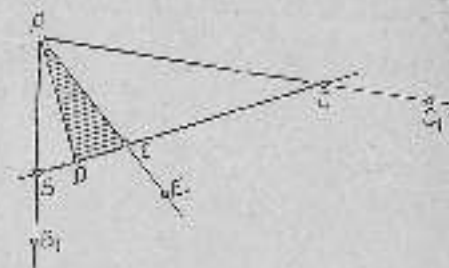
1- масала. *Бир катети ва иккинчи катетининг ўртача арифметик миқдори берилган тўғри бурчанган учбурчак ясанг.*

Анализ. Изланган учбурчак топилди деб фарз қилиб, уни таҳминан қизиб қўйайлик: 1-1 чизмадаги $\triangle ABC$ — изланган учбурчак ва унинг берилган элементлари $|BC|=a$,

$|BD|=m$, ва $\hat{C}=90^\circ$ бўлсин. Бу учбурчакни ясалг учун унинг A , B ва C учларини топиш керак. $|BC|=a$ томони берилгани учун унинг B ва C учлари маълум. A учини учбурчак AC ва AB томонларининг кесилиши нүqtаси бўлса ҳам бу томонлар номалум бўлгани учун улар ёрдамчи A нүқтага белгиланган бўлаётган. Шунинг учун тўғри бурчакли $\triangle BCD$ ни қарайлик. Унинг BC катети, BD гипотенузаси ва $\hat{C}=90^\circ$ берилган учун уни ясалг мумкин. Берилишига қараб, BD кесма миқдори бўлгани учун $|AD|=|CD|$. Шунинг учун A , BD иши CD катети давомиди унга тегиш кесма олиб, A нүқтани



1-1 чизма



1-2 чизма

топиш мумкин. Шунга A ва B нүқталарни туталтириш, $\triangle ABC$ ҳосил бўлади.

Демак, масала шартда берилганлар бўйича тўғри бурчакли $\triangle BCD$ ни ясаб, унинг ёрдамчи изланган $\triangle ABC$ га ўтиш мумкин экан. Масала ечилишида фойдаланилган $\triangle BCD$ ёрдамчи фигура бўлади.

Екинчиси ясаи, исботлаш ва текшириш босқичлари ўз-ўзида равишан бўлгани учун улар устида тўхташга эҳтиёж йўқ.

1- А масала. *Бир бурчак ва шу бурчакни учидан чиққан баландлиги ҳамда биссектрисаси берилган учбурчак ясанг.*

Анализ. Изланган учбурчакни топиш деб фарз қилиб, уни таҳминан қизиб қўйайлик: 1-1 чизмадаги $\triangle ABC$ — изланган учбурчак бўлиб, унинг берилган элементлари $\angle A$, $|AD|=h$, ва $|AE|=l$ бўлсин.

Изланган $\triangle ABC$ ни ясаи учун унинг A , B ва C учларини топиш керак. Чизмага қараб, $\triangle ABC$ нинг A учини ундаги тўғри бурчакли $\triangle ADE$ нинг A учидан иборат; B ва C учлари эса DE тўғри чизиқнинг берилган $\angle B, AC, \cong \angle A$ бурчак томонлари билан кесилиш нүқталаридан иборат.

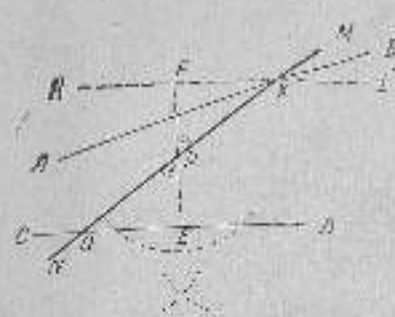
Берилган AD катети ва AE гипотенузаси бўйича маълум бўлган тўғри бурчакли $\triangle ADE$ ясалг мумкин.

Масаланинг шартига қараб, AE кесма берилган $\angle A$ нинг биссектрисаси эканлигидан фойдаланиб, AB , ва AC турларининг $|AE|$ га лавбатан вақиятини аниқлаш (яъни бу нурларни қизиб) мумкин.

Масалада берилганларга қараб, $\triangle ADE$ ни ясалг ва ундаи изланган $\triangle ABC$ га ўтиш мумкин бўлган учун тўғри бурчакли $\triangle ADE$ ёрдамчи фигурадир.

Анализга тузатган план бўйича изланган $\triangle ABC$ ни ясалг.

2- масала. *Икки тўғри катет ва улардан биридан нүқта берилган; бу нүқтадаи берилган тўғри катетлар орасидан*



2-1 чизма

кесмаси шу нуқтада тенг эканлиги буюлибдиан тўғри чизик ўтказилган.

Ана шундан. Махсус ҳолати деб фарз қилиб, унга тегишли ҳисоблар тахминан қилиб қўямиз (2-1 чизма). Ивланувчи чизик, берилган P нуқтасини ўтиб, берилган AB ва CD тўғри чизикларини X ва Q нуқталарда кесувчи MN тўғри чизик бўлсин. Унда масаланинг шартини буюрсин:

$$|PX| = |PQ| \quad (1)$$

теңлигини ёза оламиз.

Йолавуачи тўғри чизикни топиги учун унинг P нуқтасидан бунда яна бирорта нуқтасини, масалан, шу чизикнинг берилган AB тўғри чизик билан кесилиши X нуқтасини топсам kifов.

X нуқтасини AB билан яна бирорта тўғри чизикнинг кесилиш нуқтаси шифтада аниқлашга интиламиз. Бунинг учун X нуқтасидан берилган CD тўғри чизикка параллел KL тўғри чизик ўтказилай.

$$(KL) \parallel (CD). \quad (2)$$

P нуқтадан KL тўғри чизикнинг бўлиши масофани топиги учун P нуқтадан KL тўғри чизикка PF перпендикуляр туширайлик:

$$(PF) \perp (KL). \quad (3)$$

ва бу перпендикуляр лавонининг CD тўғри чизик билан кесилиш нуқтасини E билан белгилыйлик. (2) ва (3) га мувофиқ:

$$(EF) \perp (CD), (KL). \quad (3')$$

(1) га ва вертикал бурчлар бўлган $\angle 1$ ва $\angle 2$ ларининг конгруэнтаклига ҳақда (3') га асосан:

$$\triangle PFX \cong \triangle PEQ. \quad (4)$$

Бундан:

$$|PF| = |PE|. \quad (4')$$

PE кесма, берилган P нуқтадан берилган CD тўғри чизикка асла масофа бўлиши учун уни маълум деб хисобламиз. Шунинг учун унга тенг бўлган PF кесма ҳам маълум бўлади. Демак,

$$|EF| = 2|PE|. \quad (4'')$$

Шундай қилсб, KL тўғри чизик берилган CD тўғри чизикдан $2|PE|$ масофада ётили аниқланди. Демак, KL тўғри чизик

зикни берилган P нуқта ва CD тўғри чизикдан фойдаланиб ясаи мумкин экан.

KL ва AM тўғри чизиклар кесилиб, изланган ёрдамчи X нуқтасини ҳосил қилади.

Ясаиш йўли аниқланган X нуқта ва берилган P нуқтадан паланган MN тўғри чизик ўтказилади.

Ясам. Берилган P нуқтадан берилган тўғри чизикларнинг бирита, масалан, CD га PH перпендикуляр ўтказамиз (2-1 чизма).

HP кесманинг лавонига $|PF| = |PE|$ кесмани қўйиб, HP тўғри чизикка унинг F нуқтасидан KB перпендикуляр ўтказамиз.

KL ва AB тўғри чизикларнинг кесилиши X нуқтасидан ва берилган P нуқтадан MN тўғри чизик ўтказамиз.

Исбот. Топилган MN тўғри чизикнинг масала талабига жавоб беришини, яъни

$$|PX| = |PQ|$$

теңлигининг мажбуриятини кўрсатиш керак (2-1 чизма). Бунинг учун PFX ва PEQ учбурчларни солиштириб қўрамиз.

Ясаишнинг кўра: $PFX = PEQ = 90^\circ$, $\angle 1 = \angle 2$, $|PF| = |PE|$ бўлгани учун:

$$\triangle PFX \cong \triangle PEQ.$$

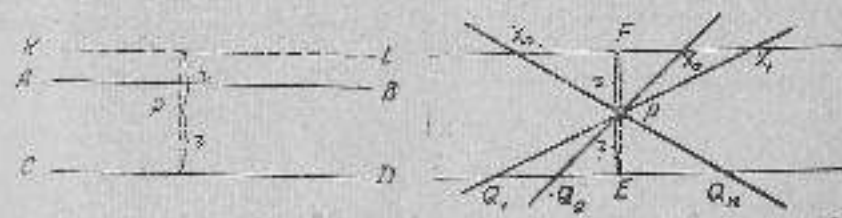
Бундан:

$$PX = PQ.$$

Текшириш. 1) Агар берилган тўғри чизиклар ўзаро параллел бўлмаса, KL тўғри чизик берилган AB тўғри чизик билан кесилиб, брлақчи X нуқтасини ҳосил қилади; бу ҳолда масала шартини ва масала талабига жавоб берувчи битта тўғри чизик топилади (2-1 чизма).

2) Берилган икки тўғри чизик ўзаро параллел бўлиб, берилган P нуқта улардан тенг масофада бўмаса, масала ечиммайди, чунки шу ҳолда $(KL) \parallel (AB)$ бўлиб, брлақчи X нуқта ҳосил бўлмайди (2-1 чизма).

3) Агар берилган икки тўғри чизик ўзаро параллел бўлиб, берилган P нуқта улардан тенг масофада бўл, KL тўғри чизик



2-2 чизма

2-1 чизма

AB тўғри чизик билан устга-уст тушади. Бу ҳолда улар чексиз кўп ўқимий нуктага эга бўлади, масалан, AB талаядига жавоб берувчи тўғри чизиклар чексиз кўп бўлади (2- III чизма).

Тоғтириш:

1°. Берилган янги тўғри чизик AB ва BC кесилиши B нуктаси бўлиб, AB ва BC нукталарига қўйилган нукталар.

3- масала. Учбурчакнинг асосига параллел қилиб, унинг ён томонлари орасидаги кесмага шундай томонларнинг асос тарафиндаги кесмалари йиғилгансига тенг бўлган тўғри чизик DE қилинсин.

Анализ. Мисалга сўраш деб фарз қилиб, унда тегишли чизикни текшириш қилиб олаемиз (3- I чизма). ABC — берилган учбурчак. MN — изиланган тўғри чизик бўлсин. Мисалга партия мурофи:

$$a) (MN) \parallel (BC) \text{ ва } b) |DE| = |BD| + |CE| \quad (1)$$

BD кесмани қўшиб, DE кесмага қўйсак, унда $|DX| = |BD|$ ва $|XE| = |CE|$ бўлади. Бундан:

$$|DE| = |DX| + |XE|. \quad (2)$$

Демак, X нуктаси топиб, ундан BC асосига параллел тўғри чизик DE қилинсин, мисалга сўраш экан.

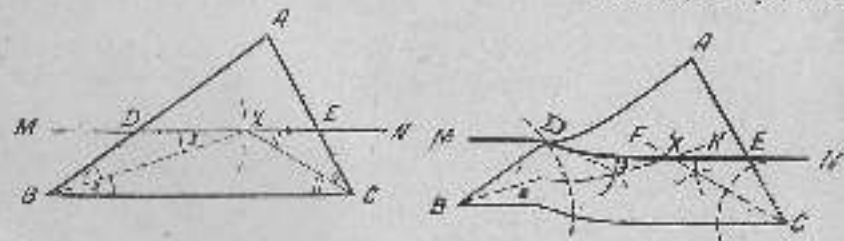
Энди аслида шартларини X нуктаси берилган B ва C нукталар билан туздириб, X нуктасининг берилган фигура бўла олганини исбот қилаемиз.

Ҳақиқатан ҳам, $(MN) \parallel (BC)$ бўлгани учун $\angle 3 \cong \angle 2$. $\triangle BDH$ тенг ёки бўлганидан $\angle 3 \cong \angle 1$. Бундан:

$$\angle 1 \cong \angle 2. \quad (3)$$

Бу тенгликдан BH тўғри чизик — B бурчагининг биссектрисаси эканлиги ҳақиқат бўлади.

Худди шу ҳол бўлиб, CX тўғри чизик — C бурчагининг биссектрисаси эканлигини исбот қилиш мумкин. Демак, X нуктаси



3- I чизма

3- II чизма

* Шартларни тоғтиришларга қилиб олишга бўйсунмаклар берилди.

B ва C бурчаклар биссектрисаларининг кесилиши нуктаси шартларда топиш мумкин экан.

Энди изиланган тўғри чизикни топиш учун X нуктасини берилган учбурчакнинг асосига параллел тўғри чизик DE қилинсин.

Яна ш. Берилган учбурчак асосига B ва C бурчакларнинг BH ва CX биссектрисаларини чизамиз (3- II чизма).

Ўнгга чиқилган янги биссектрисанинг кесилиши нуктасидан BC асосига параллел қилиб изиланган MN тўғри чизикни ётаемиз.

Исбот. BH биссектриса бўлгани учун:

$$\angle 1 \cong \angle 2.$$

$(MN) \parallel (BC)$ бўлгани учун:

$$\angle 3 \cong \angle 2.$$

Бундан:

$$\angle 1 \cong \angle 3.$$

Демак, BDH учбурчак тенг ёки бўлгани учун $|BD| = |DH|$.

Шунингдек, $|CE| = |EX|$. Бу икки тенгликни ҳақиқат қўшиб, (2) тенгликни ҳисоб қилаемиз.

Тегишлири ш. Берилган учбурчак ҳар қандай бўлганда ҳам унинг B ва C бурчакларининг биссектрисаларини ва уларнинг кесилиши нуктасини топиш мумкин. Бу нукта бўлганда DE нукта учун мисалларнинг сони ҳам битта MN тўғри чизик бўлади.

4- масала. Параллелограммнинг унинг бир учидан иккунчи янги тўғри чизик билан унга тегишли бўлакка бўлинг.

Анализ. Берилган параллелограмм $ABCD$ ва мисалларни таласига жавоб берувчи тўғри чизиклар AX ва AY (4- I чизма) деб фарз қилаемиз (X ва Y — тўғри чизикларнинг параллелограмм томонлари билан кесилиши нукталари). Мисалга шарҳи мурофи:

$$\triangle ABX \text{ ва } \triangle AYD \text{ ёки } \triangle AYD \text{ ёки } \triangle AYD \text{ ёки}$$

$$\text{ёки } S_1 = S_2 = S_3. \quad (1)$$

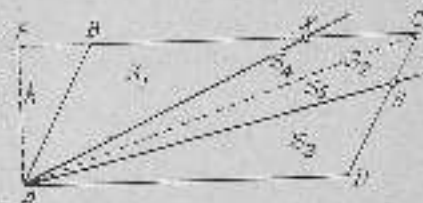
Изданган тўғри чизикларни топиш учун X ва Y нукталарни топиш қийин. Бу

нукталарни топишда уларнинг параллелограмм томонларига ётишини ва AC диагональ параллелограммни икки қисмга қўйиб, учбурчакка бўлишлардан фойдаланамиз. Чизмадан:

$$\triangle ABC \text{ ва } \triangle ADC \text{ ёки ёки}$$

$$S_1 = S_2 = S_3 + S_4.$$

4- I чизма



Бундан (1) га асосан:

$$S_4 = S_2 \quad (2)$$

$S_1 + S_2 = S_4$ бўлгани учун:

$$S_1 + \frac{1}{2} S_1 = \frac{1}{2} S_1 \quad (3)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} S_1 = \frac{1}{2} S_4 \quad (4)$$

Параллелограммнинг A учидан ўнг BC томонига ўтказилган бўлинишнинг A қисми бўлиниб, учбурчаклар юзлари учун қуйидаги хфолларни эга бўлади:

$$S_1 = \frac{1}{2} |BX| + b; \quad S_2 = \frac{1}{2} |CX| + b.$$

Бу хфолларни $S_1 = \frac{1}{2} S_4$ тенгликка қўйиб:

$$\frac{1}{2} |CX| + b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} |BX| + b \right).$$

Бундан эса:

$$|CX| = \frac{1}{2} |BX|. \quad (5)$$

Худди шу йўл билан $|CY| = \frac{1}{2} |DY|$ эканлиги аниқланади. Бундан қуйидагилар ҳақиқат бўлади:

$$|CX| = \frac{1}{2} |BC|, \quad |CY| = \frac{1}{2} |CD|. \quad (6)$$

Демак, изловчи тўғри чизикларни аниқлашда ёрдам берувчи X ва Y нукталарни топиш учун берилган параллелограммнинг CB ва CD томонларини тег Y бўлигига бўлиб.

Яъни, берилган A ва C нукталар ёрдаччи фигуралар бўлади. Томирларнинг A ва C нукталар ёрдаччи фигуралар бўлади. C учидан бошлаб ҳисоблашда томирнинг учдан бар бўлигини кўрсатувчи нукталар иланган X ва Y нукталар бўлади (4-И чизма).

Сўнгра параллелограммнинг A учидан томирнинг A ва Y нукталар бўлиш натижасида AX ва AY тўғри чизиклар параллелограммни изловчи тегдан бўликларга бўлади.

Иккит. Янашга кўра худди шундай натижа:

$$|AM| = |MX| = |XC|;$$

$$|DN| = |NY| = |YC|.$$

Бундан:

$$|BX| = 2 |XC|, \quad |DY| = 2 |YC|. \quad (7)$$

(7) дан ABX учбурчакнинг юзи S_1 , AXC учбурчакнинг юзи S_2 дан икки марта катта, ADY учбурчакнинг юзи S_3 дан икки марта катта эканлиги раван:

$$S_1 = 2S_2, \quad S_3 = 2S_4. \quad (8)$$

Параллелограммнинг AC диагонали уни тег икки учбурчакка бўлишни эътиборга олиб, қуйидагиларни эга бўлади:

$$\triangle ABC \text{ юзи} = \triangle ACD \text{ юзи}.$$

Бундан:

$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4. \quad (9)$$

Агар S_1 ва S_2 нинг (8) дан қийметларини (9) га қўйиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$2S_2 + S_1 = 2S_3 + S_4, \quad 3S_2 = 3S_4.$$

Бундан:

$$S_2 = S_4. \quad (10)$$

Бундан ташқари, (8) дан $S_1 = 2S_2$, $S_3 = 2S_4$ ва (10) дан $S_2 = S_4$ бўлгани учун

$$S_1 = S_3. \quad (11)$$

Чизмадан эса $S_2 = S_4 = S_1$, (8) ва (11) да

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} S_1 = \frac{1}{2} S_3.$$

Демак,

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4.$$

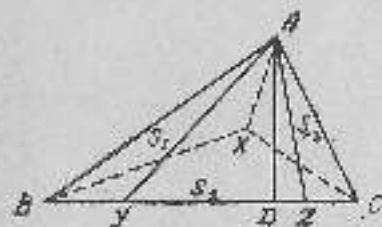
Текшириш. Берилган параллелограммнинг тегдан ва катталиги ҳар қандай бўлса ҳам бу натижа енигга эга бўлади, чунки параллелограммнинг томирларини ҳамма ўзг Y бўлигига бўлиш мумкин ва натижада учдан бар бўлигини кўрсатувчи нукта битта бўлигига учун ениг ҳам битта бўлади.

5-мисал. Учбурчак ABC икки шундай нукта X ва Y бўлигига, бу нукталар учбурчакнинг учлари билан тўғри чизикларнинг қилиқ натижалари учбурчакнинг юзини берилган $m:n:p$ натижада бўлади.

Айталик. 1) Масаланинг шартига жавоб берувчи X нукта томирдан деб фарз қилиб, уни ABC учбурчакда тахминан белгилаб қўйиб (5-1 чизма). Унда

$\triangle ABX$ юзи: $\triangle BCY$ юзи: $\triangle ACX$ юзи — $m:n:p$ ёки чизикча:

$$S_1 : S_2 : S_3 = m : n : p. \quad (1)$$



4-Чизма

қосма бўлган учун уларнинг юзлари қуйидаги муносабатда бўлади:

$\triangle ABY$ юзи: $\triangle AYX$ юзи: $\triangle AYZ$ юзи $= m:n:p$, ёки қосма

$$S_1 : S_2 : S_3 = m : n : p. \quad (2)$$

(1) ва (2) пропорциялардан қуйидаги қосим теңлиқлар ҳосил қилинади:

$$S_1 : (S_1 + S_2 + S_3) = m : (m + n + p). \quad (1')$$

$$S_2 : (S_1 + S_2 + S_3) = n : (m + n + p). \quad (2')$$

$$S_3 : (S_1 + S_2 + S_3) = p : (m + n + p). \quad (3)$$

Шунинг учун (1') ва (2') дан S_1 ва S_2 ни оқшайтсак:

$$S_1 = \frac{mS}{m+n+p}. \quad (1'')$$

$$S_2 = \frac{nS}{m+n+p}. \quad (2'')$$

Шундан равишан:

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$

Худди шунингдек:

$$S_3 = S_1 + S_2.$$

Шундай қилиб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\triangle ABX \text{ юзи} = \triangle ABY \text{ юзи} : \triangle ACX \text{ юзи} = \triangle AZC \text{ юзи}. \quad (4)$$

Маълумки, юзлари тенг ушбурақларнинг асослари тенг бўлса, баландликлари ҳам тенг бўлади. Агариз чизмасидан AX ва AY ушбурақларнинг юзлари тенг ва улар умумий AB асосга ётади. Шунинг учун уларнинг X ва Y ушбурақлар AB асосга тутирилган баландликлари ҳам бир-барига тенг. Демак, X ва Y нуқталар AB босқини тенг қисмга бўлади.

Шундай қилиб, натижадан X нуқта Y нуқтидан бериладиган ушбурақларнинг AB томонига параллел бўладиган тўғри чиққичга ётар экан.

Худди шу усулда натижадан X нуқтидан Z нуқтида AC томонига параллел қилиб ўтказилган тўғри чиққичга босқинни кўрсатиш мумкин.

Демак, натижадан X нуқта Y дан (AB) га ва Z дан (AC) га параллел қилиб ўтказилган тўғри чиққичларнинг кесилиши нуқтасида ётади ва Y қисми Z нуқтидан X нуқтига тегишда бўладиган ҳитурга бўли олади.

Янаш. 1) Бериладиган ушбурақларнинг BC томонига бериладиган босқичларда бўладиган Y ва Z нуқталарни топамиз (5-Чизмада $m:n:p = 2:3:4$ лисбатда олиш).

2) Топилган Y нуқтадан $YM \parallel AB$ ва Z нуқтадан $ZN \parallel AC$ тўғри чиққичлар ўтказиб, уларнинг кесилиши нуқтасини X деб белгиланамиз.

Исбот. Топилган X нуқтани A , B ва C нуқталар билан тўғри чиққичларнинг қосим бўлган ABX , BCX ва ACX ушбурақларнинг юзлари қуйидаги

$$\triangle ABX \text{ юзи} : \triangle BCX \text{ юзи} : \triangle ACX \text{ юзи} = m : n : p \quad (1)$$

муносабатида бўлишини исбот қилиш керак.

Y ва Z нуқталарни A нуқта билан тутантсак, қосим бўлган ABY , AYX ва AZC ушбурақларнинг асослари ақаллишига кўра:

$$BY : YZ : ZC = m : n : p \quad (2)$$

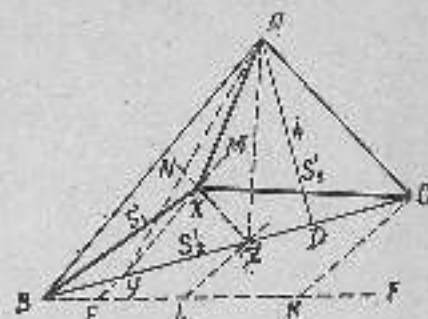
муносабатда бўлади.

Бу ушбурақларнинг умумий ушбурақ A нуқтадан қосим тутирилган $AD = h$ теңлиқлар уларни умумий баландлик бўлган учун уларнинг юзлари ҳам $m:n:p$ лисбатда бўлади, яъни

$$S_1 : S_2 : S_3 = m : n : p. \quad (3)$$

ABY ва ABX ушбурақларнинг қосим босқич AB қосим бўлган ва уларга (Y қисми X қисми асосга параллел (XY) га ётади учун бу тўғри ушбурақлар теңлиқда бўлади.

Шунингдек, AZC ва ACX ушбурақларнинг Z ва X нуқталар, яъни қисми $XZ \parallel AC$ тўғри чиққичга ётади учун уларнинг умумий AC асосга тутирилган баландликлари ўзаро тенг ва шу қилиб бу тўғри ушбурақларнинг юзлари ҳам бир-барига тенг бўлади, яъни



5-Чизма

$$\triangle ABY_{\text{сон}} = \triangle AMX_{\text{сон}} \quad (4)$$

$$\triangle AZC_{\text{сон}} = \triangle ACX_{\text{сон}} \quad (5)$$

Бу тенгликлар ҳадлаб қўшилса:

$$\triangle ABY_{\text{сон}} + \triangle AZC_{\text{сон}} = \triangle ABX_{\text{сон}} + \triangle ACX_{\text{сон}} \quad (5')$$

тенглик ҳосил бўлади.

Бу тенгликнинг ҳар бир томонидаги юзлар йиғиндисини берилган ABC учбурчакнинг юзидан айирсак, қуйидаги тенглик чиқади:

$$\triangle ABC_{\text{сон}} - (\triangle ABY_{\text{сон}} + \triangle AZC_{\text{сон}}) = \triangle ABC_{\text{сон}} - (\triangle ABX_{\text{сон}} + \triangle ACX_{\text{сон}}) \quad (6)$$

Бу тенгликни 5- II чизмага кесел:

$$\triangle AYZ_{\text{сон}} = \triangle BCX_{\text{сон}} \quad (6')$$

шаклида ёзи оламиз.

Шундай қилиб, юзлари тенгадони (3), (4), (5), (6') тенгликларга таяниб, қуйидаги хулосага келамиз:

$$\frac{\triangle ABX_{\text{сон}}}{\triangle BCX_{\text{сон}}} : \frac{\triangle ACX_{\text{сон}}}{\triangle BCX_{\text{сон}}} = \frac{\triangle ABY_{\text{сон}}}{\triangle AYZ_{\text{сон}}} : \frac{\triangle AZC_{\text{сон}}}{\triangle AYZ_{\text{сон}}} = m : n : p \quad (7)$$

Мана шунинг исбот қилиш талаб этилган эди.

Демак, толилган X нукта масаланинг талабига жавоб берад экан.

Текшириш. Учбурчак шаклининг сонларининг ўзгаришига қараб, яъни m, n, p ўзгаради. Масала ҳамма нуктадаги ва, ушунан, олтига енгиза эса бўлади.

Топшириқлар

I. Берилган учбурчакнинг ичда нукта тоғини, бу нуктани учбурчакнинг учлари билан туташтиришчи кесмалар тини нукта тенгадони бўлсаки бўл.

II. Олдинги топшириқдаги масала учбурчак медианалариники ҳосиланган фойдаланиб ечинг.

6- масала. *Бир томони, диагоналлари ёки ёғиндисининг ярми ол диагоналлари оралидаги бурчани берилган параллелограмм исанг.*

Анализ. I) Масала шундан, деб фараз қилиб, қозонган параллелограмм $ABCD$ ни тахминан шундай қилимиз. Бу параллелограммнинг берилган элементлари қуйидагилар бўлсин (6- I чизма):

6- I чизма

$$|AB| = a, \frac{1}{2}(|AC| + |BD|) = \frac{1}{2}(e + f) = l \text{ ва } \triangle CMD = x. \quad (1)$$

2) Энди параллелограмм ясаш учун зарур бўлган ёрдамчи фигурани топиш керак. Бу ишни l кесмини ясадан бошлаймиз. Бунинг учун диагоналлари бирининг ярмини ўлчаб олиб $\left|\frac{|AC|}{2}\right| = |MA|$, унинг давомига иккинчи диагоналининг ярмини $\left|\frac{|BD|}{2}\right| = |ME|$ қўямиз. натижада l кесма ҳосил бўлади:

$$|MA| + |ME| = |MA| + |MB| = l.$$

Сўнгра E нуктани B нукта билан туташтириб, ҳосил бўлган BME учбурчакда BEM бурчакни янқайтимиз. Берилган x бурчак ясалганига қўра тенг ёлди BME учбурчакнинг танқи бурчани бўлагани учун

$$\angle BEA = \frac{x}{2}.$$

Демак, берилган икки томони (бизнинг масалада a ва l) ва улардан бирининг қаршисида ётган бурчани (бизнинг масалада $\frac{x}{2}$) бўйлаб ABE учбурчак ясаш мумкин.

ABE учбурчак $ABCD$ параллелограмм ясади ёрдамчи фигура бўлади. Ҳақиқатан ҳам параллелограмм диагоналлариининг кесилиши M нуктаники тенг ёлди BME учбурчакнинг учини сифатида топиш мумкин.

Бунинг учун ABE учбурчак BE томонининг ўртасидан перпендикуляр туқариб, унинг учбурчак AE томони билан кесилишидан ҳосил бўлган M нуктани B нукта билан туташтириб, BM кесманиинг давомига $MD = BM$ кесмани қўйсак, параллелограммнинг D учини ҳосил бўлади. Параллелограммнинг C учини толиш учун MA кесманиинг давомига $MC = MA$ кесмани қўйиш керак.

Толилган D нуктани A ва C нукталар билан ва C нуктани B нукта билан туташтиришдан $ABCD$ параллелограмм ҳосил бўлади.

Ушунан, I) Ҳазин ABE учбурчакни ясаймиз (6- II чизма). 2) Сўнгра ABE учбурчакдан $ABCD$ параллелограммга ўтамиз.



6- II чизма

Исбот. Ясалган $ABCD$ тўртбурчак масаланинг шартига жавоб беради, шунинг:

1) $ABCD$ тўртбурчакнинг диагоналлари яқинлиқта кўра, M нуктада бир-бирига тенг бўлади; демак, $ABCD$ — параллелограмм.

2) $AB = a$ — ёлғиз сондан.

3) Янши чизмасидаги M нукта BE кесмасининг ўрта перпендикулярида ётгани учун $|BM| = |ME|$ бўлади; буни тасдиқ қилишнинг шартига кўра:

$$|MA| + |MB| = |MA| + |ME| = AE = \frac{|AC|}{2} + \frac{|AD|}{2} = l \quad (2)$$

4) Параллелограмм диагоналлари орасидаги $\angle CMD$ тенг ёки BME учбурчакнинг ташқи бурчиги бўлгани учун:

$$\angle CMD = \angle BEM = \angle ME = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Шундай қилиб, 6- II чизмадаги тўртбурчак ясалган параллелограмм эканлиги исбот бўлади.

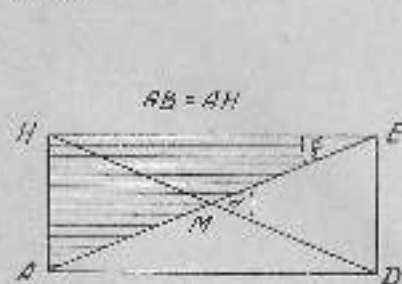
Текшириш. Маълумки, янши томони ва улардан қилин қилинган ётган бурчак бўлиши икки ёки битта учбурчак янши мумкин ёки ҳар қандай учбурчак янши мумкин эмас.

Яншидаги маълум ёрдамчи ABE учбурчакнинг янши AB ва AE томонлари ҳамда қилин томон AB қилинганда ABE бурчак маълум. Буни қилинган уч қилин бари бўлиши мумкин: 1) $|AB| < |AE|$; 2) $|AB| = |AE|$ ва 3) $|AB| > |AE|$; ($|AE| = 6$ — II чизмадаги A нуктадан BE сўра бўлган масофа).

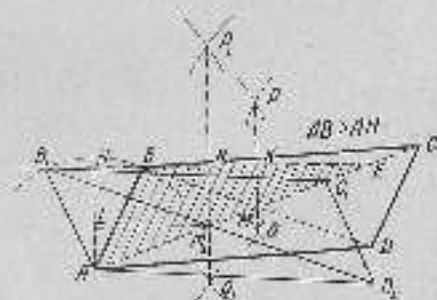
1) Агар $|AB| < |AE|$ бўлса, ёрдамчи учбурчак ва ясалган параллелограмм ҳосил бўлмайди.

2) Агар $|AB| = |AE|$ бўлса, тўри бурчакли битта ёрдамчи AHE учбурчак ва 6- III чизмадаги тўри тўртбурчакдан исбот қилинган параллелограмм ҳосил бўлади.

3) Агар $|AB| > |AE|$ бўлса, 6- IV чизмадаги сингари янши ёрдамчи AHE ҳамда ABE учбурчак, бунидан эса $ABCD$ ва $AB_1C_1D_1$ дан исбот қилинган параллелограммлар ҳосил бўлади.



6- III чизма



6- IV чизма

Агар бу икки параллелограмм бир-бирига тенг бўлса, масаланинг жавоби битта деб ҳисобланади. Шунинг учун уларнинг тенг ёки тенг эмаслигини текшириб кўриш лозим.

Бу икки параллелограммнинг тенглиги бўлган учун AA_1 ва AB_1M учбурчакларининг тенглиги исбот қилинса кифоя.

Бу учбурчакларнинг учлари мас. томонлари ўзаро тенг, яъни:

$$|AB| = |AB_1|, |MA| = |MB_1|, |MB| = |MA_1|.$$

Ҳақиқатда ҳам, яқинлиқта кўра ABE тенг ёки учбурчак бўлган учун $|AB| = |AB_1|$ ва бу тенг ёки учбурчакнинг A учидан HH_1 асосига AH перпендикуляр туғилар;

$$|BH| = |HB_1| = |HK_1| = |BK_1|. \quad (3)$$

(K_1 — BE кесма ўрта перпендикулярининг BE кесма билан кесилиш нуктаси).

Яншига кўра P, Q тўри янши BE кесмасининг ўрта перпендикуляри бўлиб, H_1 нукта BE кесмасининг ўртаси бўлган учун қилинганларини ёза оламиз:

$$|B, K_1| = |K_1E|$$

ёки

$$|B, H| + |HK_1| = |K_1K| + |KE|. \quad (4)$$

(K — BE кесма ўрта перпендикулярининг BE кесма билан кесилиш нуктаси).

(4) тенгликдан (3) тенгликни ҳадлаб айирсак:

$$|HK_1| = |K_1K| + |KE| = |HK| + |BK_1|.$$

Бундан

$$2|HK_1| = |KK_1| + |BK_1| + |KE| = |HK| + |KE|. \quad (5)$$

Яншига янши $|BK| = |KE|$ бўлган учун кейинги тенгликни қилинганда ёзиш мумкин:

$$2|HK_1| = 2|KE| \text{ ёки } |HK_1| = |KE|. \quad (6)$$

M нуктадан $|AH|$ ва M, E перпендикуляр ўтказилган ҳолда бўлган тўри бурчакли ALM ва MKE учбурчаклар, қилинган чунки (6) га кософик ўларнинг биттадан қилинган ва биттадан ўткир, M ва E бурчаклари қилинганлар.

$$\triangle ALM \cong \triangle MKE. \quad (7)$$

Бу тенгликдан ва қилинган асосининг қилинган кесмаларининг тенглиги маълум бўлади:

$$|M, A| = |ME|, |MA| = |M, E|. \quad (8)$$

Яншига кўра M, B, E тенг ёки учбурчакдир, демак,

$$|M, B| = |M, E|.$$

(8) га кўра $|MA| = |ME|$ бўлганидан:

$$|M, H| = |MA|.$$

Энди BM та M_1A кесмаларининг конгруентлигини исбот қилиш қолди; (8) дан: $|M_1A| = |ME|$; $\triangle BME$ дан: $|BM| = |ME|$, булардан: $|M_1A| = |BM|$.

Шундан қийин, иккала параллелограммнинг мос бўлаклари бўлган ABM билан AB_1M учбурчакларининг конгруентлиги исбот қилинди; бундан бу икки параллелограммнинг конгруентлиги ҳам маълум бўлади.

Демак, ёрадамчи фигуранинг аниқталлигига қўяман, масала биттасига ечимга эриша бўлади.

Биз бу бобда махсус ечим методларини қўлланмасдан ечиладиган масалаларнинг пайвандишлигини келтирдик. Шу сабабли баъзи босқичларнинг маънаси ақалда туғган ўрпо тўна қилинмади, бу камчилик қилғуси бобларда тўлиқланади.

ИЗБОБ

ЭЛЕМЕНТАР МАСАЛАЛАР

Масалани 1- тарафдаги аксиомалар сифатида қабул қилган асосий масалаларни келтириб ечиш, илмий афга чўшиб юбаради ва ечишлик ҳужих пайларини мақсат курсати олмайди. Шунинг учун қўлланма масалалар асосий масалаларга ажратилмай, балки унга асосий масалаларга қўйиб ечиладиган ва тен-тен учрайд турадиган масалаларга келтириб ечилади. Бундай масалалар одатда *элементар масалалар* ёки *элементар масалалар* дей атайлади.

Элементар масалалар ечишни пухта биланш бугун геометрия курсини ақшн ўзлаштиришнинг ва ақалда, ақалда даҳр масалаларини еса бўлаётган ақшн парилардан боришар, демак ақшн шундай масалаларни ўрганишга утайди.

4- §. ЭЛЕМЕНТАР МАСАЛАЛАР ЕЧИШГА МИСОЛЛАР

7- масала. *Берилган икки кесманинг йиғиндисини ва айирмасини топинг.*

Берилган a ва b кесмалар бўйича $x = a + b$ ва $y = a - b$ ($a > b$) кесмаларни топинг керак. Бу масалани ечим йўли учинч тарафдан қўйиб турганини учун ақалда ақшн йўқ.

Шунинг учун тўғридан-тўғри пайланган кесмаларнинг ақшнлигига ўтайди (7- I ва 7- II қизилар):

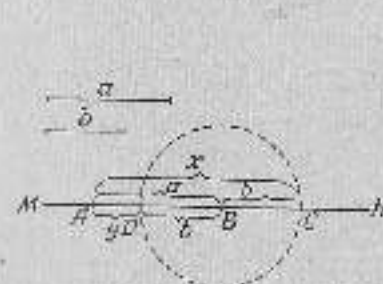
$$7- I \text{ қизилда: } x = a + b = |AB| + |BC| = |AC|;$$

$$y = a - b = |AB| - |BC| = |AD|;$$

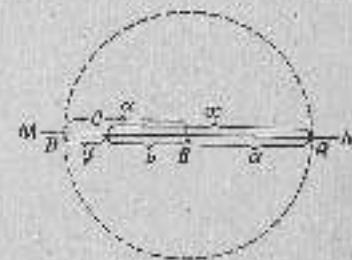
$$7- II \text{ қизилда: } x = a + b = |AB| + |BC| = |AC|;$$

$$y = a - b = |BD| - |BC| = |CD|.$$

$y = a - b$ кесмани топинини иккала йўлани ҳам биланш қўйиб, пухта маъналар ечимда бўларининг иккаласидан ҳам фойдаланишга тўғри келади. Масалан, II-§ лати 29- масаланинг биринчи ҳолати ечимда бир кесмадан ақшнлигини ақшнлигига учун қатта кесма устига қўйиб ақшнлигига бўлади, ушн



7- I қизил



7- II қизил

масаланинг иккинчи ҳиссаси етидаги шундай бу шунинг аксиоми бажаришга тўғри келади. Бундай масалалар антикинг турли бобларида (айниқса IV бобида) тез-тез учраб туради.

Тошхирқлар

I. Берилган a кесмадан m марта унги бўлган x — та кесма асепт (m — натурал сон).

II. Берилган a, b, c кесмаларнинг қуйидаги касмаларни асепт ($a > b > c$)
 $x = a + b - c$, $y = a - b - c$, $z = 2a - 3b$, $w = 3a + 2b - 3b$.

III. Ихтиёрий синус қилиб олиб, уни тўғричага таяниб узоқлама берилган синус қилиб узоқлама тег кесма асепт.

IV. Ихтиёрий учбурчакни олиб, унинг ҳар бир томони қонун икки томонли йиғиндисидан келиб ва уларнинг айтиригисидан катта хиллигини асепт бўлиб бўлиб кўрсатил.

V. Икки кесманинг йиғиндисини ва уларнинг йиғиндисини берилган иккинчи кесмадан тоғит.

VI. Икки кесманинг айтиригисини ва уларнинг йиғиндисини берилган иккинчи кесмадан тоғит.

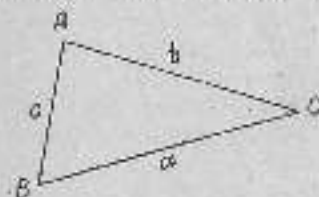
8- масала. *Уч томонли берилган учбурчакни асепт.*

Анализ. Масала етилди деб фарз қилиб, изланган учбурчакни тахминан чизиб қўямиз (8- I чизма).

Бунда $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$.

Агар a кесма асепт, унинг B ва C унлари ABC учбурчакнинг икки ун бўлади. Энди уннинг A уннинг қарраи ёлигини аниқлаш қолади. Бунинг учун A нуктадан қуйидаги икки қонунаси аниқлаш қиламиз:

1) A нукта B нуктадан берилган c кесмада ётади, демак, у B нуктадан қарраи қилиб c кесмага тег радиус билан қизилган айланада ётар экан.

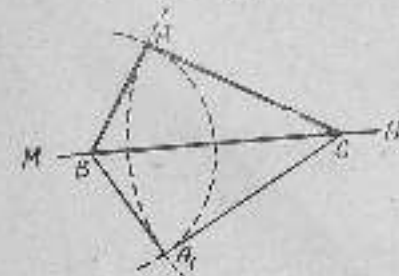


8- I чизма

2) Иккинчи томондан, шу A нукта C нуктадан берилган b кесмада ётади; демак, у C нуктадан b кесмага тег радиус билан қизилган айланада ётар экан.

Шундай қилиб, учбурчакнинг изланган A ун бу икки айлана ёларининг кесилиш нуктаси бўлади.

Янаш. Ихтиёрий MN тўғри қизида берилган томонлардан бирига, масалан, a кесмага тег қилиб BC кесма аниқлаш (8- II чизма). Бу кесманинг K уннинг марказ қилиб c га тег радиус билан ва C уннинг марказ қилиб b га тег радиус билан иккита ёй чизамиз. Бу ёйлар кесилиш A (ёки A_1) нуктадан B ва C нукта



8- II чизма

лар билан туташтирсан, тақиб ётиган ABC учбурчак ҳосил бўлади.

Исбот. Иккинчи дўра, $|BC| = a$, $|AC| = b$ ва $|AB| = c$ бўлган учун ABC учбурчак масаланинг талабига жавоб беради. Текшириш. Берилган кесмалар

$$|b - c| < a < b + c$$

муносабатда бўлганлигини учбурчак асепт мумкин.

Янаш патижасида шунда ABC ва A_1BC учбурчак ҳосил бўлади, булар ўзаро тенг бўлгани учун масаланинг жавоби шартиди булардан биригиси олинади.

Эҳтимо. Янаш b кесма томонли берилган дав юзоридаги кадо учбурчаклар ҳосил бўлади.

Тошхирқлар

I. Ихтиёрий унги кесма олиб, қарраи учбурчак асепт мумкин бу нуктадан қарраи аниқлаш.

II. Берилган томонли йиғиндисини тег томонли учбурчак асепт.

III. Асепт ва ёй қилиб берилган икки ёй учбурчак асепт.

IV. Берилган учбурчакни тег учбурчак асепт (уч томонли бўлади).

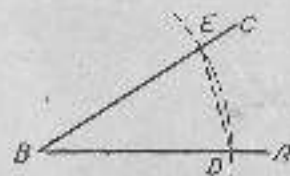
V. Томонлари берилган учбурчак томонларидан икки радиус билан қизилган учбурчак асепт.

VI. Тег учбурчакни икки ёй учбурчак ер унлигисидан (ёки ёй қизилганлиги) аниқлаш қилади.

9- масала. *Берилган бурчакка тег, ун берилган нуктада ва бир томонли шу нуктадан қарраи қилиб қарраи бурчак асепт.*

Янаш. Берилган ABC бурчак томонларини ихтиёрий радиусдан (B, r) айлана¹ ёй билан кесамиз. Бу ёй бурчак томонларидан D ва E нукталарда кесам (9- I чизма).

Берилган OD нур унidan (O, r) айлана ёй қилиб, унинг бу нур билан кесилиш нуктаси M тоғитлади (9- II чизма). Шунга бу ёйни ($M, |DE|$) айлана ёй билан кесиб, K нукта тоғитлади. K ва O нукталарни туташтиришдан OK бурчак ҳосил бўлади.



9- I чизма



9- II чизма

¹ Кўрсатилган тоғитланлар a га шунинг бажаришга, b ва c томонларига шунинг ҳам бажарилади. Бунинг текшириш қилиш.

² (B, r) айлана — маркази B нуктада, радиуси r га тег бўлган айлана билан кесам.

Исбоб: 9-1 нумрада D ва E нукталарни, 9-11 нумрада эса M ва K нукталарни туташтирсак, ясалмиқта кўри бир-бирига тенг бўлган DBE ва MOK учбурчлар ҳосил бўлади, демак, учбурчнинг икки бурчаҳлари ABC ва NOK лар ҳам тенг бўлади. Масала ҳақида баът енига эга бўлади.

Эҳлатул. То масалада 9- масала еригида ечили ҳам кўриш. Бунинг учун аниқл барисага бурчак тиконларда белгилан иккитрий нукта олиб, тақ туғайларига ва қили бўлган учбурчларни тенг учбурчак қилиди.

Толшириқлар

Қўйидаги масалаларни тўғри ва чиниқ еригида ечиб, ечилишнинг тўғриликни транспортни еригида текшириб кўриш:

- I. Берилган бурчакда 2 ёки 3 нукта қилта бурчак ясаб.
- II. Берилган икки бурчакнинг йилишдан (ёки айирмаси) та тек бурчак ясаб.

III. Бирор учбурчнинг учлари ҳам (ёки тақиб) бурчакларни йилишдан тек бурчак ясаб.

IV. Тўғри кизилдадаги бурчаклар ясаб ва берилган бурчакни тенг бурчак ясаб учун иккитрийладаган қилка. Бир ути ошқ қилка. Далаз берилганлардан иккитрийладаган қилка қилишнинг қилка қилишда ебодни қилиш.

23°, 43°, 60°, 75°, 90°, 120° ва 150° лар бурчакларни тақилан ясаб. Сўнгра уларни транспортни еригида тақилан ва қилка қилишнинг тўғрилик учун бу бурчакларни (бақилан 5 қилка еригида) қилтасан ясаб.

10- масала. Икки томон ва улар орасидаги бурчани берилган учбурчак ясаб.

Иккитрийла ACB учбурчакда $|CB| = a$, $|CA| = b$ ва $\hat{C} = \alpha$ берилган бўлиш.

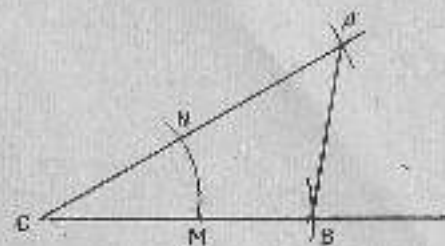
Масаланинг ечилиши учун шархдан кўриш тўғри учун тўғрилик-тўғри ясабта ўтиш.

Ясабш. Берилган C бурчакда тек бурчак ясаб (9- масала), унинг бир томонига $|CB| = a$ ва иккитрийла томонига $|CA| = b$ кесиллар қўйилади (10- нумра).

A ва B нукталарни туташтирсак, ABC учбурчак ҳосил бўлади.

Тоқшириш. Ясалган учбурчак масаланинг талабига жавоб беради.

Иккитрийла учбурчакнинг мажбул бўлиши учун берилган бурчак 180° дан қилка бўлиши шарт; масала йилига жавобга эга.



10- нумра

Толшириқлар

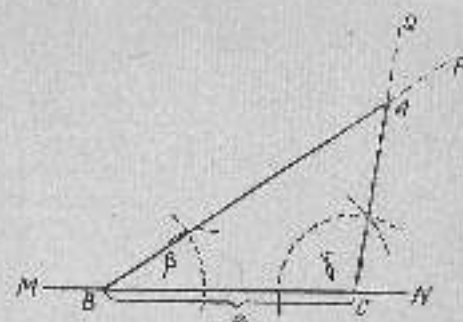
Қўйидаги масалалардан бириччи нукталарни графия қўйлаб ечиш:

- I. Бир бурчак 70° ва шу бурчакни йилишдан қолонлар 9 см ва 10 см бўлган учбурчак ясаб, унинг қилган элементларини ўлчаб қилиш.

II. Бир томон 20 см ва иккитрийла томон 25 см қилка улар орасидаги бурчани 45° бўлган учбурчак ясаб, унинг қилган элементларини ўлчаб қилиш.

III. 10- масаланинг ечилишдан фойдаланиб, берилган учбурчакни тек учбурчак ясаб.

IV. Училига бурчани ва тақилан берилган тек иккитрийла бурчани ясаб.



11- нумра

11- масала. Бир томон ва унга йилишдан икки бурчани берилган учбурчак ясаб.

Бу масаланинг ҳам ечилиш кўли қилиш, демак, аниқлига ечилиж йўқ.

Ясабш. Иккитрийла MN тўғри қизилқини бирор B нуктасидан бошлиб, $|BC| = a$ кесил олаш (11- нумра). Бу кесиланинг

бир тарафига $\hat{MBP} = \beta$ ва $\hat{MCQ} = \gamma$ ясабш (9- масала). BP ва CQ тўғри қизилқинлар бирор A нуктасидан қилка ABC учбурчак иккитрийла учбурчак бўлади.

Бу учбурчакнинг масала талабига жавоб бериши ўлчан ясабшдан кўриш тўғри.

Учбурчакни ясаб учун берилган икки бурчанининг йилишдан 180° дан қилка бўлиши шарт. Масала бирича ечилига эга бўлади.

Толшириқлар

I. 11- масаланинг ечилишдан фойдаланиб, берилган учбурчакни тек учбурчак ясаб.

II. Икки бурчани ва улардан бириччи қаршисидан томон берилган учбурчак ясаб.

III. Асос ва унга иккитрийла бурчани берилган тек бурчак ясаб.

IV. Асос 20 см ва унга қаршисидан бурчани 24° бўлган тек бурчак учбурчак ясаб, унинг қилган элементларини ўлчаб қилиш. (Бу қилка ҳам транспортдан фойдаланиш.)

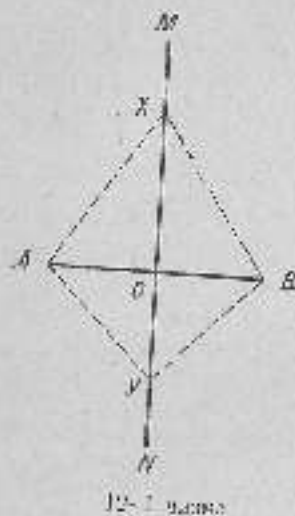
V. Берилган ечилига бериб бўлмайдиган икки қилка орасидан масалада 11- масаладан фойдаланиб тақилан қилиш қилиш.

12- масала. Берилган кесиланинг ўртасидан шу кесилга перпендикуляр тўғри қизилқини ўлқаш.

Анализ. Масала ечилиш ва сўрилган тўғри қизилқин 12-1 нумрадаги MN тўғри қизилқин деб қараш қилайлик. Берилган AB кесиланинг ўртасини O ҳарфи билан белгиласак, қўйидагилар ўрилди бўлиши кесил:

$$|AO| = |OB|, (MN) \perp (AB). \quad (1)$$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100



12-1 чизма

МН тўғри чизиқ О нуктадан ўтади. Ўзлашувчи МН тўғри чизиқни олгани учун унинг ихтиёрий икки нуктасини тўғрақ стади. Бунинг учун тахминий олганган МН тўғри чизиқда ётуган ихтиёрий икки Y ва Y нуктани олиб, уларнинг шуандай хоссиёсини талаб қилдик, бу хоссиёга таяниб, X ва Y нукталарни ҳамма локт ясаш мумкин бўлади. Бунинг учун X ва Y нукталарни берилган кесманинг учалари билан туташтириб, хоссиё бўлаган учбурчакларни текширадик:

(1) та кесам:

$$|AO| = |OB|,$$

$\angle AOX \cong \angle BOX$ ва $|OX|$ — умумий катет.

Демак,

$$\triangle AOX \cong \triangle BOX, \quad (2)$$

$$|AX| = |BX|, \quad (3)$$

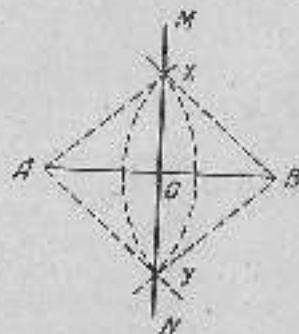
$$|AY| = |BY| \quad (4)$$

Экинчилиги ҳам исбот қилиш мумкин.

(3) тенглик X нуктасини, (4) тенглик эса Y нуктасини берилган A ва B нукталардан тенг масофада ётишнинг кўрсатади. Демак, X нукта (шуниқсдек, Y нукта ҳам) берилган A ва B нукталарни марказ қилиб, ихтиёрий (лекин ҳар гал тенг) радиус билан чизилган икки ёйнинг кесилиши нуктаси сифатида амал қилади. Лекин, X ва Y нукталарни (12-1 чизмадагидек), турли радиусдан икки жуфт ёйнинг кесилиши нукталари сифатида олиб, балки тенг радиусдан икки ёйни АВ кесманинг икки тарафига кесаштириб топши қулайроқ (12-11 чизма).

Ўзлаш. Берилган кесманинг A ва B нукталарни марказ қилиб, бу кесманинг арқалдан узунроқ радиус билан икки ёй чизамиз. Бу ёйлар кесилиш X ва Y нукталардан олганган МН тўғри чизиқни ўтказамиз (12-11 чизма).

Исбот. Тошилган МН тўғри чизиқнинг масала талабига жавоб берилиши исбот қилиш, яъни $|AX| = |BX|$



12-11 чизма

ва $|AY| = |BY|$ тенгликларга таяниб, $(MN) \perp (AB)$ ва $|AO| = |OB|$ муносабатларни исбот қилиш керак.

12-11 чизмадаги $\triangle XY$ ва $\triangle XY$ учбурчакларда $|AX| = |BX|$, $|AY| = |BY|$ ва $|XY|$ — умумий томон бўлаган учун

$$\triangle AXY \cong \triangle BXY, \quad (5)$$

Бундан:

$$\angle AXY \cong \angle BXY, \quad (6)$$

$|AX| = |BX|$, $\angle AXY \cong \angle BXY$ ҳамда $\triangle AOX$ ва $\triangle BOX$ учбурчакларда $|OX|$ — умумий томон бўлаган учун

$$\triangle AOX \cong \triangle BOX.$$

Бу учбурчакларда (мас элементлари сифатида): $|AO| = |OB|$, $\angle AOX = \angle BOX = 90^\circ$. Бу эса XY (ёки MN) тўғри чизиқнинг ўзлашувчи тўғри чизиқ эклини кўрсатади.

Кесманинг ўртасидан унга перпендикуляр вазиятда ўтказилган тўғри чизиқ ўрта перпендикуляр дейилади.

Юқорида ясалган X ва Y нукталар орқали МН тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлиги ва бу чизиқнинг фақат битталиги — берилган масаланинг ечимини дони мавжудлигини ва унинг ёточилигини кўрсатади (I-аксиома).

Толшириқлар

I. Берилган кесманинг тенг 4, 8, 16 ... 2ⁿ бўлиши қандай бўлиши мумкин? (n — натурал сон)

II. Берилган учбурчакнинг узун томонига ўтказилган медианаларнинг омили.

III. 5 кесма берилган, МН тўғри чизиқни қулайлаш кесмаларнинг омили:

$$x_1 = \frac{1}{4}a; x_2 = \frac{5}{8}a; x_3 = 1\frac{3}{8}a; x_4 = \frac{7}{4}a; x_5 = \frac{1}{4}a + \frac{5}{8}a$$

IV. a ва b кесмалар берилган. Қуйдаги кесмаларнинг омили:

$$x_1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{8}; x_2 = \frac{5}{8}a + \frac{2}{4}b; x_3 = 2\frac{1}{2}a + 1\frac{1}{4}b$$

V. Берилган кесмани дўғру қилиб айлаш чизиқ.

VI. Ўзлашувчи ёки айланмаси берилган икки кесманинг омили.

VII. Тенг икки учбурчакнинг периметри ёки томонларининг йиғиндиси билан кесманинг айрилиши берилган. Унинг ва томоннинг омили (баъзи масалаларда келтирилган).

VIII. Қуйдаги қулайлашувчи тўғри чизиқни қулайлаш кесмаларнинг омили:

а) учбурчакнинг медианаси бу кесманинг ўрта кесми билан тенг бўлиши шартини қўйиб;

б) учбурчак медианаларининг йиғиндиси бу учбурчак периметридан кичик, лекин периметрининг яримидан катта;

в) қулайроқ тўғри чизиқ дўғру қилишнинг йиғиндиси кичик периметрдан кичик, лекин периметрининг яримидан катта.

IX* Икки нукта берилган, бу нукталарни тўлаштирувчи кесмигики ўртасига бериб бўлмайди; шу кесмага ўрта перпендикуляр ўтказилсин.
X. Берилган уч нуктадан тенг масофада туванчи тўғри чизик чизилсин.
XI*. Берилган кесмани фақат икки томондан чизилган ёрдамчи тенг кесмага бўлиб.

13- масала. Берилган тўғри чизикқа шу тўғри чизикда ётган нуктадан перпендикуляр ўтказилсин.

Анализ. $(OC) \perp (MN)$ типиди деб фараз қилиб, уни таҳминан чизиб қўйиб (13- I чизма); бу фаразга биноан, қуйидаги тенгликни тўғри деб ҳисоблаймиз:

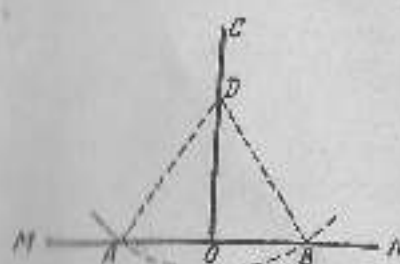
$$\widehat{MOC} = \widehat{NOC} = 90^\circ.$$

OC перпендикулярни чизиб, учун унинг берилган O нуктасидан бошқа яна бирор нуктасини топганимиз керак; бу нуктани ясаи ёйлини топиб, учун фараз қилиб чизилган OC перпендикулярнинг ихтиёрий D нуктасини марказ ҳисоблаб, шундай ёй чизайликки, бу ёй MN тўғри чизикни икки нуктада кесиб ўтсин; кесилиш нукталарини A ва B билан белгилэйлик. Буларни D нукта билан туташтиришдан ҳосил бўлган тўғри бурчакли AOD ва BOD учбурчакларнинг гипотенузлари тенг ва бир катети умумий бўлгани учун улар тенгдир. Шунинг учун $|AO| = |BO|$.

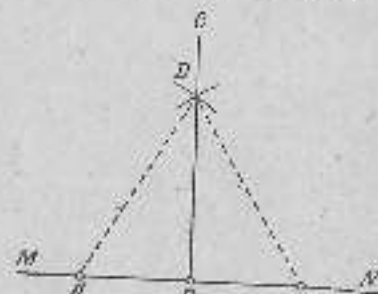
Бу A ва B нукталардан тенг радиусли ихтиёрий ёйлар чизилса, бу ёйларики кесилган D (ёки D') нуктаси изланган перпендикулярнинг ихкиги нуктаси бўлади.

Ясаиш. MN тўғри чизикнинг берилган O нуктасидан тенг узоқликдаги A ва B нукталаридан ихтиёрий, лекин бир-бирига тенг радиуслар билан ўзаро кесилувчи иккига ёй чизилди (13- II чизма). Бу ёйларики кесилган D (ёки D') нуктаси O нукта билан туташтирилади. OD — изланган перпендикуляр бўлади.

Исбот. Ясаишга кўра $|AO| = |BO|$ ва $|AD| = |BD|$ бўлиб, $|OD|$ умумий томон бўлгани учун $\triangle AOD \cong \triangle BOD$. Шунинг учун бу учбурчакларнинг мос бурчаклари $\angle AOD$ ва $\angle BOD$



13-I чизма



13-II чизма

бир-бирига тенг ва кўнчи бурчаклар бўлгани учун тўғри бурчаклардир, яъни $(OD) \perp (MN)$. Бу масала ҳамма локт ечимга эга ва у ягона бўлади.

Топ ширлиқлар

- I. Икки катети берилган тўғри бурчакни тўлдирмак керак.
- II* Берилган тўғри чизикқа унинг берилган нуктасидан (экикети йислатмай) перпендикуляр ўтказилсин.
- III* Тўғри чизикда унинг берилган нуктасидан перпендикуляр ўтказилсиндаги масофани чизиб, па тўғри ёрдамчи оғил.

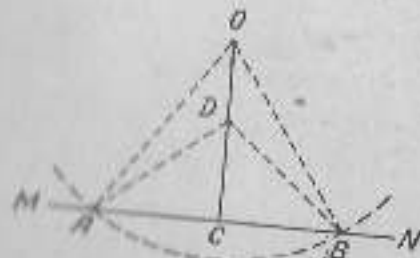
14- масала. Берилган тўғри чизикқа ундан таянчарида ётган нуктадан перпендикуляр ўтказилсин.

Анализ. $(OC) \perp (MN)$ ясади деб фараз қилиб, уни таҳминан чизиб қўйиб (14- I чизма). Бу фаразга биноан, қуйидаги тенглик тўғри бўлади:

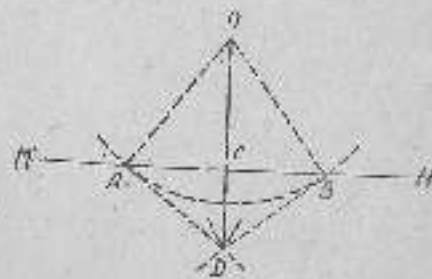
$$\widehat{MCO} = \widehat{NCO} = 90^\circ.$$

Изланган OC перпендикулярни чизиб, учун унинг берилган O нуктасидан бошқа яна бир нуктасини топимиз кидоя. Бунинг учун берилган O нуктадан MN тўғри чизикни ихтиёрий A ва B нукталарда кесиб ўтувчи бир ёй чизиб, O нуктадан A ва B нукталар билан туташтирилади. Ҳосил бўлган тўғри бурчакли ACO ва BCO учбурчаклар ўзаро тенгдир, сунли уларнинг гипотенузлари тенг ва бир катети умумий. Шунинг учун перпендикуляр эканлиги, ундаси ихтиёрий D нуктасини A ва B нукталардан тенг масофада ёйган шубҳасиздир.

Демак, D нукта изланган ёрдамчи фигура бўлар экан. Ясаиш. Берилган O нуктага марказ қилиб, MN тўғри чизикни икки нуктада кесувчи ёй чизилди (14- II чизма). Бу ёйнинг MN тўғри чизикни кесиб ўтган A ва B нукталарини марказ қилиб ихтиёрий, лекин $|AO|$ дан фарқли тенг радиуслар билан ўзаро кесилувчи икки ёй чизилди. Бу ёйларики кесилган D нуктасидан ва берилган O нуктадан OD тўғри чизик ўтказилсин.



14-I чизма



14-II чизма

құндылық кесімдерін хоснұт қыламыз:

$$|AC_1| - |C_1C_2| - |C_2B_3| - |C_3C_4| - C_4C_5 = g, \quad (1)$$

Сўнги C_4C_5 кесмашиг C_5 учини берилган кесмашиг B учига билан туташтирувчи AC_5 тўғри чизиққа параллел қилиб қўйдиги тўғри чизиқларни пайзамоқ.

$$(C, D_1) \vdash (C, D_2) \vdash C, D_3 \vdash (C, D_4) \vdash (C, B). \quad (2)$$

Бу параллел чизикларнинг AB кесма билан кесилган D_1, D_2, D_3, D_4 нукталари берилган кесмани $n-3$ тенг бўлакка бўлади, яъни куйидаги тенг кесмалар ҳосил бўлади:

$$|AD_1| - |D_1D_2| - |D_2D_3| = |D_3B| - \frac{1}{2}|AB|$$

ТОИШПРОКЪЗД

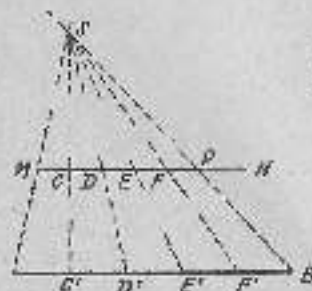
1. Ик- I тизмадан AB нурун өткөн сөн берктен AB көскага тахом утбураакларинит тегилешиг таннаб, ахырыдагы акимик туурилегиш ик- бот килим.

[illegible][illegible]

Эксперт А. Тарбаев отметил, что в настоящее время в Казахстане нет ни одного человека, который бы мог претендовать на звание «Богемного барона».

IV, 16-III asirlarda kashmiki ankiralan (maxsus asobob) qurilmala teng birlashtirish birligi tasvirlanilgan. Buni qurilish mexanizmi, asirning tuzuri birlashtirilmagan asobob kashmiki.

V. Beriktagan kasimlari kerkuhi xatida martabali chetich (ixti yulov-nin) birlashtir bir mela tem b'akakimla takrifon obadim.

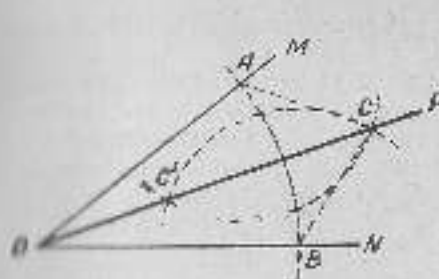


(5-II) 448243

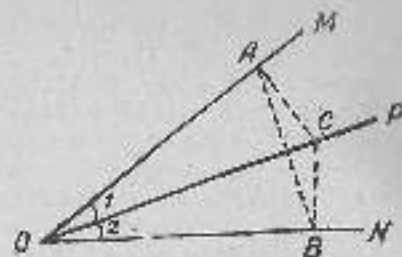
17. масала. Бермазон бурлакни теег лккига бѳлинг, нани бурчак-нинг биссавторларининг бизинг.



166-111-00000



12-1 usmms



17-5) 48:18:11

Анализ. МОН буряаки тивг бѹдучи ОР нур тогилди
дѹб фараз килалани (17- 1 тизм).

Бүс фараалга бивоан хүйидаги конгруктуушлар түүри бүүади:

$$\angle MOP = \angle NOP = \frac{\angle MON}{2} \quad (1)$$

ОР нуруни яхтӣроӣ С нуқтагидан беридан бурлакият томонларига терпендикулярола ўтказайлик (17- II чизма):

$$(CA) + (OM)_{\text{eq}} = (CB) + (ON), \quad (2)$$

(A ва B нуқталар — бурчак томонлари билан перпендикулярнинг кесилиш нуқталари). Ҳосил бўлган иккига түпри бурчакли OAC ва OBC учбурчаклар ўзаро конгруэнт, чунки уларда OC гипотенуза уққунли ва фарзигага биноан биттадан ўткир бурчаклари ўзаро конгруэнт ($\angle 1 \cong \angle 2$). Шунинг учун:

$$|OA| = |OB| \text{ 且 } |AC| = |BC|, \quad (3)$$

Демак, A ва B нукталар берилган бурчанинг O учидан тенг улоқликда, C нукта эса AB кесмадан ўрта перпендикулярда ётади. C нуктанинг бу кесмадан OP нурини чекиш бўлиб маълум бўлади.

С пункта OP проведем ихтиерий пунктами $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}$ и т.д. до пункта OP (рис. 1). Вспомогательные точки $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}$ и т.д. до пункта OP (рис. 1).

Ясаш, 1) Берилган бурчакнинг O учини марказ қилиб, нуктабىرى радиус билан ёй чизилди (17-1 чизма). Бу ёй бурчак томонларини A ва B нукталарда кесиб ўтати.

2) AB kesmaga teng nuqta B' bo'lish uchun uning ўrta perpendikulyarida ёtuvчи C va C' nuqtalar topiladi.

3) C va C' нукталардан тўғри чизик ўтказилди.

Заслуги. Одной бунды айтылган жери нукталар биринчи келип, ушун берилген бурзакчылар. О уш бундан туташтырыл, лажыгычтын висентроне жасалган.

Исбот. Ясашга кўра (17. Ичизми) $|OA| = |OB|$ ва $|AC| = |BC|$ бўлиб, $|OC|$ — умумий бўлгани учун $\triangle AOC$ ва $\triangle BOC$ уқ.

бурчаклар ўзаро тенг. Шунинг учун $\angle AOC$ ва $\angle BOC$ мос бурчаклар ҳам ўзаро тенг.

Бу исботни қуйидагича яқинлаш мумкин: бурчакнинг теорияларидан тенг узорланганда нуқта ўша бурчакнинг биссектрисасида ётади (тескари теорема). Бу теореманинг тўғричилигини кўрсатиш учун OSA ва OSB учбурчакларнинг S учидан ўтказилган баландликларини қараш керак.

Масала ҳамма вақт ечимга эга ва ҳар бир бурчакнинг биттагина биссектрисаси бўлади.

Толшириқлар

I.* Бу масалани интибонинг охирида берилган кўрсатилган фойдаланиб ҳисоблаш йўли билан ҳам соғир.

II. Берилган бурчакнинг I толшириқда кўрилган $\triangle ABC$ билан 4, 8, 16 тенг бўлакка бўлиб.

III. Берилган учбурчакнинг биссектрисаларини утказиш.

IV.* Масштабда чизиб ва r нуқта ёрдамида бурчакнинг биссектрисасини чизиб.

V. Йиғиндис ва ширмаи берилган ахир бурчакни ясаб (12- VI масалада берилган кўрсатилган фойдаланиб).

VI.* Ер устида берилган бурчакни тенг қўри бўлакка бўлиб.

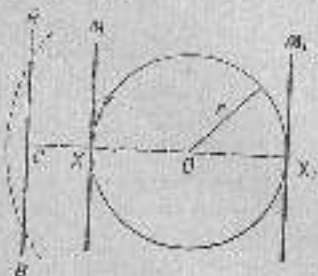
VII. Берилган бурчакни бир нота тенг бўлакларга тақриб қўриб.

18- масала. Берилган айланани шундай уринма тўқизинчи, у берилган тўғри чизиққа параллел бўлсин.

Анализ. Изланган уринма 18- чизмадаги MX тўғри чизиқ бўлсин, унинг (O, r) айланага уриниш нуқтаси X деб фарз қилайлик. Уриниш тоқим учун унинг уриниш нуқтасини топиш керак. Уриниш нуқтасини топиш йўлини аниқлаш учун берилган O нуқтага X нуқта билан туташтириб, OX кесмасин AB тўғри чизиқ билан бирор C нуқтада кесилгунча давом эттирайлик.

Фаразмиз бўйича $(MX) \parallel (AB)$ ва ясалмиш кўра $(OX) \perp (MX)$ бўлгани учун $(OC) \perp (AB)$, яъни OC тўғри чизиқнинг баландлиги маълум бўлиб қолади.

Демак, изланган X нуқтани (O, r) айлана билан OC тўғри чизиқнинг кесилган нуқтаси содда тилиш мумкин.



18- чизма

Ясаш. O марказдан берилган AB тўғри чизиққа OC перпендикуляр ўтказиб, бу перпендикулярнинг (O, r) айлана билан кесилган X нуқтасини толайим. OC тўғри чизиққа X нуқтадан MX перпендикуляр ўтказамиз (13- масала).

Исбот. Ясаганда кўра, $(OC) \perp (AB)$ ва $(MX) \perp (OC)$ бўлгани учун $(MX) \parallel (AB)$ бўлиб, MX тўғри

чизиқ (OX) га уланган X учидан перпендикулярлар. Шунинг учун (MX) изланувчи уринма бўлади.

Масала ҳамма вақт ечимга эга, умуман, иккита ечимга эга бўлади ($|OC| > r$) бўлганда иккита уринма ҳосил бўлиб ($|OC| = r$ бўлганда изланувчи уринманинг бири берилган тўғри чизиқнинг ўзи, иккинчиси эса диаметрнинг иккинчи учидан ўтувчи ва шу тўғри чизиққа параллел уринма бўлади).

Толшириқ

Кейинги масаланинг сўнгги ва чизмада ўтказилган сўнгги. (Буни ечимда 14- II ва 15- II масалалардан фойдаланиб).

19- масала. Гипотенузаси ва бир ўткир бурчак берилган тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

Ясаш. Берилган учбурчакка тенг NAL бурчак ясаб (9- масала) бу бурчакнинг бир томонида, масалан AL да гипотенузаси тенг, $|AB| = c$ кесма ажратамиз (19- чизма). AB кесманинг B учидан AN тўғри чизиққа BC перпендикуляр туширамиз (14- масала), бу перпендикулярнинг AN тўғри чизиқдаги асосини C билан белгиласак, ҳосил бўлган ABC учбурчак изланган учбурчак бўлади, чунки ясалганда кўра $\hat{A} = \epsilon$ ва $|AB| = c$.

Толшириқ

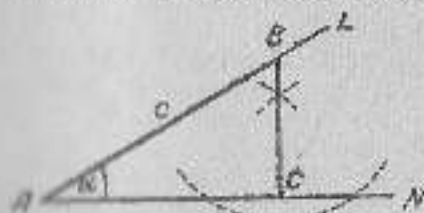
Қуйидаги масалани ечим:

I. Гипотенузасининг узунлиги 6 см, бир ўткир бурчак 30° бўлган тўғри бурчакли учбурчак ясаб ва унинг юзига эллипсларнинг ўлчаб топиш.

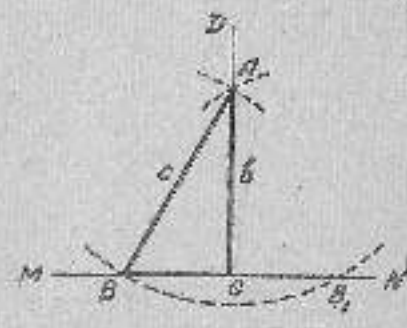
20- масала. Гипотенузаси ва бир катет берилган тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

c ва b кесмалар ($c > b$) берилган.

Ясаш. Иштиёрин MN тўғри чизиқнинг (20- чизма) бирор C нуқтасидаги CD перпендикуляр чиқарамиз (13- масала); ҳосил бўлган тўғри бурчакнинг бир томонида, масалан, CD томонида, $|CA| = b$ кесма ажратамиз. Сўнгра A нуқтага марказ қилиб, c кесмага тенг радиусли ёй билан MN тўғри



19- чизма



20- чизма

появляющийся кесмаиз; хосил бўлган B (ёки B_1) нуқтани A нуқта билан туташтирамиз. ABC (ёки AB_1C) учбурчак — паянган учбурчак бўлади, чунки яшаган қура у тўғри бурчакли, AC катети берилган b кесмага ва AB гипотенузаси эса берилган c кесмага тенг. $\triangle ABC = \triangle AB_1C$ бўлгани учун маънаданинг жавоби сифатида буларнинг бири — $\triangle ABC$ олинди.

Агар $b \geq c$ бўлса, масала ечимга эриша бўлмайди (нима учун?).

Толшкрнқлар

* "Диаметрға тирелгән икең эңилгән бүрчәк тәңрә бүрчәхдир" дегән теореманың аңлатмасы, XII- ыссылазны өстәш кушымчаларына күрсәтәләр.

Тўғри бурчакли учбурчак тўғри бурчакнинг уч (бошқа бурчаклари учлари каби) гипотенузали диаметр қилиб қилинган айланادا ёتىқлигини текширилганда, 20-мисалнинг 1-сўралигини кўрсатинг.

Н°. Бир нота ва интиерузадега тушерилган балаллиги берилган
түери бурчакли учбурчак ясанс.

III. Баланслагч өз өг томоги дорилган төмөр ёнли үзбурдлагч ясанс.

IV. Ассимиляция би томонига тўширилган баландлиги берилган теги ёзил

У. Ён томонидан унга туширилган бандликдан берибсан-хонг-хонг уч-бурчак асани.

¹В. А. Аносов, багданыхис на бир ин томгул беридеги фидеулах яланс.

21- масала. Икки томони ва улардан бирининг қариниси-
даги бурчани берилган учбурчак ясанг.

а, с томолаарн ($c > a$) нд C бүрчлэгн берилдэн.

Бу масаланинг хусусий ҳоли бўлган 20- масалани ҳозиргина ҳал қилдик. Вироқ, бу хил масалалар жуда кўп учрашсини эътиборга олиб, уни элхонлар масалалар қаторига киритишни лозим топдик.

Бу масъалаи қуйидаги икки ҳолатга ажратиб ечиш тасвия

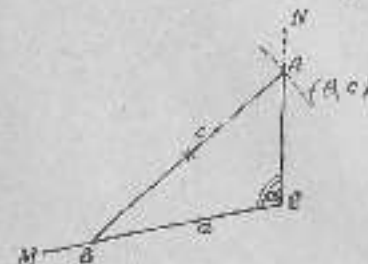
Биринчи ҳил. *Икка томонга ва узардан каттаси қар-
ишисидagi бурчага берилган учбурчак левиз.*

Иккинчи ҳол. Икки томони ва улардан кичикнинг қаршисидagi бурчаги берилган учбurchак ясам.

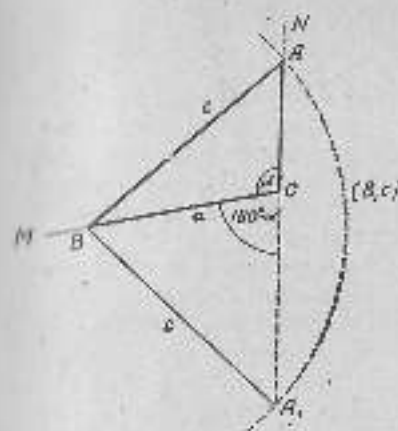
Биринчи долнинг ечили-
ши. α ва β кесмалар ($c > \alpha$) ҳақида

 $C = a$ берилган.

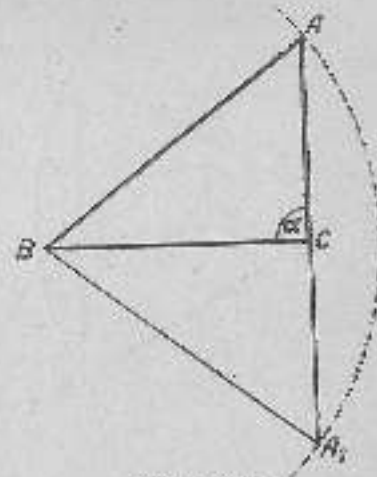
Анализ. Миссия етидди деб фараз қилиб, изланган ABC учбурчакни таҳминан янзиб қўяйиз (21-1 чизма); булани $|BC| = a$ томони маълумлигидан учбурчакнинг B ва C учлари ҳам маълум деб ҳисобланади. Сўнгра ABC учбурчакнинг A учини топип уччи ўнинг кубидаси



21.143M



21-11 50343



21-III 45000

инки хоссаидан фойдаланилади. А нукта бурчакнинг CM тилинида ётиши ва B нуктадан берилган c масофада бўлиши эсим.

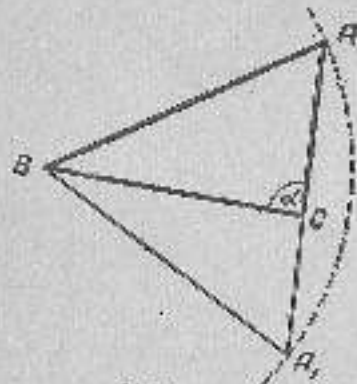
Ясам, α бурчакка тен килиб, MCN бурчак ясатмаз (21-П чизма). Сўнгга бу бурчакнинг бир томонига, масалан, CM томонига $|CB| = \alpha$ кесмани қўламиз. B нуқтани марказ қилиб, берилган α кесмига тенс радиус билан ёл чизамиз. Ёlining CN тўғри чирик билан кесилган A ва A_1 нуқталарини B нуқта билан туташтирсак, ABC ва A_1BC учбурчаклар до-
на бўлади.

Исбот. Чизҳидаги икки учбурчакдан ABC учбурчакнинг масаланинг талабига жавоб беради, чунки ясашта кўра $\angle ACB = \alpha$, $|CB| = a$ ва $|AB| = c$. Иккинчи A_1BC учбурчакнинг якки томони берилган кесмаларга тенг бўлса-да, C бурчаги ($\alpha \neq 90^\circ$ бўлганда) берилган c бурчакка тенг бўлмагани учун бу учбурчак масаланинг талабига жавоб бермайди.

Текнириш. Берилган «бурчақнинг ўзгариши масаласини» ечилиш-ечиликмасаласига таъсир қилмайди, «ҳар қандай бўлган-ди ҳам масала бунга ечимга эга.

Ҳақиқатан ҳам, α ўтмас бўлганда (21- II чизма) ABC учбурчак масаланинг талабига жавоб беради; α ўтдири бурчак бўлганда (21- III чизма) ҳосил бўлган ABC ва A, BC учбурчаклар ўзаро тенг бўлгани ушун масаланинг жавоби сифатида улардан биттаси олинани; бериётган α бурчак ўткир бўлганда ҳам (21- IV чизма) ҳосил бўлган икки учбурчакдан фақат ABC учбурчак масаланинг талабига жавоб беради.

Шундай қилиб, икки томони ва уларнинг каттаси қар-
шисидagi бурчаги берилганда мягаланинг талабига жавоб
берувчи биттагина учбурчак хосия бўлади.



21-IV чизма

Иккинчи ҳолатни ечи-
лиши. a ва c кесмалар ($c > a$)
ҳамда $A - \alpha$ берилган.

Анализ, яъни ва исбот босқич-
лари масаланинг биринчи ҳола-
тига кабилар. Шунинг учун бу
ҳолатни текшириш босқичига-
на тўхтаб ўтмайиз.

Масала етишга эга бўлиш
ўтун берилган a бурчак (21- V
чизма) албатта ўткир бўлиши ке-
рак, чунки кичик томон қарши-
сида бўлган учун α тўғри ҳам,
ўтмас ҳам бўла олмайд.

1) Агар учбурчанинг кичик
 a томони, B нуқтадан (AC) гача
масофалар кичик бўлса, масала
билан тизилган AC OB нур билан учрашмайди (21- V
чизма).

2) Агар $a = d$ бўлса, B марказдан берилган a га тенг радиус
билан чизилган ёй (2- ёй) AC нурга C_1 нуқтада учраиб, маса-
ланинг талабига ҳаёб бериш битта тўғри бурчакли ABC_1
учбурчак ҳосил бўлади.

3) Агар $a > d$ бўлса, B марказдан a га тенг радиус билан
чизилган ёй (3- ёй) AC нур билан иккита C_1 ва C_2 нуқталар-
да кесилиб, бу нуқталарни B нуқта билан туташтиришдан
иккита ABC_1 ва ABC_2 учбурчак ҳосил бўлади.

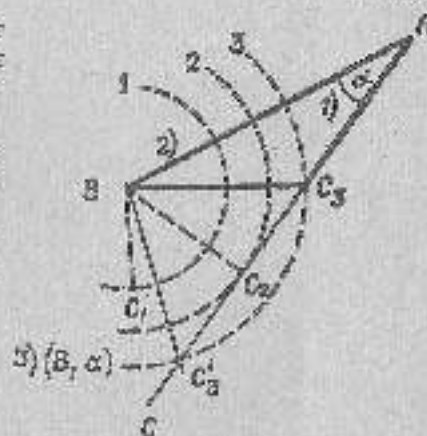
Демак, икки тоқсон ва бу тоқсонларнинг зинни қаршисида
ётган бурчакли ёйча иккита ёй битта учбурчак яъни
мумкин бўлиши ҳақ қандай уч-
бурчак яъни мумкин эмас.

Бу — икки тоқсон ва уларнинг
катида қаршисидаги бурчак
учбурчакни тўла экиқлий ол-
маслигини тасдиқлайди.

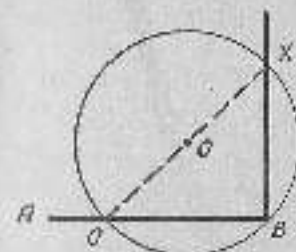
22- масала. Берилган нур
учундан, уни давом эттирмай,
перпендикуляр ўтказиш.

Яъни. Берилган BA нур-
дан ташқаридан бирор O нуқта
олганим. O ни марказ қилиб OB
радиусли ёй чизамиз. Бу ёй
 BA нурни бирор C нуқтада ке-
сик ўтадиган бўлади (22- чи-
з).

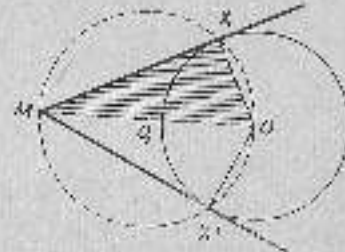
Сўйра C ва O нуқталарни
туташтириб, CO кескани бу



22-V чизма



22- чизма



23-I чизма

ёй билан иккинчи бир X нуқтада кесилишганга дивом элтири-
миз. B ва X нуқталарни туташтиручи BX тўғри чизик айланган
перпендикуляр бўлади, чунки OX кескя айлананинг диаметри
бўлиб, диаметрга тиралган ички чизилган бурчак тўғри бур-
чакдир. Демак, $\angle CBX = 90^\circ$.

Текшириқлар

1. 22- масаланинг тенг ёйга ва тенг томонли учбурчларнинг хоҳсалари-
ни текшириб ҳам олам.

II. Икки катети берилган тўғри бурчакли учбурчак исбот.

III. Бир катети ва унга экиқлий ўткир бурчакли берилган тўғри бур-
чакли учбурчак исбот.

IV. Учбурчларнинг графига ҳосил олинган фойдаланиб, есага қўрилиб
турган ҳаракатинг бўйсига ёнча йўналиш тўғрисида.

23- масала. Берилган нуқтадан берилган айланга уриш-
ма ўтказиш.

Бу масалани етишга икки ҳолат дуч келишиз.

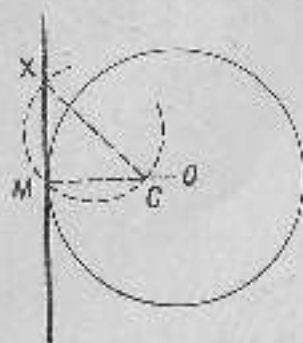
Биринчи (ўжумий) ҳол. Берилган нуқта берилган айла-
нани ташқаридан ётади.

Анализ. Иزلанган уришма соқалда деб фарз қилиб, унга
дир чизилган тахминан чизиб қўйилсиз. 23- I чизмадаги MX
(MX') тўғри чизик уришма ва $X(X')$ унда: уришм нуқтаси
бўлсин.

Қўрилиши. $[MX]$ ни тоғиш учун унда X нуқтасини тоғиш
ифой, X нуқтани O нуқта билан ва O нуқтадан эса M нуқта
билан туташтиришим. Ҳосил бўлган MXO учбурчак тўғри бур-
чакли бўлиб, унинг MO гипотенузаси ва OX катети маълум,
чунки $[MO]$ — берилган M нуқта билан берилган айланга мар-
кази орасидаги масофа ва OX эя бу айлананинг радиуси.

Демак, қаланди X нуқтадан MXO ўқбурчак тўғри бурчакли-
нинг уни сифатида тоғиш мумкин.

Яъни. Берилган M нуқтадан берилган айлананинг O мар-
кази билан туташтириб, MO диаметрига айлана қизамиз. Чи-
зилган айлананинг берилган айланга билан кесилишган нуқталари
 X ва X' бўлсин, MX ва MX' тўғри экиқларни ўткази-
миз.



23-П чизма

Исбот. Ясалган бироза MXO түг-ри бурчлиги учбурчлиқ, яъни MX тү-ри чизик OX радиусига унинг айлана устидаги X учиди перпендикуляр. Де-мак, бу түг-ри чизик айланани уриша бўлади.

Текшириш. Неанга билан ай-ланаларнинг марказлари орасидаги масофа $|MO_1| < R + r$ бўгани учун бу икки айлана ўзаро икки нуктада кесинади. Демак, берилган M нукта-дан берилган айланани иккита уриша (MX ва MX') ўтказиш мумкин.

Иккинчи (хушусий) ҳо.л. Берил-ган нукта айлана устида бўлди.

Берилган M нуктанинг берилган айланани ўтиши уриниш нуктаси шу M нукта бўлишини кў-рсатади; бу ҳо.лда эса биринчи ҳо.лда баъқарилгандек, уриниш нуктасини қидиришга эҳтиёж қолмайди. Бу ҳо.лда иланувиши уриша берилган айлананинг OM радиусига M нуктада перпен-дикуляр бўлади (23-П чизма).

Демак, берилган M нуктани O марказ билан туташтириб, бу радиусга унинг M учиди перпендикуляр ўтказсак, излан-ган уриша ҳосил бўлади (13 ёки 22- масала).

Толшириқлар

I. MX түг-ри чизикда унинг M нуктасида уришуви айлана 23-П ма-салага O марказли айланани бўладики уш бундай айланалардан яна би-рини. Агар бўлса, уларнинг марказлари ҳарда жойлашади.

II. 23- масалага уш хушусий ҳо.л.да яна бирича йул билан дам келиш.

III. II талаширада жамиятида бўл билан чизилган MX ва MX' түг-ри радиусларнинг берилган уриша бўлишини исбот қилиш.

IV. Берилган айланани:

а) берилган түг-ри радиусда перпендикуляр;

б) берилган түг-ри чизик билан берилган (ўттир ёки ўтмас) бурчлиқ таш-киқ радиусга уриша ўтказиш.

V. Берилган айланани орасидаги бурчлиқ берилган бурчлиқка тег-ри бў-ган иккита уриша ўтказиш.

Қушдан: иланаларни айланани уриша ўтказиш усулидан фойдаланиб келиш.

VI. Асоси ва икки ёш тоҳанига ушнрилан баландликлари берилган учбурчлиқ асоси.

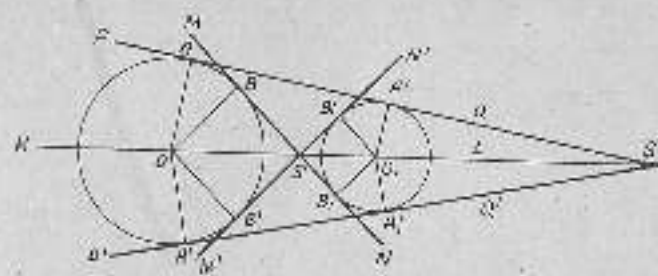
VII. Асоси ва ёш тоҳанига ушнрилан баландлиги берилган тенг ёшли учбурчлиқ асоси.

VIII. Бир тоҳаник ва бадандалли берилган ромб асоси.

IX. Бир диканали ва икки ёшданли берилган параллелограмм яланг.

X. Бундан, бадандалли ва диканали берилган параллелограмм асоси.

XI. Асослари, баландлиги ва асосига ёшданли бири бурчлиқ берилган параллелик асоси.



24-П чизма

24- масала. Берилган икки айланани умумий уриниш ўт-казиш. (O, R) ва (O', r) айланалар берилган. Буида

$$R > r; |OO'| > R + r.$$

Масалани енишга каришншдан олдин қуйидаги таърифлар-ни эслатиб ўтавиш:

1- таъриф. Икки айлананинг марказларидан ўтувчи түг-ри чизик бу айланаларнинг марказлар чизиги деб, бу чизикнинг марказлар орасидаги кесмаси эса марказлар масофаси деб аталади. Масалан, 24-П чизмадаги икки айлананинг марказлар чизиги KK' түг-ри чизик бўлиб, унинг OO' бўласи марказлар масофасидир.

2- таъриф. Икки айлананинг ҳар бири билан баъқат биттайдан умумий нуктага эга бўлган түг-ри чизик бу ай-ланаларнинг умумий уриниши дейилади.

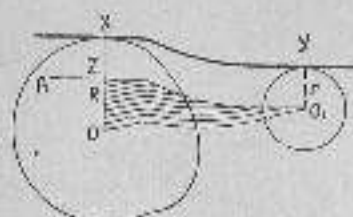
Умумий уринишнинг баъзи хоссаляри. Умумий уринишнинг уриниш нукталарини мос айланаларнинг марказ-лари билан туташтирувчи радиуслар ўзаро параллел бўлади (24-П чизма).

Агар умумий уринишнинг уриниш нукталарига ўтказилган радиуслар бир хил йўналишда бўлса (яъни радиуслар марказ-лар чизигидан бир тарафда жойлашган бўлса), уриниш тилиқи умумий уриниш дейилади; агар умумий уринишнинг уриниш нукталарига ўтказилган радиуслар тесқари йўналишда бўлса (яъни радиуслар марказлар чизигининг турон тарафиди жой-лашган бўлса), бундай уриниш яна умумий уриниш деб ата-лади. Масалан, 24-П чизмадаги PQ ва $P'Q'$ уринишлар — тилиқи умумий уринишлар, MM' ва $M'M'$ уринишлар эса ички умумий уринишлардир.

Айланаларнинг умумий ички уринишлари марказлар чизигини марказлар орасида кесиб ўтди; умумий тилиқи уриниш-лари эса марказлар чизигини марказлар орасидан четда ке-сиб ўтди.

Энди юқорида берилган масалани енишга ўтгайик.

Биринчи ҳо.л. Берилган икки айланани тилиқи умумий уриниш ўтказиш.



24-III чизма

Анализ. Сўралган ташқи умумий уринма топилди деб фараз қилиб, уни тахминан чизиб қўяйлик; у 24-III чизмадаги XY тўғри чизик бўлиб, унинг уриниш нукталари X ва Y бўлисин. Тасвирфга асосан:

$$(OX) \perp (XY), (O_1Y) \perp (XY).$$

Бундан:

$$(OX) \parallel (O_1Y). \quad (1)$$

Ивланган уринмадан чизилиш учун ва $|O_1Y| = r$ нукталари топилса kifой. Бу нукталар $(OX) \perp R$ дир. Демак, радиусларнинг берилган айланалардаги учлари-уларнинг X ва Y учлари ҳам аниқланади.

(1) га биноан бу икки радиус ўзаро параллел бўлгани учун улардан биттасининг, масалан, OX нинг йўналишини аниқлаш kifой. Бунинг учун OX нинг O нуктасидан бошқа яна бирор- $(O_1A) \parallel YX$ тўғри чизикни кесиб чиқариш керак. Шунинг мақсади O_1 нуктадан кесилган нуктасини Z билан белгиланлик. Z нуктасининг ёрдамчи фигура бўлиши Z билан белгиланлик. Z нуктасининг ёрдамчи

А) (1) га асосан $(ZX) \parallel (O_1Y)$; янашга кўра $(O_1A) \parallel (YX)$. Шунинг учун кўра $(OX) \perp (XY)$; янашга кўра $(O_1A) \parallel (YX)$.

$$(O_1A) \perp (OX). \quad (2)$$

Бундан OZO_1 нукта эса бу учбурчнинг тўғри бурчли эканлиги ва Z лум бўлади. Учбурчак тўғри бурчлининг учти эканлиги маълум диаметр OO_1 нукта бу учбурчакнинг OO_1 гипотенузасининг диаметри қилиб тизилган айлана нуктаси экан.

Иккинчи томондан: (1) га асосан $(ZX) \parallel (O_1Y)$; янашга кўра $(O_1Z) \parallel (XY)$. Шунинг учун

$$|ZX| = |O_1Y| = r. \quad (3)$$

Энд (3) га таяниб, OZ кесманинг узунлигини талаб қиламиз.

$$|OZ| = |OX| - |ZX| = |OX| - |O_1Y| = R - r. \quad (4)$$

Бу эса кэланган Z нуктасининг O нуктасидан $|OZ| = R - r$ масофада ёлганлиги, яъни унинг O марказидан $R - r$ радиус билан чизилган айлана нуктаси эканлигини кўрсатади.

Демак, Z нуктаси $|OO_1|$ диаметри айлана билан $(O, R - r)$ айлананинг кесилиш нуктаси сифатида топилш мумкин.

Б) Энди Z нукта ёрдамида ивланган XY уринмани чизиб қўяйлик. OZ кесмани берилган айлана билан бирор X нуктада кесил-унича давом эттирамиз, O'угра, кичик айлананинг

$(O, R) \parallel (OX)$ радиусини чизиб, топишган X ва Y нукталардан тўғри чизик — умумий уринма ўтказамиз.

Яъни, 1) Берилган икки айлананинг марказлар масофаси OO_1 кесмани диаметр қилиб айлана чизамиз (24-III чизма).

2) (O, R) айлананинг O марказидан $R - r$ кесмага тегис радиусдан иккинчи айлана чизамиз.

3) Бу икки ёрдамчи айлана кесилган Z (ёки Z') нуктаси O нукта билан туташтириб, OZ кесмани катта айлана билан бирор X (X') нуктада кесилгунча давом эттирамиз.

4) (O_1, r) айлананинг $(O_1Y) \parallel (OX)$ радиусини чизамиз.

5) Топишган X ва Y нукталардан тўғри чизик ўтказамиз.

Эскизга. Икки ёрдамчи айлана кесилган иккинчи Z' нуктаси масбадан, юқоридагича ишларни бажариш натижасида иккинчи X'Y' уринма ҳосил бўлади.

Исбт: $(XY) \perp (OX)$ ва $(XY) \perp (O_1Y)$ эканлигини исбот қилиш керак.

Бундан учун 24-III чизмадаги Z нуктаси O марказ билан туташтиришдан ҳосил бўлган $ZXYO$ тўртбурчакнинг тўғри тўртбурчак эканлиги исбот қилинса kifой. Ҳақиқатан ҳам, янашга кўра,

$$|ZX| = |OX| - |OZ| = R - (R - r) = r = |O_1Y| \text{ ва } (O_1Y) \parallel (ZX)$$

бўлгани учун $ZXYO$ параллелограммдир. OZO_1 учбурчакнинг Z учидagi бурчаги OO_1 диаметрга тиралган ички чизилган бурчак бўлгани учун тўғри бурчак, бунга қўшни бўлган XZO_1 бурчак ҳам тўғри бурчак бўлади.

Маълумки, параллелограммнинг битта бурчаги тўғри бўлса, унинг қолган бурчаклари ҳам тўғри бўлади. Шунинг учун:

$$\angle ZO_1Y = \angle XYO = \angle XO_1Y = 90^\circ$$

бўлади.

Демак, топишган XY тўғри чизик, бир хил йўналишдаги радиусларга ўларнинг айлана устидаги X ва Y учларида перпендикуляр бўлгани учун умумий ташқи уринма бўлади.

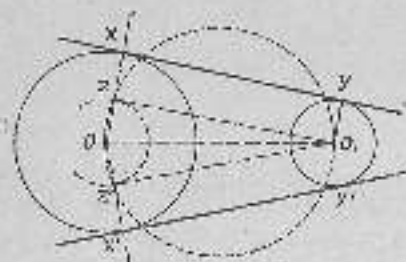
Иккинчи ҳол. Берилган икки айлананинг ички умумий уринма

Анализ. Берилган икки айлананинг ички умумий уринма XY ўтказилди деб фараз қилайлик (24-IV чизма). Унда

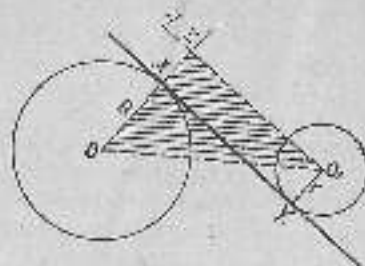
$$(OX) \perp (XY); (O_1Y) \perp (XY).$$

Бундан:

$$(OX) \parallel (O_1Y). \quad (1)$$



24-III чизма



24-IV чизма

Иланган уринмади аниқлашчи X ва Y нуқталарга OX ва OY радиусларнинг ўз айланаларидан учлари деб қарай оламиз.

Уринмага перпендикуляр иккила радиус ўзаро параллел бўлгани учун улардан биттасиниш, маънада OX ниш йўналишини аниқлаш кифом. Бунинг учун радиуснинг берилган O уқдан бишқа яна бирор нуқтасини топиш керак. Бу нуқтани топиш учун кичик айлананинг O_1 марказидан OX радиуснинг давомига O_1A перпендикуляр ўтказамиз.

Бу перпендикулярнинг OX тўғри чизиқнинг давоми билан кесилган нуқтасини Z ҳарфи билан белгилаймиз ҳамда O ва O_1 марказларни туташтирамиз. Z нуқтасини ёрдамчи фигура бўлиб олишимиз исбат қиламиз.

(1) га кўра $(OX) \perp (XY)$; янашга кўра $(O_1A) \perp (XY)$.

Шунинг учун

$$(O_1A) \perp (OZ), \quad (2)$$

Бундан OZO_1 учбурчанинг тўғри бурчакли эканлиги ва Z нуқта эса бу учбурчак тўғри бурчакнинг учи дадиллиги маълум бўлади. Демак, Z нуқта бу учбурчанинг OO_1 гипотенузасини диаметр қилиб қизилган айланада ётар экан.

Иккиети томондан:

(1) га асосан $(ZX) \perp (O_1Y)$; янашга кўра $(O_1Z) \perp (XY)$.

Шунинг учун

$$|XZ| = |YO_1|. \quad (3)$$

Энда, (3) га таяниб, OZ кесманинг узунлигини толамиз:

$$|OZ| = |OX| + |XZ| = R + r \quad (4)$$

Бундан Z нуқтасини берилган O нуқадан $R + r$ масофада ётиши, яъни бу нуқтанинг O марказдан $R + r$ кесмага тенг радиус билан қизилган айлана нуқтаси эканлиги аниқ бўлади.

Демак, Z нуқта берилган OO_1 кесмани диаметр қилиб қизилган айлана билан берилган O марказдан $R + r$ радиус билан қизилган айлананинг кесилиш нуқтаси экан.

Шундай қилиб, талаб этилган уринмага яқиниш Z нуқтани берилган O марказ билан туташтириб, OZ кесманинг берилган катта айлана билан кесилган X нуқтасини толамиз (24- V чизма).

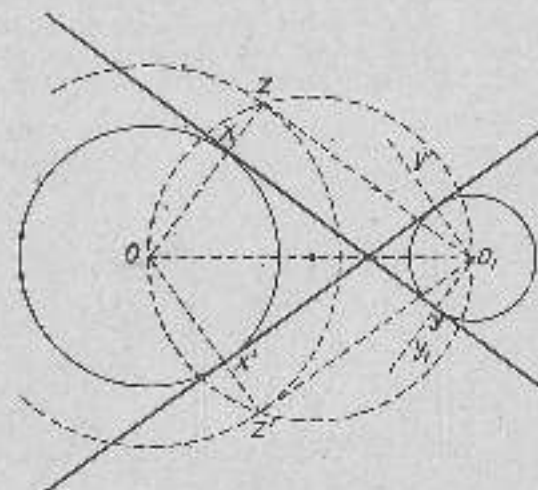
Берилган кичик айлананинг O_1 марказдан $(O_1Y_1) \parallel (ZO)$ ўтказиб, бу тўғри чизиқнинг кичик айлана билан кесилган Y нуқтасини толамиз. Толимаган X ва Y нуқталардан XY тўғри чизиқ ўтказамиз. (XY) — талаб этилган уринма бўлади.

Толшириқ

Енгиллик ҳаёти ва исбатлаш бошқаларини муҳтақил бажарим.

Текшириш. Юқоридаги 24- III ва 24- V чизмаларнинг ҳар бирича қизилган ёрдамчи икки айлана ўзаро Z ва Z' нуқталарда кесилганлиги учун иккита таянчи ва иккита очки умумий уринма ҳосил бўлади. Буларнинг ҳар бири масаланинг жавоби бўлиб олади. Демак, 24- масаладаги шартлар билан берилган икки айланани тўртта умумий уринма ўтказиш мумкин экан.

Лекин, айланаларнинг бир-бирига нисбатан вазиятини қараб, ҳарқиллар ҳасофаси билан радиуслари йилишиши ёки айрмачилигини ўзаро муносабати ҳам тўғрича бўлади ва масала ечилишини соя ҳам ёзгаради: баъзан масала 1, 3, 2 ёки 1 ечимли бўлса, баъзан муҳлақо ечимга эга бўлмайди. Бу муносабатларни қўйидаги жадвалдан кўриш мумкин:

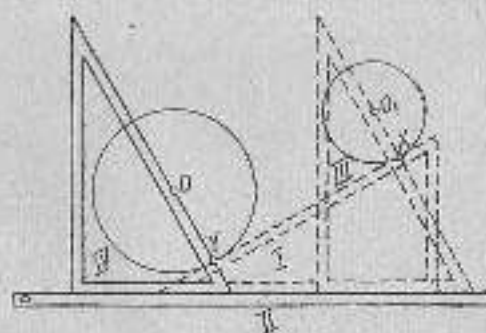


24- V чизма

Таблица шарти	Берилган шартлар сони ва муносабати	Берилган шартларнинг сир-бардари нисбатини аниқлаш	Ҳалнинг сони	
			ташқи	ички
1	$ OO_1 > R + r$	Айланаларнинг бири иккинчисининг таъқирисига яқинроқ мушай нуқтага буюр.	2	2
2	$ OO_1 = R + r$	Икки айлана ташқи уринишда.	2	1
3	$R - r < OO_1 < R + r$	Икки айлана ўзаро кесилишда.	2	0
4	$ OO_1 = R - r$	Икки айлана ички уринишда.	1	0
5	$ OO_1 < R - r$	Икки айланадан бири иккинчисига яқинроқ мушай нуқтага ва ушундай нуқтага яқин бўлишда.	0	0
6	$ OO_1 = 0$ $R \neq r$	Айланалар концентрик.	0	0

Жадвалда кўрсатилаган шартларнинг олдинги тўрттаси бажарилса, масала чиқарилади ва айланаларга ташқи умумий уринма ўтказиш мумкин, олдинги иккитаси бажарилса, умумий ички уринмалар ўтказиш мумкин.

Икки айланага умумий уринма ўтказишнинг юқорида кўрилган усулини бундай уринмаларнинг мавжудлигини исботлаш учун сўқиб, ахлатда эса қизилган берилган икки айланага эки қўйиб танланган тўғри хатик параллел умумий уринма деб қабул қилина бериш. Бу усул аналитик талабига деярли жавоб бераверади, лекин умумий уринманинг уриниш нуқталарини аниқроқ топиб тилаб қилинган ҳалларда чизмачи эа тўғриси 24- VI, VII шикмаларда кўрсатилган тарзда ишлатилади.



24- VI шикма

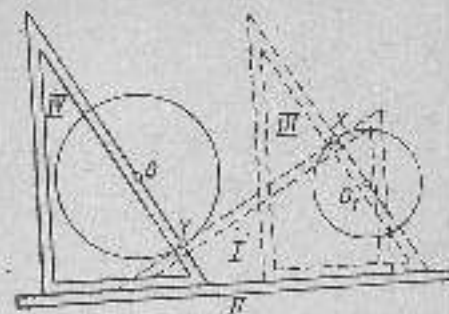
Растворив, бу иш уриниш шикмасига тутириш ва радиусининг уринмага перпендикуляр бўлиш ҳосилсига асосланганлиги.

Тоғшириқлар

I. Жадвалда кўрсатилган шартларнинг ҳар бирига тегишли умумий триангуларни яқинроқ кўрсатиш.

II. O, Z ни қаватда O нуқтадан $(O, R + r)$ айланага уриниш ўтказиш. XU ни қаватда эса X нуқтадан ички айланага уриниш ўтказиш мумкин. Икки нуқта уринишларини ўтказишда, шундан аниқ ва яқинроқ бажариш.

III. Икки айлана умумий уринмасининг ахлатда қаватда ишлатилишига икки шар кўрсатиш.



24- VII шикма

25- масала. Берилган кесмага берилган $m:n:p$ нисбатларда уя бўлакка бўлинг.

Яъна ш. 1) Берилган $[AB]$ кесманинг бир уш A нуқтадан бу кесма билан иктиврий бурчак ҳосил қилувчи AM нуққа-замиз (25- шикма).

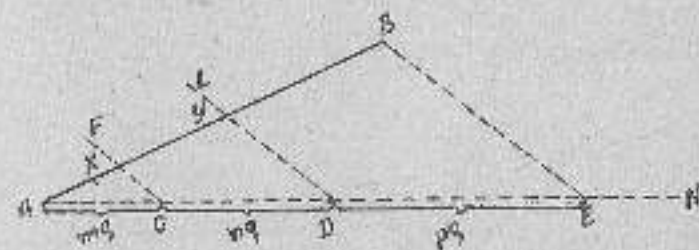
2) Иктиврий узунликлари бирор q кесма олиб, AN нуқта қувидаги кесмаларни ажратамиз:

$$[AC] = mq; [CD] = nq; [DE] = pq. \quad (1)$$

3) K нуқтадан берилган кесманинг иккинчи уш B нуқта билан туташтириб, D ва C нуқталардан қувидаги тўғри кезиқларни ўтказамиз:

$$(DK) \parallel (CF) \parallel (EB). \quad (2)$$

Бунда қизилган CF ва DB тўғри кезиқлар берилган AB кесма билан кесилиб, излашган X ва Y нуқталарни ҳосил қилиди.



25- шикма

III. Тарғатан кесилген бора-
ратан жана ретке келбеден кы-
раган жана кыраган кыраган

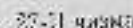

$$a : b = c : x$$

Сўнгри, A ва C нуқталарни тutashtirib, $(BD) \parallel (AC)$ tўg'ri chiziq chizildi. Bu chiziq burchakning OQ tomonidan D nuqtada (ёки uning O dan etishilgan darsasidagi biron D' nuqtada) kesildi. OD (ёки OD') s'zrasiga kesma b'uladi, uning

чунки аслишонида кўра, $(AC) \parallel (BD)$ бўлган учта бурчақнинг томонларида ҳосил бўлган кесмалар мос равишда пропорционал бўлади.

$$a : x = x : b$$

26-П. позыва



Иккинчи йўл. Ихтиёрли AN нурали A учиган бўлса,
 $|AC| = a$ ва унинг устига $|AB| = b$ келса, қўйилади (27-
 чизма). Бу кесмалардан каттисини (a ни) диаметр қилиб, яраш-
 тирганда олинлади.

Сўнгра, AC кесмасы унинг B нуктасидан перпендикуляр чىزارىлади. Бу перпендикуляр ярим айлананы D нуктада كىسىدۇ. A ۋە D نۇقتىلارنىڭ تۇتاشتۇرىشىدىن ھۆسەل بۇلغان AD ۋاتەر ئىزالىغىدا ھۆسەل بولىدۇ، چۈنكى دىئامېترنىڭ ئۇچىدىن چىقارىلغان ھەر قانداق $[AD]$ ۋاتەر دىئامېتر بىلەن شۇ ۋاتەرنىڭ دىئامېترىنىڭ پروېكسىيىسىنىڭ ھۆسەلدىكى ھۆسەل پروېكسىيىسىدەك بۇلىدۇ.

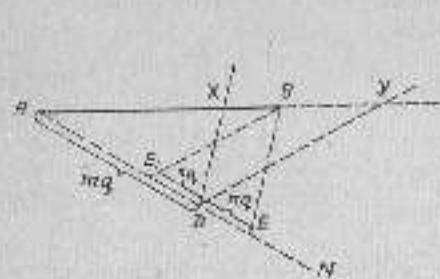
Бериллан AB кесмачки: $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{m}{n}$ тасвирини сарфлагини-
рувчи X нустасия топиш — AB кесмачи $\frac{m}{n}$ анбатда ички
бўлак дейилади.

АВ кесманын даражиды $\left| \frac{dY}{dX} \right| = \frac{\pi}{a}$ теңлиги кабатланчир-
руун К нуктасын тийиш. АВ кесми таякка кесетте бу-
лып дейлиги.

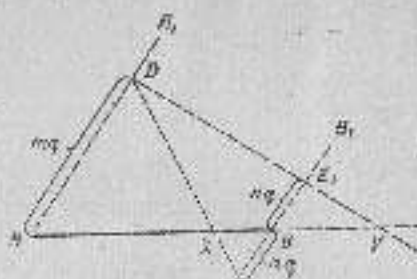
Бу масъалаи ҳуқуқияи инки ёрда билан ҳақиқат мумкин. (Исқандар
усулда ҳам аз 10-15 дақ фарқ қилишид).

Вирнячи йўз. Берилган AB кесманинг бир учидан, масалан, A учидан AB ёнига иккинчрий α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) бурчан тикка қилибдики йнроқ AV нур чиқиб, бу нурга $[AD] = m$ кесмани қўлайик ($28 - 1$ қизил, q — иккинчрий узунликлари кесма).

D нукта билгү өскө томонга шу нур аркылуу $|DE| = |DF| =$
— d кесмаларга кѳяны. Берилган AB кесманын B чыгы I
ли E_1 нукталар бичаш сүтантирбѳ. $(DX) \perp (EB)$ ва $(DY) \perp (E_1B)$
ларки сызымы. AB кеска ва ушине даямасын DX ва DY тѳ.



28-I чизма



28-II чизма

ри чизмақлар билан кесишишидан ҳосил бўлаган X ва Y нуқта-лар — изланган нуқталар бўлади. Ҳақиқатан NAU бурчақнинг томонлари XD ва BE параллел чизиклар билан кесилгани учун

$$\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AD|}{|DE|} = \frac{mq}{nq} = \frac{m}{n}.$$

Шу бурчақнинг томонлари YD ва BE_1 параллел тўғри чи-зиқлар билан кесилгани учун

$$\frac{|AY|}{|YU|} = \frac{|AD|}{|E_1D|} = \frac{mq}{nq} = \frac{m}{n}.$$

$m < n$ бўлса ҳам масала юқоридагича ечилади.

Иккинчи йўл. Берилган AB кесманинг икки учидан бир-бирига параллел қилиб AA_1 ва BB_1 тўғри чизикларни чизамиз (28-II чизма).

Сўнгра AA_1 тўғри чизикқа унинг A нуқтасидан бошлаб $|AD| = mq$ кесмани қўямиз. BB_1 тўғри чизикқа эса унинг B нуқтасидан бошлаб $|BE| = |BE_1| = nq$ кесмаларни қўямиз. D нуқтани E ва E_1 нуқталар билан туташтирамиз.

AB кесма билан DE кесманинг кесилган X нуқтаси ва AB кесманинг даямони билан DE_1 кесманинг даямони кесилган Y нуқта — изланган нуқталар бўлади.

Ҳақиқатан, AXD бурчақнинг томонлари (ва уларнинг дая-мони) AA_1 ва BB_1 билан кесилганлиги учун

$$\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AD|}{|BE|} = \frac{mq}{nq} = \frac{m}{n}.$$

Шунингдек, AYD бурчақнинг томонлари ҳам шу AA_1 ва BB_1 параллел чизиклар билан кесилганлиги учун

$$\frac{|AY|}{|YU|} = \frac{|AD|}{|BE_1|} = \frac{mq}{nq} = \frac{m}{n}.$$

Шундай қилиб, AB кесмани берилган нисбатда бўлувчи нуқта-лар X ва Y нуқта-лар бўлиб, уларнинг биричиси AB кесмани икки нисбатда, иккинчиси эса ташқи нисбатда бўлади.

Бундаги A, B, X, Y нуқталарни олагда гармоник нуқта-лар ёки гармоник тўртлик дейилади.

AB кесмани ташқи равишда бўлувчи Y нуқта-нинг ўрни $\frac{m}{n}$ нисбатда боғлиқ; чунончи: агар $m > n$ бўлса, Y нуқта AB кес-ми B уқининг даямонида ётади (28-II чизмадаги ҳаби); агар $m < n$ бўлса, Y нуқта AB кесма A уқининг даямонида ётади.

Толшириқ

Бу масалани учбурч бурчақ биссектрисаларининг ҳосилларига асос-ланлиб ҳам ечим.

БЕВОСИТА ЕЧИЛАДИГАН МАСАЛАЛАР

Элементар масалалар билан таъиншган ўқувчи, махсус методлар билан масалалар ечишга ўрганишни ботлашдан олдин, у методларни шикатиладан бевосита ечиладиган масалалар билан мумкин қадар муқимал таъиниш шикати керак. Бу бир томондан ўқувчининг масалалар ечилишида малака орттиришини бир қадар тезлатиш, иккинчи томондан элементар масалаларни ўринли ишлатишга ўргатади, натижада ўқувчи масалаларни махсус методлар билан ечишни ўрганишга осонли тийёрланган бўлади. Шу мулохазаларга риш қилиб, бу бобда бевосита ечиладиган масалаларни ўргатамиз.

Қўл масалаларда тегишли фигураани ясап илж тахминий чизилган фигуранинг ўзидаи ва масала шартиди берилган маълумотлардан равшин кўринади. Шуаниг учун бу хил масалалар бевосити ечиладиган масалалар дейилади. Бу бобда шу хилдаги масалалар ҳақида қисқасига кўрсатма берип билан теклянамиз; бу кўрсатмалардан қўшлари китобнинг ахиридати аналхиз ниямисиди ёрдамчи фигураларни кўрсатиш були билан берилган.

Бу бобдаги учбурчак ва, ухужак, кўпбурчак ясапга доир масалалардан бир қанчагини ҳисоблашга олг масалаларга айлаштириб олиб, уларни (I бобдати 10- I, II; 11- IV, V; 19- I ва 22- V масалалар каби) график усулда ҳам ечтириш керак.

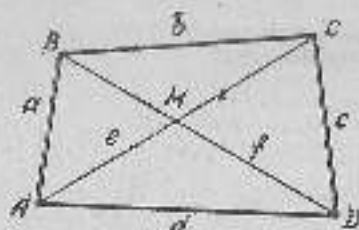
Б. §. НУҚТА, КЕСМА, ТҶЕРИ ЧИЗИҚ
ВА БУРЧАКЛАР ЯСАШГА ДОИР МАСАЛАЛАР

1°. Берилган уч нуқтаанинг нуктадан ўтказилган тўғри чизикқа параллел жилиб ўтган нуктадан тўғри чизик ўтказилиш.

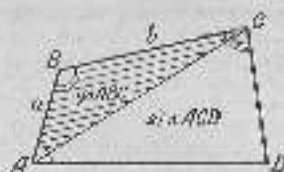
10. Берилган бурчак томонларини маълум таъинишдан хосмалар ҳосил қилиб жилиб ўтувчи тўғри чизик ўтказилиш.

Б. §. А УЧБУРЧАК ВА ТҶРТУРЧАКЛАРНИ АНИҚЛОВЧИ
ЭЛЕМЕНТЛАР СЕНИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Умуман кўпбурчаклар ясапга доир масалаларни ечишга киришишдан олдин шунни эслатиб ўтайликки, бундай масалаларнинг шартиди берилган элементлар миқдир шикатидан бир-бириса боғлиқ бўмаслиги ва мустакки элементлар сени ушбу $m = 2n - 3$ формула билан аниқланиш керак.



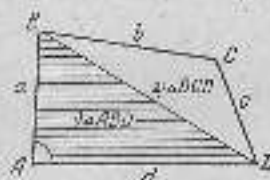
30- чизма



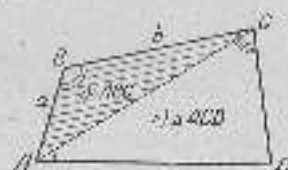
31- чизма

Тўртбурчакнинг томонларини 30- чизмада кўрсатилганидек $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$ ва $|DA| = d$, унинг диагоналлари $|AC| = e$, $|BD| = f$, бурчакларини $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ билан, чатаголалар оралидаги бурчакни эса (e, f) ёки $\angle M$ билан белгилатгани шарҳлашиб оламиз. Анализ чизмасида ёрдамчи фишурахи итрихлаб кўрсатамиз.

72. Қуйида берилган элементларидан фойдаланиб, тўртбурчак ясаб,
 I. a, b, c, d (31- чизма).
 II. a, b, c, d ва бир бурчак (32- чизма).
 III. $a, b, \angle A, \angle B, \angle C$ (33- чизма).



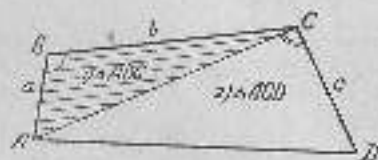
32- чизма



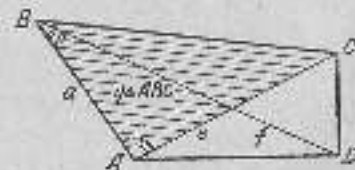
33- чизма

IV. $a, b, c, \angle B, \angle C$ (34- чизма).

V. $a, \angle A, \angle B, \angle C, (e, f)$ (35- чизма).



34- чизма



35- чизма

- VI. $a, d, \angle A, \angle B, \angle C$ (36- чизма).
 VII. $a, d, \angle A, \angle B, \angle C, (e, f)$ (37- чизма).
 VIII. a, b, c, d, f (томонлардан кимилган учтадан олинган бўлиши мумкин).
 IX. $a, b, \angle A, \angle B, \angle C$ (38- чизма).
 X. $a, b, \angle A, \angle B, \angle C, f$ (39- чизма, 21- масала).
 XI. $a, b, \angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ (39- чизма).



36- чизма



37- чизма



38- чизма

- XII. $a, b, \angle A, \angle B, \angle C$.
 XIII. $a, b, c, d, \angle C$.
 XIV. $a, b, c, d, \angle D$.
 XV. $a, b, c, f, \angle C, \angle D$.
 XVI. $a, b, c, f, \angle A$.
 XVII. $a, b, c, f, \angle B$ (39- чизма).
 XVIII. $a, b, c, f, \angle D$.
 XIX. $a, b, f, \angle B, \angle C, \angle D$.
 XX. $a, c, f, \angle B, \angle C, \angle D$.
 XXI. $a, b, \angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ (39- чизма).

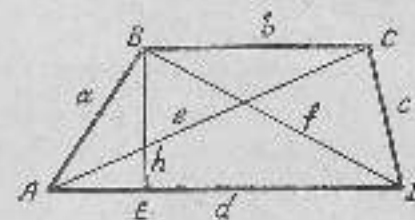
(XV масала қабл).

73. Маълум айланма бир томони ва ундаги икки бурчакни бўйича икки томондан тўртбурчак ясаб.

74. Унга томон ва бир диагонали бўйича шундай тўртбурчак ясаб, унга икки айланма томондан тўртбурчак ясаб.

В. 6. ТРАПЕЦИЯЛАР ЯСАШГА ДОИР МАСАЛАЛАР

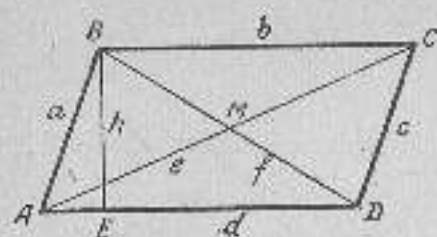
Ҳар хил томонли трапецияни ясаб учун қайсида унинг тўртта элементи берилган ва булардан иккитаси трапеция бурчаклари бўлиб, улар бир-бирига қарши бўлувчилиги маълум. Трапециянинг элементларини ҳам тўртбурчак элементлари каби белгилан, унинг бўйинчилигини h , ўрса чизилган m ҳарфи билан кўрсатамиз (39- чизма).



39- чизма

75. Қуйидаги берилганлардан бўйича трапеция ясаб:

- I. a, b, c, e .
 II. a, c, d, e .
 III. a, c, d, h .
 IV. a, c, f, h .
 V. a, b, c, h .
 VI. a, b, e, h .
 VII. $a, c, d, \angle A$.
 VIII. $a, b, c, \angle B$.
 IX. $a, c, f, \angle B$.
 X. $d, h, \angle A, \angle D$.
 XI. $a, b, \angle A, \angle D$.
 XII. $a, b, \angle A, \angle D$.



49-чи сурат

9-§. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ЯСАШГА ДОИР МАСАЛАЛАР

Параллелограмм ясаш учун камиде унинг учта элементи маълум бўлиши ва булардан камиде иккитаси қизиқли элемент бўлиши керак.

Параллелограмм элементларини ҳам юқоридагича белгилеймиз (49-чи сурат).

78. Қуйида берилган элементлардан фойдаланиб, параллелограмм ясаи:

I. a, b, c .	V. a, d, h .	IX. $a, f, \angle A$.
II. $a, b, \angle A$.	VI. e, f, h .	X. $a, d, \angle (f, d)$.
III. a, e, f .	VII. f, d, h .	XI. $e, f, \angle (f, d)$.
IV. $f, a, \angle (f, d)$.	VIII. a, e, h .	XII. $e, f, \angle (e, e)$.
Va. $a, e, f, \angle (e, f)$.		

Параллелограммнинг ҳусусий қўйишлари бўлиш тўғри тўртбурчак ва ромб ясаш учун уларни шикловчи шиклов мустақил геометрик образ берилган бўлиши (булардан камиде биттаси қизиқли элемент бўлиши) керак. Бу фигуралар таърифига эътибори олинганда, уларни шикловчи шикловларни ҳам, параллелограммнинг шиклари, учтайд ҳисоблаш мумкин, шунинг ромбда унинг томонларининг тенглиги, тўғри тўртбурчакда бурчакларининг тўғрелиги маълум учинчи элементлардандир.

79. Қуйидаги элементлардан фойдаланиб, тўғри тўртбурчак ясаи:

I. a, b .	IV. $a, \angle (a, f)$.
II. a, e .	V. $a, \angle (f, d)$.
III. $e, (e, f)$.	VI. $a, \angle (e, f)$.

VII. Олтига бориб бўлмайдиган икки ждем орасидagi масофани параллелограмм ҳисоблашдан фойдаланиб қўйган усулни кўрсатки.

78. Қуйидаги элементлардан фойдаланиб, ромб ясаи:

I. $a, \angle A$.	V. e, h .	IX. $a, \angle$.
II. $e, \angle A$.	VI. $h, \angle A$.	X. $e, \angle B$.
III. $f, \angle A$.	VII. a, h .	
IV. e, f .	VIII. $a, (a, b)$.	

Қўйидаги элементни учун ўқили битта шиклов элементи берилган шиклов.

79. Дикгонали (ёки томони) берилган квадрат ясаи.

10-§. КЎПБУРЧАКЛАР ЯСАШГА ДОИР МАСАЛАЛАР

80. Қуйидаги элементлардан фойдаланиб (умумий қўйишдаги) n бурчак ясаи:

а) ҳамма томонлари ва бир бурчакни училан чиққан ҳамма диагоналлари берилган;

б) ҳамма томонлари ва $n-3$ та кетма-кет ётган бурчаклари берилган.

81. $n-1$ та томони ва $n-2$ та кетма-кет ётган бурчаклари берилган n бурчак ясаи.

82. $n-1$ та бурчакни бўлак $n-2$ та кетма-кет ётган томонлари берилган n бурчак ясаи.

83. $n-1$ та бурчакни бўлак $n-2$ та кетма-кет ётган томонлари берилган n бурчак ясаи.

84. Қуйидаги ҳолатлар қаралсин:

а) номаллум бурчак номаллум икки томон орасига ётган ҳол;

б) номаллум бурчак номаллум икки томондан бирига ётган ҳол;

в) номаллум бурчак номаллум икки томоннинг ҳеч қайсинига ётган ҳол.

85. n томонли билан $n-3$ та кетма-кет бурчаклари берилган n бурчак ясаи.

86. Қуйидаги берилган элементлардан фойдаланиб, мунтазам кўпбурчаклар ясаи:

а) берилган бир томонни бўйича мунтазам олтибурчак ясаи;

б) берилган икки кетма-кет диагональ бўйича мунтазам олтибурчак ясаи;

в) берилган бир томонни бўйича мунтазам саккизбурчак ясаи.

87. Олтига. Мунтазам кўпбурчаклар ясаишга қўйилган қўйишлар маълумотлар

100-чи суратда баён этилган.

ТЎҒРИЛАШ МЕТОДИ

И. Ҷ. ТЎҒРИЛАШ МЕТОДИНИНГ МОҲИЯТИ
ВА УНИНГ ТАТБИҚ ЭТИЛИШИ

Бир тўғри чизиқда ёткан кесмаларнинг, масалан, тинч чизик бўлишларининг алгебраик йўқидисига тенг кесма ясап, кесмаларни тўғрилаш деб аталади. Тўғриланган фойдаланиб масала ечиш — ҳақиқат тўғрилаш методи дейилади.

Тўғрилаш методи билан масала ечилиш ҳам иқорида қўрилган босқичлаб ечиш усулидан тўла фойдаланамиз (2- §).

Ясапга доир масаладаги маълум элементлар қаторида изланган фигура ёзиқли қонмаълум элементларининг йўқидисига ёки айирмаси берилган бўлса, бундай масала тўғрилаш методи билан ешилди.

Мисоллар қўрайлик.

29- масала. *Асоси, унга ёнишган бир бурчаги ва ён томонларининг айирмаси берилган учбурчак ясап.*

Бу масалада ечилиш қуйидаги икки ҳолати қўздан кетири-

I. Асосдаги бурчақлардан кичири берилган ҳол.

II. Асосдаги бурчақлардан каттаси берилган ҳол.

Биринчи ҳол. Аялай. Изланган учбурчак 41- I қизмадаги ABC учбурчак деб фараз қилайлик.

Берилган r кесмани (айирмаси) бу учбурчакда қўйсатиш учун унинг AC томонига устига (A учидан бошланиб) $|AB| = |AD|$ томонига қўямиз, бундан $|AC| - |AB| = |AC| - |AD| = |DC| = r$ ҳосил бўлади.

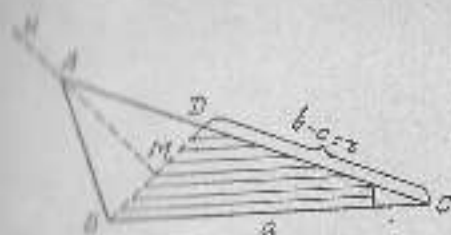
D нуқтаси B нуқта билан туташтиришдан ҳосил бўлган BCD учбурчакнинг ёрдами фигура бўла олишнинг исбот қиламиз.

Берилган $|BC| = a$, $|CD| = r$ томонлар ва улар орасидаги C бурчак бўйича BCD учбурчак ясап мумкин.

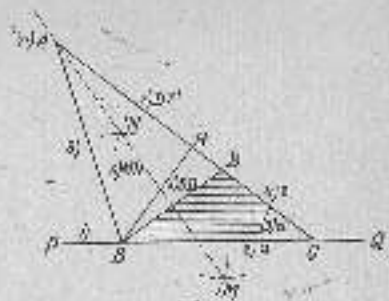
Бу BCD учбурчак ёрдамида изланган ABC учбурчакни ясап мумкин: бундан учун ABC учбурчакнинг A учидан томонига керак. A нуқта айни вақтда тенг бўли BCD учбурчакнинг учидан. Бу учбурчакнинг учидан томонига учун BD кесманинг ўрта перпендикуляри (MN) ёки қилиб, унга $|CD|$ нисга давомия билан кескиштирамиз; топишган A нуқтаси B нуқта билан туташтирсак, қилинган ABC учбурчак ҳосил бўлади.

Ясап. Аялайда қўрилган пилан бўлини ясап, 41- II қизмадаги ABC учбурчак ҳосил бўлади (ясап шартини қизмада рақамлар билан қўрсатишимиз).

Исбот. 41- II қизмада қилинган ABC учбурчак қизмадаги талабига жавоб бериши, тупай ясап, $|BC| = a$, $\angle C = \hat{C} = \alpha$ бўлиб, $|AB| = |AD|$, яъни $|AC| - |AB| = |AC| - |AD| = |DC| = r$.



41- I қизма



41- II қизма

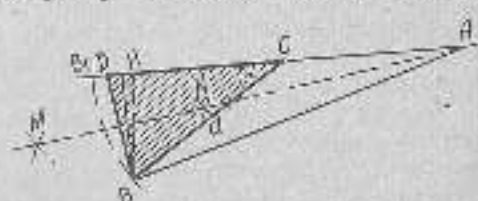
Тақшириш. Изланган ABC учбурчакнинг мавжуд бўлиш-бўлимаслиги A учидан мавжудлигига боғлиқдир. A нуқтасининг мавжудлиги эса BD кесманинг ўрта перпендикуляри (MN) билан $|CD|$ давомининг кесилиши ёки кесилишмаслигига боғлиқ, бу эса ABC учбурчакнинг B учидан AC томонига BN перпендикуляр туширишдан ҳосил бўлган тўғри бурчакли BNC учбурчакнинг CN катети билан $|CD| = r$ кесманинг ҳамда r билан a кесманинг нисбий қийматларига боғлиқдир. Тўғри бурчакли учбурчакда $|CN| = a \cdot \cos C$ муносабати ёзиб, қуйидаги ҳолатларни қарайлик.

1) Агар 41- II қизмадаги каби $|CD| < |CN|$, яъни $r < a \cdot \cos C$ бўлса, MN ўрта перпендикуляри $|CD|$ нисга давоми билан бироз нуқтада кесилиб, қилинган A нуқтаси ҳосил қилинади, бу икки тўғри чизиқнинг кесилиш нуқтаси тўғри бурчакли BND учбурчакдаги BDN бурчакнинг ўткир бурчак бўлиши билан асослаш мумкин.

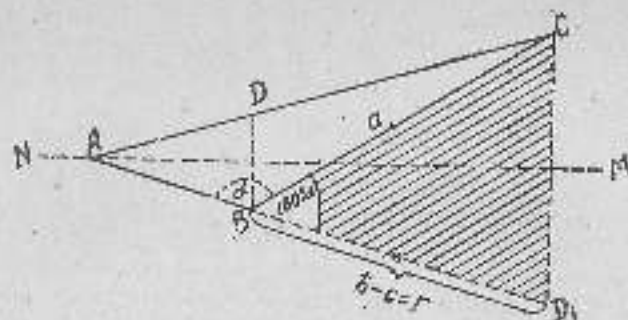
Демак, бу ҳолда масала ечилиши ва битта учбурчак ҳосил бўлади.

2) Агар $|CD| = |CN|$, яъни $r = a \cdot \cos C$ бўлса, BD томонини BN перпендикуляри билан устига-уст тушиб, D бурчак тўғри бурчак бўлади. Шунинг учун MN ўрта перпендикуляри билан CD томонининг давоми ўзаро кесилимайди; демак, бу ҳолда масала етишга эриш бўлмайди.

3) Агар 41- III қизмадаги сиксари $|CN| < |CD| < |CB|$, яъни $a \cdot \cos C < r < a$ бўлса, BD нисга ўрта перпендикуляри бўлган MN тўғри чизиқ CD кесманинг C учидан нарига ўтказилган давоми билан кесилиб, A нуқтаси ҳосил қилинади. Лекин, бу A нуқтаси B нуқта билан туташтиришдан кейин ҳосил бўладиган ABC учбурчакда $r = |CD| =$



41- III қизма



42- I чизма

— $|AD| = |AC| - |AB| = c - a$ бўлса-да, $\angle ACB \neq \alpha$ дег. яъни масаланинг бунга талабига жавоб берса-да, унинг иккинчи талабига жавоб бера олмайди. Шунинг учун бу ҳолда ҳам масала ечимга эриш бўлмайди.

4) Агар $c \geq a$ бўлса, учбурчак ҳосил бўлмайди, чунки бу шарт учбурчакнинг мавжудлик шартига тўғри келмайди (учбурчакнинг икки томони айирмаси ўрта учбурчакнинг учинчи томонидан албатта кичик бўлиши керак).

Иккинчи ҳол. А. п. л. я. Ивланган учбурчак томонига деб фарз қилиб, тизимдан 42- I чизмадаги $\triangle ABC$ учбурчакни тизиб қўйайлик. Бунда берилганлардан $|AC| = |AB| = b = c = r$ кесмадан тизимда кўрсатиш учун (биринчи ҳолдаги сингари) AD томондан AC томон устига унинг A учидан бошлаб қўйсак, $|AC| - |AB| = |AC| - |AD| = |DC| = r$ ҳосил бўлади.

Демак, D нуктани B нукта билан туташтиришда ҳам ҳосил бўладиган BCD учбурчак ёрдамчи фигура бўла олмайди, чунки уш фақат AC ва CD томонлар бўлиши мавж бўлхайдик. Шунинг учун r кесмани чизмада масаланинг биринчи ҳолатидан бошқачероқ йўл билан кўрсатишга мажбурмиз.

Учбурчакнинг AC (узун) томонини унинг AB (қисқа) томонига устига A нуктадан бошлаб қўламиз.

Бундан AB томон давомида $|BD_1| = |AD_1| - |AB| = |AC| - |AB| = r$ кесма ҳосил бўлади; унинг D_1 учини C нукта билан туташтиришда ҳам ҳосил бўлган BCD_1 учбурчакнинг ёрдамчи фигура бўлиши ёки бўлмаслигини аниқлашлик: $|BC| = a$, $|BD_1| = r$ томонлари ва $\angle CBD_1 = 180^\circ - \alpha$ бурчаги бўлиши бу учбурчакни ясалт мумкин; берилаётганга таяниб ясалтиш мумкин бўлган кейинги учбурчакдан ивланган ABC учбурчакка ўтиш ҳам мумкин. Ҳақиқатин, ивланган учбурчакнинг A учидан тег ёки $CA D_1$ учбурчакнинг уч шифатида толиш мумкин, A нукта шу тег ёки учбурчакнинг ясоси бўлган CD_1 нинг AN ўрта перпендикулярида ётади. Иккинчи томондан, у $D_1 B$ томон давомида ётади.

Демак, A нуктани бу иккинчи мавжуд тўғри шифатининг кесилиш нуктаси шифатида толиб, уш C нукта билан туташтиришда ҳам ABC учбурчак ҳосил бўлади.

Яъни ва исботланган биринчи ҳолатдаги кесма билан ивланган учбурчакнинг ҳосил бўлиши $c \leq a$ шартдан бошқа яна учбурчакка ҳам боғлиқ эканлигини уқтариб, қуйидаги ҳолатларни қўзғаш мумкин.

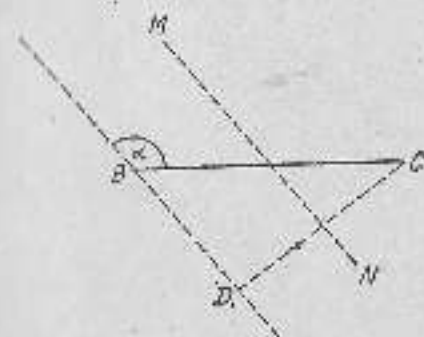
Текшириш.

1. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ бўлганда қуйидаги уч ҳолатдан бири бўлиши мумкин:

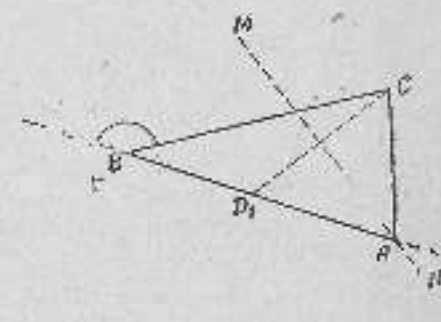
а) агар 42- II чизмадаги сингари ёрдамчи BCD_1 учбурчак тўғри бурчакли бўлхаса, AN ўрта перпендикуляр $[D_1 B]$ давоми билан кесилиб, масаланинг талабига жавоб берувчи ABC учбурчак албатта ҳосил бўлади;

б) ёрдамчи ACD_1 учбурчак тўғри бурчакли бўлса, AN ўрта перпендикуляр $[BD_1]$ ва параллел бўлиб, ивланган A нуктани ҳосил қилайлик (42- III чизма);

в) ёрдамчи BCD_1 учбурчакнинг $CD_1 B$ бурчаги ўтмас бурчак бўлса, AN ўрта перпендикуляр BD_1 кесманинг D_1 учидан нарига ўтказилган давоми билан бирор A нуктада кесилмади. Лекин бу A нуктани C нукта билан туташтиришда ҳам ҳосил бўлган ABC учбурчак масаланинг талаблардан бирига жавоб бермайди (42- IV чизма), чунки унинг B бурчаги берилаётган α ўтмас бурчакка тенг эмас.



42- III чизма



42- IV чизма

Демек, масала еңимге эга бўлган учун берилган α шундай ўтмас бурчак бўлиши керакки, унга қуялиб Ардамчи BCD учбурчакни ҳиссада унинг D бурчаги ўткир бўлсин.

Толшириқ

1. Масаланинг ечилишнинг таъминлибдиги ўтмас бурчак қиймаларларидан юқори таърифи билан белгиланган.

II. $r < a$ ва $\alpha < 90^\circ$ бўлса, масаланинг талабига жавоб берувчи битта (тўғри бурчакли) учбурчак топил мумкинлиги 42-V шизмада кўрсатилган.

III. $r < a$ ва $\alpha < 90^\circ$ бўлганда масаланинг ечилиши 42-VI шизмадагидек бўлади.

Кейинги икки ҳолда AM ўрта перпендикуляр $[BD]$ нинг A учидан M нисга ўтказилган давомини кесилганлиги (сўрашчи учбурчакнинг D бурчаги нисала ҳолда ҳам ўткир бўлгани) учун масала бу ҳолларда ҳаққа эақт олинади.

12-§. МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

85°. Бир катети ва қолган икки томонининг айирмаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

86°. Асоси, унга ёпишган бир бурчаги ва қолган икки томонининг айирмаси берилган учбурчак ҳиснт.

87°. Бир катети ва қолган икки томонининг айирмаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

88°. Асоси, унинг қаринсидати бурчаги ва қолган икки томонининг айирмаси берилган учбурчак ҳиснт.

89°. Катетларидан ва катетларининг айирмаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

90°. А бурчак ва унинг бир томонида B нукта берилган учбурчакнинг иккинчи томонида шундай C нукта топилганки, $[AC] \perp [CB]$ Ҳиснтдан берилган I нисчага тенг бўлсин.

91°. А, Асоси, унинг қаринсидати бурчаги ва қолган икки томонининг айирмаси берилган учбурчак ҳиснт.

Б. Катетларининг айирмаси ва гипотенузаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

Б. Катетларининг айирмаси ва гипотенузаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

Б. Катетларининг айирмаси ва гипотенузаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

Б. Катетларининг айирмаси ва гипотенузаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

Б. Катетларининг айирмаси ва гипотенузаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

Б. Катетларининг айирмаси ва гипотенузаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

Б. Катетларининг айирмаси ва гипотенузаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

Б. Катетларининг айирмаси ва гипотенузаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

Б. Катетларининг айирмаси ва гипотенузаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

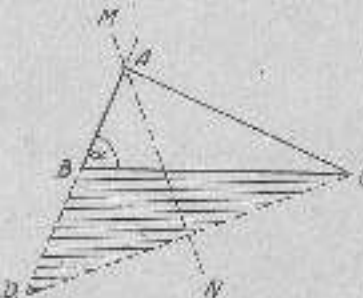
Б. Катетларининг айирмаси ва гипотенузаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

Б. Катетларининг айирмаси ва гипотенузаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

Б. Катетларининг айирмаси ва гипотенузаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

Б. Катетларининг айирмаси ва гипотенузаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

42-V шизма



42-VI шизма

92°. Бир томони, қолган икки томонининг айирмаси ва шу томонлардан бирига ўтказилган баландлиги берилган учбурчак ҳиснт.

93°. А. Икки томонининг айирмаси ва айирмаси ҳиснтда томонига ўтказилган баландлиги берилган учбурчак ҳиснт.

Б. Катетларининг айирмаси ва айирмаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

94°. Периметри, баландлиги ва асосининг бир бурчаги берилган учбурчак ҳиснт.

95°. Периметри ва икки бурчаги берилган учбурчак ҳиснт.

96°. Қуйидаги элементлардан қандайдиги тўғри бурчакли учбурчак ҳиснт.

1. $a + b < c$;
2. $b + c < a$;

3. $2p < a$;
4. $2p < a - b$;

5. $c - a < b$;
6. $a - b < c$;

7. $a - b < c$;

8. $a - b < c$;

9. $a - b < c$;

10. $a - b < c$;

11. $a - b < c$;

12. $a - b < c$;

13. $a - b < c$;

14. $a - b < c$;

15. $a - b < c$;

16. $a - b < c$;

17. $a - b < c$;

18. $a - b < c$;

19. $a - b < c$;

20. $a - b < c$;

21. $a - b < c$;

22. $a - b < c$;

23. $a - b < c$;

24. $a - b < c$;

25. $a - b < c$;

26. $a - b < c$;

27. $a - b < c$;

28. $a - b < c$;

29. $a - b < c$;

НУҚТАВИЙ ТУПЛАМЛАР ВА УЛАРНИ ТОПИШГА ДОИР МАСАЛАЛАР

13. §. КИРИШ.

13. §. А. НУҚТАВИЙ ТУПЛАМЛАРНИ ЎРГАНИШНИНГ АҲАМИЯТИ

Нуқтавий туپлам тупунчаси геометриянинг ягона ва етакчи тушунчаларидан бўлиб, уни ўрганиш катта тарбиявий аҳамиятга эгадир.

Ҳақиқатин:

I. Нуқтавий туپламларни топишга доир масалалар ечили жараёнда ҳар бир масалани ечилиш ёрдам берадиган теоремаларни татиш учун ҳамма теоремаларни бир-хал бир ҳосирлаб чиқил ва маълум нуқтавий туپламларни масалалар ечилишда татбиқ этиб туриш ушунга геометрия билимларининг чуқур ва нуқта ўзлаштиришни таъминлайдиган омиллардандир.

II. Масалада берилган хоссага эга бўлган нуқталардан бир қисминини аналитик равишда исоб, уларнинг жойлашларидан қонуниятни аниқлаш олиш ва бу қонуниятнинг ҳақиқатин тўғрисидаги дедуктив усулда исботлаб, издалушга нуқтавий туплам ҳақида тўғри хулосалар чиқара бориш бир томондан, ўқувчиларнинг масала ечилишга қизиқишга кучайтира, шунингча томондан, уларни табиат ҳодисалари устида қилинган бир тилдаги тажрибаларнинг берадиган натижалари қандай қонуниятга бўйсунганини аниқлашга ўргатади ва бундай ҳодисалардан тўғри, ҳаққонин хулосалар чиқаришга малака ҳосил қилибди.

III. Ясалган нуқталардан ҳар биттасининг ўзини ўша нуқтавий жамда қатнашган геометрияқ миқдорларга бўлиқ бўлишига теътеъ кўриб туриш ва ҳасаланниқ шартда берилганлардан ҳар биттаси ўзгаришнинг издалушга нуқтавий тупламга таъсир этишини системали кузатиб бориш — ўқувчилар оғида физик-математик муносабат ва ҳаракат тушунчаларининг равожланишига катта ёрдам беради.

IV. Ўқувчилар исобини доир геометрияқ масалалар ечилишда уларга маълум бўлган нуқтавий тупламлардан эш маълумнинг таълаб шилиниқ ҳаққонинда, нуқтавий тупламларни фикран тасаввур этиш ҳолда бирма-бир кўи оқидан ўзгариш ҳаққонинда, бу эш ўқувчиларнинг фикран тасаввур этиш қобилиятини ётиришга — фазовий тасаввурини равожланишига ёкши ёрдам беради.

Демак, нуқталар маҳсус тупламни ёки нуқтавий тупламларини ўрганиш жуда бой қоявий маълумга эга бўлиб, у ёш яловдан материаллигиқ дунёқараш руҳията тарбияланишдаги муҳим воситалардан биридир.

Шунинг учун ҳар бир ўқитувчи ўқувчиларга нуқтавий тупламлар топиш ва уларни ишлатишга доир масалалар ечилишга ўргатишда бу ишнинг қоявий-тарбиявий томонига ҳам етарли даражада эътибор бериб, ёш яловдан тарбияланишда муқаддас ишнинг муҳим қисм самарали бўлишига эришуви керак.

13. § Б. НУҚТАВИЙ ТУПЛАМНИНГ ТУРЛИЧА ТАЪРИФИ ВА НУҚТАВИЙ ТУПЛАМЛАРНИ ТОПИШ УСУЛИ

Китобнинг 1- § нда геометрияқ фигурани қуйидагича таърифлаган эдик: нуқталарнинг ҳар қандай туплами геометрияқ фигура ёки геометрияқ образ дейилади.

Нуқтавий туплам таърифини кўралик.

Бир хил хоссага эга бўлган ҳамма нуқталар *туплам* ю хоссага эга бўлган нуқталарнинг нуқтавий туплами дейилади.

Кенгроқ таъриф қуйидагича:

I. Бир хил (α) хоссага эга бўлган нуқталарнинг ҳаммасидан тузилган, лекин бошқа хоссақ нуқталарни ўз ичига олманган фигура *тулани* (α) хоссақ нуқталарнинг нуқтавий туплами деб аталади.

II. Агар бир хил хоссага эга бўлган ҳамма нуқталар бирор *F* фигурда ётиб, бу фигураниқ ҳар қандай нуқтаси ҳам шу хоссага эга бўлса, бундай фигура *маълум хоссақ нуқталарнинг нуқтавий туплами* деб аталади.

Бу таърифларга кўра қуйиқ хоссага эга бўлган нуқталардан ихтиёрлиқ биттасининг бирор фигурда, масалан, *F* фигурда ётиши маълум бўлиб, бу фигураниқ ҳар қандай нуқтаси ҳам шу хоссага эга эканлиги аниқлоса, *F* фигура шундай нуқталарнинг нуқтавий туплами бўлади.

Ҳамма нуқталарни бир текисликда ётган бир хил хоссақ нуқталарга текис нуқтавий туплам ёки текисликдаги нуқтавий туплам дейилиб, бир текисликка жойлашманган нуқталарнинг нуқтавий туплами эш фазовий нуқтавий туплам деб аталади.

Биз бунда фақат текисликдаги нуқтавий тупламларни ўрганиш.

Текисликдаги нуқталарнинг нуқтавий тупламларини топиш учун хоссақ қўйиқтан нуқталардан бир исобат қилиш ва чизил ёрдамида топилади. Бу нуқталарнинг бир-бирига исобатан аналитик улашган бирор тағил *F* фигураниқ нуқталари эканлигидан дарақ бериш мумкин. Лекин, *F* фигурани қоярин хоссақ кўрсатилад нуқталарнинг нуқтавий туплами деб олаймиқ, чунки бу хил нуқталар *F* фигурдан четла қам бўлиши ва *F* фигураниқ биттаси биттаси нуқталари талаб этилган хоссага эга бўлмаслиги ҳам мумкин.

F фигура хоссалари кўрсатилад нуқталарнинг туплами бўлиши учун унинг ҳар қандай нуқтаси масала шартини бе-

рилган хоссага эга бўлиши ва ўша хоссага ҳамма нуқталар P фигурада ётини шарт ёки F фигурага қарашли бўлмаган нуқталар масала шартда кўрсатилган хоссага эга бўлмаслиги ва ва бу хил хоссага эга бўлмаган нуқталар F фигурада ётмаслиги керак.

Шунинг ҳам эслатиб ўтиш зарурки, маълум хоссага нуқталарнинг қандай фигурага қарашли эканлигини топиш аниқ пайтида, бу фигурага тегишли нуқталарнинг масала шартда берилган хоссага эга эканлигини аниқлаш эси исбот пайтида бажарилади.

13-§. В. АСОСИЙ НУҚТАВИЙ ТЎПЛАМЛАР

30- масала. (I нуқтавий тўплам). *Тегишнинг берилган нуқтадан маълум масофада ётувчи нуқталарнинг нуқтавий тўпламини топинг.*

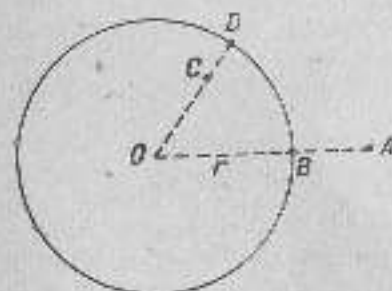
Изоламувчи нуқтавий тўплам берилган O нуқтага марказ қилиб берилган r кесмага тенг радиус билан қизилган айлана бўлади, чунки таърифига кўра, айлананинг ҳамма нуқталари бир нуқтадан бир хил масофада ётади; айланада ётмаган ҳеч қандай нуқта бу хоссага эга эмас (43- чизма). Ҳақиқатан, (O, r) айланадан ташқарида ётувчи ҳар қандай A нуқта учун $OA = OB + BA > r$, айлана ичида ётувчи ҳар қандай C нуқта учун

$$OC = OD - CD = r - CD < r.$$

бўлиб, A ва C нуқталар кўрсатилган хоссага эга эмасдир¹.

Шундай қилиб, айлананинг таърифини берамиз.

Тегишнинг бирон O нуқтадан маълум r узоқликда ётган нуқталари тўпламига шу O нуқтадан r радиус билан қизилган айлана деб аталади.



43- чизма

Толдириқлар

I. Берилган айлана радиуслари r нуқталарнинг нуқтавий тўпламини топинг.

II. r радиусли айланадан α масофада ётувчи нуқтавий тўпламини топинг.

III. A нуқтадан α масофада, B нуқтадан эса β масофада ётган нуқталарни топинг.

IV. Берилган айлана радиусларини, маълум нисбатда ички ва ташқи равишда бўлувчи нуқтавий тўпламини топинг.

¹ Маркази O нуқтада ётиб, радиуси r кесмага тенг айланани қисқача (O, r) ёки $O(r)$ орқали кўрсатилади.

V. Берилган нуқтадан ётувчи бир хил радиусли айланалар марказларни тўпламини топинг.

VI. Умумий $BC = a$ асосга ва берилган $AB = c$ би томонга эга бўлган $\triangle ABC$ нуқтавий тўпламини топинг.

VII. Умумий a асосга ва тенг m медианаларга эга бўлган $\triangle ABC$ нуқтавий тўпламини топинг.

VIII. Берилган айлананинг тенг катарекасини маълум нисбатда ички ва ташқи равишда бўлувчи нуқтавий тўпламини топинг.

IX. A нуқтадан B нуқта орқали ётувчи тўғри чизиларнинг проекцияларини тўпламини топинг.

31- масала. (II нуқтавий тўплам.) *Берилган тўғри чизилардан бир тарафда ва унда берилган масофада ётувчи нуқталарнинг нуқтавий тўпламини топинг.*

Ички. Берилган MN тўғри чизилда ихтиёрий $A_1, A_2, \dots, A_n$ нуқталарни белгилаймиз, сўнгра бу нуқталардан MN га перпендикуляр қилиб, кўрсатилган тарафда тўғри чизиллар тўпламини (44- I чизма); шундан, бу перпендикулярларда r кесмага тенг ушбу кесмаларни ажратамиз:

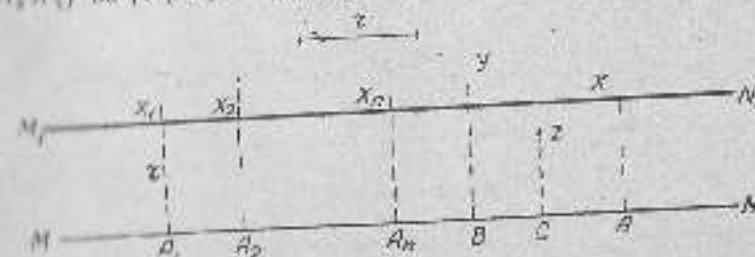
$$A_1X_1 = A_2X_2 = \dots = A_nX_n = r. \quad (1)$$

Натижада MN тўғри чизилнинг берилган тарафда $X_1, X_2, \dots, X_n$ нуқталар ҳосил бўлади.

Бу нуқталар, исалитишга кўра, масаланинг талабига жавоб берса ҳам, улар изоламувчи нуқталарнинг ҳаммаси эмас; бундай нуқталарнинг ҳаммасини бу йўл билан топиб тутатиб бўлмайди.

Бунга уларнинг ҳаммасини ўз ичига олувчи (яъни, берилган хоссага эга бўлган ҳамма нуқталар тўпламидан иборат) геометрик фигуранинг топини керак. (2) нуқталарнинг MN тўғри чизилга нисбатан жойланишлари уларнинг MN га параллел бўлган M_1N_1 тўғри чизилга қарашли эканлигидан дарак берсада, бунинг исботлаш талаб қилинади. Исботни қуйидаги [3]да оливи бажариш мумкин.

MN тўғри чизилнинг берилган тарафда (юқорида айтилган йўл билан) X_1 ва X_2 нуқталарни топиб, уларни тўғри чизил орқали туташтирамиз (44- I чизма). Исалитишга кўра, $(A, X_1) \perp (A, X_2)$ ва $|A_1X_1| = |A_2X_2| = r$, шу сабабли $(X_1, X_2) \perp (MN)$



44- I чизма

булади. MN тўғри чизиқда иккиёрий A_0 нуқтадан (MN) га перпендикуляр ўтказиб, бу перпендикулярда $|A_0 X_r| = r$ кесма ажратамиз. Исраишига кўра,

$$(A_1 A_2) \perp (A_0 X_r) \text{ ва } |A_1 X_r| = |A_2 X_r| = r,$$

шу сабабли

$$(X_1 X_2) \perp (MN).$$

Битта умумий X , нуқтага эга бўлган $X_1 X_2$ ва $X_3 X_4$ кесмалардан ҳар бири MN тўғри чизиққа параллел бўлгани учун X_1, X_2, X_3, X_4 нуқталар шу MN тўғри чизиққа параллел бўлган $M_1 N_1$ тўғри чизиқда ётади, чунки X_2 нуқтадан MN га параллел қилиб биттагина тўғри чизиқ ўтказиш мумкин. Демак, берилган хоссага эга бўлган нуқталар MN тўғри чизиққа параллел ва ундан берилган тарафда маълум масофада ётувчи $M_1 N_1$ тўғри чизиқда ётади.

Энди топишган $M_1 N_1$ тўғри чизиқнинг ҳар қандай нуқтаси MN тўғри чизиқдан, маълум r масофада ётишини исбот қилиш керак.

Бунинг учун $M_1 N_1$ тўғри чизиқнинг иккиёрий X нуқтасидан MN тўғри чизиққа $X A$ перпендикуляр тушириб, $|XA| = r$ эканлигини исбот қилиш kifoya (44- I чизма). Исраишига кўра, AX билан A, X_1 кесмалардан ҳар бири MN тўғри чизиққа перпендикуляр бўлгани учун $(AX) \perp (A_1 X_1)$. Бундан ташқари, $(M_1 N_1) \parallel (MN)$ бўлгани учун параллел тўғри чизиқлар билан кесилган параллел тўғри чизиқлар кесмаларининг тенглиги ҳақидаги теоремага асосан, $|AX| = |A_1 X_1| = r$ бўлади.

Хулоса. Берилган тўғри чизиқдан бир тарафда ва маълум масофада ётувчи нуқталар тўплами берилган тўғри чизиққа параллел ва ундан маълум масофада ётган аниқ бир тўғри чизиқдир.

Бундан қубилати умумийроқ хулоса келиб чиқади: берилган тўғри чизиқдан маълум масофада ётган нуқталар тўплами шу тўғри чизиқдан икки тарафда унга параллел ва маълум масофада жойлашган икки тўғри чизиқдан иборат (44- II чизма).

Топшириқлар

I. Берилган тўғри чизиққа трибувчи икки радиусли аймаллар марказларининг ўққанай тўпламини топинг.



44- II чизма

II. Умумий асосга ва тенг радиуслига эга бўлган учбурчлар ушарининг нуқтавий тўпламини топинг.

III. Берилган AB тўғри чизиқ шундай нуқталар топинг, улар берилган CD тўғри чизиқдан берилган E масофада ётсин.

IV. Берилган AB тўғри чизиқдан a масофада ётиб, берилган CD тўғри чизиқдан b масофада ётувчи нуқталарни топинг.

V. Ҳазро нисбатининг AB ва CD тўғри чизиқлардан берилган масофада ётувчи нуқталарни топинг.

VI. Берилган аймалда шундай нуқталар топинг, улар берилган тўғри чизиқдан берилган масофада ётсин.

VII. Учбурчнинг икки ён томонига шундай нуқталар топинг, улар учбурчнинг асосидан маълум масофада ётсин.

VIII. Асоси, унга ёпишган бир бурчаги ва баландлиги берилган учбурчни топинг.

IX. Асосга ёпишган икки бурчаги ва баландлиги берилган учбурчларни топинг.

32- масала. III нуқтавий тўплам.) Текисликда берилган икки нуқтадан тенг узоқлашган нуқтавий тўпламни топинг.

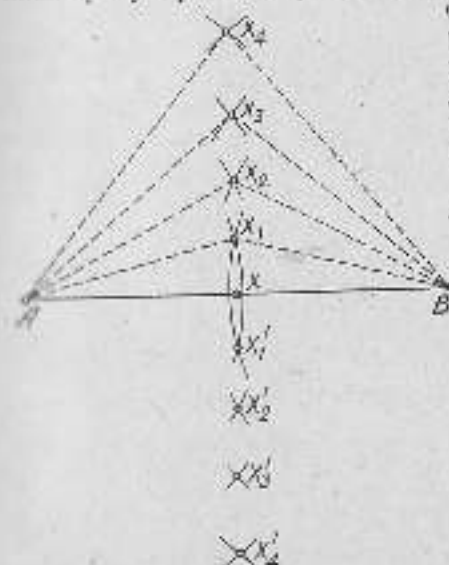
Масаланинг шартини қаноатлантирувчи нуқталарни топиш масаласида берилган A ва B нуқталарни марказ қилиб, ихтиёрий (декин бир хил) радиусли икки ёл ўтказсак, улар кесишиб X_1 ва X_2 нуқталар ҳосил қилади (45- I чизма). Бошқа радиуслар олиб, бу ишни яна бир неча марта такрорласак, қизма текисликда $X_3 (X_2'), X_4 (X_3')$ ва х. к. бир хоссага эга бўлган муфт-муфт нуқталар ҳосил бўлади; булардан фақат ластлаб-ниларини олиб, ушбу нуқталар қаторига эътибор қиламиз:

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \dots \quad (1)$$

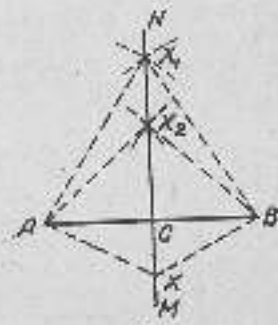
Биз бундай нуқталарнинг ҳаммасидан тузилган фигурани топишимиз керак.

45- I чизмада топишган $X_1, X_2, \dots$ нуқталарнинг жойла-нишлари уларнинг бир тўғри чизиққа қаратили эканлигидан ва бу тўғри чизиқ эса маълум AB кесманинг ўртасидан унга перпендикуляр бўлаб ўтишидан дарак берилди, лекин бу ҳақиқатни қатъий равишда ис-ботлаш талаб қилинади.

Бунинг учун худди юқори-даги усул билан X_1 ва X_2 нуқ-



45- I чизма



45- II чизма

тавлари тоғиб (45- II чизма), бу нуқталардан MN тўғри чизик ўтказиб ва унинг AB кесма билан кесилган нуқтасини C орқали белгилаб, натижада $\triangle AX_1C \cong \triangle BX_1C$ эканлиги иннов ҳисси қилиш кифой.

Ясаинишча, $|AX_1| = |BX_1|$ ва $|AX_2| = |BX_2|$ бўлса, X_1, X_2 эса умумий томон бўлган учун $\triangle AX_1X_2 \cong \triangle BX_1X_2$ дур. Бундан $\angle AX_1C \cong \angle BX_1C$ лги маълум бўлади. Иккитадан темишлари ва улар оралидаги бурчакларнинг текташидан $\triangle AX_1C \cong \triangle BX_1C$ бўлади.

Бундан қуйидагилар маълум бўлади:

$$|AC| = |BC| \text{ ва } \angle CX_1 = \angle CX_2 = 90^\circ. \quad (2)$$

Демак, MN тўғри чизик AB кесмага ўрта перпендикуляр экан. $|AX_1| = |BX_1|$ ва $|AX_2| = |BX_2|$ радиуслар ихтиёрий олинганлиги учун X_1, X_2 нуқталарини юқорида айтилган хосага ата бўлган ихтиёрий нуқталар деб қарай оламиз.

Демак, кесманинг икки учидан тенг узокликдаги нуқталар шу кесманинг ўрта перпендикулярида ётади.

Энди MN ўрта перпендикулярида ётувчи ҳар қандай нуқтанинг AB кесма учларидан тенг масофага эканлиги кўрсатамиз.

MN ўрта перпендикулярининг ихтиёрий X нуқтасини олиб, уни берилган кесманинг икки учи билан туташтирамиз ва хоса бўлган AXC ва BXC учбурчакларга эътибор қиламиз (45- II чизма): мос катетлари ёзаро тенг бўлади учун бу тўғри бурчакли учбурчаклар ўзари тенг, яъни

$$|AX| = |BX|.$$

Демак, кесманинг ўрта перпендикуляридаги ҳар қандай нуқта ўша кесманинг икки учидан тенг масофага ётади.

Хулоса. Кесма учларидан тенг узокликда ётган нуқталар тўғрисида ўша кесманинг ўрта перпендикуляридан иборатдур.

Тоғириқлар

I*. Кесманинг икки учидан тенг хосадаги нуқталар унинг ўрта перпендикулярида ётувчи ва бундан йўқлар бўлган ҳан иббат димам.

II. Кесманинг ўрта перпендикулярида ётувчи нуқта у кесманинг учларидан тенг масофага эканлиги иббат қилин.

III. Берилган икки нуқтадан ўтувчи айланалар марказлари тўғрисида топил.

IV. Умумий хосага ата бўлган тенг ёлки учбурчаклар учлари бўлганлиги топил.

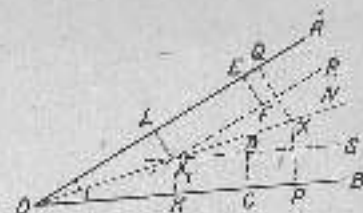
V. Учлари тенг ёлки учбурчакнинг ёки томонларидан ётиб, учбурчак хосага параллел бўлган кесманинг ўрта перпендикуляридаги нуқтасини топил.

VI. Параллел катетлар бўли нуқталаридан тўғрисида топил.

VII. Умумий хосага ата бўлган учбурчакларга тилик тегишган айланалар марказлари тўғрисида топил.

VIII*. Икки тенг айланани тилик (ёки икки) томондан ўрнатиш айланалар марказлари тўғрисида топил.

13. Учбурчак текташидан унинг учлари билан тенг узокликдаги нуқтани топил. Берилган икки нуқтадан тенг узокликда ва берилган тўғри чизикдан берилган масофага ётувчи нуқталарни топил.



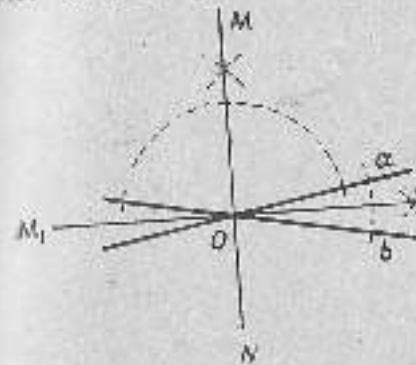
45- I чизма

14. масала. (IV нуқтасини топил.) Берилган бурчак ичидан унинг томонларидан тенг узокликда ётувчи нуқталар тўғрисида топил.

Ичиш. 45- I чизмадаги AOB бурчак ичидан унинг томонларидан тенг узокликдаги бирор нуқтани топил учун бурчакнинг томонларидан ихтиёрий (ёки тенг) масофада (OS) ва (OR) ва (OA) тўғри чизиклар ўтказамиз, уларнинг кесилувиши (PR) ва (QA) тўғри чизиклар ўтказамиз, уларнинг кесилувиши X нуқта берилган бурчак томонларидан тенг узокликда ётади, яъни бу нуқта масофага берилган кесмага ётади.

Масалада берилган шу хосага ата бўлган ҳамма нуқталар тўғрисида иборат геометрик фигурани топил учун O ва X нуқталардан ON иур ўтказиб, X нуқтадан бурчак томонларидан X, K ва X, L перпендикулялар тутирамиз. Хоса бўлган тўғри бурчакли OKX ва OLX учбурчакларнинг биттадан катетлари бир-бирига тенг $(|KX| = |LX|)$ ва гипотенузлари умумий бўлганлиги учун улар ёзаро тенгдур.

Бундан $\angle KOX = \angle LOX$, яъни ON тўғри чизик берилган бурчакнинг биссектрисаси эканлиги маълум бўлади. Демак, бурчак ичидан унинг томонларидан тенг узокликдаги ҳар қандай нуқта шу бурчакнинг биссектрисасида ётади. ON нуқтани ҳар қандай нуқтадан берилган хосага ата аилинган иббат қилиш учун ON биссектрисасининг ихтиёрий X нуқтасини олиб, ундан берилган бурчакнинг томонларидан XP ва XQ перпендикулялар ўтказамиз. Хоса бўлган тўғри бурчакли OKP ва OKQ учбурчакларнинг биттадан ўткир бурчакли бир-бирига тенг ва гипотенузлари умумий бўлганлиги учун $|PX| = |QX|$ бўлади.



45- II чизма

Демак, бурчакнинг биссектрисасида ётган ҳар қандай нуқта у бурчак томонларидан тенг узокликда бўлади.

Хулоса. Бурчак томонларидан тенг узокликда ётувчи нуқталар тўғрисида ўша бурчакнинг биссектрисасидур.

Топшириқлар

- I. Кесмишувчи икки тўғри чизик тегишсизда ва ўзардан тегиш узоклашган ҳудудда нукталар тўпламини топиш (46-1 чизма).
- II. Кесмишувчи икки тўғри чизикда ўринлиги айланалар марказлари тўпламини топиш.
- III. Бурчак томонлари билан кесмишувчи, тегиш нурларлар ажратувчи айланалар марказлари тўпламини топиш.
- IV. Ўзардан тегишсизликка эришги учун асос томонидан тегиш узоклашган нукталарни топиш.

34- масала. (V нуктавий тўплам.) *Параллел икки тўғри чизикдан тегиш узоклашган нукталар тўпламини топиш.*

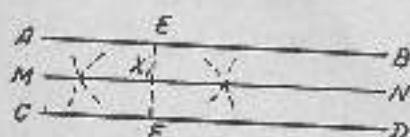
Ичиш. Талаб этилган X , нукталарни қуйидагича топиш мумкин (47- чизма): берилган параллел тўғри чизикларни ихтиёрий учинчи тўғри чизик билан кесмиштириб, унинг параллел тўғри чизиклар орасида қолган кесмасини тегиш иккига бўламиз. Бу кесманинг урта нуктаси X , берилган тўғри чизиклардан тегиш масофаси ётади (сибаб?).

Бундай ҳоссага эга бўлган нукталарнинг қандай фигурани эшитишни билгиз учун 31- масаладаги йўлни ишлатиб, MN тўғри чизикни ҳосил қиламиз. Бу MN тўғри чизикдаги ихтиёрий бир X нуктанинг масалада берилган ҳоссага эга бўлишини исбот қилиш осон (буни бажаринг).

Хулоса. Ўзаро параллел икки тўғри чизикдан тегиш узоклашган нукталар тўплами бу тўғри чизикларнинг тегишган икки нуктасини туташтирувчи кесма ўртасидан икки тўғри чизикларга параллел қилиб ўтказилган тўғри чизикдир.

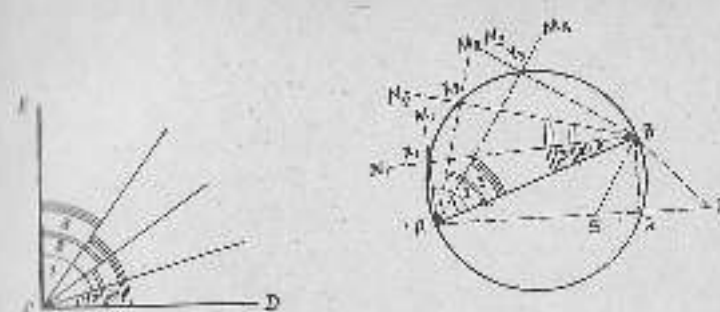
Топшириқлар

- I. Параллел икки тўғри чизикда ўринлиги айланалар марказлари тўпламини топиш.
- II. Параллел икки тўғри чизикдаги марказларнинг масофаси осонга тегиш бўлган нукталар тўпламини топиш (яъни билан h та тўғри чизиклар берилган бўлганда).
- III. Ўзаро параллел икки тўғри чизикда ётадиган кесмалар ўртасидаги нукталарни топиш.
- IV. Шундай нукталар тўпламини топиш, бу нукталарнинг маркази ҳудуд берилган рақис билан кесмишувчи айланалар берилган тўғри чизикдаги нукталарнинг ўртасидан ўтказилган (31- масала).
- V. Параллел икки тўғри чизик билан кесмишувчи, тегиш нурларлар ажратувчи айланалар марказларининг тўпламини топиш.



47- чизма

35- масала. (VI нуктавий тўплам.) *Шундай нукталар тўпламини топиш, бу нукталарнинг ҳар биридан берилган кесма тўғри бурчак остида кўринсин.*



48-1 чизма

Бисор M нукталар AB кесманинг икки учига қарашдан ҳосил бўлган MA ва MB нурлар „қараш нурлари“ деб, M нукта ва „қараш нуктаси“ деб аталади; қараш нурлари орасида ҳосил бўлган $\angle AMB = \alpha$ қараш бурчаги“ дейилади. Бу ҳолда „ AB кесма M нуктадан α бурчак остида кўринсин“ деб айтилади.

Қараш бурчаги фақат 0° билан 180° оралиғида ўзгариши мумкин; қараш нуктаси кесмадан узоклашган сари қараш бурчаги кичраёт боради ва аксинча, қараш нуктаси кесмага яқинлашган сари қараш бурчаги катталаш боради.

Масала қуйидагича ечилади.

Ечиш. Масалада айтилган ҳоссага эга бўлган нукталардан бир нечасини топиб кўрайлик. Бундан, учун учлари A ва B нукталарда (AB кесманинг бир тарафида) жойлашган шундай икки ўткир бурчак тасвирланган, уларнинг асосидан 90° ва AB кесма уларнинг ўхшаш томон бўлсин. Бу бурчакларнинг иккинчи томонлари ўзаро кесмишувчи, натижада нукталардан биридан ҳосил қилади. 48-1 чизмада:

$\angle 1$ билан $\angle 1'$ нинг AM_1 ва BN_1 томонлари кесмишувчи нукталар, $\angle 2$ билан $\angle 2'$ нинг AM_2 ва BN_2 томонлари кесмишувчи X_2 нукталар, $\angle 3$ билан $\angle 3'$ нинг AM_3 ва BN_3 томонлари кесмишувчи X_3 нукталар ҳосил қилади ва ҳоказо.

$X_1, X_2, X_3, \dots$ нукталар масаланинг талабига жавоб беради, шунки асосига кўра

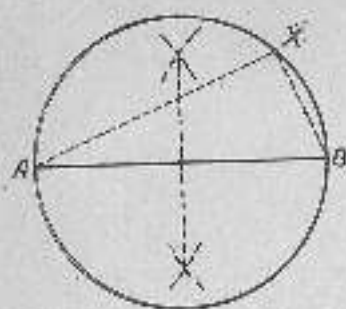
$$\hat{1} + \hat{1}' = 90^\circ, \hat{2} + \hat{2}' = 90^\circ, \hat{3} + \hat{3}' = 90^\circ, \dots$$

бўлгани учун:

$$\angle X_1 B = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 1') = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

ва худди шунга ўхшаш

$$\angle X_2 B = \angle X_3 B = \dots = 90^\circ.$$



48-II чизма

нопики исбот қилганимиз. Бундан ушун айлананинг иккинчиди X нуқтасини олиб, уни берилган кесманинг A ва B унлари билан туташтирамиз. Ҳосил бўлган AXB бурчак диаметрга тиралувчи икки чизилган бурчак бўлиб, бундай бурчакларнинг тўғри бурчак эканлиги олдиндан маълум. Демак, X нуқтадан AB кесма тўғри бурчак остида кўринади.

Шундай қилиб, айлананинг (A ва B нуқталаридан бошқа) ҳамма нуқталари масалада берилган ҳосилга эга.

Хулоса. Берилган AB кесма тўғри бурчак остида кўринадиган нуқталар тўлажи берилган кесмани диаметр қилиб чизилган айланадан айбатдир.

Эслатма. Тошланган тўлажга берилган A ва B нуқталар кирмайди, чунки бу нуқталардан AB кесма 90° ли бурчак остида кўринмайди.

Тошмириқлар

- I. Гипотенузаси берилган тўғри бурчакли учбурчак исбот (масала нонта сонида эга).
- II. Ушундай гипотенузаси эга бўлган тўғри бурчакли учбурчаклар унларининг нуқталарини тўлажга тошлар.
- III. Тошланган нуқтага маълум нуқтадан ўтувчи тўғри бурчакли унларининг нуқталарини тўлажга тошлар.
- IV. Келгуси масалада олинган тўғри бурчакли нуқталарни хўйлаштириш (аниқлаш) масалани ечилиш:

- a) Эришган кесмага кўралиш бй эришган (масала нонта сонида эга).
- b) Берилган нуқталарни кўралиш эришган (масала нонта сонида эга).

35-масала. (VII нуқтавий тўлаж) Шундай нуқталарнинг тўлажи тошланган, берилган кесма бу нуқталарнинг ҳар биридан берилган α бурчак остида кўринган.

Анализ. Масалада кўралиш нуқталардан бир нечтасини олиб, кўралиш. Бундан ушун α ни 180° га тўлдирувчи бурчакни иккинчиди икки бўлажга бўламиз.

Фараз қилайлик, бундан $\angle 1$ ва $\angle 2$ ҳосил бўлсин (49-I чизма). Энди AB кесма олиб, унинг бир тарафига бу бур-

чакларга тенг қилиб (35-масалада-
га ушун билан) $\angle BAA_1 \leq \angle 1$ ва
 $\angle AAM_1 \leq \angle 2$ ни қосимиз (49-II
чизма). Бу икки бурчакнинг AM ва
 BM томонлари қесилган нуқта X_1
бўлади.

X нуқта масаланинг талабига жа-
воб берибди, чунки асосини кўра

$$\angle AX_1B = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) = \alpha$$

бўлади. Ушун X_1 нуқтадан AB кесма берилган α бурчак ости-
да кўринади. Шу йўл билан $X_2, X_3, X_4, \dots$ нуқталарни то-
шамиз. Лекин, бундай нуқталарнинг ҳаммасини бу йўл билан
тошиб тутатиб бўлмайди.

Энди тошланган $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots$ нуқталарнинг қандай фигу-
рага қарашли эканлиги аниқлайлик.

Масаланинг талабига жавоб бериш нуқталардан биттаси-
ни, масалан, X_1 нуқтани кўралишга йўл қилиш толиб, уни
чизмада кўралиш қўямиз. Бу қилинган ишнинг натижаси

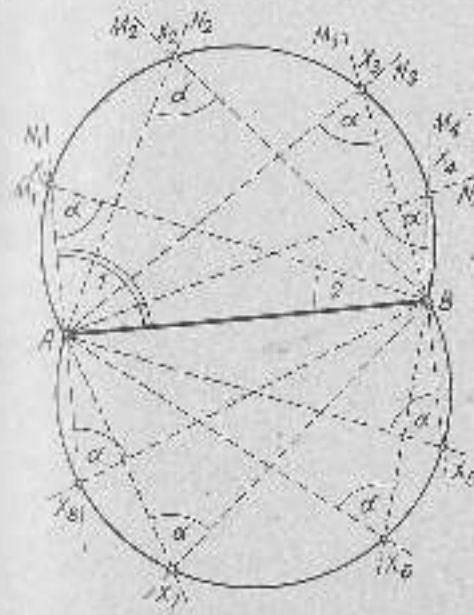
$$\angle AX_1B = \alpha$$

бўлади (49-III чизма).

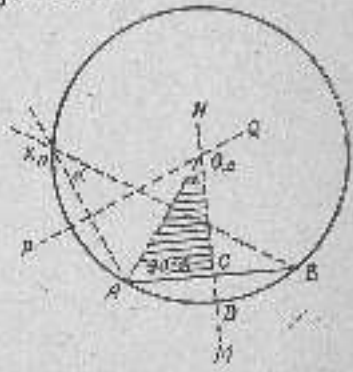
Ҳосил бўлган AX_1B учбурчакка ташқи айлана ҳам чизиб
кўралиш (AB ва AX_1 кесмаларнинг

ташқи айлана ҳам чизиб
ўрта перпендикулярлари
қесилган O_1 марказига
 O_1A радиус билан айлана
чизамиз).

AB кесманинг MM
ўрта перпендикулярини
тошган осол бўлса-да, AX_1
кесманинг ўрта перпенди-
кулярини PQ ни тошган
қариндор (чунки бундан
ушун айнал X_1 нуқтани



49-I чизма



49-III чизма

Уш. Южорда кўрилган 36-матанни кутуб охиридаги кўрсатмалардан фойдаланиб, ани билида йўллар билан ҳам етиб.

М.Н. Бердугин бурчак ва кесканинг ҳайматларига қараб, қишлоқчи метрик ўринига турлича ўғарилган ташкирлар,

14-§. НУҚТАВИЙ ТУПЛАМЛАРНИ ТОПИШГА ДОИР МАСАЛАЛАР ВА
УЛАРНИ БОСҚИЧЛАБ ЕЧИШ

Юқорида кўриб ўтилган I—VII геометрик ўринларни шартли равишда асосий нукталар тўпламлар деб айтади мумкин. Бундан кейин ўрганиладиган нуктавий тўпламлар эса асосий нуктавий тўпламлардан бхрига келтирилади ёки уларнинг бир нечасидан фойдаланиб топилади.

Нуктавий нүлгэмээрх тооцог дээр маслалар өгнөдөг, күүнчээ, су нуктавий нүлгэмий тоонг маслаларын цэгээр бүтээгдсэн нуктавий нүлгэмий тоонг маслаларын келтгэнэ мүн-кин булалд. Нунга берилгэн хосаага эгэ булган нукталарын өдгөдөн махуу булган хосаларын бировтасга эгэлгэнэ күүсгэнэ орқал эршилдэг.

Бундай масалаларни босқичлаб ечилиш муҳим методик аҳамиятга эга бўлгани учун бу масалага ҳам бир оз тўхтаб ўтиш зарур деб тоқамиз.

Еңбектің анализі босқынның бұндай бажарып мүмкін: ма-
салааның партияда айтылған хоссага эга булган нуктадардан
бирортасыни, масала, М нуктани тошшди деб фараз қилиб,
уни тахминан белгилеп кўйиш (ёки уни ҳақиқатда ясайми).
Сўнгра бу нуктанинг бирин F фигурата қарашлигини кўр-
сатувчи янги β хоссаени топыми.

Анализинг энг муҳим ижодий дайти ҳам M нуқтанинг аниқ шун янги хоссаи нуқтадан иборат. Бу билан 2 хоссаи M нуқтанинг P фигурала ётиши аниқланган бўлади.

а хоссаан ҳар бир нукта ҳақда ҳам шундай фикр юритиш
муҳим; бўлгани учун бундай хоссаан ҳамма нукталар шу F
фигурада ётади деган ҳудудсизга келимиз.

Якши босқиччи ҳаёлатда айтилган α ҳоссаги M нуқта-
нинг анализда топилган янги β ҳоссаги ёрдамида F фигураши
маълум қондалар бўйича яшадан иборатдир. Лекин, бу F фи-
гураши изланувчи нуқтавий тўйлам деб ҳақиқий ҳолати чиқара
олмаймиз, чунки унинг ҳамма нуқталари янги β ҳоссага эга
бўлса-да, уларнинг баъзилари масъалада берилган α ҳоссага
эга бўлмастлиги мумкин. Буни аниқлаш учун иккинчи ҳосса-
чи қараш зарурияти турилади.

Исботлаш босқичида — қилган фигуранинг ҳамма нукталари масалада айтидган хоссаса эга бўлишини ёки унинг қандай нукталари шу а хоссаса эга бўлжасиники исбот қиламиз. Бунинг учун F фигуранинг h нукталарини

Бунинг учун F фигуранинг ихтиёрий M_1 нуқтасини олиб, унинг берилган ҳоссага эгаллигини исбот қилиш керак. Шунинг билан, F фигуранинг ҳамма нуқталари α ҳоссага эга экан.

және „ P фигура излаудың нүктәвий түрләм экан“, деб хулоса
берләштерелә.

Алар F фигурининг баъзи нуқталари α хоссага эга эмасли-
ги аниқланса, улар топилигим нуқтавий тўпламда ётмайди (яъни
шундай нуқталар тўплами нуқтавий тўпламга кирмайди).

бу босқични баъкаришда F фигуранинг ҳар қандай M нуқта-
син масофалда берилган x ҳоссага эгаллигини исботлаш ўрнига
 x ҳоссага эга бўлмаган ҳар қандай M нуқтанинг F фигурада
эгаллигини исботлаш ҳам мумкин.

[illegible]

Юқориди айтилганлар билан тўғрисида қуйидаги масала-
ларнинг ечилишидан кўриниш мумкин.

87-масаала. (VIII луктявий тўлғам.) Берлаган нукта-
ни берлаган тўғри чизик нуқталари билан туташтирув-
чи кичик тегишсиз тўғраликка тоғинг.

Айталик. Берилган A нуктани берилган PQ түзгү чизик-
нинг бирор B нуктасы билан туташтирармыз да (50-чизми) AB
кесилменин уртасы M нуктаны топармыз;

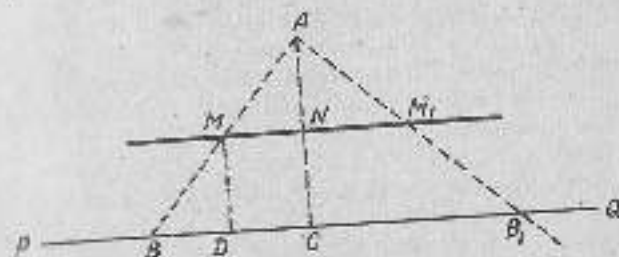
$$[BAF] = [MA]. \quad (1)$$

Маъала шартини қаноатлантирувчи M нуктанинг AB кес-
мадан бошқа яна қандай қизиқча ёғинили қўрсатувчи янги
көрсаткичи қидирамиз: DO ва BO қизиқча AC ва MD пер-

А ва М нуқталардан PQ тўғри чизиққа AC ва MD перпендикуляр ўтказамиз. M нуқтадан $(MN) \perp (PQ)$ ни ҳам ўтказайлик. BAC учбурчакка $[MD]$ ўрта чизик бўлгани учун:

$$|MD| = \frac{1}{2} |AC|, \quad (2)$$

Бу эса M нустанинг берилган PQ тўғри чизиқдан A билан бир тарафда ва (PQ) дан $\frac{1}{2}|AC|$ жарафда ётагани билди-



50-1 52542

рөди (II нуктавий түрләм). Бу M нуктаның яңи A хосса-
дир. Шулай қилиб, күрсатылган хоссага эта бўлган нукта-
түрләмнің хосси II нуктавий түрләмнің топишга олиб келат.
Ясап. Бу MA түри чизикни түрән йўлар баян чизик
маглан, AC перпендикулярның ұртасы бўлган A' нуктадан
 PQ түри чизикке параллел түри чизик ұтказыш мумкин (Әх)
 A нуктаны PQ түри чизикнің иктиёрий икки нуктасы билан
тулаштырувчи икки кесме ұртасыдан түри чизик ұтказыш
мумкин).

Небәт. Ясап босқисыда чизылган MA түри чизикнің
ҳар қандай M нуктасы мәсәлада берилган хоссага әсәлигиш
исбатлаш керек.

Бунинг учун MA икки иктиёрий M нуктағиш олиб, AM ,
түри чизик ұтказыш; бу чизик PQ түри чизикни B нук-
тада кесип. M нукта AB кесмининг ұртасы экәлини, яғни

$$|B, M| = |M, A|$$

экәлини ибәт қилиш керек.

Ясапшита қўра, $|AM| = |AC|$ бўлиб, $(MM, A) \perp (PQ)$ бўлган
учун, $|M, A| = |B, M|$ бўлади. M нукта MA түри чизикнің
иктиёрий нуктасы өди. Шунинг учун MA түри чизикнің ҳар
қандай нуктасы ҳәм мәсәлағиш тадағиш явоб беради.

Хулоса. Берилган нуктаны берилган түри чизикнің
ҳамма нукталари билан тулаштырувчи кесмалар ұртасы-
риниң топишга, берилган нуктадан берилган түри чизик-
қа туширилган перпендикулярның ұртасыдан берилган
түри чизикке параллел қилиб ұтказылган түри чизикдир.

Тошшириқлар

- I. (VIII Азхулавий түрләм). Бир нуктадан тикүрәт ва берил-
ган түри чизик билан тәғи иккаға бәрләгән кесмалар ұртасының түр-
лини топиш.
- II. (VII А нуктавий түрләм). Берилган нуктадан берилган түри
чизик нукталари билан тулаштырувчи кесмаларның мағлум тәғи мәсәлада
тәғиш мәғлуми билән бәрләш нукталар түрләмнің топишга.
- III. Берилган нуктаны берилган түри чизикнің түрән түрләмдегән
дәғи тулаштырувчи кесмалардан ҳар бирини тәғи үш бәрләш (әх) үмәкш
иктиёрий а та тәғи бәрләш) бәрләш нукталарының түрләмнің топишга.

38-мәсәла. (IX нуктавий түрләм.) Берилган айлана-
ға өди түри чизикке уяқ мәғлум нуктасыда уяқуш
айланалар марказлари түрләмнің топишга.

39-мәсәла. (X нуктавий түрләм.) Берилган айланаға
уяқуш мәғлум радиусли айланалар марказлариниң гео-
метрик түрләмнің топишга.

- Берилган:
- 1) (O, R) айлана,
 - 2) R_1 радиус.

Анализ. Берилган айлана
айланалар (O, $|OT| = R$) ай-
лана бўлиб, T нуктада уяқ тап-
қан уяқуш айлана (X_1, R_1) дөб
фараз қилайш. Мағлумки, бир-
бириниң тәғиш уяқуш икки ай-
лана радиуслариниң йәғиңдәш
бәрләш айланалариниң марказлари
бәрләш мәсәлада тәғиш.
Шунга әсәли қуяйлаш тәғиш-
ли бәз әлишга.

$$|OT| + |TX_1| = R + R_1 = |OX_1|. \quad (1)$$

Бу тәғишдәш X нуктаның берилган O нуктадан уяқ
 $|OX_1| = R + R_1$ мәсәлада бәрләш бәрләш, бу әх X_1 нукта-
ның O марказдан $R + R_1$ кесмига тәғи радиус билан уяқуш
айланада бәрләш күрсатыш (I нуктавий түрләм).

Берилган айланаға икки уяқуш айлананиң маркази Y_1
нуктадан ибарат дөб фараз қилиб (31-мәсәла), юқарыдағи қайи
нуктамағларда сәғи Y_1 нуктаның қуяйлаш тәғиш қароат-
лантарини мағлум бўлади.

$$|OT_1| - |TY_1| = R - R_1 = |OY_1|. \quad (2)$$

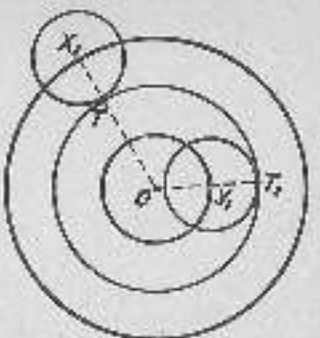
(31-мәсәла $R_1 < R$ олишган.)
Бу тәғишдәш Y_1 нуктаның O марказдан $OY_1 = R - R_1$ кес-
мига тәғи радиус билан чизылган айланада бәрләш мәғлум бў-
лади. Дөшк, берилган айланаға (тәғиш аз икки) уяқуш R_1
радиусли ҳамма айланалариниң марказлари O марказдан $R \pm R_1$
кесмаларда тәғи радиуслар билан бәрләш икки (концентрик)
айланада бәрләш.

Тошшириқлар

- I. Бу тәғиш айланаға икки, ҳәрәлиг иктиёрий нукталар билән
берилган хоссаға әғи бәрләш ибәт қилиш.
- II. Мағлумки, шәрәлиг нуктадан тәғиш.

40-мәсәла. (XI нуктавий түрләм.) Шундай нукталар
топишга, бу нукталардан берилган айланаға
уяқуш икки уяқуш берилган кесмига тәғи бўласи.

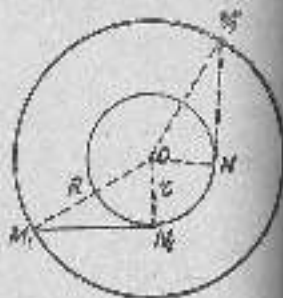
Анализ. Мәсәлада берилган хоссаға эта бўлган нукта-
дан бири M нукта дөб фараз қилайш, яғни бу нуктада
берилган айланаға ўтказыш M, V уяқуш а кесмига тәғи
бўласи (33-1-мәсәла). Берилган айланағиң O марказиш M ва
 N нуктадан билан тулаштырувчи кесми бўлган түри бурчак-
ли M, ON уяқуш қисметидән бири $|ON| = r$ ва ик-
кинчиси $|M, N| = a$ кесми бўлган учун бу уяқуш қисмет M, O
қисметуяқуш қисмет мәғлум дөб олишга. Бундан M нуктаның



31-мәсәла



52-1 707340



52-11 24749

О нуктада M_1O узокликала, яъни O марказдан M_1O радиус билан айланиб айланада ётади маълум бўлади.
Яъни, Бернстайн a ва r кесмаларини катет қилиб тўри бурчакли M_1OA_1 утбурчакни қилимиз (52-П чизма).
Бу утбурчакнинг гипотенузаси OA_1 (52-П чизма).

Бүгүнкү күндө, учурчак чыгармачы (82-П чыгарма).
 1. О маркшадан чыгармачыга радиус деб олоб, берма
 Исбот 82-П чыгарма.

Исбот, Ясылган айланмасын дар қандай нуқта масъалакни таллабса жавоб бери олишнинг исбот қилиш учун унинг иккинчи нуқтага олиб, унда айланманы AM уриққа ўтказишди ва бу уриқманинг берилган α кесканини таъриф қилишди.

Иккинчи кўра, тўғри бурчакли OM_1N_1 ва OM_2N_2 учбурчакларнинг боғлиқлиқ катетлари аз гипотенузаслари тенг бўлганих учун бу учбурчаклар ўзаро тенг. Бувадан $|M_1N_1| = |M_2N_2| = a$ эканлиги раоман.

Тоңшараклар

40Д* масала (ХП нуктага кў туролар). Шундай нукталар тўлиқ
ни қўлиниш, бу нукталардан беришган айақта беришган бунча осонда кў
рашди.

406* масала. (XII) 100 г табиғи зиркач. Берилген аймақта ортотогарк жерлерде майлы зиркач айналар жаркырауының үздіксіз то-
лануы.

Заслужа. Айлавадарыны хөсөмдөтүлүп кутулуп, утандыгы утанды-
лар ордондог бичек түз айлавадарыны хөсөмдөтүлүп кутулуп, утандыгы утанды-
сыныг бичек түз айлавадарыны хөсөмдөтүлүп кутулуп, утандыгы утанды-
ордондог бичек түз айлавадарыны хөсөмдөтүлүп кутулуп, утандыгы утанды-
Айлавадарыны хөсөмдөтүлүп кутулуп, утандыгы утанды-
Айлавадарыны хөсөмдөтүлүп кутулуп, утандыгы утанды-

41- misol. (XIV) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} = 0$ — персониклар ҳисобини бил

41- мясала, (XIV пункттави тўплами). Бир учи берилган айлана бўйича сирғаниб, 93-ўзига параллел ҳолда силжиб бориётган кесманинг иккинчи учи қизган нуқтага тўпла-
мига тўнаган.

Айвалья, А. учн (θ , r) айлана буйича сирғаниб, θ - θ зиға параллел ҳолда сикжиб бораётган кесманиң иккинчи учн

14. Чизнада кўрсатилаган B нуқта
ни фарз қилайлик. Ўзининг вази-
минини шу B нуқтанинг яна қандай-
дир бирор хоссага эга эканлигини
кўрсатинг.

бунинг учун AB кесмага парал-
лел ва унга теги қилай $|OO_1|$ кес-
мани кесайтиз.

Хосна булган AOB түртбұрышы, яғни AOB кұра, параллелограммдир. Шүнинг учуд $|O_1B| = |O_1A|$ нуктасын O_1 нуктадан r масофадан нуктанын ҳар бир өзгизият ҳақидя. Демек, B нукта O_1 марказдан r масофа бладя.

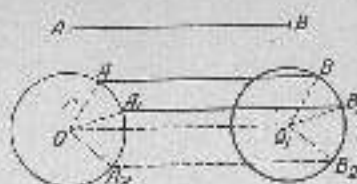
Исаш. В хуқияний ҳамаи вазиятларини ўз ичига олувчи қаддини чизиш учун берилган AB кесмага тенг ва параллел нуқта OQ_1 кесмаси чиқарилди. Сўنгра O_1 нуктадан берилган r радиус билан айлана қисмиги,

Исбот. Зикр бўлди топилган (O_1, A) айланасидаги ҳар бир нуқтанинг масофа талабига жавоб беришини, яъни бу айлананинг ҳар бир нуқтаси AB кесма B унеликни бирор айланидаги тегишлиликни анжқалитишга керак. Бунига учун айлананинг каттаири B_1 нуқтасидан O_1O кесмага ларомакка ва тенг қилиб A_1B_1 кесмани чизамиз. Сўнгра OA_1 ва O_1B_1 кесмаларни чет-данан ҳосил бўлган $A_1OO_1B_1$ тўртбурчакка диққат қиламиз. Маълумки кўра, бу тўртбурчак параллелларак, шунинг учун $|OA_1| = |O_1B_1| = r$ бўлади. Бу сеплидан A_1 нуқтанинг берилган айланада ётиши маълум бўлади. Маълумки кўра, $|A_1B_1| = |OO_1| = |AB|$. Демек, A_1B_1 кесманинг A_1 учи берилган айланада ётишадан ташқари, бу кесма берилган кесмага тенг ҳам экан, яъни топилган айлананинг ҳар бир нуқтаси масофанинг талабига жавоб беради.

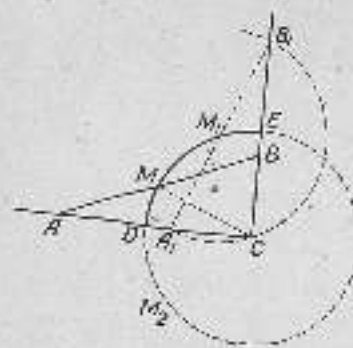
42-масада, (XV нуқтавай тўшам). Маълум узунлик-
дан кесма шуудай сийленидизи, унинг учлари тўғри
бурчак томонларида сийланади. Бу кесма бутасининг нуқ-
тавий тўлашани тўши.

Анализ. M пукта — A_8 кесманинг ўртаси ва кесманинг битта ваъини 54-1 кизмада кўрсатилган ҳолатда хберат бўл-
син. M нуқтаининг яна қандай бирир хлосага эси экантигини
аниқлабик; бунир учун M пуктаи берилган тўри бурча-
нинг C учи билан туташтириши.

Түгги бурчакли уобурчакликниң типогнуласига ўтказилган
 неллананиң хоссастига бинван $|CM| = \frac{1}{2}|AB|$. Берилган кес-
 маниң ҳамма вазиятида ҳам бу муносабат сақланадт, яъни M
 нукта C нуқтадан ўғармас $\frac{1}{2}|AB|$ масофада ётади. Демак, M



33 QUESTIONS



54-1 чизма

Точка C марказдан $|CM| = \frac{1}{2}|AB|$ радиус билан тизилган айланада.

Ислож. Берилган тўғри бурчакнинг C учига марказ қилиб берилган AB кесманинг яримга тақсимдус билан айлана тизилиши.

Толшириқ

Чизилган айлананинг берилган тўғри бурчак билан жойлашган ёни — латинча нукталар тўпламидан иборат бўлишига исбот қилиш учун бу тўғри бурчакнинг C учига тақсимдус билан берилган тўғри бурчакнинг марказида исбот қилинади.

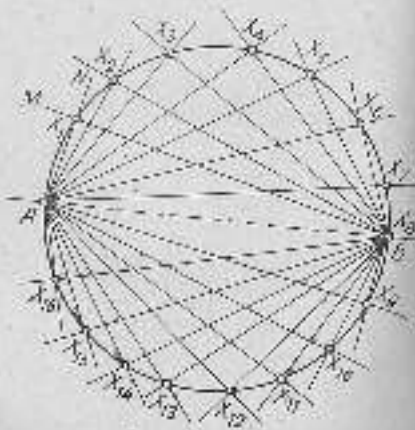
Айлананинг бурчак ташқарисидаги ёни масаланинг таълимига жавоб бермаслигини таъмин.

42A-масала. (XVI нуктавий тўплам.) Берилган A нуктадан ўтувчи тўғри чизиқларга берилган B нуктадан чиқаришган перпендикулярлар асосларининг нуктавий тўпламини топил.

Анализ. 54-1 чизмада берилган A нуктадан ўтувчи латинча бурчак билан берилган B нуктадан BM перпендикуляр ўтказсак, буларнинг кесилиш нуктаси бўлган X_1 нуктадан нуктавий тўпламининг бирига нуктаси бўлади.

А тв B нукталарни туталтириб, ҳосил қилинган ABX_1 тўғри бурчак билан қўлайлик: бу учбурчак тўғри бурчакда бўлади ва X_1 нукта унинг тўғри бурчак учига ётган учун у AB кесмани диаметри қилиб чизилган айланага тегислиги бўлади.

Агар AN тўғри чизиқдан A нукта атрафида айланатирсак, BM тўғри чизиқ ҳам ҳаракатланиб, буларнинг кесилиш нуктаси бўлган X_2 айлана бўйича ҳаракатланади (ёки A нуктадан ўтувчи тўғри чизиқлар тўплами билан B нуктадан ўтказилган перпендикулярлар тўплами кесилиш, нукталар $X_1, X_2, \dots$ нукталар тўпламининг ҳосил қилинади). Бундай нукталар тўплами масалада айтилган қопуниятга бўйсунгани.



54-2 чизма

Толшириқ

Тўғри бурчакнинг C учига тақсимдус билан берилган тўғри бурчакнинг C учига марказ қилиб берилган AB кесманинг яримга тақсимдус билан айлана тизилиши.

43-масала. (XVII нуктавий тўплам.) Берилган айлананинг берилган нуктасидан чиққан кутарлар ўрталари тўпламини топил.

Анализ. X_1 нукта берилган (O, C) айлананинг A нуктасидан чиққан бирорта AB кутарининг ўртаси бўлган (55-чизма).

Бу X_1 нуктанинг яна қандай ҳосилга эга эканлигини аниқлаш учун O марказни X_1 ва A нукталар билан туталтирсак, OX_1A учбурчак ҳосил бўлади. X_1 нукта AB кутарининг ўртаси, шунинг учун OX_1 кесма AB кутарга перпендикуляр, яъни $OX_1A = 90^\circ$ бўлади. Демак, X_1 нукта бу учбурчакнинг $OA = r$ гипотенузасини диаметри қилиб чизилган айланада ётади.

Ислож. AO кесманинг ўртаси бўлган O_1 нуктани топиб, O_1 марказдан $|O_1A| = \frac{r}{2}$ радиус билан айлана чизилиши.

Исбот. Энди AO диаметрида қўйилган айланадаги ҳамма нукталар масаланинг талабига жавоб беришига исбот қилинади.

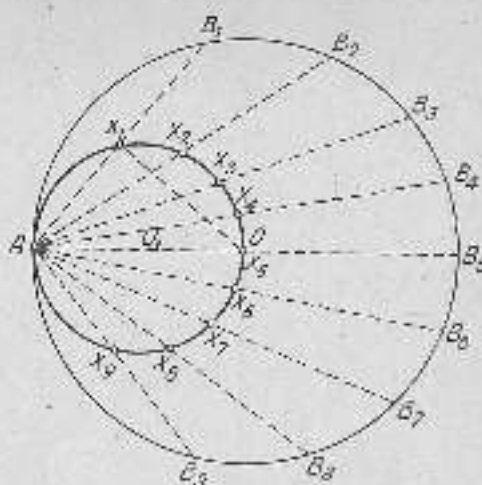
Бунинг учун айлананинг икки нуктасини олиб, бу нукталар O ва A нукталар билан туталтирсак, OX_1A бурчак, O_1 айлананинг AO диаметрига тиралган кесма чизилган бурчаклар, шунинг учун у тўғри бурчак бўлади. Бундан OX_1 тўғри бурчакнинг AB кутарга перпендикулярлиги, X_1 нукта эса AB кутарининг ўртаси эканлиги маълум бўлади.

Демак, берилган айлананинг бир нуктасидан чиққан кутарлар ўрталарининг нуктавий тўплами берилган айлана маркази билан берилган нуктани туталтирувчи кесмани диаметри қилиб чизилган айланани иборатдир.

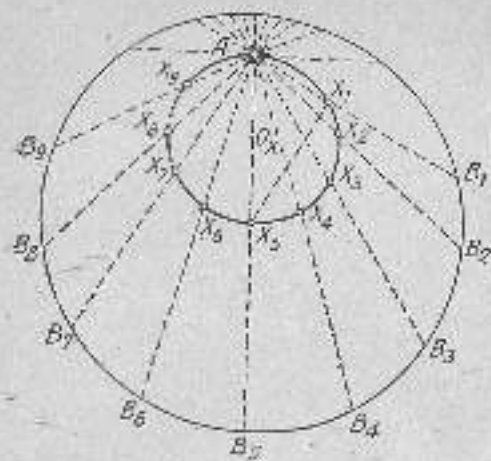
43A-масала. (XVIII нуктавий тўплам.) Берилган айлананинг икки ётган нуктадан ўтувчи кутарлар ўрталарининг нуктавий тўпламини топил.

Олдидан масаланинг шартини да 55-чизмадан қўйилган.

1. Берилган нукта бу нуктавий тўпламга кирмайди.



55-чизма



ниб, бу масалаи му-
каммал ситиш ва уқла-
қуйлаши ҳуҷасани чи-
қаринг: айлана ичиди
берилган нуктадан
ўтган ватарлар ўр-
тиларианинг тўпла-
ми — берилган айлана
маркази билан берил-
ган нуктани тутуши-
таруши кесмақи диа-
метр каляб чиқилган
айланадан иборат-
дир. (Була берилган
нуктаи муқаввий тўп-
ламига қарашли бўла-
ди).

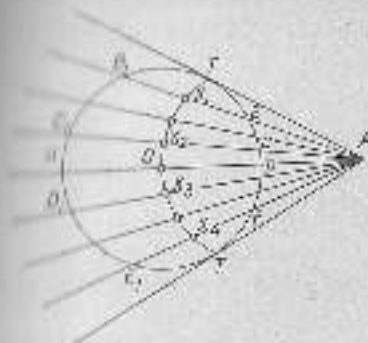
44-мислат. (XIX
кўтавий тўп-
нуктадан бу
қилган ватарлар
56-1 чизмадаги М (C) н.

56-1 чизмадаги $M(O, R)$ айлананинг тишқарисидан берилган $A, B, C, D, \dots$ нуқталардан ўтказилган кесувчилар ушбу $AB, AC, AD, \dots$ кесувчилар нобрат бўлиб, булардан ҳосил бўлган ватарлар мос равишда $AB, AC, AD, \dots$ кесувчилар бўлсин. Бу ватарларнинг ўрталари $X_1, X_2, X_3, \dots$ нуқталар бўлсин. Биздан аниқ шундай нуқталарнинг тўплами қандай фигура бўлишини топиш талаб этилади.

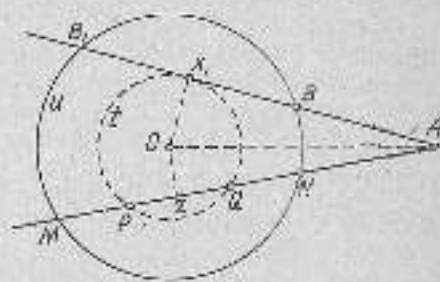
Аялал. Излагал геометрик үрив — бирер аялзанын
ей бөлиш $X_1, X_2, X_3, \dots$ нукталарын бир-бирине нисба-
тап жайлзгуулардан кўрашп турса-да, текш аун катыш
Шунинг үчүн 50 аталади.

Шунинг учун 55-П теоремада берилган 4 нуқтадан u (O, R_1) айланга фискал AB_1 ҳосилчишгина ўлган, ундаги BB_1 катар-
нинг ўрнати 55-П теоремада X нуқтага эътибор қилиш; бу нуқта-
нинг қўрсатишча яна ала қандай фигурага тегишли экан.
 X нуқта BB_1 катарнинг ўрнатишча қўрсатишча керак.
Қаадири шу натижага эришганда, теоремада берилган 4 нуқтадан

Ушундан кийин K_1 нукта BB_1 ватарининг ўртаси эканлиги — унинг O марказидан дараж беради. Бу эса K_1 нуктани O марказ билан туташтиришга айтилж борлигини кўрсатди; K_1 нуктанинг из-гидадер демокил бўлса-да, лекин 53-1 теоремадаги тажриба ва 1 айлананида ёгувчи P ва Q каби нукталар $M \cup V$ ватарининг ўрта нуктаси бўлиб охмаслиги билин буюндай фараз қилинган ва бу кечиктиб кетилди.

[illegible]

55-1 71234.

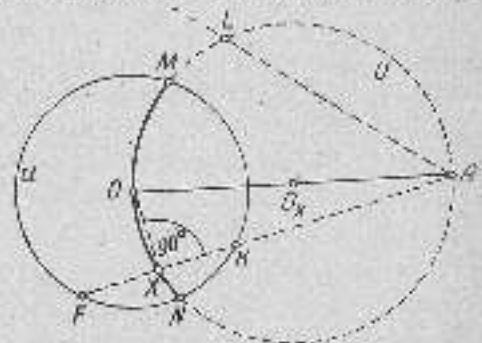


EG-1 ЧМЗМА

Фобдланинига тўғри келади: O ва A нуқталарнинг ҳаётуми-
ри бу икки нуқтага бир-бири билан туташтириш зарурлиги-
дан дарак беради. O нуқтага A ва X_1 нуқталар билан туташ-
тиришдан ҳосил бўлган тўғри бурчакли $\triangle OX_1A$ нинг X_1 учи
 OA диаметр билан қизилган айланада ётишлиги X_1 нуқтанинг
изилган янги B ҳосилсизан изобатадир.

Ясно, что диаметр OA равен $2R$ и A — точка на окружности. Диаметр OA равен $2R$ и A — точка на окружности.

Исботлаш (синнат). 56- III чизмада ясалган α айлананинг ҳамма нуқталари α ни ушун бирор дугада ётган нуқталар масаланинг талабига жавоб беришини янақлаш керак. Бунинг учун α айлананинг берилган M айлана ичига жойлашган ёйлашти нуктасини X нуқтаси масалада берилган (α) хоссага эга бўлиш α бўлмаслигини янақлаш керак. Шу мақсадда AX нур утказиб, унинг α айлана билан қиспишувидаги ҳосил бўлган FX катарга эгиликни беришимиз; X нуқта бу катарнинг ўртаси, чунки α айлананинг ички қизилган AXO бурчак OA диаметрга тирawatган учун тўғри бурчаклир; OX кесме FX катарга перпендикуляр бўлгани учун X нуқта FX катарнинг ўртаси бўлади, яъни y , масалада айтилган (α) хоссага эгадир.



5.5-111 443.44

Агар 6 айлованинт ташқи ёида бирор L нуқта илиб, AL нур ўтказсак, унинг берилган n айлана бўлаи кесилишмаганини кўраймиз,

L нукта σ айлана ташқи айниинг ихтиёрый нуктаси, шунинг учун ташқи айниинг ҳар қандай нуктаси ҳақиқат ҳам юқоридагидек ҳулёсига келиш мумкин.

Демак, σ айлананинг ташқи айнидаги нукталар изланувчи нуқтавий тўйламга тегишда экан.

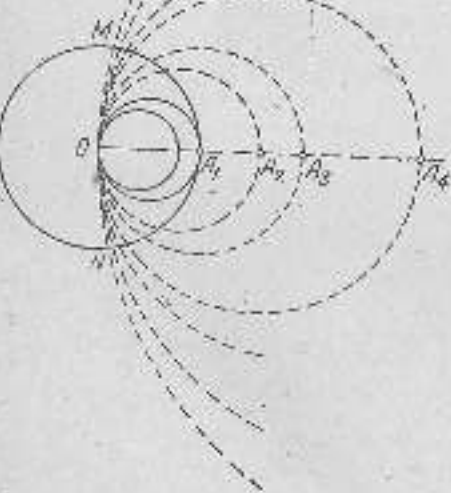
Тоғилган айлананинг ташқи айнида маълум α хоссага бир порта ҳам нуқта йўқлиги бундай хоссага нукталарнинг ҳаммаси фақат икки айнида ётишини кўрсатади.

σ айлананинг ички айнидаги ҳар қандай X нуқтанинг масалада айтилган α хоссага эгалиги эса бу икки айнида маълум α хоссага эса бўлмаган бир порта ҳам нуқтанинг йўқлигича билдиради.

Шунинг учун σ айлананинг берилган α айлана ичидаги ёни изланувчи нуқтавий тўйлам бўлади (бу нуқтавий тўйламга бу айниинг икки учи ҳам киради).

Текшириш. Берилган A нуқта σ айланадан ҳар қандай масофادا ётса ҳам масала ечимга эга ва унинг ечими сифатида биттагина ёни ҳосил бўлади. Берилган A нуқта берилган σ айланадан узоқлашган сари айлана катталашиб, тўғри чизиққа интилади ва ноланувчи нуқтавий тўйлам эса айлананинг OA нуқта перпендикуляр диаметрига атиқлади (56-IV қизма).

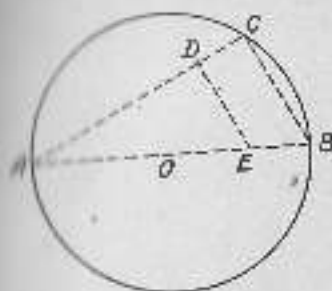
Агар берилган A нуқтани қўзғатмас σ айланага яқинлаштириб борсак, σ айлана кичраиб юмалнуқлана боради ва унинг σ айлана ичидаги ёни (яъни изланувчи нуқтавий тўйлам) бу айлана радиусига диаметрда атиқлади σ_1 айланага интиля боради.



56-IV қизма

Бу масаланинг етиланувчан кўриниши, нуқтавий тўйламга тегишда доир ҳар бир масалага босқичлаб ечиш мумкин ва аввалода тоғилган фигуранинг (бизнинг масаланимиздаги σ айланани) изланувчи нуқтавий тўйламга тегиш қабул қилини, уш шарт билан босқичда албатта ениб кўриб, кўнра қўзғатиларишга тўғри келади.

45-масала. (XX нуқтавий тўйлам). Айлана-нинг бир нуқтасидан кичувчи вапарларни $m:n$ нисбатда бўлувчи нуқталар-нига нуқтавий тўйламни топни.



57-I қизма

Анализ. Берилган айлананинг A нуқтасидан кичувчи AC вапарни берилган $m:n$ нисбатда бўлувчи нуқта D бўлиши (57-I қизма), яъни y

$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{m}{n}$$

шартни қаноатлантирсин.

A нуқтадан AB диаметр ўтказиб, C ва B нуқталарни туташтирайлик. Сўнгра $DE \parallel CB$ кесма ўтказишдан ҳосил бўлган ADE ушбурмакка эътибор қилайлик: яъни $\angle ADE = \angle ACB = 90^\circ$; шунинг учун бу ушбурмак тўғри бурчакли ва унинг D учини AE гипотенузани диаметр қилиб кичилган айланада ётади.

Яъни. Айлананинг A нуқтасидан AB диаметр ўтказиб, уш берилган $m:n$ нисбатда бўлувчи E нуқтани топади. Сўнгра AE кесмани диаметр қилиб айлана кичили.

Исбот. Тоғилган айланадаги ҳар бир нуқтанинг масала шартини қаноатлантиришини кўрсатамиз, бунинг учун кичилган айланадаги ихтиёрый D_1 нуқта ушдан ўтувчи AC , вапарни берилган нисбатда бўлишини исбатлайми (57-II қизма).

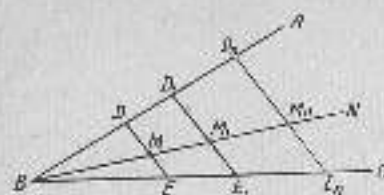
D_1 нуқтани E нуқта билан ва C_1 нуқтани эса B нуқта билан туташтирайлик. Ҳосил бўлган AD_1E ва AC_1B бурчаклар тўғри бурчак, демак, $(D_1E) \parallel (C_1B)$. Яънишга кўра, қуйдаги тенглик мавжуд экан:

$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{m}{n}.$$

Шунинг учун ушбу тенглик ҳам мавжуд бўлади:

$$\frac{|AD_1|}{|D_1C_1|} = \frac{m}{n}.$$

Демак, изланувчи нуқтавий тўйлам берилган айланага берилган нуқтада икки уринувчи айланадан иборат бўлади.



58- чизма

бу айлана оламетрикога бир учи берилган нукта, иккинчи учи эса берилган айлана оламетрини $m:n$ нисбатда бўлувчи нуктадир.

Бу нуктавий тўпламга берилган нукта қирмайди.

46- масала. (XXI нуктавий тўплам.) Берилган бурчак томонларини кесувчи параллел тўғри чиқиқларнинг бурчак ичидаги кесмаларини берилган $m:n$ нисбатда бўлувчи нукталар нуктавий тўплами топилсин.

Анализ. ABC бурчак (58- чизма) томонлари орасидан параллел кесмалардан бири DE бўлиб, уни $m:n$ нисбатда бўлувчи нукта M бўлсин.

Бу нуктани бурчакнинг B учи билан туташтириб, BM тўғри чиқиқнинг DE га параллел тўғри чиқиқ кесмаси D_1E_1 билан кесинган нуктасини M_1 билан белгилан. Шу M_1 нуктанинг ҳам D_1E_1 кесмани $m:n$ нисбатда бўлишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, BD_1M_1 ва BDM учбурчакларнинг ўхшашлигидан:

$$\frac{|D_1M_1|}{|D_1E_1|} = \frac{|BM|}{|BA|}$$

пропорционий эса олаҳиз.

BM_1E_1 ва BME учбурчакларнинг ўхшашлигидан эса

$$\frac{|ME_1|}{|BE_1|} = \frac{|BM_1|}{|BB_1|}$$

пропорционий эса қиламиз.

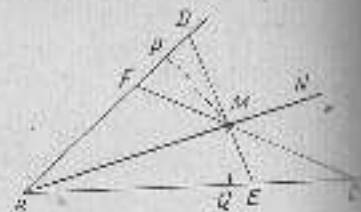
Бу эки пропорционий ўш томонлари тенг бўлгани учун ҳам томонлари ҳам бир-бирига тенг:

$$\frac{|D_1M_1|}{|D_1E_1|} = \frac{|ME_1|}{|BE_1|}$$

Демак,

$$\frac{|D_1M_1|}{|ME_1|} = \frac{|DM|}{|ME|} = \frac{m}{n}$$

ABC бурчакнинг ичидаги BN нурдан пегда ётувчи ҳар қайси нукта бу хоссага эга эканлигини, аксинча фараз қилиб исбот этиш мумкин.



58- I чизма

Ҳам ш. Берилган параллел кесмалардан биттасини, масалан, DE ни $m:n$ нисбатда бўлувчи M нуктани топиб, бу нуктани бурчакнинг B учи билан туташтирамиз. BM нур — изланувчи тўплам бўлади.

46А- масала. (XXII нуктавий тўплам.) Берилган бурчак ичида ётган шундай нукталар тўламини топилсин, бу нукталарнинг ҳар биридан шу бурчак томонларигача бўлган масофаларнинг нисбати маълум $m:n$ сонга тенг бўлсин.

Бу масалага олдинги масала ёрдамида ва унинг ёрдамсиз ҳам ечиш мумкин. Бу эки йўли ҳам бизни зарур.

Биринчи йўл. Масалада берилган хоссага эга бўлган нукталардан бири, масалан, M нукта топилди деб, уни таҳминан белгилан қуяймиз ва ушбу шартни ҳажуд деб ҳисоблаймиз (58- I чизма):

$$\frac{|PM|}{|MQ|} = \frac{m}{n} \quad (1)$$

Сўнгра M нуктадан шундай DE кесма ўтказамизки, у берилган бурчакнинг томонларидан конгруэнт кесмалар ажратсин, яъни $|BD| \cong |BE|$ бўлсин (бунияс учун M нуктадан B бурчакнинг биссектрисасига перпендикуляр ўтказилади). Ҳисса бўлган PMQ ва QME учбурчаклар ўхшаш бўлади. Шунинг учун

$$\frac{|DM|}{|ME|} = \frac{|PM|}{|MQ|} \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгликлардан қуйидаги маълум бўлади:

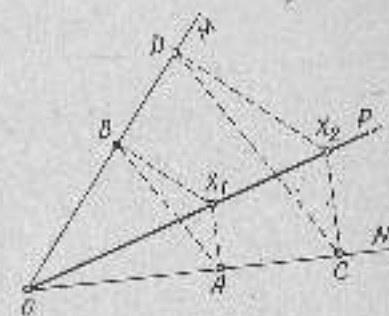
$$\frac{|DM|}{|ME|} = \frac{m}{n}$$

Бундан, DE кесманинг ҳам M нуктада $m:n$ нисбатда бўлишини маълум бўлади.

46- масалада DE кесма билан унга параллел бўлган кесмаларни $m:n$ нисбатда бўлувчи нуктавий тўплам BN нур эканлиги топилган эди.

Шунга биноан, бу масалада сўралган нуктавий тўплам ҳам эса BN нурдан иборат бўлади.

Иккинчи йўл. Анализ. Берилган $\angle MON$ нинг ички соҳасида изланувчи нуктавий тўпламнинг иккита X_1 ва X_2 нукталари топилди деб фараз қилиб, уларни белгилан қўяйлик (58- II чизма). Яъни бу фаразга



58- II чизма

бирова куйидаги муносабатлар жавҳуд деб ҳисоблайлик:

$$\frac{|AX_1|}{|X_1B|} = \frac{|CX_2|}{|X_2D|} = \frac{a}{k}. \quad (1)$$

Бундаги X_1 ва X_2 нукталарнинг қандай фигураси тегишлиги аниқлаш учун улардан ҳар биридан берилган бурчакнинг O учини билан туташтирайлик. Агар OX_1 ва OX_2 нурлар устмас-уст тушса, лаванурун нуқтавий тўғлими шу OX_2 нур бўлади.

OX_1 ва OX_2 нурларнинг устмас-уст тупишиги исботлаш учун $\angle X_1ON = \angle X_2ON$ ни исбот қиласак kiffo. Бундан ушун $\triangle AOX_1$ шун $\triangle COX_2$ га ўхшашлигида исбот қилиш керак. (Бундаги A ва C нуқталар X_1 ва X_2 нукталардан бурчакнинг ON томонига тушкунлиқ перпендикулярларининг (ON) даги асосларидир.) Бундан ушун куйидаги пропорциянинг ўришли эканлигини исботласак kiffo:

$$|CX_2| : |AX_1| = |OC| : |OA|. \quad (1')$$

X_1 ва X_2 нукталардан берилган бурчакнинг MO томонига туширилган перпендикулярларнинг асосларининг B ва D орқали белгилаб, AB ва CD кесмаларини тизайлик.

Бундан ва X_1 , X_2 нукталарнинг берилган ҳиссасидан куйидаги муносабатлар келиб чиқади:

$$\left. \begin{aligned} \angle AX_1B &= \angle CX_2D \\ \frac{|AX_1|}{|BX_1|} &= \frac{|CX_2|}{|DX_2|} = \frac{a}{k} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (1) \angle BAX_1 &= \angle DCX_2 \\ (2) \frac{|CD|}{|AB|} &= \frac{|CX_2|}{|AX_1|} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \angle BAX_1 &= \angle DCX_2 \rightarrow \angle OAB = \angle OCD \rightarrow (AB) \parallel (CD) \rightarrow \\ &\rightarrow \triangle OCD \sim \triangle OAB \rightarrow \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|OD|}{|OA|}. \end{aligned} \quad (4)$$

(3) ва (4) пропорцияларини таққословдан изматган (1') пропорция ҳосил бўлади.

Деҳак, масалани айтилган ҳосил нукталар — берилган бурчакнинг учидан чиқиб, унинг икки соҳасида жойлашган янги бир OX нурда бўлади.

Толшириқлар

I. Аниқдан аниқланган нурни десик.

II. Масалани нурнинг ҳар қандай нуқтаи масалани берилган ҳосилга эгаллашди (бу бу нурни қўйган ҳар қандай нуқта берилган ҳосилга эгаллашди) дебон қилиш ва навалури нуқтавий тўғлими аниқдан нурдан иборат эканлигини аниқлаш.

III. Берилган бурчакнинг учини тоққонли нуқтавий тўғлими қўйган бўлади ва бўлади.

IV. Берилган m ва k нисбатининг фарқида исбот, OP нур қўйилган (бундан тоққонли нурнинг) аниқдан фарқида исбот қўйилган.

V. Ушбу нурнинг бир томонига параллел бўлиб, қолган томонларини келиб тушган тўғлими қўйилган нур ушбу нурнинг аниқдан жойлашган кесмаларини тўғлими қўйилган.

VI. Тегил били ушбу нурнинг асосли туширилган бўлади ва қандай тўғлими бўлади.

47-масала. (XXIII нуқтавий тўғлими.) Шундай тўғлими тоққонли, бу нуқталардан берилган икки нуқтага қўйилган масофага квадратларининг аниқлиги берилган кесманинг квадратида тенг бўлади.

Бу масалани куйидаги уч ҳолга ажратиш, ечиш қулайлик туғдилади.

Биринчи ҳол: $AB = 1$.

Иккинчи ҳол: $AB > 1$.

Учинчи ҳол: $AB < 1$ (бу ерда A ва B — берилган нуқталар, 1 — берилган кесма).

Биринчи ҳолда масалани куйидаги кўринишга олади: шундай X нуқталарнинг тўғлими тоққонли, бу нуқталардан берилган A ва B нуқталарга қўйилган масофалар квадратларининг аниқлиги берилган нуқталар орасидаги масофанинг квадратида тенг, яъни

$$|AX|^2 + |BX|^2 = |AB|^2 \quad (1')$$

бўлади (39-1 чизма). Бу муносабат бизга Пифагор теоремасини эслатади ва изматувчи нуқтавий тўғлими берилган $|AB| = 1$ кесмани диаметр қилиб қўйилган айланани иборат, деҳан қўйилган чизма оламиз, чунки бу айлананинг ҳар қандай нуқтаи A ва B нуқталар билан туташтирилган ҳосил бўлган учбурчак тўғлими бурчакли бўлиб, (1') муносабат бажарилади.

Энди иккинчи ҳолни кўрайлик. Аниқдан. Берилган ҳосилга аниқ бўлган нуқталарнинг иборатси 39-II чизмадаги X нуқтадан иборат, яъни бу нуқта ушбу тегиллиги

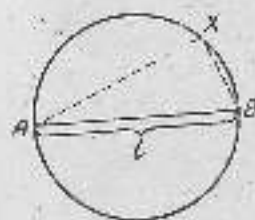
$$|AX|^2 + |BX|^2 = l^2 \quad (1)$$

қўйилганлиги деб шарт қилайлик.

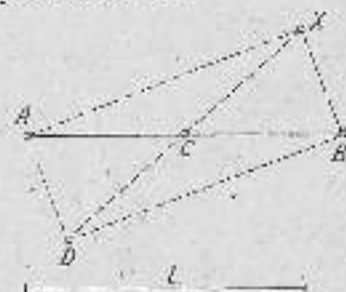
Берилишига кўра:

$$|AX|^2 + |BX|^2 < |AB|^2, \quad (2)$$

деҳак, AXB учбурчак ўтмас бурчакли, X нуқтани берилган AB кесманинг ўртаси C билан туташтириб, XC кесманинг давомига $|CX| = |CX|$ кесмани қўйайлик. D нуқтани A ва B нуқ-



39-1 чизма



39-II чизма

тапар билан туташтиришдан ҳосил бўлган параллелограмнинг томонлари билан диагоналлари ўрасидagi муносабатни ёзма:

$$2|AX|^2 + 2|BX|^2 = |AB|^2 + |CD|^2.$$

(1) шартни ва $|XD| = 2|CX|$ ни эътиборга олиб, бу тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$2R^2 = |AB|^2 + (2|CX|)^2.$$

Бундан:

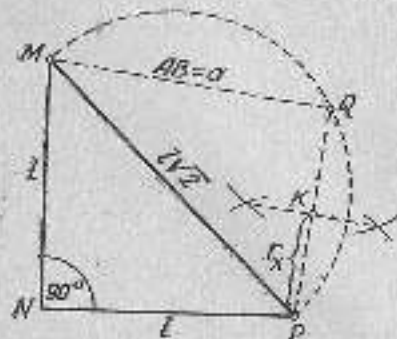
$$|CX| = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - |AB|^2}. \quad (3)$$

Бундаги R ва $|AB|^2$ миқдорлар маълум бўлгани учун CX кесма ҳам маълум бўлади.

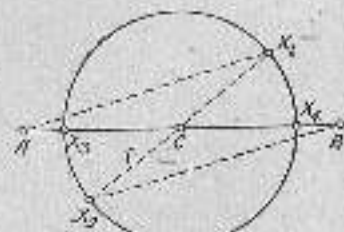
Демак, излаётган геометрик ўрикнинг X нуқтаги маълум C нуқтадан маълум CX масофада ётар экан, яъни X нуқта C марказдан CX радиус билан чизилган айланача ётар экан.

Яънаш. Анализда аниқланган (C, CX) айланани чизиб улу (3) ифодадан фойдаланиб, унинг CX радиусини ҳисоблаймиз. Бунинг қуйидагича бажариш мумкин: (3) ифодадан излаётган радиус-гипотенузаси $1/\sqrt{2}$ ва битта катети a кесмасы тенг тўтри бурчакли учбурчанинг яқинчи катети ярмига тенгласи қўрилиб турибди. Шунинг учун аниқлаш, $1/\sqrt{2} = \sqrt{R^2 + R^2}$ кесмани катетлари маълум l кесмидан иборат тўтри бурчакли учбурчанинг гипотенузаси гипотези ҳисобланади. Бундан 59-III чизмадаги $MP = 1/\sqrt{2}$ кесма ҳосил бўлади. Сўнг, MP гипотенузаси ва $MQ = a$ катети бўлига тўтри бурчакли $\triangle MQR$ на ясаган, бунинг PQ катетининг ярми булган PR кесмани (3) ифодадаги CX кесманинг узунлигига қабул қиламиз. Тоқилган $CX_1 = PR$ кесма қадар радиус билан a кесманинг C ўртасидан айланача чизамиз (59-IV чизма).

Исбот. Чизилган (C, CX_1) айлананинг ҳар қандай X_1 нуқтаги масалада берилган хоссага эгалигини исботлаш учун бу



59-III чизма



59-IV чизма

X_1 нуқтадаги X_1X_2 диаметр ўтказамиз. Сўнг, X_1 ва X_2 нуқталарни берилган A ва B нуқталар билан туташтиришдан ҳосил бўлган параллелограмдан қуйидаги муносабатларни ёзма:

$$|AB|^2 + |X_1X_2|^2 = 2|AX_1|^2 + 2|AX_2|^2 \text{ ёки,}$$

$$|AB|^2 + (2|CX|)^2 = 2(|AX_1|^2 + |AX_2|^2) \text{ ёки } a^2 + 4|CX|^2 = 2R^2.$$

Бундан $CX = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - a^2}$ чиқади.

Бундан, қизилган айлананинг ҳар қандай нуқтаги масалада айтилган хоссага эга эканлиги кўрилади.

Ушсиз айлананинг AB кесма билан кесилган нуқталардан бирини, масалан, X_1 ни ҳам текшириб кўрсик (59-IV чизмадан), қуйидаги муносабат келиб чиқади:

$$|AX_1|^2 + |BX_1|^2 = (|AC| - |CX_1|)^2 + (|BC| - |CX_1|)^2,$$

чунки бундаги $|AC| - |BC| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{a}{2}$ лигича назарда тутиб, CX_1 нинг ўрига унинг (3) даги қийматини қўлириб қўйиб, тенгликнинг чап томони R га тенг бўлади.

Демак, излаётган нуқтавий тўтлаш — берилган икки нуқтани туташтирувчи кесманинг ўртасидан маълум $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - a^2}$ кесма қадар радиус билан чизилган айланача иборат.

Текшириш. Масалада берилганларнинг ўзарини масала ечимига қандай таъсир қилишини аниқлайлик.

I. Агар берилган a ва l кесмалар бир-бирига тенг бўлса, (3) муносабатга қўри, $|CX| = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - a^2} = \frac{a}{2}$ бўлади. Бу эси изланувчи нуқтавий тўтлаш — маркази a кесманинг ўртасидан ётиб, радиуси $\frac{a}{2}$ га тенг бўлган айланача иборатлигини билдирди (59-I чизма).

II. Агар $2R^2 > a^2$, яъни $1/\sqrt{2} > a$ бўлса, (3) даги CX кесма доим мавжуд бўлиб, излаётган нуқтавий тўтлаш диаметри a кесмидан кичик бўлган ва маркази шу кесманинг ўртасидан ётган кичик бир айлана бўлади; ҳақиқатан, $1/\sqrt{2} > a$ бўлгандагина, 59-III чизмадаги $\triangle MQR$ ҳам, унинг PQ катети ярмига тенг бўлган MP радиус ҳам мавжуд бўлади.

III. Агар $2R^2 = a^2$, яъни $a = 1/\sqrt{2}$ бўлса, (3) даги $|CX| = 0$ бўлиб, излаётган нуқтавий тўтлаш E нуқтадангина иборат бўлади: бу нуқта масаланинг талабига жавоб беришини қуйидаги йўл билан ҳам текшириб кўриш мумкин:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = 2|AC|^2 = 2\left(\frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2} = \frac{2R^2}{2} = R^2.$$

Ҳақиқатан, $1/\sqrt{2}$ ва a кесмалар бар-бирисига тенг бўлганини 59-III чизмадаги MN учбурчак MP кесмага ўтиб, изланувчи айланани ўзининг S марказига ўтиб қолади.

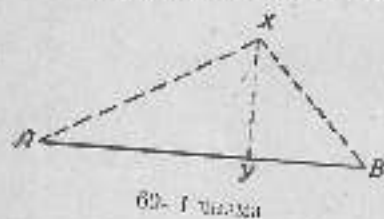
IV. Агар $2P < a^2$, яъни $1/\sqrt{2} < a$ бўлса, (3) даяги ифода маъхум бўлади, яъни масала бундай шарҳда ечиммайди. Ҳақиқатан, 59-III чизмада гипотенузаси катетидан кичик бўлган учбурчак маъхум бўлмайди.

Шундай қилиб, масалада берилган a ва 1 кесмалар орасидаги муносабат юқоридаги текширишнинг I ва II ҳолларида аниқлашган талабларга жавоб берса, изланувчи нуқтавий тўплам аниқ-бир айланани бўлади; агар a ва 1 кесмалар орасидаги муносабат текширишнинг III ҳолида аниқ-ланган талабга жавоб берса, у аниқ бир нуқта-дан иборат бўлади ва IV ҳолдаги шарҳотда нуқтавий тўплам маъхум бўлмайди.

Тоғшириқ

Масаланинг учинчи ҳиссини ечимиз.

48-масала. (XXIV нуқтавий тўплам) Шундай нуқта-ларнинг тўплами топилсинки, бу нуқталарнинг ҳар би-рида берилган икки нуқтагача бўлган масофалар квадрат-ларининг айирмаси маълум кесманинг квадратиغا тенг бўлсин.



Анализ. Изланувчи нуқта-вий тўпламнинг бирор нуқтасини 60-1 чизмадаги AB кесмага ёзма-ган X нуқтадан иборат деб, яъни бу нуқта масалада айтилган ҳос-сага эга деб фарз қилишимиз:

$$|AX|^2 - |BX|^2 = P. \quad (1)$$

Бу X нуқтадан қандай қандай қарашли эканлигига би-лиш учун ундан берилган AB кесмага XU перпендикуляр тузирайлик (U нуқта бу перпендикулярнинг AB кесмадаги асосидир). Ҳисоб бўлган тўғри бурчакли учбурчаклардан қу-йидаги муносабатларни ёзайлик:

$$\triangle AXU \text{ дан } |AX|^2 = |AU|^2 + |XU|^2, \quad (2)$$

$$\triangle BXU \text{ дан } |BX|^2 = |BU|^2 + |XU|^2. \quad (3)$$

(2) дан (3) ни ҳақлаб айирсак, қуйидаги тенглик чиқади:

$$|AX|^2 - |BX|^2 = |AU|^2 - |BU|^2. \quad (4)$$

(4) ва (1) тенгликларга таялиб қуйидагини чиқариш мум-кин:

$$|AU|^2 - |BU|^2 = P. \quad (5)$$

(5) тенгликдан кўринадиги, U нуқта ҳам X каби (1) ҳос-сага эга экан, яъни изланувчи нуқтавий тўпламга қарашли экан.

Демак, айтилган ҳоссага эга бўлган нуқталар AB кесма-нинг аниқ U нуқта-дан ўтказилган перпендикулярда ётиши маълум бўлди.

Яна ш. Анализда айтилган XU перпендикулярни янаш учун аниқ унинг U нуқта-сини, яъни AU (ёки BU) кесманинг узун-лигини топайлик керак. Бунинг учун (5) тенгликдан фойда-ланишимиз.

Бу тенгликдаги $|BU|$ ўрнига унга тенг бўлган $|BU| = |AB| - |AU|$ ифодани қўямиз (чизмага қаранг):

$$|AU|^2 - (|AB| - |AU|)^2 = P. \quad (5')$$

Бу тенглимдан AU ни топайлик:

$$|AU| = \frac{1}{2}(|AB| \pm \sqrt{AB^2 - P}). \quad (5'')$$

AU кесмани топилган олдин $\frac{P}{|AB|} = z$ деб белгилаймиз ва

$$z = |AB| - P \quad (6)$$

тенгликдан фойдаланиб, Z ни яса-сак, $Z = |AD|$ ва AU кесмалар ҳос-сиг бўлади (60-II чизма).

Шундай қилиб, топилган U нуқтадан AB кесмага UX перпенди-куляр чиқарамиз.

Исбот. Энди, топилган XU тўғри чизмадаги ҳар қандай нуқта-нинг мағала талабига жавоб бе-ришини исбот қиламиз: бунинг учун бу перпендикулярнинг икхтёрвий F нуқта-сини олиб, унинг ушбу шартни қаноатланти-

$$|AF|^2 - |BF|^2 = P \quad (7)$$

ришини кўрсатиш кифол.

U нуқта-ни A ва B нуқта-лар билан туташтириб, бундан ҳос-са бўлган тўғри бурчакли икки учбурчакдан қуйидагиларни ёзамиз:

$$\triangle AFU \text{ дан: } |AF|^2 = |AU|^2 + |UF|^2,$$

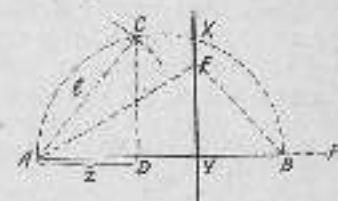
$$\triangle BFU \text{ дан: } |BF|^2 = |BU|^2 + |UF|^2.$$

Бу тенгликларнинг бири-чисидан иккинчисини айирсак, қуйи-даги тенглик чиқади:

$$|AF|^2 - |BF|^2 = |AU|^2 - |BU|^2.$$

Ҳисобда ишлатилган (5) тенгликдан ва кейинги тенгликдан қуйидаги келиб чиқади:

$$|AF|^2 - |BF|^2 = P.$$



60-II чизма

Шундай қилиб, масалада изланувчи нуқтавий тўплам берилган нуқталарни туташтирувчи AB кесманинг ушбу

$$|AY|^2 - |BY|^2 = r^2$$

шартни қаноатлантирувчи Y нуқтасидан бу кесмага ўтказилган перпендикулярдан иборат бўлади.

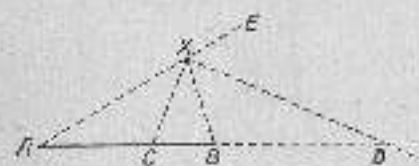
Толшириқлар

Қўядасиз саволларга жавоб бериш эҳди билан масаланинг ечимини текшириш:

1. Агар $r = 0$ бўлса, изланувчи нуқтавий тўплам қандай бўлиши мумкин?
- II. $r = AB$ бўлса-чи?
- III. $r > AB$ бўлса-чи?
- IV. $r > 0$ бўлиб, A ва B нуқталар ўзaro-уст тушса, масала ечилиши б бўлиши?

49*- масала. (XXV нуқтавий тўплам). Айлана ташқирисидан ёни ичиди берилган нуқтави айлананинг турли нуқталари билан туташтирувчи кесмаларни $m:n$ нисбатда бўлувчи нуқталар тўпламини топинг.

50- масала. (XXVI нуқтавий тўплам). Ҳар бир нуқтасидан берилган икки нуқтагача масофаларининг нисбатини ўзгармас бўлувчи нуқталар тўпламини топинг.



61-1 шакли

- Берилган:
- 1) A ва B нуқталар.
 - 2) $m:n$ нисбат ($m \neq n$).
- Анализ. Изланувчи нуқтавий тўпламининг бирор нуқтаси 61-1 шаклдаги X лар иборат, яъни бу нуқта

$$\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{m}{n}$$

таълибга жавоб беради деб фараз қилайлик.

X нуқтасини қандай фигурага қарабди эканлигини билдириш учун унга A ва B нуқталар билан туташтириб, ҳажма бўлган AXB ва BXE қўшни бурчақларининг XC ва XD биссектрисалирили чизилса (бундан C ва D нуқталар бу биссектрисаларнинг AB кесми ва унинг давоми билан кесилган нуқталаридир). Қўшни бурчақлар биссектрисаларининг хиссасига асосан:

$$\angle CXD = 90^\circ.$$

Бундан X нуқта CXD тўғри бурчақли учбурчақнинг CD гипотенузасининг диаметр қилиб чизилган айланада ётиши маълум бўлади.

Учбурчақнинг бир ички бурчағи билан унга қўшни бўлган ташқи бурчақнинг биссектрисалари ҳақидаги теоремалардан қўллангилар маълум:

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AX|}{|XB|} \left(= \frac{m}{n} \right); \quad \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AX|}{|XB|} \left(= \frac{m}{n} \right),$$

бундан:

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|DB|} \left(= \frac{m}{n} \right). \quad (1)$$

(1) тенгликдан C ва D нуқталарининг берилган AB кесмани ички ва ташқи равишда $\frac{m}{n}$ нисбатда бўлувчи нуқталар эканлиги маълум бўлади (28- масала).

Яъни, 28- масалани ечилишдаги йўللариининг бири билан берилган AB кесмани ички ва ташқи равишда $\frac{m}{n}$ нисбатда бўлувчи, яъни (1) тенгликни қаноатлантирувчи C ва D нуқталарни топамиз (61- II шакл).

Сўنгра $[CD]$ ни диаметр қилиб айлана чизилса.

Исбот. Топилган айланадаги ҳар қандай нуқтаининг нисбати таълибга жавоб беришига исбот қилиш учун бу айлананинг ички ёки Y нуқтасини A, B, C ва D нуқталар билан туташтириб, $\frac{|AY|}{|BY|} = \frac{m}{n}$ тенгликдаги тўғрилиқни кўрсатиш kifой.

Яъни, (1) тенглик маълум бўлгани учун ушбу

$$\frac{|AY|}{|BY|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

тенглик исбот қилинса бўл.

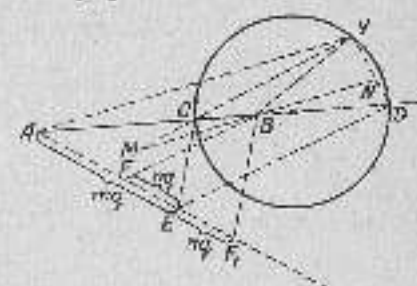
Бундан ушбу B нуқтадан (MN) (AY) тўғри чишиқ ўтказиб, унга (YD) билан N нуқтада ва YC кесманинг давоми билан M нуқтада кесилганча лавозим этирали.

$$\triangle AYC \sim \triangle BMC; \text{ шундан учун } \frac{|AY|}{|BM|} = \frac{|AC|}{|CB|};$$

$$\triangle AYD \sim \triangle BND; \text{ шундан учун } \frac{|AY|}{|BN|} = \frac{|AD|}{|DB|}.$$

$$\text{Бу тенгликлардан } \frac{|AY|}{|BM|} = \frac{|AY|}{|BN|}, \text{ бундан эса } |BM| = |BN|$$

эканлиги маълум бўлади. Демак, YB кесма MYN учбурчақнинг медианаси. Бундан янақари, MYN учбурчақ тўғри бурчақлидир (чулқа $\angle MYN = \angle YD = 90^\circ$). YB — гипотенузага ўт-



61- II шакл

казилган медиана бўлган учун у гипотенузанинг ярмига тенг бўлади:

$$|BY| = |BM|.$$

$\frac{|AY|}{|BM|} = \frac{|AC|}{|CB|}$ тенгликда BM ўрнига BY ни қўйсак,

$$\frac{|AY|}{|BY|} = \frac{|AC|}{|CB|}.$$

Шундай қилиб, айланадаги иккинчи Y нуқтанинг масала талабига жавоб бериши исбот қилинди.

Демак берилган икки нуқтагача масофаларининг нисбатини ўзгармас бўлган нуқталарнинг тўплами — берилган нуқталар орасидаги кесмани берилган нисбатда икки ва ташқи равишда бўлувчи икки нуқта орасидаги кесмани диаметр қилиб чиқарган айланадан иборат. Бу айлана Аполлоний айланаси дейилади.

Эслатма. Агар берилган нисбат $\frac{m}{n} = 1$, яъни $m = n$ бўлса, ҳақиқатчи нуқтавий тўпани берилган икки нуқта орасидаги кесманинг ўрта перпендикуляридан иборат бўлади.

50А (табғиқий масала). *Бир текисликда A ва B ёруғлик манбалари жойлашган. Шу манбалардан тенг ёритилган текислик нуқталарининг нуқтавий тўпламини топиш.*

Ечилиш. Физикадан маълумки, ҳар бир жисмнинг ёритилган нуқти — ўша жисмдан ёруғлик манбаигача бўлган масофанинг квадратига тескари пропорционал.

Шунга кўра, агар изланувчи нуқтавий тўпанинг (яъни текисликдаги тенг ёритилган нуқталар тўпламининг) битта нуқтасини X деб фарз қилиб, A ва B манбаларининг булардан бирини бирини масофада ётган жисмга берган ёруғлик кутларини a ва b деб фарз қилсак, қуйидаги муносабат ўрнида бўлади:

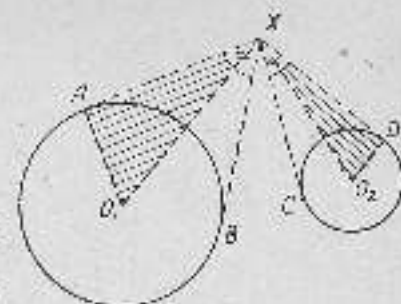
$$\frac{a}{|AX|^2} = \frac{b}{|BX|^2} \quad (1) \quad \text{ёки} \quad \frac{|AX_1|}{|BX_1|} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}. \quad (2)$$

Бу эса яқиндаги масалада кўрилган (1) муносабатдан яборитлар. Шунинг учун A ва B манбалардан тенг ёритилган нуқталарининг текисликдаги нуқтавий тўплами — яқиндаги масалада топиладиган Аполлоний айланасида иборатдир.

A ва B манбалардан тенг ёритилган фазо нуқталарининг геометрик ўрни эса 61- II қизмада кўрсатилган Аполлоний айланасини унинг CD диаметри атрофида айлантирилган ҳосил бўладиган сферик сиртдан иборат.

Эслатма. Агар A ва B ёруғлик манбаларининг орадан бир биттаки (умуман бир хил) масофада ётган жисмга берган кутлари бир аниқ бўлса, яъни $a = b$ бўлса, бу ҳолда тенг ёритилган нуқталарнинг текисликдаги тўплами

иккинчи тўплами AB кесманинг ўрта перпендикуляри бўлади ва шундай нуқталарнинг фазо нуқтавий тўплами эса AB кесманинг ўрта перпендикуляри (яъни сфера) текислиги бўлади.



62-1 қизма

61- масала. (XXVII нуқтавий тўплам.) *Берилган икки айлана бар хил бурчак остида кўринадиган нуқта-ларнинг тўплами топиш.*

Берилган:

1. (O_1, R) айлана,
2. (O_2, r) айлана,
3. $R \neq r$.

Анализ. Иланивчи тўпанининг барор X нуқтасини топилади деб фарз қилиб, уш 62-1 қизмада берилган айланалар текислигида тахминан белгилан қўйлик. Бу фарзга биноан X нуқтадан берилган биринчи айланача ўтказилган XA ва XB уринмалар орасидаги бурчак ва иккинчи айланача ўтказилган XC ва XD уринмалар орасидаги бурчак конгруэнт бўлади:

$$\angle AXB = \angle CXD \quad (1)$$

(1) тенгликка ва берилганларга асосланиб, X нуқтаининг қандай фигурага қарашлилигини топиш керак. Бунинг учун O_1 марказини A ва X нуқталар билан ва O_2 марказини D ва X нуқталар билан тутатиралик. Ҳосил бўлган тўғри бурчакли AXO_1 ва DXO_2 учбурчакларининг биттадан ушар бурчаклари ўзаро конгруэнт ($\angle AXO_1 = \angle DXO_2$) бўлган учун бу учбурчаклар ўхшаш бўлиб, уларнинг мос томонлари пропорционаллар:

$$\frac{|O_1X|}{|XO_2|} = \frac{|O_1A|}{|O_2D|} = \frac{R}{r} = \text{ўзгармас}.$$

Бу пропорцияни қараб, X нуқтаининг Аполлоний айланасига қарашли эканлигини белдирди (50- масала).

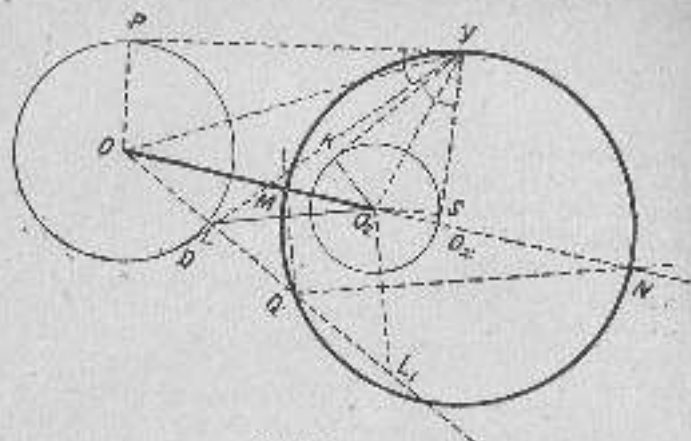
Ечилиш. Берилган икки айлананинг марказлари орасида O_1O_2 кесмани ички ва ташқи равишда R, r нисбатда бўлувчи M ва N нуқталарини топиб (28- масала), $|MN|$ диаметр билан айлана қизамиз (62- II қизма).

Исбот. $|MN|$ диаметр билан қизамиз айланадаги иккинчи Y нуқтаининг масала талабига жавоб беришчи исбот қилиш керак.

Бунинг учун Y нуқтадан биринчи айланача ўтказилган YP ва YQ уринмалар орасидаги бурчак билан иккинчи айланача ўтказилган YS ва YT уринмалар орасидаги бурчакнинг ўзаро конгруэнт, яъни

$$\angle PYQ = \angle SYT$$

эканлигини исботлаш керак. Бунинг учун тўғри бурчакли PYO_1 ва SYO_2 учбурчакларга диққат қиламиз:



62-V чизма

$\hat{P} = \hat{S} = 90^\circ$,
 $\left. \begin{aligned} \frac{|YO_1|}{|YO_2|} = \frac{R}{r} = \frac{|PO_1|}{|SO_2|} \end{aligned} \right\} \text{дан:}$

$\triangle PYO_1 \sim \triangle SYO_2$ ва бундан:
 $\angle PYO_1 = \angle SYO_2$

яъни $\angle PYD = \angle SYK$ бўлади.

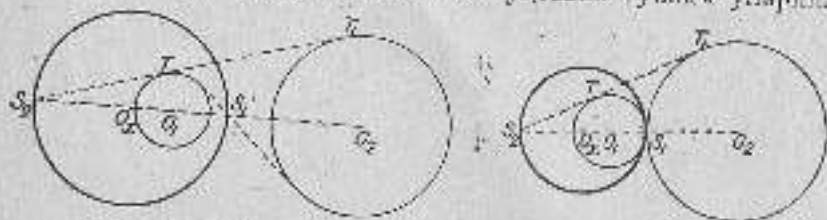
Демак, изланувчи нуқтавий тўплам — берилган икки айлана марказлари орасидаги кесмани икки ва ташқи радиусида R ва r нисбатда бўлувчи нукталарни туташтирувчи кесмани диаметр қилиб қизилган Аполлоний айланасидан иборат бўлар экан.

Текшириш. Берилган икки айлананинг бир-бирига нисбатан вақолити ва уларнинг радиуслари ўзаро тенг ёки тенг бўлмаслиги маънасининг ечимига кескин таъсир қилади.

Буни қуйидагилардан куриш мумкин:

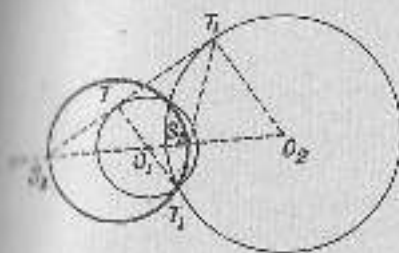
I. Агар берилган ҳар хил радиусли икки айлананинг бири иккинчисининг ташқарисига жойлашган бўлса, уларга тегишли нуқтавий тўплам каттик айланани ўз ичига олувчи Аполлоний айланаси бўлади (62-III ва 62-IV чизмалар).

II. Агар берилган турли радиусли икки айлана ўзаро кесилганида бўлса, уларга тегишли нуқтавий тўплам уларнинг

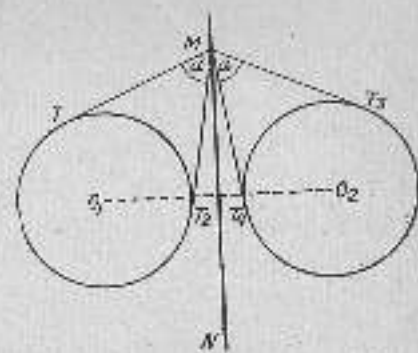


62-III чизма

62-IV чизма



62-V чизма



62-VI чизма

кесилиши нуқталаридан ўтувчи S_1S_2 диаметри Аполлоний айланасининг ташқи ёкидан иборат бўлади (62-V чизма).

III. Агар берилган икки айлана тенг радиусли бўлса, уларга тегишли нуқтавий тўплам: а) айланалар бир-биридан ташқарига ётган ҳолда микразаар оралидаги кесманинг ўрта перпендикуляридан иборат бўлади (62-VI чизма), б) айланалар ўзаро кесилган ҳолда эса айрилган ўрта перпендикуляридан иборат бўлади (бу ҳол учун тегишли кесмани ўз ичига олади).

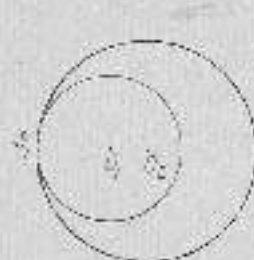
IV. Агар берилган икки айлана икки радиусли уринадиган бўлса, уларга тегишли нуқтавий тўплам уларнинг уришиш нуқталигини иборат бўлади (62-VII чизма).

Бу нуқтадан иккала айлана 180° ли бурчак истида куринади.

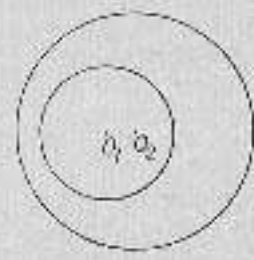
V. Агар берилган икки айланадан бири иккинчисининг ичига жойлашиб, улар умумий нуқтага эга бўлмаса, берилган кесмага эга бўлган битта ҳам нуқта бўлмайди (62-VIII чизма).

VI. Агар берилган икки айлана устма-уст туғса, уларга тегишли нуқтавий тўплам текислигининг айланаси ташқаридан соҳаси бўлади.

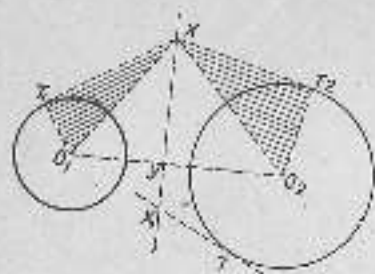
62-масала (XXVIII нуқтавий тўплам). Шундай нукталар тўплами топилсинки, бу нукталарнинг ҳар биридан берилган икки айланага ўтказилган уриш чизмалар ўзаро тенг бўлсин.



62-VII чизма



62-VIII чизма



63-1 чизма

Берилган:
1) (O, R) айлана, 2) (O_1, r) айлана.

Айялиш. I. Изланувчи тўл-
ламнинг бирор нуқтаси 63-1 чиз-
мадаги X нуқта бўлиб, бу нуқта

$$|XT_1| = |XT_2| \quad (1)$$

шартий қароватлаштирадиган деб
фараз қилайлик.

II. Бу нуқтадан қандай фигу-
рага қарашли эканлигини қўр-
қамнинг бирор нуқтаси X нуқта билан туташтирамиз.
Ҳисобларни ёзамиз:

$$\Delta XO_1T_1 \text{ дан: } |XT_1|^2 = |XO_1|^2 + |O_1T_1|^2 = |XO_1|^2 + r^2$$

$$\Delta XO_2T_2 \text{ дан: } |XT_2|^2 = |XO_2|^2 + |O_2T_2|^2 = |XO_2|^2 + r^2 \quad (2)$$

$$(1) \text{ шартга мувофиқ, кейинги тенгликларнинг ўнг томонла-} \\ \text{ридан қуйидагиса тенглаштириб бўлиш мумкин:}$$

$$|XO_1|^2 + r^2 = |XO_2|^2 + r^2$$

$$|XO_1|^2 = |XO_2|^2 = R^2 - r^2$$

$$(O_1Y)^2 = (O_2Y)^2 = R^2 - r^2$$

$$|O_1Y|^2 = |O_2Y|^2 = R^2 - r^2$$

$$|O_1Y|^2 = |O_2Y|^2 = R^2 - r^2$$

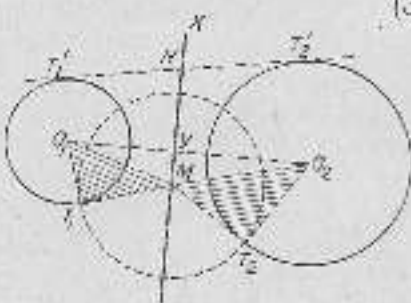
$$|O_1Y|^2 = |O_2Y|^2 = R^2 - r^2$$

$$|O_1Y|^2 = |O_2Y|^2 = R^2 - r^2$$

$$|O_1Y|^2 = |O_2Y|^2 = R^2 - r^2$$

$$|O_1Y|^2 = |O_2Y|^2 = R^2 - r^2$$

$$|O_1Y|^2 = |O_2Y|^2 = R^2 - r^2$$



63-2 чизма

Нуқнинг учун M нуқтани берилган айланалар марказлари
билан туташтириб, ҳосил бўлган тўғри бурчакли иккита уч-
бурчакдан ушбу тенгликларни ёза оламиз:

$$\Delta MO_2Y \text{ дан: } |MO_2|^2 = |MY|^2 + |O_2Y|^2$$

$$\Delta MO_1Y \text{ дан: } |MO_1|^2 = |MY|^2 + |O_1Y|^2$$

Бу тенгликларнинг биринчисидан иккинчисини ҳадлаб айир-
ган,

$$|MO_2|^2 - |MO_1|^2 = |O_2Y|^2 - |O_1Y|^2 \quad (4)$$

бўлади ва (3) тенгликка таяниб, буни қуйидагиса ёзиш мум-
кин:

$$|MO_2|^2 - |MO_1|^2 = R^2 - r^2 \quad (4')$$

Берилган айланаларнинг O_1T_1 ва O_2T_2 радиусларини чизиб
 M нуқтани T_1 ва T_2 уришиш нуқталари билан туташтиришдан
ҳосил бўлган тўғри бурчакли иккита учбурчакдан ушбу тенг-
ликларни ёза оламиз:

$$\Delta MO_2T_2 \text{ дан: } |MT_2|^2 = |MO_2|^2 + |O_2T_2|^2 = |MO_2|^2 + r^2$$

$$\Delta MO_1T_1 \text{ дан: } |MT_1|^2 = |MO_1|^2 + |O_1T_1|^2 = |MO_1|^2 + r^2$$

Бу тенгликларнинг биринчисидан иккинчисини айирсак,

$$|MT_2|^2 - |MT_1|^2 = |MO_2|^2 - |MO_1|^2 = (R^2 - r^2) =$$

$$= (|MO_2|^2 - |MO_1|^2) = (R^2 - r^2) \quad (5)$$

$$\text{бўлади ва (4')} \text{ тенгликка таяниб, буни қуйидагиса ёзамиз:}$$

$$|MT_2|^2 - |MT_1|^2 = 0$$

$$\text{Бу билан:}$$

$$|MT_2| = |MT_1| \quad (5')$$

Шундай қилиб, юқорида айтилган тўғ билан тасвирланган X Y
тўғри чизиқнинг берилган айланаларга уришма ўтказиш мум-
кин бўлган ҳар қандай нуқтасининг масала талабига жавоб бери-
ши исбот қилинди.

Демак, **икки айлананинг тенг уришмалар ўтказиши мум-
кин бўлган нуқталарнинг тўғралами, шу айланаларнинг ра-
диқал ўқидан (айланалар кесилган ҳолда эси радиқал ўқи-
нинг ташқи нуқталарида) иборатдир.**

Изоҳ. Ҳақиқатда доир ҳиссаларини ечишда радиқал ўқининг
хоссаларидан фойдаланишга тўғри келади. Шунинг учун ради-
қал ўқининг бачён бир хоссалари ва бу хоссаларнинг радиқал
ўқини ясашда ишлатилишини қисман кўрсатиб ўтамиз.

I. Кесилувчи икки айлананинг радиқал ўқи — кесилиш нуқ-
таларидан ўтган тўғри чизиқ бўлиб, изланувчи нуқтани тў-
лам бу радиқал ўқининг икки нуқтаси иборат бўлади (63-II чиз-
ма).

Текнириш босқичини бажаришда қуйидагиларни доим назарда тутиш керак:

а) агар масалани ечилишда қатълашган нуқтавий тўғлашнинг иккиаласи ҳам тўғри чиқиш бўлади, улар ўзаро кесилиш масаласи битта ечимга эга бўлади; агар бу чиқишлар ўзаро параллел бўлса, масала ечимга эга бўлмайди; улар устма-уст тушса, масала чексиз кўп ечимга эга бўлади;

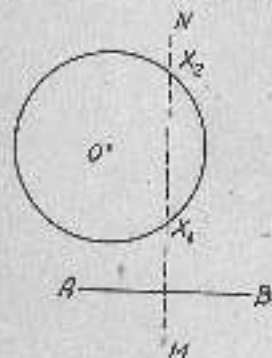
б) масалани ечишда қўлланган нуқтавий тўғлашнинг бири тўғри чиқиш ва иккинчиси айлана ёки иккиаласи ҳам айлана бўлиб, улар ўзаро кесилишса, масала иккига ечимга эга бўлади; агар улар ўзаро ураниш масаласи битта ечимга эга бўлади; агар улар умумий нуқтага эга бўлмаса, масала ечимга эга бўлмайди; башарти улар устма-уст тушса (икки айлана бўлган ҳолда), масала чексиз кўп ечимга эга бўлади.

Яна шуни ҳам эслагиб ўтиш лозимки, масала ечилишда ишлатилган нуқтавий тўғлашларнинг сопи ортини билан текшириш мураккаблаша боради.

16-§. БИРИНЧИ ТИПДАГИ МАСАЛАЛАР

53-масала. Айланада шуғай нуқта топилсинки, у берилган иккинчи нуқтадан тенг масофада ётсин.

1. Ивланган нуқта берилган A ва B нуқталарни туташтирувчи AB кескинига ўрта перпендикулярда ётсин. Лозим, чунки берилган икки нуқтадан тенг узоқликдаги нуқталарнинг тўғлаши ўша нуқталарни туташтирувчи кескинига ўрта перпендикуляр бўлиши билан янгалуш (64-чиқаш).



64-чиқаш

II. Иккинчидан, ивланган нуқта берилган айланада ҳам ётсин таяғи килинган. Шуғай учун бу нуқта маълум AM кескинига ўрта перпендикуляр билан айлананинг умумий нуқтаи бўлиши керак.

Энда ивланувчи нуқтани циркуль ва чизгич ёрдамида топа оламиз.

Ўрта перпендикуляр айланани кесиб ўтиши, унга ураниб ўтиши ё айлана билан умумий нуқтага эга бўлмас.

Биринчи ҳолда масаланинг талабига жавоб берувчи нуқталар 2 та, иккинчи ҳолда 1 та бўлади, ушани ҳолда битта ҳам бўлмайди.

Толширишлар

1. Берилган айлана билан AM кескинига бир-бирига иккидан вазириятлар тағйирланган икки айлана ирилганлиги. Тағйирланган бўлиб, масала ивланганлиги турганда иккинчи айлана ирилганлиги кўрилади.

II. Берилган икки нуқтадан ўтувчи ва қароғайи қуйидаги шартлардан бирига жавоб берган айлана чиқар:

- а) берилган айланада ётсин,
- б) берилган тўғри чиқишга ётсин,
- в) берилган учбурчанинг томони (ҳатташ) да ётсин.

17-§. МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

109. Берилган тўғри чиқишда қуйидаги талаблардан бирига қаноатланил-
рувчи нуқтани топиш.

- I. Берилган нуқтадан берилган масофада ётсин.
- II. Берилган икки нуқтадан тенг узоқликдаги бўлсин.
- III. Шу ўғри чиқиш билан кесилишчи иккинчи тўғри чиқишдан берил-
ган масофада ётсин.
- IV. Кесилишчи икки тўғри чиқишдан тенг узоқликда бўлсин.
- V. Параллел икки тўғри чиқишдан тенг узоқликда бўлсин.
- VI. У нуқтадан берилган кески тўғри бурчак остида кўрилин.
- VII. У нуқтадан берилган кески бурчакдан α бурчак остида кўрилин.
110. 10% масалада берилган тўғри чиқиш ўрнига айлана олиб, бу айла-
нада ётувчи ва I - VII шартлардан айри-айри қаноатланирувчи нуқта-
ларни топиш.

111. Берилган учбурчанинг томонларида ёки қароғайи давомида 109-ма-
саладаги етти талабнинг ҳар бирига айри-айри жавоб берувчи нуқталар-
ни топиш.

112. Учбурчанинг бир томонида шуғай нуқта топилсинки, у нуқта уч-
бурчанинг қолган икки томонидан тенг узоқлашган бўлсин.

113. Учбурчанинг ёки томонида (ёки унинг давомида) шуғай нуқта
топилисинки, у учбурчанинг асосининг икки ушдан тенг узоқликда ётсин (учбур-
чанг тенг ёки бўлганда, у нуқта қарети бўлади?).

114. Тенг ёки учбурчанинг бир ёки томонида (ёки унинг давомида)
шуғай нуқта топилсинки, у иккинчи ёки томони учаридан тенг узоқлашган
бўлсин (учбурчанинг ўтқар, тўғри, ўткич бурчакли ҳоли олиб, кескини
ирилганда).

115. Учбурчанинг ёки томонларида унинг асосидан маълум (битта) кес-
ки масофада ётувчи нуқталарни топиш.

116. Берилган икки нуқтадан ўтувчи шуғай айлана чиқарилсин, унинг
қароғайи берилган тўғри чиқишда ётсин.

117. Учбурчанинг ёки томонларида ёки уларнинг давомида шуғай
нуқта топилсинки, бу нуқтадан учбурчанинг асоси тўғри бурчак остида кў-
рилин.

118. Учбурча бўлиши ва қароғайи туширилган бўлишидан биридан
тенг ёки учбурчанинг асоси.

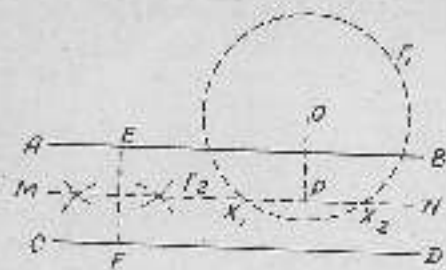
18-§. ИККИНЧИ ТИПДАГИ МАСАЛАЛАР

54-масала. Маълум икки параллел тўғри чиқишдан тенг
узоқликда ва берилган нуқтадан берилган масофада ётув-
чи нуқтани топиш.

Берилган:

- 1) (AB) , (CD) тўғри чиқишлар.
- 2) O нуқта.
- 3) l кески.

Қоғазга. Масаланинг иккинчи шартин янгибўрига олибсиз,
масала бундай кўринишга олади: "маълум икки параллел тўғ-
ри чиқишдан тенг узоқлашган нуқта топилсин". Бундай хосси-
яга эга бўлган нуқталар кескини кўп ва у нуқталарнинг тўғлаши



65-чижа

Берилган икки параллел тўғри чизиқнинг ўрта чизиги бўлади.

Демак, изланувчи нуқта шу ўрта чизиқда ётади керак.

Энди, берилган шартлардан фақат иккинчиси янада эъланборга орасан, берилган масала бундай аниқлаб кўришнинг қиради: „Берилган нуқтадан берилган масофада бўладиган нуқта топилсин“.

Маълумки, бундай нуқталар ҳам ҳечқанда бўлиб, у нуқталарнинг ўзламини берилган O нуқтадан марказ қилиб, берилган I кесмага тенг радиус билан чизилган айланадан иборатдир.

Демак, изланувчи нуқта бу айланада ҳам ётади керак.

Шундай қилиб, изланган нуқта маълум икки параллел тўғри чизиқнинг ўрта чизигида ва берилган нуқтадан марказ қилиб, берилган кесмага тенг радиус билан чизилган айланада ётади керак, яъни изланган нуқта юқорида айтилган икки нуқтавий тўламини кесинувчи, яъни умумий нуқтадан бўлади (65-чижа).

Яънаш, Берилган AB ва CD параллел тўғри чизиқларнинг ўрта чизиги MN ни масала.

Сўنгра берилган O нуқтадан берилган I кесмага тенг радиус билан айлана чизамиз. Бу икки нуқтавий тўламининг кесинувчидан, умумий нуқтадан X_1 ва X_2 нуқталар ҳосил бўлади.

Исб.т. Топилган X_1 ва X_2 нуқталар берилган икки параллел тўғри чизиқнинг ўрта чизигида ётади ва улар бу икки тўғри чизиқдан тенг узоқликда бўлади.

Айни нуқтадан бу нуқталар O ва I айланада ётади учун улар берилган O нуқтадан маълум I масофада бўлади. Демак, бу нуқталар масаланинг нақла талаябига ҳам жавоб беради.

Текшириш. Масалада изланган нуқтаданнинг маълум бўлиши ёки бўлмагани топилган икки нуқтавий тўламининг кесинувчи ёки кесинувчидан бўлишига боғлиқдир. Агар айлананинг радиуси I кесми, айлана марказидан ўрта чизиққа (MN га) туширилган OP перпендикулярдан ўзул бўлса, иккинчи нуқта ҳосил бўлади. Агар $I = |OP|$ бўлса, биттагина нуқта ҳосил бўлади; $I < |OP|$ бўлса, ташкилоти нуқта ҳавжуд бўлмайди.

19-§. МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР.

118°. Шундай нуқта топилсин, у берилган A нуқтадан α масофада, берилган B нуқтадан β масофада ётсин. AB кесми бўлса $\alpha + \beta$ масофада ётади, бошқача ҳолда $\alpha + \beta$ масофада ётади.

120°. Шундай нуқта топилсин, у берилган икки параллел тўғри чизиқдан тенг узоқликда ётсин ва қуйидаги шартлардан бирини қаноатлантирсин:

- I. Берилган учта тўғри чизиқдан тенг узоқликда ётсин.
- II. Кесинувчи маълум икки тўғри чизиқдан тенг узоқликда ётсин.
- III. Берилган икки параллел тўғри чизиқдан тенг узоқликда ётсин.
- IV. Берилган икки ўша нуқтадан тўғри бурчак остида кўриلسин.
- 121°. Шундай нуқта топилсин, у кесинувчи икки тўғри чизиқдан тенг узоқликда ётсин ва қуйидаги шартлардан бирини қаноатлантирсин:

- I. Берилган нуқтадан берилган масофада ётсин.
- II. Берилган учта тўғри чизиқдан берилган масофада ётсин.
- III. Берилган икки параллел тўғри чизиқдан тенг узоқликда ётсин.
- IV. Берилган икки кесинувчи икки тўғри чизиқдан тенг узоқликда ётсин.
- V. У нуқтадан берилган икки тўғри бурчак остида кўриلسин.

- 122°. Шундай нуқта топилсин, у нуқтадан берилган кесми I тўғри бурчак остида кўриلسин ва қуйидаги шартлардан бирини қаноатлантирсин:
- I. Иккинчи берилган икки ҳам тўғри бурчак остида кўриلسин.
- II. Иккинчи берилган кесми берилган бурчак остида кўриلسин.
- III. Одатлик масофада IV — V шартлардан ҳаттичи бири ҳам аниқ-айри кўриلسин.

123°. Шундай нуқта топилсин, у нуқтадан берилган айланага ўтказилган ўсиме берилган кесмага тенг бўлган бўлган бирга, у нуқта 121-маса-
ладаги икки талабига берилган айланага жавоб беради.

124°. Шундай нуқта топилсин, у нуқтадан берилган маълум берилган бурчак остида, берилган икки ҳам тўғри бурчак остида кўриلسин.

125°. Шундай нуқта топилсин, у нуқтадан берилган айлана билан берилган кесми маълум бурчак остида кўриلسин.

126°. Шундай нуқта топилсин, у нуқтадан маълум радиус билан кесилган айлана берилган айлананинг орастовини кессин ва у нуқта берилган нуқтадан берилган масофада ётсин.

127°. Учбурчакнинг икки нуқтадан нуқта топилсин, унда учбурчакнинг томонлари тенг бурчаклар остида кўриلسин.

128°. Учбурчакнинг унда унда тенг узоқликдаги нуқта топилсин (қандай шарт қилиш бўлсин, бу нуқта учбурчакнинг икки, бир томонига тенг учбурчак ташкилотида ётади).

129°. Учбурчакнинг унда томонидан тенг узоқликдаги нуқта топилсин.

130°. Учбурчак бир бурчакнинг орастовини кессин ва шундай нуқта топилсин, у нуқтадан берилган кесми I тўғри бурчак остида кўриلسин.

131°. Берилган уч тўғри чизиқдан тенг узоқликдаги нуқта топилсин, у нуқтадан берилган икки параллел тўғри чизиқдан тенг узоқликда ётсин.

132°. Шундай нуқта топилсин, у нуқтадан берилган айлана берилган бурчак остида кўриلسин, бу нуқтадан марказ қилиб маълум радиус билан чизилган айлана билан берилган айлананинг орастовини кессин.

133°. Шундай нуқта топилсин, у берилган айлананинг маълум нуқтадан тенг узоқликдаги нуқтадан тенг узоқликда ётсин ва бу нуқтадан берилган иккинчи айлана тўғри бурчак остида кўриلسин.

134°. Шундай нуқта топилсин, у нуқтадан берилган айлана кесилган икки тўғри чизиқдан тенг узоқликда ётсин ва берилган нуқтадан берилган масофада ётсин.

135°. Шундай нуқта топилсин, у нуқтадан берилган айлана ташкилотидаги маълум нуқтадан шундай айланага ўтказилган кесинувчи икки кесинувчи (ёки ватерин) тенг кесилган бўлсин ва кесинувчи икки тўғри чизиқдан тенг узоқликда ётсин.

136°. Шундай нуқта топилсин, у нуқтадан берилган айлананинг маълум нуқтадан кесилган ватерин $3:5$ кесилган бўлсин ва бу нуқтадан кесилган берилган айлана маълум бурчак остида кўриلسин.

137°. Шундай нуқта топилсин, у нуқтадан берилган бурчак томониданги масофадаги икки нуқтадан бўлиб, бу нуқтадан берилган кесми берилган бурчак остида кўриلسин.

138°. Шундай нуқта топилсин, бу нуқтадан берилган бурчак томонига

ртгача мезофалари преобити 1:1 бўлиб, тенит иккинчи берилаётган бўрича томонларига мезофалари енаётди 4:6 бўлиши:

139°. Шундай ҳудуд тоғоникли, у қудратини берилган янги ҳудудларга
масофалари квадратикларга ётирилди берилган қисмининг квадратик
теги бўлиб, унга ҳудуддан берилган айлана берилган бурчик осилиб
қолди.

140*. Шундай буюк топоним. Ҳ буюкдан Берилган айланган. Ўзбекистон
таъриқларига кўра, Берилган кесмега чип билаб, яна шу пухтани
Берилган иппи нўқатига нософалар хизматларининг йиланмас искинни
Берилган кесма тидарига таъ билиб.

1415. Шундай нукта топикни, Γ нукталик Бернлид икки нукталик масофалари контратаринини айланмаси берилган кесма квадратига тегер ту-
либ, шунда нуктали марказ икки Бернлид радиуси билан чегаралинган ай-
лан берилган айлананинг ортогонал кесмени.

142. Шугудай бүхтэ тэнгистэй, у нуктадан бердээн нэгж нуктагана бүхтэн массафалар квадратээрлэгтэй ашиглан бердээн нэгж массафалар тэнг лэ рша нуктадан шхэнжл бердээн нган нуктагана бүхтэн массафалар квадратээрлэгтэй ашиглан шхэнжл бэр нэгж массафалар тэнг бүхтэн.

[illegible]

Г. Паданувачи пунктдан берилаётган бошқа айлава 25° бурташ остида кўриб келинади.

II. Ислам дини китепханалари, медресалари вакифлари, тўғри сиёсий қарашларга эга бўлган вакифлари ва медресалари.

(II). Изымнулчи нуқтадаги берилаган кесма берилган бурчак остида кў-
рибди.

144°. Шулай нукталар топикни, у нукталардан берилган экинч нукта-
гача бўлган мезофиларени, яъни β -нуктадан ва у нукта қунадири
параллелдан берилган кинотлангични

1. Илгануэчи нуқта, беришган учатте нуқта билеи беришган айлана
БУКЛАШНИН ТУТАШТИРУШНИН КОСЯАЛИ 0:0 ЕМЕБАТЛА БУКЛАШ

II. Ишанилуиш нуқтадан текшичи берилган исомларны ушлаританча бўлган классларда исомлети берилган a, d кимга тенг бўлади.

11. Илалатлари кукчалар берилган лиза пуқта орасидати кесме маълум бурчак остида кўринган.

IV. Исламдаги ақиқатлар ҳақида маълум радиус бўлган айланига берилган айланани ортогонал қилиш.

У. Исламнинг қўлдан берилган айлама 60° бурчак астида қўрилган.
145°. Шўхлар текис ҳалқаларга қўрилган. Биринчи қўлдан берилган

бурчак остида кўриниши ва қўйидаги шартлардан бириги қаноатланирлар:

1. Ишлангунан буюмдун берилгип уулчей айлангас. Эчкангасан урианг
малдун кесмелг тегт буюсун.

11. Изобразить пучок из берилловых иккы айлана маркаларын орасидан кесме 75° бурчак остида эуришса.

III. Илгэвчлэлтүүнүүдэд берилгээтэй эхэн, пунктлагатай бүлэгт мэсөөр хийх тохиолдолд берилгээтэй сонголт бусад.

IV. Илг'ирилган пунктдан берилган иккинчи тест билан яна ўтказилган ўрнинлар ўзаро тенг бўлади.

У. Исламнинг нуқтадан бериётган икки айбани марказларига ёлғиз сасфилар воядотларининг айрилиши бериётган α тасма воядотига тасм

146*. Шундай нукта топикта бу нуктадан бериладан нукта бериладан

[illegible]

Г. Изакувчи нуқтадан боришан айдоғларнинг бирини 90° буррак асти-

Г. Исламузичи пушталеген берилген кыскы айтка тең берилең остиңа кы-

147*. Шундай пункт топишсан, у нуктадан берилган тўғри шариқнинг

22

итиш-пет жондорилган укта ксмоси теги буртандар остиде кдрдети (Адол-
луний айланганми кшлаганми); ксмадордан аккитаси ёки учаласи теги
балаган ксмаганми ҳам кдрет.

1498. Антени на уяда икки пружа берилган. Бу антеннани охтакдан тункик нуқтасиники томонига, у вужудда шиддатли икки вужудгача бўлаган ма-
жасдан берилган писбайга бўлади.

20.8. УЧИНЧИ ТИПДАГИ МАСАЛАЛАР

55-мисала. Берилган роокус билан нуктадай айлана чингилки, у берилган нуктадан утиб, берилган айланани уринсын.

Берилган: 1) R_1 кесми; 2) $R(O, R)$ айлана; 3) A нукта,
 $OA > R$; 4) $R_1 > R$.

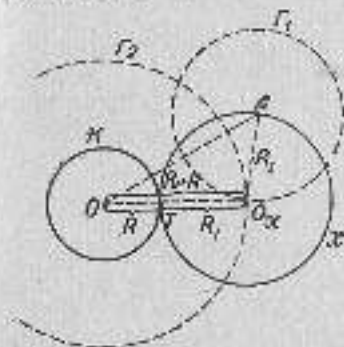
Анализ. Мисаланинг шартларини қияш, аниқлаш ва х
қисмига таҳминан қилиш (66-1 қисм).

А нүктәдән $\mathbb{R}^n$ радиусын айлаңаңлар чексиз күн ва буңдай айлаңаңлар марказларининг түпзамин $\Gamma_1(A, R_1)$ айлаңаң булалди; демәк, нивануаңи айлаңаңнинг O_X маркази ҳам $\mathbb{R}^n$ айлаңаңи булалди.

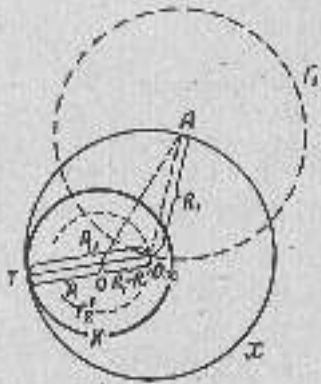
Масяланинг иккинчи шarti изловудки х айлананинг берилган $k(O, R)$ айланани уринишини талаб қилади. Маъзунки, берилган R радиусли айланани урикували маъзун R_1 радиусли айланалар марказларининг тўплами $OO_x = R_1 + R$ ёки $OO_x = -R_1 - R$ кескчаларин радиус қилиб қизилган унга концентрик айланалардан иборатдир.

Бундан киланувчи O_x нуктанын O марказда $R_1 + R$ радиус билан чизилган R_1 айланада (66- I чизма) ёки O марказда $R_1 - R$ радиус билан чизилган R_2 айланада (66- II чизма) ётиши мумкин бўлади.

Демак, изламувчи x айлананинг O_x маркази (A, R_1) ва (O, R_2) ёрдами айланаларнинг (86-1 чизма), шуниингда (A, R_1) ва $(O, R_1 - R)$ ёрдами айланаларнинг кесилиш нуқтасида ётар экан.



86. I 44343



66-110484

Ясаш. (A, R_1) ёрдамчи айланами, сўнгга $(O, R_1 + R)$ ва $(O, R_1 - R)$ айланаларни чизамиз (чизма равшанроқ бўлсин учун Γ_2 айланани 66- III чизмага, Γ_1 айланани эса 66- IV чизмага кўрсатдик; буларни бириктирсак 66- V чизма ҳосил бўлади). Бу чизмаларга қараб, нозардоқ айланалардан қайсылари берилган айланача ички, қайсылари ташқи уринишнинг ва улар нечта эканини аниқлаб олиш қийин эмас.

Исбот. Чизилган айланаларнинг ҳаммаси берилган A нуқтадан ўтади, чунки уларнинг марказлари, ҳасилига кўра, A ни марказ қилиб R_1 радиус билан чизилган айланада ётади. Яънишига кўра, 66- III чизмадаги K' ва x_1 (ёки x_2) айланаларнинг марказлари орасидаги $OO_{K'}$ (ёки OO_{x_1}) масофа билан уларнинг R ва R_1 радиустари орасида қуйидаги тенглик мавжуддир:

$$|OO_{K'}| = R_1 - R \quad \text{ёки} \quad |OO_{x_1}| = R_1 + R. \quad (1)$$

Шунга ўхшаш, 66- IV чизмадаги ҳудди ушб ёрдамчи айланаларнинг марказлари орасидаги OO_{x_2} (ва OO_{K_2}) масофа билан уларнинг R ва R_1 радиустари орасида қуйидаги тенгликлар мавжуддир:

$$|OO_{x_2}| = R_1 - R \quad \text{ёки} \quad |OO_{K_2}| = R_1 + R. \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгликлардан тошилган тўртта айлана ҳам масаланинг талабига жавоб бериши аниқ.

Масаланинг ечими нечта ва қандай ечишларса эга бўлиши иккала нуқтавий тўпламнинг кесилиши ёки кесилимаслигига боғлиқдир; бу жа берилган R, R_1 ва OA кесмаларнинг қийматларига боғлиқ.

Текстиринини ташқи ва ички уринишлар учун айрим бажариб, сўнгга уларни умумлаштирамиз.

Ташқи уриниш шартлари:

А) $OO_{K'} = O_{K'}A = 2R_1 + R > |OA|$ бўлса, иккита ташқи уриниш мавжуд бўлади (66- I чизма).

Б) $2R_1 + R = |OA|$ бўлса, битта ташқи уриниш мавжуд бўлади (66- VI чизма).

В) $2R_1 + R < |OA|$ бўлса, масала ечимга эга бўлмайди.

Ички уриниш шартлари:

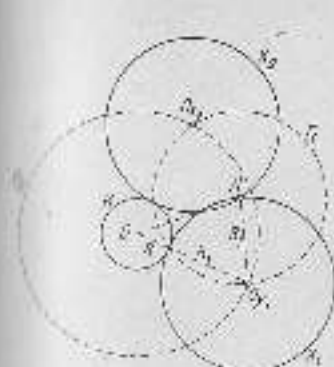
а) $|OO_{K'}| + |O_{K'}A| = (|TO_{K'}| - |OT|) + |O_{K'}A| = 2R_1 - R > |OA|$ бўлса, иккита ички уриниш мавжуд бўлади (66- IV чизма);

б) агар $2R_1 - R = |OA|$ бўлса, битта ички уриниш мавжуд бўлади (66- VII чизма);

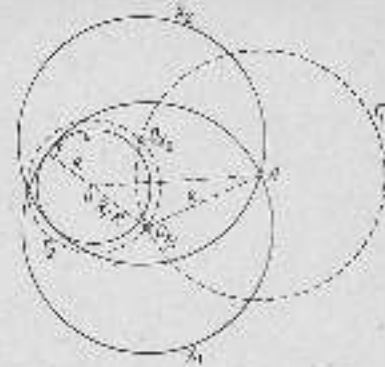
в) $2R_1 - R < |OA|$ бўлса, масала ечимга эга бўлмайди.

Энди, ташқи ва ички уринишларнинг айни бир вақтда мавжуд бўлиш шартларини аниқлайлик.

Берилган айланача ҳам ички, ҳам ташқи уринувчи айланаларнинг бирданига мавжуд бўлиши учун юқорида қурилган



66- III чизма



66- IV чизма

шартлар $(A, B, B$ ва a, b, b шартлар) бир-бирига зид бўлмаганлиги керак.

Шунинг учун юқорида қурилган А), Б), В) муносабатлардан ҳар бирини а), б), в) муносабатлар билан бирма-бир солиштириб чиқамиз;

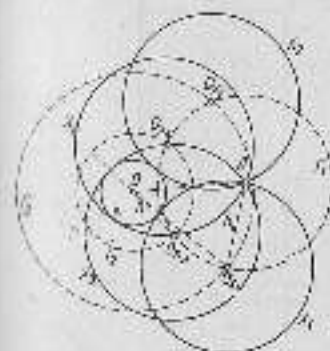
I. а) мавжуд бўлса, А) ҳам мавжуд бўлади.

Шунинг учун а) шарт мавжуд бўлган тақдирда, масаланинг талабига жавоб беришни тўртта айлана мавжуд бўлиб, улардан икkitаси берилган айланача ички уринувчи, икkitаси ташқи уринувчи бўлади (66- V чизма).

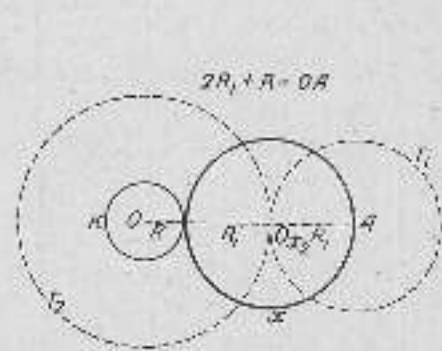
II. А) ва б) шартлар орасида ҳам айднат йўқ, в) бажариб, масаланинг талабига жавоб беришни учта айлана ҳосил бўлиб, улардан икkitаси ташқи ва биттаси ички уринувчи бўлади (66- VIII чизма).

III. А) ва в) шартлар бажариладиганда фақат икkitа ташқи уринувчи айлана мавжуд бўлади (66- III чизма).

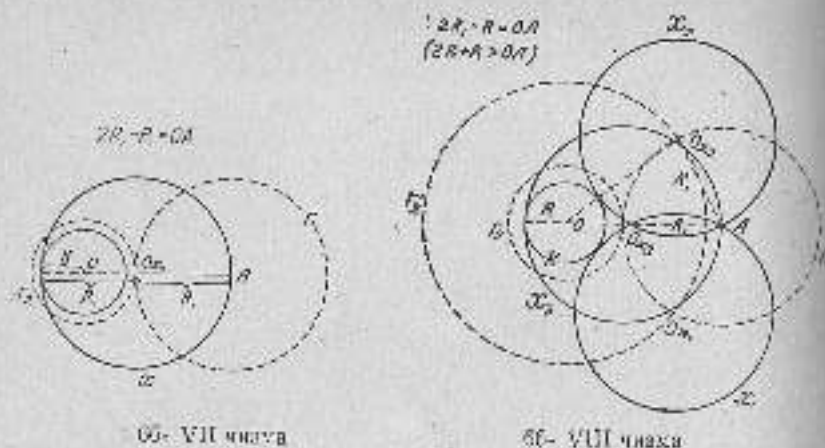
IV. Б) ва в) шартлар бир-бирига зид бўлгани учун бу шартларнинг ҳар бирига тегишли чизмаларни бириктириб бўлмай-



66- V чизма



66- VI чизма



ди, яъни берилган айланага иккита ички ва битта татқи уринувчи айланани бир чизмада топиб бўлмайд.

V. Б) ва б) шартлар ҳам ўзаро вид бўлгани учун чизмада битта татқи ва битта ички уринувчи айлана мавжуд бўлмайд.

VI. Б) ва в) шартлар бир-бирига вид эмас, лекин в) да ҳеч бир ериқ бўлмаганидан, бу ҳолда фикат Б) га тегишли ериқни мавжуд бўлади (66-VI чизма).

VII. Б) ва а) шунингдек, Б) ва б) бир-бирига вид бўлиб, бу шартлар бир чизмада бажарилабди.

VIII. Ниҳоят, Б) ва в) шартлар бир маъноли бўлиб, уларда Б) шартнинг мавжудлигидан в) нинг ҳам мавжудлиги келиб чиқади. Демак, В) шартнинг мавжуд бўлиши масаланинг ечимга эга бўлмаслиги учун старли асос булади.

Шундай қилиб, юқоридаги текширишни қуйидаги жадвал кўринишида ёзиб мумкин:

№	Шартлар	Тошлар айланалар нати	Бўлардан		Чизма
			татқи уринувчи	ички уринувчи	
1	$ 2R_1 - R_2 > OA $	4	2	2	66-V
2	$ 2R_1 + R_2 > OA $				
3	$ 2R_1 - R_2 > OA $	3	2	1	66-VII
4	$ 2R_1 + R_2 > OA $				
5	$ 2R_1 - R_2 < OA $	2	2	0	66-III
6	$ 2R_1 + R_2 < OA $				
7	$ 2R_1 - R_2 = OA $	1	1	0	66-VI
8	$ 2R_1 + R_2 = OA $				
9	$ 2R_1 - R_2 < OA $	0	0	0	—
10	$ 2R_1 + R_2 < OA $				

Тошшириқлар

1. Бу масалани $OA = R$ бўлган ҳол учун ва
- II. $|OA| < R$ бўлган ҳол учун ечиб.

56- масала. Берилган радиус билан шундай айлана чизилсин, у берилган тўғри чизик ва берилган айланага уринсин.

Берилган:

- 1) AB тўғри чизик.
- 2) R_1 радиус.
- 3) $k(O, R)$ айлана.
- 4) $R_1 > R$.

Анализ. Изланган айлана берилган AB тўғри чизикка ва $k(O, R)$ айланага уринувчи $x_1(O_1, R_1)$ айлана деб фарз қилинсин (67-I чизма). Бу айлана AB тўғри чизикка уринган учун унинг O_1 маркази AB тўғри чизикка параллел ва ундан R_1 масофада ётган Γ_1 (ёки Γ'_1) тўғри чизикда ётади (67-II чизма). Бу икки тўғри чизикдан O нуктага яқинриқ бўлганини Γ_1 деб шарт қиламиз.

Изланган x_1 айлана берилган k айланага урингани учун унинг O_1 маркази k айлананинг марказидан $R_1 + R$ (ёки $R_2 - R$) радиус билан чизилган Γ_2 (ёки Γ'_2) айланада ётади (67-II чизма).

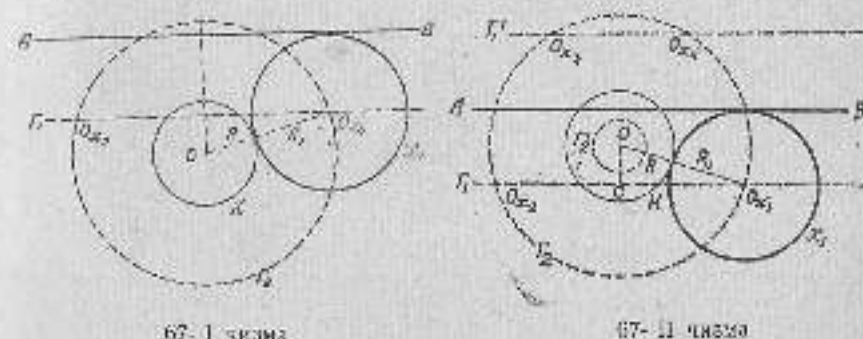
Демак, O_1 нукта бунда айтилган Γ_1 (Γ'_1) ва Γ_2 (Γ'_2) нуктавий тўқилишнинг кесилиш нуктаси бўлади.

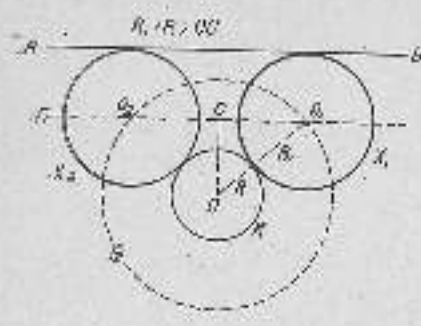
Яънаш ва ишботлашни китобхонага тоштираемиз.

Текшириш. Берилган AB тўғри чизик ва айлананинг бир-бирига нисбатан вазиятига қараб, қуйидаги икки асосий ҳолатнинг бири бўлиши мумкин:

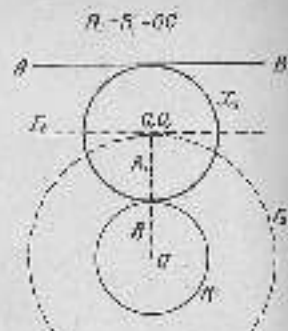
I. AB тўғри чизик ва k айлана умумий нуктага эга бўлган ҳол (67-I чизма).

II. Бу образлар умумий нуктага эга бўлган ҳол (67-II чизма).





67- III чизма



67- IV чизма

Бу асосий ҳолатларнинг ҳар бири берилган R, R_1 ва OC қар-
ма-қаршига қийматларига қараб, яна бир неча ҳолатларга бўлиниб
кетishi мумкин. (Бундаги C нукта - маълум O нуктадан O_1
туғри қизиққа тушirilган перпендикулярнинг асосидир).

Биз бунда қиқат I асосий ҳолати текшириб ўтамиз.

I ҳолда ташқи уришлар қуйидагилардан иборат бўлади:
а) $|R_1 - R| > |OC|$ бўлса, иккита ташқи уринувчи
айлана ҳосил бўлади (67- III чизма).

б) $|R_1 - R| = |OC|$ бўлса, бирташқи ташқи уринувчи
айлана ҳосил бўлади (67- IV чизма).

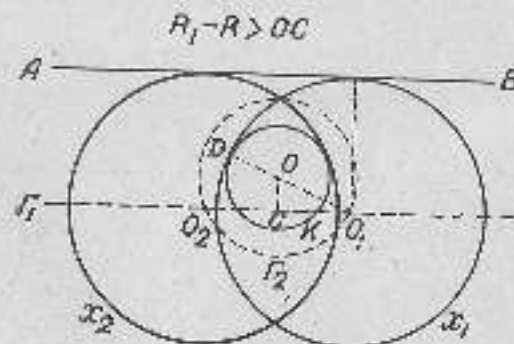
в) $|R_1 - R| < |OC|$ бўлса, масала ечимга эга бўлмайди.

I ҳолда ички уришлар $|OO_1| > |OC|$ бўлса, қуйидагилар-
дан иборат бўлади:

а) $|R_1 - R| > |OC|$ бўлса, иккита ички уринувчи
айлана ҳосил бўлади (67- V чизма).

б) $|R_1 - R| = |OC|$ бўлса, битта ички уринувчи ай-
лана ҳосил бўлади (67- VI чизма).

в) $|R_1 - R| < |OC|$ бўлса, масала ечимга эга бўлмайди.



67- V чизма

Ташқи ва ички уришлар
лар орасидagi боғлиқлиқ-
ларни кўздan кечирайлик:

I. А) а) шартлар мав-
жуд бўлса, ёки қисқаси,
а) шартлар ўзи мавжуд
бўлса, масала учта ечимга
эга бўлиб, топилган айла-
налардан иккитаси
ташқи ва иккитаси ич-
ки равишда берилган айла-
нага уришади (67- VII чиз-
ма).

II. А) билан б) шартлар
мавжуд бўлса, ёки қисқаси,
б) шартлар ўзи мавжуд бўлса, масала учта ечимга эга бў-
либ, топилган айла-
налардан иккитаси ташқи равишда
урилиб, биттаси эса ички равишда уришади (67- VIII чизма).

III. А) билан а) шартлар мавжуд бўлса, айланага ташқи
равишда уринувчи иккитаси ва айлана соғини мумкин
бўлади (67- III чизма).

IV. Б) билан а) шартлар бир-бирига анд бўлаганидан, бу
шартлар бир вақтда бажарилмайди.

V. Б) билан б) шартлар биргадa бажарилмайди.

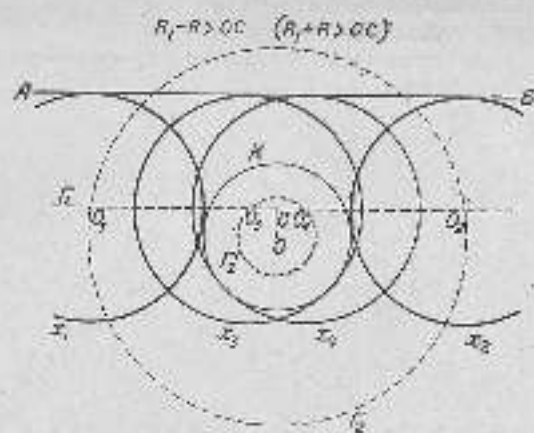
VI. В) билан в) ёки а) шарт ўзи мавжуд бўлганда, масала
ечимга эга бўлмайди.

AB туғри қизиқ билан A айлана умумий нуктага эга бў-
лмаган ҳол учун бажарилган текширишнинг якуний қуйидаги
жадвал кўринишида ёзиб мумкин:

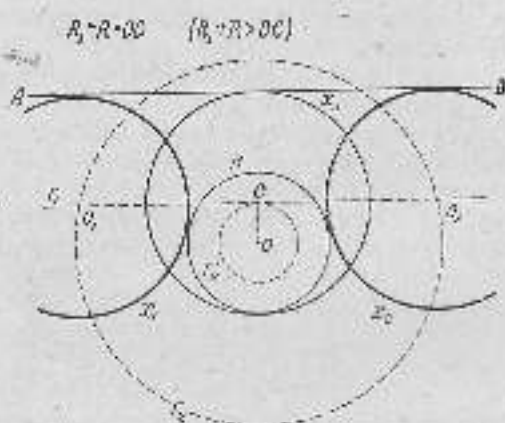
№	Шартлар	Тоғлиқлиқ байандар сони	Бундан		Чизма
			ташқи уришлар	ички уришлар	
1	$ R_1 - R > OC $	1	2	2	67- VII
2	$ R_1 - R = OC $	1	2	1	67- VIII
3	$ R_1 + R > OC $	2	2	0	67- III
4	$ R_1 + R = OC $	1	1	0	67- IV
5	$ R_1 + R < OC $	0	0	0	-

Топшириқ

1. Берилган тўра чизма ва берилган айлана умумий нуктага эга бў-
лмаган ҳолда текширилган масала ечимлари бунда $R_1 < R$ дей олиб, масаланинг
ечилиши текширилган (67- IX, X ва XI чизмалар; масала эга бўлиб 8 та
ечимга эга бўлади).



67-VI чизма

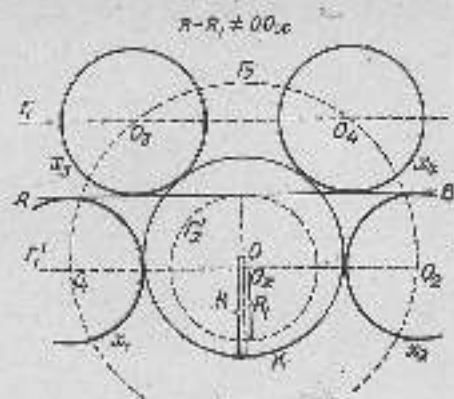


67-VII чизма

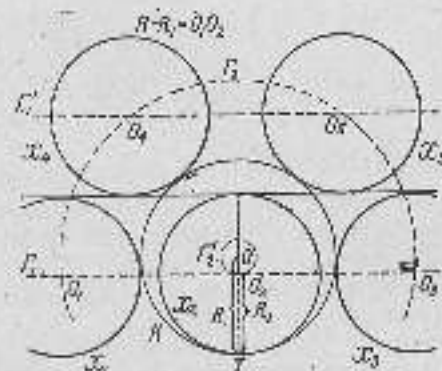
57- масала. Асоси, учидиги бурчли ва асосига туюнриланган медианаси берилган учбурчлик ясанг.

Анах. Ивланган ABC учбурчлини тахминан чизиб қўяйлик (68- I чизма). Бу учбурчлининг маълум элементлари $|BC| = a$, $\hat{A} = \alpha$ ва $|AD| = m$, бўлсин.

ABC учбурчлининг BC ясини яғаб олсак, унинг B ва C учлари топилди. Демак, бу учбурчлини яшиш учун унинг учинчи учи бўлган нукта A нуктави (ёриданчи нуктали) топиш кифоя. A нуктани унинг қуйидаги икки хоссаси бўйича аниқлаймиз:



67-IX чизма

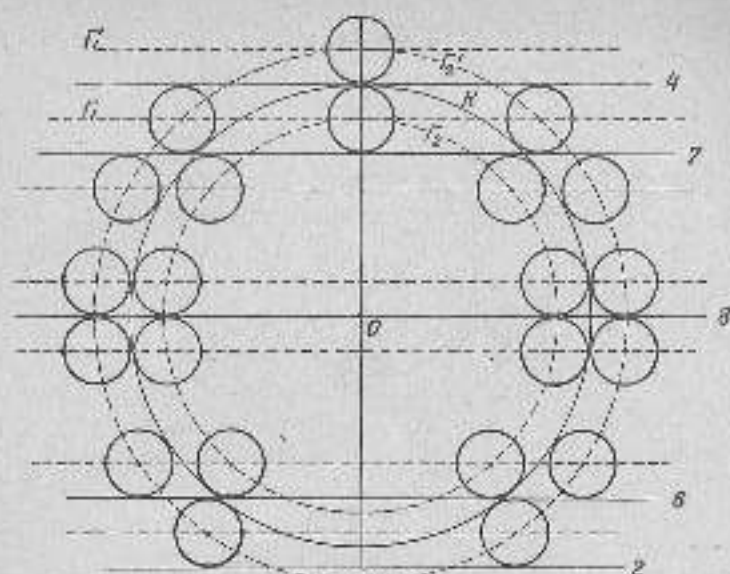


67-X чизма

1) A нукта маълум D нуктадан маълум m масофата ётади. Демак, A нукта D марказдан m кесмага тенг радиус билан қирилган айланда ётар экан (I нуктавий тўплам).

2) Учбурчак учидиги $\hat{A} = \alpha$ туюнри учун каланаётган нукта, $|BC| = a$ кесма α бурчак остиди кўринадиган нукталарнинг нуктавий тўпламига қарапти экан (II нуктавий тўплам).

Демак, A нукта бу нуктавий тўпламларнинг умумий нуктаси бўлади. Шу билан келган учбурчлининг A учини топиш йўли аниқланди, яъни масалани ечиш йили тузилади.



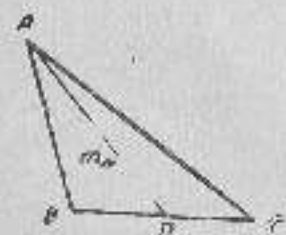
67- XI чизма

Ясиш. I. BC асоснинг ўртаси D нуқтага тошиб, бу нуқтадан берилган m_a кесмага тенг радиус билан k айлана чизамиз (68- II чизма).

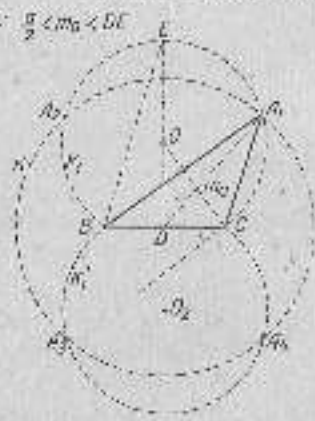
II. BC кесма α бурчак остида кўринадиган нуқталар тўплахи бўлган k_1 ва k'_1 айланаларининг ёйларини чизамиз.

III. Чизилган нуқтавий тўплахларнинг кесилган нуқталари малаган нуқта бўлади.

IV. Топилган нуқталардан ҳар бирики берилган кесманинг B ва C ушлари билан туташтирсак, тўртта тенг учбурчак ҳосил бўлади ($\frac{a}{2} < m_a < DE$ (68- II чизмада булардан фақат биттаси A_1BC ни кўрсатдик).



68- I чизма

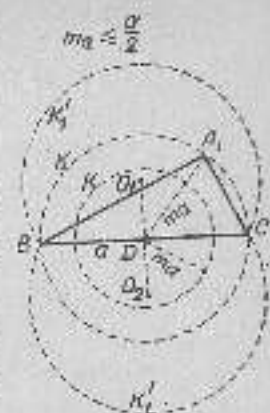


68- II чизма

Исбти. Юқоридиги айў билан топилган учбурчакларнинг ҳар бири масаланинг талабига жавоб беради, чунки исалишига кўра буларнинг асоси $|BC| = a$ бўлиб, $|A_1D| = m_a$ ва $\angle A_1BC = \hat{A} = \alpha$.

Текшириш. Масаланинг ечилишмаслиги ва етилишда неати ечимга эга бўлган берилган бурчакнинг қийматига ва a, m_a, DE кесмалар ўзўшмақдорининг ўзаро мунсабатларига боғлиқдир. (Бундан DE — берилган α асоснинг ўрта перпендикуляри билан k ёйнинг E нуқтада кесилишидан ҳосил бўлган кесмадир; ҳаққига қаранг.)

Текшириш натижасини қуйидаги жадвалдан кўриш мумкин:



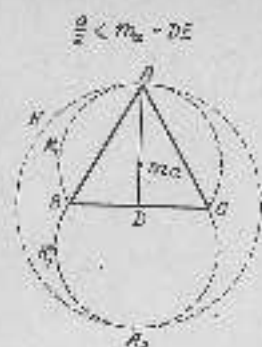
68- III чизма

$\hat{A}$	a, m_a ва DE кесмаларнинг ўзаро мунсабатлари	Қилиш натижаси	Чизма
$\hat{A} < 90^\circ$	$\frac{a}{2} < m_a < DE $	4	68- II
$\hat{A} < 90^\circ$	$\frac{a}{2} > m_a$	0	68- III
$\hat{A} < 90^\circ$	$\frac{a}{2} < m_a = DE $	2	68- IV
$\hat{A} < 90^\circ$	$\frac{a}{2} < m_a > DE $	0	68- V
$\hat{A} = 90^\circ$	$\frac{a}{2} = m_a$	∞	68- III
$\hat{A} = 90^\circ$	$\frac{a}{2} \neq m_a$	0	68- III
$90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$	$\frac{a}{2} > m_a > DE $	4	68- VI
$90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$	$m_a > \frac{a}{2} > DE $	0	68- VII
$90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$	$m_a = DE $	2	68- VIII
$90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$	$m_a < DE $	0	68- IX

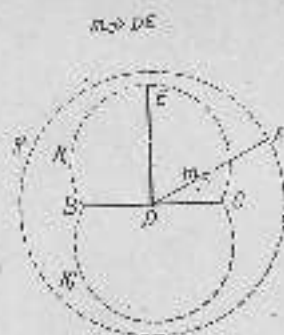
Эслатма. 68- II чизмадаги тўрт бурчакдан ADE учбурчакдан кесма-ни қуйидагича шифоқлаш мумкин:

$$|DE| = |BD| + |ED| = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$$

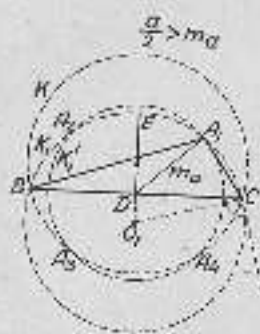
Бу ҳаққини текшириш натижасини DE кесма билан берилган α кес-ма ва $\hat{A}$ бурчак остида янги мунсабат борлигини кўрсатади.



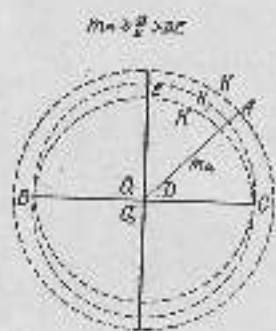
68-IV чизма



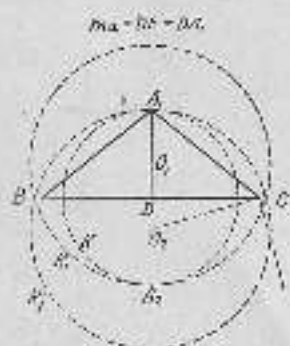
68-V чизма



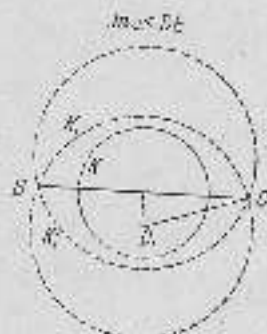
68-VI чизма



68-VII чизма



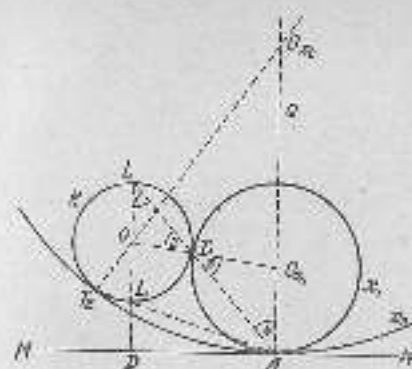
68-VIII чизма



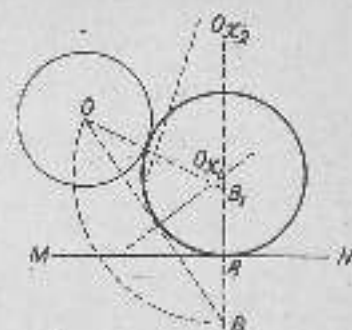
68-IX чизма

58- масала. Берилган тўғри чизиққа маълум нуқтада ва берилган айланани уринувчи айлана қилин.

Анализ. Изланувчи айлана берилган k айланани T_1 нуқтада ва берилган MN тўғри чизиққа маълум A нуқтада уринувчи O_1 марказли айлана деб фарз қилайлик (69- I чизма).



69- I чизма



69- II чизма

Унинг маркази AQ ($\perp MN$) тўғри чизиқ билан OT_1 кесма давомининг кесилиш нуқтасида ётиши керак (T_1 — уриниш нуқтаси). (AQ) — маълум, лекин (OT_1) — номатлум, чунки T_1 нуқта ҳозирча топилган эмас. T_1 нуқтага топиш йўлини қидиришимиз: бунинг учун A нуқтага тахминан олган T_1 нуқта билан туташтириб, AT_1 кесмани берилган k айлана билан бирорта L нуқтада кесилгунча давом эттиришимиз. Чизманинг тўзилишига мувофиқ: $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4$ бўлади; шунинг учун $(OL) \parallel (AQ)$, яъни $(LO) \perp (MN)$ бўлади.

Демак, изланган T нуқтага топиш учун $(OD) \perp (MN)$ ни қилиб, унинг k айлана билан кесилган L ва L_1 нуқталарини A нуқта билан туташтириш лозим; бу тўғри чизиқлар берилган айлана билан кесилиб, T_1 ва T_2 нуқталар (ёрдамчи фигуралар) ни ҳосил қилади. OT_1 ва OT_2 тўғри чизиқлар эса AQ перпендикуляр билан кесилиб, O_{x1} ва O_{x2} марказларни ҳосил қилади. (Бу марказларни AT_1 ва AT_2 кесмаларининг ўрта перпендикулярини (AQ) билан кеситириб ҳам топиш мумкин.)

Демак, изланган айланаларнинг марказлари III ва IX нуқтавий тўвламларининг кесилиш нуқтаси сифатида топилади экан.

Тоғлиқ ириқлар

1. Ёнишнинг қилган ёнишларини бахариш.
2. 69- II чизмада фойдаланиб, ҳосилнинг кесилиш (ҳок) сўлашқан тўлашқини.
3. Айлана ёни шаклидаги k текер йўл билан тўғри чизиқ шаклидаги MN текер йўл берилган. Бу k бўлган MN йўлга унинг маълум A нуқтаи оғилан равиш бўлиб ўтгандан паси йўлни қидириш лозим.

21- §. МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

149. Асоси, унинг кесилишдаги учининг берилган нуқтадан узилиш маълум бўлган текер ёни рабуртах ҳок.

150. Берилган тўғри чизиққа уринувчи маълум радиусли шундай айлана чилишқини, унинг маркази ҳўндаги шартлардан бирини қаноатлантиришқини.

- I. Берилган нуқтадан берилган масофада ётсин;
- II. Берилган иккидан тўғри шаклда берилган масофада ётсин;
- III. Берилган икки нуқтадан тенг узорликда ётсин;
- IV. Берилган икки параллел тўғри чизикдан тенг масофада ётсин;
- V. Кесинтувчи икки тўғри чизикдан тенг масофада ётсин;
- VI. Маълумчи ширкалдан берилган кесма берилган бурчак остида қўйилсин.

151. Маълум R радиусли ва берилган M нуқтадан ўтувчи ҳамда маркази олдики масофадан олтига таянган бирини қаноатлантирувчи айлана чизилсин.

152*. Берилган тўғри чизикка тенг маълум нуқтада уринувчи ва уларини марказлари 150- масофадан олтига ширдан бирини қаноатлантирувчи айланалар чизилсин.

153*. Берилган айланани тенг маълум нуқтада уринувчи, маркази 150- масофадан олтига ширдан бирини қаноатлантирувчи айлана чизилсин.

154*. Берилган параллел икки тўғри чизикка уриновчи, ҳўйидаги ширлардан бирини қаноатлантирувчи айлана чизилсин;

I. Берилган нуқтадан ўтсин.

II. Берилган ўткичи тўғри чизикка уриносин.

III. Берилган айланани уриносин.

155. Ушбу тенг айланани икки (ёки танқис) уринувчи айлана чизилсин.

156*. Қарима-қарин икки ушб маълум икки нуқтада бўлиб, ушунчи ушб берилган айланани ётувчи раио ясан.

157*. Маълум радиусли ва берилган A нуқтадан ўтувчи ҳамда берилган B нуқтадан ушга ушунлигини уриновчи маълум a кесмани тенг бўлиб айлана чизилсин.

158*. Маълум r радиусли ва берилган O нуқтадан ўтиб, берилган иккинчи O нуқтадан маълум a бурчак остида ҳўриувчи айлана чизилсин.

159*. Маркази берилган шўндай айлана шўзинки, берилган иккинчи нуқтадан ушга ўшунлигини уриновчи маълум узўлигида бўласин.

160*. Бир бурчак ва қолган бурчакларинини ушларидан тўшқрилган икки баълидиги берилган учбурчак ясан.

161*. Асоси ва икки баълидиги берилган параллелотрапи ясан.

162*. Берилган радиус билан берилган тўғри чизикнинг маълум нуқтада уринувчи айлана чизилсин.

163*. Берилган радиус билан шўндай айлана чизилсинки, у кесинтувчи икки тўғри чизикка уриносин.

164*. Берилган A нуқтадан ўтиб, берилган тўғри чизикка маълум B нуқтада уринувчи айлана чизилсин.

165*. Берилган бурчакнинг томонларига уринувчи шўндай айлана чизилсинки, у бурчакнинг бир томонига олдидаки берилган нуқтадан ўтсин.

166*. Ўшаро кесиниш учбурчак қосми қиладиган ушга тўғри чизикка уринувчи айлана чизилсин.

167*. Берилган радиус билан берилган икки нуқтадан ўтувчи айлана чизилсин.

168*. Берилган радиус билан берилган нуқтадан ўтиб, берилган тўғри чизикка уринувчи айлана чизилсин.

169*. Берилган радиус билан берилган икки айланани уринувчи айлана чизилсин.

170*. Берилган радиус билан берилган нуқтадан ўтиб, кесинтувчи икки тўғри чизикдан тенг катарлар ажратувчи айлана чизилсин.

171*. Берилган радиус билан берилган айланани уриновчи, кесинтувчи икки тўғри чизикдан тенг катарлар ажратувчи айлана чизилсин.

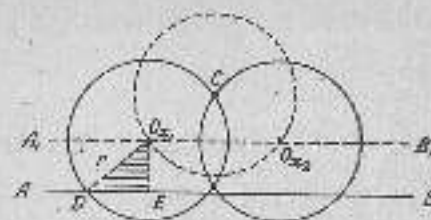
172*. Берилган радиус билан берилган нуқтадан ўтиб, берилган тўғри чизикдан маълум узўлигини катар ажратувчи (70- тизмага қаранг) айлана чизилсин.

173*. Берилган радиус билан берилган айланани уриновчи, берилган тўғри чизикдан маълум узўлигини катар ажратувчи айлана чизилсин.

174*. Берилган радиус билан кесинтувчи икки тўғри чизикдан бирини уриновчи, иккинчидан маълум узўлигини катар ажратувчи айлана чизилсин.

175*. Берилган радиус билан шўндай айлана шўзинки, ушунчиркази берилган бурчакнинг бир томонига ётиб, бурчакнинг иккинчи томонидан маълум узўлигини катар ажратсин.

176*. Берилган радиус билан шўндай айлана чизилсинки, у кесинтувчи икки тўғри чизикдан ширдан a узўлигини ва иккинчидан b узўлигини катар ажратсин.



70- тизма

177*. Берилган радиус билан шўндай айлана чизилсинки, у берилган бир тўғри чизикка уриновчи, бошқа иккинчи тўғри чизикдан тенг катарлар ажратсин.

178*. Берилган тўғри чизикка ва берилган айланани тенг маълум нуқтада уринувчи айлана чизилсин.

179*. Икки айланани (ушлардан бирини берилган нуқтадан) уринувчи айлана чизилсин. Бунда қўйидаги уш қосми қаранг:

1) маълумчи айлана берилган айланалардан танқарини;

2) берилган айланалардан бирини кесмида айлана шўнда бўлиб, кесинтувчи ушунчирказида;

3) берилган айланаларнинг иккинчиси ҳам кесмида айлана шўнда.

180*. Берилган секторни чегаралавчи икки радиусга ва сектор ёйига уринувчи икки айлана чизилсин.

181. Берилган айлана шўнда тенг радиусли шўндай ушга айлана шўзинки, уларнинг ҳар бири қолган секторга ва берилган айланани уриносин.

182*. Асоси, ушга туширилган баълидиги ва танқис чизилган айланани шўнинг радиуси берилган учбурчак ясан.

183*. Асоси, ушлардан бурчакни қосми ушдан туширилган баълидиги берилган учбурчак ясан. (II ва VII нуқтадан ўтсинлар)

184*. Бир бурчак ва икки дўгосидаки берилган параллелотрапи ясан.

185. Асоси, ушлардан бурчак ва асоси билан ушга ўтказилган биссектрисанининг кесмидаки нуқтаи берилган учбурчак ясан.

186*. Икки томон ва дўгосалари орасидаги бурчак берилган параллелотрапи ясан.

187. a асоси, ушлардан A бурчакни ва b баълидаки берилган учбурчак ясан.

188. Асоси, ушлардан бурчакни ва ёи томонига тўшқрилган баълидиги берилган учбурчак ясан. (Бў масала III бўйда ҳам берилган, 41.)

ГЕОМЕТРИК АКСЛАНТИРИШЛАР МЕТОДИГА КИРИШ

22-§. УМУМий ТУШУНЧАЛАР

А. Геометрик акслантиришнинг асосий мазмуни

Миктабларимизнинг энг муҳим вазифаларидан бири ўқувчиларда диалектик материалистик дунёқарашни тарбиялашдир.

Бу вазифани бажариш йўлларида бири математика лареларида ўқувчиларнинг диққатини ўзгарувчан миқдорлар орасидаги функционал боғланишларга системали равишда жўлаб этиб боришдан иборатдир.

Геометриянинг деярли ҳамма мавзуларини ўтингда яъ, айниқса, геометрик акслантиришларни ўргатишда бу ғояни амалга ошириш учун жуда кенг имкониятлар бор.

Ҳақиқатан, геометрик акслантиришда доир ҳар бир теоремани исботлашда ва масалалар ечишда, берилган фигура учун топиладиган образини шакли ва вазияти ўша фигуранинг шакли ва вазиятигагина эмас, балки, акслантиришнинг хисса ва унинг партияга қарай ҳам ўзгариб туришини ўқувчилар қўзғатиб борадилар ва геометрик фигураларни доимий ўзгаришда, ҳар қандай эканлигига чуқур ишонт ҳосил қиладилар.

Ўқувчилар геометрик фигураларнинг бир вазиятдан иккинчи вазиятга ва бир шаклдан иккинчи шаклга ўтиб ўзгариб туришини ёзувдасига эмас, балки бевосита ўз оқсида тасаввур этишга ва бундан тегишли ҳулосалар чиқаришга ўргатадилар ва етарли даражада мисола ҳосил қиладилар.

Бунинг натижасига: ўқувчилар онгда илмий дунёқараш — дунёга материалистик диалектика дўқтан назаридан қарашдек муҳим бир хусусият шиқланади, улар геометрияни юксак назарий-ғоявий савидада чуқур ўзлаштирадилар ва фаннинг юқори чуққиларини эсслашта истойдил янгиладилар.

Ўемас, геометрик акслантиришлар ҳозирги замон геометриясининг етакчи ва самарали ғояларидан бири бўлиб, у ёш авлодни замонамизга муносиб савида тарбиялашдек муқаддас бир соҳада ўқитувчи қўлидаги муҳим бир қуролдир.

Б. Геометрик акслантиришларнинг татбиқи ва ўқитилиши

Геометрик акслантиришларнинг ғоявий мазмуни ҳақида юқориди айтилган маҳсада тўлароқ эришнинг учун ўқувчилар геометрик акслантиришнинг аҳамияти тухалардан иборатлигини аниқроқ тасаввур этишлари зарур.

Геометрик акслантиришлар билан шўсулланини ёш авлодини илмий дунёқарашини шакллантиришга хисса қўшини билан бирга, уларга илмий тадқиқот ишларини бажаришда, кўпгина теоремаларни исботлашда, масалалар ечини ва функцияларнинг графикларини ясашда ёрдам беради.

Шунинг учун ўрта мактаб ва илк ўқувчиларининг математика программаларида геометрик акслантиришларни ўргатишга кенг ўрин берилган.

В. Акслантиришлар ва уларнинг моҳияти

Акслантириш (акс этириш) математиканинг энг муҳим тушунчаларидан бири бўлиб, у қуйидагича таърифланади:

1- таъриф. Бирор $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$ тўпламининг ҳар бир x элементи учун маълум f қонун (ёқилда) ёрдаки билан $B = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots\}$ тўпламининг аниқ бир $y_n = f(x_n)$ элементини (элементларини) мос келтиришга A тўпламини B тўпламга акслантириш (акс этириш) дейилади ва у қуйидагича белгиланади:

$$y = f(x) \quad \text{ёки} \quad f: x \rightarrow y. \quad (1)$$

Бу акслантиришда x га мос келувчи y элемент x нинг акси ёки образи, x эса y нинг акси ёки прообрази дейилади. x га мос келадиган y элементни тақияда иллатиладиган f қонун мослик қонунини дейилиб, у аналитик, график, жадвал усуллари ёки бирор қандай ил.ф. воситасида берилиши мумкин.

2- таъриф. Агар A тўпламининг ҳар бир элементига B тўпламининг биттагина элементи мос келиши билан бирга B тўпламининг ҳам ҳар бир элементига A тўпламининг биттагина элементи мос келса, A тўпламининг B тўпламга бундай акслантириши *ўзаро бир қийматли акслантириш* дейилади.

A тўпламининг B тўпламга ўтказувчи бундай ўзаро бир қийматли акслантиришда B тўпламининг A тўпламга акслантирувчи қайтма (қарама-қарши) акслантириш ҳам албатта мавжуд бўлади. Бунда B тўпламининг ҳар бир элементи A тўпламининг биттагина элементига мос келтирилади.

3- таъриф. Бирор тўпламининг шу соҳадаги тўпламга акслантирувчи, яъни A тўпламининг яъни A тўпламга ўтказувчи бир қийматли акслантириш A тўпламининг *акслантириши* деб аталади.

Қўйида текислик фигураларининг шу текислик фигураларига акслантирувчи акслантиришлар билан танишамиз.

Г. Геометрик акслантиришнинг баъзи юллари

Маълумки, нуқталарнинг ҳар қандай тўпламига *фигура* дейилади ва фигуранинг ҳар бир нуқтаси шу тўпламининг *элементи* деб аталади. Шунинг учун ҳар бир геометрик фигурани *нуқтавий тўплам* деб қараш мумкин. Масалан, кесми нуқталарининг тўплами, тўғри чизик нуқталарининг тўплами, учбурчак нуқталарининг тўплами, куб нуқталарининг тўплами ва х. к.

Бир қанча фигураларни нуқталар тўпламларидан тузилган тўплам деб қараш мумкин. Масалан, кўпбурчакнинг томонла-

ри ва диагоналлари туплаши, битта айланага уринувчи тўғри чизиклар тўплаши, призма ёқлари ва диагональ оссимляри тўплаши, битта сферага уринувчи текисликлар тўплаши ва ҳ. к.

4- таъриф. Текислик нуқталари тўлашидан иборат бирор геометрик фигурани маълум қонун ёрдамида аксантириб, шу текисликнинг иккинчи бир фигурасига ўтказиб — *геометрик алмаштириш* дейилади (бу таърифни 3- таъриф билан таққослаб, унинг хусусий ҳоли аксантиришга ишора қилинади). Текисликни нуқта атрофида буриш, марказий симметрия, ўқ симметрияси, таралаб қўтириш ва гомотетиялар геометрик алмаштиришнинг энг содда қурилушлари ҳисобланади.

Геометрик аксантиришни яна қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

5- таъриф. Маълум ҳолада асосида текисликнинг ҳар бир M нуқтасига шу текисликдаги аниқ M' нуқта мос келтирилса, текисликдаги нуқталарни аксантириш йўли аниқланган ёки қисқача, аксантириш берилган дейилади ва бу символик равишда қуйидагича кўрсатилади:

$$f(M) = M'. \quad (1)$$

Бундаги M' нуқта M нуқтанинг *образи* (яъни), M нуқта эса M' нуқтанинг *прообрази* (асли) дейилади. Бундаги f символи аксантиришнинг аниқ бир хил хил қўйилган кўрсатилади.

Текис F фигурани ҳам ҳар бир M нуқтасига мос M' образлар тўпламидаги иборат F' фигура F фигуранинг образи дейилиб, F фигура эса F' фигуранинг прообрази дейилади ва бу ҳам символик равишда қуйидагича кўрсатилади:

$$f(F) = F'. \quad (1')$$

(1') нинг маъносини қуйидагича баён қилиш ҳам мумкин: ҳарасатдаги M нуқта F фигуранинг ҳамма нуқталари вазиғини олиб ўтганда f аксантириш бўйича M га мос M' нуқта ҳам ўз ўрнларини ўзгартириб, F' фигурани қилиб беради.

M' нуқтанинг вазиғи M нуқтанинг вазиғига баълиқ бўлгани учун M нуқта M' нуқтанинг аргументи, M' нуқта эса M нуқтанинг функцияси дейилади.

(1') даги F ва F' фигураларнинг ҳар бири биттагина нуқтадан, айрим нуқталар тўлаимида, ихтиёрий чизикдан ёки текисликнинг бирор бўлигидан, ёки текисликнинг иборат бўлиши мумкин.

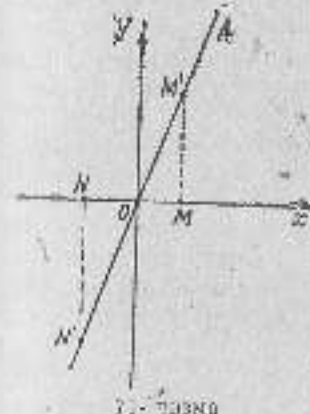
Фигураларни аксантириш аналитик усулда ҳам берилган мумкин.

1- мисол. 71- чизмадаги OX ўқда ётган нуқталарни $y = -kx$ ($k \neq 0$) хатталама ёрдамида координаталар билимдан ўтувчи тўғри чизикдаги нуқталарга аксантириш мумкин. Бунинг учун OX ўқдаги $M(x, 0)$ нуқтага координаталари x ва $y = -kx$ бўлган нуқтани мос келтириш керак. Бу ўрта мактаб курсидан маълум бўлган тўғри пропорционаллик графиги беради.

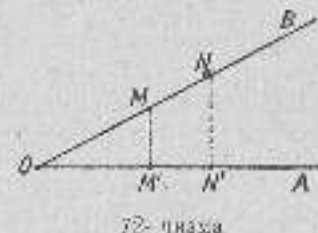
Агар M нуқта OX ўқ бўйича силжиса, унга мос M' нуқта OA тўғри чизик бўйича ҳаракатланади.

2- мисол. Ихтиёрий AOB ўткир бурчакнинг бир томонидаги нуқталарни унинг иккинчи томонидаги нуқталарга турлича аксантириш мумкин; булардан бири OB томон нуқталарига шу нуқталарнинг OA томонидаги ортогонал проекцияларини мос келтиришдир (72- чизма).

3- мисол. 73- чизмадаги AOB бурчакнинг OB томонидаги $M, N, \dots$ нуқталарга OA томонидаги $M', N', \dots$



71- чизма



72- чизма

нуқталарни шу бурчакнинг биссектрисасига ўтказилган перпендикулярлар воситасида мос келтириш мумкин.

Олган натижаларимизда M нуқтага M' ни, N нуқтага N' ни ва ҳақоқат мос келтирдик. OB бурча ҳар қандай нуқтага шу аксантиришга асосан OA бурчада унга мос бўлган нуқта-ни топиш мумкин. Шунинг учун қуйидагиларни ёза оламиз:

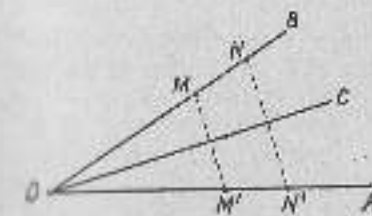
$$f(M) = M', \quad f(N) = N', \dots$$

Худди шундай OA бурчанинг ҳар бир M' нуқтаси учун OB бурчада аниқ бир M нуқтани топиш мумкин, яъни қуйидагилар ўринлидир:

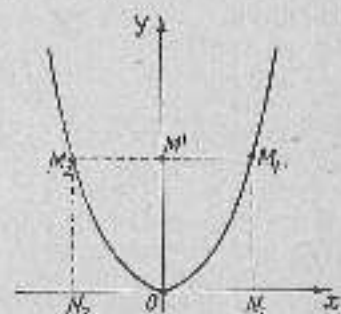
$$f^{-1}(M') = M, \quad f^{-1}(N') = N, \dots$$

Шунинг учун бундаги аксантиришлар қайтма аксантириш бўлади.

4- мисол. 74- чизмадаги $y = x^2$ тенглаха билан берилган парабола



73- чизма



74- чизма

нукталарига унинг симметрии ўқи OY нинг нукталарини мос келтириш мумкин. Бунинг учун параболда ётган M_1 нуктанинг абсциссаси x бўлса, M' ($0, x^2$) нуктани унга мос келтириш деб ҳам қараш мумкин.

Юқоридаги 1, 2 ва 3-мисолларнинг ҳар бирида образнинг табиғий прообразга (M нуктасига) ҳар қандай M' нуктаси битта прообразга (O дан бошқа M' нуктасига) эга бўлиб, 4-мисолдаги OY рағга (M_1 ва M_2 нукталарига) эгалар.

Агар айлана нукталарига унинг диаметридаги ортогонал проекцияларига мос келтирилса, диаметрининг ўзларидан бошқа ҳар бир нуктаси айланада иккита прообразга эга бўлади.

Агар доира нукталарига доиранинг бирор диаметридаги ортогонал проекцияларига мос келтирилса, диаметрининг ўзларидан бошқа ҳар қандай нуктасининг прообразлари шу нукта-чексиз кўп нукталаридан иборат бўлади.

Шундай қилиб, геометрик акслантиришларда ҳар бир нуктанинг прообразы биттагина нуктадан, иккита нуктадан ва чексиз кўп нукталардан иборат бўлиши мумкин.

Геометрияда ҳар бир нуктасининг прообразы биттагина нукта бўлган образларни ҳосил қилувчи акслантиришлар катта аҳамиятга эгалар. Бундай акслантиришларда, одатда, ўзаро бир қийматли акслантириш дейилади ва бундаги f прообраз билан f^{-1} образ дейилади.

Юқорида кўрилган мисоллардан 1, 2, 3-лари ўзаро бир қийматли акслантириш бўлиб, 4-мисолдаги акслантириш эса ўзаро бир қийматли эмас.

Агар $f(M) = M'$ акслантириш ўзаро бир қийматли акслантириш бўлса, ҳар бир M' образга биттагина M прообраз топилган образдан прообразга нуктага M ни мос келтирувчи (яъни акслантиришга нисбатан тескари) акслантириш f^{-1} акслантириш билан белгиланади:

$$f^{-1}(M') = M.$$

Геометрияда учрайдиган ҳамма ўзаро бир қийматли акслантиришлар ичидя ҳаракат деб аталувчи акслантиришларданди; агар акслантиришда ҳар қандай нукта M ва N нукталарини туташтирувчи MN кесма шу нукталарга тенг бўлса, бундай акслантириш ҳаракат деб аталади.

Демак, ҳаракатда акслантирилувчи фигуранинг ҳар икки

нуктаси орасидаги масофа ўзгармайди (сакланади), яъни ҳаракат қайтма акслантиришдир.

Юқорида кўрилган мисоллардан учинчиси ҳаракатдир (73-чизма), чунки аялишичи кўра MM' билан NN' кесмалар OS биссектрисасига перпендикуляр бўлгани учун $|ON| = |OV'|$ ва $|OM| = |OM'|$; бундан $|MN| = |M'N'|$. Қолган учта мисолда кўрилган акслантиришларнинг бирортаси ҳам ҳаракат бўла олмади.

Агар f акслантириш ҳаракат бўлса, бу акслантириш ўзаро бир қийматли бўлади. Ҳақиқатан, A' образ битта прообразга эмас, балки иккита A_1 ва A_2 прообразга эга деб фарз қилайлик. Бу ҳолда ҳаракатнинг таърифида кўра $|A_1A_2| = |A'A'| = 0$ бўлиши керак; яъни A_1 ва A_2 нукталар устма-уст тушибди лозим, аммо A_1 ва A_2 нукталар ҳар хил бўлгани учун бу тенглик бажаришмайди. Демак, ҳаракат натижасида ҳар бир образ биринчи прообразга эга бўлиб, акслантириш ўзаро бир қийматли бўлади.

Агар P фигура ҳаракат бўлган акслантириш натижасида P' фигурaga ўтса, P ва P' фигуралар ўзаро тенг деб аталади. Ҳаракат билан тенгликнинг таърифидадан маълум бўладики, ҳаракат тенг фигураларнинг нукталари орасидаги бир қийматли кесмалар, яъни ҳаракат ҳар бир фигурани ўзига тенг фигурaga ўтказувчи акслантиришдир.

23-§. АКСЛАНТИРИШЛАР ГРУППАСИ ҲАКИДА ТУШУНЧА

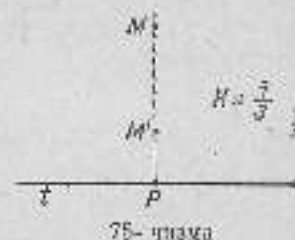
Геометрияда айрим акслантиришлар билан бир қаторда маълум талабларга жавоб берувчи акслантиришлар топилми жуда аҳамиятлидир. Булардан группа деб аталган гу-ламалар ила ҳам муқимроқ аҳамиятга эга. Акслантиришлар группасига доир бир мисол келтирайлик.

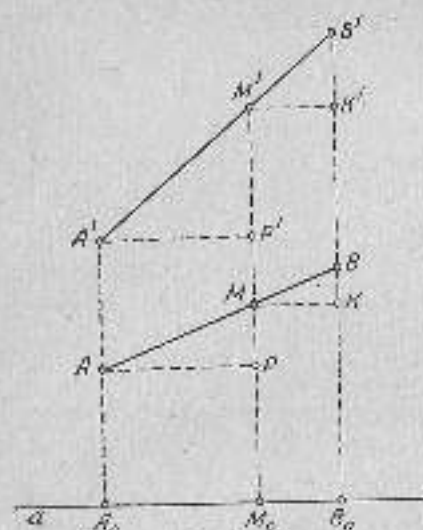
Текисликда бирор t тўғри чизиқ олиб, бу тўғри чизиқда ётмаган бирор M нуктани белгилab қўяйлик (75-чизма).

M нуктани қўйилган талабларга жавоб берувчи M' нуктаси акслантиришлар: 1) M нукта t га перпендикуляр MP тўғри чизиқда ва M нукта билан бирга t тўғри чизиқнинг бир таърифида ётади (P нукта MP перпендикуляр билан t тўғри чизиқнинг кесилиш нуктасидир);

$$2) |PM'| : |PM| = k > 0 \text{ (чизмада } k = \frac{1}{3} \text{)}.$$

Бундай акслантириш, одатда текис қисим ($k < 1$) ёки текис чўзиш ($k > 1$) деб аталади. Биз уни $f(M)_k = M'$ кў-ринишда белгилаймиз. Бундаги k қисим ёки чўзиш коэф-фициентидир.





76-чиизма

Бу аксантиришни яхшироқ тасаввур этиш учун бир-икки фигурани аксантириб кўрайлик.

1-мисол. Ҳар қандай кесмаги бирор тўғри чизикқа нисбатан k коэффициент бўйича қўзғасак, она бирор кесма ҳосил бўлади, яъни $f(AB)_\alpha = A'B'$.

Буни исботиш учун 76-чиизмдаги AB кесмани ундаги α тўғри чизикқа нисбатан $k=2$ коэффициент бўйича қўзғиб кўрайлик.

Бу ҳолда $f(A)_\alpha = A'$ ва $f(B)_\alpha = B'$ бўлади. Берилган AB кесмани ҳар қандай M нуқтаси бу аксантиришда $A'B'$ кесмасининг бирор M' нуқтасига ўташини исбот қилиш учун $f(M)_\alpha = M'$ ни ҳам исбот қилиш керак.

$M'A'$ ва $M'B'$ кесмалар битта $A'B'$ тўғри чизикқа қарашлилигини исбот қилиш қийин. Бунинг учун бу икки кесманинг берилган α тўғри чизикқа бир хил бурчак остида оғилиши исбот қилиш керак, яъни $A'P' \parallel \alpha$ ва $M'K' \perp \alpha$ кесмаларини ўтказиш латтижасида ҳосил бўлган $\angle M'A'P'$ нинг $\angle B'M'K'$ га тенглигини исбот қилиш керак (бундаги P' ва K' нуқталар $A'P'$ ва $M'K'$ тўғри чизикларининг $(MM') \perp \alpha$ ва $(BB') \perp \alpha$ лар билан кесилиш нуқталаридир). Кейинги бурчакларнинг тенглиги билан (яъни ўткир) бўлгани учун қўйилган исбот қилиш қийин:

$$\lg \widehat{M'A'P'} = \lg \widehat{B'M'K'} = \lg \alpha. \quad (1)$$

Бунинг учун қуйидаги муносабатларнинг мавжудлигини исбот қилиш керак:

$$\frac{|M'P'|}{|A'P'|} = \frac{|B'K'|}{|M'K'|}. \quad (1')$$

Агар берилган α тўғри чизикқа параллел қилиб AP ва MK тўғри чизикларни ўтказсак, буларнинг биринчиси M, M' ва иккинчиси B, B' тўғри чизиклар билан кесилиб P ва K нуқталарни ва бир-бирига ўхшаш $\triangle APM$ ва $\triangle MKB$ ларни ҳосил қилади. Шунинг учун қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\triangle APM \sim \triangle MKB \rightarrow \frac{|MP|}{|AP|} = \frac{|BK|}{|MK|}. \quad (2)$$

Чизмага кўра қуйидагилар ўринлилар:

$$\left. \begin{aligned} \frac{|M'M'|}{|M_0M|} &= k \rightarrow |M'M'| = k \cdot |M_0M| \\ \frac{|M'P'|}{|M_0P|} &= k \rightarrow |M'P'| = k \cdot |M_0P| \end{aligned} \right\} \rightarrow \quad (3)$$

$$\rightarrow |M_0M'| = |M'P'| = k(|M_0M| + |M_0P|)$$

Чизмага $|M_0M'| = |M'P'| = |M'P'|$ ва $|M_0M| = |M'P'| = |MP|$ бўлгани учун (3) бўндай кўриниш олади:

$$|P'M'| = k |PM|. \quad (3')$$

Шунга ўхшаш:

$$\left. \begin{aligned} \frac{|B_0B'|}{|B_0B|} &= k \rightarrow |B_0B'| = k \cdot |B_0B| \\ \frac{|B'K'|}{|B_0K|} &= k \rightarrow |B'K'| = k \cdot |B_0K| \end{aligned} \right\} \rightarrow \quad (4)$$

$$\rightarrow |B_0B'| = |B'K'| = k(|B_0B| + |B_0K|).$$

Чизмага мувофиқ (4) тенгликнинг чет томони $B'K'$ ва ўнг томондаги $B_0B + B_0K = BK$ бўлади. Шунинг учун (4) тенглик ушбу кўринишга келади:

$$|B'K'| = k |BK|. \quad (4')$$

(3') тенглики (4') тенгликка қўйиб бўламиз:

$$\frac{|P'M'|}{|B'K'|} = \frac{|PM|}{|BK|}. \quad (5)$$

$\triangle APM \sim \triangle MKB$ бўлгани учун ушбу пропорция ўринли бўлади:

$$\frac{|PM|}{|BK|} = \frac{|AP|}{|MK|}. \quad (6)$$

(5) ва (6) ларга мувофиқ қуйидаги ўринлилар:

$$\frac{|P'M'|}{|B'K'|} = \frac{|PM|}{|BK|} = \frac{|AP|}{|MK|}. \quad (7)$$

Чизманинг тузилишига кўра, $|AP| = |A'P'|$ ва $|MK| = |M'K'|$ бўлгани учун кейинги тенглик ушбу кўринишга олади:

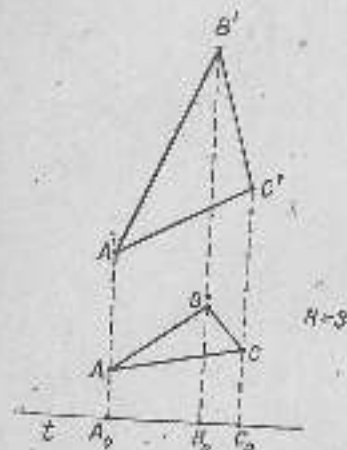
$$\frac{|P'M'|}{|B'K'|} = \frac{|A'P'|}{|M'K'|} \text{ с.к.л. } \frac{|P'M'|}{|A'P'|} = \frac{|B'K'|}{|M'K'|}. \quad (7')$$

Ўзгача, берилган AB кесмадаги ихтиёрий M нуқтаси шу кесма бўйича ҳаракатлангирсак, унинг бу аксантиришдаги образи бўлган M' нуқта $A'B'$ кесма бўйича ҳаракатланади.

2-мисол. ABC учбурчакни α тўғри чизикқа нисбатан $k=3$ коэффициент билан қўзғасак, $A'B'C'$ учбурчак ҳосил бўлади, яъни $f(\triangle ABC)_\alpha = \triangle A'B'C'$ (77-чиизма).

Бу акселантиришларда ҳар қандай M' нукта фақат битта M нуктанинг образи бўлгани учун чўзиш ва қисил ўзаро бир қийматли акселантириш бўлади. t тўғри чизикдаги ҳар бир M нукта ўзига акселанади, яъни M нуктанинг образи шу M нуктанинг ўзи бўлади.

Бу акселантириш бир неча асосий хоссага эга.



77-чиизм

t тўғри чизикда нисбатан k_1 ва k_2 коэффициентлар билан янги тахис чўзиш (қисил) берилган бўлсин. Бунда:

$$f(M)_t^{k_1} \equiv M' \quad (1)$$

ва

$$f(M')_t^{k_2} \equiv M'' \quad (2)$$

деб фарз қилиб, $f(M)_t^{k_1 k_2} \equiv M''$ бўлишини исботлайлик (78-чиизм), (1), (2) ва

$$\left| \frac{PM'}{PM} \right| = k_1 \text{ ва } \left| \frac{PM''}{PM'} \right| = k_2 \quad (3)$$

муносабатлардан қуйдагилар маълум бўлади:

1) сўзинги (1) муносабат P, M, M' нукталарнинг PM ($\perp t$) тўғри чизикда ётилиши, (2) муносабат эса P, M', M'' нукталарнинг PM' ($\perp t$) тўғри чизикда ётилишини кўрсатади; P ва M' нукталар шакли тўғри чизик учун умумий бўлганидан M, M'' нукталар PM ($\perp t$) тўғри чизикда ётади;

2) берилган (3) муносабатлардан ҳаллаб қўлайтиришдан

$$\left| \frac{PM'}{PM} \right| \cdot \left| \frac{PM''}{PM'} \right| = k_1 \cdot k_2 \text{ ски } \left| \frac{PM''}{PM} \right| = k_1 k_2$$

хосил бўлади. Бундан

$$f(M)_t^{k_1 k_2} \equiv M''$$

маълум бўлади.

143

Демак, кетма-кет бажариладиган икки $f_t^{k_1}$ ва $f_t^{k_2}$ акселантиришлар ўрига битта $f_t^{k_1 k_2}$ акселантиришни бажариш сўғати экан. Охири акселантиришнинг коэффициенти k олгани акселантиришлар коэффициентлари кўпайтмасига тенглик: $k = k_1 k_2$. Охири f_t^k акселантириш олгани $f_t^{k_1}$ ва $f_t^{k_2}$ акселантиришларнинг кўпайтмаси (баъзан йиғилмаси) деб аталади, деб қисқача бундай ёзилади:

$$f_t^{k_1} \cdot f_t^{k_2} = f_t^{k_1 k_2} = f_t^k \quad (4)$$

Қаралаётган акселантиришлар ассоциативлик (группалаш) қонунига бўйсунмади, яъни $f_t^{k_1}, f_t^{k_2}, f_t^k$ акселантиришлар берилган бўлса, қуйдаги муносабат ўридан бўлади:

$$(f_t^{k_1} \cdot f_t^{k_2}) \cdot f_t^{k_3} = f_t^{k_1 k_2} \cdot f_t^{k_3} = f_t^{k_1 k_2 k_3} \quad (5)$$

Ҳақиқатан, (4) га мувофиқ:

$$(f_t^{k_1} \cdot f_t^{k_2}) \cdot f_t^{k_3} = f_t^{k_1 k_2} \cdot f_t^{k_3} = f_t^{k_1 k_2 k_3}$$

$$f_t^{k_1} \cdot (f_t^{k_2} \cdot f_t^{k_3}) = f_t^{k_1} \cdot f_t^{k_2 k_3} = f_t^{k_1 k_2 k_3}$$

Бу икки тенглик (5)нинг тўғричилигини тасдиқлайди.

3) $k=1$ бўлганда акселантириш ҳар бир нуктани ўз-ўзига акселантиради, яъни у айнан акселантириш бўлади:

$$f(M)_t^1 = M$$

Айнан акселантириш ва (4) муносабатга асосан ҳар қандай f_t^k алмайтириш қуйдаги хоссага эга бўлади:

$$f_t^k \cdot f_t^1 = f_t^k = f_t^{1 \cdot k} = f_t^k$$

f_t^1 акселантириш, сўзта, бирлик ски нейтрал акселантириш деб аталади ва баъзан f_t орқали белгилади.

4) Ҳар қандай f_t^k акселантиришнинг шу тўпламга кирувчи тесқари акселантириши ҳам бўлади.

Ҳақиқатан, тўпламдаги ихтиёрый f_t^k акселантиришнинг тесқариси $f_t^{\frac{1}{k}}$ акселантириш бўлади, чунки $f(M)_t^k = M'$ ва аксинча, $f(M')_t^{\frac{1}{k}} = M$. Демак, ҳар қандай M нукта учун:

$$f[f(M)_t^k]_t^{\frac{1}{k}} = M,$$

яъни

$$f_t^k \cdot f_t^{\frac{1}{k}} = f_t^{k \cdot \frac{1}{k}} = f_t^1$$

Акселантиришлар группасининг умумий хоссалари

144

147

1. Аксантиришлар тўғрисида α даги ҳар қандай икки аксантиришнинг ҳўтаймаси (ёки йириндиси) яна шу α тўғрисида тегишли аксантириш бўлади.

Аксантиришлар гуруҳисининг бу хоссасига, қисқача, аксантиришлар тўғрисидаги *ёпиқлик хоссаси* дейилади.

2. Аксантиришлар тўғрисида α даги иккинчи урта аксантиришнинг ҳўтаймаси ассоциативлик қонунига бўйсунганига α тўғрисида қаратилган иккинчи урта f_1, f_2, f_3 аксантириш учун ушбу

$$(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$$

муносабат бажарилади.

3. Аксантиришлар тўғрисида α — бирлик (айнан) f_0 аксантиришга эга, яъни у аксантирувчи фигурани аслига қўлади хоссасига эгадир.

4. α тўғрисидаги ҳар қандай аксантириш тесқари аксантиришга эгадир, яъни тўғрисидаги ҳар бир f аксантиришга тесқари f^{-1} аксантириш ҳажуд, бу аксантириш шу тўғрисида қиради ва $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = f_0$ бўлади.

Шундай қилиб, кейинги мисолда қўрилган ҳажма аксантиришлар тўғрисида уларни қўйиштиришга нисбатан гуруҳ ташкил этиди.

Геометрияда гуруҳ ташкил этидиган аксантиришлар тўғрисида жуда кўп унрайд; булардан энг муҳимларини кўрсатиш келгуси бобларда қўрилади.

23 А. 8. ТАҚРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Геометрик аксантиришнинг етти хоссаси нима?
2. Геометрик аксантиришнинг таърифлаб, унга мисоллар келтириш.
3. Қандай аксантириш ўзаро бир қийматли аксантириш дейилади? Бир қийматли ва кўп қийматли аксантиришларга мисоллар келтириш.
4. Тесқари аксантириш нима?
5. Қандай аксантириш ҳаракат деб аталади, ҳаракатга мисоллар кўрсатиш.
6. Қандай аксантириш текис қисм ва текис қўшим деб аталади?
7. Берилган квадратни маълум тўғрисидаги нисбатан $k=3$ коэффициент бўйича текис қўйсак, қандай фигура ҳосил бўлади? Буни чизиш кўрсатиш.
8. Текис қўшим ва қисм қандай хоссаларга эга?
9. Қандай аксантиришлар тўғрисида гуруҳ деб аталади? Бунга мисол кўрсатиш.

9. СИММЕТРИЯСИ

24. 8. ДАСТЛАШКИ ТУШУНЧАЛАР

Симметрия сўзи грекча *symmetron* сўзидан олинган, унинг маъноси *тегишли* дегандир.

Геометрияда эса симметрия ёки симметрик деганда икки тенг фигуранинг бирор тўғрисидаги (нуқтага ёки бирор текисликка) нисбатан маълум қонун асосида бир хил вазиятда жойлашувлари тушунилади.

Симметрик вазиятдаги жисмларнинг табиатда ва қандалиқ ҳаётида (яъни фан, техника, санъат ва, айниқса, қўрилган ишларида) тен-тен унраб туриш, келажакда ишқар, техник, расм, ҳайкалар, ўқитиш ва шу каби ҳўтаймаси бўлиб етишувчи ёшларининг симметрик назарисини чуқур ўзлаштириш ва ун амалий ва назарий масалалар етиш ишлари билан маълумига эга бўлишга таъриқ қилади.

Шунинг учун бунда 9. симметрисининг асосий хоссалари, симметрик фигураларни ясаш тўғрисида ва симметрия ёрдамида масалалар етиш усули билан таъриф қилинади.

Таърифлар

Текисликдаги ҳар қандай икки нуқта уларни туташтирувчи хоссасига ўрта перпендикулярига нисбатан *симметрик нуқталар* деб аталади.

Бу таърифга кўра, текисликда берилган ҳар қандай A нуқтага шу текисликдаги бирор S тўғрисидаги нисбатан симметрик A' нуқта қўйилган талабларга жавоб бериш шарт: 1) AA' тўғрисидаги S тўғрисидаги перпендикуляр; 2) A ва A' нуқталар S тўғрисидаги ҳар хил тарафда; 3) A ва A' нуқталар S тўғрисидаги бир хил ўзқилиқда ётади (79-чизма).

S тўғрисидаги A ва A' нуқталарнинг *симметрик* ёки деб аталади. Ҳақиқатда ҳар бир нуқта ўз-ўзига симметрик деб ҳисобланади.

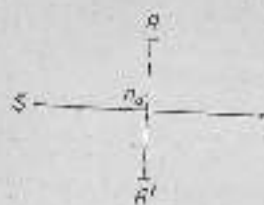
Ҳар хил A ва A' нуқталар биттагина симметрия нуқтага эга бўлади. Текисликнинг ҳар бир A нуқтасига S ўққа нисбатан симметрик A' нуқтага мос келтириш *симметрик аксантириш* дейилади.

S ўққа нисбатан A нуқтага симметрик нуқта A' бўлади деганиш ўрнига бунга қисқача

$$C(A)_S = A' \quad (1)$$

деб биламиз.

Агар $C(M)_S = M'$ бўлса, $C(M')_S = M$ бўлишини қўриш қийин эмас, деганиш, M нуқта M' нуқтага ва, аксинча, M' нуқта



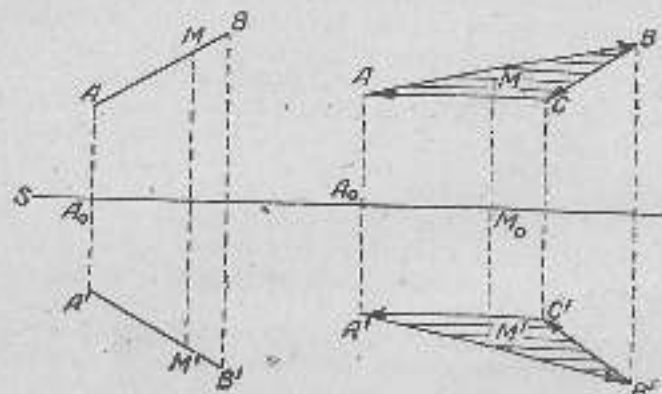
80-чижа

М нуктага s түгрі чизикка нисбатан симметрик нукталардир, шунинг учун уларни s ўққа нисбатан *ўзаро симметрик* деб атаймиз. Бундай хоссатга эга бўлган акслантиришлар *инволюцион* акслантириш дейилади.

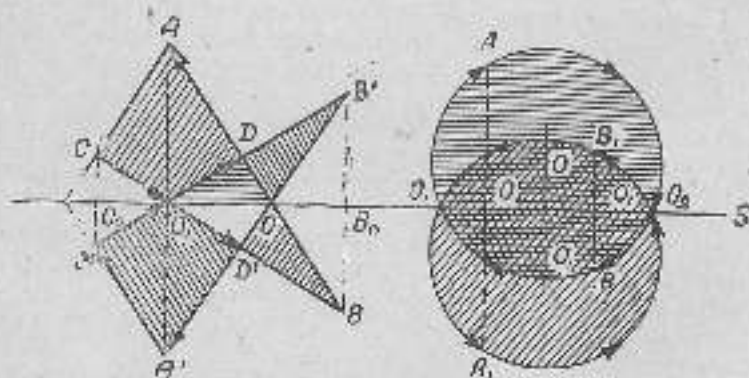
Бирор F фигурани татқил огувчи нукталарга s түгрі чизикка нисбатан симметрик нукталардан тузилган F' фигурага *симметрик* дейилади ва

$$C(F)' = F' \quad (2)$$

кўринишда ёзилади (80—81-чижалар). (2) диги F' фигуранинг ихтиёрий M' нуктаси F фигурадаги биргина M нуктанинг образидир. Шунинг учун симметрия ўзаро бир қийматли акслантиришдир.



81-чижа



82-чижа

Тошшириқлар

I. 81-чижалардаги ўзаро симметрик нукталар, аксланлар ва ёйларни кўрсатинг.

II. Барилган A ва B нукталарнинг симметрик ўқини топинг. (82-III чизма).

III. 82-I, II чизмаларда A нуктасига s ўққа нисбатан симметрик бўлган A' нуктани икки йил бўлини асоси бўлганлигини. Бундай янашанинг тўғрилигини исбот қилинг.

IV. Ёйларни кўрсатинг. Ёйларда A ва B нукталардан ўтайдиган тўғри чизикка қаранган бир нукта нуктасини топинг. (82-IV чизма).

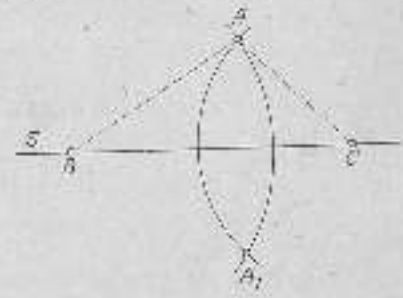
V. Симметрик нукталар асоси бўлидан сойлашсин, маълум $\angle ABC$ ни асоси нукталар ёрдамида бир нукта икки кенгайтиринг. (III тошшириқ ва 82-V чизмага қаранг).

Ўқ симметриясининг асосий хоссалари

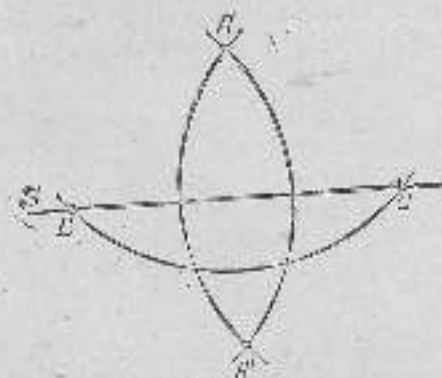
Биргина хосса. Симметрия бир қийматли акслантиришдир.

Ҳақиқатан, текисликнинг ҳар бир M нуктасини бирор s ўққа нисбатан симметрик акслантирсак, у биргина M' нуктага ўтади ва, аксинча, M' нуктани ўша ўққа нисбатан акслантирсак, M нуктанинг ўзиниси ҳосил бўлади. Агар M' нуктани акслантирганимизда M нуктадан бошқа бирор N нукта ҳосил бўлади десак, бу ҳолда M' нуктадан симметрия ўқига иккита перпендикуляр ўтказиш мумкин, деган бўламиз. Бу эса ҳақиқатга зиддир.

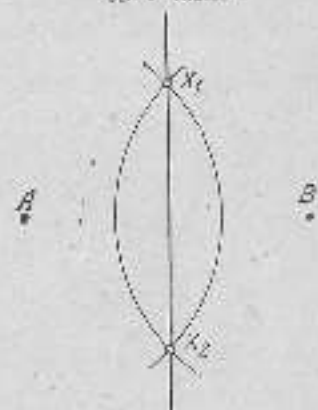
Шунинг учун биригина хосса тўғри, яъни текисликнинг n та нуктасини бирор ўққа нисбатан симметрик акслантирилганда, улар яна n та нуктага ўтади; лекин бундай акслантиришда симметрия ўқининг нукталари ўз-ўзига ўтади. Шунинг учун симметрия ўқининг ҳар бир нуктасини қўш нукта деб қараймиз.



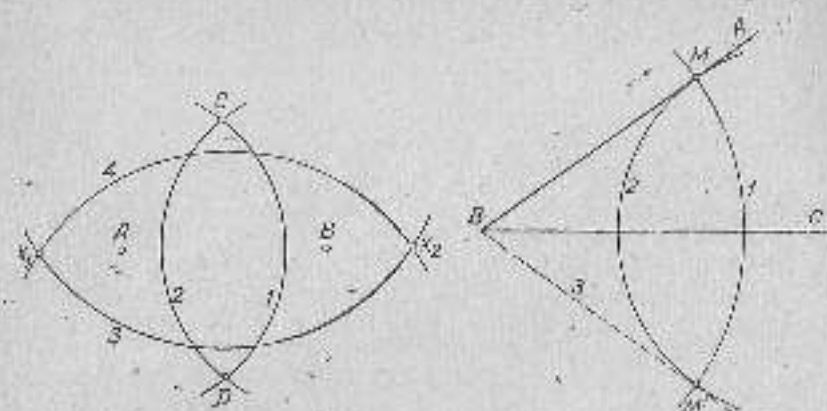
82-I чизма



82-II чизма



82-III чизма



83- I чизма

83- II чизма

Нижини хосса. Ҳақ симметрияси ҳаракатдир. 83- I, II чизмадаги α ўққа нисбатан ўзаро симметрик A, A' ва B, B' пунктларни олиб, $AB = A'B'$ бўлишини кесиб кўраймиз.

A ва A' пунктлар α тўғри чизмга нисбатан симметрик. Шунинг учун $\triangle AA_1B_1 = \triangle A'A_1B_1$. Бундан $AB_1 = A'B_1$ [ча $\angle AB_1A_1 = \angle A'B_1A_1$ келиб чиқади].

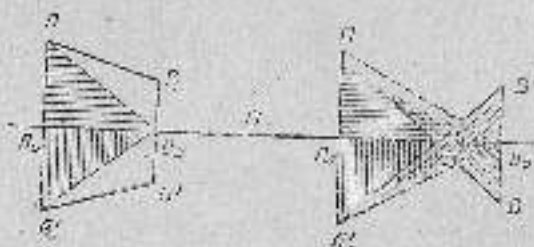
Булардан фойдаланиб, $\triangle AB_1B_2 = \triangle A'B_1B_2$ оқиллигини кесиб кўраймиз.

Ҳақиқатан, $|AB_1| = |A'B_1|$, $\angle AB_1B_2 = \angle A'B_1B_2$, $|B_1B_2| = |B_1B_2|$ га асосан бу учбурчаклар бир-бирига тенг. Оқибатдан тенгликдан эса $|AB| = |A'B|$ келиб чиқади.

Ҳаракатнинг таърифига асосан қилинган $|AB| = |A'B|$ хоссага таяниб, ўқ симметриясининг ҳаракат эканлиги куралиб.

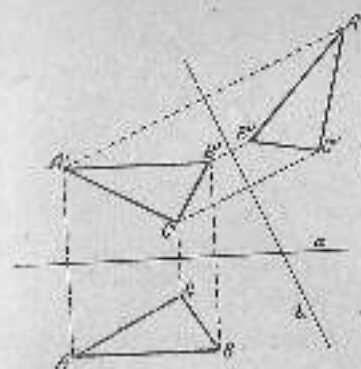
Демак, ўқ симметрияси ҳар қандай фигурани унинг ўзини тенг фигурга аксантирадиган ва бурчакнинг катталигини сақловчи.

Геометрик фигураларни акс эттирилганда ўзаромайдоган хоссалари унинг шу аксантиришга нисбатан инвариантлари дейилади.

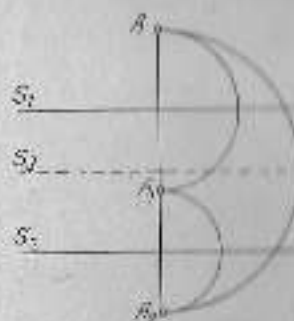


83- I чизма

83- II чизма



84- I чизма



84- II чизма

Намунани. Бурчак биссектрисаси шу бурчакнинг симметрия ўқи бўлади.

Ҳақиқатан, 83- I, II чизмадаги $\angle AB_1A_1 = \angle A'B_1A_1$ ушбу $\angle AB_1A_1$ нинг икки томонида оз ($A_1A_1 \perp B_1A_1$) ва A ва A' пунктларнинг ўзаро симметриклигини кесиб кўраймиз (тўғри бурчакли икки учбурчакнинг тенгликдан келиб чиқади).

Учинчи хосса. Ўқ симметриялари тўплами ҳақ бўли олмайдиган.

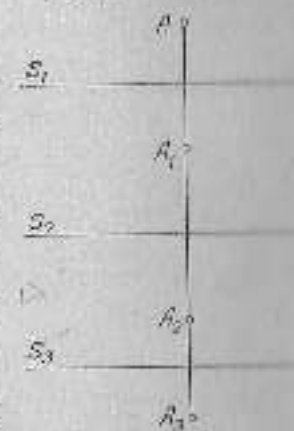
Бунга қиёсий учун ихтиёрий вазиятдаги ўқларнинг баъжарилган ҳажми симметриялар тўпламининг гуруҳли хоссаларидан биридан қаноатлантира олмаганини тинч кўрай.

Умуман ўқ симметриялари тўплами ёпиқлик ҳосил эмас, чунки ўзаро кесилувчи икки ўққа нисбатан баъжарилган симметриялар йиғиндисини аниқ симметрия бўли олмайдиган.

Ҳақиқатан, 84- I чизмада кетма-кет баъжарилган ушбу $C(\triangle ABC)_\alpha = \triangle A'B'C'$ ва $C(\triangle A'B'C')_\alpha = \triangle A''B''C''$ аксантиришлардаги биридан ушбу бурчакли учинчи учбурчакни баъжарганда аксантирувчи симметрия ўқи йўқдир.

Бу ҳол эса ўқ симметриялари тўпламининг гуруҳли бўли олмаганини кўрсатади.

Эслатиб, Параллел ўқларга нисбатан баъжарилган симметриялар гуруҳли бўли олади.



84- II чизма

Ҳақиқатан:

1) 84- II чизмадаги S_1 ва S_2 ўқлар бир-бирига параллел бўлгани учун буларда грона бўлишлик шартларидаи ёниқлик хоссаси мавжуд. A нуктаи A_1 нуктага ва A_2 нуктаи A_3 нуктага ўтказувчи икки симметрияни S_3 ва S_4 ўққа нисбатан бажариладиган учинчи симметрия билан алмаштириш мумкин:

$$\left. \begin{array}{l} S_1 \parallel S_2 \text{ бўлса} \\ C(A)_{S_1} = A_1 \\ C(A_1)_{S_2} = A_2 \end{array} \right\} \rightarrow C(A)_{S_3} = A_2, C_1 + C_2 = C_3.$$

2) Катма-кет бажариладиган учта симметрия тупламиди қонунига бўйсунди.

84- III чизмада A нукта ва бир-бирига параллел S_1, S_2, S_3 ўқлар берилган. A нуктаи бир йўналишда катма-кет симметрик акслантириш қўидаги натижаи беради:

$$\left. \begin{array}{l} S_1 \parallel S_2 \parallel S_3 \text{ бўлса} \\ C_1(A)_{S_1} = A_1 \\ C_2(A_1)_{S_2} = A_2 \\ C_3(A_2)_{S_3} = A_3 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} (C_1 + C_2) + C_3 = AA_3 + A_1A_2 - AA_2 \\ (C_2 + C_3) = AA_1 + A_1A_2 - AA_1 \\ (C_1 + C_2) + C_3 - C_1 = (C_2 + C_3). \end{array}$$

3) Симметрик акслантиришлар тўпламида яъни (ва тескари) акслантириш мавжуд.

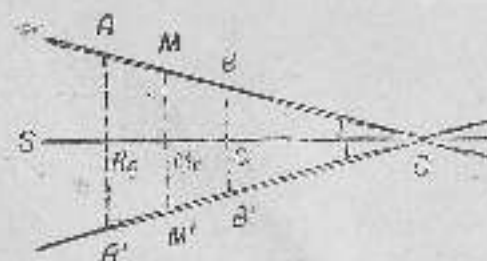
Ҳақиқатан, агар A нуктаи s ўққа нисбатан симметрияи бўлган A' нуктаи яна s ўққа нисбатан акслантирсак, A нуктаи s ўқдан келиб чиқади.

Демак, битта ўққа нисбатан икки марта бажариладиган симметрия текислик нукталарики аслига қолдиради.

Тўғрилиқ хосса. Симметрик акслантириш натижаида ёниқ контур бўйича борган ҳаракат йўналиши тескари йўналишга ўзгаради.

Буни 84, 81- чизмалардаги фигуралардан кўриш мумкин.

Бешинчи хосса. Симметрия ўқига параллел бўлган узаро симметрик тўғри чизиқлар симметрия ўқига кесишади.



85- чизма

Агар AB тўғри чизиқ s ўққа нисбатан $A'B'$ тўғри чизиққа симметрик бўлса, AB нинг ўқ билан кесилган O нуктаси s ўққа нисбатан ўз-ўзига нис қилиниш керак, шунинг учун O нукта $A'B'$ да ҳақ ётади (85- чизма).

Натижа. Симметрия ўқига кесилиб, биттадан симметрик нукталар ор-

қали ўтувчи икки тўғри чизиқ ўша ўққа нисбатан ўзаро симметрик бўлади.

Ҳақиқатан, 85- чизмадаги A ва A' нукталарининг s ўққа нисбатан симметриклигидан $\triangle AOA' \cong \triangle A'O A$, эканлиги ва бундан эса $\angle AOS = \angle A'O S$ эканлиги, яъни s ўқнинг $\angle AOA'$ га биссектрисалиги маълум бўлади.

Иккинчи хоссаиот натижаида кўра, AO ва $A'O$ тўғри чизиқлар s ўққа нисбатан симметрик бўлади.

Демак, симметрия ўқи билан бирор O нуктада кесилувчи тўғри чизиқни симметрик акслантириш учун унинг бирлиги A нуктасига мос A' нуктаи топиб, OA' тўғри чизиқ ўтказилса кифоя.

Олтинчи хосса. Агар $C(A)_s = A'$ ва $C(B)_s = B'$ бўлса, $C[AB]_s = [A'B']$ бўлади.

Буни исботлаш учун AB тўғри чизиқдаги ихтиёрий M нуктага s ўққа нисбатан симметрик бўлган M' нуктаи $A'B'$ тўғри чизиқда ёниқлини кўрсатиш кифоя (85- чизма).

Эки AA', BB', MM' кесмаларининг s ўқ билан кесилган нукталарини мос равишда A_0, B_0, M_0 ҳарфлар билан белгиләб қўйлик.

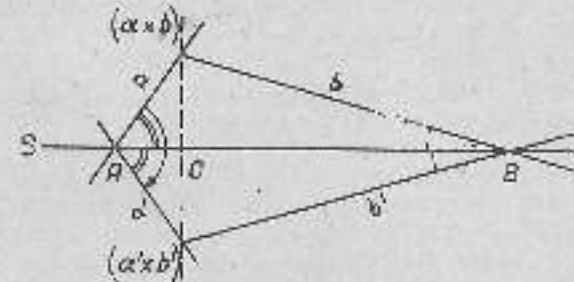
Берилишга мувофиқ, $|AA_0| = |A_0A'|$, $|BB_0| = |B_0B'|$ бўлгани учун A_0 ва B_0 нукталар AB ва $A'B'$ тўғри чизиқлар орасидаги бўриқнинг биссектрисасида ётади.

Бу биссектриса эса s симметрия ўқи билан устма-уст тушади. Агар AB тўғри чизиқдаги M нуктадан AA' кесмага параллел ўтказсак, бу $A'B'$ тўғри чизиқдаи бирор M' нуктада кесиди. Энди $C(M)_s = M'$ эканлигини исботлагасак кифоя.

s ўқ AA' бўриқнинг биссектрисаси, шунинг учун $|MM_0| = |M_0M'|$ ва $(MM') \perp s$ бўлади.

Экканда, Агар AA' ва $A'B'$ тўғри чизиқлар узаро параллел бўлса, кесиб, иккирадагига бажарила беради, бу ҳолда A_0, B_0, M_0 нукталар параллел тўғри чизиқларнинг ўрта чизиғида бўлади.

Еттинчи хосса. Икки тўғри чизиқнинг кесилган нуктаси узаро симметрик тўғри чизиқларнинг кесилган нуктасига симметрик бўлади, яъни агар $C(a)_s = a'$ ва $C(b)_s = b'$ бўлса, $C(a \cap b) = C(a' \cap b')$ бўлади.



86- чизма

Билатунлиги ва ё тўғри четиқларнинг кесилиши нукталар (A, B, C) ҳақ белгиланида, (A, B, C) нукталар ҳам, а ҳам ё тўғри чизиқларни янада ушун (AB, AC, BC) нукталар симметрик нукта ҳам, а да ҳам A' да ётади перпендикуляр, яъни у (A', B, C) нукталарнинг кесилиши.

24-§. А. ТАҚРОРЛАШ УЧУН САВОЛ ВА ТОПШИРИКЛАР

А. Симметрик фигураларни амалий йўллар билан ясаш ёки кузатиш йўли билан топишга доир масалалар

I. Бир нарак қоронни ундаги ихтиёрлиқ тўғри-чилиқ бўйича бўлиб ва тахлиб (симм. рақамли бўр ва сурал рақамли иллардан фойдаланиб) қўнидаги ишларни бажариш:

а) наракнинг бир бўлагиди белгиланган $A, B, C, \dots$ нукталарга симметрияда ҳос келувчи $A', B', C', \dots$ нукталарни топиш;

б) наракнинг бир бўлагиди берилган $a, b, c, \dots$ кесмаларга симметрияда ҳос келувчи $a', b', c', \dots$ кесмаларни топиш (бу кесмаларни симметрия ўқида ва бир-биринига нисбатан турли азиятларда олиш);

в) учбурчак, тўртбурчак ва айланани симметрияда ҳос фигураларни топиш. (Бундан ҳар бирининг, асос, бўйлам ўқи билан кесилмаган ҳолларини, сўнгра кесилган ҳолларини кўрсатиш).

II. Қаттиқ қоронни дафтарнинг бир бетига рақамли иллардан азиятган турли-туман фигураларнинг азият дафтарини топиш белага туширтириш, уларни урганлиқ (ҳос ҳарфларнинг шаклларида эътибор қилиб, уларнинг ойнадаги кўриниши билан таққосланг).

III. Дераза, синиқ тахтаси, уй девори ва шу қабил тўғри тўртбурчак шаклидаги ишлар ёқларининг симметрия ўқлари нисалар бўлишини ва негизлигини айтиш.

IV. Симметриянинг амалий ҳаётидаги ва табиқдаги азиятини кўрсатувчи масалалар айтиб берил (ҳашинасозлик, бинокорлик ва архитектурадаги азияти, ҳар бир кристалл диксанинг тўқилишидаги симметриклик ва ҳаёлим хил кристалл диксанидаги бир-биринига нисбатан ҳайвонийдаги мушазамлик, киши ёки ҳайвон танасининг ва баъзи бир ўқилик барларининг тўқилишидаги симметриклик ва ҳоказо).

Б. Баъзи геометрик фигураларнинг симметрия ўқларини топишга доир масалалар

V. А. Тўғри тўртбурчак шаклидаги бир нарак қоронни қандай тўғри чизиқ бўйича бўлинишига бу тўртбурчакнинг бир бўлагиди шаклида бўлади устига айлан туширилган азияти билан кўриш. Тўғри тўртбурчакда бўлади симметрия ўқлардан негиза бор ва уларни топиш кўрсатиш. Тўғри тўртбурчакнинг айланасини яна ушун ушун симметрия ўқи бўлиб олмайми?

V. Тўғри тўртбурчак шаклидаги бир нарак қоронни бўлиб, ундай қандай шаклидаги қорон қирқиб олиш, сўнгра унинг негиза симметрия ўқи бўлишини кўрсатиш ва ҳар бир симметрия ўқи бўйича бўлинишига ҳосил бўладиган ишга фигураларнинг бир-бирини таққослаш асосланг.

VI. Бир нарак қоронни ихтиёрлиқ рақамли яъни, бу қоронда ромбнинг томонлари бўлиб қирқил; ҳосил бўлиган қоронда ромбнинг симметрия ўқларини кўрсатиш, шу ўқларнинг ҳар бири бўйича ушун бўлиниб ва бўлиниб фигуралардан қайсилари бир-бирини таққослаш айтиш, ушун асосланг.

VII. Тенг томонли ва тенг ёнли учбурчаклар негизаги симметрия ўқида ёта?

VIII. Умумий кўринишдаги параболограҳ ва трипедиялар симметрия ўқида ёта? Қандай трипедия симметрия ўқида ёта? ушун сизли кўрсатиш.

IX. Мушазам олтубурчак, саккизбурчак ва, ушун, мушазам томонли мушазам кўлбурчаклардан бирининг симметрия ўқларини кўрсатиш. (Бундан олтубурчакнинг олтубурчакнинг азиятидан фойдаланиб, уларни қаттиқ ва ички чизиқдан айланаларнинг мушазам диаметралари симметрия ўқлари бўлиши ҳақида ҳулоса чиқариш).

X. Томонларининг соли тоқ бўлиган мушазам кўлбурчакларнинг симметрия ўқлари қандай тўғри чизиқлар бўлишини кўрсатиш. (Бундан кўлбурчакнинг ҳар бир ўқида ушун қаринишдаги томонига ўтказилган перпендикулярга эътибор қилиш.)

Mушазам кўлбурчакнинг симметрия ўқларининг соли ўшун кўлбурчак томонларининг солига тенглиги ҳақида ҳулоса чиқариш.

В. Геометрик фигураларни симметрик акслантиришга доир масалалар

Бўлиб бўламайлиги «текиш» бўлинидаги фигураларнинг симметрия азияти тушира билан ушун симметрик фигураларнинг ҳоселарини ва ҳаёлим яъни қоронлариди фойдаланишга зарурлиқ туғилишини ўқувчиларга ўқитиб, сўнгра қўнидаги масалаларни (ўқувчиларнинг қўнига қарай танлиб) кўриш керак.

XI. Берилган учбурчакнинг ушун бир томонда, медианасига, балаандилигига ва бирор бурчагининг биссектрисасига ва ихтиёрлиқ баъзидаги тўғри чизиққа нисбатан симметрик акслантириш.

XII. Берилган синиқ чизиқни ушун турли томондан ўтказилган тўғри чизиқда нисбатан симметрик акслантириш.

XIII. Берилган айланани ихтиёрлиқ тўғри чизиқда нисбатан симметрик акслантириш (тўғри чизиқ айлананинг кесилиши ва уринмаси бўлиган ҳолларини ҳам қоронг).

XIV. Мушазам учбурчакда талоқи (ва ички) чизиқни азияти

таврани шу учбурчакнинг ҳар бир томониغا нисбатан акслантириб, буларни симметрик баъзари кўрсатиш. Бу ишни муваппақ, 4, 5, 6 бурчаклар учун ҳам бажариш.

XV. Симметрик кесмаларнинг ҳоҳиясидан фойдаланиб, бурчак биссектрисасини чизил.

XVI. Ихтиёрий вазиятда берилган икки тенг кесмидан биринчи иккичисига ўтказувчи иккита симметрик ўқни татиш.

Г. 2-қ симметрияси назарияларини такрорлашга доир топшириқлар

XVII. Икки нуқта бирор ўққа нисбатан симметрик мос бўлиши учун улар қандай талабларга жавоб бериши керак?

XVIII. Симметрик акслантириш инволюцион акслантириш эканлигига сабаб-нама?

XIX. Симметриянинг бир қийматли акслантиришлигини исбот қилиш.

XX. Симметрик акслантиришнинг ҳаракат эканлигини исбот қилиш.

XXI. Турли вазиятдаги ўқларга нисбатан бажарилган симметрик акслантиришлар тўлажилини группа бўла олмаслигини исбот қилиш.

XXII. Параллел ўқларга нисбатан бажарилган симметрик акслантиришлар тўлажилини группа бўлишини исбот қилиш.

XXIII. Симметрик акслантиришда ҳар бир кесма ўзига тенг кесмага ва айлана ўзига тенг айланга ўтишини исбот қилиш.

XXIV. Тўғри бурчакли координата ўқлари текислигидаги бирор $A(x, y)$ нуқта билан унинг OX ўққа нисбатан симметрик бўлган $A'(x'; y')$ нуқтанинг ва OY ўққа нисбатан топилган $A''(x'', y'')$ нуқтанинг координаталари орасидаги боғланишлар қуйидагилардан биратлигини чизмада кўрсатиш:

$$1) OX \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}; 2) OY \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}. \quad (1)$$

XXV. Тўғри бурчакли координаталар системасидаги абецсеса ва ордната ўқларига нисбатан қуйидаги нуқталарга симметрик бўлувчи нуқталарни толиш:

$$A(5; 3), B(-2; 4), C(-3; -6),$$

$$D(4; -5); E(0; 7), F(6; 0).$$

XXVI. Учалари қуйидаги нуқталарда ётган учбурчакни OX ва OY ўқларга нисбатан симметрик акслантириш:

$$A(-4; 5), B(0; 2); C(-3; -5).$$

XXVII. Тенгламаси $y = 2x + 3$ бўлган t тўғри чизикни (1) формулалар ёрдамида OX ва OY ўқларга нисбатан симметрик акслантириш. (Авал t_1 ва t_2 тўғри чизикларнинг тенгламала-

риши толиб, сўнгра уларнинг графикларини чизил. Ҳосил бўлган иккита тўғри чизик ҳақиқатан берилган тўғри чизикнинг OX ва OY ўқларга нисбатан симметрикалари эканлигини текшириб куриш.)

XXVIII. Бирор ўққа нисбатан ўзаро симметрик бўлган параллелмас икки тўғри чизикнинг бир-бири билан симметрик ўққа кесашувини аналитик ўқда исбот қилиш ва буни хисолаарда кўрсатиш.

XXIX. Берилган $3x + 2y - 6 = 0$ ва $2x + 3y - 6 = 0$ тўғри чизикларининг кесилиши нуқтаси, бу чизикларнинг OX ва OY ўққа нисбатан симметрияларининг кесилиши нуқтасига мос бўлишини исбот қилиш.

XXX. Тўғри бурчакли XOY координаталар текислигининг бирор чорасида ётувчи ихтиёрий A нуқтани иккита ўққа нисбатан симметрик акслантиришдан ҳосил бўладиган A_1 ва A_2 нуқталар O нуқта билан бир тўғри чизикда ётишини исбот қилиш.

25-§. СИММЕТРИЯ МЕТОДИ

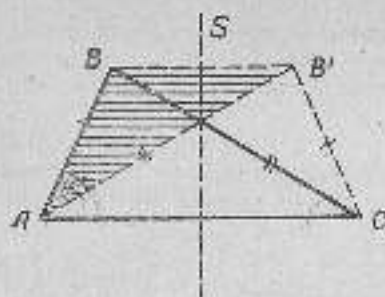
Симметрик акслантиришдан фойдаланиб ҳосилга доир масалаларни ечиш *симметрияли метод* дейилади.

Бу метод билан масала ечишда сўралган F_x фигурани татишда леб фарас қилиб, тахминан тилиб қуйидадан кейин, бу фигуранинг лозим тоилган бирор f бўлагин ёки берилганлардан баъзилари шундан бир ўққа нисбатан симметрик акслантирилади, ҳосил бўлган f фигура билан F_x фигура элементлари орасидаги боғланишлар фойдаланиб, ҳосил талабга жавоб берадиган ёрдамчи Φ фигура топилди. Бу ёрдамчи Φ фигурани масалада берилганларга талиб (илалган F_x фигурата қарасида осонроқ йўл билан) едиш ва бу фигурадан иланган F_x фигурата ўтинг нумкии бўлиши ларт.

Шу икки талабга жавоб берувчи фигуранинг аналитик тилишда топилгани билан масалани ечиш лавин тузилиб қолади.

Бу методдан фойдаланишнинг аҳамиятли лайти қандай фигурани қайси ўққа нисбатан симметрик акслантирилган ёрдамчи фигура ҳосил бўлишини аниқлашдир. Масаланинг шарҳига қараб тахминий фигура баъзан тўла, баъзан қисман, баъзан берилганлардан (масалан, нуқта, кесма ва тўғри чизиклардан) баъзилари акслантирилади. Шунингдек, масаланинг осон ечилиши учун симметрик ўқнинг тилиш ҳам ҳар бир масаланинг шарҳига қараб белгиланади. Нунонжи, баъзан масалада берилган тўғри чизик ёки кесмалардан бирортасини (ёки иланган фигуранинг бирорта чизикли элементини) симметрия ўқи қилиб олишга, баъзан бутунлай бошқа тўғри чизикли олишга тўғри келади.

Бу метод билан масала ечишда ёки шунинг ҳам едиш лавини, топилган ёрдамчи фигурадан сўралган фигурата



87-чизма

Берилган φ бурчакни чизиш учун ABC учбурчак AC томонининг ўрта перпендикулярига (z ўққа) нисбатан симметрик акслантирайлик.

$AB'C$ ва ABB' учбурчакларда; $\hat{B}AB' - \hat{A} = \hat{C} = \varphi$ бўлади, φ га тенг бурчакдан ABB' учбурчакда $|AB'| = |BC| = a$, $|AB| = c$ томонлари ва улар орасидаги φ бурчак маълум. Демак, бу учбурчакни (ёрдаси фигурани) ясаш мумкин.

Иккинчилан, ABB' учбурчакдан изланган ABC учбурчакка ўтиш мумкин. Ҳақиқатан, ABB' учбурчакни, унинг BB' томонининг z ўрта перпендикулярига нисбатан симметрик акслантирсак, булдан $\triangle CB'B$ ҳосил бўлади. Шунинг билан ABC учбурчакнинг C учи ҳам аниқланади.

Демак, масалала берилганлар бўйича изланган учбурчакни ясаш учун аввал берилган a ва c томонлар ва улар орасидаги φ бурчак бўйича ABB' учбурчакни ясаб, сўнггра BB' томонининг ўрта перпендикулярига нисбатан A нуқтани C нуқтага симметрик акслантириш керак. ABC учбурчак изланган учбурчак бўлиди.

Тоғшириқ

Аввалдан тузилган план бўйича сўралган учбурчакни ясай, ечилишнинг исбот ва текшириш босқичларини бажарамиз.

Энди, берилган элементлардан биттасининг симметрик акслантириш билан ечилинадиган ҳақилаларга нисол келтирайлик.

80-масала. MN тўғри чизиқнинг бир тарафига A ва B нуқталар жойлашган. MN тўғри чизиқда шундай X нуқта топилсин, бу нуқта қуйидаги талаблардан бирини қаноатлантирсин:

I. $\angle AXM \cong \angle BXN$.

II. $|AX| + |BX|$ йиқинди энг кичик.

III. A нуқтадаги шарни AX йуналишда MN га урганла, у X нуқтадан қайтиб, B нуқтадаги шарга бериб тегсин.

Бунда MN эллиптик тўғри чизиқдир.

ўтишда ёрдаси фигурани топишдаги акслантиришнинг текшириш бажарилади.

59-масала. Икки томони ян шу томонлар қаршисидagi бурчакларининг айирмаси берилган учбурчак ясанг.

Анализ. Изланган учбурчак 87-чизмадаги ABC учбурчак бўлиб, унинг $BC = a$, $AB = c$ томонлари ва улар қаршисидagi бурчакларининг айирмаси φ берилган бўлсин.

Масаланинг учала талаби ёзаро тенг кучлидир. Шунинг учун улар бир хил йўл билан ечилади.

Анализ. Изланган X нуқта топишда деб фарз қилиб, уни MN тўғри чизиқда тахминан белгилаб қўйлик (88-1 чизма). X нуқтани A ва B нуқталар билан туташтириб, қўйилган учала талабга бирин-кетин тўхтайлик.

I. Қилинган фарзга мувофиқ X нуқта қуйидаги шартга жавоб беради:

$$\angle AXM \cong \angle BXN \cong \angle 1 \cong \angle 2. \quad (1)$$

BX кесмасининг давомига $XA' \cong XA$ кесмани қўйиб, унинг A' учини берилган A нуқта билан туташтирайлик.

BA' ва MN тўғри чизиқларнинг кесилишидан ҳосил бўлган вертикал бурчаклар ёзаро конгруэнтдир:

$$\angle 2 \cong \angle 4 \quad (2)$$

(1) ва (2) дан:

$$\angle 1 \cong \angle 4. \quad (3)$$

Ясаилишга кура, $|AX| = |A'X|$ бўлиб, CX умумий томон ва (3) тенглаikka асосан $\angle 1 \cong \angle 4$ бўлгани учун:

$$\triangle ACX \cong \triangle A'CX \text{ ва булдан } \hat{ACX} = \hat{A'CX} = 90^\circ. \quad (4)$$

Кейинги тенглаклардан қуйидагилар маълум бўлади:

$$1) (AA') \perp (MN).$$

$$2) |AC| = |A'C|.$$

Демак, A ва A' нуқталар симметрик, яъни, $C(A)_{MN} = A'$.

Шундай қилиб, изланган X нуқтани топиш учун берилган нуқталардан бирини, масалан, A нуқтани MN тўғри чизиққа нисбатан симметрик акслантириб, топилган A' нуқта билан берилган иккинчи B нуқта билан туташтириш керак.

Анализни бошқа йўл билан ҳам бажариш мумкин; буида X нуқтани тахминан белгилаб қўйиб, уни A ва B нуқталар билан туташтирилади, MN ўққа нисбатан A нуқтага симметрик бўлган A' нуқта аниқланади ва уни X нуқта билан туташтирилади; сўнггра B, X, A' нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётиши исбот қилинади. Бунинг учун

$$\hat{3} + \hat{1} + \hat{4} = 180^\circ$$

тенглакнинг ўрнали эканлиги исбот қилинади.

ТОПШЕРИДЗЭ

1. Азалика өлчөлөгөн НҮА Емийн элдэвгээ Х будааны тэнхит, бусдад
бүр марты А зүгээр нь жижигтэй хариу Б будаатай симетрийн будааны то-
онош ороолон Х бүртэйгээ энхийн.

П. Бералган А. и Л. бүктөлбөй ААУ тўғрисида қарор қабул қилган тарафда жой-жайинлар тўғрисида қарор қабул қилган.

2. $X(X_1, X_2)$ нукта MN да ётуяки ихтиёрий нукта бўлсин, A' нукта MN уқия нисбатдан A га симметрик бўлса, $|A'X| = |AX|$ ва шунинг учун

$$|AX| + |XB| = |AX| + |XB|$$

бўлади (88- II чизма). $|AX| + |XB|$ энг кичик бўлиши учун $|A'X| + |XB|$ билан энг кичик бўлиши зарур ва етарлидир. $|A'X| + |XB|$ йиғиндиси энг кичик бўлиши учун A' нукта $A'B$ тўғри чизикда ётилиши керак. Демак, изланувчи X нукта AA' тўғри чизикнинг $A'B$ тўғри чизик билан кесилиш нуктаси экан.

Бу мухокамалярдың ҳам шаянучы X нуктадн толаш үчүн берилген икки нуктадан биригә AM үзгә аксыятан симметрик нуктагн талаб, уш берилген нуктагн нуктн билән туташтырушчн тәҗрибә ашыкәдәг AM тәҗрибә чизик билән кәшиктән нуктасын тәҗрибә керәк дегән нәтиҗә чыккан.

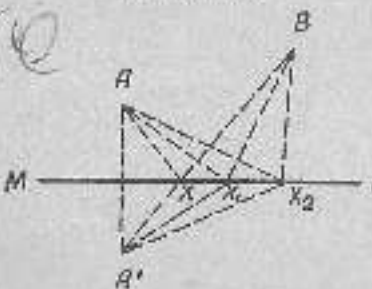
Т о н н е р и к

Бу мәсələниң әһәмийәтлик нәтижәсизлиги әнвәһи мәсələләрни өйрәтә тот-
бик әһәмийәт.

6) Тоғир йўзидан бир (ёки кўп) тарафда янги иншоот қўйилган, бу йўлниڭ ئىككى ئۇچىغا سىمىنىڭ جۇرۇلۇشى، ۋە سىمىنىڭ ئىككى ئۇچىغا سىمىنىڭ جۇرۇلۇشى ئارىسىدا مەسوفىلارنىڭ بېرىلىشى ۋە كىلىنى ئۇچىدىن؟

6) Кислород ва Ғу ўқирини қопқалак қарбасинг бир тарафда жойланган. Қисқоқда ёнгини чўқоқда ҳақиқда жайғарилган қопқалак, қисқоқда тез-тез етиб борадиган Ғуу дарағининг қайси жонивари еса олгани келсин?

3. Берилган A шир M га уқинс X кудасида урилиб, сўنгра берилган B ширга бирий тегади деб фарз қилганимизда, шарнинг туپига бурчани қайтиш бурчига конгруэнт бўлиши керак, дэми:



88-17-00000

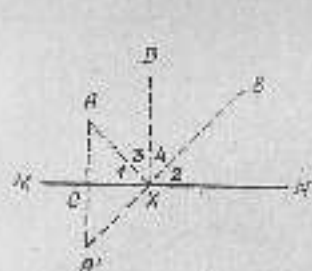
$$\angle AXD = BXD = \angle 3 = \angle 4 \quad (1)$$

Тетрациклин мажмуд бўйичи деган
элик (буида (X/D) 1 (MN) 88-III
қизми).

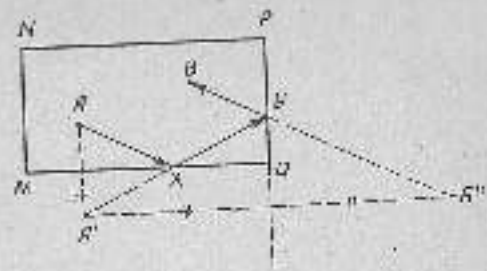
(1) төсгөлж үрийн бүлгээр

$$\angle AXM = \angle BXV = \angle 1 = \angle 2 \quad (2)$$

хүрээсээг хөдөлгөхгүй. (2) шарт мөхөж буй бүлгийн үзүүр A цуктага MN түгшмэл тивийн хослолын систем.



SS-11 94880



69-1 421328

метрик A' нуктага тоғид, уни берилаган B нукта билан туташ-
тириш деңизлиги юқорида исбот қилинди.

Демяк, утиля мейялада ҳам изланувчи X нуқтали топим
усули бир хил.

Бу усул кўн маъияларни ечишда ишлатилади.

Эсэгтэй. Бу нислэгчдийнх нь сүүлчийн "Бүтэц" нүүдлийг тууштай бүртгэнэ байхыг бүртгэгчид тэдгээрийн физик хатууны нэгдэлдээ. Шүүмэл үзэн бу физикчид биеэ "Бүтэц" нүүдлийнхээ эх асрын бүтэцтэй тэнцэхэд "Бүтэц" нүүдлийнхээ бүтэцтэй тэнцэхэд. Бу физикчид бүтэцтэй нүүдлийнхээ бүтэцтэй тэнцэхэд. Бу физикчид бүтэцтэй нүүдлийнхээ бүтэцтэй тэнцэхэд.

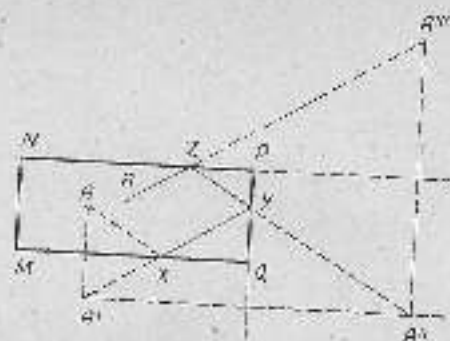
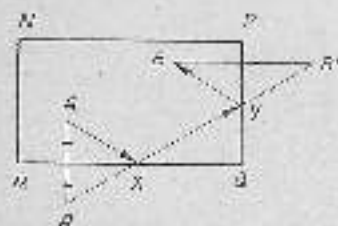
61-наслив. Тэгвэл тэртбурчак шалхидиги бильярд столд А ба В шарууд берилжээ. А шарын хандий пүнэлшид бильярдниг биеэртнхэ (четига) урганда, у бильярдниг охиончи бортниг хам урлалт В шарга бортб теглэл?

Аналог. 89-1 чизмача берилган $MNPQ$ тўғри тўртбурчак шаклидаги билларга MQ бортиса A шар AX буладиларда кезиб урилган, улдан қайтиб PQ бурлига уршиб, улдан қайтиб B шарга бориб теккулаи билган $AXYB$ бўлади.

Түшүнүккө кайтышыңарга келүүгө келгенде XA' кесме YX кесме-
нинин дауамы булам. Чүңкү $A'Y$ кесме MQ га перпендикуляр A нүк-
теги симметриялык булган A' нүктөсүн Y нүктөсү айлан туганшты-
руучу кескиндир (89-1 — III чыккалаарга карагы).

Демак, (A'') билан (MQ) нинг кесилиш нуқтаси изаагян X нуқта булди, ун Y нуқтагын: $\{PQ\}$ аниқлагандан сунг тила олар энакуз. Эна A' ва B нуқтагараик фийдаланиб, Y нуқтагн топик булган аниқлайтж: тушиш ва қайтиш қолуниги мувофиқ (PQ) га тебати A' нуқтага симметрик A'' нуқтаи B нуқта билан туташтиризе, $(A''B)$ билан (PQ) нинг кесилиш нуқтаи Y нуқта хосиз булади.

Ягсам: (MQ) га нисбәтән A нүктәгә симметрик булган A' нүктәни төпөтсә; (PQ) га нисбәтән A' нүктәгә симметрик булган A'' нүктәни төпөтсә (89-1 чизмә). A'' нүктәни беренчән A нүктә билән туташтыралык. $(A''B)$ ыя (PQ) түтти чизикләреннән кесилеш нүктәсн Y ва (YA') ыя (MQ) билән кесилеш нүктәсн X булалы.



Гонимые и гонимые

- I. 80-й экваториал во ртути В является симметрич В' относительно фокального, касательного биссектриса Юд биссектрисы.
- II. Изображения шаров или сферических тел на шаре.
- III. А шарикот В шарот касуна. Биссектриса Юд биссектриса (A X) B = A' B' (аналогично) сг биссектрисы.
- IV. А шар биссектриса уи биссектриса касуна, сг биссектриса Юд биссектриса. А шарикот биссектриса Юд биссектриса (80-III экватор).
- V. А шар биссектриса Юд биссектриса касуна биссектриса касуна, у биссектриса Юд биссектриса касуна касуна, сг биссектриса Юд биссектриса касуна. А шарикот биссектриса Юд биссектриса.

62-мәселә, 2-түгәри бәзә, ва уйбән икки тарафта А ва Б нукталар берләгән. Бу түгәри чикләрдә туймак Х нукта тә-
пикләп, бу нуктанинг А ва В нукталаргача масофи заринне
айырмакы энг кичик, яһи:

$$|AX| = |BX| = \max\{0, \alpha\}$$

654114

Анализ X_1 нуклеа (НО-тизла) 8 тўғри чиқиқини каттёрий
нуклеаи бёзски.

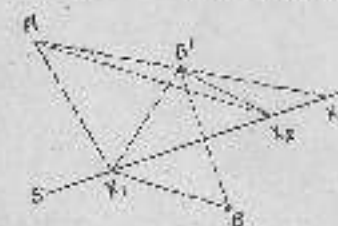
Нерилган нүкталарден бириги, массаэн, B нуктасы x түври чыныкка шесбатын симметрик акслантирайлык, $|AX_1| - |BX_1| = |AX_2| - |BX_2|$ болган учун бу тегилидаты сат томонинте максимумта калай үрлик, үнг томонинте максимумтаи пал-
лаят нуксия.

Алар X_1 нүктә AB' түзгән чыгыш-
да ётмаса, AX_1B' үчбұртуклыгн

$$|AX_1| - |B'X_1| \leq |AB'|$$

муносабат келиб чиқати.

Агар X , нукта γ тэгш явирч буйнча хэрэглэгдэнэ, X_1 ба буюу дэлгэцээрхэн үгийг, AB' тэгш явирч буйнча γ буюу биеийнхэн дүрсний X хоёрынхэн олс, $|AX| = |D'X| = |AB'|$



91-11340

бўлиб, текширилаган айирма эрт катта қийматга эга бўлади,
яъни

$$|AX_1| - |BX_2| \leq |AX_1| - \leq |BX_3| \leq \dots \leq \\ \leq |AX| - |BX| = \max \min.$$

Укажіть, X пунктами топологічного простору з такою властивістю: B півкільце симетричне B' півкільцю тобто, (AB') не є біліній келіхом до якої відноситься.

ТОПШНДЖ

Переходим к исследованию функции Φ на $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор. Тогда $\Phi(\mathbf{a}) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Сделаем замену переменных $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{a}$. Тогда $d\mathbf{x} = d\mathbf{y}$ и $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$. Поэтому $\Phi(\mathbf{a}) = \exp(i \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{y}$. Но $\int_{\mathbb{R}^n} \exp(i \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{a})$, так как $\mathbf{y}$ — произвольный вектор. Следовательно, $\Phi(\mathbf{a}) = \exp(i \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \Phi(\mathbf{a})$. Если $\Phi(\mathbf{a}) \neq 0$, то $\exp(i \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 1$, т.е. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$. Но $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ только для $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Поэтому $\Phi(\mathbf{a}) = 0$ для всех $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. А для $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ $\Phi(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{R}^n} 1 d\mathbf{x}$, что бесконечно. Следовательно, $\Phi(\mathbf{a}) = 0$ для всех $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, а для $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ $\Phi(\mathbf{0}) = \infty$. Это и есть характеристическая функция дельта-функции $\delta(\mathbf{x})$.

63⁸-мачаа. SS, тугра узун, на ундах бар тарибаа Аа
В нуктаар берилгээ, SS, тугра узунда

$$\Delta_{\text{XIS}} = 2 \Delta_{\text{XSS}}$$

шартийн хангайлалтыг Х нүүдэллэн тооцна. (Бүтэцтэй "Курсагчид" бодитой хариулт.)

76- §. МАШҚ УЧУН НАСАЛАЛАР

[illegible]

100%. Бурак ва унаж янда биз пуқта беришим, Гир уни беришим
пуқтада, ҳаётан пили учу бўлган халонларида бунича ва перикетра эн жам
чиқ ушбоним ибер.

1977. Бердугар гэдүрүлэки бер уур мал лум нүцгидэ бүүний хингичиж
переметри оло, хурууныг олзони.

1992*. Бесседрездары ётап тўғри чизиқлар ва ётап тўғриликнинг ёр
қилини ёрқилини қўйиб қўйиб қўйиб

1938. Язгы күннәр тонони да ите тохмаларниң узуний ёзылгиди тагын-
тагынлап кызыл ёзылгиди ёзылгиди, сиз аз ёзылгиди ёзылгиди. Ёзылгиди ёзылгиди.

1948. Estimated 14 specimens from 6 sites near the mouth of the river.

уринуити айлана мизини ва куйдаги саволларга жавоб бериш:

1. Берилхөвө түүргэ чинээлэр уяагдэ парилмаа бодса, насаа [үзэдэг]
очигдааг.

1987, Берлинский АБС, ул. Бульварный, А. ушдан, 100 метри чыгышда

буулах X нэгдэл тооцогдох, бүх бүтэцлэл р-бүтэцлэлт AB нь AC тэгшлэлээр
бүр хэн бүтээх оюуны хүрвэл.

ПАРАЛЛЕЛ КЎЧИРИШ

27-§. ДАСТЛАБИ ТУШУНЧАЛАР

Агар текисликда иккиёри $\mathbf{v}$ вектор берилган бўлса, текисликдаги ҳар бир A нуктага $|\overrightarrow{AA'}| = \mathbf{v}$ шартин қаноатлантирувчи биттагина A' нуктани мос келтириш мумкин.

Шунга кўра, текисликнинг бирор A нуктасини

$$|\overrightarrow{AA'}| = \mathbf{v} \quad (1)$$

шартин қаноатлантирувчи A' нуктага келтиришни маълум $\mathbf{v}$ вектор қадар параллел кўчириш деб аталади.

Текисликнинг A ва A' нукталари орасида ўрнатилган (1) мосликни қуйидаги шаклда белгиланиш шарт қиламиз:

$$P_v(A) \equiv A' \quad (1')$$

ва буни қуйидагича ўқиймиз. A нуктани $\mathbf{v}$ вектор қадар параллел кўчирсан, A' нукта ҳосил бўлади.

(1') даги A' нукта A нуктанинг образи, A нукта эса A' нуктанинг прообразини бўлади.

Нукталар ўрналишидан иборат F фигура берилган; унинг ҳамма нукталарини $\mathbf{v}$ вектор қадар параллел кўчиришдан ҳосил бўлган нукталар тўламини F' фигура F фигурани $\mathbf{v}$ вектор қадар параллел кўчиришдан ҳосил бўлади дейилади ва қисқачи

$$P_v(F) \equiv F'$$

шаклда ёзилади.

Эслатма. Ҳар бир параллел эки бунд икки нуктанинг ҳамма тинч кесмалар бўлаётгани вектор деб аталса ҳам, бу қўлайлик нукта назоратда, бундай тўламанлар берилган кесмаларга, яъни маълум аҳамиятдаги ва маълум ўлчовлиги кесмалар вектор деб яриштириш тўғрисида бўлади.

A нуктани $\mathbf{v}$ вектор йўналишида ушбу ўлчовлиги қадар масофага кўчиришни, ҳақиқатан $\mathbf{v}$ вектор қадар параллел кўчириш дейилади. Буни биздан шартан равишда $\mathbf{v}$ векторга параллел кўчириш деб ҳам айтади.

Параллел кўчиришнинг асосий хосиятлари

Биринчи хосия. Текисликда параллел кўчириш текислик нукталарини ўзаро бир қийматли ахслантиришдир, яъни параллел кўчиришда, текисликнинг битта нуктасига ушбу текисликнинг биттагина нуктаси мос келади ва, умуман, F фигурани параллел кўчиришдан ҳосил бўладиган F' образини ҳар бир M' нуктаси F фигуранинг биттагина M нуктасини кўчиришдан ҳосил бўлади.

Ҳақиқатан, агар F' образини битта M' нуктасига F прообразини иккига M_1 ва M_2 нуктаси мос келади деб фарз қилинса, бу ҳолат (1) га кўра, қуйидаги мунсабатларни қамшид деган бўлади.

$$\overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{M_2M'} = \mathbf{v}.$$

яъни бир M' нуктадан $\mathbf{v}$ векторга параллел қилиб келтириш тўғрисида икки нуктадан биттагина нуктага қайтади қилиб қолмайди. Шунинг учун юқорида қилинган фарзга инкор этиб, 22-§ га асосан биринчи хосиятни тўғри деб татамиз.

Иккинчи хосия. Параллел кўчириш ҳарангдир, яъни ҳар бир фигурани параллел кўчиришдан ушбу тинч фигура ҳосил бўлади.

Ҳақиқатан, 91-1 қизмадаги F ва F' маск фигураларини A ва A' , B ва B' маск нукталарини A билан B ва A' билан B' ни тутатиришдан $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A'B'}|$ тенглик ҳосил бўлади. Бунинг тўғрисида $ABBA'$ тўртбурчакнинг параллелграми-лиги асос бўлади.

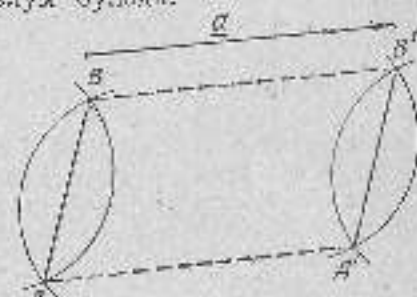
Бу бажаришган ахслантиришнинг ҳаракат ахслантиришга тенг бўлади. Бундан, параллел кўчиришда ҳар бир фигуранинг ўзига тенг фигурата ўтиши маълум бўлади.

Натижалар:

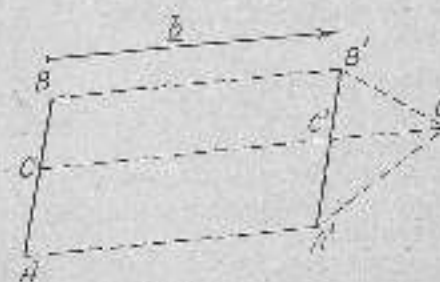
I. Параллел кўчириш ҳар бир кесмага ушбу ўлчов тинч ва ушбу параллел кесмага ўтказилади. (Агар кесмага ўз йўналишида кўчирилса, у ўз билан бир тўғри чизикда ётувчи иккинчи бир кесмага ахслантирилади.)

Бунинг нобит қилиш учун 91- II қизмада берилган AB кесмадаги иккиёри C нуктанинг образи бўлган C' нукта AB кесманинг $A'B'$ образини ётисилиш кўрсатиш керак.

C' нукта $A'B'$ кесмада ётмай, унинг ташқарисидаги бирор C_1 нуктага ётади, деб фарз қилайлик. Бу ҳолат, иккинчи хосияга мувофиқ қуйидагилар ўринли бўлади.



91-1 қизма



91-II қизма

$$\frac{|BC| - |B'C_1| + |CA| - |C_1A'|}{|AB| - |B'C_1| + |C_1A'|} \quad (1)$$

Иккинчи ҳосилга кўра $|AB| = |A'B'|$ д-р. (2)

(1) ва (2) муносабатлардан қуйидаги келиб чиқади:

$$|A'B'| = |B'C_1| + |C_1A'|. \quad (3)$$

Бу эса $\triangle A'B'C_1$ иккунча бир томони қалган иккунча томони йиғиндисига тенг деган натижага хулоса чиқарилиши кўрсатади. Демак, билимнинг фарзидан натижа кўрилади.

II. *Параллел кўчириш ҳар бир тўғри чизикни унинг ўзига параллел иккинчи бир тўғри чизикка аксантиради* (агар тўғри чизикни ўз йўналишида кучирмаса, у ўз ўзига аксантилади).

Ҳақиқатан, 91-III қизмадаги a тўғри чизикнинг MM' кесмасини $\overrightarrow{MM'}$ вектор қадар параллел кўчирсак, $[M'N'] \parallel [MN]$ кесма ҳосил бўлади. (4)

N' нукта $M'A'$ ва $N'P'$ кесмалар утул умумий. Шунинг учун булардан ҳар бири a тўғри чизикка параллел ва, демак, $M'P' \parallel a$. Шунингдек, $M'P'$ каби кесмалар тўплами бўлган a' тўғри чизик a тўғри чизикка параллел бўлади.

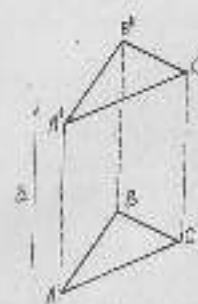
III. *Параллел кўчириш бир-бирига параллел бўлган иккунча тўғри чизикни яна бир-бирига параллел бўлган иккунча тўғри чизикка аксантиради.*

Ҳақиқатан $a \parallel b$ бўлса, $a \parallel a'$ ва $b \parallel b'$ аксантиришдан ҳосил бўлган a' ва b' чизиклар ўзаро параллел, яъни $a' \parallel b'$ бўлади.

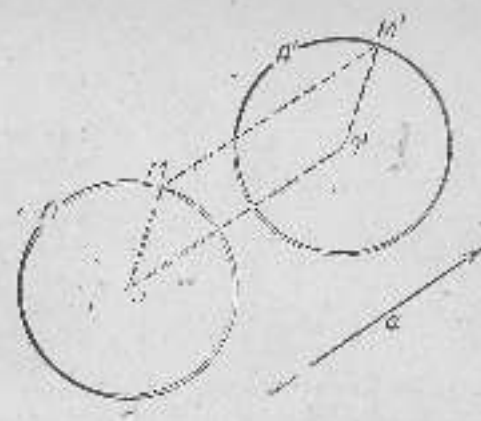
Эслик: агар a ва b тўғри чизиклар ўзаро параллел бўлмаса, аксантиришдан a' ва b' чизиклар ҳам ўзаро параллел бўлмайди.

IV. *Параллел кўчириш ҳар бир параллел тўғри чизиклар дастасини шу даста айланишида параллел тўғри чизиклар дастасига аксантиради ва берилган даста билан унинг образи берилган айланишдаги дастага тенг бўлади, яъни дастанинг элементлари ўришларини ўзгартирмай дастанинг ўзи ўзгармайди.*

Ҳақиқатан, $a \parallel b \parallel c, \dots$ ва $a' \parallel a, b' \parallel b, c' \parallel c$ бўлганда $a' \parallel b' \parallel c' \parallel \dots$ бўлади.



92-қизма



93-қизма

V. *Параллел кўчириш тўғри чизикларнинг марказий дастасини иккинчи бир марказий дастага ўтказиши.*

Ҳақиқатан, $a, b, c, \dots$ тўғри чизикларнинг ҳар қайси нуктаси ўзаро параллел бўлмаса ва улар битта умумий нуктага эга бўлса, $a', b', c', \dots$ ларнинг ҳам ҳар қайси нуктаси ўзаро параллел бўлмайди ва улар битта умумий нуктага эга бўлади, яъни улар янги бир марказий даста тўзлади.

VI. *Параллел кўчириш ҳар бир кўлбурчакни унинг ўзига тенг кўлбурчакка аксантириб, бу иккунча кўлбурчакнинг мос томонлари ўзаро параллел бўлади.* 92-қизмада бундай аксантириш бажаришган.

$$P_a(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'.$$

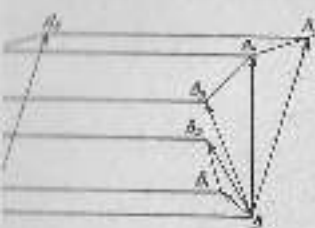
VII. *Параллел кўчиришда айлана ўзига тенг айланага аксантилади.*

Ҳақиқатан, агар (O, r) айлананинг O маркази параллел кўчириш натижасида O' нуктага аксатилса, айланада ётувчи иштиёрий M нукта ва унинг образи M' нукта $r = |OM| = |O'M'|$ шартин қаноатлантиради. Демак, M' нукталар тўплами маркази O' ва радиуси r бўлган айланага ташкил этади. Шунинг учун бирор айланани параллел кўчириш учун унинг марказини кўчириб, ҳосил бўлган нуктани марказ деб қабул қилиб, берилган айлана радиуси билан янги айлана чизилади. 93-қизмада бундай аксантириш бажаришган.

$$P_a(O, r) = (O', r).$$

Бу аксантиришда ҳосил бўлган A' айлананинг ҳар бир M' нуктаси A айлананинг бирор M нуктасининг образи бўлади.

Ушундан ҳосил. Текисликдаги ҳамма параллел кўчиришлар тўплами уларни қўшишга нисбатан группа ташкил этади.



94-I чизма

нинг учинчи параллел кўчиришга алмаштириш мумкин. Иккитан, 94-I чизмалари AB кесмани V_1, V_2, V_3 вектор-бича кетма-кет параллел кўчиришдан ҳосил бўлган тўп-т икки кетма-кет V_1 ва V_2 векторлари қадар кўчиришга қилсак, унда қуйидаги муносабатларнинг мавжудлигини олиб:

$$\left. \begin{aligned} P_{V_1}([AB]) &= [A_1B_1] \\ P_{V_2}([A_1B_1]) &= [A_2B_2] \end{aligned} \right\} \rightarrow P_{V_1+V_2}([AB]) = [A_2B_2].$$

нинг тўғрисиғига ишоним учун қуйидагиларни исбот қи-
лал:

$$= \overrightarrow{BB_2}, \text{ яъни } \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{AA_2} \text{ ёки } \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{BB_2}.$$

Яъни, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$ ва $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_2}$ бўлгани учун $\angle A_1AA_2 = \angle BB_1B_2$ д-р. Иккитадан томонлари ва улар ор-
та бурчақлари конгруитлиги сабабли $\triangle AA_1A_2 = \triangle BB_1B_2$ бўлиши учун $\overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{BB_2}$.

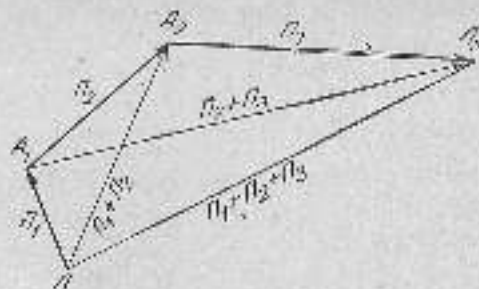
Икки кесма бир хил йўналишдаги AA_1 ва BB_1 кес-
мидан бир хил бурчақлар тузгандлиги учун AA_1 билан
исмалар ўзаро параллел ва бир хил йўналишда бўлади.

ш учун $\overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{BB_2}$ д-р.

Яъни, $\overrightarrow{AA_1}$ ва $\overrightarrow{A_1A_2}$ векторлар бўйича кетма-кет бажари-
ли параллел кўчиришни $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2}$ вектор бўйича ба-
ланиган кўчиришга алмаштириш мумкин. Яъни бу икки
ол кўчиришнинг йиғиндиси яна параллел кўчиришдан
дир.

нинг учун бунида гурупа бўлишига шикклик шарти ба-
лади.

Яъни: кейинги жумладан икки векторни қўшишда н-
диган учбурчак қондасини келтириб чиқариш мумкин:
 $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{AA_1}.$



94-II чизма

II. Параллел кўчиришлар тўпламидаги бир неча кўчириш-
ларни қўшиб—группалаш (ассоциативлик) қоидага бўйсунгани,
яъни кетма-кет бажарилуви иккитадан унга P_1, P_2, P_3 па-
раллел кўчириш учун қуйидаги қоида бўлишидир (94-II чизма):

$$(P_1 + P_2) + P_3 = P_1 + (P_2 + P_3).$$

Ҳақиқатан, агар P_1 акселантириш A нуктадан A_1 нуктага, P_2
акселантириш A_1 нуктадан A_2 нуктага ва P_3 акселантириш A_2
нуктадан A_3 нуктага акселантириш. $P_1 + P_2$ акселантириш A нук-
тадан бевосита A_2 нуктага $(P_1 + P_2) + P_3$ акселантириш A нук-
тадан A_3 нуктага акселантиради (94-II чизма); $P_2 + P_3$ акселан-
тириш A_1 нуктадан A_3 нуктага акселантиради учун $P_1 + (P_2 + P_3)$
акселантириш A нуктадан яна A_3 нуктага акселантиради. Шун-
дай қилиб, ҳар қандай A нукта учун $(P_1 + P_2) + P_3$ ва $P_1 +$
 $(P_2 + P_3)$ акселантиришлар бир хил натижа беради, демак,
 $(P_1 + P_2) + P_3 = P_1 + (P_2 + P_3)$ бўлади.

III. Айнан акселантиришнинг ноль-векторга параллел кўчириш
(P_0) деб қарасак, ҳар қандай параллел кўчириш учун $P +$
 $P_0 = P_0 + P = P$ бўлади, яъни P_0 акселантириш гурупада
бирлик элемент ролини ўйнайди.

IV. Параллел кўчиришлар тўпламидаги ҳар бир P кўчириш
учун тесқари кўчириш P^{-1} мавжуд бўлиб, у шу тўпламга
киради ва

$$P + P^{-1} = P^{-1} + P = P_0$$

шартин қаноатлантирилади.

Ҳақиқатан, агар P акселантириш a вектор қадар параллел
кўчириш бўлса, P^{-1} акселантиришнинг $-a$ вектор қадар па-
раллел кўчириш эканлигини куриш қийин эмас.

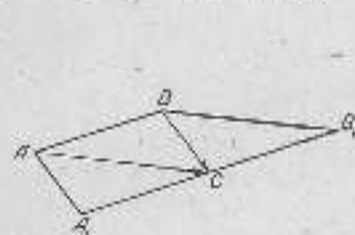
Шундай қилиб, параллел кўчиришлар тўплами бу кў-
чиришларни қўшишга нисбатан гурупа тилишига эга экан.

Бунинг устига ҳар қандай P_1 ва P_2 параллел кўчиришлар
учун $P_1 + P_2 = P_2 + P_1$ бўлгани сабабли бу гурупа ком-
мутатив гурупадир.

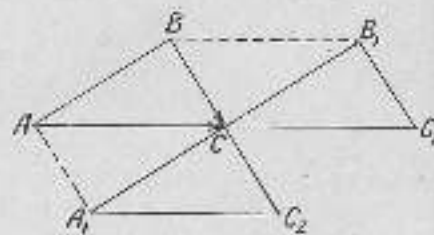
28-§. ПАРАЛЛЕЛ КҶИРИШГА ДОИР МИСОЛЛАР

197. Бариксан ABC ушбурчанинг ҳар бир томонига унинг қолган икки томонига параллел кўчирилган ҳосил бўлган фиғуранинг ўрагининг (85-чи-намада фиғур AB томонини BC ва AC векторлар бўйича параллел кўчириш кўрсатилаган).

198. Бариксан ABC ушбурчанинг унинг ҳар бир томонига параллел кўчирилган (86-чи-намада ABC ушбурчани AC ва BC векторлар бўйича параллел кўчириш кўрсатилаган).



85-чи-нама



86-чи-нама

199. Параллелограммининг ҳар бир диагоналининг унинг ҳар икки томони бўйича параллел ҳар икки йўналишда кўчириб, ҳосил бўлган фиғуранинг ўрагининг (87-чи-намада фиғур AC диагоналининг кўчирилган кўрсатилаган).

200. Тўғри бурчли ABC ушбурчанинг бошқа икки томонига элементини бошқа чизиқни элементларга параллел кўчириш:

- a катетини унинг b катетига параллел кўчириш;
- b катетини a катетига параллел кўчириш;
- c гипотенузасини a ва b катетларга параллел кўчириш;
- a ва b катетларини c гипотенузага параллел кўчириш;
- a ва b катетларини c гипотенузага ўтказилган медианага параллел кўчириш.

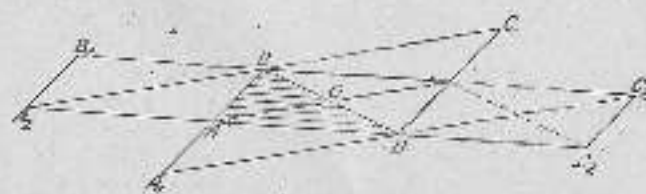
201. Ихтиёрий ABC ушбурчанинг AC томони CB вектор қадар параллел кўчирилган, BD қадарга кўчирилган (88-чи-нама). Сўнгра BA томони давомиди $AE \equiv AB$ ҳосил бўлиб, унинг B ва C ва D нуқталар билан туташтирилган; қуйидагиларни исбот қилинг.

I. CDE ушбурчанинг томонлари ABC ушбурчанинг мос медианаларидан икки марта катта.

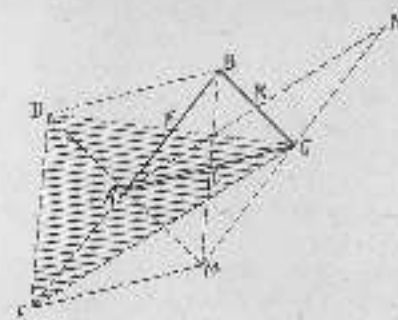
II. CDE ушбурчанинг эки ABC ушбурчанинг томондан уч марта катта.

III. CDE ушбурчанинг бурчларини ABC ушбурчанинг медианалари орасидаги бурчларга тенг.

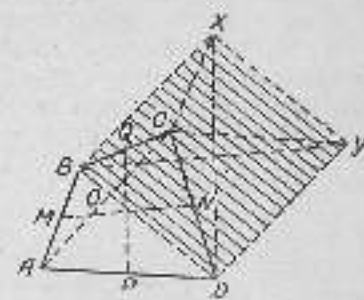
IV*. AD , AE ва BA кесмлар CDE ушбурчанинг медианаларининг $\frac{2}{3}$ қисmini ташкил қилиш.



88-чи-нама



89-чи-нама



90-чи-нама

202. Ихтиёрий $ABCD$ тўртбурчанинг AB ва AD томонлари AC вектор бўйича параллел кўчирилган, CX ва CY қадарга кўчирилган. Ҳосил бўлган $BXYD$ параллелограммининг қуйидаги хоссаларга эга эканлигини исбот қилинг (89-чи-нама).

I. $BXYD$ параллелограммининг томонлари ва бурчлари $ABCD$ тўртбурчанинг диагоналлари ва улар орасидаги бурчларга мос равишда тенг.

II*. BCX , XCX ва YCD бурчлар $ABCD$ тўртбурчанинг B , A ва D бурчларига мос равишда тенг.

III*. ACD ва BCY бурчлар $ABCD$ тўртбурчанинг AB ва CD ҳамда BC ва AD қараш-қарши томонлари орасидаги бурчларга мос равишда тенг.

IV. Қаралган параллелограммининг эки тўртбурчанинг иккидан икки марта катта.

V. Тўртбурчанинг C учидан параллелограммининг тўртта учидан бўлган масофалар тўртбурчанинг томонларига мос равишда тенг.

VI. Параллелограммининг диагоналлари тўртбурчани қараш-қарши томонларининг ўрталарини туташтирувчи кесмлардан мос равишда икки марта катта; бу диагоналар орасидаги бурч эки ушбурчанинг орасидаги бурчга тенг.

29-§. ПАРАЛЛЕЛ КҶИРИШ МЕТОДИ БИЛАН МАСАЛАЛАР ЕЧИШ

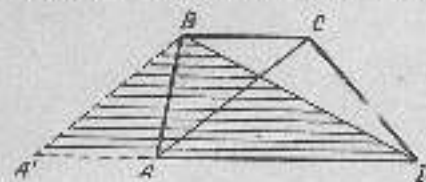
Ясашга доир шундай масалалар ҳам учрайдики, уларда изданувчи фиғуранинг элементлари бир-бирига нисбатан нуқталар (ёки ўзг.) жойлашган учун улар орасидаги боғланишни баъосига аниқлаб бўлилади. Бундай фиғуранинг элементлари орасидаги муносабатларни аниқлаб, у фиғуранинг ясаи йўлини топиш учун унинг бир-биридан ўзгарадиган элементларини турли йўللار билан аниқлаштиришга тўғри келади. Бу йўللардан бири параллел кўчириш методидир. Бу метод билан масала ечиш асосан қуйидаги тартибда бажарилади.

I. Масалада ўралган F фиғура, олдидики томонда деб фараз қилиб, тахминан чизиб қўйилади.

II. Чизилган тахминий фиғуранинг доим топилган бирор бўлиши ёки унинг бирор чизиқли элементи шундай параллел

кўчириладики, унинг ва баъзи бир қўшимча чизиқларнинг чи-
зилиши натижасида ёрдамчи f фигура ҳосил бўлади.

Ёрдамчи фигурадан изланувчи F фигурага ўтишда, ёрдамчи
фигуранинг толиш мақсадида қилинган параллел кўчиришнинг
тескариси бажарилади ва баъзи бир қўшимча чизиқлар ҳам
ўтказилади.



100-чиқма

Бу ишларнинг ҳаммаси
аналитик ёшқинда бажари-
лади.

64- масала. *Асослари
ва диагоналлари берилган
трапеция ясанг.*

Анализ. Изланувчи
трапеция 100- чиқмадаги
 $ABCD$ трапеция деб фарз

қилайлик. Унинг берилган элементларининг бир учбурчакка кел-
тириш учун берилган чизиқлар элементлардан бирини параллел
кўчириб қўрайлик, чунончи, AC диагоналининг CB асоси бўйича
сўзлаштириб (параллел кўчириб) уни $A'B$ ҳолатга келтирармиз,
бунинг учун B нуктадан $BA' \parallel CA$ тўғри чизиқ ўтказиб, DA
асосини бу чизиқ билан кесилгунча давом эттирармиз.

Бундан ҳосил бўлган $A'BD$ учбурчак ёрдамчи фигура бў-
лади, чунки:

А) $A'BD$ учбурчакнинг учала томини маълум: $|A'B| =$
 $= |AC|$, $|A'D| = |AA'| + |AD| = |BC| + |AD|$ ва BD ҳам
маълум.

Шунинг учун бу учбурчакни ясай оламиз.

Б) $A'BD$ учбурчакдан изланувчи $ABCD$ трапецияга ўтиш
учун унинг A ва C учларининг толиш кифоя. Бу мақсадда уч-
бурчакнинг $A'B$ томинининг $|AA'| = |BC|$ кесма қадар параллел
кўчирамиз (бу кўчиришنى амалда бажариш учун берилган BC
кесмага тенг қилиб AA' кесмани $A'D$ асосдан ажратиб,
 $AC + A'B$ кесмани ўтказармиз ёки $A'B$ га параллел AC тўғри
чизиқ билан $A'D$ га параллел BC тўғри чизиқларни кесилти-
риб, изланувчи C нуктани ҳосил қиламиз).

Тошчириқлар

- I. Аналитик тузилган илан бўйича изланган трапецияни ясаб, унинг
масала талабига жавоб беришда ишлат қилинг.
- II. 8- масаланинг ечилишда фойдаланиб, бу масаланинг текшириг.
- III. Яна қандай параллел кўчириш воситасида бу масалани ечиш мум-
кин?

65- А масала. *Икки қўшни томони ва диагоналлари пра-
сидаси бурчаги берилган параллелограмм ясанг.*

Анализ. Изланувчи параллелограмм 101- чиқмадаги ABC
фигура бўлсин. Унинг берилган элементлари AB , AD ва

$ACD = \alpha$ шу туркида бирор учбурчакнинг элементлари бўла
олмайди. Шунинг учун бу ҳолда параллелограмм ясаиш йўлини
ҳам аниқлаб бўлмайди. Шу сабабдан, параллелограммининг бир-
ор чизиқни элементини (ёки унинг бирор бўлагини) шундай
параллел кўчириш кераки, натижада параллелограммининг
маълум элементлари бир учбурчакка келиб, ёрдамчи фигура
ҳосил қилсин.

Масала, параллелограммининг
бир қисми ABD учбурчакни BC
томонга параллел кўчирайлик.
Бунинг учун (CD') $\parallel (BD)$ тўғри
чизиқ ўтказиб, уни AD томон-
нинг давоми билан бирор D' нук-
тада кесилтириш кифоя (бу ишни
 BD диагоналининг $[BC]$ га параллел
кўчириш деб айгиш ҳам мумкин). Бундан $\triangle CDD' \cong \triangle BAD$
ҳосил бўлади. Демак, $|DD'| = |AD|$. Чизилишига кўра (CD') $\parallel$



101-чиқма

(BD) бўлагини учун $\angle CDD' = \angle AOD = \alpha$.
Юқорида бажаришган параллел кўчириш натижасида ҳосил
бўлган ACD' учбурчакни эътибор қилайлик. Бунда:

А) учбурчакнинг $A'D'$ асоси $= 2|AD|$ бўлиб, $\angle CDD' = \alpha$ ва
 $CD = AB$ асосга ўтказилган медианадир. Маълумки, уч-
бурчакнинг асоси, ундаги бурчаги ва асосига тутирилган
медианаси маълум бўлса, учбурчакни ясаиш мумкин (57- ма-
сала).

Б) ACD' учбурчакдан изланган параллелограммга ўтиш
учун бу параллелограммининг B ва D учларининг толиш керак.
 D нуктани ACD' учбурчак асосининг ўртаси сифатида топиш
мумкин. B нукта эса AC томоннинг ўртаси O ни аниқлаб,
сўнгра уни D нукта билан туташтириб ва $OB = OD$ кесмани
қўйиб топилади.

ACD' учбурчакдан изланган параллелограммга қўйиладиган
ўтиш яна ҳам қўлайроқдир: ACD' учбурчакнинг бўлаги DCD'
учбурчакни DA кесмага параллел кўчиришдан (ёки CD' кес-
мани $D'D$ кесмага параллел кўчиришдан) $ABCD$ параллело-
грамм ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, юқорида бажаришган параллел кўчиришдан
ҳосил бўлган ACD' учбурчакнинг ёрдамчи фигура бўлишини
исботлаш орқали масалани ечиш йўли аниқланади, яъни маса-
лани ечиш йўлини тузилади.

Тошчириқлар

- I. 65- А масаладаги параллелограммининг яна қандай элементини парал-
лел кўчириб ёрдамчи фигура ҳосил қилиш мумкин?
- II. Тўрт томонли берилган трапеция ясанг.
- III. II- тошчириқдаги трапециянинг ён томонларидан бирини трапеция-
нинг қатта асосига параллел кўчириб масалани ечили.
- IV. II- тошчириқдаги масаланинг шартларини текшириш.

65-й масала. Тўрт томон ва узардан қарама-қарши янги томонни ётган тўғри чизиқлар орасидаги бурчани белгилан тўртбурчак исан.

Анализ. Изланувчи тўртбурчакни $ABCD$ деб (102-1 чизма), унинг b ва d томонлари ётган тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни α деб фарз қилайлик.



102-1 чизма

BC томонни BA томонга параллел қўчириб, AF ҳислатга келтирайлик. F нуқтаи A ва D нуқталар билан туташтиришдан ҳосил бўлаган AFD учбурчак ёрдами билан фигуранинг ҳақиқатини ҳақ.

А) Берилган $|AD| = d$, $|AF| = |BC| = b'$ ва $\angle DAF =$

$= \angle FDC = \alpha$ элементларида бу учбурчакни ясаш мумкин.

Б) Ясалган AFD учбурчакдан изланувчи тўртбурчакка ўтиш ҳам мумкин.

Берилган $|CD| = c$, $|CF| = |BA| = a$ ва топишган DF томон бўйича ADF учбурчак билан DF умумий томонга эга бўлган CDF учбурчак исан. Бундан сўралган тўртбурчакнинг C учини топилади.

AF кесмани топишган FC кесмага параллел қўчириб, BC ҳолатга келтира оламиз. Бундан изланган тўртбурчакнинг B учини маълум бўлади. A ва B нуқталарни бирлаштиришдан $ABCD$ тўртбурчак ҳосил бўлади. Шундай қилиб, изланган тўртбурчакни ясаш айлан маълум бўлади.

Тоғшириқлар

I. Аналида тузилган янги-га бошқа масалада берилганлар бўлибта нисбатини тўртбурчак исан.

II. 102-11 чизмадан фойдаланиб, тўртбурчакни бошқачароқ таркибга келтириш мумкинлигини текширам.

III. Ушбу шартларни текшириб (DFC учбурчакни ясалган унинг C учини DF тўғри чизиқ устида ва унинг турли тарафиди ётиши мумкинлигини эътиборга олам).



102-11 чизма

66- масала. Учта бурчани ва қарама-қарши янги томонни берилган тўртбурчак исан.

Анализ. Изланувчи тўртбурчак 103- чизмадаги $ABCD$ бўлади. Берилган томонларидан биричи, масалан, $BC = b$ томонни BA томон бўйича параллел қўчириб, уш AE ҳолатга

келтирамиз. E нуқтаи D нуқта билан туташтирсак, ёрдамчи AED учбурчак ҳосил бўлади. Ҳақиқатини ҳақ:

а) берилган $|AE| = |BC| = b$ ва $|AD| = d$ томонлари ва узар

орасидаги $\varphi = \angle DAE = \angle BAD = \angle BAE = \angle BAD = \angle CBA$ бўйича AED учбурчакни ясаш мумкин;

б) AED учбурчакдан изланган тўртбурчакка қўйиласинга ўтиш мумкин; CE тўғри чизиқ

ва AE нинг давоми орасидаги бурчак ($\angle CEA = \angle BAE = \angle FBC = \alpha$) маълум бўлагани учун EC тўғри чизиқни чиза оламиз. Шунингдек, $\angle ADC$ маълум бўлагани учун FC тўғри чизиқни ҳам чиза оламиз. EC ва FC тўғри чизиқлар кесилиб, тўртбурчакнинг C учини аниқлайди.

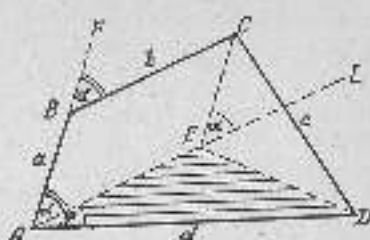
AE кесмани $|EC|$ бўйича параллел қўчириб, уш BC ҳолатга келтирамиз. Бундан $ABCD$ тўртбурчак ҳосил бўлади.

67- масала. Берилган тўғри чизиққа параллел қилиб шундай айлана чизилган, унинг икки учи берилган икки айланада ётиб, узунлиги берилган кесмага тенг бўлсин.

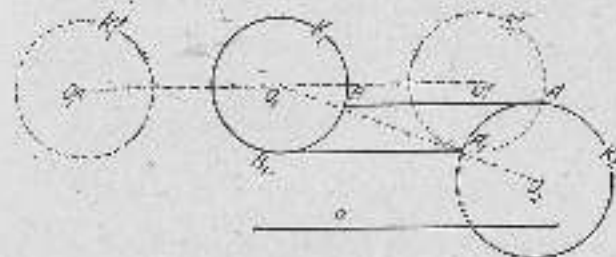
Анализ. Изланувчи кесма 104- чизмадаги AB кесма деб фарз қилайлик. Бу кесманинг узунлиги ва йўналиши маълум бўлаганидан уш чизилган учун бир учини топиш кифоя.

Бунинг учун берилган икки айланадан биричи, масалан, K_1 ни берилган a тўғри чизиққа параллел қилиб икки томонга $l = AB$ масофа қадар қўйишамиз. Бу ҳолда K_1 айлана K_1' ва K_1'' айланалар вазиятига келади. K_1' ёки K_1'' айлананинг K_2 айлана билан кесилишган нуқталаридан бири изланган кесманинг бир учин бўлади.

Бикини чизушда бундай нуқталар A ва A_1 бўлиб, бу нуқталарда a тўғри чизиққа параллел қилиб ўтказилган $|AB| = |A_1B_1| = l$ кесмалар изланувчи кесмалар бўлади.



103- чизма



104- чизма

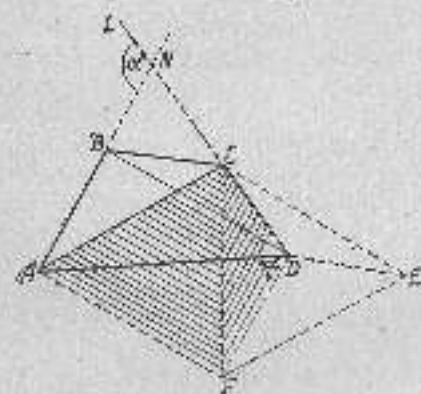
Толшқирмақлар

I. Берілген айыққарары K , ең параллель күйірігі, масаланы еңгізі.

II. Қолдан басқарыларын бақыры, тәжірибін басқарығы бақыратын заң-
тыңдағы күйідегі еңгізігі жазық берілі. Қазыш шарттары мүлкіт бұла-
ғыда 0, 1, 2, 3, 4 ва төхепз ұйы қосылар қосыт бұлағы?

68- масала. Диагональдары, қиыма-қаршы иккі томон
ва бу томондар етган түрлі чышқар орасыдағы бурчаны
берілген түртбурчак ясаң.

Анализ. 105- чысхадан $ABCD$ фигураны излапуды түр-
бурчак лед фараз қылыб, уның BD диагональын BC томон
бүйіне параллель күйіріб, CE разықта келтірмиз; шу диаго-
нальн BA томон бүйіне ҳам параллель күйіріб, уш AF вы-
зықта келтірмиз. Сўра F



105- чысма

пунктаны C ва E пунктлар бй-
лап туташтырыб, қосы бүйіні
 CDF ва ACF үчбурчаклароны
ёрдығы фигуралар эканығы
есепт қыламиз.

Қақпқатан ҳам, CDF ва
 ACF үчбурчаклар ёрдығы фи-
гуралардыр, чуқын:

A) Берілген $|CD|$ ва
 $|DF| = |AB|$ ҳамда $CDF =$
 $ANL =$ элементлар бүйіне
 CDF үчбурчакны ясап мүмкін.
Шунингдек, $|AC|$ ва $|AF| =$
 $|BD|$ ҳамма $|CF|$ томонла-

лары бүйіне ACF үчбурчакны ҳам барынчы үчбурчак билан
үхүжй CF томондан фойдаланыб ясап мүмкін.

М.А.Б) CDF ва ACF үчбурчаклардан қаланған $ABCD$ түртбур-
чакка ұтып мүмкін; буның үчүн қойы B учына тоңыш кы-
фыз. Буыл күйідегі иккі ұйыныт бири билан тоңыш мүмкін:

1) B пункт (M, DB) ва (A, DB) айыққары бйларынның келі-
шипт нүктеліктер; 2) B пункт AD кесманын ұртасына иккы-
тан F пункт билан симметрліктер.

Толшқирмақлар

I. Бозық басқарыларын нүктелік бақырыны.

II. AC диагональн CB ва DC тоңықар бүйіне параллель күйіріб, ха-
саланы еңгізі.

30- §. МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

203*. Берілген a ва b түрлі чышқар орасыда берілген i үхүжйлікте
 AB кесманы берілген a түрлі чышқар параллель күйіне фойдаланыны.

214*. Үхүжй кесманын a ва b түрлі чышқар ва уш орасыдағы ала-
тындағы иккі тарафта A ва B пунктлар берілген. B гл A ги берілген

пунктты әнз қысқа бұд тәжірибін, бу айыны a ва b түрлі чышқар орасы-
дағы бүйіне берілген a түрлі чышқар параллель күйіне.

206*. Берілген AB нүктелік берілген a b ва c d түрлі чышқар
ушын ҳар иккі параллельді орасыдағы кесманын бұр-бұрыста тоң бұлағы
кесуын үхүжй.

206*. Бұр үш берілген бұр айыны ва иккінің үш берілген нүктелік
айыныда бұрты, берілген нүктелік үш иккіне бұр-бұрыста кесу чышқар.

207*. Аясы, беландығы ва бұр диагональ берілген параллелограмм
ясаң.

208*. Бұр томон ва иккі диагональ берілген параллелограмм ясаң.

209*. Аясы, уш a кесманы бұр бурчаны ва иккі ва тоңыда берілген
трапеция ясаң.

209*. А. Иккі аясы ва диагональ берілген трапеция ясаң.

210*. Аясының аясыны, ва тоңыны ва бұр диагональ берілген
трапеция ясаң.

211*. Аясының аясыны, бұр a томон, бұр бурчаны ва бұр
диагональ берілген трапеция ясаң.

212*. Аясының аясыны, аясының иккіне бурчаны ва бұр диаго-
наль берілген трапеция ясаң.

213*. Аясының аясыны, a тоңының аясыны. Бұр бур-
чаны ва бұр диагональ берілген трапеция ясаң.

214*. Аясы, иккі диагональ ва диагональ орасыдағы бурчаны берілген
трапеция ясаң.

215*. Иккі аясы, бұр диагональ ва диагональ орасыдағы бурчаны
берілген трапеция ясаң.

215. А. Иккі аясы, диагональ ва шу диагональ катта аясы билан
қосыл аясы бурчаны берілген трапеция ясаң.

216*. Уш a тоңыдағы берілген үчбурчак ясаң.

217*. Иккі медианы ва уш орасыдағы бурчаны берілген үчбурчак
ясаң.

218. Иккі медианы ва уш орасыдағы бұр билан учыда медианы орасы-
дағы бурчаны берілген үчбурчак ясаң.

219. Иккі медианы ва учыны томонда тұшқарыла берілген
бүйіне үчбурчак ясаң.

НУҚТА АТРОФИДА АЙЛАНТИРИШ (БУРИШ)

31-§. ДАСТЛАБКИ ТУШУНЧАЛАР

Текислиkning бирор O нуқтаси атрофида айлантириш ва катталиги берилган φ бурчак миқдорда айлантириш (буриш) деб, бу текислиkning ҳар бир M' нуқтаси учун

$$|OM'| = |OM|$$

$$\angle M'OM = \varphi \quad (1)$$

таълиқларга жавоб берувчи M' нуқтаги ҳос келтирилган айтилади (106-чижама).

Таърифда айтилган O нуқта — айлантириш маркази, φ эса айлантириш бурчиги (баъзан, буриш бурчиги) дейилади, M' нуқта M нуқтанинг образи, M нуқта эса M' нуқтанинг прообрази дейилади. (1) да айтилган айлантиришни қисқача бундай ёзишга шартланган бўламиз:

$$R_{\varphi}^O(M) = M' \quad (1')$$

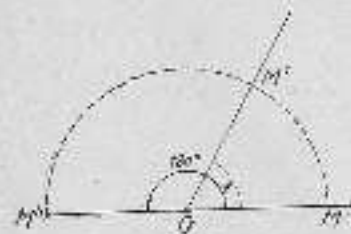
Айлантиришнинг асосий хоссалари

1) Айлантириш ҳаракатдир. Ҳақиқатан, 107-чижамада кўрсатилганидек $R_{\varphi}^O(A) = A'$ ва $R_{\varphi}^O(B) = B'$ бўлса, ундаги AOB ва $A'O'B'$ учбурчакларнинг тенглантидан $|AB| = |A'B'|$ маълум бўлади. Бу эса айлантиришнинг ҳаракат эканлигини тасдиқлайди. Шунинг учун айлантириш узаро бир қийматли алмаштиришдир.

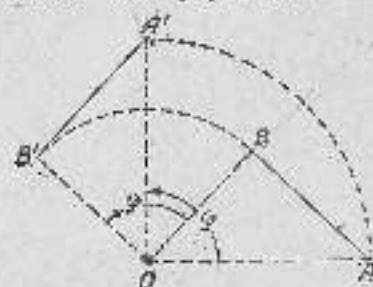
Натижалар.

1. Айлантириш ҳар бир кесмани ўзига тенг иккинчи бир кесмага ўтказати, яъни агар $R_{\varphi}^O(A) = A'$ ва $R_{\varphi}^O(B) = B'$ бўлса, AB кесмадаги иктибрий C нуқтанинг образи бўлган C' нуқта $A'B'$ кесмада ётади.

C' нуқта $A'B'$ кесмада ётмайди, яъни φ , $A'B'$ кесмадан ташқарода бирор C'' ҳолатни эсаламайди деб фараз қилайлик.



106-чижама



107-чижама

(108-чижама). Айлантириш ҳаракат бўлгани учун қуйидаги тенгликлар маъмул:

$$|AC| = |A'C'|, |CB| = |C'B'| \text{ ва } |AB| = |A'B'|, \quad (1)$$

C нуқта AB кесмада ётгани учун

$$|AB| = |AC| + |CB|, \quad (2)$$

(1) ва (2) га асосан қуйидаги тенглик ҳажмд бўлади:

$$|A'B'| = |A'C'| + |C'B'|. \quad (3)$$

Юқорида қилинган фарзга биноян (C'' нуқта $A'B'$ да ётмагани учун), $A'B'C''$ учбурчак ҳосил бўлиб, қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$|A'B'| < |A'C'| + |C'B'|. \quad (4)$$

(3) билан (4) нинг бир-бирига зидлиги қилган фаразимишнинг нотўғрилигини кўрсатади. Шунинг учун C' нуқта 108-чижамада кўрсатилган $A'B'$ кесмада ётиши керак.

II. Айлантириш, тўғри чиқиқни яъни тўғри чиқиққа ўтказида, яъни тўғри чиқиқ нуқталяриники образлари ҳам тўғри чиқиқ ҳосил қилади. Бунинг туғрилигини I натижадаги йўл билан исботлашни катобхонга топшириб, биз эса уни бопқачароқ йўл билан исбот қиламиз.

Бунинг учун айлантириш маркази O нуқтадан шу текисликдаги a тўғри чиқиққа OC перпендикуляр тушириб, бу перпендикулярни O нуқта атрофида φ бурчак катталигида айлантирайлик (109-чижама). Натижада OC перпендикуляр OC' ваъжиятга келади.

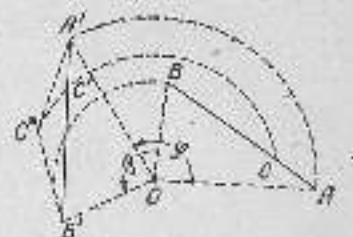
Ўнгга, C' нуқтадан OC' кесмага перпендикуляр қилиб a' тўғри чиқиқ ўтказамиз. a' тўғри чиқиқнинг a тўғри чиқиқ образи бўлишини исбот қиламиз. Бундан учун a тўғри чиқиққа ётган иктибрий B нуқтанинг B' образи a' тўғри чиқиққа ётишини исбот қилишга kifoya. a' тўғри чиқиқда CB кесмага тенг $C'B'$ кесма ажратайлик. Бундан B' нуқта B нуқтанинг образи бўлишини исбот қиламиз.

$|OC'| = |OC|$ ва $|C'B'| = |CB|$ бўлгани учун тўғри бурчакли OCB ва $OC'B'$ учбурчаклар ўзаро конгруант, бундан:

$$|OB'| = |OB| \text{ ва } \angle COB \cong \angle C'OB'$$

эканли маълум бўлади. Шунинг учун қуйидагини ёза оламиз:

$$\angle BOA' = \angle BOC' + \angle C'OB' - \angle BOC' + \angle COB - \angle COB' = \varphi.$$



108-чижама

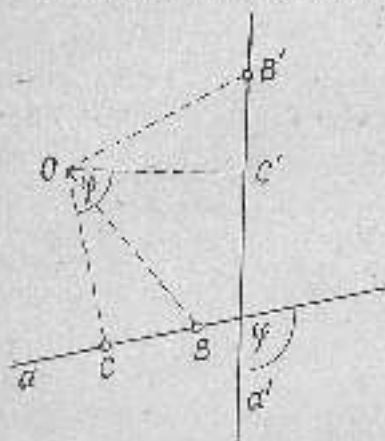
$|OB'| = |OB|$ ва $\angle BOB' = \varphi$ дан B нуктага B' нуктага миқдорини маълум бўлади.

Айлантиришда мос тўғри тизмақлар айлантириш бурчларига тенг бурчак остида қилинганлар (сабаб?).

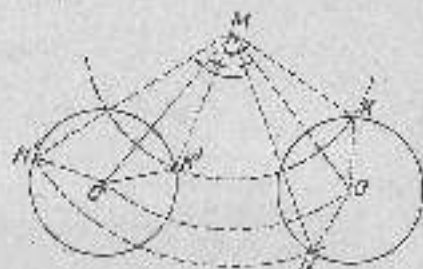
III. Айлантиришда ҳар бир айлана унга тенг айланмага айланади.

Бирор (O, R) айлананинг марказини яъ бу айлананинг иккунчидан N нуктани M нукта атрофида бир хил φ бурчак миқдорига айлантириб, уларнинг O' ва N' образларини ҳосил қилишимиз (110-чизма).

ON ва $O'N'$ кескивлар ўзаро тенг. Демак, берилган (O, R) айлананинг иккунчидан N нукта-



109-чизма



110-чизма

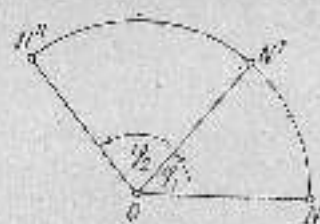
нинг образи бўлган N' нукта O' нуктадан ўзгариб $O'N' = ON = R$ масофага, яъни N' нукта (O', R) айлананида ётади.

Нукта атрофида айлантириш ўзаро бир қийматли айлантириш бўлгани учун (O', R) айлананида ётувчи иккунчидан N' нукта O айлананида ётувчи бирор N нуктанинг образи бўлади (110-чизма).

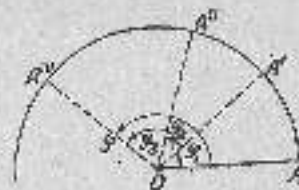
Демак, берилган (O, R) айланани ўз тегишлилиги билан бирор нукта атрофида айлантиришдан унга тенг (O', R) айлана ҳосил бўлади ва бу икки моҳ айлананинг ҳар қандай нуктаси ҳам ўзаро мос бўлади.

Шунга қараган, берилган айланани берилган нукта атрофида бирор φ бурчак катталигида айлантириш учун янги қандай ҳар қандай нуктанинг образи бўлади, бу янги марказдан берилган айлана радиуси билан айлана қилинади.

2) Бир нукта атрофида бажаришган ҳамма айлантиришлар тўқламини (о), уларни қўлайлиришга (қўшишга) нисбатан тўқлама ташкил этади. Ҳақиқатан, 110-1-чизмада:



110-1-чизма



111-чизма

I. Агар $R_0^{\varphi}(N) = N'$ ва $R_0^{\psi}(N') = N''$ бўлса, $|ON| = |ON'|$, $\angle ONN' = \varphi_1$ ва $|ON'| = |ON''|$, $\angle ON'N'' = \varphi_2$ бўлади. Булардан ҳақ, $|ON| = |ON''|$ ва $\angle ONN'' = \varphi_1 + \varphi_2$ ёки $R_0^{\varphi+\psi}(N) = N''$ келиб чиқади.

Бу натижа иккунчидан N нукта учун тўғри бўлганидан

$$R_0^{\varphi} + R_0^{\psi} = R_0^{\varphi+\psi}. \quad (1)$$

Бу эса қетма-қет бажаришган икки айлантириш ўрнига ўқинчи айлантиришга бажариш мумкинлигини кўрсатади, яъни $R_0^{\varphi+\psi}$ айлантириш ҳам φ тўқламга кириди. Демак, φ тўқлама ёпиқлик ҳосиласига эга экан.

II. Қаралаётган φ тўқламдаги қетма-қет унга айлантириш қўшмаларининг ассоциативлик ҳосиласига ҳам эга, яъни

$$R_0^{\varphi} + (R_0^{\psi} + R_0^{\chi}) = (R_0^{\varphi} + R_0^{\psi}) + R_0^{\chi}.$$

Ҳақиқатан, 111-чизма ва (1) га асосан:

$$R_0^{\varphi} + (R_0^{\psi} + R_0^{\chi}) = R_0^{\varphi} + R_0^{\psi+\chi} = R_0^{\varphi+\psi+\chi},$$

$$(R_0^{\varphi} + R_0^{\psi}) + R_0^{\chi} = R_0^{\varphi+\psi} + R_0^{\chi} = R_0^{\varphi+\psi+\chi},$$

III. Қаралаётган φ тўқламда айлан айлантириш ҳам мавжуд, яъни ҳар қандай нуктага ноль бурчакли айлантиришдан унга нуктанинг ўзи ҳосил бўлиб, бу айлантириш ҳам φ тўқламга кириди ва натижийи φ бурчак учун

$$R_0^{\varphi} + R_0^0 = R_0^{\varphi} + R_0^0 = R_0^{\varphi}$$

бўлади.

IV. Қаралаётган φ тўқламдаги ҳар қандай R_0^{φ} айлантириш тескари $R_0^{-\varphi}$ айлантиришга эга ва у

$$R_0^{\varphi} + R_0^{-\varphi} = R_0^0$$

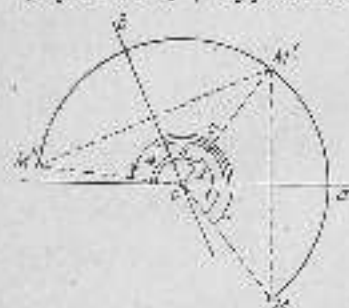
шартин қаноатлантиради. Демак, бир нукта атрофида айлантиришлар тўқламини уларни қўлайлиришга нисбатан тўқлама ташкил этади.

Бу ишга φ тўпламига айлантиришлар кинематиклик (ўрни алмаштириш) қонунига бўйсунлади, яъни ихтиёрий φ_1 ва φ_2 бурчаклар учун

$$R_0^2 + R_0^2 = R_1^2 + R_2^2$$

ўринлидир.

3) Ўқлари параллел бўлмаган, кетма-кет бажаришган иккита симметрик алмаштириш нукта атрофида айлантиришга тенг кучлидир. Агар иккита тўғри чизик φ бурчак остида кесинса, уларга нисбатан кетма-кет бажаришган симметрик алмаштиришлар шу ўқларнинг кесиниш нуктасига нисбатан 2φ бурчакка айлантиришга тенг кучли бўлади.



112-чиқма.

Бунга ишонч ҳосил қилиш учун 112-чиқмада берилган O нуктада ўзаро φ бурчак ҳосил қилиб кесинувчи a ва b ўқлар тегишлилиги ихтиёрий бир M нукта олиб унинг a ўққа нисбатан топилган M' образини b ўққа нисбатан симметрик алмаштириб, M'' нуктани тонайлик: сўنгра, M нуктани O нукта атрофида 2φ бурчак миқдорига айлантирсанда унинг M'' нуктага алмашганини кўрсатувчи қуйидаги икки шарҳнинг мавжудлигини чиқарсак kifае:

$$|MO| = |M'O| \text{ ва } \angle MOM' = 2\varphi.$$

Симметрик нукталарнинг VII бобда айtilган хоссасига муvофиқ, қуйидаги тенгликларни ёза оламиз:

$$|MO| = |M'O| = |M''O|,$$

$$\angle 1 \cong \angle 2 \text{ ва } \angle 3 \cong \angle 4.$$

Шунинг учун қуйидагилар мавжуд бўлади:

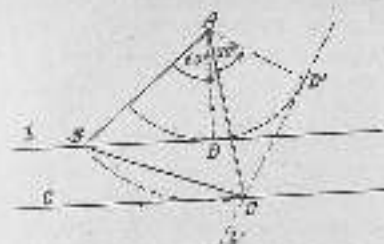
$$(\hat{a}, b) = \hat{2} + \hat{3} = \hat{1} + \hat{4} = \varphi,$$

$$\angle MOM'' = (\hat{2} + \hat{3}) + (\hat{1} + \hat{4}) = \varphi + \varphi = 2\varphi.$$

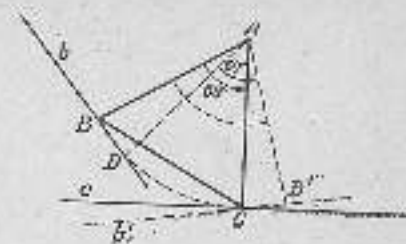
31. §. АЙЛАНТИРИШ МЕТОДИ БИЛАН МАСАЛАЛАР ЕЧИШ

Ясалган доир масалазани ечишда баъзан масалада изланил фигурани тахминан чизиб, кейин бу фигуранинг ёки унинг бир бўлагини танлаб олинган бирор марказ атрофида бирор бурчакка айлантирилади.

Натижада айлантирилган фигура берилганларга нисбатан шундай қулай вазият оладики, берилган ва изланганлар ора-



113-1-чиқма



113-2-чиқма

сидаги муvосабатларни аниқлаш имконияти тутилади ва шундай бир ёрдамчи фигура ҳосил бўладики, уни берилганлардан бевосита ясаи ва бу фигурадан изланган фигурага ўтиш мумкин бўлади, яъни масалани ечиш йўли тинчланади.

Ёрдамчи фигурадан изланган фигурага ўтиш, кўброк, тегиш айлантириш орқали бажарилади.

69- масала. Бир учи берилган A нуктада, B ва C учлари эса мос равишда берилган b ва c параллел тўғри чизиқларда ётувчи тенг томонли ABC учбурчак қозғал.

Аналия, ABC учбурчак — изланган тенг томонли учбурчак деб фараз қилайлик (113-1 чиқма).

ABC учбурчакнинг AB томонини, b тўғри чизиқни A нукта атрофида 60° бурчак миқдорига шундай айлантирайликки, AB томон AC томон устига тушсин. Бу ҳақда учбурчакнинг b тўғри чизиқдаги B учи унинг C учига тушиб, b тўғри чизиқ эса C нуктадан ўтувчи b' вазиятга келади. Демак, учбурчакнинг C учи c ва b' тўғри чизиқларнинг кесиниш нуктасида бўлар экан.

Ясаи, Берилган тўғри чизиқлардан бирини, масалан, b тўғри чизиқни берилган A нукта атрофида 60° (ёки -60°) бурчакка айлантирайлик (31- § даги II натижа). Бундан ҳосил бўлган b' тўғри чизиқ билан берилган c тўғри чизиқнинг кесиниш нуктаси — изланган учбурчакнинг C учи бўлади. То-пилаган C нуктани A нукта атрофида 60° ни бурчакка айлантириб, b тўғри чизиқда B нуктали топимиз.

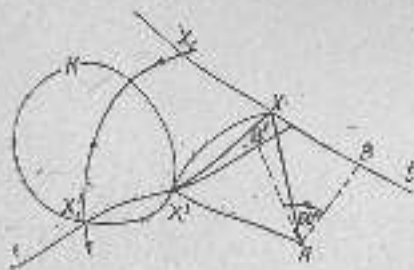
Топшириқлар

I. 113-1 чиқмадаги c тўғри чизиқни A нукта атрофида 60° бурчак миқдорига айлантириб масалани ечинг.

II. 69- масалада берилган тўғри чизиқлар параллел бўлмаган ҳол учун ечинг. Бунда 113-2 чиқмадан фойдаланинг.

III. Учлари ўзаро параллел бўлган учта тўғри чизиқда сўнги тенг томонли учбурчак қозғал.

70- масала. Бир учи берилган A нуктада ётиб, иккинчи учи берилган t тўғри чизиқда ва учинчи учи эса берилган (O, r) айланани ётувчи тенг томонли учбурчак ясал.



114-чизма

Анализ. Изданган учбурчак 114-чизмадаги $\Delta AXX'$ учбурчак бўлсин. Бу учбурчакни ясап учун унинг i тўғри чизикдаги X учини ва (O, i) айланасидаги X' учини топишимиз керак.

Бундан X' нуктага X нуктага A марказ атрофида $\varphi = 60^\circ$ бурчакка айлантиришдан ҳосил бўлган образи деб қараш мумкин.

Демак, бу икки нуктадан бири маълум бўлса, иккинчисини топа оламиз. X нукта i тўғри чизикда бўлиб X' нукта эса берилган айланасида ётаган учун нуктаси деб тўғри чизик образи билан айлананинг кесилиш нукта атрофида $\varphi = 60^\circ$ (ёки -60°) миқдорда айлантириб, бундан ҳосил бўлган i тўғри чизикнинг айланини кесиб ўтган X' нуктасини топишимиз ҳақиқат.

Ясап. Берилган i тўғри чизикни берилган A нукта атрофида $\varphi = 60^\circ$ га айлантириб, i' тўғри чизик ҳосил қиламиз. i' тўғри чизик билан берилган айлананинг кесилишган X' (ва X'') нуктасини A нукта атрофида $\varphi = -60^\circ$ га айлантириб, i тўғри чизикда X нуктаси топишимиз. Топишган X ва X' нукталарни берилган A нукта билан туташтирамиз.

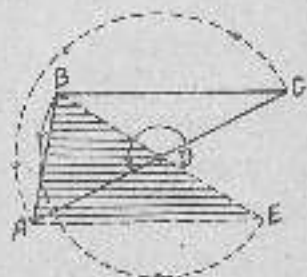
Толшириқлар

- I. Бунда ясалган $\Delta AXX'$ учбурчакнинг тент томонли бўлишига небот қилиб.
- II. Масаланинг иккинчи шартларида иккита учбурчак (ёки иккита чизмадаги $\Delta AXX'$ ва $\Delta AXX''$ лар каби) ени битта учбурчак ҳосил бўлиши, яъни ҳеч қандай учбурчак ҳосил бўлмагани шартларини аниқлаш.
- III. Берилган A нукта атрофида i тўғри чизикни айлантириб, ўнгига берилган айланани 60° (ёки -60°) бурчак катталигида айлантириб, масалани ечиш мумкинми?

71-масала. Икки томони ва учинчи томонига ўтказилган медианаси берилган учбурчак ясап.

Анализ. ΔABC учбурчак — изланган учбурчак (115-чизма). AB, BC унинг берилган томонлари ва BD берилган медианаси бўлсин.

CD томонида BCD учбурчакни D нукта атрофида 180° га айлантириб, AD ва DC кесмаларнинг тентлигидан унинг CD томони AD кесма устига



115-чизма

тўшади. Бу ҳолда BCD учбурчакнинг B учи E нуктага ва C учи A нуктага тушиб, ўзи AED учбурчак вазиятига келади. DE кесма $|BD|$ нинг дублига бўлади. Ҳосил бўлган ABE учбурчак ёрдамчи фигура бўлади.

Ҳақиқатини ҳам:

A) Масалада берилган $|AB|$ ва $|AE| = |BC|$ ҳақида $|BE| = |BD| + |DE| = 2|BD|$ элементлар бўлича ABE учбурчакни ясап мумкин.

B) ABE учбурчакдан ABC учбурчакка ўтиш мумкин: BE томоннинг ўртаси D ни топиб, уни A нукта билан туташтиришдан ҳосил бўлган ADE учбурчакни D нукта атрофида 180° га айлантириб, уни BCD учбурчак ҳолига келтирамиз. ABC учбурчак — изланган учбурчак бўлади.

Толшириқлар

I. ΔABD учбурчакни D нукта атрофида 180° га айлантиришдан ҳосил бўладиган BCD учбурчакнинг ҳам ёрдамчи фигура бўли оқишга небот қилиб.

II. Масаланинг қолган шартларини бажариш.

III. Берилганлар орасида

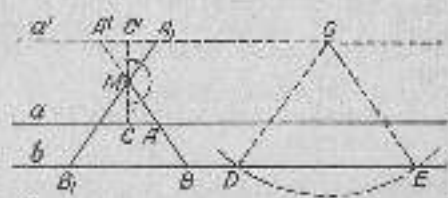
$$|BC| - |AB| < 2m < |BC| + |AB|$$

муносабат бажарилганлигига изланган учбурчак мавжуд бўлишига асослаб бўлган бир-икки масала келтириш.

72-масала. Ўзаро параллел бўлган a ва b тўғри чизиклар ва улар орасида ётмаган M нукта берилган. M нуктадан a, b тўғри чизикларга шундай кесувчи ўтказилсин, ундаги $|MA| + |MB|$ кесмалар йиғиндисига берилган l кесмага тенг бўлсин.

Анализ. Изланган кесувчи топилиши деб фараз қилиб уни таҳминан чизиб қўйايлик (116-чизма). Берилган a тўғри чизикни берилган M нукта атрофида 180° га айлантириб, уни a' вазиятига келтирайлик. Бунда A нукта A' нуктага айланиб, MA кесма $|MA'|$ ҳолатига келади. Бу ҳолда $|MA| + |MB| = |MA'| + |MB| = |A'B| = l$ бўлади. Маълум ушундан $A'B$ кесмаси $a' \parallel b$ тўғри чизиклар орасида жойлаймиз:

a' тўғри чизикнинг иккиёрий O нуктасидан l радиус билан ёл чизиб, бу ёлнинг b тўғри чизик билан кесилишган D ва E нукталарини O нукта билан туташтирсак, $|OD| = |OE| = |A'B| = l$ бўлади. Демак, M нуктадан OD ва OE кесмаларга мос равишда параллел қилиб ўтказилган A, B ва A', B' тўғри чизиклар изланган кесувчилар бўлади (қолган босқичларни бажариш китебхонага кўчирилди).



116-чизма

ГОМОТЕТИЯ

14- §. ДАСТАЛАБИ ТУШУНЧАЛАР

Кириш

Бир фигурани унга ўхшаш бошқа катталикидаги фигурасга аксантириш масаласи кинжалар ҳаётида тез-тез учраб туради. Мисалан, бирор бичи ё шаҳарнинг планини маълум масштабда тузиш, бирор объект, республика ёки мамлакатнинг географик картасини кераклик ҳаётида кичрайтириб чиқиш ёки бирор фотоуратилас катталиксизни ўзгартириш каби амалий аҳимиятга эга бўлган масалалар ҳам ун-
раб туради.



118- сизма

Йошга доир геометрик масалаларнинг бирмунчасини ечишда ҳам ани шу масала билан шугулланишга тўғри келади.

Бундан илларин бажара олиш — ҳар қандай фигуранинг шаклини ўзгартириш, унинг катталигини ўзгартириш усул-
ларини ҳукажаси ўртаниб чиқиши сарозо қилади. Катобнинг бу бора ани шу усулларнинг назарий асоси — гомотетия билан атифта билишалади.

Йошларин. Гомотетия куни оракта ҳаёт — ўхшаш ва тегуе жойла-
ниш ҳосил бўлишига тўғриси, у ҳажми жойлашнинг белги шаклини бер-
ди, лекин бундан шикотсизлиги жойлашнинг сароз тўғриси (ёки ўхшаш аксанти-
риш) дораи шикотсизлиги шикотсизлиги.

1. Гомотетиянинг таърифи ва нуктани гомотетик аксантириш

1- таъриф. S нукта ва $k \neq 0$ сиз берилган бўлса S дан бошқа ҳар қандай M нуктага қуйидаги шартларни қаноат-
лантиришни M' нуктани мос келтиришни аксантириш
гомотетик аксантириш ёки гомотетия деб атиалади:

1) M' нукта SM тўғриси тизимда ётади;

2) $SM' : SM = k$ ёки $SM' = |k| SM$;

3) k нисбат бўлганда, M' ва M нукталар S нуктадан бир тарафда ётади; k манфий бўлганда эса M' ва M нукталар S нуктадан турли тарафларда ётади. M' нукта M нуктага гомо-
тетик мос (ёки, қисқара, гомотетик) нукта деб атиалади.

118- сизмада M' нукта M нуктага, $k = \frac{SM'}{SM}$ нисбат коэффи-
циент билан, M' нукта эса M нуктага $k_1 = -\frac{SM'}{SM}$ манфий
коэффициент билан гомотетик мосдир.

Нуктани S нукта гомотетик маркази ва k сиз гомотетия
коэффициенти деб атиалади.

Гомотетия маркази — S нуктага аксантириш деб қабул
атиалади.

M нуктани S марказга нисбатан берилган $k \neq 0$ коэффи-
циент бўйича гомотетик аксантириш, M' нуктани ҳосил қи-
лиш — гомотетия (ёки ўхшаш аксантириш) дейилади ва у
қисқара қуйидаги сизини билан белгиланади:

$$H_k^S(M) = M'$$

$k > 0$ бўлган ҳаётда гомотетик аксантириш тўғриси гомо-
тетия дейилади. Бу ҳолат S марказ тўғриси гомотетия маркази
(ёки тизим ўхшаш маркази) дейилади; $k < 0$ бўлган ҳо-
латда гомотетик аксантириш эса тесқари гомотетия деб
атилади, бундаги S марказ тесқари гомотетия маркази (ёки нисби
ўхшашлик маркази) деб атиалади.

2- таъриф. F фигурани тизимда турчи ҳамма нукта-
ларини берилган S марказ ва берилган $k \neq 0$ коэффициент
билан гомотетия аксантиришдан ҳосил бўлган нукталар
тузилиши F фигурага гомотетик (перспектив ўхшаш)
фигура дейилади ва F' билан белгиланади.

Биз буни сизини равишда қуйидаги ёзмами: $H_k^S(F) = F'$.

Нуктани гомотетик аксантиришда масалалар.

118- сизмада берилган M нуктани унларин S марказга нис-
батан $k = 2$ коэффициент бўйича аксантиришдан ҳосил бўлган
 M_1 нукта $SM_1 = 2SM$ тизимда жавоб берилди ва M_2 нукта SM_2
тўғриси нисбат ва M нукта билан S дан бир тарафда ётади.

Шунингдек, M ва M_1 нукталарин S марказга нисбатан тур-
ли коэффициентлар билан гомотетик аксантирилса, қуйида-
гича бўлади (118- сизма):

$$H_2^S(M) = M_2; H_3^S(M) = M_3$$

$$H_{\frac{1}{2}}^S(M) = M_4; H_{\frac{1}{3}}^S(M) = M_5$$

$$H_2^{\frac{1}{2}}(M) = M_6; H_3^{\frac{1}{2}}(M_1) = M_7; H_2^{-1}(M) = M_8$$

$$H_2^{\frac{1}{2}}(M_1) = M_9; H_3^{-1}(M_1) = M_{10} \text{ ва шунга ўхшаш.}$$

Толшириқ

Агар M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 нукталар гомотетия маркази S дан қисқара
нурда ётади $SM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = \frac{1}{2} M_3M_4 = \frac{1}{3} M_4M_5$ бўлса, бу нукталарин
ҳар бирини перспективда гомотетия аксантиришда гомотетия коэффи-
циенти тизим.

II. Гомотетиянинг баъзи бир хоссалари

1) Гомотетия бир қийматли акслантиришдир, яъни ушбу акслантиришдаги:

$$H_S^k(M) = M' \quad (1)$$

M' образга биттагина M прообраз мос келади ва аксиота (22-П§).

Ҳақиқатан, агар текисликнинг бирор M нуқтасига M' нуқтадан бошқа яна бирор M , нуқтаси гомотетияда мос келади деб фараз қилсак, бу ҳолда қуйидаги муносабатлар жарид бўлади:

$$\left. \begin{aligned} \frac{SM_1}{SM} &= k \Rightarrow SM_1 = k \cdot SM \\ \frac{SM'}{SM} &= k \Rightarrow SM' = k \cdot SM \end{aligned} \right\} SM_1 = SM' \quad (2)$$

Бу эса M_1 ва M' ларнинг биттагина нуқталигини кўрсатади. Шунинг учун гомотетия — бир қийматли акслантириш бўлади.

2) Бирор S марказга нисбатан бажариладиган ҳамма гомотетиялар тўлаими шу гомотетияларни қўйиштиришга нисбатан коммутатив гуруҳга тузилади.

Буни кўрсатиш учун 23-§ даги гуруҳлар аксиомаларини қанчаларини нисбатан татбиқ этиш керак.

$$1. H_S^k(M) = M' \dots (A) \text{ ва } H_S^l(M') = M'' \dots (B)$$

маълум бўлсин. (A) дан S, M, M' нуқталар бир тўғри чизиқда ва (B) дан S, M', M'' нуқталар ҳам бир тўғри чизиқда ётганлиги аниқ. Аммо бошқа-бошқалар сезилган бу аксиота тўғри чизиқлар иккита умумий S ва M' нуқталарга эга. Демак, улар битта тўғри чизиқдан иборатдир. Шунинг учун S, M, M'' нуқталар ҳам яна шу бир чизиқда ётади.

$$\frac{SM'}{SM} = |k_1| \text{ ва } \frac{SM''}{SM'} = |k_2| \text{ дан } \frac{SM''}{SM} = |k_1| \cdot |k_2|$$

ёки

$$\frac{SM''}{SM} = |k_1 k_2|$$

келиб чиқади. Бу M'' нуқтанинг M нуқтага S марказга нисбатан $k = k_1 \cdot k_2$ коэффициент бўйича гомотетик эканини кўрсатади. Агар берилган гомотетияларнинг коэффициентлари бир хил ишорали бўлса, M ва M'' нуқталар S марказдан бир тарафда ётади, шунинг учун гомотетия коэффициенти мусбат ва $k_1 \cdot k_2$ га тенг бўлади. Агар бу коэффициентлар қарама-қарши ишорали бўлса, M ва M'' нуқталар S марказнинг турли тарафда ётади, шунинг учун гомотетия коэффициенти манфий ва абсолют қиймати $k_1 \cdot k_2$ га тенг бўлади. Қўрамадан, берилган гомотетияларнинг қўйишмаси яна ўша марказга нис-

батан гомотетик бўлиб, унинг коэффициенти $k_1 \cdot k_2$ га тенг бўлади.

Буни шартли равишда қуйидагича ёзишimiz мумкин:

$$H_S^k \cdot H_S^l = H_S^{k \cdot l} \quad (1)$$

II. Агар S марказга нисбатан учта гомотетия H_S^k, H_S^l ва H_S^m берилган бўлса, $(H_S^k \cdot H_S^l) \cdot H_S^m = H_S^k (H_S^l \cdot H_S^m)$ эканини (1) тенгликка лосан ёза олинади, яъни ушунинг марказга эга бўлган гомотетияларни қўйиштириш ассоциативлик қонунига бўйсунлади.

III. $H_S^k[M] = M$ бўлгани учун бу гомотетия айнан акслантириш ҳадидир. Ҳар қандай H_S^k учун $H_S^k \cdot H_S^{\frac{1}{k}} = H_S^1 \cdot H_S^1 = H_S^1$ бўлиши (1) тенгликдан кўриниб туради. Шундай қилиб, яна акслантириш — гомотетияларни қўйиштиришда бирлик элемент родини ўйнаб экан.

IV. Берилган H_S^k учун $H_S^{\frac{1}{k}}$ гомотетия тескари акслантириш бўлади, чунки $H_S^k \cdot H_S^{\frac{1}{k}} = H_S^1 \cdot H_S^1 = H_S^1$ экани аниқ кўриниб туради.

Қаралаётган гомотетиялар тўлаими уларни қўйиштириш амалига нисбатан гуруҳга бўлишнинг ҳамма шартлари бажариладиган экан. Ҳар қандай k_1 ва k_2 учун $H_S^{k_1} \cdot H_S^{k_2} = H_S^{k_1 k_2}$ экани (1) тенгликдан равшан. Демак, бу гуруҳга коммутатив гуруҳга бўлар экан.

3) $k = -1$ бўлганда гомотетик акслантиришнинг гомотетия марказига нисбатан бажариладиган симметрия акслантириш деб қараш мумкин. Масалан, 118-чиқмадаги M_1 ва M_2 нуқталар.

4) Ҳар қандай ички гомотетияни татқиқ гомотетия билан марказий симметриянинг қўйишмаси дейиш мумкин.

Ҳақиқатан, 118-чиқмадаги M_2 нуқтаги M_1 нуқтага акслантирувчи ички гомотетияни, M_2 нуқтаги M_1 нуқтага акслантирувчи ташқи гомотетия ва M_2 нуқтаги M_1 нуқтага келтирувчи S нуқтага нисбатан марказий симметрия билан алмаштириш мумкин.

Буни қуйидагича символик равишда кўрсатиш мумкин:

$$H_S^{\frac{1}{k}}(M_1) = M_2 \text{ ва } Z_S(M_1) = M_0 \text{ бўлгани учун}$$

$$H_S^{-\frac{1}{k}}(M_0) = H_S^{\frac{1}{k}}(M_1) \cdot Z_S(M_1) = M_2$$

Қуйидаги шартларни қандалантирувчи X нуқталарни топиш:

$$1) H_S^k(M) = X \left(k = \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 5; \pm 1 \right);$$

$$2) H_S^k(X) = M_1 \left(k = -\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; 0.2 \right).$$

Теорема. Тўғри чизик нуқталарини гомотетик акселантирлаганда улар яна тўғри чизик нуқталарида улади, яъни ҳар қандай тўғри чизик тўғри чизик нуқталарида улади. Ик-
Исбот. Гомотетик фигура яна тўғри чизик бўлади, $k \neq 0$ бўлган.
Бир ниса ҳолини текшириб кўрайлик.

1) Акселантирлаганда l тўғри чизик гомотетик марказидан ўтади. Гомотетикнинг таърифига кўра, l да ётувчи иккунчи қилиб тохонадан M нуктада гомотетик M' нукта шу l тўғри чизикда ўтади. Ик-
ётувчи нуктадан M нукта тилиш мумкинлиги, $H_k^M(M) = M'$ бўлади.
($H_k^M(M) = M'$ экани равшандир.) Демак, бу ҳол учун теорема тўғри бўлиб, l га гомотетик фигура шу тўғри чизикнинг ўзи-
дан иборат бўлади.

$$H_k^M(l) = l.$$

2) Берилган l тўғри чизик гомотетия марказидан ўтмайди
ва $k > 0$ (II).
а) Довал $k \neq 1$ бўлган ҳолини кўрайлик.

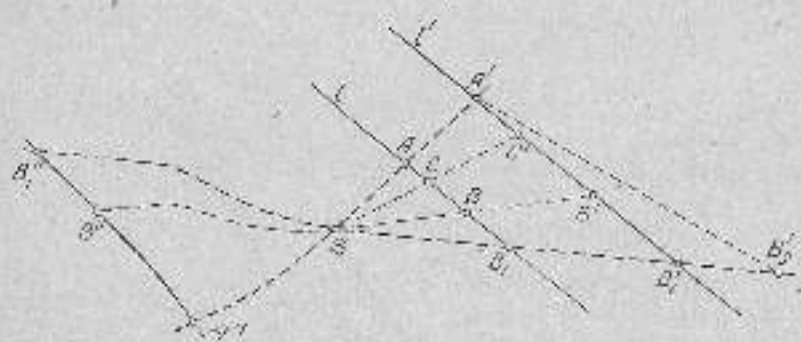
Берилган l тўғри чизикнинг иккунчи A ва B нуқталарини
олиб, уларга гомотетик нукталарни A' ва B' билан бел-
лашдик.

Гомотетикнинг таърифига асосан;

$$|SA'| = k \cdot |SA| \text{ ва } |SB'| = k \cdot |SB|. \quad (1)$$

Бундан

$$\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|} = k \quad (1')$$



тентлигини ёза оламиз, (l') га мувофиқ

$$(A'B') \parallel (AB). \quad (2)$$

Агар A нуқтага ўзгартириб, B нуқтага AB тўғри чизик бўлиши ҳаракатлантириш, B нуқтага иккунчи B' нукта гомотетик нукта бўладики, (2)
даги каби ҳужжатга мувофиқат қилиб чиқали;

$$(A'B') \parallel (AB). \quad (2')$$

(2) ва (2') нинг ўш гомолари бир AB тўғри чизикдан иборат бўлгани учун қап томонлари $A'B'$ ва $A'B'$ тўғри чизиклар устга-уст тушадди (нуқта A' нуктадан AB тўғри чизикка параллел қилиб биринчи тўғри чизик ўтказиш мумкин). Шунинг учун берилган AB (ёки l) тўғри чизикнинг иккунчи нукта-
сига гомотетик нукта $A'B'$ тўғри чизикда ўтади.

Энди $A'B'$ тўғри чизикда ётувчи иккунчи C' нукта олсак, AB тўғри чизикда шуандай C нукта топиш мумкинлиги, унда $H_k^C(C) = C'$ ўриши бўлади; C нуктага топиш учун SC' тўғри чизик билан AB тўғри чизикни кескиштириш керак.

$H_k^C(C) = C'$ бўлиши равшандир.

Демак, AB тўғри чизикка $A'B'$ тўғри чизик гомотетик ва $(AB) \parallel (A'B')$ бўлади.

б) $k = 1$ бўлса, l тўғри чизикнинг ҳамма нуқталари ўз-ўз-
ларига гомотетикдир. Бу ҳолда l тўғри чизикка гомотетик
фигура шу тўғри чизикнинг ўзи бўлади.

3) Агар l тўғри чизик гомотетия марказидан ўтмаса ва $k < 0$ бўлса, l тўғри чизикка гомотетик фигура унга параллел
 l' тўғри чизик бўлади (III- чизик). Бунинг исботи ҳам 2- ҳо-
лдан сиксари бажарилади.

Натижалар

I. Гомотетия натижасида нур яна нурга акселанади.
 $k > 0$ бўлганда акселанувчи нур билан унинг образи бир хил
йўналишда, $k < 0$ бўлганда улар кесари йўналишда бўлади.
Гомотетия марказидан чиққан нур $k > 0$ бўлганда ўзига, $k < 0$
да эса шу бошлангич нуктадан чиқувчи қарама-қарши йўна-
лишли нурга акселанади.

II. Гомотетик акселантиришда бурчакнинг катталиги
ўзгармайди.

Ҳақиқатан, гомотетияда бурчакнинг томонлари ўзларига
мўс равишда параллел бўлган нурларга акселангани учун бур-
чак ўзига тенг бурчакка акселанади.

III. Гомотетикда тўғри чизикларнинг параллелиги сақ-
ланади.

Ҳақиқатан, агар $l \parallel m$ бўлса, $l' \parallel l$ ва $m' \parallel m$ бўлгани учун
 $l' \parallel m'$ бўлади.

IV. Гомотетик акселантириш натижасида кесманинг
узунлиги $|k|$ марта ўзгаради.



Ҳақиқатан, $k > 0$ экан, $(A'B') \parallel (AB)$ бўлгани учун $\triangle SAB$ ва $\triangle SA'B'$ (119-чизма).
 Пундан:

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|} = k.$$

$k < 0$ бўлганда

$$\frac{|A'B''|}{|AB|} = \frac{|SA''|}{|SA|} = \frac{|SB''|}{|SB|} = |k|.$$

Кесмага гомотетик фигуранинг ўша кесмага параллел кесмадан иборат бўлиши (ёки у билан бир тўғри чизиқда ётиши) исбот қилинган теоремалардан кўрилиб туради.

V. Агар B нуктага B' нукта гомотетик бўлиб, BA ва $B'A'$ тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлса, $B'A'$ тўғри чизиқ BA тўғри чизиққа гомотетик бўлади.

Ҳақиқатан, берилган

$$\frac{|SB'|}{|SB|} = |k| \text{ ва } (BA) \parallel (B'A') \text{ дан } \frac{|SC'|}{|SC|} = |k|$$

муносабатни ёза оламиз (бу ерда C ва C' нукталар мос равишда BA ва $B'A'$ тўғри чизиқларда ётувчи нукталар бўлиб, SC' тўғри чизиқ S марказдан ўтади). Бу эса $[BA]$ ва $[A'B']$ нинг гомотетик эканини кўрсатади.

Тоғлириқлар

I. Тўғри чизини гомотетик аксантирилганда яна тўғри чизиқ ҳосил бўлиши ҳақидаги теоремага бошқа йўл билан ҳам исбот қилинган.

II. A ва B нукталар параллелда ётувчи бирор C нуктанинг гомотетикси A' ва B' нукталарнинг гомотетиклари A'' ва B'' нукталар орасида ётишини исбот қилим.

III. Маълум тўғри чизини маълум марказга нисбатан бирор коэффициент қадар гомотетик аксантириш йўлининг танланганлиги.

36-§. КЎПБЎРЧАККА ГОМОТЕТИК ФИГУРА

Теорема. Ҳар қандай кўпбўрчанга гомотетик фигура берилган кўпбўрчанга ўхшаш кўпбўрчан бўлиб.

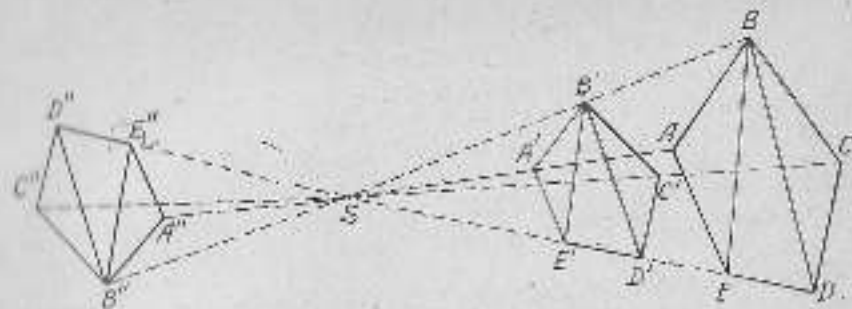
Исбот. $ABCDE$ бешбўрчанни (120-чизма) S марказга нисбатан k коэффициент билан гомотетик аксантиришга олиб эгизсак, A', B', C', D' ва E' нукталарга гомотетик нукталар мос равишда A'', B'', C'', D'' ва E'' бўлади. Гомотетияда кесма лар кесмага аксантириш учун берилган $ABCDE$ бешбўрчан $A'B'C'D'E'$ бешбўрчанга аксаланган.

Иккари қўрилган ҳосилларга асосан:

$$\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|} = \frac{|SC'|}{|SC|} = \frac{|SD'|}{|SD|} = \frac{|SE'|}{|SE|} = |k|. \quad (1)$$

$$[A'B'] \parallel [AB], [B'C'] \parallel [BC], [C'D'] \parallel [CD], [D'E'] \parallel [DE], [E'A'] \parallel [EA]. \quad (2)$$

¹ Тўғри чизини маълум марказга нисбатан бирор коэффициент қадар гомотетик аксантириш йўлининг танланганлиги ҳақида хўрсатилмак берилган.



120-чизма.

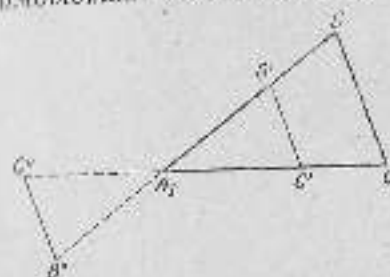
(2) муносабатга асосан $ABCDE$ ва $A'B'C'D'E'$ бешбўрчанларда мос икки бурчлар бир-бирга тенг. Демак, (1) ва (2) ларга кўра кўпбўрчан $A'B'C'D'E'$ $ABCDE$ бешбўрчанга гомотетик эканини унинг A учига нисбатан $k = \pm \frac{2}{3}$ коэффициентлар билан гомотетик аксантириш.

Ечм. Учбўрчаннинг B ва C учларини A марказга нисбатан $k = \pm \frac{2}{3}$ коэффициент бўйича аксантириб, B' ва C' нукталарни толамиз (121-чизма). A, B' ва C' нукталарни кесмалар ёрдамида ўзаро туташтириш натижасида ABC учбўрчанга гомотетик изланган $AB'C'$ учбўрчан ҳосил бўлади.

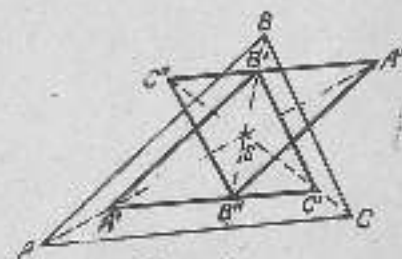
Агар B ва C нукталарни A марказга нисбатан $k = -\frac{2}{3}$ бўйича аксантирсак, $AB''C''$ учбўрчан ҳосил бўлади. Бу аксантирилишнинг қуйидагича ёниб қўлишим:

$$H_A^{\frac{2}{3}}(\triangle ABC) = AB'C', H_A^{-\frac{2}{3}}(\triangle ABC) = AB''C''.$$

74-масала. Берилган ABC учбўрчанни унинг ичида берилган S нуктага нисбатан $k = \pm \frac{2}{3}$ коэффициентлар бўйича гомотетик аксантириш (122-чизма).



121-чизма.



122-чизма.

Берилган S нуктадан учбурчакнинг A, B, C учлари билан туташтириб, уларни $k = \frac{2}{3}$ коэффициент бўйича аксантиралик; ҳосил бўлган A', B', C' нукталарни ўзаро туташтирсак, ABC учбурчакка гомотетик мос $A'B'C'$ учбурчак ҳосил бўлади, A', B', C' нукталардан ҳар бирига S марказга нисбатан симметрик аксантилиришдан ҳосил бўлган A'', B'', C'' нукталарни ўзаро туташтиришдан эса ABC учбурчакка тегишли гомотетик мос иккинчи $A''B''C''$ учбурчак ҳосил бўлади (34-§ даги 4-хосса).

Шундай қилиб, бу масаланинг жавоби сифатида қуйидагиларни ёзиб қўя оламиз.

$$H_0^k(\triangle ABC) = \triangle A'B'C',$$

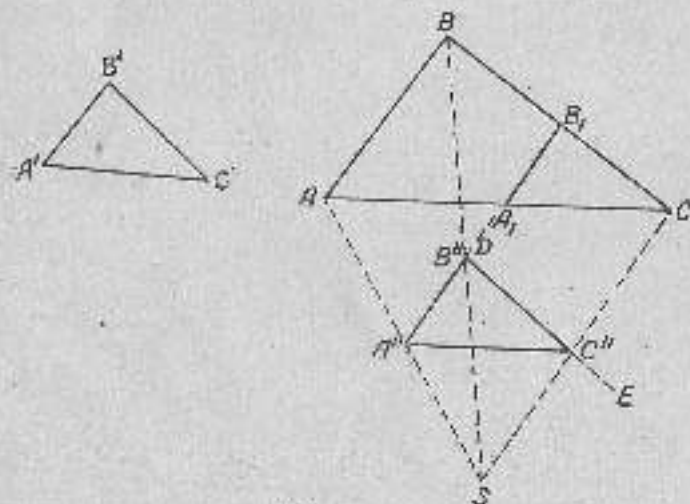
$$Z_k(\triangle A'B'C') = \triangle A''B''C'',$$

$$H_0^{-\frac{2}{k}}(\triangle ABC) = \triangle A''B''C''.$$

76-масала. Ихтиёрли оқшайдан берилган икки ўхшаш учбурчакни перспективга жойлаштиринг.

Берилган ўхшаш учбурчаклар 123-чизмадаги ABC ва $A'B'C'$ учбурчаклар бўлсин.

Аввал, берилган учбурчаклар мос томонларининг нисбатини топиб, ўхшашлик коэффициенти аниқлаймиз: $k = \frac{A'B'}{AB}$. Бу ерда $k = 0,5$ деб фараз қилайлик. Сўнгра, текисликнинг ихтиёрли S нуктасини ўхшашлик маркази сифатида қабул қилиб, учбурчаклардан бирининг, масалан, каттасининг учларини S нукта билан туташтирамиз.



123-чизма.

ABC учбурчакнинг учини, масалан A нуктадан $k = 0,5$ коэффициент бўйича аксантириб, A'' нуктани топамиз. Сўнгра: $(A''D) \parallel (AB)$ ни ўтказиб, $(A''D)$ нинг (SD) билан қисқирган B'' нуктасидан $(B''E) \parallel (BC)$ тўғри чизик ўтказаймиз. $(B''E)$ нинг (SC) билан қесилишган нуктасини C'' билан белгилаймиз. Шу топилган A'', B'', C'' нукталарни қутуя-кет туташтирсак, гомотетинда ABC учбурчакка мос учбурчак ҳосил бўлади, $(A$ нуктадан ушбу $|AB| : |A'B'| = SA : |SA'|$ пропорция ёрдамида топилган мумкин.)

Толшириқлар

I*. Бер текисликда ёзиб, бир-бирига тенг бўлмаган параллеллини қосим берилган. Шу қосимлардан бирини кичикчисига ўтказуви гомотетик марказ ва коэффициентини топиш.

II*. Олднинг толшириқда берилган икки негиздан бирини ўзига параллел доғатга ўтказиб, уларнинг гомотетик маркази ва коэффициентини таъриф бўлиши ва қандай ўтказиш бўлади?

III. Икки ўхшаш учбурчакнинг бир-бирига гомотетик мос ёки мос аксантириш ҳақиқий аниқлаш мумкин?

IV. 123-чизмадаги $A'B'C'$ учбурчакнинг ҳақиқий ўтказишдан, ABC учбурчакни ҳақиқий перспективга жойлаштиринг.

Бу ҳақда ушшанинг коэффициенти қандай бўлади?

V. Берилган ABC учбурчакни унинг маркази ва ташқарисига берилган бирор S нуктага нисбатан $k = 2, -\frac{1}{2}, -2, \frac{1}{2}$ коэффициентлар бўйича гомотетик аксантиринг.

VI. Берилган ABC учбурчакни унинг A, B, C учларини нисбатан $k = 1, 2, -3$ коэффициентлари бўйича гомотетик аксантиринг.

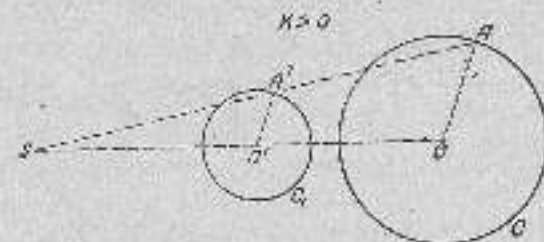
VII. Берилган $ABCDE$ учбурчакни унинг: а) A нуктага нисбатан, б) бирор ташқи нуктага нисбатан, в) бирор оқш нуктага нисбатан $k = 1, -1, 0,5, 2, -2$ коэффициентлар бўйича гомотетик аксантиринг.

VIII. Ихтиёрли оқшайдан икки ўхшаш учбурчакни перспективга жойлаштиринг.

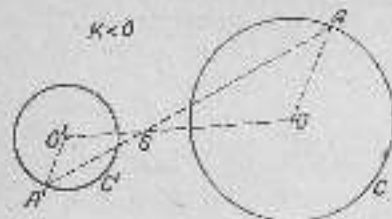
37-§. АЙЛАНАГА ГОМОТЕТИК ФИГУРА

I-теорема. Айланани гомотетик аксантирилганда, маркази берилган айлананинг марказига гомотетик бўлган янги айлана ҳосил бўлади.

Текисликда $C(O, R)$ айлана, гомотетия-маркази S ва гомотетик коэффициенти k берилган бўлсин (124-1-чизма).



124-1-чизма.



11-чииз.

нинг билиш учун унинг O' нуктага нисбатан лавиятиги аниқлаймиш. Бунинг учун OA ва $O'A'$ кесмаларининг гомотетик нуктадан фойдаланамиз.

35-§ нинг IV натижасига биноан қуйидагиси бажарилади:

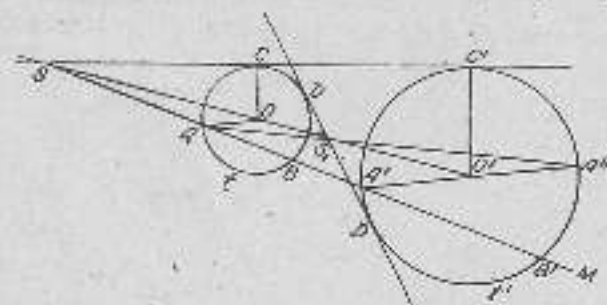
$$|O'A'| : |OA| = |k| \text{ ёки } |O'R'| = |k| \cdot |OA| = |k| R \quad (1)$$

(1) тенгиликнинг ўнг томонидаги k ва R ўзгаришсизликлар бўлгани учун уларнинг қўшилмаси бўлган $O'A'$ узунлиги ҳам ўзгаришсиздир. Бунда A' нуктанинг O' нуктадан ўзгаришсиз хосифада ётиши маълум бўлади. Демак, A' нукта O' нуктани марказ қилиб, $r = |k|R$ радиус билан чизилган айланада ётар экан, яъни A нукта берилган C айлана бўйида ҳаракат қилганда, A' нукта O' марказли $r = |k|R$ радиус билан чизилган C' айлана бўйида ҳаракатланади экан. Бу ерда ҳам C' айланадаги иккинчидан A' нукта маълум бўлса, C' айланада A' ақсалавузчи A нуктани топши йўлини кўрсатиши мумкин.

Шундай қилиб, ҳар қандай айлана гомотетияда иккинчи бир айланага ақсалиниб, бу мос айланаларнинг марказлари ҳам ўзаро гомотетик бўлади.

2-теорема. Иккинчидан аниқлашда икки айлана ўз радиусларининг нисбатига тенг коэффициент бўйича гомотетик бўлади.

Буни исбот қилиш учун 125-сизмада берилган иккинчидан аниқлаш t ва r айланаларининг $OA \parallel O'A'$ радиусларини чизиб,



125-сизма.

AA' тўғри чизиқ билан марказлар чизиғини бирини S нуктада кесилтирайлик (бу ерда $R \neq R'$ деб фарз қилинади).

Ҳисса бўлган $\triangle SA'O'$ ва $\triangle SAO$ бир-бирига ўхшаш, яъни $\triangle SA'O' \sim \triangle SAO$. Шунинг учун

$$\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SO'|}{|SO|} = \frac{|A'O'|}{|AO|} = \frac{R'}{R} = k. \quad (2)$$

Бу эса параллел радиусларнинг, демак, уларнинг A ва A' учларининг ҳамда O ва O' марказларининг S нуктага нисбатан $k = R' : R$ коэффициент бўйича гомотетиклигини кўрсатади.

OA ва $O'A'$ радиуслар, берилган икки айлананинг иккинчидан параллел радиуслари бўлгани учун товланган хоссани бошқа параллел радиуслар учун ҳам тўғри дея оламиз, яъни берилган икки айлананинг ҳар қандай икки параллел радиуслари учларини S нуктага нисбатан, $k = R' : R$ коэффициент билан гомотетик дея оламиз.

$\frac{|SO'|}{|SO|} = \frac{R'}{R}$ тенгшигининг A ва A' нукталарга боғлиқ бўлмаганидан, иккала айланада олмишган ҳамма параллел радиуслар тўғрисида учун битта умумий гомотетия маркази ҳосил бўлади.

Демак, берилган икки айлана улардаги параллел радиуслар учидан ўтувчи тўғри чизиқ билан марказлар чизиғини кесилган нуктаси S га нисбатан радиуслар нисбатига тенг коэффициент бўйича гомотетик бўлади.

Теоремани исботлашда OA ва $O'A'$ параллел радиусларин марказлар чизиғининг бир тарафидан (бир хил йўналишда) олган эдик. Параллел радиуслар бир-бирига қарама-қарши йўналишда олган ҳам, теореманинг исботи юқоридагича бажарилади. Масалан $O'A'' \parallel OA$ радиуслар ва AA'' тўғри чизиқни ўтказишдан ҳосил бўлган SAO ва $SA''O'$ учбурчларнинг юқоридаги (1) кели муносабатларин чиқариб, исбот қилинади.

Юқоридаги икки теоремадан қуйидаги натижаларни чиқарамиз:

1) Икки айлананинг гомотетия маркази бўлган, улардаги параллел радиусларнинг учларини туташтирувчи тўғри чизиқ билан марказлар чизиғининг кесилиш нуктасига устма-уст [тушади]; бунда ташқи гомотетия маркази бир хил йўналишдаги параллел радиуслар учларини туташтирувчи тўғри чизиқ билан марказлар чизиғининг кесилиш нуктасига устма-уст тушиб, икки гомотетия маркази эса қарама-қарши йўналишдаги параллел радиуслар учларини туташтирувчи тўғри чизиқ билан марказлар чизиғининг кесилиш нуктасига устма-уст [тушади]. Буларнинг тўғрисида асос 2-теоремани исботлашдаги тўғрисида жумлайдир.

2) Ташқи умумий уринмалар ташқи гомотетия марказидан, ички умумий уринмалар эса [ички гомотетия марказидан] ўтади.

Ҳақиқатан, ҳар бир умумий уришманинг уришги нукталари-дан чиққан радиуслар бу уришмага перпендикуляр бўлгани учун бундай радиуслар бир-бирига параллеллар. Иккинчи теоремада икки айлананинг параллел радиустари учлари ўша айланалар гомотетия марказига нисбатан гомотетиклиги исбот қилинган эди. Шунинг учун икки айлананинг умумий уришмаси (агар у мавжуд бўлса) шу айланаларнинг гомотетия марказидан ўтади; бунда — ташқи умумий уришманинг уришги нукталари марказлар чизигининг бир томонида ётавлича учу бу уришма марказлар чизиги билан O_1O_2 кесмасининг давомига кесилиши. Шунинг учун ташқи умумий уришма икки айлананинг ташқи гомотетия марказидан ўтади.

Икки умумий уришма икки айлананинг ички гомотетия марказидан ўтишини ҳам шу ҳилда исботлаш мумкин.

3) Гомотетия марказлари иккала айлана марказларини туташтирувчи кесмани гармоник равишда бўлади (28-масала), чунки гомотетия марказларидан бири уни ички равишда, иккинчиси ташқи равишда радиуслар нисбатида бўлади.

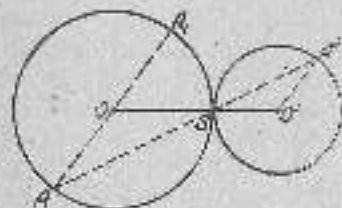
Ҳақиқатан, 123-чизмага асосан, қуйидагилар ёрилади:

$$\triangle SO'C' \sim \triangle SOC \Rightarrow |SO'| : |OC'| = |OC| : R' = R : k \Rightarrow |SO'| = \frac{|SO|}{k} \\ \triangle S'O'A' \sim \triangle SOA \Rightarrow |S'O'| : |SO| = |OA| : R = R' : k \Rightarrow |S'O'| = \frac{|SO|}{k}$$

4) Ўзаро ташқи уринувчи икки айлананинг уришги нуктаси уларнинг икки гомотетия маркази бўлади.

Бунга ишонинг учун 126-чизмагадек ташқи уришган икки айлананинг S уришги нуктасини — тескари ўқалашдаги параллел радиуслар учларидан ўтган тўғри қизил битан марказлар чизигининг қесилиш нуктасига тўғри қилишни исбот қилинса kifon.

Маълумки, S уришги нуктаси марказлар чизигида ётади. Бу S нукта орқали ихтиёрый вазиятда ўтказилган қесувчининг айланалар билан кесилиш нукталарини A ва A' орқали белгилаб, $\triangle AOS$ ва $\triangle A'O'S$ ларни ҳо-сил қилайлик.



126-чизма.

Бу учбурчларнинг ҳар бири тенг ёни ва $\angle ASO = \angle A'SO'$ бўлгани учун улар ёғаро ўхшаш-дир. Шунинг учун $\angle SAO = \angle S'A'O'$, яъни $|AO| : |A'O'|$ лар. Шу сабаб-дан AA' тўғри чизик икки айлана-нинг гомотетия марказидан ўтади, яъни S уришги нуктаси бу икки

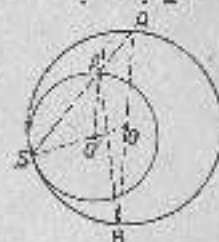
айлананинг гомотетия маркази бўлади. A ва A' нукталар мар-казлар чизигининг икки томонида ётавлича учуи AA' тўғри чизик марказлар чизигини марказлар чизигида кесали. Шу-нинг учун S нукта ички гомотетия (маркази бў-лади).

Демак, ҳар бир айланани ўзининг бирор нуктасига нисба-тан ички гомотетия ($k < 0$) аксиантирлашда, у ўзининг ўша нуктасига ташқи уринувчи айланга ўтади.

5) Ўзаро ички уринувчи икки айлананинг уришги нуктаси уларнинг ташқи гомотетия мар-кази бўлади.

Ҳақиқатан, 127-чизмага AOS ва $A'O'S$ учбурчларнинг ўхшашлигидан қу-бидасилар мавжуд бўлади:

$$\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{R}{R'} = k > 0.$$



127-чизма.

Демак, ҳар бир айланани ўзининг бирор-та S нуктасига нисбатан ташқи гомотетия ($k > 0$) аксиантирлашда, у янақа ўзи билан S нуктада ички уринувчи иккинчи бир ай-ланасга ўтади.

6) Икки айлана учун ташқи ўхшашлик маркази бўлган S нуктадан бу айланаларга ўтказилган ҳар қандай SM қесувчи бу айланаларда гомотетик нукталарнинг икки жуфтлик ҳосил қилиди. A га A' ва B га B' гомотетик ҳосил деб (фараз қилай-лик, A билан B' ва B билан A' нукталар антигомотетик нукталар деб атасали (125-чизма).

Икки айлананинг гомотетик марказидан антигомотетик нук-таларга бўлган масофалар қўзғаймаслиги ўзгармас, маълумки тенг. Бунинг исботи эъқили.

Бунда ҳаққа қесувчилар учун

$$|SA| \cdot |SB'| = |SB| \cdot |SA'| = \text{қазғаймас (const)}$$

эқилини кўрсатиш kifon.

Ташқи нуктадан айланга ўтказилган қесувчининг ҳосиласи кўра

$$|SB'| \cdot |SA| = t^2 \quad (t - \text{уриниш кесмасининг узунлиги}). \quad (1)$$

A' нукта билан A нукта ва B' нукта билан B нукта S га нисбатан $k = R' : R$ коэффицент бўйича гомотетия бўлгани учун:

$$\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{R'}{R} \quad \text{ва} \quad \frac{|SB'|}{|SB|} = \frac{R'}{R} \quad (2)$$

тенгликлари эъқили.

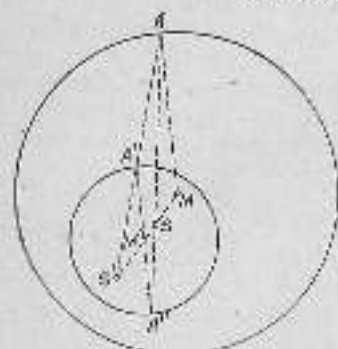
(1) тенгликни (2) даги ҳар бир тенгликни ҳаёлаб қўйибдиришдан:

$$|SB| \cdot |SA'| = r^2 \cdot \frac{R'}{R} \text{ ва } |SA| \cdot |SB'| = r^2 \cdot \frac{R}{R'}$$

ҳосил бўлади.

Бундан қуйидаги тенглик чиқади:

$$|SB| \cdot |SA'| = |SA| \cdot |SB'| = r^2 \text{ ҳарикас.} \quad (3)$$



128-чиёра

Мана шуни исбот қилиш талаб этилган эди.

Оқирада айтилганларга асосан, гомотетикли қуйидаги шартларнинг бири билан аниқлаш мумкин:

I. S марказ билан k коэффициент ёки;

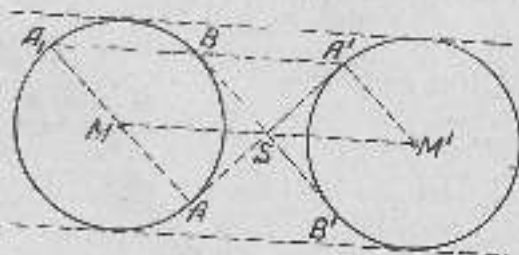
II. S марказ билан икки M ва M' гомотетик мос нукталар ёки;

III. Гомотетик мос бўлган A ва A' ҳамда B ва B' нукталар (бунда $(AB) \parallel (A'B')$ ва $(AB) \neq A'B'$ шартлар мавжуд бўлиши керак) ёки;

IV. k коэффициент ва гомотетик мос M ва M' нукталар.

Толшвриқлар

- I. Берилган марказга нисбатан айланма гомотетик айлана чиқар:
 - a) берилган S марказ ва $k = 2$ коэффициент бўйича берилган A (O, r) айланга гомотетик айлана чиқар;
 - b) берилган O марказ ва $k = -0,5$ коэффициент бўйича берилган A (N, R) га гомотетик айлана чиқар.
- II. Қуйидаги тошприқларни ажрат:
 - a) берилган A ($M, 2r$) билан A_1 (N, R) айланалар ўтки гомотетик маркази S ва k (> 0) коэффициентга тенлик (g — ихтиёр хоси);
 - b) берилган A ($L, 4r$) билан A_1 ($N, 2r$) айланалар учун S ва k (> 0) ни топиш.
- III. Парг ажратилганини кичик ажратиб, урғунлайдиган ва концентрик бўлмаган икки айлана гомотетик марказларини кичик айлана ичига бўлиши исбот қилиш (129-чиёра).



129-чиёра

IV. Радиуслари тенг икки айлананинг гомотетик марказлари ҳақида нима дейиш мумкин? (129-чиёра)

V. Концентрик айланалар гомотетик марказларининг шу айланалар марказида бўлишини исбот қилиш ва берилган айланани ўз марказига нисбатан турли коэффициентлар билан гомотетик ахсаландринг.

VI. Айлананинг нукталари гомотетикда яна айлана нукталарига ўтгани қирдаги теоремани 37-§ дагидан башқачароқ йўл билан исбот қилиш.

38-§. ПАНТОГРАФ

Ҳар қандай текис фигурани персискини ўхшаш аксантиришда (масалан, план, географик карта ёки бирор чизманинг маълум катталикдаги нусхасини тайёрлашда) п а н т о г р а ф деб аталган махсус асбоб ишлатилади. Амалий ишларда қўллангидиган пантиограф турли кўринишда учраса-да, уларнинг тузилиш принципи бир хилдир. Улар гомотетик фигураларнинг хос-саларига асосланиб тузилаётган.

Пантиограф 130-чиёрада тасвирланган $SABC$ параллелограмм бўлиб, унинг томонлари метилдан ёки қалтик фанердан қилинган ва бир-бирига шарнирлар ёрдамида бирикканлиги туфайли уч-лари ктрсфиди айлана олади. Бу параллелограммнинг бирор томонини, масалан, AB томонини ихтиёрин BF узунликка давоқ эттирилади, BF кесми пантиографнинг сони деб аталади ва унда бир-биридан тенг масофада майда тешикчалар бўлади; BC томонини ҳам шуқдай тешикчалар бўлади. Агар параллелограммнинг S учини махсус итга ёрдамида текиеланикнинг бирор нуктагига махсуслаб қўйилса ва бу нукта агрофиди DS сўғри чизик текис айлана олади-ган бўлса, бу ҳолда BF даги D нуктани бирор f фигура (чизик) бўйича ҳаракатлантирилганда, SD тўғри чизик билан BC томонининг кесилувидадан хосил бўлган D' нукта ҳам ҳаракатланиб, f фигурани ўхшаш f' фигура чиқади. Бундаги f' фигура f фигурани S марказга нисбатан $k = AB:AD$ коэффициент бўйича гомотетик бўлади. Бунки исботлаш учун параллелограммнинг икки вазилига диққат қилайлик: D нукта f фигура бўйича ҳаракатланиб, D' нуктага келганда A, B, C ва D' нукталар мос равишда A', B', C' ва E' нукталарга келди деб тасаввур этилайик. Бундаги E' нуктанинг S нукта билан S марказга нисбатан $k = AB:AD$ коэффициент бўйича гомотетиклигини исботлаш керак. Бунинг учун E' ва E' нукталарнинг қуйидаги учта талабга жавоб берилиши исботлаш керак:

- I. E' ва E' нукталар S нукта билан бир сўғри чизикда бўлади.
- II. $H'_1(D) = D'$ ва $H'_1(E) = E'$, яъни D' билан D нукта S марказга нисбатан қандай коэффициент бўйича гомотетик бў-

са, F' билан F нукта ҳам S га нисбатан ўшардай коэффициент бўйича гомотетикдир.

III. Гомотетия коэффициентини $k = \frac{|SE'|}{|SE|} = \frac{|SD'|}{|SD|} = \frac{|AB|}{|AD|}$ бўлади.

I шартнинг мавжудлигини исботлаш учун $\angle SE'C \cong \angle E'EC$ эканлиги исботлаш kifoya. Бунинг учун $\triangle SC'E \cong \triangle E'EC$ эканлиги исботлаш керак. IIIу мақсадда қуйилганларни қиёблаймиз:

$$\angle SC'E' = \angle E'E'C \quad (1)$$

$$\frac{|SC'|}{|E'E'|} = \frac{|CE'|}{|E'E'|} \quad (2)$$

Берилишига кўра, $(SC') \parallel (E'E)$ бўгани учун (1) муносабат тўғри бўлади. Берилишига кўра, $\triangle SC'D' \cong \triangle E'BD'$ бўгани учун:

$$\frac{|SC'|}{|E'D'|} = \frac{|CE'|}{|D'B|} = \frac{|SD'|}{|D'B|} \quad (3)$$

бўлади.

Параллелограмм $SA'B'C'$ ҳақиқия ўтганда томонларининг узунликлари, BD ва CD' кесмаларининг узунликлари ўзаро тенг, яъни қуйидаги тенгликлар мавжуд бўлади:

$$|SC'| = |SC|, |BD'| = |BE|, |CD'| = |CE|, |D'B| = |E'A|. \quad (4)$$

Шунинг учун (3) даги кесмаларни уларга тенг (4) кесмалар билан алмаштирилса, (2) муносабатининг тўғрилиги маълум бўлади. Демак, S, E' ва E нукталар бир тўғри чизиқда ётар экан. Энди II шартнинг мавжудлигини исботлаймиз.

$$\triangle SC'E' \cong \triangle E'E'E \text{ дан } \frac{|SE'|}{|SE|} = \frac{|CE'|}{|CE|} \quad (5)$$

муносабат маълум бўлади. (4) даги кейинги икки тенгликка асосан (5) пропорция қуйидаги кўринишда ятади:

$$\frac{|CE'|}{|E'E|} = \frac{|CD'|}{|D'B|} \quad (5')$$

(5), (5') ва (3) дан қуйидаги муносабат маълум бўлади:

$$\frac{|SE'|}{|E'E|} = \frac{|SD'|}{|D'B|} \quad (6)$$

Кейинги муносабатдан $(D'E') \parallel (DE)$ маълум бўлади. Бу эса E билан E' нукталарининг ва D билан D' нукталарининг S марказга нисбатан ётган уқуқли k коэффициент бўйича гомотетик эканлиги кўрсатади, яъни бу ердаги ҳар қандай нукта қуйидаги муносабатда бўлади:

$$H_k^S(E) = E' \text{ ва } H_k^S(D) = D'.$$

Энди III шартнинг ўринди эканлигини кўрсатайлик. Чизмалар:

$$\frac{|SD'|}{|D'D|} = \frac{|AB|}{|AD|} \text{ ва } \frac{|SE'|}{|E'E|} = \frac{|A'B'|}{|A'E|} \quad (7)$$

тенгликлар маълум.

Бу пропорцияларнинг ҳақларини II шартдаги пропорциялар ҳақлари билан солиштиришдан маълум бўладики, (7) дан III шартни чиқариш учун (7) дан қуйидагилар пропорциялар тўғрилиги керак:

$$\frac{|SD'| + |D'D|}{|SD'|} = \frac{|AB| + |AD|}{|AD|} \text{ ва } \frac{|SE'| + |E'E|}{|SE'|} = \frac{|A'B'| + |A'E|}{|A'E|}$$

ёки

$$\frac{|SD|}{|SD'|} = \frac{|AD|}{|AB|} \text{ ва } \frac{|SE|}{|SE'|} = \frac{|AE|}{|A'E|} \quad (8)$$

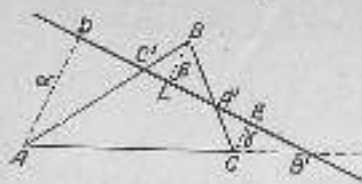
Чизмада $|A'B'| = |AB|$, $|A'E| = |AE|$ бўгани учун (8) муносабатлардан қуйидагини ёза оламиз:

$$\frac{|SD|}{|SD'|} = \frac{|SE|}{|SE'|} = \frac{|AB|}{|AD|} = k.$$

Шундай қилиб, f' фигура f фигура билан S марказга нисбатан $k = \frac{|AD|}{|AB|}$ коэффициент бўйича гомотетик бўлади. $k = \frac{|AD|}{|AB|}$ даги AB кесманинг ўзгармаслигидан билинадики, D нукта B нуктага ҳижолаётган сари k шунинг қиймати 1 га ҳижолаётган боради, яъни f' фигуранинг катталиги f фигура катталигига интилади. Аксинча, агар D ва B нукталар узокроққа ҳижолаётганда, масалан, коэффициентини кизимидагилар $k = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{1}{2}$ деб олесак, f' фигуранинг ҳақма кизимидаги элементлари f фигуранинг ҳос чизикли элементларидан $\frac{1}{2}$ қисми қачақ бўлади. Агар берилган f фигуранинг ҳақма нисбатини қачақроқ тусхасини кўтармоқчи бўлсак, масалан, $k = 2$ коэффициент билан алмаштиришдан бўлсак, яъни унинг $|D'E|$ нинг шундай бир D нуктасига ҳижолаймиз, унда $k = \frac{|AD|}{|AB|} = 2$ бўлсин; сўнгра $|SD|$ билан $|BC|$ шунинг кесилиши D' нуктасига инга, D нуктага қалам урнатиб, D' даги шунинг f фигура бўлиши ҳарқисқаласиранин, D нукта ялангақ фигурани чизади.

39-§. ТРАНСВЕРСАЛЬ МЕНЕЛАЙ ТЕОРЕМАСИ

Трансверсаль сўзи — қуйидагиларни ўқушдан қол қолдиликда ётадики маълумлашдан яъни $transversal$ сўзидан олиниб, олатади, уёбурақнинг томонларини кесиб ўтувчи тўғри чизиқни ётади. Ўзунинг тўғри чизиқлар системасини кесувчи тўғри чизиқ — трансверсаль деб айтади.



131-чинос.

1. Менелай теоремиси. Агар ABC учбурчакнинг AB , BC ва AC томонларининг ёки уларнинг давомларининг бирор тўғри чизик ҳос равишда C' , A' ва B' нуқталарда кесса,

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = -1 \quad (1)$$

муносабат ўринли бўлади.

Бунинг исбот қилиш учун берилган учбурчакнинг учаласи учундан трансверсалга AD , BE ва CF перпендикулярлар ўтказаями (131-чинос). A , B ва C нуқталарнинг трансверсалга бўлган масофалари ҳос равишда α , β ва γ га тенг бўлсин. Бу ҳолда чизмадаги ўч жуфт ўхшаш учбурчалардан қуйидаги пропорцияларни тузаями:

$$\begin{aligned} \triangle ADC' \sim \triangle BLC' & \text{ дан } \frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{\alpha}{\beta}, \\ \triangle BFA' \sim \triangle CEA' & \text{ дан } \frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{\beta}{\gamma}, \\ \triangle CFB' \sim \triangle ADB' & \text{ дан } \frac{|CB'|}{|B'A|} = -\frac{\gamma}{\alpha}. \end{aligned} \quad (2)$$

Бу пропорцияларни ҳадлаб ҳувайтсаяк, изланган тенглик ҳосил бўлади:

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} = -1.$$

2. Менелайнинг²⁾ тескари теоремиси. Агар ABC учбурчакнинг AB , BC ва AC томонларида ёки уларнинг давомларида ҳос равишда олинган C' , A' ва B' нуқталар

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = -1$$

муносабатни қанбатлантурса, бу нуқталар бир тўғри чизикда ётади.

¹⁾ AC ва бўлувчи B' нуқта AC нинг давомини бўлгани учун бўлади. Масалаларни исботлаш маъноли қилинб қолган.

²⁾ Менелай ераимедал олдинки биринчи лор охирида ўзини грек олимни бўлиб, кўпроқ астрономия ва сферик тригонометрия соҳасида ишлаган. Менелайнинг ахирдан хўридак теоремаси мошлар Лазарь Кариниер (1751—1782) „Трансверсаллар назариси“ деган исмида асос бўлган.

Бунинг исбот қилиш учун A' ва B' нуқталардан бир тўғри чизикни ўтказаями.

Бу тўғри чизик учбурчакнинг учинчи томонини бирорта D_1 нуқтада кесиб ўтсин. Бу ҳолда, тўғри теоремага асосан A' , B' ва D_1 нуқталар

$$\frac{|AD_1|}{|D_1B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = -1$$

муносабатни қанбатлантурсаяк лозим.

Берилган тенглик билан кейинги тенгликни солиштирсаяк натижасида

$$\frac{|AD_1|}{|D_1B|} = \frac{|AC'|}{|C'B|}$$

тенглик ҳосил бўлади.

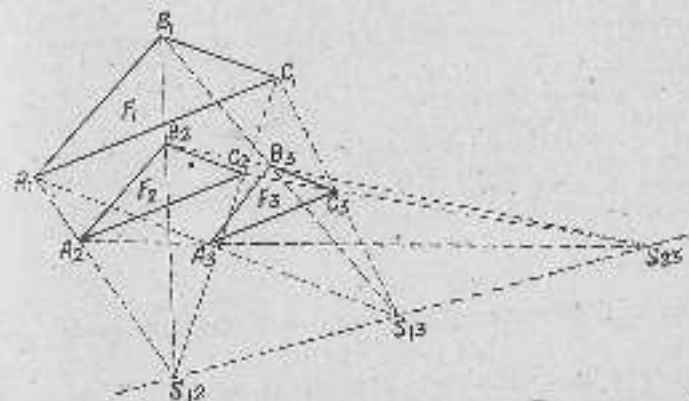
Бундан C' ёки D_1 нуқталарнинг устга-уст қўйилиши, яъни улар битта нуқтадак айланиши келиб чиқади. Демак, A' , B' ва C' нуқталар бир тўғри чизикда ётади.

Биз Менелайнинг тўғри ва тескари теоремасини трансверсалнинг учбурчак томонларида иккиласини ички (яъни томонларнинг ўзласидаги) нуқталарда ва учинчисини асос ташқи нуқтада кесиб ўтган ҳол учунгина исбот қилдик. Трансверсал учбурчак томонларининг учаласини ҳам ташқи нуқталарда кесиб ўтгани мумкин. Бу ҳол учун ҳам теоремалар ақорилиши ҳолга ўхшаш исбот қилинади.

40-§. ХАР ИККИТАСИ ГОМОТЕТИК БЎЛГАН УЧТА ФИГУРА ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Теорема. Агар икки фигуранинг ҳар бири учинчи бир фигурани гомотетик бўлса, у икки фигура ҳам ўзаро гомотетик бўлиб, бу уч фигурадан ҳар қайси иккиласининг ўхшашлиги марказлари бир тўғри чизикда ётади.

Бу теоремани 132-чиносдаги учбурчаларга қанбатлам исбот қилаялик.



132-чинос.

Бу низманинг тузиллиши кўра: ушдат $A_1B_1C_1$ учбурчак $A_1B_1C_1$ учбурчакка S_1 марказга нисбатан $k_1 > 0$ коэффициент бўйича гомотетик бўлиб, $A_1B_1C_1$ учбурчак эса $A_2B_2C_2$ учбурчакка S_2 марказга нисбатан $k_2 > 0$ коэффициент бўйича гомотетикдир.

Шуларга таяниб, $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг $A_2B_2C_2$ учбурчакка
бирор S_{20} марказга нисбатан бирор k коэффициент бўлича го-
мотетик бўлишини ва уларнинг ўхшашлик маркази S_{20} нукта-
сини S_{10} ва S_{18} нукталар билан бир тўғри чизиқда ётишини
исбот қилиш керак.

Чизмаларги $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ ва $A_3B_3C_3$ учбурчакларни жик
разилда F_1 , F_2 ва F_3 орқали белгилаб, теореманинг шарти
билан худосизлиги қуйидагича ёзиб қўйайлик:

Берилган: $H_{\frac{1}{2}}^{\infty}(F_1) \equiv F_2$ ва $H_{\frac{1}{2}}^{\infty}(F_2) \equiv F_1$.

Исбот қилиш керак:

$$1) \quad H_{\infty}^{\infty}(F_i) = F_i;$$

2) S_{21}, S_{12}, S_{33} нукталар бир тўғри қизинда ётади.

Небојот, Бернхалмисга кѳра, $H^k_{\nu}(S_1) = F_2$. Демек, $[A_1B_1] = [A_2B_1] + [A_1C_1] + [A_2C_1]$ ва $[B_1C_1] + [B_2C_1]$ ҳамда $[A_2B_2] : [A_1B_1] = -k$, бўлади (35-§).

Шуныңдек, $H^2_*(F_1) \equiv F_1$. Демек, $[A_2 B_1] | [A_3 B_1], [A_1 C_1] | [A_2 C_1]$ на $[B_2 C_1] | [B_3 C_1]$ ҳақда $[A_2 B_1] : [A_1 B_1] = k$ бўлади.

Шўнинг учун: $[A_2B_1] \cap [A_3B_1] \cap [A_1C_1] = \emptyset$ бўлади.
 $\parallel [B_2C_1]$ ҳамда $[A_2B_1] \cap [A_3B_1] \cap [A_1C_1] \cap [A_2C_1]$ ва $[B_2C_1] \cap$
 $= \emptyset$, k_1 бўлади. Берилишига кўра, P_1 фигура P_1 га, P_2 фигура
 ва F_1 га ташқи гомететик бўлган учта F_1 фигура F_2 га таш-
 қи гомететикдир. $(k_1 > 0$ ва $k_2 > 0$. Шўнинг учун, $k = k_1 + k_2 >$
 > 0 бўлади дейиш мумкин).

Шундай қилиб, F_3 нинг F_2 га гомотетик фигурга бўлиши учун дими шартлар мавжуддир. Шунинг учун улар гомотетик бўлади.

Ушлатқы Юторқыз бақырытқан (P_1, P_2) ва (P_1, P_2) томоғиналар таңқу томоғиналар бөлүмдәндә (P_1, P_2) томоғиналар дақ таңқу томоғиналар бөлүмдә. Алар (P_1, P_2) ва (P_1, P_2) томоғиналардан ҳәр бәкк ағкк томоғиналар бөлүмдә, буғк дақ (P_1, P_2) томоғиналар таңқу бөлүмдә. Бинарлар, (P_1, P_2) ва (P_1, P_2) томоғиналардан бира таңқу ва таңқиналар ағкк бөлүмдә, (P_1, P_2) томоғиналар ағкк бөлүмдә.

Шунинг учун бундай геометриялар орасидagi муносабатни қисқача бундай ёзмадан ҳақ дикцияга агар (F_1, F_2) ва (F_1, F_2) геометриялар бeр хал бўлсалар, F_1 ва F_2 фазуралар орасидagi геометрия тилиги геометрия бўлиб, ате ҳалта, янаи геометрия бўлади.

ТОПШНУРЪ

Бүлктөгү айыптуулардын түрүнчүлүк жасоолор артынан сизге күй-
рык.

Энди теореманинг иккинчи қисmini исбот қилайлик. P_1 ва F_1 фигураларнинг то'лқатан маркази S_{x_1} бўлсин, P'_1 ва F'_1 фи-

219

кураларнинг геометрия маркази S_{12} бўлиб, F_1 ва F_2 лариники S_{13} бўлади. Чизмадан куйидаги муносабатларни ёзи олаемиз:

$$\begin{aligned} (F_3, F_3) \text{ тэмцэтгэлд } \frac{[A_3 S_{32}]}{[S_{32} A_3]} &= -\frac{[A_3 P_3]}{[A_3 B_3]}, \\ (F_3, F_1) & \quad \frac{[A_3 S_{13}]}{[S_{13} A_3]} = -\frac{[A_3 B_1]}{[A_3 \theta_1]}, \\ (F_1, F_2) & \quad \frac{[A_1 S_{21}]}{[S_{21} A_1]} = -\frac{[A_1 B_2]}{[A_1 B_1]}. \end{aligned}$$

Бу тенгликларни ҳадаб кўнайтирсаяк, қуйилган ҳолат бў-

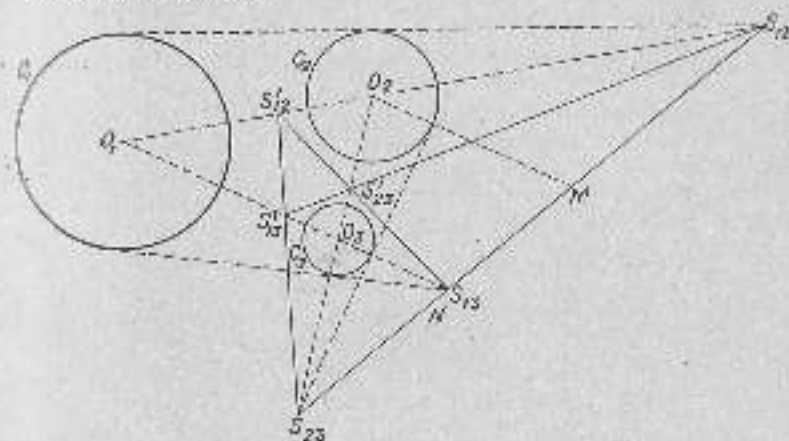
$$\frac{[A_1S_{22}]}{[S_{22}A_1]} \cdot \frac{[A_2S_{12}]}{[S_{12}A_2]} \cdot \frac{[A_3S_{12}]}{[S_{12}B_3]} = -\frac{[A_2B_2]}{[A_2B_3]} \cdot \frac{[A_3B_3]}{[A_3B_2]} \cdot \frac{[A_1B_1]}{[A_2B_1]} = -1.$$

Агар Мелелайнинг теокари теоремасини $A_1A_2A_3$ учбурчакка
таъбиқ этсак, S_{12} , S_{13} ва S_{23} нукталарнинг бир тўғри чизикда
ётиши маълум бўлади.

4.1. АЙЛАНЛАРНИНГ УХШАШЛИГИ ҲАҚИДА МОНЖ. ТЕОРЕМАСИ

Теорема. Ҳар қайси иккитаси ўзaro тенг бўлмаган эа марказлари бир нўғри чизикда ётмаган учта айлананинг олтига ўхшашлик марказидан учта тaнқи маркази бир нўғри чизикда, ҳар бир тaнқи маркази билан унга эос бўлмаган иккита ички маркази бошқа бир нўғри чизикда ётади.

Теореманинг талабига жавоб берувчи учта айлана 133-чи-
мадаги марказлари O_1 , O_2 ва O_3 нукталарда бўлган C_1 , C_2 ва
 C_3 айланалар бўлсин.



155-917M6.

†Пашар Момк (1748 — 1818) француз геометри, аналитик геометриясининг изохчиси. 1780 йилда Париж Фаллар академиясининг аъзоси. Бу теоремани Момк исми билан ибодат қилинган. Унинг бу йўналишдаги уш Момкни теореманинг фойдаланб қилинган.

Бундаги C_1 билан C_2 айланаларнинг ташқи ўхшашлик маркази S_{12} , икки ўхшашлик маркази S'_{12} ; C_1 билан C_3 айланаларнинг ташқи ўхшашлик маркази S_{13} , икки ўхшашлик маркази S'_{13} ; C_2 билан C_3 айланаларнинг ташқи ўхшашлик маркази S_{23} , икки ўхшашлик маркази S'_{23} бўлади.

$$\begin{aligned} (C_1, C_2) \text{ гомотетиядан } \frac{|S_{12}O_1|}{|S_{12}O_2|} &= \frac{R_1}{R_2}, \\ (C_2, C_3) \text{ " } \frac{|S_{23}O_2|}{|S_{23}O_3|} &= \frac{R_2}{R_3}, \\ (C_1, C_3) \text{ " } \frac{|S_{13}O_1|}{|S_{13}O_3|} &= \frac{R_1}{R_3}. \end{aligned}$$

Бу учта тенгликни ҳадлаб қўпайтирсак:

$$\frac{|S_{12}O_1|}{|S_{12}O_2|} \cdot \frac{|S_{23}O_2|}{|S_{23}O_3|} \cdot \frac{|S_{13}O_3|}{|S_{13}O_1|} = 1$$

ёки

$$\frac{|O_1S_{12}|}{|S_{12}O_2|} \cdot \frac{|O_2S_{23}|}{|S_{23}O_3|} \cdot \frac{|O_3S_{13}|}{|S_{13}O_1|} = -1$$

тенглик чиқади.

Менделайнинг теоремасига мувофиқ, бундаги O_1, O_2, O_3 унбурчакнинг томонлари қишлоқларида жойлашган S_{12}, S_{13} ва S_{23} нуқталар бир тўғри қизғиққа ётади.

Эзодагина. Юқорида аниқланган олимпиада гомотетия марказидан ҳар каёдан ўтганки тўғри қизғиққа тўғри келадиган учта айлананинг гомотетия ўқлари (ёки ўхшашлик ўқлари) дейилади: қизғиқдан ўтган (ёки қизғиқ гомотетия марказларига тўғри келадиган) ташқи ўқ бўлиб, қолганлари ички ўқлар.

Толшириқлар

1*. Қуйида кўрсатилган гомотетия марказларидан ҳар бир сирдатисарининг бир тўғри қизғиққа ўтганлиги исбот қилинган:

$$\begin{aligned} S_{12}, S'_{23}, S'_{13} \\ S_{13}, S'_{12}, S'_{23} \\ S_{23}, S'_{13}, S'_{12} \end{aligned}$$

И*. Агар C_1, C_2, C_3 айланалардан бирориси (масалан, C_1) қолган айланаларга (масалан, C_2 ва C_3 га) ўрнатиқ, қариндош ўрнатиқ нуқталарига қўйилган тўғри қизғиқ C_1 ва C_2 айланаларнинг ташқи ўқ ва C_1 ва C_3 айланаларнинг ташқи ўқ бўлиб, қолганлари ички ўқлар.

ҚИСОБ

ГОМОТЕТИЯ МЕТОДИ

Дастлабки изоҳлар

Гомотетия методи билан масала ечиш, ботққа методлар билан масала ечишга қараганда муҳим ва қийинроқ ҳисобланади. Бу метод асосан билан масала ечишда, бар томондан, масаланинг шартларидан келиб чиққан фигуранинг шакли ва катталигини аниқловчиларини ажратиб олини, иккинчи томондан, фигуранинг шаклини ва катталигини топиш ўсида айрим-айрим иш қилиб боришга тўғри келса, учинчи томондан, бу метод билан ечиладиган масалалар ташқарининг қўлини илгари кўрилган ҳамма типдаги масалаларни ечки бўларганини мукаммал билишни талаб қилади.

Шунинг учун китобхонда унбурчаларнинг ўхшашлик аломатлари, қўпбурчак, параллелограмм ва уларнинг хусусий қўриқларининг ўхшашлик аломатлари ҳақидаги ҳамма маълумотларни яна бир қарра нухта тикрорлаш ва уларга тегишли ҳисоб ва масалалар ечиш тавсия этилади.

Гомотетия методи билан янги тақрирларнинг, бу методни нухта асослашга тайёрланишнинг биринчи қадами сифатида қўйилганларни бажариш тавсия қилинади.

Унбурчаларнинг ўхшашлик аломатларини аниқлашга тушунриб, қуйидаги аниқлаш масалаларини ечиш:

1. Икки томоннинг нисбати ва шу томонлар праспекти бурчаги берилган унбурчак ясанг.

2. Икки бурчаги берилган унбурчак ясанг.

3. Учта томоннинг нисбати берилган унбурчак ясанг.

4. Икки томоннинг нисбати ва шу томонлардан каттаси қаринидаги бурчаги берилган унбурчак ясанг.

1, 2, 3, 4- масалаларнинг мос равишда илгари кўрилган 10, 11, 8 ва 21- масалаларга келтириб ечилишнинг аниқлашнинг ва ҳар бир масалани етишдан сўнг қуйидаги ҳулоаса келишигини аниқлаш: ясанган унбурчаларнинг катталиклари ҳар қил чиққони муҳим бўлса-да, уларнинг шаклини бир қилдир, яъни бундаги ҳар бир масалани етишдан ҳисси бўлган ҳамма унбурчалар ўзаро ўхшашдир.

Унбурчаларнинг ўхшашлик шартларини юқорида айтаётган тўғри асосий аломатлар билангина чеклаб қўймай, унбурчаларнинг ўхшашлигини аниқлаш аниқлашнинг жула қил маълуми айтилганга олиб, янама тараққийда тўғри қизғиқ масалаларини ечиш.

Қуйидаги шартлар мавжуд бўлганда, ABC ва $A'B'C'$ унбурчаларнинг ўхшаш бўлишини исбот қилиш:

$$\begin{aligned} 1. a : b : c &= a' : b' : c' & 3. m_a : m_b : m_c &= m'_a : m'_b : m'_c \\ 2. c : m_a : m_b &= c' : m'_a : m'_b & 4. h_a : m_b : m_c &= h'_a : m'_b : m'_c \end{aligned}$$

5. $a : b_c = a' : b'_c$ ва $\angle A \leq \angle A'$. 7. $m_a : m_b = m'_a : m'_b$ ва $\angle (m_a, m_b) \leq \angle (m'_a, m'_b)$.
 6. $c : h_c = c' : h'_c$ ва $\angle A \leq \angle A'$. 8. $a : m_a = a' : m'_a$ ва $\angle A \leq \angle A'$.

Юқорида айтилган ишларни бажаргандан сўнг, бунинг якуни сифатида қуйидаги ҳулсаларни чиқариш лозим.

1. Ҳар бир фигура ўзининг катталиги ва шакли орқалигина тўли тасвир қилинади.

2. Ҳар қандай сода текис кўпбurchакнинг шакли унинг бурчакларининг катталиги ва чиққиқли занжирларининг ўзаро нисбатлари орқали аниқлашиб, у фигуранинг катталиги ва ундаги чиққиқли элементлар ёки унинг жан билан аниқланади.

Бўлган бир хил номли фигуралар бир хил шаклга эга бўлади, масалан, кўпurchаклар, айланалар, тенг томонли учбurchаклар ва ҳокимзо.

42-§. ГОМОТЕТИЯ МЕТОДИНИНГ МОҲИЯТИ

Ҳақиқат донр масалаларни гомотетик аксонтириш ёрдамида ечим гомотетия методи деб айтилади. Бу метод шундан иборатки, аввал масалада сўралган фигуранинг шакли, сўнг унинг катталиги аниқланади, яъни аввал қандайдиган фигурата гомотетик бўлган фигурани ясаб, сўнг уни гомотетик аксонтириш орқали талабгад фигура топилди.

Агар масалада берилган шартлардан биронтаси ташланганда кейин қолган шартлар пайлақуачи фигурата гомотетик фигурага ясаб учун етарли бўлса, бундай масалани гомотетия методи билан ейти мумкин. Ташланган шарт қўшича изланувчи фигуранинг бирор чиққиқли элемент бўлади.

Гомотетия методи билан масала енигда юқорида айтилган икки асосий иш қуйидаги тартибда бажарилди:

1. Масалада берилган шартлардан шукал бир шарт ажратилдики, қолган шартлар изланувчи фигуранинг шаклини, ажратилган шарт эса унинг катталигини аниқлай олади.

Изланувчи фигуранинг шаклини аниқловчи шартлар қўшича у фигуранинг бурчаклари ёки бурчаклари ва бозор шартдан элементларнинг нисбатлари, ёки фақат чини элементидалик нисбатлари, ёки изланувчи фигуранинг исми (квадрат, тенг томонли учбurchак кийи) бўлади. мумкин изланган фигуранинг катталигини аниқлаш шарт эса у фигуранинг бирорли чиққиқли элемент ёки унинг жан, ёки бозор бирор маълумот бўлиши мумкин.

Берилган масаладаги шартларни маъ шундай икки грунга ажратиб, изланувчи фигуранинг шаклини ва катталигини аниқловчи шартларни белгилаш — берилган масалани иккита ёрдамчи масалага ажратиш — масалани шакли ва катталиги белгида бажарилди.

2. Берилган масаланинг шартларини юқорида айтилганча анализ қилгандан сўнг, аниқлаш белгилашчи бирличи ёрдамчи масала (яъни изланган фигуранинг шаклини аниқловчи шартлардан тўзилган аниқмас масала) ечилиди. Бунинг натижасида изланувчи фигурата ўхшаш бўлган иккитерли катталигидаги ёрдамчи фигура ҳосил бўлади.

3. Аниқлаш белгилашчи иккинчи сода масала ечилиди, унинг тошдан ёрдамчи фигурата ўхшаш қилиб, изланувчи фигуранинг катталигини аниқловчи шартни қановатлантирувчи фигура тошлади. Бу иш қуйидаги тартибда бажарилди:

А. Изланувчи фигуранинг катталигини аниқлаш учун унинг берилган бирор чиққиқли элементининг ёрдамчи фигурата тошланган унга мос чиққиқли элементга нисбатли ўхшашлик коэффициентини сифатида қабул қилинади. Агар изланувчи фигуранинг катталигини аниқлаш учун бозор шартлар берилган бўлса, бу шартлардан ва ясаган фигура билан изланувчи фигуранинг ўхшашлигидан фойдаланиб, изланувчи фигуранинг бирор чиққиқли элементини аниқланади, сўнг унга мос бўлган элемент ёрдамчи фигурата белгиланади ва юқорида айтилган иш билан ўхшашлик коэффициентини аниқланади.

Б. Бирорли қулайроқ худда ўхшашлик маркази сифатида қабул қилинади ва ёрдамчи фигура, тошланган ўхшашлик коэффициентинида фойдаланиб, шу марказга нисбатан ўхшаш аксонтирилади (X боб).

Гомотетик аксонтиришнинг ентйлик даражаси гомотетия марказининг қарола олинганга бозорлиқли.

Тажиба шунки кўрсатадики, ўхшашлик маркази сифатида ёрдамчи фигуранинг масалани берилган чиққиқли элементига мос бўлган элементининг қулайроқ бир унги олин энг қулайдир, чунки бу худда гомотетик аксонтириш яъни осон бажарилди.

43-§. БИРИНЧИ ТИПДАГИ МАСАЛАЛАР

Гомотетия методи билан етилидиган масалаларнинг биринчи типига шакли ўхшашлиқнинг асосий атомилари билан, катталиги эса бирор чиққиқли элементини орқали аниқланувчи кўпбurchак ясаши талаб қилган масалалар қаради. Учбurchаклар ясашига донр биринчи типдаги масалалар

Белгилан. Бир учбurchакнинг шартли элементлари деб 12 та элементни асосий элементларни: бурчакларни (α, β, γ) билан аниқлашчи (a, b, c), медианларни (m_a, m_b, m_c), аксонтиришлари (d_a, d_b, d_c) ёки (d_1, d_2, d_3), икки чинидаги аксонтириш радиуслари (r), шартли шартли аниқлашчи радиуслари (R), шартли шартли аниқлашчи аксонтириш радиуслари (r_a, r_b, r_c). Чинидаги элемент сифатида учбurchакларнинг ёнги элементлари (масалан, аксонтириш, шартли шартли ва ҳокимзо) қис олинган мумкин.

1. Учбурчак ясагга доир биринчи хил масалалар.

Бундан мисалларнинг ҳаммаси 17 та бўлиб, улар берилган иккига бурчаги ва берилган битта чиққан элементни бўйича учбурчак ясаггадан иборатдир.

Бу масалаларни қисқача бундай ёниб кўриштиш мумкин:

(A, B, α) , (A, B, β) , (A, B, γ) , (A, B, k_a) , (A, B, k_b) , (A, B, k_c) ,
 (A, B, m_a) , (A, B, m_b) , (A, B, m_c) , (A, B, b_a) , (A, B, b_b) , (A, B, b_c) ,
 (A, B, b_a) , (A, B, r) , (A, B, R) , (A, B, r_a) , (A, B, r_b) , (A, B, r_c) .

Бу масалалардан баъзилари китебнинг олдиги бобларда ечилган эди. Шунинг учун булардан олдиги учасига бугундай тўхтаниб, 4, 6- масалалардан биринчи ечилишнинг кўрсатиб, қолганларини китебхонага 6- § дан ёрдамчи фигурага ишлатиб ёниб бундай мустақил ечилиш тасвир қиламиз.

(1) даги масалалардан айтилганларнинг ўхшашлик ҳолида билин ечилишнинг кўрайлик.

76- масала. A, B ва b_c бўйича учбурчак ясаг.

Анализ. Масалада берилган шартлардан A ва B бурчалар пайланивчи ABC учбурчакнинг шаклини, b_c биссектрисага эса бу учбурчакнинг катталигини аниқлайди.

Деҳақ, берилган масала қуйидаги икки ёрдамчи масалага ажраади:

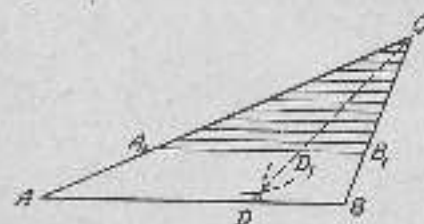
1) A ва B бурчалардан берилган ABC учбурчак ясаг.

2) ABC учбурчакга ўхшаш, унинг C учидан чиққан биссектрисасини берилган b_c кесмага тенг учбурчак ясаг.

Ясагш. A ва B бурчаларни хос равишда тенг бўлган ёрдамчи A_1CB_1 учбурчак ясаймиз (134- I чизма).

Биринчи ёрдамчи масала аниқлик масалалар. Шунинг учун бунда масаланинг учбурчак иккинчи катталиқда, яъни пайланувчи учбурчакга ўхшаш бўлади. Деҳақ, биринчи ёрдамчи масалани ечилиш билан пайланувчи учбурчакнинг аниқлигини аниқлаймиз.

Иккинчи ёрдамчи масалани ечилиш учун ясалган A_1CB_1 учбурчакни бирор нуктага нисбатан маълум коэффициент билан ўхшаш аксантирамын. Бу ишни қуйидаги бўлар билан бажариш мумкин.



134- I чизма

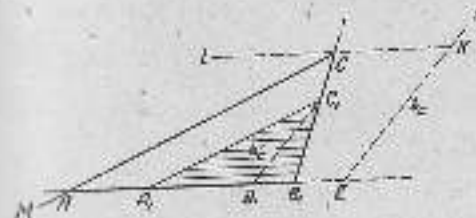
Биринчи хил аксантириш. Ясалган учбурчакга масалада берилган b_c кесмага тенг $CD_1 = b_c$ биссектриса чиқиб, унинг C учидан гомотетия маркази деб қабул қиламиз.

Мас. кесмаларнинг нисбатини, яъни $k = b_c : b_c$ ни ўхшашлик коэффициентини шифатда

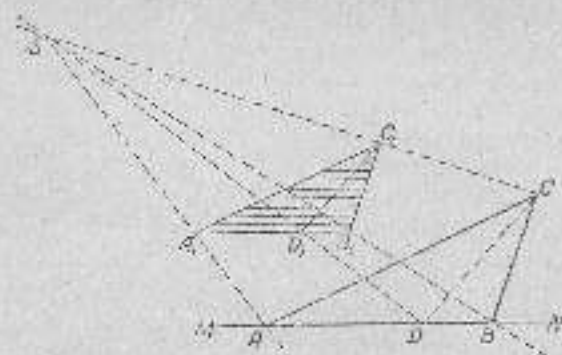
қабул қилиб, A_1CB_1 учбурчакни C марказга нисбатан k коэффициент билан аксантирамын. Бундан қуйидаги бажариш мумкин: CD_1 биссектриса устига унинг C учидан боплаб, берилган $b_c = CD$ биссектрисани қўямиз. Маркази C да жойлашган ва D_1 нуктаси D га аксантирувчи гомотетия билан керак аксантириш бўлади. D нуктадан A_1B_1 томонга параллел қилиб тўғри чизик ўтказамиз. Бу чизик ёрдамчи учбурчакнинг CA_1 ва CB_1 томонлари (ёки уларнинг давоми) билан кесилиб, A_1 ва B_1 нукталарга тенг бўлган A ва B нукталарни беради, бундан пайланувчи ABC учбурчак ҳосил бўлади.

Иккинчи хил аксантириш. 134- II чизмада ясалган ёрдамчи $A_1B_1C_1$ учбурчакдаги $C_1D_1 = b_c$ биссектрисанинг иккинчи учу бўлган D_1 нуктаси гомотетия маркази деб қабул қилиб, ёрдамчи учбурчакни шу марказга нисбатан биринчи ҳолда айтилган k коэффициент билан аксантирамын. Бу ишни қуйидаги бажариш мумкин: D_1C_1 биссектрисанинг устига унинг D_1 учидан боплаб, берилган биссектрисага тенг бўлган D_1C кесмани қўямиз. Маркази D_1 да жойлашган ва C_1 нуктаси C нуктага аксантирувчи гомотетия билан керак аксантириш бўлади. C нуктадан C_1A_1 ва C_1B_1 томонларга параллел тўғри чизиклар ўтказамиз. Бу чизиклар A_1B_1 томон (ёки унинг давоми) билан кесилиб, A ва B нукталарига тенг бўлган A ва B нукталарини ҳосил қилади. Бундан пайланувчи ABC учбурчак ҳосил бўлади.

Учинчи хил аксантириш. Энди, ёрдамчи учбурчакнинг C_1 дан бонқа бирор учини, масалак. B_1 ни гомотетия маркази деб қабул қилиб, ўхшаш аксантириш бажарайлик. Бунинг учун 134- III чизмадаги ёрдамчи $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг A_1B_1 томонига (ёки давомига) иккинчи бир E нукта олиб, ундан $(EF) \parallel (D_1C_1)$ тўғри чизик ўтказамиз. (C_1D_1) кесма C_1 бурчакнинг биссектрисасидир. Сўنгра EF тўғри чизикда $|EC| = b_c$ кесма ажратиб, (K_1) (A_1B_1) тўғри чизик ўтказамиз. K_1 тўғри чизикнинг B_1C_1 томон (ёки унинг давоми) билан кесилишувини ҳосил бўлган C нуктадан $(CM) \parallel (C_1A_1)$ тўғри чизик ўтказамиз. CM тўғри чизик



134- II чизма



134- IV чизма

B_1A_1 томон (ёки унинг давомин) билан кесилиб, A_1 га мос бўлган A нуқтаси берилади.

Натижада изланувчи AB_1C учбурчак ҳосил бўлади.

Тўртинчи хил акслантириш. Ёрдамчи $A_1B_1C_1$ учбурчакни $k = b_c : b_c'$ коэффициент билан акслантиришни яна қўйиладиганча ҳам бажариш мумкин (134- IV чизма). Текисликнинг ихтиёрий S нуқтасидан $(CS)_1$, (C_1D_1) кесма ўтказамиз. Сўнгра CC_1 ва DD_1 тўғри чизиқларни ўтказиб, уларнинг кесилиш нуқтасини $(CD) \neq (C_1D_1)$ фарз қилинади) томогетия маркази деб қабул қиламиз. D нуқтадан A_1B_1 томонга параллел қилиб MN тўғри чизиқ ўтказамиз ва уни SA_1 ва SB_1 нурлар билан кесштириб, A_1 ва B_1 нуқталарга ҳос бўлган A ва B нуқталарни топамиз. S нуқтани A ва B нуқталар билан туташтириб, изланган ABC учбурчакни ҳосил қиламиз.

Бешинчи хил акслантириш. Ёрдамчи $A_1B_1C_1$ учбурчакни ҳақияда сўғ уш ҳаёқум k коэффициент билан текисликнинг ихтиёрий S нуқтасига нисбатан акслантириб, изланувчи ABC учбурчакни топиш ҳужийи.

Бу қўйиладиганча бажарилади: S нуқтадан ва ёрдамчи учбурчакнинг бир учидан, масалан A_1 учидан SA_1 тўғри чизиқ ўтказиб, A_1 нуқтасига мос бўлган A нуқта топилади.

Бунинг учун SA кесмини маълум b_c , b_c' ва SA_1 кесмаларга тўртинчи пропорционал кесма $(|SA| = \frac{|SA_1| \cdot b_c}{b_c'})$ сифатида то-

пиб, уни SA_1 нурса S нуқтадан боплаб қўйилади; сўнгра нурлар ва параллеллар ўтказиб орқала учбурчакнинг B ва C учлари топилади. Бундан ABC учбурчак ҳосил бўлади.

Исбод. Бешта бул билан топиладиган ABC учбурчак масаланинг талабига жавоб беради, чунки унинг A ва B бурчаклари асаллишига кўра, берилган икки бурчакка тенг бўлиб, унинг S учидан чиққан биссектрисаси берилган b_c кесмага тенгдир.

Исботи. Бу ерда бир масаланинг бешта турли ёшлар билан ениш мумкинлиги масоф тарихида кўрсатилади. Лекин ҳар бир масалани енишда ҳам иккиордаги акслантиришларнинг дахласига тўхтас ўтириш шарт эмас.

78- масала. A, C ва R бўйича учбурчак ҳосил.

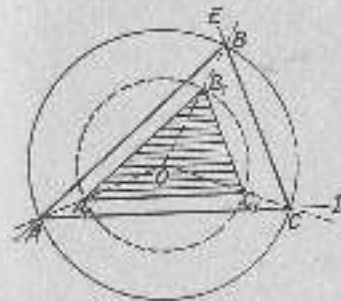
Масаланинг аналитик ечинти масаладаги каби бажарилади. Шунинг учун фақат масаланинг тўхтайми.

Берилган икки бурчакни бўйича ихтиёрий катталикдаги ёрдамчи $A_1B_1C_1$ учбурчак ҳосил (135- I чизма), бу учбурчакка ташқи чизилган айлананинг O маркази ва $R_1 = OA_1$ радиуси топилади.

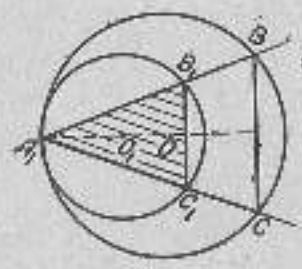
Сўнгра ёрдамчи учбурчакни $k = R : R_1$ коэффициент билан бирор қулайроқ нуқтага нисбатан акслантириб, изланган учбурчак топилади. Бу акслантиришни қўйиладиганча бажариш мумкин.

Биринчи хил акслантириш. Гомотетия маркази сифатида ташқи чизилган айлананинг O марказини қабул қилиб, OA_1 радиус устига $|OA| = R$ кесма қўйилади. A нуқта изланган учбурчакнинг бир уч бўлади. Учбурчакнинг қолган учларини топиш учун $(AD) \parallel (A_1C_1)$ тўғри чизиқ ўтказиб, уни OC_1 нур билан кесилиш нуқти давом эттирилади. Бундан C_1 нуқтасига мос бўлган C нуқта ҳосил бўлади. Сўнгра $(CE) \parallel (C_1B_1)$ тўғри чизиқ ўтказилиб, унинг OB нур билан кесилиш нуқтаси сифатида учбурчакнинг B уч топилади (A, B ва C нуқталарни бошқача йўл билан топиш ҳам мумкин; O марказдан берилган R радиус билан чизилган айлана OA_1 , OB_1 ва OC_1 нурлар билан кесилиштирилади). Топилган уччала нуқтани туташтириб натижада ABC учбурчак ҳосил бўлади.

Иккинчи хил акслантириш. Ёрдамчи $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг бир учини, масалан, A_1 учини гомотетия маркази деб қабул қилиб, бу учбурчакка ташқи чизилган O_1 марказли айлананинг A_1O_1 радиуси устига $A_1O = R$ кесмени қўйамиз. Сўнгра O нуқтадан R радиус билан айлана чизиб, уни A_1B_1 ва A_1C_1 томонлар (ёки давомлари) билан кесилиштирамиз (135- II чизма). Бундан ҳосил бўлган B ва C нуқталарни ўзаро туташтириб, A_1BC учбурчакка эга бўламиз.



135- I чизма



135- II чизма

Учинчи хил акслантириш. Мазлун R ба R_1 кесмалар бигэн ёрдамчи учбурчакниг бирор чизикли элементига, масала, a_1 томонига пропорционал бўлган тўртинчи a кесмани

$$\frac{R}{R_1} = \frac{a}{a_1}$$

пропорционал мазлун йўл билан тошиб, сўнгга ёрдамчи учбурчакни ихтиёрий S нуқтага нисбатан гомотетик акслантириш орқали ABC учбурчакни ҳосил қилиш ҳуқуқи (буқдан олдинги масаладаги бепишчи хил акслантиришга қараи).

Эҳлатига. Қўйқил масалада гомотетик методидиқ фойдаланхасдан ҳам ечиш мумкин (III боб).

2. Учбурчак ясаишга доир биринчи типдаги иккинчи хил масалалар.

Бу хил масалаларга икки томоннинг нисбати, бу томонлар орасидаги бурчаги ва бирор асосий чизикли элементи бўйича учбурчак ясаиш талаб қилинган масалалар кирати.

79- масала. Икки томоннинг нисбати, улар орасидаги бурчаги ва икки чизилган айланасининг радиуси берилган учбурчак ясаиш.

Анализ. Масалада сўралган учбурчакниг шакли унинг икки томонининг берилган нисбати ва у томонлар орасидаги бурчаги билан, қатталиги эса икки чизилган айланасининг берилган радиуси орқали аниқланади. Демак, бу масала қўйқилги икки ёрдамчи масалага ажралади:

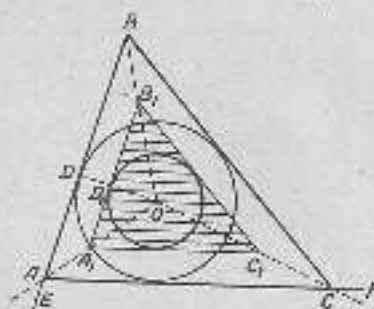
1) икки томонининг нисбати, шу томонлар орасидаги бурчаги бўйича учбурчак ясаиш;

2) топилган учбурчакка ўхшаш шундай учбурчак ясаиш, у мазлун радиусли айланага ташқи чизилган бўлсин.

Ясаиш. Агар берилган нисбатнинг m ва n ҳадлари сонлар бўлса, бирор ихтиёрий q кесма олиб, mq ва nq кесмаларни тонамиз ва бу кесмаларни берилган $\angle A$ га тенг бўлган A_1 бурчакнинг томонларига унинг A_1 учидан бошлэб қўямиз, $|A_1C_1| = mq$ ва $|A_1B_1| = nq$ бўлсин (136- чизма).

Бундаги B_1 ва C_1 нуқталарни ўзаро туташтиришдан ёрдамчи $A_1B_1C_1$ учбурчак ҳосил бўлади. Бу учбурчак мазлун учбурчакнинг шаклига аниқсайди.

Ёрдамчи учбурчакдан айланишни учбурчакка ўткин учун $A_1B_1C_1$ учбурчакка икки чизилган айлана ясаб, бу айлана маркази- лан $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг бир томонига, масалан A_1B_1 томонига OD_1 перпендикуляр ўтказамиз. Бундан масалада берилган r радиусга мос бўлган r радиус ҳосил бўлади. Ёрдамчи учбурчакни



136- чизма.

$k = r_1/r$, коэффициент бўйича қўйқилроқ лўқтага нисбатан акслантиришдан нхланган ABC учбурчак ҳосил бўлади. Бу акслантиришлардан эиғ солласини кўриб ўсалик.

Гомотетия маркази учун $A_1B_1C_1$ учбурчакка икки чизилган айлананиг O марказиди олиб, OD_1 радиус устиги берилган $OD = r$ радиусни қўямиз, D нуқтадан $(DE) \parallel (A_1B_1)$ тўғри чизик ўтказиб, уни OA_1 ва OB_1 нуралар билан кесштирамиз. Бундан A_1 ва B_1 нуқталарга мос бўлган A ва B нуқталар ҳосил бўлади. Сўнгга $(AF) \parallel (A_1C_1)$ тўғри чизик ўтказиб, уни OC_1 нур билан бирор C нуқтада кесштирамиз, B ва C нуқталарни туташтиришдан нхланган ABC учбурчак ҳосил бўлади. $[AF]$ тўғри чизикни A нуқтадан (O, r) айланага уринма сифатида чизик ҳам мумкин.]

Толшириқлар

I. $A_1B_1C_1$ учбурчакни два бопча нуқталарга нисбатан ҳам акслантириб, нхланган ABC учбурчакни топим.

II. Тошланган учбурчакнинг ҳасала талабига янаб ёриниш нисбати қилиш.

Вх ҳасалави гомотетия марказиди фойдаланхасдан ҳам ечиш мумкинми?

III- Икки томонининг нисбати, бу томонлар орасидаги бурчаги ва ташқи чизилган айланасининг радиуси берилган учбурчак ясаиш.

3. Учбурчак ясаишга доир биринчи типдаги учинчи хил масалалар.

Шакли учта томонининг берилган нисбатлари орқали, қатталиги эса асосий чизикли элементларидан бири орқали аниқланувчи учбурчак ясаиш талаб қилиган масалалар — учбурчак ясаишга доир биринчи типдаги масалаларнинг учинчи хилини ташқил қилади.

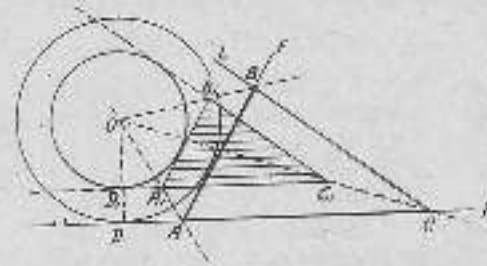
80- масала. Учта томонининг нисбатлари ва ташқи-икки чизилган айланасининг радиуси берилган учбурчак ясаиш.

Анализ. Бу масалада ечиш қўйқилги икки ёрдамчи масалади етишдан иборат бўлади:

1) учта томонининг нисбатлари бўйича учбурчак ясаиш;

2) учбурчакка ташқи-икки чизилган айлана радиуси берилган радиусга тенг ва топилган учбурчакка ўхшаш учбурчак ясаиш.

Ясаиш. Берилган нисбатларнинг ҳадлари m , n , p сонлар ва r берилган бўлсин; ихтиёрий q кесма олиб mq , nq , pq кесмалар тошлади ва томонлари шу учале кесмага тенг бўлган $A_1B_1C_1$ учбурчак ясаиш (137- чизма).



137- чизма.

Ёрдамчи масалаларнинг иккинчисини етиш учун аввал топилган ёрдамчи учбурчакка мох равида ташқи-ички чизилган айлана чизиб олинлади (бунинг учун учбурчакнинг A , ва B , учларидagi иккита ташқи бурчаги биссектрисаларининг кесиниган O нуқтасидан $(OD_1) \perp (A_1C_1)$ радиус билан айлана чизилади). Сўнгра ёрдамчи учбурчакни маълум $k = r_1 : r_2$ коэффициент билан бирор қудайроқ нуқтага нисбатан ўхшати аксантирилади. Чизилган ёрдамчи айлананинг O марказини ўхшашлик маркази деб олиб, ёрдамчи учбурчакни аксантирайлик:

$OD_1 = r_1$ радиусининг ўстига берилган $OD = r_2$ радиусни қўйиб, D нуқтадан $(DE) \parallel (A_1C_1)$ тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу чизикнинг OA_1 ва OC_1 нуқталар билан кесинган A ва C нуқталари изланган учбурчакнинг икки учи бўлади. A нуқтадан $(AF) \parallel (A_1B_1)$ ёки C нуқтадан $(CI) \parallel (C_1B_1)$ тўғри чизиқ ўтказиб, унинг OB , нуқ билан кесинган B нуқтасини топамиз. ABC учбурчак изланувчи учбурчак бўлади.

Толшириқлар

I. Берилган нисбатнинг ҳадлари кесмалар орқали берилган ҳолда 80-масала учун ёрдамчи учбурчак қандай ясалди?

II. Ёрдамчи $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг бирорта учини ўхшашлик маркази деб қабул қилиб, бу масалани (тўртинчи пропорционал кесма топниш орқали) етиш.

III. Топилган учбурчакнинг масала талабларига жавоб беришнинг исбот қилини.

IV. Унга томонининг нисбатлари ва бир меҳнависин берилган учбурчак ясаи.

4. Учбурчаклар ясашга доир биринчи тилдаги тўртинчи хил масалалар.

Шакли икки томонининг нисбати ва бу томонлардан каттаси қаршисидagi бурчаги орқали, катталиги эса чизилган элементларидан бири орқали аниқланалган учбурчаклар ясашни талаб қилган масалалар биринчи тилдаги тўртинчи хил масалаларни ташқил қилади.

81- масала. Икки томониканга нисбати, улардан каттаси қаршисидagi бурчаги ва ташқи чизилган айлананинг радиуси берилган учбурчак ясаи.

$b : c = m : n$ $\angle 1 : \angle C$ ва R кесма берилган.

Анализ. Берилган масала қуйидаги икки ёрдамчи масалага ажратиб ечилади:

1) Икки томонининг нисбати ва шу томонлардан каттаси қаршисидagi бурчаги берилган учбурчак ясаи.

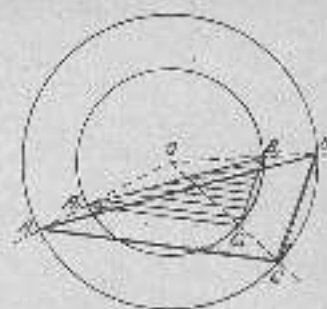
2) Топилган учбурчакка ўхшати ва ташқи чизилган айлананинг радиуси берилган кесмага тенг бўлган учбурчак ясаи.

Ясаи. Агар m, n — берилган нисбатнинг ҳадлари бўлса, ихтиёрий q кесма олиб, mq ва nq кесмаларни толамиз. Сўнгра

икки томони mq ва nq кесмалардан ва уларнинг каттаси q қаршисидagi $\angle C_1 = \angle C$ дан фойдаланиб, $A_1B_1C_1$ учбурчак ясайми. Бу учбурчак изланган учбурчакка ўхшати бўлади (138- сизма).

Иккинчи ёрдамчи масалани етиш учун аввал ёрдамчи $A_1B_1C_1$ учбурчакка ташқи айлана чизиб, унинг $|OA_1| = R_1$ радиусини белгилеймиз, сўнгра бу учбурчакни $k = R : R_1$ коэффициент билан бирор қудайроқ марказга нисбатан гомотетик аксантирайми.

Гомотетия маркази қилиб ёрдамчи учбурчакка ташқи чизилган айлананинг O марказини олсак, бу марказдан берилган R радиус билан чизилган айланани OA_1, OB_1 ва OC_1 нуқталар билан кесинтириб, улар равишда A, B ва C нуқталарни ҳосил қиламиз. $\triangle ABC$ — изланувчи учбурчак бўлади.



138- сизма

Толшириқлар

I. Топилган учбурчакнинг масала талабларига жавоб беришнинг исбот қилини.

II. Ўхшашлик маркази учун ёрдамчи учбурчакнинг учларини қабул қилиб аксантиришни баҳарини.

III. Икки томонининг нисбати, уларнинг каттаси қаршисидagi бурчаги ва ташқи-ички чизилган айланалардан биттасининг радиуси берилган учбурчак ясаи.

Парааллелограммаар ясашга доир биринчи тилдаги масалалар

Шакли икки қўшни томонининг нисбати ва бир бурчаги орқали ёки диагоналлариининг нисбати ва улар орасидagi бурчаги орқали, ёки асоси билан унга туширилган баландлигининг нисбати ва бир бурчаги орқали, катталиги эса бирор чизилган элемент орқали аниқланувчи парааллелограмм ясашни талаб қилган масалалар парааллелограмм ясашга доир масалаларнинг биринчи тилини ташқил қилади.

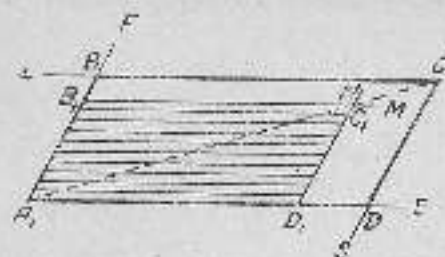
82- масала. Икки қўшни томонининг нисбати, бир бурчаги ва бир диагонали берилган парааллелограмм ясаи.

$|AD| : |AB| = m : n$ $\angle A$ ва $|AC| = l$ — диагональ берилган.

Анализ. Берилган масала қуйидаги икки ёрдамчи масалага ажратиб ечилади:

1) икки қўшни томонининг нисбати ва бир бурчаги берилган парааллелограмм ясаи;

2) дингизия берилган l кесмага тенг, топилган парааллелограммга ўхшати парааллелограмм ясаи.



139-чица.

Ясагч. Берилган A бурчакка тенг қилиб $\angle EAF$ ни ясаб (139-чица), унинг бир томониди, масалан, A_1E томониди A, D_1 нукталарни ва A_1F томониди эса A, B_1 нукталарни ажратамиз (булардан q ни ихтиёрли узулликдаги кесма деб ва берилган нисбатнинг қадларини эса m ва n саноқлар билан берилган деб фарз қилдик). Сўнгра $(B_1, M) \parallel (A_1, E)$ ва $(D_1, N) \parallel (A_1, F)$ тўғри чизиқлар ўтказиб, уларнинг кескинувида C_1 нуктага ҳосил қиламиз. Ясалганига кўра, $A_1B_1C_1D_1$ фигура — параллелограмм ва у изланувчи параллелограммига ўхшаш бўлади. Шунинг билан изланувчи параллелограммнинг шакли янқизашин деб ҳисобланади.

Ёрдамчи масалалардан иккинчисини ечиш учун топилган ёрдамчи $A_1B_1C_1D_1$ параллелограммининг l диагоналга ҳос бўлган $|A_1C_1| = l$ диагоналининг бестилаб, бу параллелограммнинг $k = l:l$ коэффициент билан қулайроқ марказга нисбатан алмаштиришга; A_1C_1 диагоналининг A_1 уқини марказ деб олиб, A_1C_1 оқс устига $[A_1C_1] = l$ кесмани ҳўлимиз. Сўнгра $CL \parallel A_1E$ ва $CS \parallel A_1F$ тўғри чизиқларни ўтказсак, уларнинг A_1E ва A_1F тўғри чизиқлар билан кескинувида ҳос равишда D ва B нукталар ҳосил бўлади. $ABCD$ — изланувчи параллелограмм бўлади.

Тоғшириқлар

- I. 139-чицадаги A_1C_1 диагоналининг C_1 уқини марказ деб олиб, қаматсиз ахсанқурилиш бажарил.
- II. Бичишнинг тўғричилигини исбот қилиш.
- III. Бўғиш C_1 нукталарни қаматсиз маркази учун қабул қилиб, қаматсиз ахсанқурилиш бажарил.
- IV*. Диктоналларнинг нисбати, улар орасидиги бурчага ва бир томон (ёки бир диагональ) бўлиш параллелограмм ясаган.
- V*. Диктоналларнинг нисбати ва экинчи чизилган виланисининг радиуси берилган қолб исбот.
- VI. Бир бурчак ва бир диагональ берилган қолб ҳосил (ўхшашлик методика жалбисисини қаматсиз).
- VII. Асоси билан уқини ўтказилган баландлигининг нисбати, бир бурчак ва бир диагональ бўлиш параллелограмм ҳосил.

44-§. ИККИНЧИ ТИПДАГИ МАСАЛАЛАР

Шакли ўхшашликнинг асосий аломатларидаки бири билан, қаматсиз эса бир лача чизиқли элементларининг берилган ахсанқурилиш билан қаматсиз орқали янқизашини фигура ясагани талаб қилган масалалар иккинчи типдаги масалаларни ташкил этади.

Бу типдаги масалаларни ечишда ишлатиладиган методларда оқини бичишнинг кўриб ўтатиш. Бу метод қувидагиларда иборати:

1. Изланувчи F фигуранинг шаклини янқизашини оқинлардан фойдаланиб, уқини ўхшаш F' ёрдамчи фигура ясаган.

2. Ясалган ёрдамчи фигурани, берилган l кесмага ҳос F' кесма томон (бунинг учун янқизашини F' кесмини ташкил этаган кесмалардан бирорчасига қолганлари янқизашини қўпилади).

Шунинг билан қайта қилиб ўтиш ҳаракати, изланувчи F фигура ёрдамчи F' фигуранига ўхшаш бўлишини учун, бу фигуралардаги ҳар қандай мўҳ чизилган элементларининг бир-бирига нисбати $|k|$ га тенгдир. Жумладан, $\frac{F'}{F} = |k|$ бўлади. Масалан, учбурчак учун $l = a + b + c$ бўлиши.

$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = |k|$ теогликлардан $a' = |k|a$, $b' = |k|b$ ва $c' = |k|c$ келиб чиқади. Бундан $F' = |k|a + |k|b + |k|c = |k|(a + b + c) = |k|l$ ҳосил бўлиб, $\frac{F'}{F} = |k|$ эканини кўришимиз.

3. Ёрдамчи фигура текислигида ихтиёрли бир M нукта олиб, уқини F' кесмага қаралсан тўғри чизиқ ўтказилган ва бу чизиққа уқини M нуктасидан боплаб, берилган l кесма қўпилади.

Сўнгра, l ва F' параллел кесмалар ҳос учларидан икки тўғри чизиқ ўтказиб, уларнинг кескинувида S нуктага ўхшашлик маркази деб қабул қилилади (бу $F' \neq l$ деб фарз қиламиз).

4. Топилган ёрдамчи фигура S марказга нисбатан $k = \frac{l}{F'}$ коэффициент билан қаматсиз ахсанқурилишда. Натижада қаматсиз фигура ҳосил бўлиши.

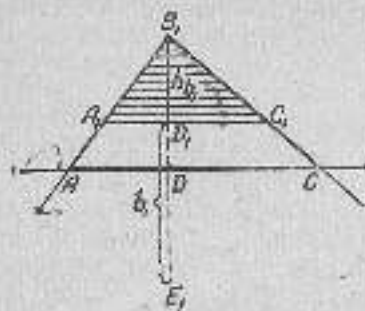
Айтилганларни қувидаги масалага ташкил қиламиз.

83- масала. Томонларининг нисбати ва бир асоси билан уқини ўтказилган баландлигининг ахсанқурилиш берилган учбурчак ясаган.

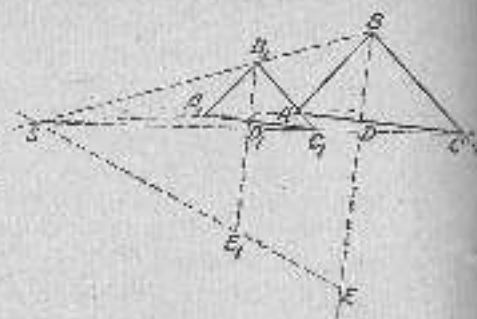
$$a:b:c = m:n:p \text{ ва } l = b + h, \text{ берилган.}$$

Ясагч. Томонларининг берилган нисбатидан фойдаланиб, ёрдамчи A, B, C учбурчак ясаб, уқини $|B_1D_1| = h$ баландлиги даромига $|D_1E_1| = |A, C_1|$ асосини қўвиш (141-4-чица). Бундан берилган чизиқли элементга ҳос бўлган $B, E_1 = l$ кесма ҳосил бўлади. Ихтиёрли B нуктадан B, E_1 кесмага параллел ва берилган l кесмага тенг қилиб BE кесма ўтказиб, B ва B_1 ҳамда E ва E_1 нукталардан тўғри чизиқлар ўтказамиз (140-II-чица), уларнинг узаро кескинувида нуктасини қаматсиз маркази деб оламиз.

Ёрдамчи учбурчакни S марказга нисбатан $k = l:l$ коэффициент билан ахсанқурилиш, изланувчи ABC учбурчакни ҳосил қиламиз.



140- I чизма



140- II чизма

Тошпириқлар

- I. Масаланинг қобат босқичини бажариш.
- II. Икки томоннинг нисбатини, улар орасидagi бурчани ва бир томони билан унга ўтказилган медиананинг йиғилган берилган учбурчак исми.
- III. Икки бурчани ва бир томони билан унга ўтказилган медиананинг нисбатини берилган учбурчак исми.
- IV. Томонларнинг нисбатлари ва перпендикуляр берилган учбурчак исми.
- V. Икки томоннинг нисбатини, шу томонлардан каттагининг қўشқондаги бурчани ва бир томонига ўтказилган медианани билан баъзиларнинг айирмаси берилган учбурчак исми.
- VI. Икки томоннинг нисбатини, шу томонлардан каттагининг қўшқондаги бурчани ва иккинчи чизилган айланни билан ўтказилган айланни радиусларининг айирмаси берилган учбурчак исми.

43- §. УЧИНЧИ ТИПДАГИ МАСАЛАЛАР

Берилган фигурага икки ёки учта чизилган фигуралар янгили талаб этган масалалар — гомотетия масаласи билан ечилишган масалаларнинг учинчи типини ташкил қилади.

Бундай масалаларда сўралган фигуранинг шакли берилган шартлар билан, унинг катталиги эса берилган фигуранинг катталиги ва шакли билан аниқланади. Бу типдаги масалаларни ечишда ҳам (олдинги типлардаги сингари), берилган шартлардан бирини ҳисобга олмай, изашкувчи фигурага ўхшаш ёрдамчи фигурани топиб, сўнгги учта сўралган фигурага ўтқизиш. Бу нин қуйидаги тартибда бажарилади:

1. Масала ечимиди деб фарз қилиб, изашкувчи F фигура тахминан чиқиб қўйилади.

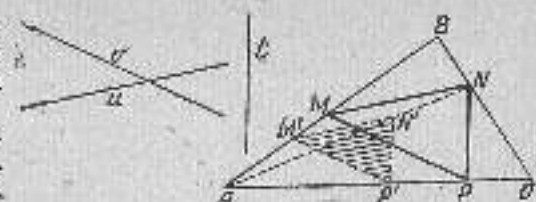
2. Бу тахминий фигура бирорчи қулайроқ нуқтага нисбатини ихтиёрый $k \neq 0$ коэффициент билан гомотетик акалантирилади. Буанд сўралган фигурага ўхшаш бўлган янги бир F' фигура ҳосил бўлади.

3. Ҳосил бўлган F' фигуранинг ёрдамчи фигура бўли олиш нисбат қилинади. Буша доир нисолларни:

- a) учбурчакка икки чизилган фигуралар янги ва
- b) доира бўлаклариға икки чизилган масалалар шаклида фигуралар ҳосилдан иборат икки турга ажратиш қўздан келтиради.

1. Учбурчакка икки чизилган фигуралар ҳосилга доир масалалар.

84- масала. Берилган учбурчакка томонлари берилган бўлаклариға шартлар билан икки учбурчак қилин.



141- чизма

$\triangle ABC$ ва бир-бирига параллел бўлган m, n, l тўғри чиқиллар берилган.

Анализ. I. Изашкувчи учбурчак 141- чизмадаги MNP учбурчак деб фарз қилайлик.

II. Берилган учбурчакнинг бирор учини, масалан, A учини гомотетия маркази деб қабул қилиб, ихтиёрый $k \neq 0$ коэффициент билан MNP учбурчакни акалантирсак, унга мос бўлган $M'N'P'$ учбурчак ҳосил бўлади. Кейинги учбурчак масалани берилган шартлардан бирига жавоб берхайд (унинг A' учини BC кесматга ётхайд).

III. $M'N'P'$ учбурчакнинг ёрдамчи фигура бўли олишнинг қобат қилайлик:

A. $M'N'P'$ учбурчакни берилган шартлардан фойдаланиб янгиш мумкин. M' нуқта учун берилган учбурчакнинг AB томондаги ихтиёрый нуқтаи олиш мумкин. $M'N'P'$ учбурчак томонларининг бўлаклариға эса қуйидагича топхайд:

Масаланинг шартини кўра, $(MB) \parallel m, (MP) \parallel n, (PN) \parallel l$ эди. Янгишмиз бўйича $(M'N') \parallel (MN); (M'P') \parallel (MP)$ ва $(P'N') \parallel (PN)$ бўлади.

Шунинг учун $(M'N') \parallel m, (M'P') \parallel n$ ва $(P'N') \parallel l$.

Шундай қилиб, AB кесматининг ихтиёрый M' нуқтаидан $(M'P') \parallel n$ тўғри чиқил ўтхайд, унинг AC кесмат билан қесипувида ҳосил бўлган P' нуқтадан $(P'N') \parallel l$ тўғри чиқил ўтхайд. M' нуқтадан $(M'N') \parallel m$ тўғри чиқил ўтхайд. Бундан $M'N'P'$ учбурчак ҳосил бўлади.

B. Кейинги йўл билан ҳосилган $M'N'P'$ учбурчакдан сўралган MNP учбурчакга ўтиш мумкинлигини аниқлаймиз; бунинг учун аниқ MNP учбурчакнинг бир учини, масалан, N учини топиш керик. N нуқта қуйидаги қуйидаги икки ҳосил билан аниқланади: N нуқта N' нуқтадан A марказга нисбатини турой $k > 0$ коэффициентлар билан тоналган образларининг геометрик ўрни бўлган AN' нуқта ётади, иккинчи тоналдан, N нуқта BC кесматга мос бўлган $B'C'$ кесматга ётхайд, унинг N нуқта $[BC]$ га ҳам тегишхайд. Демак, изашкувчи N нуқта AN' нуқта билан BC кесматга қесипуш нуқтаи бўлади.

Топхайд N нуқта ёрдамчи қуйидаги кесматларни қилимиз:

$$(AN) \parallel (AN') \text{ ва } (NP) \parallel (N'P').$$

NM ва NP тўғри чизикларнинг мос равишда AB ва AC томонлар билан кесилишувидан M ва P нуқталар, шунингдек иланивчи MNP учбурчак ҳосил бўлади.

Демак, $M'N'P'$ учбурчак ёрдамчи фигура бўлади.

Тоғшариқлар

1. Анализили A ва B бандларида айтилганлардан фойдаланиб, MNP учбурчак ҳосил.

II. Масалани тасвирлаб, унинг ечимини баъзи хосликлар билан тасвирлаб.

85- масала. Берилган учбурчакка бир учи берилган учбурчак томонидagi маълум нуқтада ётиб, бу учидagi бурчаги берилган бурчакка тенг ва шу бурчак қаршисидagi томони берилган бўлганда бўлган икки учбурчак чизилг.

$\triangle ABC$; BC томонининг N нуқтаси; $MNP = \alpha$ ва t тўғри чизик берилган.

Анализ. I. Иланивчи учбурчак 142- чизмадаги MNP учбурчак бўлсин.

II. Берилган ABC учбурчакнинг A учини гомотетия маркази деб олиб, ихтиёрий $k > 0$ коэффициент бўйича ABC ва MNP учбурчакларини аксантириб, уларга мос бўлган $AB'C'$ ва $M'N'P'$ учбурчакларини ҳосил қиламиз. Кейинги учбурчак масала шартларидан бирита жавоб бермайди (яъни унинг N' учи BC томонда бўлмайди).

III. $M'N'P'$ учбурчакнинг ёрдамчи фигура бўла оlishини исбот қиламиз.

A. Масалада берилганлардан $M'N'P'$ учбурчакни ясаи мумкин, чунки: $(M'P') \parallel (MP)$ ва $M'N'P' = MNP = \alpha$ маълум.

Шунинг учун AB томонининг ихтиёрий M' нуқтасидан $(M'P') \parallel t$ ни ўтказиб, берилган α бурчакни сисдирувчи ва ёни $M'P'$ кесма билан тортилиб турувчи $M'N'I'$ сегментни ясаймиз. Бу ёрнинг маълум AN тўғри чизик билан кесилган N' нуқтаси $M'N'I'$ учбурчакнинг иланивчи учи бўлади. Тоғшарган N' нуқтаси M' ва P' нуқталар билан туташтириб, $M'N'P'$ учбурчакни ҳосил қиламиз.

B. $M'N'P'$ учбурчакдан иланивчи MNP учбурчакка ўтиш мумкин; бунинг учун берилган N нуқтада қуйидаги тўғри чизикларни ўтказамиз:

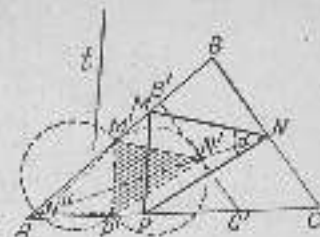
$$(NM) \parallel (N'M') \text{ ва } (NP) \parallel (N'P').$$

NM ва NP нинг мос равишда AB ва AC томонлар билан кесилишувидан ҳосил бўлган M ва P нуқталарни туташтириб, иланивчи MNP учбурчакка эга бўламиз.

Демак, $M'N'P'$ учбурчак ёрдамчи фигура бўла олар экан.

Тоғшариқлар

I. Маълумки, берилган α бурчакни сисдирувчи ва ёни $M'P'$ кесма билан тортилиб турувчи $M'N'I'$ сегментдан бошқа $M'P'$ кесмага ишбатан симметрик бўлган яна бир $M'N'P'$ сегмент ҳам мавжуддир. Шу яна бир N' нуқтадан A нуқта билан кесилган N' нуқтасини M' ва P' нуқталар билан туташтиришдан ҳосил бўлган $M'N'P'$ учбурчакнинг ёрдамчи фигура бўлиши ёки бўлишмаслигини текшириш (142- чизма).



142- чизма

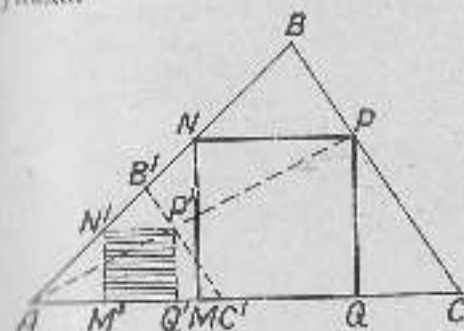
86- масала. Берилган учбурчакка икки учи учбурчакнинг яна бир (ёки унинг базомиди), қолган икки учи учбурчакнинг ёни томонларида ётган икки иланивган квадрат ясалг.

Анализ. Берилган ABC учбурчакка икки чизилган квадрат 143- I чизмадаги $MNPQ$ деб фарз қилайлик.

Берилган учбурчакнинг бирор учини, масалан, A учини гомотетия маркази деб олиб, ихтиёрий $k > 0$ коэффициент бўйича бу квадратни гомотетия аксантирайлик. Бундан $M'N'P'Q'$ квадрат ҳосил бўлади, бу квадрат масала шартларидан бирита жавоб бермайди.

Кейинги квадратининг ёрдамчи фигура бўла оlishини аниқлаймиз.

A. Бу квадратни иланивган $MNPQ$ квадратнинг ёрдамчи ясаи мумкин. Берилган учбурчакнинг AB томониди (ёки унинг базомиди) ихтиёрий N' нуқта олиб, ундан AC га $A'M'$ перпендикуляр ўтказамиз; бу перпендикулярнинг (AC) даги асоси M' нуқта бўлсин. Шунга, AC бўйича $(M'Q') = (M'N')$ ни қўйиб, $(Q'P') \perp (AC)$ ни қиламиз, $(N'P') \parallel (AC)$ ни ҳам ўтказамиз; бундан ҳосил бўлган $M'N'P'Q'$ тўртбурчак — квадрат бўлади.



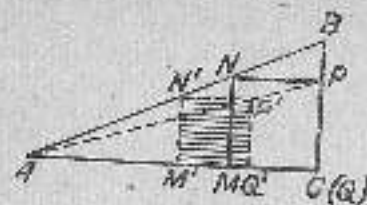
143- I чизма

B. $M'N'P'Q'$ квадратдан иланивчи $MNPQ$ квадратга ўтиш мумкин. Бунинг учун асосий иланивчи квадратининг P учини тоғшарамиз.

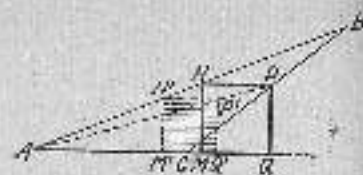
P нуқтада тоғшарган учини қуйидаги икки ҳосилдан фойдаланамиз; P нуқта AP' тўғри чизикда ва (BC) да ётади.

Демак, маълум AP' нур билан берилган BC

¹ Қозғалувчи бу жумла ёрдамчи учбурчакка икки чизилган квадрат (ёки, умуман, тўртбурчак) деган жумладан иланилади.



143- II чизма



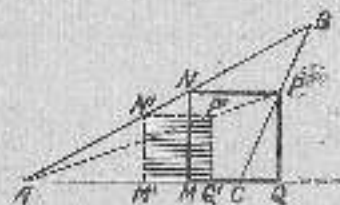
143- III чизма

кесмининг кесмишига нўқтаси пазанаси P' нўқта бўлади. Маркази A нўқтага бўлган ва P' нўқтага P га эллиптирувчи гомотетияни $M'N'P'Q'$ таъриф қиламиз, келинмиш $MNPQ$ квадрат ҳосил бўлади.

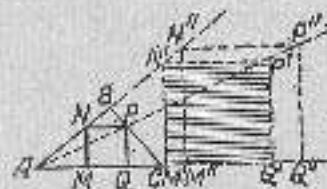
$M'N'P'Q'$ квадрат ёрдамида фигура буца олар экан.

Иккинчи. Берилган учбурчакнинг AB томонида иккинчи N' нўқта олиб, ундан AC га $(N'M')$ перпендикуляр ўтказамиз. M' нўқтадан AC йўлини юзла $M'Q' - M'N'$ кесмини қўлиб, (AC) га $Q'P'$ перпендикуляр чиқарамиз. Сўнгги N' нўқтадан $(N'P')$ (AC) га ўтказамиз.

Бундан $M'N'P'Q'$ ёрдамида квадрат ҳосил бўлади.



143- IV чизма



143- V чизма

III. Берилган учбурчакнинг A нўқтадан AP' нўқтига, ундан учбурчакнинг BC томони билан бирини P' нўқтада кесиптира- миз. Бу нўқта сўралган квадратнинг бир усти бўлади.

IV. Маркази A нўқтага бўлган ва P' нўқтага P га эллиптирувчи гомотетияни $M'N'P'Q'$ квадратга таъриф қиламиз, келинмиш $MNPQ$ квадратни ҳосил қиламиз.

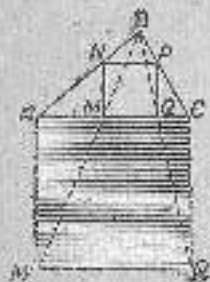
Янадан $M'N'P'Q'$ квадрат масаланинг ҳаққа шарҳларини қароқтайтиради.

Толшириқлар

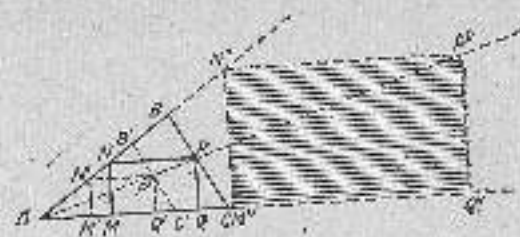
I. Масаланинг таърифидан, ҳосил қилинган квадратнинг AB томонида иккинчи N' нўқта олиб, ундан AC га $(N'M')$ перпендикуляр ўтказамиз. M' нўқтадан AC йўлини юзла $M'Q' - M'N'$ кесмини қўлиб, (AC) га $Q'P'$ перпендикуляр чиқарамиз. Сўнгги N' нўқтадан $(N'P')$ (AC) га ўтказамиз.

II. Берилган учбурчакнинг A нўқтадан AP' нўқтига, ундан учбурчакнинг BC томони билан бирини P' нўқтада кесиптира- миз. Бу нўқта сўралган квадратнинг бир усти бўлади.

III. Берилган учбурчакнинг A нўқтадан AP' нўқтига, ундан учбурчакнинг BC томони билан бирини P' нўқтада кесиптира- миз. Бу нўқта сўралган квадратнинг бир усти бўлади.



143- VI чизма



144- чизма

IV. Гомотетия маркази A нўқтада иккинчи N' нўқта олиб, ундан AC га $(N'M')$ перпендикуляр ўтказамиз. M' нўқтадан AC йўлини юзла $M'Q' - M'N'$ кесмини қўлиб, (AC) га $Q'P'$ перпендикуляр чиқарамиз. Сўнгги N' нўқтадан $(N'P')$ (AC) га ўтказамиз.

V. Берилган учбурчакнинг A нўқтадан AP' нўқтига, ундан учбурчакнинг BC томони билан бирини P' нўқтада кесиптира- миз. Бу нўқта сўралган квадратнинг бир усти бўлади.

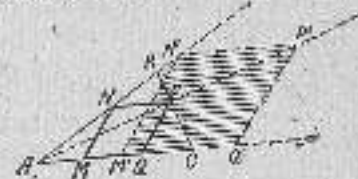
VI. Берилган учбурчакнинг A нўқтадан AP' нўқтига, ундан учбурчакнинг BC томони билан бирини P' нўқтада кесиптира- миз. Бу нўқта сўралган квадратнинг бир усти бўлади.

VII. Берилган учбурчакнинг A нўқтадан AP' нўқтига, ундан учбурчакнинг BC томони билан бирини P' нўқтада кесиптира- миз. Бу нўқта сўралган квадратнинг бир усти бўлади.

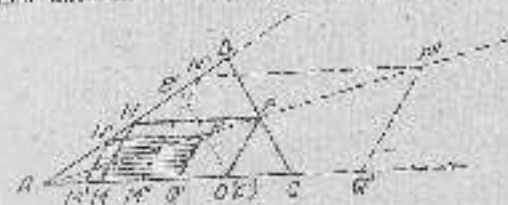
VIII. Берилган учбурчакнинг A нўқтадан AP' нўқтига, ундан учбурчакнинг BC томони билан бирини P' нўқтада кесиптира- миз. Бу нўқта сўралган квадратнинг бир усти бўлади.

IX. Берилган учбурчакнинг A нўқтадан AP' нўқтига, ундан учбурчакнинг BC томони билан бирини P' нўқтада кесиптира- миз. Бу нўқта сўралган квадратнинг бир усти бўлади.

X. Берилган учбурчакнинг A нўқтадан AP' нўқтига, ундан учбурчакнинг BC томони билан бирини P' нўқтада кесиптира- миз. Бу нўқта сўралган квадратнинг бир усти бўлади.



145- чизма

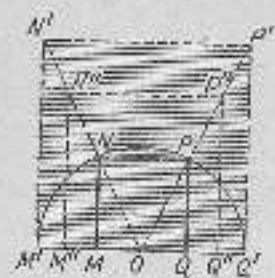


146- чизма

VIII. Берилган учбурчакнинг A нўқтадан AP' нўқтига, ундан учбурчакнинг BC томони билан бирини P' нўқтада кесиптира- миз. Бу нўқта сўралган квадратнинг бир усти бўлади.



147- чизма



145-чизма.

2. Доҳри бўлакларига тўқчи хизилган фигуралар янада доҳри масалалар.

87-масала. Ярим доҳрига ички чизилган квадрат ҳисоб.

Тўқчи бўлаклар билан ички нумуни бўлаган бу масаланинг томоҳетик жетоди билан ечилишиги кўрилади.

Анализ. I. Изланувчи квадрат 148-чизмадаги $[M'Q']$ диаметрли ярим доҳрига ички чизилган $MNPQ$ деб фарз қилайлик.

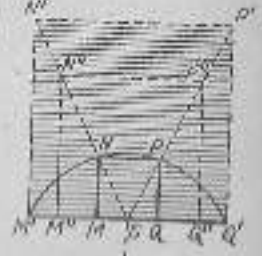
II. $MNPQ$ квадратни берилган ярим доҳранинг O марказига нисбатан $k = \frac{|M'Q'|}{|MQ|}$ коэффициент билан ясалтириб, $M'N'P'Q'$ квадратни ҳосил қиламиз (ўхшашлик коэффициенти учун бишқа сонни олиш ҳам мумкин). Бу $M'Q'$ кесилган ясалган квадрат бўлади.

III. $M'N'P'Q'$ квадрат берилган ярим доҳрига ясалган $MNPQ$ квадрат ёрдамида фигура бўлади.

A. $M'N'P'Q'$ квадрат ёрдамида фигура бўлади.

B. $M'Q'$ диаметр ёрдами билан ясалган $M'N'P'Q'$ квадратдан изланувчи $MNPQ$ квадратга ўтиш мумкин. Бунинг учун янада сўралган квадратнинг N ва P ушладини тилишга керак. N нукта OA' нурда ётади. Иккинчи томонда (масаланинг талабига кўра). N нукта берилган ярим доҳранинг ёнда ёниши керак. Шунинг учун, y , OA' нур билан ёлниш кесилиш нуктаси бўлади. Шунга ўхшаш, P нукта OB' нур билан ярим доҳри ёндаги кесилиш нуктаси бўлади.

Шу йўл билан топилад N ва P нукталардан (NM) ва (MP) ва (NP) кесилган, изланувчи $MNPQ$ квадрат ҳосил бўлади.



148-чизма

A. Берилган масалаларга ясалган $M'N'P'Q'$ квадратни ясал мумкин.

B. $M'Q'$ ватар ёрдами билан ясалган $M'N'P'Q'$ квадратдан изланувчи $MNPQ$ квадратга ўтиш ҳам мумкин. Бунинг олдинги масаладаги кўчи ясалган мумкин.

Янаш I. Берилган сегментнинг $M'Q'$ ватарига $M'N'P'Q'$ квадрат ясалми (бу квадрат ватардан сегмент томонида жойлашиши керак).

II. Ясалган квадратнинг N' ва P' ушларини томоҳетик маркази бўлган S нукта билан тутатиришим.

III. SN' ва SP' нурларини сегмент ёнда билан кесилувида нур равнотда N ва P нукталар ҳосил бўлади. S марказга нисбатан N' нуктаги N га (ёки P' ни P га) ясалтирувчи томоҳетик $M'N'P'Q'$ квадратга татбиқ этсан, изланган $MNPQ$ квадрат ҳосил бўлади.

Эҳтимо. Бизнинг квадрат сифатларига уш S нуктадан тегс ушладини $M'Q'$ кесилган ясалган $M'N'P'Q'$ квадратни ясалтириш ҳам мумкин (буларни масаласга қаран).

48-§ ТўRTINЧИ ТИПДАГИ МАСАЛАЛАР

Масалалар таъабларга жавоб берувчи кесувчилар топиши талаб қилган масалалар тўртинчи типдаги масалаларни таъкил қилади. Бундай масалаларни ечишда қуйидаги йўлни яллатиш мумкин:

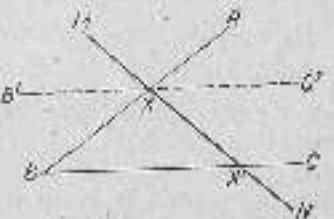
I. Изланувчи кесувчи тилишга деб фарз қилиб, уни таъкидан қилиб қўйилади.

II. Таъкидий чизилган кесувчининг масалада берилган фигура билан кесилган нукталардан бирининг ёрдамида фигура бўлишини исбот қилилади. Агар буни исбот қилиб бўлмаса, у нукталар уриниш. ёрдамида фигура бўла оладиган бишқа нукталар қилинади.

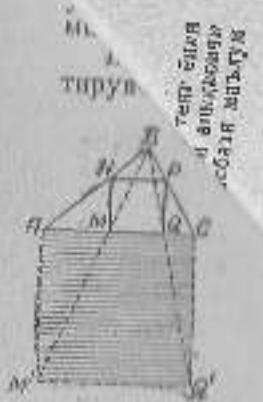
III. Ёрдамида фигуранинг исбот қилинган нукта ёрдамида изланган кесувчи чизилади.

89-масала. Берилган нуктадан нурдаги кесувчи ўзига ўзининг, унинг бу нуктадан берилган бурмас томонларига бўлган кесилган масалани таъкидан ясалган бўлади.

Анализ. I. Изланувчи кесувчи 149-чизмадаги MM' сўри чизилган берилган бурмас томонлар билан кесилувида ҳосил бўлган нукталар X ва X' бўлади. Бу фарзга билан X ва X' нукталар масаланинг қуйидаги талабига жавоб бериши:



149-чизма



143- VI чизма

147-чизма

$$\frac{|MX|}{|MX'|} = \frac{\pi}{\alpha} \quad (1)$$

II. Чизмадаги X ёки X' нуқтанинг ёрдамида фигура бўла олишнинг исбот қиламиз:

A. Бу нуқталардан бириш, масалан, X нуқтага берилганлар ёрдамида топниш мумкинлигини исбот қиламиз; бу ишни бажаришда M, X, X' нуқталарнинг қуйидаги хоссасларига таянамиз:

- M, X, X' нуқталар бир MN түгди чизикда ётади;
- X ва X' нуқталардан берилган нуқтагача масофаларининг нисбати (1) маълум. Шунга биноян, қуйидаги муносабат ҳам маълум бўлади:

$$|MX| = -\frac{\pi}{\alpha} |MX'| - k - |MX'|;$$

а) агар берилган нуқта бурчакнинг ички соҳасида ётса, $\frac{\pi}{\alpha}$ нисбатни манфий ҳисоблаймиз; агар бурчакдан ташқарида ётса мусбат ҳисоблаймиз.

Даслаб масалани M нуқта берилган бурчакдан ташқарида ётган ҳол учун ечамиз. Бу ҳолда $k = \frac{\pi}{\alpha}$ мусбат бўлади.

Бу уч хоссанинг мавжудлиги X нуқтанинг X' нуқтага M марказга нисбатан $k = \frac{\pi}{\alpha}$ коэффициент бўйича тўғри гомите-тик мос эканлини кўрсатади.

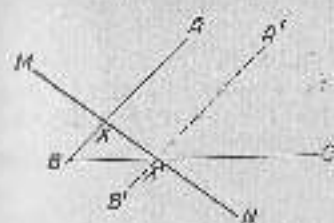
X ва X' нуқталарнинг қуйидаги хоссасига ҳам эътибор қилайлик; X' нуқта $[BC]$ да ётгани учун унга гомителик бўлган X нуқта $[BC]$ га гомителик бўлган $[B'C']$ да ётади. Демак, изланган X нуқта BC га гомителик бўлган $B'C'$ түгди чизик бўлади (AB) нинг кесилиши нуқтада бўлади.

II. Кейинги усул билан топилган X нуқта ёрдамида изла-нувчи кесувчини топниш мумкин; берилган M нуқтадан X нуқта орқали MN нур ўтказамиз.

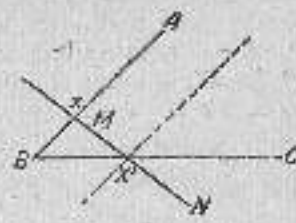
Эслатма. 150-II чизма $\frac{\pi}{\alpha} < 1$ бўлган ҳолга тегишлидир. Агар $\frac{\pi}{\alpha} > 1$ бўлса, бурчак томонларининг роллари ўзгаради.

Янаш. I. Берилган бурчакнинг BC томонини берилган M нуқтага нисбатан $k = \frac{\pi}{\alpha}$ коэффициент бўйича аксантири-миз, буқдан $(B'C') \parallel (BC)$ түгди лозим ҳолат бўлади (153-I чизма).

II. Топилган $B'C'$ түгди чизикнинг AB томон билан кеси-шувида ҳисил бўлган X нуқта изланувчи кесувчининг бир нуқтада бўлиб, MXN — изланувчи кесувчи бўлади.



150-II чизма



150-III чизма

Топшириқлар

I. Топилган кесувчининг масала талабига жавоб бери олишнинг исбот қилиш.

II. Берилган бурчакнинг AB томонини гомителик аксантириш орқали X нуқтага топниб, изланувчи кесувчини чизамиз (150-II чизма).

III. Берилган M нуқтадан бурчакнинг ички соҳасида олиб, масала ечилиб (150-III чизма). Бу ҳолда бурчакнинг ички соҳасида

$$\frac{|MX|}{|MX'|} = -\frac{\pi}{\alpha}$$

коэффициент билан аксантиришга тўғри келади.

IV. Масаланинг ечилиши берилган бурчакнинг катталигига ва M нуқ-танинг берилган бурчакнинг унча ва томонларига нисбатан қандай жойла-нишига боғлиқ эканлигига варади.

V. Берилган нисбатнинг қўйидаги қоидаларга таянб қилиб ва M нуқтага шў соҳаларга мослаб олиб, изланувчи кесувчини чизамиз:

$$k = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{1}{2}; \frac{4}{5}; \frac{3}{2}; -2; -\frac{3}{4}; -1.$$

90- масала. Берилган бир нуқтадан чиққан учта нурга берилган иккинчи бир нуқтадан шундай кесувчи ўтказил-ган, унинг нурлар орасидаги кесмаларининг нисбати берил-ган сонга тенг бўлган.

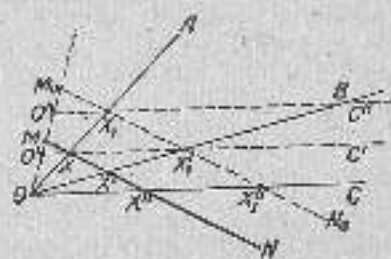
OA, OB, OC нурлар; M нуқта; $\frac{\pi}{\alpha}$ нисбат; $\angle AOC < 180^\circ$ ва $\angle AOC$ бурчакнинг ички соҳасида ётувчи OB нур берилган.

Анализ. I. Изланувчи кесувчи 151-чизмадаги MN түгди чизик бўлиб, унинг берилган OA, OB, OC нурлар билан ке-силиши нуқталарини мос ра-вишда X, X', X'' деб фарз қилайлик.

Бу ҳолда кейинги нуқта-лар масаланинг қуйидаги та-лабига жавоб беради:

$$\frac{|XX'|}{|XX''|} = \frac{\pi}{\alpha} \quad (2)$$

II. Изланувчи кесувчининг аниқлаш X, X', X''



151-чизма

пунктлардан биронтасининг, масалан, X нинг ёрдамчи фигура бўла олишига исбот қилдим.

А. X нуктага топини мулкни, чулки:

а) X, X', X'' нукталар бир тўғри чизиқда ётади.

б) X ва X'' нукталардан X' нуктагача бўлган XX' ва $X'X''$ масофаларнинг нисбати берилган $\frac{m}{n}$ нисбатга тенг, яъни қуйидаги тенглик бизга маълум:

$$\frac{|XX'|}{|X'X''|} = \frac{m}{n} \text{ ёки } |XX'| = \frac{m}{n} |X'X''| = k \cdot |X'X''|.$$

Агар буидаги XX' ни тескари бўйлабшда оласак, кейинги тенглик қуйидаги кўринишга киради:

$$\frac{|X'X|}{|X'X''|} = -\frac{m}{n} \text{ ёки } |X'X| = -\frac{m}{n} |X'X''| = -k \cdot |X'X''|.$$

в) Кейинги тенгликнинг ўнг томонидаги коэффициентнинг маъний бўлиши X ва X'' нукталарнинг X' нуктадан икки тарафда ётишига мос келади.

Бу уч хоссанинг мавжудлиги X нуктанинг X' марказга нисбатан X'' нуктага $k = -\frac{m}{n}$ коэффициент бўйича гомотетик мос эканлигини билдириди.

г) Шунинг учун бу нукталарнинг қуйидаги хоссасидан фойдаланамиз:

X'' нукта OS нурда ётган учун унга гомотетик бўлган X нукта OS нурса гомотетик бўлган $O'S'$ нурда ётади.

Демак, изилловчи X нукта OA нур билан $O'S'$ нурт кесилиш нуктаси бўлади. Лекин, кейинги аксиолатирингда гомотетия маркази бўлган X' нукта билан тўда маълум эмас, унинг фазат OB нурда ётилишига маълум. Изилловчи кесувчининг берилган M нуктадан ўтган шартини оқтинча эътиборга олмай турайдик. У аяқда X' ўрнани OB нурда ётувчи ихтиёрый X_1 нуктани олиб, юқориди кўрсатилган йўл билан X_1 ва X' нукталарни толамиз. X_1, X' тўғри чизиқ унутмао M нуктадан ўтмайд.

Б. Шу усулда топилаган нукта ёрдам билан изланган кесувчининг янги нуққни: X_1, X' кесувчининг OM нур билан кесилиш нуктаси M_1 бўлади. Ҳосил бўлган фигуранинг O марказга нисбатан M_1 нукта M нуктага аксиолатирингда қилиб гомотетик аксиолатирингда, X_1, X' кесувчи изланган AX'' кесувчининг алашади.

Яъни. I. OB нурда ихтиёрый X' нукта олиб, бу нуктага нисбатан OS нурни $k = -\frac{m}{n}$ коэффициент билан гомотетик аксиолатирингда, буида $(O'S') \parallel (OS)$ ҳосил бўлади.

II. $O'S'$ ва OA нурларининг кесилиш X_1 нуктаси билан X' нукта орқали M, N_0 тўғри чизиқ ўтказамиз.

III. Берилган M нуктадан $(MN) \parallel (M_0N_0)$ тўғри чизиқ ўтказамиз.

91-масала. Берилган нуктадан берилган айланага бу нуктадан кесувчининг айланани кесиб ўтган нукталарига-чи бўлган кесмаларнинг нисбати берилган нисбатга тенг бўлган кесувчи ўтказамиз.

(O, r) айлана; M нукта ва $\frac{m}{n}$ нисбат берилган.

Айялиш. Изилловчи кесувчи 152-I чизмадаги MN тўғри чизиқ деб фарз қилайлик. Бунга биноян, кесувчининг айлана билан кесилиш X' ва X нукталари (ёки унинг MX' ва MX кесмалари) масаланинг қуйидаги талабига қатъий беради:

$$\frac{MX'}{MX} = \frac{m}{n}. \quad (1)$$

X' нуктанинг берилган айланага ёниш тартибни аниқлаш эътиборга олмай турайдик. У ҳолда X нукта айланани ётса, (1) шартни қаноатлантирувчи X нукталар берилган айланага M марказга нисбатан $k = \frac{m}{n}$ коэффициент билан гомотетик бўлади яъни айланага ташқил ётади. Топилаган айлананинг берилган айлана билан кесилиш нуктаси X' нукта бўлади. Изилловчи кесувчи MX' нур бўлади.

Яъни. I. Берилган айлананинг O марказини берилган M нуктага нисбатан $k = \frac{m}{n}$ коэффициент билан гомотетик аксиолатирингда O' нуктани толамиз.

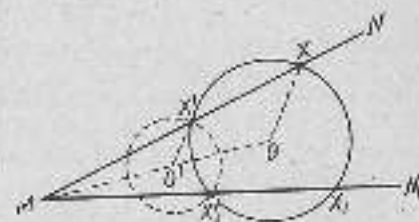
II. $r' = \sqrt{OX'}$ кесма топилади (яъни m ва n — сонлар бўлса, r' ни топиш учун r кесмани m та қўйатириб n та бўлилади. Башарти m ва n — кесмалар бўлса, r' кесма тўртинчи пропорционал кесма сифатида топилади).

III. O' нуктани марказ қилиб, топилаган r' радиус билан (O', r') айлана чизамиз.

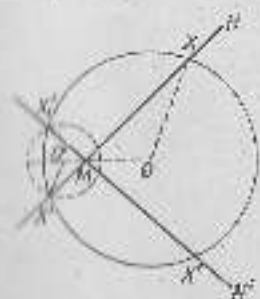
IV. Берилган (O, r) айлана билан топилаган (O', r') айлананинг кесилиш X' (ва X_1) нукталарини ва берилган M нуктадан MN (ва MN_1) нур ўтказамиз.

Тошхир қилар

I. Берилган M нукта берилган айлананинг ички соҳасига ётган ҳолда топилиш масалани юқоридики 87-Билан оғити (152-II чизмада).



152-I чизма



152-II чизма

фойдаланиш ва ёрдамчи айланаларнинг марказини топилганда O марказини тегиш ҳолатига бўйича топилганлигини).

II. Бу йўл билан топилган кесувчиларнинг масофа талабига жавоб беришнинг бебўх қилини. Берилганларни текшириб, масаланинг ечимини шартларини аниқлаш. Тегишрида қуйидаги ҳолатларни қараш:

- а) берилган M нуқта берилган айланала ёки унинг марказига ётади;
- б) берилган нисбатнинг қиймати 1 дан кичик, 1 га тенг ва 1 дан катта бўлиб, берилган нуқта айлана ташқарисига ва айлана остида бўлган ҳолатлар;
- в) берилган нуқта айлананинг ташқарисига (ёки ичига) бўлган ҳолда N нуқталарнинг мавжуд бўлиши шарт.

$$r - r' < |OO'| < r + r'$$

бўлишдан аниқланган.

92- масала. Учуго кесилувчи икки айлананинг кесилиш нуқталаридан бири орқали бир айлана шундаги кесмаси иккинчи айлана ичидаги кесмасидан икки марта катта бўлган кесувчи ўтказилган.

$A(O, |OM|)$ ва $A_1(O_1, |M_1O_1|)$ айланалар берилган.

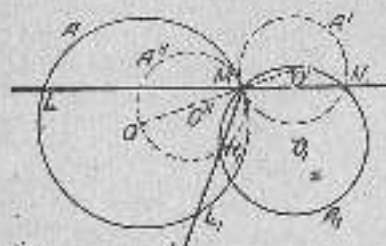
Айталик. Масала ечилиши деб фарз қилиб, қизилувчи MM_1 ва MM_2 кесувчиларни тахминан таяиб қуйилик (153- I чизма). Бушга биноан, кесувчиларнинг берилган айланалар билан кесилишувидан ҳосил бўлган кесмаларни масаладан қуйидаги талабига жавоб бериши керак:

$$\frac{|MM_1|}{|ML_1|} = -\frac{1}{2} \text{ ва } \frac{|MM_2|}{|ML_2|} = \frac{1}{2}. \quad (1')$$

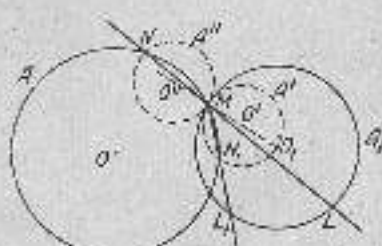
N нуқталарнинг берилган A_1 айланада ётиш шартини аътиборга олмаб турсак, L нуқта A айланада ётса, (1) шартларининг биринчисини қанчалантирувчи N нуқталар A айланга M марказга нисбатан $k = -\frac{1}{2}$ коэффициент бўйича (гомотелик) мос бўлган бирор A' айланани ташқил этади.

Бу айлананинг A_1 айланга билан кесилишган нуқтаси қизилувчи N нуқтани беради.

Кўқарадигандек муҳокамаларга асосан осалган $A''(O'', \frac{R}{2})$ айлана билан A_1 айлананинг кесилишувидан N_1 нуқта ҳосил бўлади. Бунда айланани йўللари билан топилаган N (ва N_2) ҳамда



153- I чизма



153- II чизма

M нуқтадан ўтказилган тўғри чизиқ қизилувчи кесувчи бўлади.

Яъни ш. I. Берилган айланалардан биринини марказини, масалан, O нуқтадан берилган M нуқта билан туташтириб, $|OO'| = \frac{1}{2}|OM|$ ва $|OO'| = \frac{3}{2}|OM|$ кесмаларни ясаймиз.

II. A айланга унинг M нуқтасида танқи ва икки томондан уринувчи $A'(O', \frac{R}{2})$ ва $A''(O'', \frac{R}{2})$ айланалар ясаймиз.

III. Кейинги айланалар билан A_1 айлананинг кесилишган N ва N_1 нуқталарини M нуқта билан туташтириб, бу кесмаларни A айланга билан кесилгунча давом эттираемиз. Бунда ҳосил бўлган NM ва MM_1 , тўғри чизиқлар нозлаувчи кесувчилар бўлади.

Тоғрифриқлар

I. Берилган ABC бурчакнинг ташқарисига M нуқтадан бш бурчак томонларига шундай MM_1 кесувчи ўтказилган, $|MM_1| = 2|MM_2|$ бўлсин (буни M, P адр кесувчиларнинг ёрдамчи томонлари билан қилишган нуқталардан).

II. Айталик, унинг ташқарисига t тўғри чизиқ ва M нуқта берилган. M нуқтадан берилган тўғри чизиқ ва айлана билан унинг кесилишувидан ҳосил бўлган A ва B нуқталари

$$\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{m}{n}$$

муносабатини қанчалантирувчи кесувчи ўтказилган.

III. Консентрик икки айлана берилган. Буларга шундай кесувчи ўтказилган, унинг икки айлана остида жойлашган бўлган икки айлана тегиш уч бўлган бўлсин.

IV. Айталик, унинг икки радиусининг қизилувчи берилган. Бу айланани айланга ичидаги бўлишдан берилган икки радиуси тенг уч бўлган бўлган кесувчи ўтказилган.

V. Берилган учтўрт-иккига A шундай шундай AN тўғри чизиқ ўтказилган, A нуқтадан ўтказилган кесувчи қизилувчи (AX) даги проекцияларининг масофалари нисбати берилган сонга тенг бўлсин.

47- §. БИШИНЧИ ТИПДАГИ МАСАЛАЛАР

Берилган учта талабга жавоб беришни айланалар чизиш талаб қилган масалалар — бешинчи типни ташқил қилади. Бу типдаги масалаларнинг асосий қисми берилган учта айланга уринувчи айлана яна икки ҳақидаги Аполлоний масаласи ва унинг турли хусусий қўшилмаларидан иборат бўлиб, Аполлоний масаласига келтирилган ҳуқуқи бўлган бешинчи масалалар ҳам шу бешинчи типга қаради.

Бу параграфда асосан китобхония Аполлоний масаласининг хусусий ҳолатларига диққат масалаларнинг ечимлари билан таништириб, сўнгги шунга келтирилган масалаларга тўхтаб ўтамиз.

Машхур грек олимқи Аполлоний юқорида айтылган классик масалани етган бўлиш-да, лекин унинг бу ҳақдаги асари сақланмаган. Урта аср олимларидан Петер бу масалани қайтадан етган, ҳозирги бақта эса бу масаланинг турлича ечилиш йўллари маълумдир. Биз бунда масаланинг ўхшашлик методига асосланган ечилиш йўлини ташкил, қисқача равишда аксиоматик равишда айтиш билан боғлиқ бўлиш бу масаланинг илмий ҳақиқати билан ечилишини ҳам кўралик.

Равшанки, айлананин радиусин чексиз узагтйралсхан, эхлэл хам чексиз катталшиб, у тугри чизикэ итгалиб бо-
ралх, ягш тугри чизикэ радиуси чексиз катта
бўлаган айлан деб қараш мумкин. Шунингдск, агар
айлананин радиусини чексиз кнрагтйрилсн, бу айлан хам
чексиз кндршиб, у эинини: маркаанта итгалин, ягш ҳар
бир нуқтани радиуси илгага теги бўлаган айлан
деб қараш мумкин.

Тўғри чиқиш билан нуқтага шу нуқтадан بازارдан қараганда
Акселлиний мисаллавидаги маъноси янча кенгайиб, унда учта
 A_1, A_2, A_3 айлана берилиши ўрнига учта i_1, i_2, i_3 тўғри чиқиш
ёки учта M_1, M_2, M_3 нуқта берилиши ёки бу тўққиз образ-
нинг ихтиёрий унтаси берилиши мумкин.

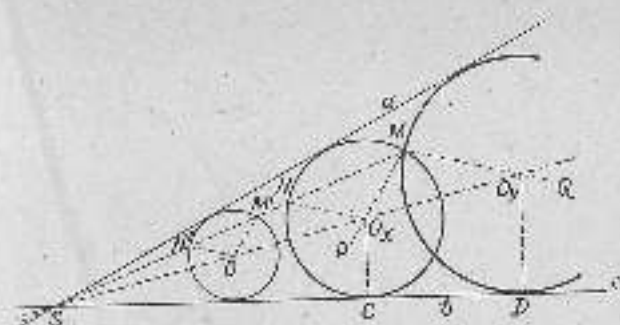
Шуларни эътиборга олганда Аллолловий масаласи ҳувидаги
ун қуришида учрайди:

1. Берилган урта нуқтадан ўтувчи айлана чизил.
2. Берилган урта суғри чизىقىда ўрилувчи айлана чизил.
3. Берилган нуқтадан ўтиб, берилган икки тўғри чизىققа ўрилувчи айлана чизил.
4. Берилган айлана ва берилган икки тўғри чизىققа ўрилувчи айлана чизил.
5. Берилган икки нуқтадан ўтиб, берилган тўғри чизىققа ўрилувчи айлана чизил.
6. Берилган тўғри чизىқ ва берилган айланaga ўрилиб, берилган нуқтадан ўтувчи айлана чизил.
7. Берилган тўғри чизىқ ва берилган икки айланaga ўрилувчи айлана чизил.
8. Берилган икки нуқтадан ўтиб, берилган айланaga ўрилувчи айлана чизил.
9. Берилган нуқтадан ўтиб, берилган икки айланaga ўрилувчи айлана чизил.
10. Берилган урта айланaga ўрилувчи айлана чизил.

Бу масалаларнинг блязи йирлари китебнинг VI бобида қаралган бўлса-да, бу масалалардан 3–10 ларини бу ерда тохотетик методи билан шиб курсетамиз.

9-масала, Несингула иши тугри чаданга уришиб, берилган нуктадан угувча айлана чизилг.

Ассалдз. Изминувши айына 151-чымыканы кесиптуван а ва б түрү чыыкларга урунип, а ва б да биматал М пунктадан утуви О_х марказлы айлана деб фараз кылабыз.



151-91243

Агар бу айлананынг M нуқтада $\vec{v}$ ўқшани шартли вақтинча
тилиб ортиб олмасик, берилган масала, Кесилувчи икки тўғри
чизиққа ўринувчи айлана қизиб¹ дески аниқхас масаласи ке-
лади. Маълумки, бирорта S нуқтада кесилувчи (икки a ва b
тўғри чизиққа ўринувчи айланаларнинг марказлари шу тўғри
чизиқлар орасидаси бурчакнинг биссектрисасида ётиб, бу ай-
ланалар S нуқтага нисбатан ўзаро ўхшаш бўладилар. Шунга
қара, бундай айланалардан биттасини, масалан, маркази O да
бўлганини қизиб, у айланани M нуқтага гомотетик мос бўлган
нуқтаси топайлик. Бундан унча SM нуқти ўтказамиз, бу нуқ
 O марказли айлана билан M' ва N' нуқталарда кесилсин.

Агар M' муштарифи M нуктага аксантитурувчи гомотетия олсак, $(MP) \perp (M'O)$ ни тикишим, O_x маркази ташкини; M' нуктага аксантитурувчи гомотетия олсак, $(MQ) \perp (N'O)$ ни тикишим, O_y маркази ташкини.

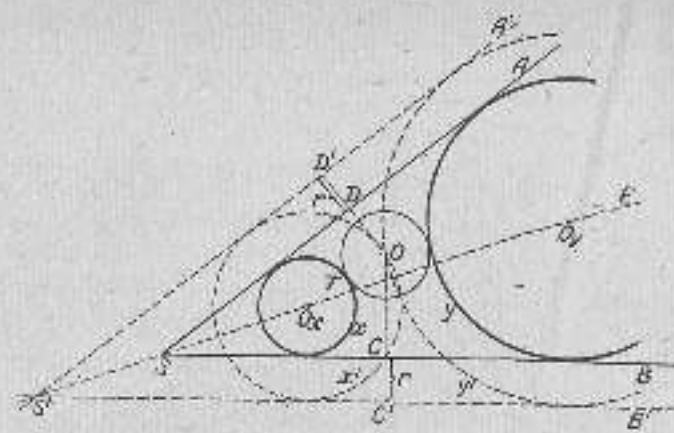
Ясаш. Анализда күрсәткәнчән P һәм Q нукта-
ларын топамыз. Бу нукталардан бериасан түгәри чизгилардан
биринчә, мәсәлән, b га O_2C ях O_2D перпендикулярлар түтү-
риб, $(O_2, |O_2C|)$ ва $(O_2, |O_2D|)$ айланаларни чизамыз.

Т О П И К И Н Д А Р

- III. Атар берилсеп үүрү чыгарылат. Түрү берилсеп, баса, масала калдып кызылат.

94-масса. Берлгян икно тугри чизикта ви берилган айланага уринууси айлана чизиге.

Аяллыз. Ислахуоча аяллыз 135-1 чызында берилген AS ва BS түгрі чыныктарга кыды (O, r) аяллыкта уришукчи O_x харквалл x аяллыз дөб фарыз кылайык.



155-I эскиз

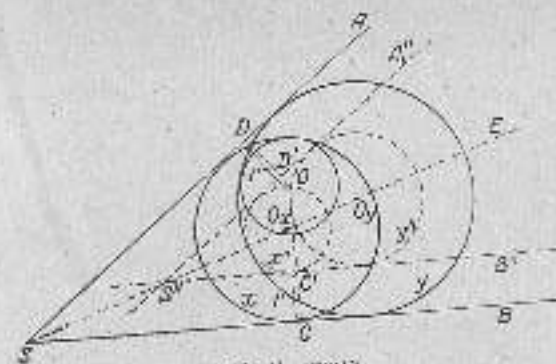
Агар берилган (O, r) айлана ўрнига унинг маркази берилганда эди, бу масала бундан олдинги масаланинг ўзи бўлар эди. Бундан берилган A айланани кичрайтириб бориб, уни O марказга келтириш зарурлиги билинади. Юқорида айтилган фигуралар орасидаги муносабатни бўзмастан (O, r) айланани O нуктага келтириш учун бундаги фигуралар тўпламини тундай акселитирамизки, (O, r) айлана кичрайиб, O нуктага келиши билан бирга, x айлана ўзига концентрик ҳолда катталашиб уринувчи айлана бўлиб қолади ва O нуктадан ўтувчи x' айланаси келади. Аниқ эътиборда AS ва BS тўғри чизиқлар r масофата параллел кўчириб, мос равишда $A'S'$ ва $B'S'$ вазиятларга келади.

Шундай қилиб, қуйидаги ёрдамчи масала келиб чиқади: маълум $A'S'$ ва $B'S'$ тўғри чизиқларга уриниб, берилган O нуктадан ўтувчи айлана чизинг. Бу муҳокамадан масаланинг қуйидаги ечилиш йўли чиққанини.

Яъни, берилган AS ва BS тўғри чизиқларни O нуктадан ўзикаштириб, r масофата параллел кўчириб, $A'S'$ ва $B'S'$ вазиятга келтирамиз. Сўنгра, кейинги икки тўғри чизиққа уриниб, берилган O нуктадан ўтувчи айланаларни (олдинги масалада кўрилган бўл билан) чизамиз.

Бундан ҳосил бўлган икки х' ва у' айлананинг радиусларини r кесмача кичрайтириб, уларга концентрик бўлган x ва y айланаларни чизамиз.

Агар берилган AS ва BS тўғри чизиқларни O нуктага акселитириш мақсадиди r масофата параллел кўчирсак, бундан 155-II эскиздаги $A'S''$ ва $B'S''$ тўғри чизиқлар ҳосил бўлиб, қуйидаги ёрдамчи масалага келамиз: $A'S''$ ва $B'S''$ тўғри чизиқларга уриниб, берилган O нуктадан ўтувчи айлана чизинг. Бу масалани ечишдан x'' ва y'' айланалар ҳосил бўлади. Бу



155-II эскиз

айланалар радиусларини r кесмача ўзайтириб, буларга концентрик бўлган x ва y айланалар чизилади.

Шундай қилиб, берилган икки тўғри чизиққа ва берилган айланасига уринувчи умуман тўртта айлана чизилиб бўлади, уларнинг иккитаси берилган айланата ташқи уринувчи, қолган иккитаси унга ички уринувчи бўлади.

Топшириқлар

I. Берилган айлананинг маркази, берилган икки тўғри чизиқ орасидаги бурчаклардан бирини концентрисацияда ётса, масала қандай ечилади ва нелли ечи бўлади?

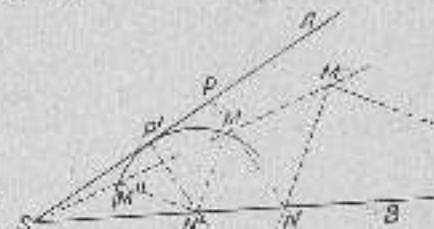
II. Берилган айлананинг маркази берилган тўғри чизиқлардан бирини ётса, масала қандай ечилади?

III. Берилган айлананинг маркази берилган икки тўғри чизиқнинг перпендикуляр нуктасида бўлса, масала қандай ечилади ва нелли ечи бўлади?

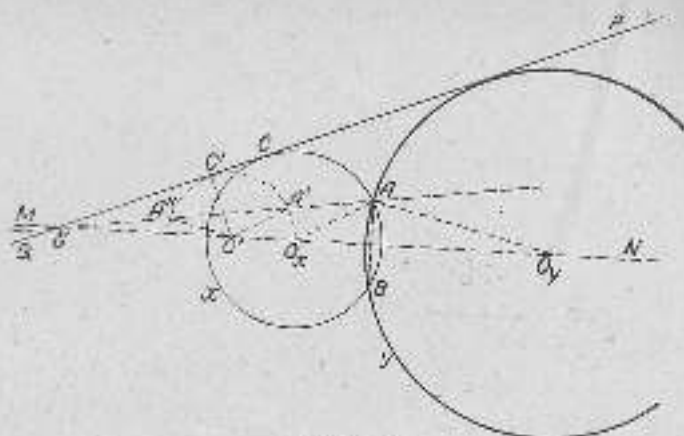
IV. 155-II эскиздаги айлана AS ва BS тўғри чизиқларни қандай марказга масбатан келтириб, қандай коэффициент билан ўқатиш акселитириб, уларга мос бўлган x' айлана, $A'S'$ ва $B'S'$ тўғри чизиқларни қандай қилиб келтириш мумкин?

95- (ёрданчи) масала. Берилган ASB бурчакни BS томонига шундай нукта талонизки, у нукта бурчак шайба берилган M нуктадан ва бурчакнинг AS томонидан тенг узоқликда ётсин.

Анализ. Изланувчи нукта — 156-эскиздаги N нукта деб фарз қилайлик. Шу фарзга суяниб, N нуктадан AS томонга ўтказилган NP перпендикуляр билан MN кесма тенг дейми. N нуктани топиш учун аввал P нуктадан топиш керак. Бунинг учун P нуктага S марказга инсбатан ихтиёрий $k > 0$ коэффициент билан томоник мос бўлган P' нуктани



156-эскиз



157-чиизм

тоини керек, чунки P' нуктадан (AS) га перпендикуляр чиқиб чиқарилган $[P'A']$ кесма $[P'N']$ кесмага мос бўлиб, N' нукта изланувчи N нуктага мос бўлади. Бу ҳужожамадан N нуктани қуйидагича яна йўли маълум бўлади.

Яна ш. Берилган бурчакнинг AS томонидagi иктиёрий P' нуктадан (AS) га перпендикуляр $(P'A')$ чиқариб, унинг AS томон билан кесилган A' нуктагача S нуктага нисбатан $k = |SM|/|SM'|$ коэффициент бўйича акселитирамиз. Бу ерда M' нукта, N' нуктани марказ қилиб $[N'P']$ радиус билан чизилган ёйнинг SM нур билан кесилган нуктасидир.

96-масала. Берилган икки нуктадан ўтиб, берилган тўғри чизиққа уринувчи айлана чизил.

A ва B нукталар ва PQ тўғри чизик берилган.

Бу масalani ечиниш икки йўлини кўраётлик.

Биринчи йўл. Анализ. Изланувчи айлана 157-чиизмдаги O_x марказли айлана деб фарз қилайлик. Бу айлана берилган A ва B нукталардан ўтгани учун унинг O_x маркази AB кесманинг MN ўрта перпендикулярида ётади, яъни $|O_xA| = |O_xB|$ бўлади.

Иккинчи томондан, бу айлана берилган PQ тўғри чизиққа унинг бирор C нуктасида урилгани учун қуйидаги тенглик мавжуд бўлади:

$$|O_xC| = |O_xA| - |O_xB|.$$

Берилган нукталарнинг бири, масалан, A нукта MN ва PQ тўғри чизиқларнинг бирор S нуктада кесилувидан ҳосил бўлган PSN бурчакнинг итида, O_x нукта эса унинг MN томонида ётади.

Шунинг учун берилган масала қуйидаги масалига келтирилади: PSN бурчакнинг MN томонида шундай O_x нукта то-

пилисинки, у бурчак итида берилган A нуктадан ва бу бурчакнинг SP томонидан тенг масофада ётсин. Бу эса бундан олдин кўрилган масаладан иборатдир.

Яна ш. I. Бурчакнинг PS томонидagi иктиёрий O' нуктадан унга перпендикуляр чиқариб, узи бурчакнинг иккинчи томон билан бирор O' нуктада кесилтирамиз; сўнгга O' марказдан $O'C'$ радиус билан ёрдамчи ёй чизамиз.

II. Бу ёйнинг SA тўғри чизик билан кесилган A' ва A'' нукталарини O' марказ билан туташтириб, A нуктадан

$$(AO_x) \parallel (A'O') \text{ ва } (AO_x) \perp (A''O')$$

тўғри чизиқларни ўтказамиз. Бу чизиқларнинг MN ўрта перпендикуляр билан кесилувидан ҳосил бўлган O_x ва O_y нукталар назанган айланаларнинг марказлари бўлади, чунки O_x ва O_y нукталар O' нуктага S марказга нисбатан

$$k_1 = \frac{|SA|}{|SA'|} \text{ ва } k_2 = \frac{|SA|}{|SA''|}$$

коэффициентлар бўйича гомотетикдир.

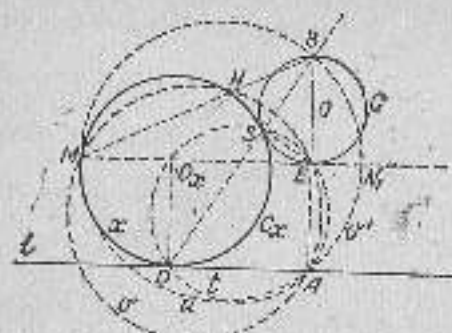
III. O_x ва O_y марказлардан мос равишда O_xA ва O_yA радиуслар билан чизилган айланалар — изланувчи айланалар бўлади.

Иккинчи йўл. Масalani 95-масаладан фойдаланмасдан ҳам елиш мумкин. Изланувчи x айлананинг A ва B нукталардан ўтиш шартидан бу айлананинг маркази AB кесманинг ўрта перпендикуляри MN да ётгани маълум бўлади. Бу айлананинг берилган PQ тўғри чизиққа урилиш шартидан эса MN ва PQ тўғри чизиқлар кесилган S нукта, марказлари MN тўғри чизиққа ётиб PQ тўғри чизиққа уринувчи ҳамма айланаларнинг ўхшашлик маркази эканлиги билдирилади (157-чиизм).

Демак, изланувчи айланани қуйидагича чизиб мумкин: MN ўрта перпендикулярнинг иктиёрий O' нуктагача марказ қилиб, берилган PQ тўғри чизиққа уринувчи айлана чизилади. SA нурнинг бу айлана билан кесилган A' ва A'' нукталари O' марказ билан туташтирилади. A нуктадан $(AO_x) \parallel (A'O')$ ва $(AO_x) \perp (A''O')$ тўғри чизиқлар ўтказиб, уларнинг MN ўрта перпендикуляр билан кесилган O_x ва O_y нукталарини марказ деб олиб, мос равишда AO_x ва AO_y радиуслар билан x ва y айланалар чизилади.

97-масала. Берилган нуктадан ўтиб, берилган тўғри чизиққа ва айланаларга уринувчи айлана чизил.

Анализ. Изланувчи айлана 158-чиизмдаги M нуктадан ўтиб, берилган l тўғри чизиққа бирор D нуктада, берилган $C(O, r)$ айланалар эса бирор S нуктада уринувчи O_x марказли x айлана деб фарз қилайлик. Бу айланани чизиб учун унинг берилган M нуктагача бешка икки бирор N нуктаси топилса ётади, чунки берилган икки нуктадан ўтиб, берилган тўғри чизиққа уринувчи айлана чизиб йўли бизга маълум.



158-масала

Бу M нуктадаги тўғри учун қўйилган мўҳкам юритамиз; S нукта C ва C_1 айланаларнинг ўриниш нуктаси бўлгани учун у, бу айланалардан бирини иккинчисига алмаштирувчи гомотетия марказидир.

Маълумки, икки айлананинг икки гомотетия маркази — қарома-қарши йўналишдаги параллел радиуслар учларини туташтирувчи тўғри чизиқда ётади. Шунинг учун O_1D радиусининг

D учини S нукта билан туташтириб, DS тўғри чизиқни берилган C_1 айлана билан бирор B нуктада кесиптириб, BO радиусидан $BO \perp (O_1D)$, яъни $(BO) \perp l$ бўлади. BO радиусидан C айлана ва l тўғри чизиқ билан кесилган нукталарни E ва A ҳарфлари билан белгилаб, S ва E нукталарини туташтирайлик.

$BSE = 90^\circ$; шунинг учун $DSE = 90^\circ$. Бундан ва $(BO) \perp l$ дая $ADSE$ тўртбурчакда $DSE = OAE = 180^\circ$ дегн маълум бўлиб, бу тўртбурчакда ташқи айлана қанча мумкинлиги билганиди, (BD) ва (BA) бу l айланага B нуктадан ўтказилган кесувчилардир; шунинг учун қўйилган тенглик маъжуд бўлади:

$$|BA| \cdot |BE| = |BD| \cdot |BS|. \quad (1)$$

Иккинчи томондан (BM) ва (BD) лар x айланага B нуктадан ўтказилган кесувчилардир; шунинг учун қўйилган тенглик маъжуд бўлади:

$$|BM| \cdot |BN| = |BD| \cdot |BS|. \quad (2)$$

(1) ва (2) дан қўйилган тенглик келиб чиқади:

$$|BM| \cdot |BN| = |BA| \cdot |BE|. \quad (3)$$

Бу тенглик A , M , E ва N нукталарнинг бир o айланада ётишини кўрсатади. Бу нукталардан олдинги учтаси маълум бўлгани учун улардан ўтказган o айланани ўтказиб, B ва M нукталарини туташтирамиз, o айлана билан BM кесилган кесилувидаги нуктадан N нукта ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, берилган масalani бундан олдинги масалага келтириш бўли аниқланди.

Ясаш. Берилган C айлананинг марказидан берилган l тўғри чизиққа OA перпендикуляр ўтказиб, унинг C айлана билан кесилган B ва E нукталарини белгилаб қўлима, A , E , M нукталардан ўтувчи o айланани чизиб, B ва M нукталар орқали BM тўғри чизиқ ўтказамиз.

ва айлана билан (BM) лар кесилган N нуктасини белгилаб қўлима. Сўنгра M ва N нукталардан ўтиб, берилган l тўғри чизиққа урилувчи айлана чизамиз (96-масала).

Тоштинриқлар

I. Булда айланаларга тегиб, берилган айланалардан чизиб ва берилган айланани ташқи қўлинувчи чизиб ва аниқ урилувчи нуктага айлана қилиб қилиб (айлана чизилганда o айлана билан ME тўғри чизиқнинг кесилувидаги нукта билан N нуктадан ҳам фойдаланиш керак).

II. Агар берилган нукта берилган тўғри чизиқда ёки берилган айланада ёки, бу масала қандай ечилиши?

III. Агар берилган тўғри чизиқ билан берилган айлана ўзаро урибса, масала қандай ечилиши? Булда?

IV. Қандай шарт маъжуд бўлганда, бу масала ечилиши? Булда?

98-масала. Берилган тўғри чизиққа ва икки айланага урилувчи айлана чизамиз.

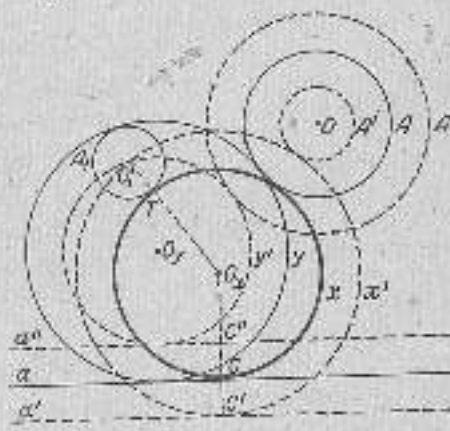
o тўғри чизиқ $A(O, R)$, $A_1(O_1, r)$ айланалар ва $R > r$ берилган.

Айлана. Маълумки айлана 159-чизмидаги O_1 марказли x айлана бўлсин. Бу айлана ва унга урилувчи маълум A ва A_1 айланалар ҳамда o тўғри чизиқни шундай акслантирилайлик, натижада кичик радиусли A_1 айлана ўзининг O_1 марказига, x ва a образлар мис рақибда x' , A' ва a' образларга ўтсин ва улар орасидаги ураниш сақлансин. Бунинг учун x айланани ўзининг O_1 марказига қисбатан

$$k = \frac{|O_1O_1|}{|O_1A|} = \frac{R+r}{R}$$

коэффициент бўлима гомотетик акслантирилсин бўлади. Бу, натижада, қўйилганга бажарилади; O_1 марказдан O_1O_1 радиус билан x' айлана, O марказдан $R-r$ радиус билан A' айлана чизилади; o тўғри чизиқни эса O_1 дан ўтказиб, r масофага параллел қилиб, o' назилга келтирилади. Бу акслантириш натижасида берилган масала қўйилган ёрдамчи масалага келиши: маълум O_1 нуктадан ўтиб, маълум A' айлана ва o' тўғри чизиққа урилувчи айлана чизамиз (97-масала).

Агар кичик A_1 айланани O_1 марказли y айланаси икки урилувчи ва катта A айланани эса ташқи урилувчи қилиб олганда, бу y айлана y' га акслантирилганда A_1 , A ва a образлар мис рақибда O_1 , A' ва a' образларга ўтиб иккирадан қанча иккирадан ёрдамчи масала келиб чиқади.

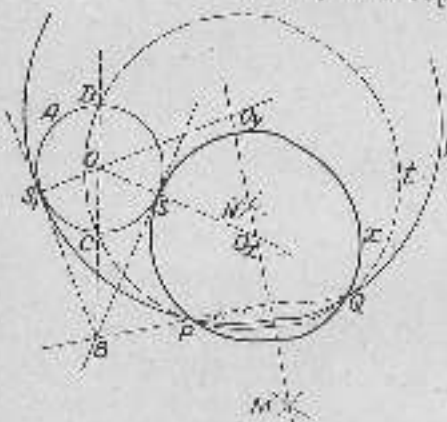


159-чизма

T O N I C H E R I K K

Ғаһини яһи бәһини бәһини. Бүтә әһлиһә айткан һәһи
яһһи хәһһи әһһи һәһи һәһи һәһи һәһи.

Анализ. Масаллада сўрилган айлана 160-чи маддаси О₁ нуктада х айлана ва унинг берилаган А (О, r) айталаса уриш нуктаси S бўлади.



155. 4.12.14.

Бу нукталарнинг берилаги A айланлада ётиши маънуд. Уларнинг яна қандай фигурада ётилиши бўрсизлиги бошқа ҳосиласини қилиришдан керак. Бунинг учун BD , BQ кесувчилар ва BS уқирмага эллибс қилиб, ундаги кесмалар орасида мавжуд бўлган мана бу муносибатни ёзади:

$$|BD| \cdot |BC| = |BQ| \cdot |BP| = |BS|^2.$$

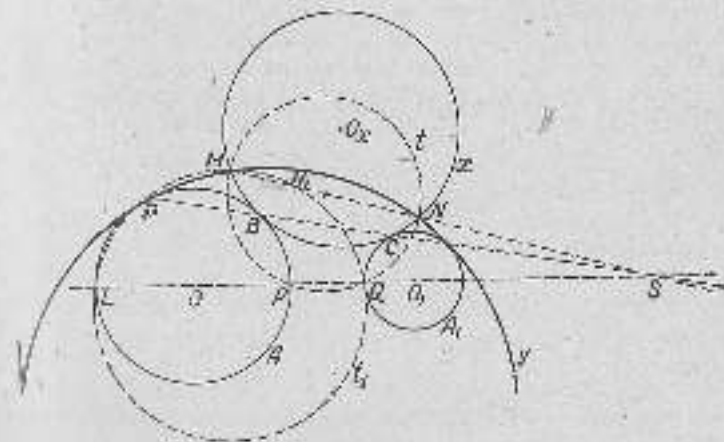
Бу тенгдәкдә C, D, P, Q нүктәләренең бер аралыда булуы мәһүм булады. $BD - A$ айланасы D нүктәдә утканынан пәтибарай кырыңч берәк адык. Шуңаң үчүн C ва D нүктә

Якщо B — вершина P та Q дугах зліва, то PQ — кесонний MM зліва перпендикуляр чиниться. Маркиси MM дліва, берляган A зліва билан кесипувти ва P думда Q дліва іхтіярій i айаана чиниланди.

Агар B нуктадан A айланга инкисият BS_1 уртасга ўтқизиб, S_1O нурун AM билан бирор O_1 нуктада кескиштирлук, бу O_1 нуктадан O_2S_1 радиус билан чизилган у айланга берилган A айланга чизки уринувчи бўлади.

100- масала. Берилган нуқтадан утиб, берилган нукта
оо лакага уооооооо айлана килеи.

Бу айлананы чыгыш учун унын берилган А нуктасыдан башка яна бирор нуктасына тигеңсә, етәдә, чүпкө маълум икән нуктадан үтөп, берилган айланыга урпунуш айлана чыгышын бундан алдынгы максатын өтешдә кыдык.



161-48502

Берилган M нуктадан берилган A ва A_1 айланаларнинг ўхшашлик маркази бўлган S нукта билан туташтириб, MS тўғри чизиқнинг x айлана билан кесилган N нуктасига эътибор қилайлик. Бунинг учун янги томонотетик маркази S ни B ёки C уриниш нуктаси билан туташтирамиз. x айлана A ва A_1 айланаларга B ва C нукталарда урингани учун B , C ва S нукталар бир тўғри чизиқда ётади.

Шунинг учун x айланага S нуктадан ўтказилган SM ва SCB кесувчиларга нисбатан қуйидаги муносабат мавжуд бўлади:

$$SM \cdot |SN| = |SB| \cdot |SC|. \quad (1)$$

Иккинчи томондан, маълумки, ўхшашлик марказилар ёки антигомотетик нукталарга масофалар қўлаймаси ўзармас сои бўлади. Шунга қўра B билан C ва P билан Q нукталар антигомотетик бўлганлари учун қуйидагилар мавжуд бўлади:

$$|SP| \cdot |SQ| = |SB| \cdot |SC|. \quad (2)$$

(1) ва (2) дан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$|SM| \cdot |SN| = |SP| \cdot |SQ|. \quad (3)$$

Бу эса M , N , P ва Q нукталарнинг бир ёрдамчи I айланга қарашли эканлигини билдиради. Бу нукталардан M , P ва Q лар маълум бўлгани учун улардан айлана ўткази оламиз. Бу I айлананинг маълум SM тўғри чизиқ билан кесилувидаи N нукта ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, берилган масала, маълум M ва N нукталардан ўтиб, берилган A айланга уринувчи айлана чизиб, берилган масалага келтирилади.

Юқоридаги I айланага маълум M , P , Q нукталардан ўтказган эдик. Агар маълум M , I , Q нукталардан айлана ўтказсак, будан иккинчи I_1 ёрдамчи айлана ва унинг SM билан кесилувидаи N_1 нукта ҳосил бўлади. M ва N_1 нукталардан ўтиб, A айланга уринувчи яна иккинчи айлана топish мумкин.

Шундай қилиб, берилган масала, умуман, тўртта ечимга эга бўлади.

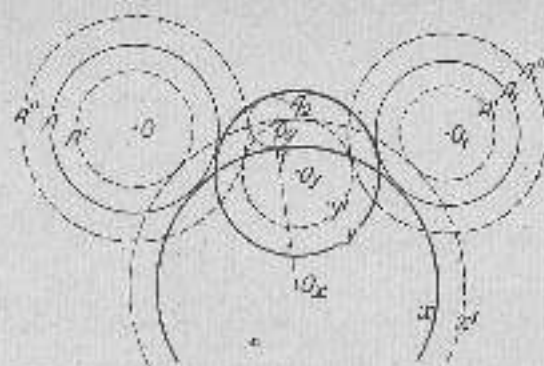
Толшириқлар

I. Айланани айланаларга тақиб, қаламуси тўртта айланани чизиб.

II. Агар берилган M нукта берилган айланалардан бирида ётса, масала қандай ечилади?

101- масала. Берилган учта айланга уринувчи айлана чизинг.

$A(O, r)$, $A_1(O_1, r_1)$, $A_2(O_2, r_2)$ айланалар берилган ва булар $r > r_1 > r_2$.



162- қизма

Анхелиз. Чизилувчи айлана — 162- қизмада берилган A , A_1 , A_2 айланаларга ташқи уринувчи O_x марказли x айлана деб фарз қилайлик.

x айлана билан концентрик ва яки кичик айлананинг O_x марказидан ўтувчи айлана қизайлик (яъни x айланани ўзининг марказига нисбатан $k = \frac{|O_x O_1|}{|O_x O_2|}$ коэффициент билан томонотетик аксиантирайлик). Бундан радиуси x айлананинг радиусига қараганда r_2 кесма қадар узунроқ бўлган x' айлана ҳосил бўлади. Демак, уринишни сақлаш учун A ва A_1 айланаларнинг радиусларини r_2 қадар қизайтиришга тўғри келади, яъни x' айлана O_2 нуктадан ўтиши билан бирга, O ва O_1 марказлардан мос равишда $r + r_2$ ва $r' + r_2$ радиуслар билан чизилган A'' ва A_1' айланаларга урилади.

x' айланани бу уч шарт бўйича 100- масалага еклибдиги бўл билан чизиб мумкин, чунки O_x нукта, A' ва A_1' айланалар бизга маълум.

Кейинги йўл билан чизилган x' айлананинг радиусини r_2 қадар қисқарттириб, x' айланга концентрик айлана чизилган иккинчиси x айлана ҳосил бўлади.

Агар чизилувчи айлана берилган A ва A_1 айланаларга ташқи, A_2 айлана эса унга ички уринувчи y айлана деб фарз қилсак, у ни O_2 нуктадан ўтувчи концентрик y' айланга келтириш учун унинг радиусини r_2 қадар қисқарттиришга тўғри келади. Мисалда айтилган уринишни сақлаш учун A ва A_1 айланаларнинг радиусларини эса r_2 қадар узайтиришга тўғри келади.

Бу ҳолат y' айлана O_x нуктадан ўтишдан ташқари, O ва O_1 марказлардан мос равишда $r + r_2$ ва $r_1 + r_2$ радиуслар билан чизилган A'' ва A_1' айланаларга уринувчи бўлади. O_2 нукта, A'' ва A_1' айланалар бизга маълум.

Шунинг учун u' айлинин 100- миқдори енишда кўрилган бўл билан мунозират мумкин.

Шундай қилиб, берилган масалани иккинчи ҳолда ҳам биринчи ҳолдаги каби 100- масалага келтириш мумкин экан.

Маълумки, 100- масала тўғрисидаги ениш 101- масала иккала ҳолда ҳам 100- масалага келтирилди. Шунинг учун 101- масала, умуман, сақията енишга эга бўлади.

48-§. МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

(220—235- масалаларни Аполлоний масалаларига келтириб ечили.)

220. Берилган M нуктадан ўтган a тўғрисидаги чизикка уринувчи ва маркази берилган B тўғрисидаги чизикда ётувчи айлана чизили.

231. Берилган M нуктадан ўтган, берилган a тўғрисидаги чизикка уринувчи ва берилган B тўғрисидаги чизикда I нуктадаги марказ айлани чизили.

232. Берилган M нуктадан ўтган, a тўғрисидаги чизикка уринувчи шундай айлани чизили, унинг берилган B тўғрисидаги чизикдаги маркази айлани билан қишлоқлиги маълум k нисбатда тенг бўлсин.

233. Берилган a ва b тўғрисидаги чизикларга уринувчи ва шу тўғрисидаги чизиклар орасидagi бурчакнинг биссектрисасида берилган M нуктадан ўтувчи айлани чизили.

234. a ва b тўғрисидаги чизиклар ҳамда u ва v уларга уринувчи A айлани берилган. Шу айлани u ва v чизикларга уринувчи айлани чизили.

235. Берилган a тўғрисидаги чизик ва A айланига уринувчи ва маркази берилган B тўғрисидаги чизикда ётувчи айлани чизили.

236. Берилган a тўғрисидаги чизик ва A айланига уринувчи, берилган B тўғрисидаги чизик билан қишлоқлиги k нисбатда u ва v уларга уринувчи айлани чизили.

237. Берилган a тўғрисидаги чизик ва A айланига уринувчи, берилган B тўғрисидаги чизик билан берилган k нисбатда ётувчи айлани чизили.

238. Периметри ва унга қишлоқлиги нисбати берилган учбурчак ясал.

239. A , B ва C нукталарни айланиларни радиусларининг айирмаси ва икки томоник нисбати билан u ва v орасидagi бурчакни берилган учбурчак ясал.

240. Татири-ечки чизилган u ва v айланилар радиусларининг айирмаси ва икки бурчакни берилган учбурчак ясал.

241. u ва v нисбатларининг айирмаси ва икки томонининг нисбати, улардан каттаки қишлоқлиги бурчакни берилган учбурчак ясал.

242. Бер томонига ўтказилган u ва v нисбатларининг айирмаси ва икки томонининг нисбати ва бу томонлардан каттаки қишлоқлиги бурчакни берилган учбурчак ясал.

243. Бер томонига ўтказилган u ва v нисбатларининг айирмаси ва икки томонининг нисбати берилган учбурчак ясал.

244. Берилган учбурчакка икки чизилган шундай параллелограмм ясал, унинг икки қишлоқлиги томонининг нисбати берилган нисбатда тенг бўлиб, унинг бир учу учбурчакнинг асосида берилган нуктада ётган бўлса, учбурчакнинг асоси деб, икки чизилган параллелограммининг икки учу жойларига томонини айтган.

245. Берилган учбурчакка икки чизилган шундай учбурчак ясал, у берилган иккинчи бир учбурчакка ўхшаш бўлсин.

246. Берилган учбурчакка икки чизилган шундай параллелограмм ясал, у берилган параллелограммга ўхшаш бўлсин.

247. Берилган тенг ёки учбурчакка икки чизилган шундай тўғрисидаги бурчак ясал, унинг периметри тўғрисидаги бурчакдан ташқарига қишлоқлиги

бўлган кичик тенг ёки учбурчакнинг периметридан икки марта кичик бўлсин.

248. Берилган айланига икки чизилган шундай учбурчак ясал, унинг учбурчакка ўхшаш бўлсин.

249. Берилган айланига икки чизилган шундай тенг ёки икки чизилган, унинг асоси билан баландлигининг айирмаси k бўлсин, унинг периметри берилган нисбатда тенг бўлсин.

250. Берилган секторга икки чизилган шундай концентрик айлани, бир томоник сектор радиусида ётган.

251. Берилган секторга икки чизилган шундай тўғрисидаги бурчак, у берилган тўғрисидаги бурчакка ўхшаш бўлсин.

252. Берилган ярим доирага икки чизилган шундай тўғрисидаги бурчак, унинг периметри берилган нисбатда тенг бўлсин.

253. Берилган ярим доирага икки чизилган шундай тўғрисидаги бурчак, унинг икки қишлоқлиги айланиларнинг айирмаси берилган нисбатда

ИНВЕРСИЯ

Инверсия сўзи латинча *inversio* сўзидан олинган, бундан маъноси тесқарисини аъдаркиш ёки ўрнатиларини акс эттириш дегенликлар.

Инверсия — муҳим геометрик акселатирлардан бири бўлиб, у бошқа методлар ёрдамида ечилиши қийин бўлган конструктив масалаларни юмроқ масалага келтириб ечилиши мумкин беради. Инверсия геометриянинг бошқа қўлтига соҳибдорда ва баъзан бир мутахасссларнинг, масалан, турли инверсияларнинг тузилиши ва қўлланилиши назарда асосланган амалиётларидир.

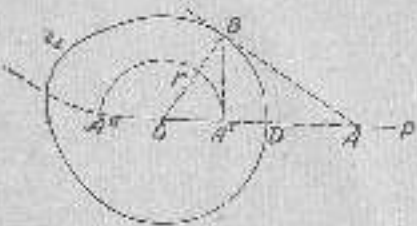
49-§. ИНВЕРСИЯНИНГ ТАЪРИФИ ВА ТУРЛАРИ

Таъриф. Агар бирор айлана марказидан чиққан нуқтадан шундай нуқтадан шу айлана марказига бўлган масофаларнинг қўлайтириши айлана радиусининг квадратига тенг бўлса, бундай шундай нуқта бу айланага (ёки унинг марказига) нисбатан инверсион жос нуқталар дейилади.

Бу таърифга кўра, бирор u , (O, r) айлана текиклостида $(O$ нуқтадан бошқа) A ва A' нуқталар шу айланани нисбатан инверсион жос бўлиши учун булар қуйидаги шундай талабни қанаъатлантириши тарти:

- 1) A' нуқта OA нуқтада ётади,
 - 2) $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ муносабат жавбдор,
 - 3) O нуқта A ва A' нуқталар оралигида ётмайди.
- Юзорида айтилган u айлана — инверсиянинг яқоси u айланаси ёки инверсия айланаси дейилади, бу айлананинг маркази — инверсия маркази (ёки нуқта) дейилади; инверсия айланасининг радиуси — инверсия радиуси, радиусининг квадрати — инверсия даражаси (ёки коэффициент) дейилади.

Таъриф. u (O, r) айлана текиклостидаги $(O$ дан бошқа) ҳар бир A нуқтага OA нуқтада ётган ва $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ шартни қанаъатлантирувчи A' нуқтага ўлтигувчи акселатирини — инверсион акселатирини ёки инверсия дейилади (163-сунат).



Биз бундан акселатирини, қиёсатча, ушбу

$$H_0^-(A) = A' \quad (2)$$

символ орқали белгилаймиз ва A нуқтанинг O марказига ва r^2 даражаси инверсияси A' нуқтадир, деб ўқиймиз.

Таъриф. F фигуранинг ҳамма нуқталарига инверсион жос бўлган нуқталардан тузилган F' фигура F фигураси инверсион жос фигура дейилади, ёки қисқати, F фигуранинг инверсияси F' фигурадир, деб айтилади ва уш қуйидагича ёзилади:

$$H[F] = F'. \quad (2)$$

Агар u (O, r) айлананинг радиуси $r = 1$ бўлса, (1) муносабат

$$|OA| \cdot |OA'| = 1 \quad (1)$$

кўринишда бўлади. Бундан:

$$|OA| = \frac{1}{|OA'|} \quad \text{ёки} \quad |OA'| = \frac{1}{|OA|}.$$

Демак, OA ва OA' кесмаларининг қийматлари бир-бирига тесқари. Шунинг учун инверсия акселатирини тесқари радиуслар акселатирини деб ҳам юртилади.

Агар OA' кесма ўрнига унга қарини-қарини бўлган шундай $OA'' = |OA'|$ кесмаки маъфий ҳисоблаб олесак, бу ҳолда (1) муносабат қуйидаги кўринишда бўлади:

$$|OA| \cdot |OA''| = r^2. \quad (3)$$

Айлана марказига бўлган масофалари орасидаги муносабат (3) даги каби тесқилик билан ифодаланган A ва A'' нуқталар инверсион қарама-қарши нуқталар деб юртилади.

(1) муносабатни қанаъатлантирувчи инверсия жосбати даражаси инверсия ёки гиперболик инверсия дейилади, (3) ни қанаъатлантирувчи инверсия эса маъфий даражаси инверсия ёки эллиптик инверсия дейилади. 163-сунатдаги A нуқтанинг гиперболик инверсияси A' нуқта, эллиптик инверсияси эса A'' нуқта бўлиб, улар O марказга нисбатан ўзаро симметриклар, A , A' ва A'' нуқталар орасидаги муносабатни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$H_0^-(A) = A';$$

$$H_0^-(A') = A'';$$

$$Z_0(A') = A''.$$

Ушбу уч нуқта орасидаги муносабатни яна ушбу шаклда ёзиш мумкин:

$$H_0^-(A) \cdot Z_0(A') = H_0^-(A'').$$

Демак, инверсия марказига нисбатан ҳар бир гиперболик инверсияни симметрик акселатирини орқали ўша инверсия айланасига нисбатан эллиптик инверсияга келтирилиши мумкин. Шунинг учун бу шундай инверсиядан биттастекли, масалан, гиперболик инверсияни ўрнатилган кифоя.

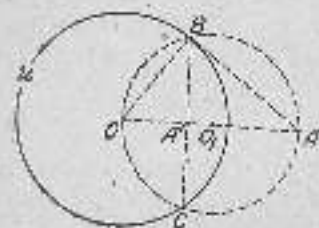
Инверсия¹ нукталарнинг таърифига асосан инверсия айланаси текислигида ётган (инверсия марказидан бошқа) ҳар қандай нукта учун шу айлананинг нисбатан инверсион мос нукта топиш мумкин.

Инверсия айланаси текислигида ётган бирор нуктани инверсион аксантириш усулини инверсиянинг таърифидан ушбу

$$|OA| \cdot |OA'| = r^2 \quad (1)$$

формуладан ҳал қилиб чиқариш мумкин.

Бу формулага кўра, 164-чизмадаги OAB учбурчлининг $|OB| = r$ катети айни вақтда (O, r) инверсия айланасида радиуси бўлиб, ундаги O нукта эса ўша катетнинг бир учи бўлиши билан бирга, у инверсия маркази ҳамдир. Буқдан — учбурч тўғри бурчлигининг B учининг инверсия айланасида ётиши, яъни AB кесма (O, r) айлана OB радиусининг B учиди урғини аксантириш маълум бўлади.



164-чизма.

Бу муқоамадан, берилган A нуктадан берилган (O, r) айлананинг нисбатан инверсион мос A' нуктани топиш усули келиб чиқади:

I. Инверсия айланаси $\kappa (O, r)$ дан ташқариди берилган A нуктани инверсион аксантириш учун OA кесмани диаметр қилиб ёрдамли айлана чизилади (164-чизма). Икки айлананинг ўзаро кесилиши B ва C нукталарида туташтирувчи BC агар OA нур билан кесилсн, натижада A' нуктани беради. Ҳақиқатан, асосийда кўра тўғри бурчлиги ABO учбурчлиги $(BA') \perp (OA)$ бўлгани учун

$$|OA| \cdot |OA'| = |OB|^2.$$

II. Инверсия айланаси ичиди берилган A' нуктани инверсион аксантириш учун OA' нурга унинг A' нуктасиди перпендикуляр ўтказилади; бу перпендикулярнинг инверсия айланаси билан кесилиши B (ёки C) нуктаси оқибди шу айлананинг урғини ўтказилади. Бу урғини билан OA' нурнинг кесилишидан ҳосил бўлган A нукта A' нуктадан инверсияси бўлади. Бу ҳам юқоридикидек 164-чиzmaning асосийдиди фойдаланиб ишлатилади.

III. Агар берилган нукта инверсия айланасида ётса, ушбу инверсия нукта шу нуктанинг ўзи бўлади.

Инверсия аксантириш қўшмаги хоссаларга эга:

1. Инверсия мос нукталар орасида ўзаро инверсион мослик мавжуд, яъни агар A' нукта A нуктага инверсион мос бўлса, A нукта ҳам A' нуктага инверсион мос бўлади.

Бу хоссени қисқача бундай кўрсатиш қулайроқ:

Агар $H_0^*(A) \equiv A'$ (1) мавжуд бўлса, у ҳолда $H_0^*(A') \equiv A$ (2) ҳам мавжуд бўлади.

Ҳақиқатан, агар (2) ни илкор этсн,

$$H_0^*(A') = B \quad (3)$$

мавжуд дейишга тўғри келмас.

Инверсиянинг таърифига кўра: (1) дан $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ ва (3) дан эса $|OA'| \cdot |OB| = r^2$ уқили бўлади.

Бу икки тенгликдан $|OB| = |OA|$, яъни фараз қилинган B нукта A нуктадан ўзгача аксантириш маълум бўлади.

Демак, A ва A' нукталар орасида икки қара инверсион мослик — ўзаро инверсион мослик мавжуд дегн маламиз. Бу инверсион мосликнинг инволюцион мослик эканлиги кўрсатилади.

II. A нукта OA нур бўлича O марказдан чексиз узоқлашган сари, A' нукта O марказга чексиз яқинлашади ва, асосан, Бунинг тўғрилиги

$$|OA'| = \frac{r^2}{|OA|}$$

муносабатдан аниқлашмиз. Тенгликнинг ўнг томонидаги касрнинг сурати нолдан фарқли ўзгаришсиз миқдор бўлгани учун касрнинг махражиди чексиз ўсиши билан, касрнинг қиймати нолга яқинлади. Лекин A нукта O марказ билан устма-уст тушганда $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ шартни қаноатлантирувчи ҳеч қандай A' нуктани топиб бўлмайди, шу сабабли Евклид текислигида инверсия марказига инверсион мос нукта бўлмайди.

Шунинг учун инверсияни ўрганишда, инверсия айланасининг текислигини бу айлананинг марказисиз қаралади (инверсия марказини «ўйиб олиб ташланган» деб тасаввур этилади).

III. Текислик нукталарини инверсион аксантиришда:

а) инверсия айланасининг нукталари ўз ўрнини ўзгартирмайди;

б) инверсия айланаси ташқарисиди нукталар инверсия айланаси ичкарисиди нукталарга ўтади;

в) инверсия айланаси ичиди (марказдан бошқа) нукталар инверсия айланаси ташқарисиди нукталарга ўтади.

Ҳақиқатан, бу жумлаларнинг тўғрилигини $|OA| \cdot |OA'| = r^2$

(1) дан ксантириб чиқариш мумкин;

¹ Агар икки қара аксантириш айлан аксантириш бўлса, буни инволюцион аксантириш дейилади.

а) A нукта инверсия айланасида ётганда $|OA| = r$ бўлиб, (1) га асосан $|OA'| = r$ бўлади, яъни A нуктанинг инверсияси шу нуктанинг ўзи бўлади. Бундан инверсия айланасининг нукталари қўшалоқ нукталардан иборатдир, яъни улар инверсияда ўз ўринларини ўзгартирмаслиги маълум бўлади;

б) яъни A нукта инверсия айланасидан ташқарисида ётса, яъни $|OA| > r$ бўлса, (1) муносабат уриши бўлиши учун $|OA'| < r$ бўлиши шарт, яъни A' нукта албатта, инверсия айланасининг ичиди ётади ва, аксинча, $|OA| < r$ бўлса (1) га кўра, $|OA'| > r$ бўлиши шарт, яъни A нукта албатта айлана ташқарисида ётган керак.

IV. Инверсион аксиантиршда инверсия марказидан чиққан нурнинг айлана ичидида бўлгани унинг ташқи бўлагига ўтади ва, аксинча.

Бунинг тўғрилиги III хоссанинг α'' ва β'' нукталаридан маълум бўлади.

V. Инверсия айланасининг радиуси чексиз катталаниб бораган сари инверсия — шу айлананинг нисбатан симметрик бўлади. Ҳақиқатан, инверсия айланасининг радиуси чексиз ортиб, айлана тўғри чизиққа яқинлашган сари, инверсион аксиантиршнинг лимитдаги тўғри чизиққа нисбатан бажарилган симметрик аксиантиршдан фарқи деярли қолмайди.

Бунга ишониб учун 163-чиоҳадаги OA нур билан айлананинг кесилган нуктасини D орқали белгилэй, яна қуйидаги шартларни ҳам қабул қилайлик:

агар $|DA| = a$ десак; $|OA| = |OD| + |DA| = r + a$ бўлади;

агар $|A'D| = b$ десак; $|OA'| = |OD| - |DA'| = r - b$ бўлади.

OA ва OA' кесмаларининг кейинги ифодаларини (1) форкулага қўйсак,

$$(r + a) \cdot (r - b) = r^2$$

тенглик ҳосил бўлади.

Бу тенгликдан

$$a - b = \frac{ab}{r} \quad (4)$$

тенглик келиб чиқади.

Энди буидаги r чексиз орта борса, яъни айлана тўғри чизиққа яқинлаша (4) тенгликнинг ўнг томони нолга интилиб,

$$a - b = 0 \text{ ёки } a = b \quad (5)$$

тенглик ҳосил бўлади.

VI. Бир марказга нисбатан турли даражаларда кетма-кет бажарилган икки инверсия ўша марказга нисбатан бажарилган тохотетиядир, яъни

$$H_0^2(A) + H_0^2(A') \equiv H_0^{(2)}(A).$$

Ҳақиқатан

$$H_0^2(A) \equiv |OA| \cdot |OA'| = r^2, \quad (1)$$

$$H_0^2(A') \equiv |OA' \cdot OA'' = r^2. \quad (2)$$

(2) тенгликни (1) га қўйиб бўлсак, қуйидаги чиқади:

$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \left(\frac{r}{r}\right)^2 \quad (3)$$

Бу эса, 34-§ да берилган таърифга мувофиқ: $H_0^{(2)}(A) \equiv A''$.

Толшириқлар

- I. Инверсион аксиантиршнинг ҳаракат эквиваленти исбот қилинот.
- II. Инверсион аксиантиршлар тўғрисида гуруҳи бўладиган ё йўқли (сабаб)?

§1. ИНВЕРСИОН НУҚТАЛАР ИККИ ЖУФТИНИНГ МУҲИМ БИР ХОССАСИ

Инверсион нукталар икки жуфтининг муҳим бир хоссаси тубанди теорема билан ифодаланади:

Теорема. Бир айлананинг нисбатан инверсион нукталарнинг икки жуфти (агар улар бир тўғри чизиқда ётмаса) инверсия айланасига ортогонал бўлган айланани ётади¹.

и (O, r) айлананиг нисбатан A ва B нукталарининг инверсиялари мос равишда A' ва B' нукталар бўлсин (165-1 чизма).

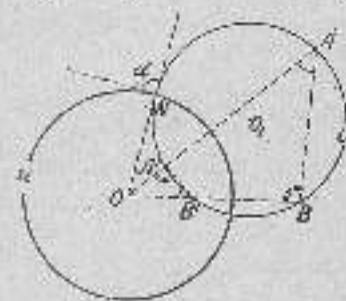
Мака шу тўғрида A, A' ва B, B' нуктадан бир айлана ўтказиш мумкинлигини ва бу айлананинг инверсия айланасига ортогонал бўлишини исбот қилишимиз керак.

Бунинг учун берилган тўғрида нуктадан ҳар иккисини чизмида кўрсатилганча туташтиришдан ҳосил бўлган $ABB'A'$ тўртбурчак қарам-қарши бурчакларининг йиғиндилари 2π га тенглигини исбот қилишга бас. Бунга қуйидагича исбот қилиш мумкин, инверсиянинг таърифига кўра:

$$\begin{aligned} |OA| \cdot |OA'| &= r^2, \\ |OB| \cdot |OB'| &= r^2. \end{aligned}$$

Булардан қуйидаги тенглик чиқади:

$$|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'| \quad (1)$$



165-1 чизма.

¹ Агар икки айлананинг кесилиш нукталарининг бири орқали ўтганга ўтказилган икки уришда бир-бирига перпендикуляр бўлса, буларда икки айланани ортогонал айланалар дейилади.

Бу тенглик асосиди тузилган:

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OB'|}{|OA'|} \quad (1')$$

пропорциядан ва бир бурчагининг умумийлигидан OAB ва $OB'A'$ учбурчларнинг ўхшашлиги маълум бўлади.

Шунинг учун уларнинг мос томонлари қаршисидаги бурчлари конгруэнт бўлади:

$$\angle OBA = \angle OA'B', \quad (2)$$

$$\angle OAB = \angle OB'A'. \quad (3)$$

Чизмадан:

$$OB'A' + A'B'B = 2d, \quad (4)$$

$$OA'B' + A'A'B' = 2d. \quad (5)$$

(3), (4) тенгликлардан изланувчи биринчи тенгликни, яъни:

$$OAB + A'B'B = 2d \quad (4')$$

тенгликни, шунингдек, (2) билан (5) дан изланувчи:

$$OBA + B'A'A = 2d \quad (5')$$

иккинчи тенгликни жамлашамиз.

Демак, $ABBA'$ тўртбурчакка ташқи айлана ёкиши мумкин экан, яъни инверсион нуқталарнинг икки жуфти бир айланادا ётар экан.

Энди, ўша тўрттала нуқтадан ўтувчи σ айлананинг инверсия айланасига ортогонал бўлишини, яъни 165-1 чизмада μ ва σ айланаларнинг ўзаро ортогонал эканлигини исбот қиламиз.

Буни қуйидаги афзалар билан исботлаш мумкин.

Биринчи йўл. Маълумки, бирор айлананинг марказидан иккинчи айланига ўтказилган ўрнма кесмакнинг узунлиги биринчи айлана радиусига тенг бўлса, бундай икки айлани бир-бирига ортогонал бўлади. Шунга ҳурр., 165-1 чизмадаги ON ўрнма кесмакнинг r радиусга тенглигини исбот қилишга стаймиз.

Кесувчининг умумий хоссасига мувофиқ, чизмадан O нуқтадан σ айланани ўтказилган OB кесувчидаги ON ва OB' кесмавларнинг қўпайтмаси ушдан ON ўрнмаканин квадратига тенг:

$$|OB| \cdot |OB'| = |ON|^2. \quad (6)$$

Иккинчи томондан, инверсионнинг теоремасига мувофиқ,

$$|OB| \cdot |OB'| = r^2 \quad (1')$$

тенгликни ёза оламиз.

Кейинги иккита тенгликдан $|ON|^2 = r^2$ ёки $|ON| = r$ эканлиги маълум бўлади.

Демак, μ ва σ айланалар ўзаро ортогонал айланалардир. μ билан σ айланаларнинг ортогонал бўлишини қуйидагича ҳам исбот қилиш мумкин.

Иккинчи йўл. Маълумки, ўзаро ортогонал бўлган айланаларда марказлар масофасининг квадрати, радиуслари квадратларининг айғиндисига тенг, яъни $\mu(O, r)$ ва $\sigma(O_1, r_1)$ айланалар ўзаро ортогонал бўлиши учун:

$$|OO_1|^2 = r^2 + r_1^2$$

тенгликнинг ўринли бўлиши шарт, μ ва σ айланалар учун бу шарт тўлиқ bajarиллади. Ҳақиқатан ҳам, 165- II чизмадаги σ айланиси шундай A нуқта оламики, OA тўғри чизма O_1 нуқтадан ўтсин. Бу ҳолда тубандагиларни ёза оламиз:

$$|OO_1| = |OA'| + |A'O_1| = |OA'| + r_1.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтараяйлик:

$$\begin{aligned} |OO_1|^2 &= (|OA'| + r_1)^2 = |OA'|^2 + 2|OA'| \cdot r_1 + r_1^2 = \\ &= |OA'|^2 + 2r_1 + r_1^2. \end{aligned}$$

Шартлихиса мувофиқ:

$$|OA'| = |OA'| + 2r_1$$

тенглик хавжуд бўлгани учун буни олдинги тенгликка қўйиб, қуйидаги натижага келишим:

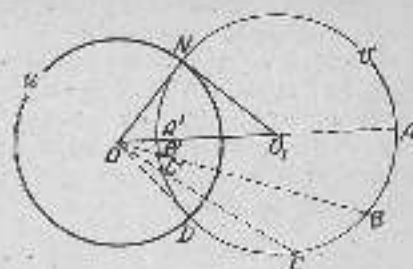
$$|OO_1|^2 = |OA'|^2 + 2r_1 + r_1^2 = r^2 + r_1^2.$$

Шунинг билан μ ва σ айланаларнинг ортогоналлиги исбот қилинди.

165- I чизмадаги AB ва $A'B'$ тўғри чизмаларнинг хоссаси келгуси теоремаларни исбот қилишда ва баъзи бир масалаларни ечилишда керак бўлади. Шунинг учун бу хоссани инфодаловчи таъриф билан тавлишоб ўтамиз.

1-таъриф. Агар бирор бурчанинг бир томонида ётган A билан A' ҳамда иккинчи томонида ётган B билан B' нуқталар шу бурчанинг учига қисбатан бирор даражада инверсион мос бўлса, буларга AB ва $A'B'$ тўғри чизмаларни ўлк бурчакка нисбатан *айттириш* тўғри чизмалар дейилади.

2-таъриф. Агар бирор бурчанинг томонларини кесиб ўтувчи икки тўғри чизмадан бири шу бурчанинг бир томони билан тузган бурчли, иккинчи тўғри чизманинг ўша бурчак иккинчи томони билан тузган бурчакка тенг бўлса, бундай



165- II чизма.

икки тўғри чизиқ шу бурчакка нисбатан *антипараллел* тўғри чизиқлар дейлади.

Натижалар. Агар инверсия маркази билан бир тўғри чизиқда ётмаган A ва B нуқталарга A' ва B' нуқталар инверсион мос нуқталар бўлса, бу ҳолат:

I. $\angle OAB$ бурчакининг томонларини AB ва $A'B'$ мос тўғри чизиқлар билан кескишдан ҳосил бўлган тубандаги бурчаклар конгруент бўлади:

$$\angle OAB \cong \angle OBA' \text{ ва } \angle OBA \cong \angle OA'B'$$

(бунинг тўғрилиги юқорида исбот қилинди).

II. Агар $\angle OAB$ бурчакининг томонларини AB ва $A'B'$ тўғри чизиқлар билан кескишдан ҳосил бўлган бурчаклар учун

$$\angle OAB \cong \angle OB'A' \text{ ва } \angle OBA \cong \angle OA'B'$$

бўлса, A билан A' ва B билан B' нуқталар бурчак учига нисбатан ўзаро инверсион мос бўлади.

Бунинг исботи юқорида қилинган исботнинг тескарисича бажарилади.

Бунда кўрсатилган бурчакларнинг тенглигидан $\angle OAB$ ва $\angle OB'A'$ учбурчакларининг ўхшашлиги маълум бўлади ва шунга асосан:

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OB'|}{|OA'|} \text{ ёки } |OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'|.$$

Бу муносабатдан A билан A' нинг ва B билан B' нинг O марказга нисбатан $r^2 = |OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'|$ даража билан инверсион мос экани маълум бўлади.

III. Инверсия маркази ва бир жуфт инверсион нуқталар — инверсияни аниқлаб олади.

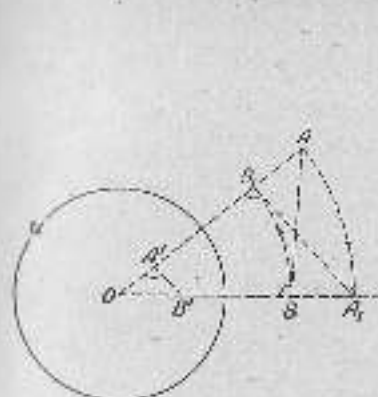
Ҳақиқатан, инверсия айланасига нисбатан берилган инверсион нуқталарнинг бир жуфти ёрдамда шу айлана текислигидаги ҳар бир нуқтани инверсион аксиантириш мумкин.

Чунончи, 166-чизмадаги A ва A' инверсион нуқталар ва яна бирор B нуқта ҳам берилса, бу B нуқтага мос B' нуқтани қуйидагича топиш мумкин: OA нурда $|OB_1| = |OB|$ кесмини ва OB нурда $|OA_1| = |OA|$ кесмини ширитиб, бундан ҳосил бўлган A_1 ва B_1 нуқталар туташтирилади. Берилган A' нуқтадан ўтказилган $(A'B')$ (B_1A_1) тўғри чизиқ OB нур билан кескишиб, ноланган B' нуқтани берилади. Ҳақиқатан, асосийсига қура (кейинги икки тўғри чизиқнинг параллеллиги ва $\angle AOB \cong \angle A_1OB_1$ сабабли) қуйидагилар маъжуддир:

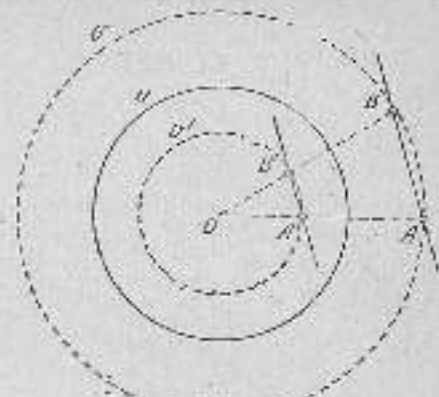
$$\angle OA'B' \cong \angle OB_1A_1 \cong \angle OBA \text{ ва } \angle OB'A' \cong \angle OA_1B_1 \cong \angle OAB.$$

Юқоридаги иккинчи натижага биноан, B ва B' нуқталар ўзаро инверсион мос бўлади.

IV. Агар бирор $u(O, r)$ айланасига нисбатан A ва B нуқталар A' ва B' нуқталар билан инверсион мос бўлиб $|OA| = |OB|$ бўлса, $(AB) \parallel (A'B')$ бўлади.



166-чизма.



166-I чизма.

Ҳақиқатан, берилган $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ ва $|OB| \cdot |OB'| = r^2$ лардан бирини иккинчисига ҳадлаб бўлсак, $|OA'| = |OB'|$ чиқади. Демак, (166-I чизмага кўра) $|OA'| : |OB'| = |OA| : |OB|$ бўлади. Бундан, $(AB) \parallel (A'B')$ эканлиги маълум бўлади.

Хулоса. Инверсия айланасига концентрик айланада ётган нуқталарга инверсион мос нуқталар иккинчи концентрик айланада ётади.

Бунинг тўғрилиги 166-I чизма ҳақида юргизилган муҳокамадан кўрилади.

V. Агар инверсия айланаси $u(O, r)$ текислигида жойлашган AB , OA ва OB кесмилар маълум бўлса, A ва B нуқталарининг шу айланасига нисбатан инверсион мос A' ва B' нуқталари орасидаги $A'B'$ масофани топиш мумкин.

Ҳақиқатан, 166-чизмадаги $\triangle AOB$ ва $\triangle A'OB'$ дан ушбу пропорцияли ёзиб:

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|OB|}, \quad (1)$$

бунинг ўнг томонини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{|OA'|}{|OB|} \cdot \frac{|OA|}{|OA|} = \frac{r^2}{|OA| \cdot |OB|}. \quad (2)$$

(1) ва (2) тенглаклардан

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{r^2}{|OA| \cdot |OB|}. \quad (1')$$

ёки ҳазанса

$$|A'B'| = |AB| \cdot \frac{r^2}{|OA| \cdot |OB|} \quad (1'')$$

ҳосил бўлади.

Тўғри чизикка инверсион мос фигура тубандаги теоремалар билан аниқланади.

1-теорема. *Инверсия марказидан ўтувчи тўғри чизикка инверсион мос фигура шу тўғри чизикнинг ўзиндир.*

Ҳақиқатин, теоремада айтилган тўғри чизикнинг инверсия айланаси билан кесилиш нуқталарининг ҳар бири (инверсия айланасига қарашли бўлган учун) инверсион акслантиришда унга нуқтанинг ўзига ўтади (50-А §. IV ҳосса).

Иккинчи томондан, инверсия марказидан чиққан нурнинг ҳар бир нуқтаси инверсия акслантиришда яна ўша нурда ўтувчи иккинчи бир нуқтага ўтади (49-§).

Демак, теорема ўринли.

Бунда ҳам қуйидагиларни ҳам назарда тутилади:

а) инверсия марказидан чиққан нурнинг инверсия айланаси иккида ажйланган бўлган, ўша нурнинг ташқи бўлигига ўтади ва, аксинча (167-чизма);

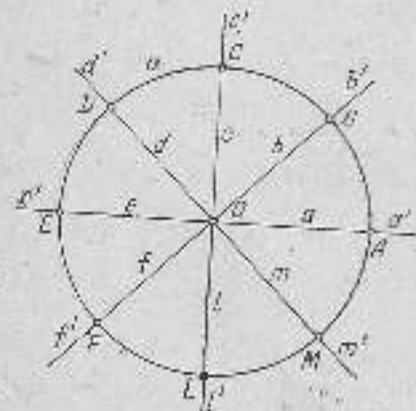
б) инверсия марказидан ўтувчи тўғри чизикнинг O нуқтасига (яъни инверсия марказига) ҳеч қандай нуқта инверсион мос келмайдиганлиги унинг ўзи ҳам ҳеч қандай нуқтага инверсион мос бўлмайди.

2-теорема. *Инверсия марказидан ўтувчи тўғри чизикка инверсион мос фигура инверсия марказидан ўтувчи айланadir.*

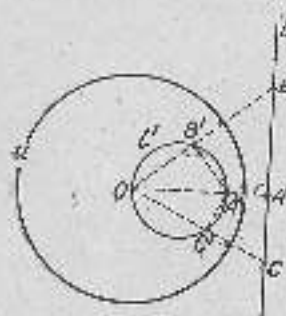
Бу теоремани турли айланлар билан исбот қилиш мумкин; бу шарафда қуйидаги икки айлан кўралиш:

Биринчи айлан. Инверсия айланасининг O марказидан берилган l тўғри чизикни OA перпендикуляр тушириб, бу перпендикулярнинг асоси бўлган A нуқтага инверсион мос A' нуқтани топишимиз (167-1 чизма).

Сўнгра l тўғри чизикнинг ихтиёрий B нуқтасини инверсион акслантириб, B' нуқтани топишимиз. Энди



167-1 чизма.



167-2 чизма.

A' ва B' нуқталарининг қандай фигурага қарашли эканлигини аниқлаймиз.

Бунинг учун A' ва B' нуқталарни ўзаро туташтириб, AB ва $A'B'$ кесмаларининг AOB бурчакка нисбатан антипараллеллигини фойдаланамиз.

Бундан олдинги § даги 1 натижага биноан:

$$\angle O'BA' = \angle OAB$$

бўлиб, буларнинг кейингиси ясаллигига кўра тўғри бурчак бўлгани учун олдингиси ҳам тўғри бурчак бўлади. Шу сабабдан B' нуқта OA' кесмиги диаметр қилиб чиқилган l' айланда ўтади. Агар B нуқта l тўғри чизик бўлиши ҳаракатланса, унга мос бўлган B' нуқта l' айлана бўлиши ҳаракатланади. Аксинча, l' айлананинг (O дан бошқа) ҳар бир C' нуқтаси учун l тўғри чизикка унга инверсион мос бўлган C нуқтани топиш мумкин.

Ҳақиқатан, агар OC' нур l тўғри чизик билан C нуқтада кесилса, $\angle OCA' = \angle OAC = 90^\circ$ бўлгани учун ўтган § даги II натижага асосан $|OC| \cdot |OC'| = |OA| \cdot |OA'| = r^2$ бўлади. Бу эса C ва C' нуқталарнинг ўзаро инверсион мос эканлигини кўрсатади.

Иккинчи айлан. Бунда ҳам биринчи айланга айтилган A ва B нуқталарга мос A' ва B' нуқталарни топиб, қуйидагиларни муҳикама иритаемиз.

Бундан олдинги § даги теоремага асосан A, A', B, B' нуқталардан ўтувчи a айланани қизайлик (167-II чизма). $A'AB$ бурчак ясаллигига кўра, тўғри бурчак бўлгани учун $A'D'B$ ёй ярим айлана бўлади.

Шунинг учун a айлананинг иккинчи ярмига тиралган $A'D'B$ бурчак ҳам тўғри бурчак бўлиб, унга қўшни бўлган бурчак $OB'A'$ ҳам тўғри бўлади. Демак, B' нуқта OA' диаметри билан чиқилган айланда ўтади.

Энди l' айлананинг (O дан бошқа) ҳар бир C' нуқтаси тўғри чизиккаги бирор C нуқтага инверсион мос бўлишини кўрсатаемиз. Бу фикрининг тўғрилигига қуйидаги айлан билан исбот қилиш мумкин. OC' нур l тўғри чизик билан C нуқтада кесилсин. 167-II чизмалари фигураларининг ясаллигига биноан қуйидаги тенгликлар мавжуддир:

$$\hat{1} - \hat{2} - \hat{3} = 90^\circ, \quad \hat{1} - \hat{3} = 180^\circ.$$

Бундан $A'C'CA$ тўртбурчакка ташқи айлана қизиб мумкинлиги билинади. l айланани қизиб, унга ўтказилган OC' ва OA кесувчилар учун қуйидагиларни билимиз:

$$|OC| \cdot |OC'| = |OA| \cdot |OA'| = r^2.$$

Бу тенглик C ва C' нуқталарнинг ўзаро инверсион мослигига билдиради. Демак, l' айлананинг (O дан бошқа) ҳар бир

С нуктаси учун l тўғри чизиқда унга мос С нукта топиш мумкин.

Демак, инверсия айланаси текишлигидаси бирор А нукта инверсия марказидан ўткучи тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилганида, унинг образи бўлган А' нукта инверсия марказидан ўткучи янақ бир айлана чизилди; А' нукта ўзининг бундай ҳаракатида инверсия марказидан дуртаб⁴ ўтади.

Юқоридегилардан, тўғри чизиқни инверсион акслантиришнинг қуйидаги умумий усули маълум бўлади: инверсия марказидан ўткучи тўғри чизиқнинг инверсиясини чизити учун инверсия маркази (О) дан бу тўғри чизиққа перпендикуляр ўтказиб, унинг тўғри чизиқдаги А нукта белгиланади (4-§; 14-масала); А нуктани инверсия акслантириб А' нукта топилади (30-§). Никоят OA' кесманн диаметр ҳилиб айлана чизилади. Шу айлана берилган тўғри чизиқнинг инверсион акси ҳисобланади.

Шуни билан бирга, тўғри чизиқни инверсион акслантиришда учрайдиган хусусий ҳолатларни кўзлаб кечириб ўтайлик:

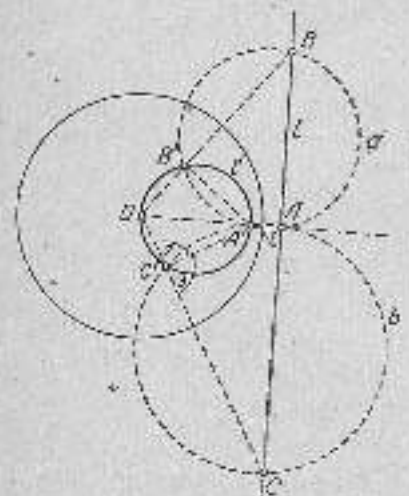
I. Инверсия айланаси билан умумий нуктага эга бўлмаган тўғри чизиқни инверсион мос фигура инверсия айланаси янада ётиб, унинг марказидан ўткучи айланадир (167-II чизма).

II. Инверсия айланасига уринувчи тўғри чизиқни мос фигура инверсия марказидан ўтиб, ўша тўғри чизиқда уринувчи айланадир (167-III чизма).

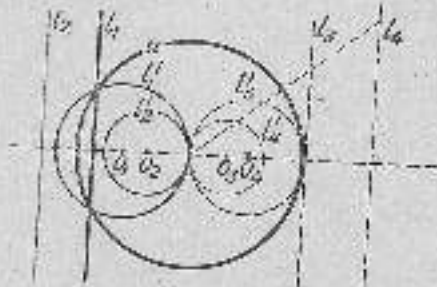
III. Инверсия айланасини кесиб, унинг марказидан ўткучи тўғри чизиқни инверсион мос фигура инверсия маркази ва берилган тўғри чизиқнинг инверсия айланаси билан кесилиш нукталаридан ўткучи айланадир (167-III, IV чизмалар).

IV. Инверсия марказидан ўткучи параллел тўғри чизиқларга инверсион мос фигуралар инверсия марказидан бир-бирига уринувчи айланадир ва, аксинча (167-III ва IV чизма).

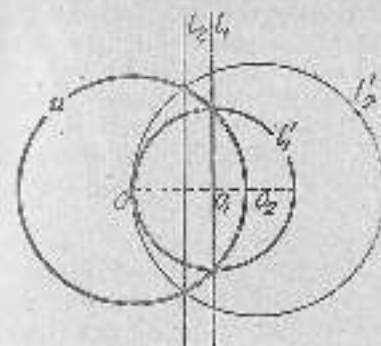
V. Инверсия марказидан ўтмайдиган, бироқ, ўзаро кесил



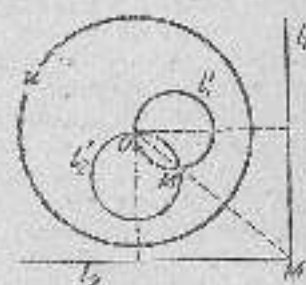
167-II чизма.



167-III чизма.



167-IV чизма.



167-V чизма.

шувчи тўғри чизиқларга инверсион мос фигуралар инверсия марказидан ўтиб, яна бир нуктада кесилишувчи икки айланадир (167-V чизма). Бу айланаларнинг О дан бошқа кесилишган нуктаси берилган тўғри чизиқлар кесилиш нуктасига мос бўлади. Буни тўғри чизиқнинг инверсия акси деб қилиш.

Топишариқлар

1°. 2-теорема. Антипаралел тўғри чизиқлар жисмасидан фойдаланиб инверсия қилиш.

II°. Ўзаро уринувчи айлана билан тўғри чизиқнинг бирини инверсия акси фойдаланиб инверсия маркази ва радиусини топиш.

III°. Ўзаро кесилишувчи айлана билан тўғри чизиқнинг бирини инверсия акси фойдаланиб инверсия маркази ва радиусини топиш (бундай нукта нечта топилади).

IV°. Икки тўғри чизиқдан бирини инверсия акси фойдаланиб инверсия маркази топиш.

33-§. АЙЛАНАГА ИНВЕРСИОН МОС ФИГУРА

1-теорема. Инверсия марказидан ўткучи айланаси инверсион мос фигура инверсия марказидан ўткучи тўғри чизиқдир.

Ҳақиқатан, 167-I чизмадаги l' айланаси инверсион фигура, инверсия марказидан ўткучи бўлгани учун l тўғри чизиқ бўлади (30-A § даги 1-қосса).

Демак, инверсия марказидан ўткучи l айланаси инверсион мос тўғри чизиқ қуйидагича аниқлади: даставвал, иккала айлананинг марказлари чизити ўтказилади (167-I чизма); бу чизиқнинг берилган l' айлана билан кесилишган (инверсия марказидан бошқа) А' нуктасини инверсион акслантириб, А нукта топилади (30-§); сўنгра OA , тўғри чизиқни унинг А нуктаси орқали l перпендикуляр ўтказилади.

2-теорема. Инверсия: *марказидин ўтмовчи айланани инверсион мос фигура ўша марказдан ўтмовчи айланадир.*

Инверсия маркази айни нуқта инверсион айланаларнинг ўхшашлик маркази ҳам бўлади.

Буни исбот қилиш учун $\omega(O, r)$ инверсия айланаси билан берилган $\omega'(O_1, r_1)$ айлананинг марказлар чизигини чизамиз (168-1 чизма). Марказлар чизиги ω айланани A ва B нуқталарда кесиб, бу нуқталарни ω' айланани инверсион алмаштирайлик.

A ва B нуқталарга инверсион мос нуқталар A' ва B' бўлсин, $A'B'$ кесмени диаметр қилиб ω' айлана чизамиз. Кейинги айлана берилган айланани инверсион мос бўлади. Бунинг тўғрисидаги исбот қилайлик. ω айлананинг иккиёрчи P нуқтаси ω' айланани инверсион бўлган P' нуқтаси тоғиб, бу нуқтанинг ω' айланани қарашли бўлишини кўрсатамиз. P' нуқтанинг ω' айлананида ётувчи ишорини учун уш A' ва B' нуқталар билан туташтиришдан ҳосил бўлган $A'P'B'$ бурчакнинг тўғри бурчак эканлиги исбот қилинса кифоя. Бунинг учун $A'P'B'$ бурчакнинг тўғри бурчак бўлган APB бурчакка тенглиги исбот қилинса бўл.

52-§ даги теореманинг 1 натижасига мувофиқ, 168-1 чизманинг тузилишига таяниб, яна бу тенгликларни ёзимиз,

$$\angle OPB \cong \angle OB'P',$$

$$\angle OPA \cong \angle OA'P'$$

Бу тенгликларнинг биринчисидан иккинчисини айирсак, қуйидаги тенглик чиқади:

$$(\angle OPB - \angle OPA) \cong (\angle OB'P' - \angle OA'P').$$

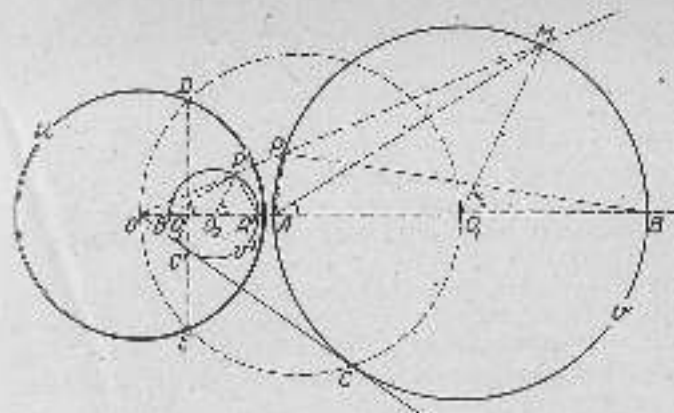
Чизманинг тузилишига мувофиқ, бу тенгликнинг чап томони $\angle APB - 90^\circ$ га ва унғ томони эса $\angle A'P'B'$ бурчакка тенг бўлгани учун қийинги бурчакнинг ҳам тўғри бурчак эканлиги маълум бўлади.

Шунинг билан теореманинг биринчи қисми исбот бўлди. Демак, P нуқта ω айланани бўйича ҳаракат қилганда P' нуқта $A'B'$ диаметр билан тизилган ω' айланани бўйича ҳаракат қилади.

Агар ω' айлананида ётувчи иккиёрчи бир нуқта олсак, у ω айлананида ётувчи бирор нуқтаси инверсион мос бўлишини кўрсатиш мумкин. Шунинг учун ω айланани инверсион фигура ω' айлана бўлади. 168-1 чизмада O_1 нуқтаси инверсион мос нуқта O_2 нуқтадир.

Буни шунинг ҳам айтиб ўтиш лозимки, инверсион мос ω ва ω' айланаларнинг марказлари ўзаро инверсион мос бўлмайди.

Энди теореманинг иккинчи қисмини исбот қилайлик.



168-1 чизма.

Маълумки, икки айлананинг параллел радиусларининг учлари орқали ўтувчи тўғри чизик билан марказлар чизигининг кесилиш нуқтаси ўша икки айлананинг ўхшашлик маркази бўлади (37-§ ва 125—128-чизмалар).

Шунинг учун OP тўғри чизикнинг P' ва M нуқталарини O_1 ва O_2 марказлар билан туташтирувчи $P'O_1$ ва MO_1 радиусларининг ўзаро параллел бўлишини исбот қилсак кифоя. $\angle OPB \cong \angle OB'P'$ бўлгани учун уларга қўшни бурчаклар ҳам конгруэнт бўлади, яъни

$$\angle BPM \cong \angle O_1B'P'.$$

Умумий MC ёйга тиралганликлари учун қуйидаги икки чизилган бурчаклар ҳам конгруэнт бўлади:

$$\angle BAM \cong \angle BPM.$$

Бу икки тенглакани:

$$\angle O_1B'P' \cong \angle BAM.$$

Буларнинг ҳар бирини 2 марта қатъи бўлган марказий бурчакларни ҳам бир-бирига қуйидагича тенглаштира оламиз:

$$\angle A'O_1P' \cong \angle B'O_1M.$$

Шунинг учун $P'O_1$ ва MO_1 радиуслар ўзаро параллел бўлиб, MP' билан марказлар чизигининг кесилиш O нуқтаси ω ва ω' айланаларнинг ўхшашлик маркази бўлади. Буни параллел радиуслар марказлар чизигининг бир томонида бўлгани учун O нуқта таққин ўхшашлик маркази бўлади.

Шундай қилиб, чизмадаги P' нуқта P нуқтаси инверсион мос ва M нуқтаси эса қоматангик молидир. Агар OM кескичини O марказ атрофида алмайтирсак, уш инверсион мос икки айланани

умумий уриниш ҳолатига келтирсак, M нукта P нукта билан биригиб, битта P уриниш нуктасига ҳосил қилади; P' нукта ҳам иккинчи айлананинг уриниш нуктасига айланади. Демак, инверсион мос бўлган икки айланага инверсия марказидан ўтказилган умумий ташқи уринишнинг P ва P' уриниш нукталари ўзаро инверсион ва гомотетик мос бўлади.

Кейинги теоремага кўра инверсия марказидан ўтмаган айланани инверсион аксантириш учун қўйидаги бўллардан бирини қилатиш мумкинлиги маълум бўлади:

Биринчи йўл. Инверсия айланаси билан берилган σ айлананинг OO_1 марказлар чанни ўтказилади (168- I чизма). Бу чизиқнинг берилган айлана билан кесилиши A ва B нукталарини инверсион аксантириб, A' ва B' нукталар топилади. Сунгра, $A'B'$ кесмади диаметр қилиб σ' айлана чизилади.

Иккинчи йўл. Берилган σ айлананинг OO_1 тўғри чизиқда ётмаган бирор P нуктасини инверсион аксантириб P' нукта топилади (168- I чизма). OP нурини σ айлана билан кесилиши O_1 маркази билан туташтирилади. P' нуктадан $(P'O_1) \parallel (MO_1)$ тўғри чизиқ ўтказилади. Бу тўғри чизиқнинг OO_1 тўғри чизиқ билан кесилишидан изланган айлананинг O_2 маркази ҳосил бўлади. O_2 марказдан O_2P' радиус билан тизилган σ' айлана берилган σ айлананинг инверсияси бўлади.

Энди, учраши мумкин бўлган хусусий ҳолларни кўриб ўтайлик.

I. Агар (168- I чизмадаги каби) σ айлана инверсия айланаси σ' билан умумий нуктага эга бўлмаса ва ундан ташқарида ётса, σ айлананинг инверсион мос σ' айлана σ айлананинг ичига жойлашиб, σ билан умумий нуктага эга бўлмайди.

Бу ҳолда инверсия маркази O нукта инверсия айланаларнинг ташқи ўхшашлик маркази бўлади.

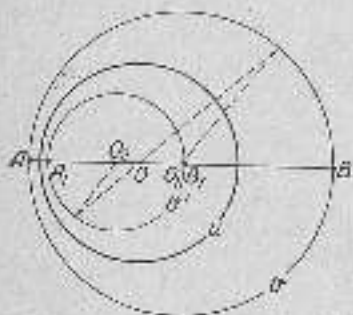
II. Агар (168- II чизмадаги каби) σ айлана берилган σ' айлананинг ичига ётса, σ' айлана σ айлананинг ичига жойлашиб O нукта σ' нурини ичига ётади ва бу нукта инверсион σ ва σ' айланаларнинг ички ўхшашлик маркази бўлади.

III. Агар 168- III ва IV чизмалардаги каби σ ва σ' айланалар ўзаро кесингса, σ' айлана уларнинг кесилиш нукталарида ўтади.

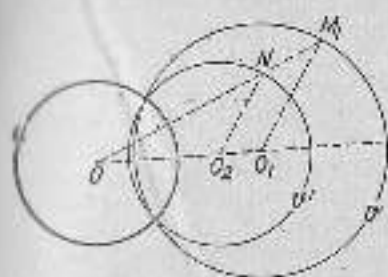
Бу ҳолда инверсия маркази инверсион айланаларнинг баддан ташқи ва баддан ички ўхшашлик марказига тўғри келади.

IV. Агар σ айлана σ' билан бирор нуктада уринса, σ' ҳам унга ўша нуктада уринади (168- V ва VI чизма).

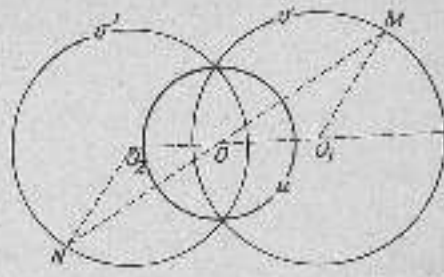
σ ва σ' айланалар ташқи уринувчи бўлганларида инверсия



168- III чизма.



168- III чизма.



168- IV чизма.

маркази ташқи ўхшашлик марказига тўғри келиб (168- V чизма), улар ички уринувчи бўлганларида эса O марказ ички ўхшашлик марказига тўғри келади (168- VI чизма).

V. Агар σ айлана σ' га ортогонал бўлса, σ' айлана σ билан ўсим-ўст тушади; ҳақиқатан, σ айлананинг марказидан σ га ўтказилган кесувчи ва уринмаларнинг ҳоссаларига мувофиқ (165- II чизмада) қўйидагиларни ёзсак бўлади:

$$|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'| = |OC| \cdot |OC'| = |OA|^2 = |OB|^2.$$

Булардан тубандгилар маълум бўлади:

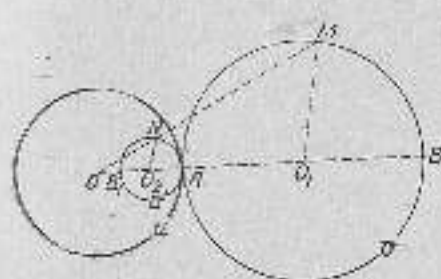
$$H(A) = A', \quad H(B) = B', \quad H(C) = C'.$$

буларга таъиниб, $H[OAN] = DA'N$ дейиш мумкин.

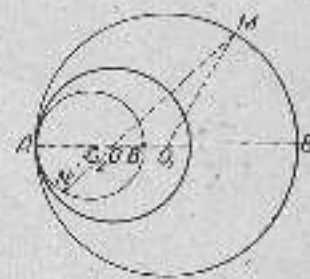
Демак, инверсия айланаси билан ортогонал кесилишган айлананинг ташқи ва ички бўлаги ўзаро инверсион мос бўлади.

Юқорида кўрилган ҳолларни қўйидагича умумлаштириш мумкин:

Инверсия маркази O иккала инверсион мос айланаларнинг ташқарисига ётади (168- I, III ва V чизма), ёки иккаласининг ҳам ичкисига ётади (168- II, IV ва VI чизмалар); биринчи ҳолда инверсия маркази инверсион айлана.



168- V чизма.



168- VI чизма.

ларга таяқчи ўқшанлик маркази бўлиб, иккинчи ҳалда бос уларга икки ўқшанлик маркази бўлади.

VI. Инверсия айланасига қондиқрик айлана унга қонцен-инверсион айланаларнинг икки ва тикверсия маркази бўлади. Бунда: агар аксианувчи ва таққиди ўқшанлик марказлари қатти бўлса, унга мос σ' айлана σ айлана инверсия айланасидан синча σ айлана қексиз қаттиланлиб σ дан қечик бўлади ва, аксарин σ айлана қечиклиб инверсия σ айлана чизикқа интилган ва инверсия айланасига қиқиланган марказига қаттилади. σ айлана қиқиланлиб боради.

Инверсия айланаси ўз-ўзига хос бўлгани учун унинг ҳамма нуқталари ҳам ўз-ўзига мосдир.

VII. Икки инверсион мос A ва A' нуқталардан ўтувчи дагаларнинг эллиптик дастасини айланасига ортогонал бўлган ай-бу дастанинг радикал ўқи бўлади (168-VII чизма).

168-VII чизмада берилган σ (O, r) айланаси нисбатан ин-версион мос бўлган A ва A' нуқталардан ўтувчи ҳамма айла-гоналлигини исбот қилайлик. σ (O, r) айланаси σ га орто-гоналлигини мажбурлигини исбот қилиш кифоя (51-§):

$$|OO_1|^2 = r^2 + r_1^2. \quad (1)$$

Чизманинг тузилишига қўра, қуйидагилар мажбур:

$$|OO_1| = |OA'| + |A'O_1| = |OA'| + r. \quad (2)$$

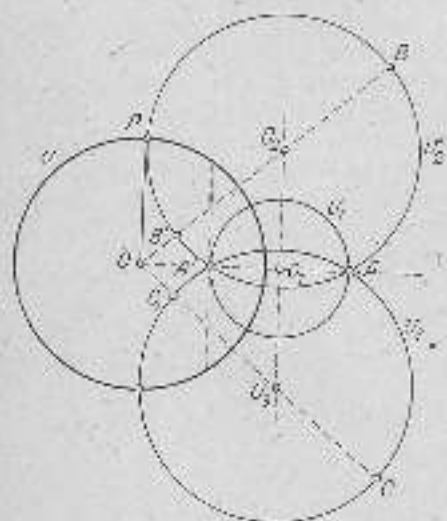
$$|OO_1| = |OA| - |AO_1| = |OA| - r. \quad (3)$$

Бу икки тенгликни ҳадлаб қўйайтириб, берилган $|OA| \times |OA'| = r^2$ муносабатни эъти-борга олсак, изланувчи (1) тенглик ҳалиб чиқади.

A ва A' нуқталардан ўтув-чи бошқа айланаларга нисба-тан ҳам (1) тенгликнинг ма-жбурлигини шундай исбот қи-лиш мумкин. Лекин, бунда қуйидагини назарда тутини ке-рак:

$$|OB| \cdot |OB'| = |OC| \cdot |OC'| = \dots = |OA| \cdot |OA'| = r^2 \quad (4)$$

Бу (4) муносабатдан қўри-надик, инверсия маркази бўл-ган O нуқта A ва A' нуқталар-дан ўтувчи ҳамма айланаларга нисбатан бир хил даражага



168-VII чизма.

га, яъни O нуқтадан бу айланаларга ўқшанлик ҳамма уринмаларнинг кесмалари бир-бирига тенг ва уринини нуқталарнинг геометрик ўрни инверсия айланасидан иборатдир (бунга инверсия айланаси билан OA нуқтини кесиниши нуқтаси қирғайди).

Толшириқлар

I*. Ҳақро таққиди σ ва σ' унинг икки айланасидан боради иккинчи-синча ўқшанлик инверсия айланасига тенг.

II*. Биринчи инверсия маркази таққидида σ иб, бир-бирига уринмалар икки айланасидан боради инверсия марказига тенг.

III*. Ҳақро уринмалар икки айланаси параллел икки тўғри чизикқа ў-тирувчи инверсиянинг маркази қарра қиқиланлиб.

IV*. Берилган айланаси σ иб, унинг инверсия айланасига тенг.

V*. Берилган A ва B нуқталардан ўтиб, берилган σ (O, r) айланаси ортогонал иккунчи айлана чизик.

54-§. ИНВЕРСИЯДА БУРЧАКНИНГ ЎЗГАРМАСЛИГИ

Бу ерда инверсион аксиантиришнинг қуйидаги теорема би-лап ифодаланувчи яна бир муҳим хоссаси билан таърифлик.

Теорема. Икки чизик орасидаги бурчак уларга инвер-сион мос чизиклар орасидаги бурчакка қонгруэнт бўлади.

Чизиклар орасидаги бурчакни ўзгартириб, ақсан-тиришлар қонформ аксиантириш деб аталади.

Бунини исбот қилиш учун (169-чизмадаги) k_1 ва k_2 эгри чизикларга инверсион мос бўлган k'_1 ва k'_2 эгри чизикларини чи-зайлик.

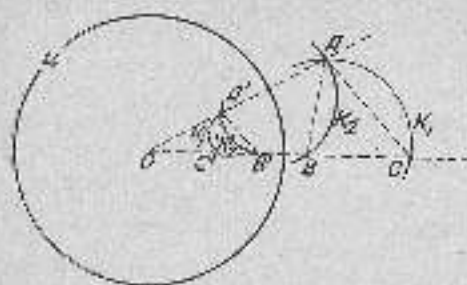
k_1 билан k_2 чизиклар A нуқтада ва k'_1 билан k'_2 эса A' нуқ-тада кесилиши. Бу ҳолда A' нуқта A нуқтага инверсион миқ бўлади.

Инверсия маркази O нуқтадан K_1, K_2, A'_1, K'_2 эгри чизик-ларини мос равишда C, B, C', B' нуқталарда кесиб ўтувчи ихтиёрий бир нуқ ўтказамиз. Сўнгра, OA нуқтини ҳам чизиб, A нуқтинини B ва C нуқталар билан ҳамда A' нуқтинини B' ва C' нуқталар билан туташтирамиз.

Бундаги AB билан $A'B'$ ва AC билан $A'C'$ тўғри чизик-ларини AOC бурчакка нисбатан антипараллел экиллиқдан фойдаланиб (168-I чизмадаги $\angle APB \approx \angle A'P'B'$ ни исбот қи-лишда қўлланилган йўл билан), $\angle B'A'C' \approx \angle BAC$ тенглик-нинг тўғрилигини исбот қилиш мумкин.

Агар OC нуқтинини O ағрефияда айланитиб, AOB бурчакни қиқрайтириб борсак, ундаги B ва C нуқталар A нуқтага, B' ва C' нуқталар эса A' нуқтага қиқиланлиб боради; бу вақтда юқоридаги тенглик ҳамма вақт ўз қучини сақлаб қалади. Бу

I Икки эгри чизик орасидаги бурчак дей, бу чизиклар берилган нуқ-тада уларга ўқшанлик уринмалар орасидаги бурчакка айланади.



169- нима

ҳолда (яъни $\angle AOB$ бурчи O° га яқинлашганда) ундаги AB , AC кесувчилар k_1 ва k_2 ёшларнинг A нуқтасига ўтказилган уринмалар оғивиятига яқинлашиб, $A'B'$ ва $A'C'$ кесувчилар эса k'_1 ва k'_2 ёшларнинг умумий A' нуқтасига ўтказилган уринмалар оғивиятига яқинлашади.

Шу билан бирга, ушбулар ҳам мавжуд:

$$\angle BAC \rightarrow \angle (k_1, k_2)$$

$$\angle B'A'C' \rightarrow \angle (k'_1, k'_2).$$

$\angle AOB = \varphi$ нолга яқинлашганда $\angle BAC = \varphi$ ва $\angle B'A'C' = \varphi'$ нинг қийматлари ўзаро тенг бўлиб қолганини учун уларнинг лимитлари ҳам ўзаро тенг бўлади, яъни

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \varphi = \lim_{\varphi' \rightarrow 0} \varphi'$$

ёки

$$\angle (k_1, k_2) = \angle (k'_1, k'_2).$$

Чизмадан куришадикки, (k_1, k_2) ва (k'_1, k'_2) бурчалар фақат абсолют қийматлари жиҳатидан тенг бўлиб, уларнинг ишоралари ҳар ҳолда.

Топшириқлар

19. Инверсион аксиоматларда айлананинг уриниш саҳналарини текшириш; бунда қуйидаги ҳолларга тўхталин:

а) бирор M нуқтада бир-бирига уринувчи a ва b айланаларнинг текшириш ҳам инверсион марказидан ўтмасан ҳол;

б) M нуқтада бир-бирига уринувчи a ва b айланаларнинг бир-бирини инверсион марказидан ўтмасан, иккинчиси ўтсан ҳол;

в) иккинчи ҳам инверсион марказидан ўтган ҳол.

20. Инверсион аксиоматларида айлана билан тўғри чизманинг уриниш аксиоматиклиги текшириш; бунда қуйидаги ҳолларга тўхталин:

а) бирор M нуқтада қолувчи a айлана билан b тўғри чизманинг бир-бирини ҳам инверсион марказидан ўтмасан ҳол;

б) a айлана инверсион марказидан ўтмай, b тўғри чизма унинг орқали ўтган ҳол;

в) a айлана инверсион марказидан ўтмай, b тўғри чизма унинг орқали ўтган ҳол.

16.9. ИНВЕРСИОН МОС БЎЛГАН ОРТОГОНАЛ АЙЛАНЛАРНИНГ БАЪЗИ МУҲИМ ХОССАЛАРИ

1-теорема. Ўзаро инверсион мос бўлган икки нуқтадан ўтувчи айлана ўз-ўзига инверсия ва инверсия айланасига ортогонал бўлади.

Бунинг исбот қилиш учун 170° чизмадаги a айлананинг инверсион M ва M_1 нуқталардан ўтувчи бирор c айланани чизайлик. Бу айлана билан инверсия айланасининг кесилиш нуқталарини A ва B билан белгилыйлик.

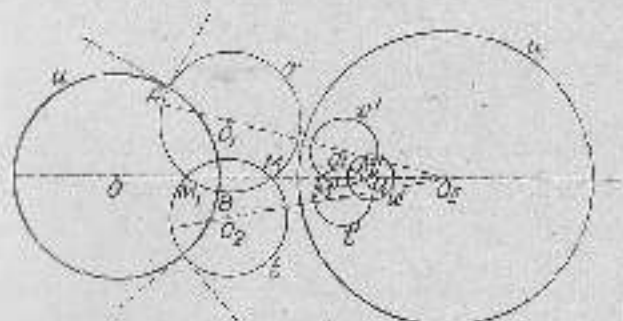
Бу ҳолда a айлананинг инверсияга инверсион бўлган c айлана, яъни, шунинг учун c айлана a айлананинг ўзи бўлади. Бундан a ва c айланаларнинг ўзаро ортогоналлиги маълум бўлади (162-§ даги теоремага асосан).

2-теорема. Ҳар бири инверсия айланасига ортогонал бўлган икки айлананинг кесилиш нуқталари ўзаро инверсион мос бўлади. 170° чизмадаги a айланани ортогонал бўлган c ва d айланаларнинг кесилишган M ва M_1 нуқталарининг ўзаро инверсион мос бўлишлари равишан, чунки биринчи теоремага тескари теоремага мувофиқ, инверсия айланасига ортогонал бўлган айлананинг инверсион фигура ўша айлананинг ўзи бўлади. Шунинг учун c билан d айланаларнинг кесилишган нуқталари ҳам ўзаро инверсион мос бўлади.

3-теорема. Агар a айлана ва унга нисбатан ўзаро инверсион мос M ва M_1 нуқталар билан бир a_1 айланани нисбатан инверсион аксиоматик равишан қатъийлашган c ва d айланалар ҳамда M ва M_1 нуқталарга тегишсан, сўнгги M ва M_1 нуқталар a_1 айланани нисбатан ўзаро инверсион бўлади.

Бу теоремани, қисқача, қуйидагича ифода қилиш мумкин:

$$\text{Агар } H(M) = M_1, \quad H_1(a) = a', \quad H_1(M) = M', \quad H_1(M_1) = M,$$



170- нима

бўлади.

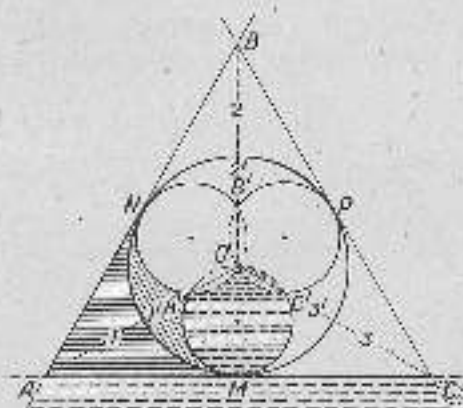
$$H'(M') = M'$$

бўлади¹.

Буни исбот қилиш учун 170-чизмадаги M ва M_1 нукталардан σ' ва τ' айланаларни ўтказибдиқ. Биринчи теоремага мувофиқ, кейинги айланаларнинг ҳар бири инверсия айланаси κ га ортогонал бўлади. σ' ва τ' айланалар κ_1 айланасига нисбатан σ ва τ айланаларга инверсияни мос айланалар бўлади. Инверсияни акселантиришда бурчакнинг абсолют қиймати ўзгармагани учун σ' ва τ' лар κ' га ортогонал бўлиб, M' ва M_1' нукталардан ўтади. Демак (бундан олдинги теоремага биноян) M' ва M_1' нукталар κ' айланасига нисбатан инверсияни мос бўлади.

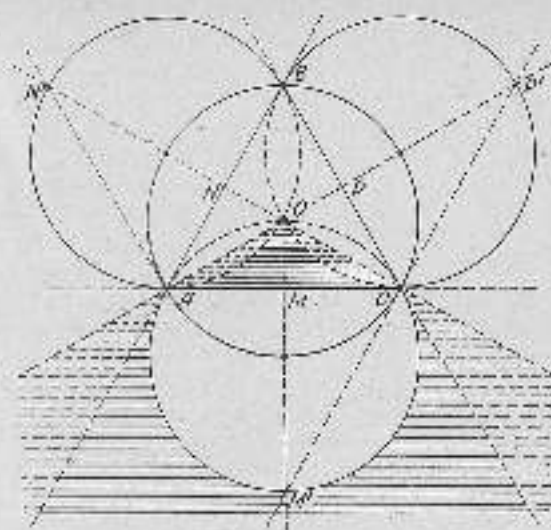
Толшириқлар

- I. Инверсиянинг асосий хоссаларини сўзлаб беринг.
- II. Нуктани аналитик ўсишда инверсияни акселантириш пинзтирибдиқ?
- III. Агар A билан A' ва B билан B' нукталар инверсияни мос бўлиб $|OA| = |OB|$ бўлса, акселантиришда AB ва $A'B'$ тўғри чизиқларининг бир-бирига нисбатан қандай бўлади? Буни қандай кўрсатинг.
- IV. Тўғри чизиқни аналитик ўсишда инверсияни акселантиришда қандай хоссаларни асосий ишларни айтиб беринг.
- V. Инверсияни мос нукта орқали ўтатиш айланалар қандай ўсиш хоссасига эга?
- VI. Тенг томонли учбурчакни ўсишда шунга қилинган айланасига нисбатан инверсияни акселантириш (171-чизма).
- VII. Тенг томонли учбурчакни ўсишда ташқи чизилган айланасига нисбатан инверсияни акселантириш (172-чизма).
- VIII. Квадратни ўсишда шунга қилинган айланасига нисбатан инверсияни акселантириш.



171-чизма

¹ Буни M , M_1 ва M' нукталарни айна вақтда ҳам айланани, ҳам инверсияни акселантиришнинг кўрсатиди.



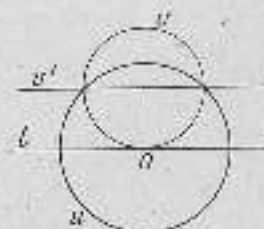
172-чизма

IX. Квадратни ўсишда ташқи чизилган айланасига нисбатан инверсияни акселантириш.

X. Мукаддас оқибурчакни ўсишда ташқи чизилган айланасига нисбатан инверсияни акселантириш.

XI. Мукаддас оқибурчакни ўсишда ташқи чизилган айланасига нисбатан инверсияни акселантириш.

XII. Инверсия марказини ўсишда ташқи чизилган айланасига нисбатан инверсияни акселантириш. Буни қандай кўрсатинг.



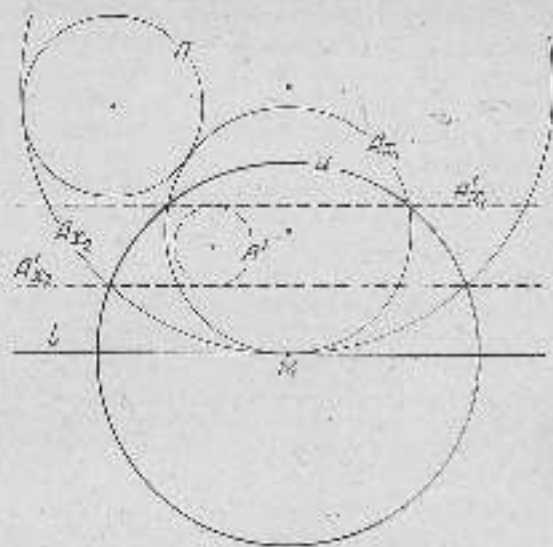
173-чизма

16-§. ИНВЕРСИЯ МЕТОДИ

(Инверсияни акселантиришнинг конструктив масалалар ечилиш тартиби.)

Бу методда изланувчи фигура билан масалада берилганлар орасидаги билинадигани бевосити аниқлашиб, олдин уларни инверсияни мос фигуралар орасидаги муносабат қилишда, сўнгра изланувчи фигурани ўсилади. Бу иш қуйидаги тартибда бажарилади:

1. Масалада изланувчи фигура топилди деб, тахминан қилиб қўйлади.
2. Мўлжаллаб шундай бир нуктани инверсия маркази деб қабул қилинадики, бу нуктани марказ қилиб чизилган айлана



176-чиизм

104-мисала. Берилган айланага уриниб, берилган тўғри чизиққа берилган нуктада уринувчи айлана чизилг.

Анализ. Сўралган айлана 176-чиизмда берилган A айланаси ва l тўғри чизиққа унинг M нуқтасида уринувчи A_1 айланасидан кборот деб қараш қилайлик.

Берилган M нуқтани инверсия маркази деб ва маркази M да бўлган α айланани инверсия айланаси деб қабул қилиб, унга нисбатан l тўғри чизиқни, A ва A_1 айланаларни инверсия аксантирсак, тартиб билан уларга инверсия хос l тўғри чизиқнинг ўзи, A' айлана ва A'_1 тўғри чизиқ ҳосил қилинади.

Бу инверсия аксатган фигуралар орасидаги муносабатни ўрганиш шунан кўрсатади: аслишига кўра, A_1 айлана билан l тўғри чизиқ инверсия марказидан ўзаро урингани учун A_1 айланаси инверсия хос A'_1 тўғри чизиқ l тўғри чизиққа параллел бўлади. A_1 ва A айланалар ўзаро урингани учун уларга инверсия хос A'_1 тўғри чизиқ билан A' айлана ҳам ўзаро уринади. A'_1 тўғри чизиқнинг A' айланасига уриниб l тўғри чизиққа параллел бўлишидан уни янқидош тузукни. Уни „берилган A' айланасига уринувчи ва берилган l тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ ўтказилг“ деган ёрдамчи масалани ечиб топамиз.

Берилган масалага нисбатан янча осон бўлган бу масалани ечиб топилган уринувчи инверсия аксантириб изланувчи айланани ҳосил қилишимиз.

Ясаш. 1. Берилган M нуқтани марказ қилиб ихтиёрий радиус билан чизилган α айланани инверсия айланаси деб қабул қилиб, унга нисбатан l тўғри чизиқ ва A айланани аксантиришимиз, бундан l тўғри чизиқнинг ўзи ва A' айлана ҳосил бўлади.

2. l тўғри чизиққа параллел қилиб, A' айланасига A'_1 ва A'_2 уринишлар ўтказамиз.

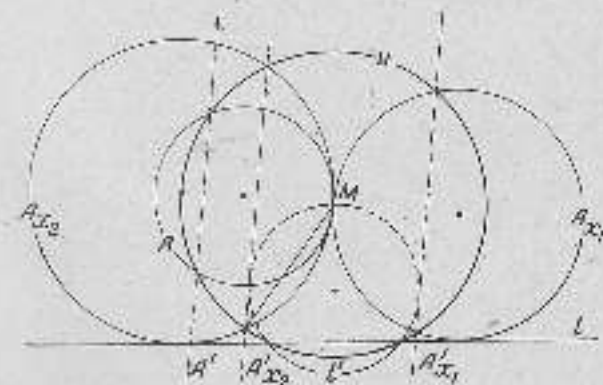
3. Чизилган уринишларни инверсия аксантирсак, изланувчи A_1 ва A_2 айланалар ҳосил бўлади.

103-мисала. Берилган айланаси маълум нуқтада ва берилган тўғри чизиққа уринувчи айлана чизилг.

Анализ. Сўралган айлана 177-чиизмдаги A_1 айлана деб қараш қилайлик. 8-берилган A айланаси M нуқтаси ва берилган l тўғри чизиққа уриниб, M марказдан ихтиёрий радиус билан чизилган α айланани инверсия айланаси деб қабул қилиб, унга нисбатан A айлана, l тўғри чизиқ ва сўралган A_1 айланани аксантиришимиз; бу аксантиришда уларга хос бўлган A' тўғри чизиқ, A' айлана ва A'_1 тўғри чизиқ ҳосил бўлади.

Энди бу образлар орасидаги муносабатларни ўрсанишимиз: A ва A_1 айланалар M марказдан ўзаро урингани учун уларга инверсия хос бўлган A' ва A'_1 тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлади.

A_1 айлана l тўғри чизиққа урингани учун уларга инверсия хос бўлган A'_1 ва A' образлар ҳам ўзаро уринади. Демак, сўралган айланаси инверсия хос бўлган A'_1 тўғри чизиқ қурилиши хосига эгадир: A'_1 тўғри чизиқ A' тўғри чизиққа параллел бўлиб, A' айланасига уринади. Бу икки хосса A'_1 тўғри чизиқни янқидош олади ва бундан сўралган A_1 айланасига ўсиш ҳам мумкин. Шунинг учун A'_1 тўғри чизиқ ёрдамчи фигура



177-чиизм

бўлиб, уни ниятдан A' тўғри чизиққа параллел қилиб, маълум P' айланаси уриқча ўтказиб, деган ёрдамчи масалани ениб топилди.

Бу ёрдамчи масалани енишдан иккита A'_{x1} ва A'_{x2} уриқча ҳосил бўлади.

Бу уриқчаларни n айланасига нисбатан инверсион аксиантириб, сўралган A_x ва $A_{x'}$ айланаларга эга бўламиз.

Тоғшириқлар

I. Енишдан қолган бериқчаларнинг таърифи.

II. Инверсион маркази нисбатан A айланасининг бирор нуқтасини олиб, бериқчаларни инверсион аксиантирталла, бу масаланинг олдинги масаласи ҳал қилиниши текшириб кўриш.

III. Инверсион маркази нисбатан бериқча M нуқтадан бошқа ҳар қандай нуқтадан олганда ҳосил бўладиган ёрдамчи масалани бериқчага нисбатан тенг кучли бўлишини текшириш.

106-масала. Бериқчадан ўтиб, бериқчадан икки тўғри чизиққа уринувчи айлана чиқинг.

Анализ. Излашувчи айлана, 178-чи масала бериқчадан M нуқтадан ўтиб, a ва b тўғри чизиқларга уринувчи A_x айлана деб ўйлиб.

M марказдан иккиёри радиус билан чиқилган n айланасига нисбатан a ва b тўғри чизиқларни ва A_x айланани инверсион аксиантирайлик, a ва b тўғри чизиқлар ҳос равишда a' ва b' айланаларга, A_x айлана эса буларга уринувчи A'_{x1} тўғри чизиққа аксиантири.

Демак, масалани ениш учун айва a ва b тўғри чизиқларни M марказдан иккиёри n айланасига нисбатан инверсион аксиантириб, бундан ҳосил бўлган a' ва b' айланаларга умумий уриқчалар ўтказилади. Сўнгра, топишган умумий уриқчаларни n айланасига нисбатан инверсион аксиантириб, излашувчи айланалар ҳосил қилинади.

Тоғшириқлар

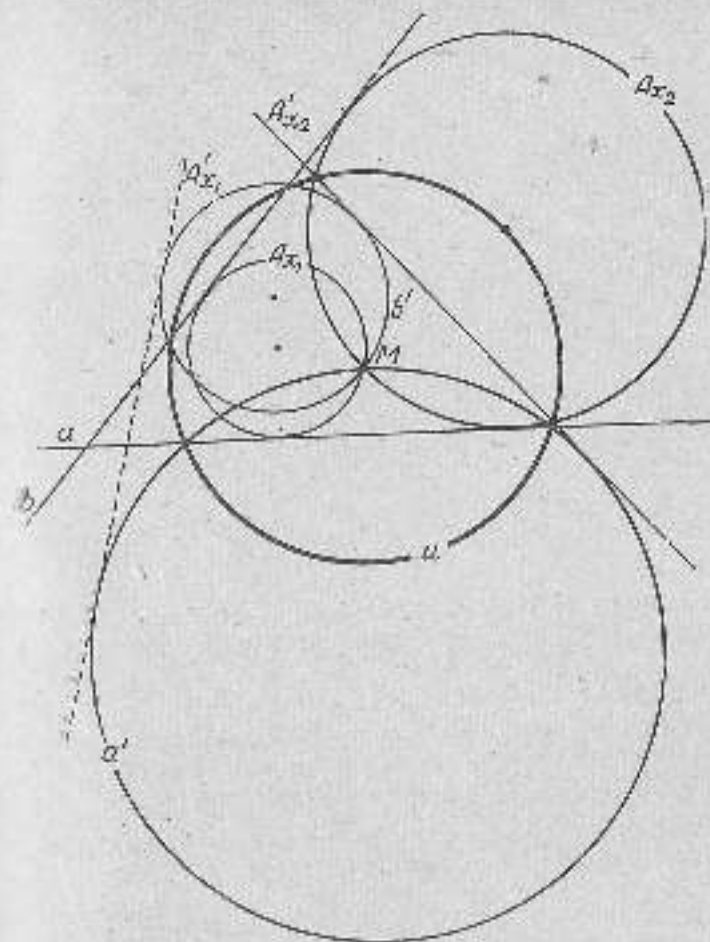
I. Бериқчадан икки тўғри чизиқ ўзаро параллел ёки перпендикуляр бўлган ҳол учун масаланинг ениши.

II. Бериқчадан икки тўғри чизиққа ва бериқчадан айланасига уринувчи айлана чиқинг.

107-масала. Бериқчадан тўғри чизиққа ва айланасига уриниб, бериқчадан нуқтадан ўтувчи айлана чиқинг.

Ениш.

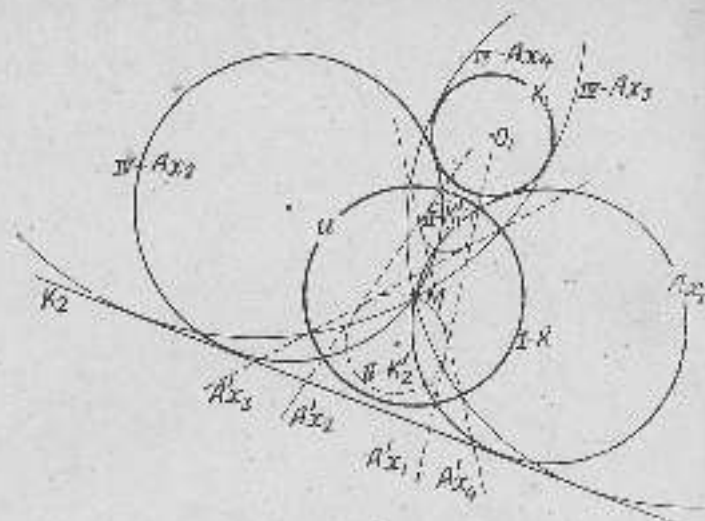
I. Сўралган айлана 179-чи масаладаги A_x айлана деб фарз қиламиз, у бериқчадан K_2 тўғри чизиққа ва бериқчадан K_1 (O_1, R) айланасига уриниб, бериқчадан M нуқтадан ўтсин. Маркази бериқчадан M нуқтадан бўлган ва иккиёри радиус билан чиқилган n айланани инверсион айланаси деб қабул қилайлик.



179-чи масала

2. n айланасига нисбатан A_x ва K_1 айланалар ва K_2 тўғри чизиқни инверсион аксиантириб, уларга ҳос бўлган A'_{x1} тўғри чизиқ, K'_1 ва K'_2 айланаларни ҳосил қиламиз. Фарзиямиз бўйича A_x айлана K_1 айлана ва K_2 тўғри чизиққа уринганли учун A'_{x1} тўғри чизиқ K'_1 ва K'_2 айланаларга умумий уриқча бўлади. Демак, сўралган фигурага инверсион мос фигура A'_{x1} тўғри чизиқ, бериқчадан икки айланасига умумий уриқча ўтказилди, деган ёрдамчи масалани ениш оқибати топиш мумкин.

3. Икки K'_1 ва K'_2 айланасига умумий уриқчалар ўтказилди, бундан умумий, иккита A'_{x1} ва A'_{x2} тўғри чизиқ ва иккита A'_{x1} ва A'_{x2} икки уриқча ҳосил бўлади.



179-чижа

4. Толигган умумий уринмаларни инверсион акслантирсак, сўралган $A_{x1}, A_{x2}, A_{x3}, A_{x4}$ айланалар ҳосил бўлади.

Тошхирқлар

- I. Берилган фигураларнинг вазиятларини турлига олиб масалани ечим.
- II. K_1 ва K_2 айланаларга ўтказилган умумий уринмалардан бизнинг берилган M нуқтадан ўтган ҳолда масала почта ечимга эга бўлади?

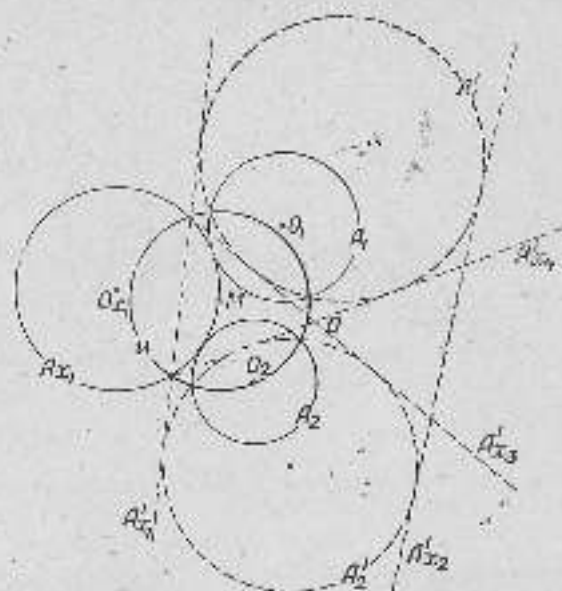
108-масала. Берилган икки айлананига уриниб, берилган нуқтадан ўтувчи айлана чизинг.

Е.п.иш.

1. Сўралган айлана 180-чижадаги A_1 айлана бўлиб, у берилган $A_2(O_2, R_2)$ ва $A_3(O_3, R_3)$ айланаларга уриниб, берилган M нуқтадан ўтсин. Берилган M марказдан ихтиёрий радиус билан чизилган u айланани инверсион алданами деб қабул қиламиз.

2. A_1, A_2, A_3 айланаларни u айлананига нисбатан инверсион акслантириб, уларга мос бўлган A'_1, A'_2 айланалар ва A'_3 тўғри чизиқни ҳосил қиламиз; A'_3 айлана A_1 ва A_2 айланаларга урингани учун A'_1 тўғри чизиқ ҳам A'_1 ва A'_2 айланаларга уринади. Шунинг учун A'_3 тўғри чизиқни кейинги икки айлананига умумий уринма шартларида яшаш мумкин.

3. A'_1 ва A'_2 айланаларга умумий уринмалар ўтказамиз; бизнинг чизмаида улар $A'_{x1}, A'_{x2}, A'_{x3}$ ва A'_{x4} тўғри чизиқлардан иборат.



180-чижа

4. Чизилган умумий уринмаларни инверсион акслантириб, сўралган A_{x1}, A_{x2}, A_{x3} ва A_{x4} айланаларга эга бўлимиз (чизмада умумий уринмалардан A'_{x1} га тегишли A_{x1} айлананица кўрсатилган).

Тошхирқлар

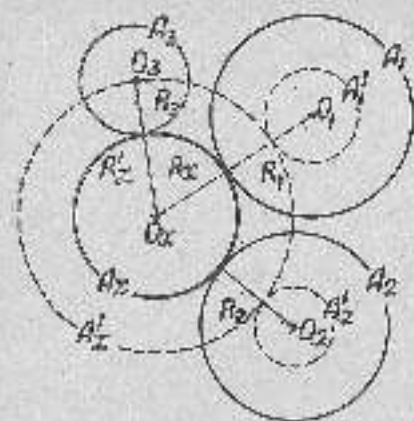
- I. Масаланинг талабига жавоб берувчи бешка айланаларни ҳам чизинг (умуман, тўртта айланани чизинг).
- II. Берилган нуқта берилган айланаларнинг биттаерлигидан ҳол учун икки айлананинг кесилган нуқтасида бўлган ҳол учун масалани ечим.
- III. Берилганларнинг вазиятлари қандай бўлганда ҳақола ечимлайди?
- IV. Берилган икки айланани ва берилган тўғри чизмани уринувчи айлана чизинг.

Энди умумий кўринишдаги Аполлоний масаласининг ечилиши билан танишамиз.

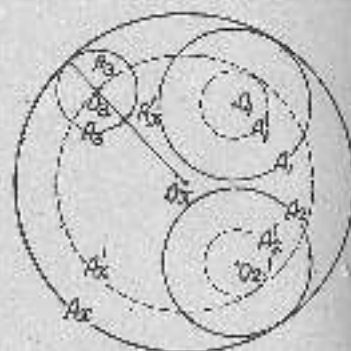
109-масала. (Аполлоний масаласи). Берилган учта айлананига уринувчи айлана чизинг.

$A_1(O_1, R_1)$ айлана, $A_2(O_2, R_2)$ айлана ва $A_3(O_3, R_3)$ айлана берилган.

Айлиш. Сўралган айлана 181-I, II, III чизмалардаги $A_x(O_x, R_x)$ айлана деб ва берилган айланаларнинг радиуслари



181-I чизма



181-II чизма

қуйдаги тенгсизликларни қанотлаштирилади деб фараз қи-
лайлик:

$$R_1 > R_2 > R_3$$

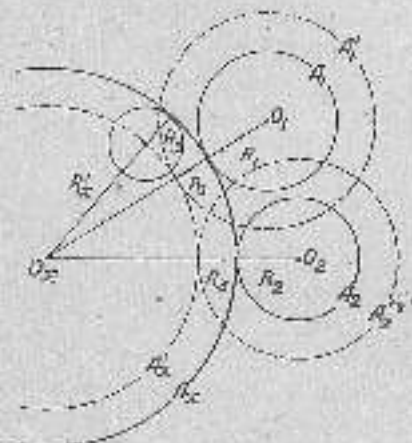
Уриниш 181-III хал бўлганда¹ берилган учта айлананинг
радиусларини энг кичик радиус R_3 қадар қисқартирамиз; бу-
нинг натижасида A_3 айлана унинг маркази O_3 нуқтага айка-
лади; A_1 ва A_2 айланалар esa мос равишда қуйдаги айлана-
ларга айкалади (181-I, II чизма):

$$A'_1(O_1, R_1 - R_3) \text{ ва} \\ A'_2(O_2, R_2 - R_3)$$

Уриниш 181-III шаклдаги
қоби ҳар хил бўлганда esa A_3
айлана ўзининг марказига айка-
лади, A_1 ва A_2 айланалар қу-
йдаги айланаларга айкалади:

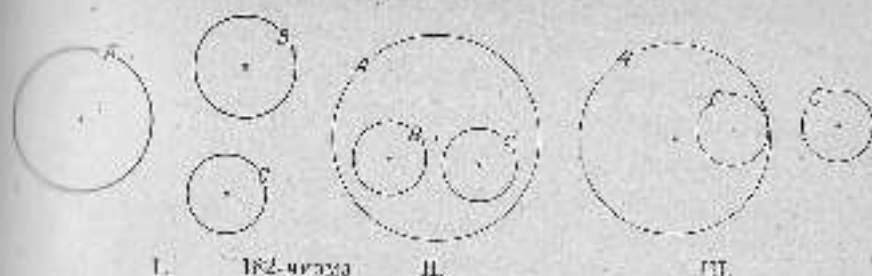
$$A'_1(O_1, R_1 + R_3) \text{ ва} \\ A'_2(O_2, R_2 + R_3)$$

Сўраган айлананинг бе-
рилган учта айланаларга урину-
ши биа бажарган эквалантирлаш
натижасида сикланити, яъни
 A_x айлананинг образи бўлган
 A'_x айлана эквалантириш нати-



181-III чизма

¹ Яъни, берилган айлана берилган учта айланалар таъриф урине-
ши (181-I
чизмадаги қоби) ёки уринеши учта айланалар ҳам шунинг уринеши (181-II чизма-
даги қоби).



I. 182-чизма II. III.

жисда берилган айланаларнинг образлари бўлган A'_1 , A'_2 ва
 A'_3 айланаларга уринуви билини керак.

Шунинг учун $A_x(O_x, R_x)$ айлана унга концентрик бўл-
ган қуйдаги айланаларнинг бирига айкалади:

$$A'_x(O_x, R_x + R_3)$$

ёки

$$A'_x(O_x, R_x - R_3). \quad (1)$$

Уриниш ҳар қандай бўлганда ҳақ A'_x айлана берилган O_x
нуқтадан ўтиб, берилган A_1 ва A_2 айланаларнинг A'_1 ва A'_2 об-
разларига уринуви. Шунинг учун A'_x айланани (масалан бер-
илганлардан топиб ва ундан сўратган A_x айланаларга ўткин
мумкин бўлган учун) ёрдамчи фигура дейиш мумкин.

Яъни план:

I. Берилган A_1 айланаларга концентрик қилиб қуйдаги айла-
наларни чизамиз:

$$A'_1(O_1, R_1 + R_3) \text{ ва } A'_1(O_1, R_1 - R_3).$$

II. Берилган A_2 айланаларга концентрик қилиб қуйдаги айла-
наларни чизамиз:

$$A'_2(O_2, R_2 + R_3) \text{ ва } A'_2(O_2, R_2 - R_3).$$

III. Берилган O_3 нуқтадан ўтиб:

а) A'_1 ва A'_2 айланаларга уринуви айланаларни чизамиз (4
та айлана);

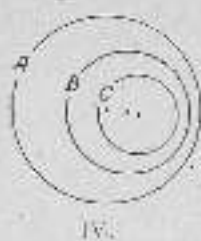
б) A'_1 ва A'_2 айланаларга уринуви айланаларни чизамиз
(4 та айлана). Буларни қисқартириб булдан билини масаладаги
айлини келтиришимиз.

Шундай қилиб, умумий ҳолат, шаклида ёрдамчи $A'_x(O_x,$
 $R'_x)$ айлана ҳосил бўлади.

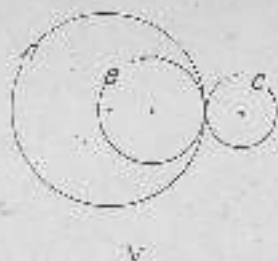
IV. Топилган ёрдамчи айланаларни анализдаги (1) шартин
таъриф

$$A_x(O_x, R'_x - R_3) \text{ ва } A_x(O_x, R'_x + R_3)$$

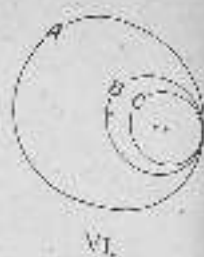
айланалардан бирига эквалантириш орқали натижада айланалар
ҳосил бўлади.



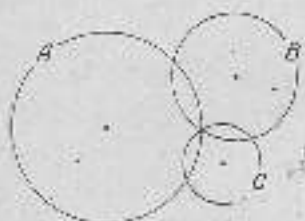
IV.



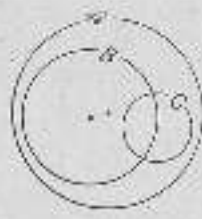
V.



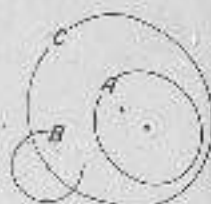
VI.



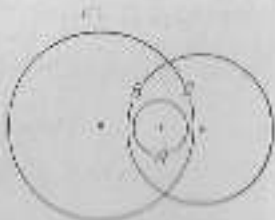
VII.



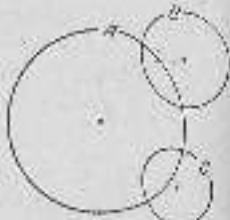
VIII.



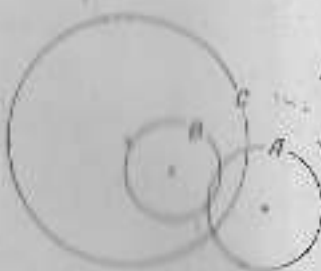
IX.



X.

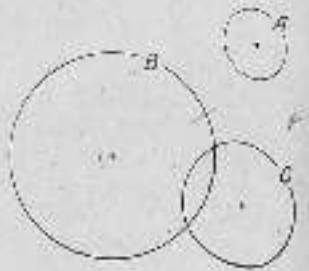


XI.

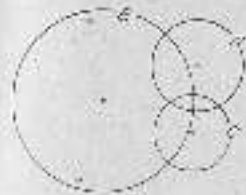


XII.

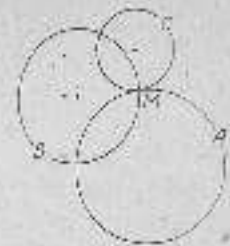
182-чизма.



XIII.



XIV.



XV.

182-чизма

Толдириқлар

I. Юқорида тузилган нолг бўйича нолдунки айланаларни чизинг.
II. Берилган O_2 нуктадан ўтди, A_1 ва A_2 сун A_1 ва A_2 айланаса ури-
нудан айланалар чизинг инконтинентини аниқлаб, бунда юқоридаги асаслар
билан соддаликнинг.

Текшириш. Аномалоний масаласи, унда берилган айланаларнинг бир-бирига нисбатан жойлашиларига қараб, 0; 2; 4 ёки 8 та, ёки чексиз кўп жавобга эга бўлиши мумкин; бу масаланинг ечилишидаги ҳамма ҳолатлар 182-I-XV чизмаларда кўрсатилади. Бундаги ҳолатлардан I, II ва XIV ларнинг ҳар бирини қараганда масаланинг талабига жавоб берувчи 8 та айлана ҳосил бўлади.

Ундаги VII, VIII, IX, X, XI, XII ва XIII ҳолатларни қараганда 4 тадан айлана ҳосил бўлади; XV ҳолда масала 2 та ечимга эга бўлади; III ва IV ҳолатларда масала ечимга эга бўлмайди, V ва VI ҳолатларда эса масала чексиз кўп жавобга эга бўлади.

57-5. Маска учун савол ва масалалар

254. Қандай акселантларини инверсион акселантларига дейилади? Инверсион акселантларининг инверсион хоссага эга бўлишига тушунтириб беринг.

255. Нукта A ва A' нукта берилса, уларно неча ўсул билан бир-бирига инверсион нокс деб қараш мумкин?

256. Нима учун инверсион акселантларини тескари радиусли акселантларини дейилади?

257. Эллиптик ва гиперболлик инверсионалар орасидаги боғлиқлигини (хатти бериқдан келинчосига ўтди йўлини) айтиб беринг.

258. Инверсия даркалга инверсион нокс нукта (Евклид теометриясини) нолдунки?

259. Инверсия айланаси ўзги нолдунки айланасинида? инверсия қандай акселантларинида ўтани?

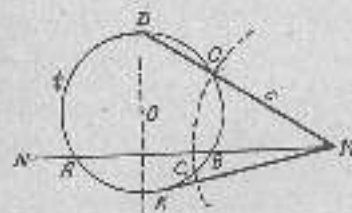
260. Инверсия айланасинида, унда ташқарида ёки нуктада бўлган нуктага инверсион нокс нукта қандай келилади?

261. Инверсия нуктадан ўтувчи ўзги акселант инверсион ситҳра нима бўлади?

201

110-мәсәлә. Берилгән a, b, c кесмәләргә пропорциональ тәртиптәге кескә ясанг,

Берилган кесмалар билан $\frac{x}{a} - \frac{b}{c}$ пропорция орқали бөл-
линган x кесmani топиш учун ихтиёрий MN нуқта $MA - a$,
 $MB - b$ кесмалари ажратиш, A ва B нуқталардан ўтувчи ва
(M, c) айланга (983-модда) унинг факат CC , ёки тасвирланган



189- SUMO

биздан иштиёрый C (ва C_1) нукта-
да кесилувчи бирор I айланани
инвариант (183-чиқа). MC тўри
чаникиниг I айлана билан икки-
чи марта кесилувдиз хосла
булган нуктаси D бўлса, MD —
изланган кесма булади. Ҳақиқа-
тан, M нуктадан I айланасга ўт-
казилган MI ва MA кесувчи-
ларнинг маълум хоссасига муво-
фиқ, қуйидагилар мавжуд бўла-
ди:

$MA \cdot MB = MD \cdot MC$ еки $ab = c \cdot MD$, тъй като $\frac{MD}{a} = \frac{b}{c}$; $x = MD$
 отътам,

III-масала. Берилган a ва b кесмаларга ўрта пропорционал кесма топил.

Ихтиёрый $МН$ журда $|МА| = a$ ва $|МВ| = b$ кескчалар ажратиб, A ва B нуқталардан ўтувчи l айлана чизамиз (183- синама). Сунгра M нуқтадан $МК$ уриниш утказамиз. Бар умумий нуқтадан айланани ўтказилган кесувчи ва уринишнинг кесасига мувофиқ $МК^2 = МА \cdot МВ = ab$ бўлиб, $|МК| = \sqrt{ab}$ бўлади.

280. Құбыдағы өңделетін асаы:

$$1. \quad x = \frac{3ab}{c}$$

$$(1) \quad x \rightarrow \frac{a \dot{b}}{c + d}$$

$$\text{H1. } x = \frac{\partial^4}{\partial}$$

$$\text{W. } y = \frac{x^2 - 61}{x - 3}$$

$$V_{\text{ср}} = \frac{abc}{a^2} \left(2 - \frac{ab}{x} \right) \text{ и } x = \frac{bc}{a} \text{ критическая точка функции}$$

$$V_{\text{L}}(\kappa) = \frac{abc\delta}{8\pi^2}.$$

VII. $x = a\sqrt{3}(x - \sqrt{3a} = \sqrt{4x - a}$ таж $x = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3a \cdot a}$ кхре.

$$\forall x. x \in \overline{a} \vee \overline{b}.$$

13. $x = \sqrt{3a^2 + 4b^2}$ (авраг $y = a\sqrt{3}$ во $z = 2b$ ок акио, сфига $x = -\sqrt{3a^2 + 4b^2}$ позиди).

292

8. $x = \sqrt{a^2 + y^2}$ (авраа $y = \sqrt{b^2 - x^2}$ ен исаб, сфига $x = \sqrt{a^2 + y^2}$ хса-
аааа).

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} (y - \sqrt{a^2 + b^2}) \text{ en } x = \sqrt{a^2 + c^2} \text{ x c. z. a. d. n.}$$

$$\text{XII. } x_1^2 = \frac{a^4 + b^4 - c^4 - d^4}{\sqrt{abcd}}$$

$$\text{XIII. } x = \sqrt{\frac{a}{d}} \left(\frac{2ab^2cd}{a^2 + b^2} - y \right) = \frac{a}{d} \text{ and } \frac{2ab^2cd}{a^2 + b^2} = y$$

$$\text{XIV. } x = \sqrt{\frac{ab\cos\theta}{c\sin\theta}}$$

$$XY_2: x = \sqrt{\frac{abc}{d}} - 1$$

$$\text{VMI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\text{XVII. } z = \frac{1}{\sqrt{a^2 b^2 c^2}}.$$

XVIII. $x = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$

$$K = \sqrt[4]{a^2 + b^2} = \sqrt[4]{a^2 \left(a^2 + \frac{b^2}{a^2} \right)} = \sqrt[4]{a} \sqrt[4]{a^2 + \frac{b^2}{a^2}}. \text{ Выразим } y = \frac{b}{a}$$

$$= \sqrt{a^2 + y^2} \text{ va } x = \sqrt{\frac{a^2}{y^2}} \text{ нўқадимр тартиб олишдан янайдир,}$$

$$X(X, x = \frac{8}{\sqrt{2}}, y = -\frac{8}{\sqrt{2}}) \quad V(V, y = \frac{8}{\sqrt{2}}, z = -\frac{8}{\sqrt{2}}) \quad W(W, y = \frac{8}{\sqrt{2}}, z = -\frac{8}{\sqrt{2}})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$XX, z = \frac{\sigma^2 + g^2 y^2 c^2 + h^2}{\alpha \sqrt{c - de}}$$

261. Қушпаеыс (Фолларант кесік).
(Еңріліг кесіме берілген деф фараз қалынады.)

$$|^{\circ}, x = \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \frac{1}{5}\sqrt{6}, \frac{1}{5}\sqrt{10}$$

$\sqrt{13}, \sqrt{15}, \sqrt{17}, \sqrt{19}, \sqrt{21}, \sqrt{33}, \sqrt{34}$

11*. $x = \sqrt[n]{a}$ (a — целый натурал, $n \in \mathbb{N}$).

(11). $x = a\sqrt{2}$, $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{a}{\sqrt{4}}$

$$x = \frac{a}{\sqrt{15}} + \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{8}} + \frac{a}{\sqrt{6}}$$

где $\pi = a\sqrt{n}$ (a — некоторый натуральный вид).

$$V_x = \sqrt{ab + cb + cd}$$

$$x = \sqrt{\frac{ab+cd}{e}} = \sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{5}} = \sqrt{\frac{e^2}{5}} = \sqrt{e \cdot \frac{e}{5}}; x = \sqrt{\frac{e^2}{5}}$$

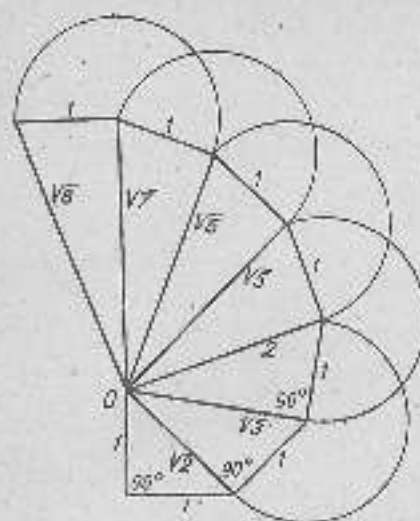
$$\frac{Q^2}{Q^2 + 1}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$x = \frac{a^2 \sqrt{a^2 - b^2}}{b^2}; \quad x = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{1 + \frac{a^2}{b^2}}}$$

$$a^2b = a \cdot \overline{(b+c)} \cdot \overline{(b+a)}.$$

VII. $x = \frac{cd}{cd+1}$, $x = \frac{1}{b}$



183-1 шикмэ

$$x = \frac{4a^2 - 5ab + b^2}{a^2 - 5ab + b^2}; x = \frac{a^4 - 2ab^2 + 2ab^2 - b^4}{2ab^2 - 5b^3 - 10a^2 - c^2d}$$

19-§. БИР ЖИНСЛИК ТУШУНЧАСИ ВА УНИНГ ГЕОМЕТРИК ЯСАШЛАРДАГИ АҲАМИЯТИ

Таъриф. Агар $F(x, y, \dots, t)$ функция ҳар қандай k сон учун

$$F(kx, ky, \dots, kt) = k^q F(x, y, \dots, t) \quad (1)$$

шартини қаноатлантирса, $F(x, y, \dots, t)$ функция n ўлчовли бир жинсли функция дейилади, $m = 1$ бўлганда (1)

$$F(kx, ky, \dots, kt) = kF(x, y, \dots, t) \quad (2)$$

муносабат кўринишга келади. Бундан қўйидаги хулосани чиқара оламиз: агар бирин $F(x, y, \dots, t)$ функциянинг ҳамма аргументларини бир хил k сонга кўпайтирсак, функциянинг қиймати ҳам k марта ортади.

Кесмалар уланган узунлик бирлиги q да янги ўлчов бирлиги $q' = \frac{q}{k}$ га ўтсак, ҳар бир кесмани ўлчашдан чиққан сон k марта ортади. Бу ҳолда (2) муносабатдаги $F(kx, ky, \dots, kt)$ янги бирлик билан ўлчанган дискарда $F(x, y, \dots, t)$ кесмани ифода қилади.

Мисоллар:

1. $x = a^2 - 3ab^2 - 2b^3$ уч ўлчовли бир жинсли ифодадир, чунки $y = (ka)^2 - 3(ka) \cdot (kb)^2 - 2(kb)^3 = k^3(a^2 - 3ab^2 - 2b^3) = k^3x$.

$$x = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{c}$$

$$x = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \quad (290-XVII)$$

$$VIII. x = a\sqrt[2]{2}; x_1 = a\sqrt[3]{2}; x_2 = a\sqrt[4]{2}$$

$$x = a\sqrt[3]{3} \quad (281-XIX \text{ масола})$$

$$IX. x = \sqrt[3]{abc}; x = \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \\ \sqrt[3]{a^2b^2c^2}; x = \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \quad (280-XVIII, XIX \text{ масола})$$

$$X. x = \frac{a^4 - b^2c^2\sqrt{ab} + c^2}{2a\sqrt{abc}}$$

$$a^2 = ab\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{b}}$$

$$x = \frac{a^2b\sqrt{ac} + a}{a^2b\sqrt{ac} + a} \quad (280-XV \text{ масола})$$

$$XI. x = \frac{3a^2b}{2a^2b}$$

II. $x = \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 - 4c^2})$ бир ўлчовли бир жинсли ифодадир, чунки $y = \frac{1}{2}[kb + \sqrt{(kb)^2 - 4(kc)^2}] = \frac{k}{2}(b + \sqrt{b^2 - 4c^2}) = kx$.

III. $x = \frac{a}{bc}\sqrt{\frac{a+c}{a^2-b^2}}$ эса $(-\frac{3}{2})$ ўлчовли бир жинсли ифодадир, чунки $y = \frac{ak}{(bk)(ck)}\sqrt{\frac{ak+ck}{(ak)^2 - (bk)^2}} = k^{-\frac{3}{2}}x$.

Қўйидаги ифодалар бир жинсли бўлиб алоқадор:

$$I. x = a^2 + b^2$$

$$II. x = \sqrt{a^2 + 2b^2}$$

$$III. x = \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 - 4c^2})$$

Бир жинсли ифодаларнинг асосий хоссалари:

1. Бир жинсли кўпхалларнинг кўпайтмаси яна бир жинсли бўлиб, кўпайтманинг ўлчови кўпайтувчилар ўлчовларининг аниқлигига тенгдир. Масалан, $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$ тенглакнинг чап томони 1 ва 2 ўлчовли бир жинсли ифодаларнинг кўпайтмаси, ўнг томони эса уч ўлчовли бир жинсли ифодадир.

2. Бир жинсли кўпхалларнинг бўлинкаси яна бир жинсли бўлиб, бўлинманинг ўлчови бўлинувчи ва бўлувчилар ўлчовларининг айырмасига тенгдир. Масалан,

$$(a^3 - b^3) : (a - b) = [a^2 + ab + b^2]$$

тенглакнинг чап томони уч ва бир ўлчовли бир жинсли ифодаларнинг бўлинкаси, ўнг томони эса икки ўлчовли бир жинсли ифодадир.

3. Сурати ва махражи бир жинсли кўпхаллардан иборат алгебраик каср (2-хоссага кўра) бир жинслидир.

Масалан,

$$\frac{a\sqrt{c} - b\sqrt{b}}{b + \sqrt{ab}}; \frac{ab + c}{b - c}; \frac{a^2 - b^2\sqrt{c} - d^2}{a\sqrt{bc} + d^2}; \frac{ab^2 - a^2bc - c^2}{ab + c^2}; \frac{a - \sqrt{c}}{a - \sqrt{b}}$$

ифодалардан олинган тўрттаси бир жинсли бўлиб, булардан биринчиси $\frac{1}{2}$ ўлчовли, иккинчи ва учинчиси 1 ўлчовли, тўртинчиси 2 ўлчовлидир, охиргиси эса бир жинсли эмас.

4. Сурати ва махражи тенг ўлчовли бир жинсли ифодалардан иборат каср нолиқ ўлчовли ифода бўлилади.

19-§. БИР ЖИНСЛИКНИ ТИКЛАШ

Агар узунлиги 1 га тенг деб олинган кесма чизмада берилса, бир жинсли бўлмаган баъзи бир ифодаларни ҳам ясаи мумкин, яъни:

$$x = F(a, b, c, \dots)$$

ифодадаги $a, b, c, \dots$ лар кесмаларининг олинган бирлик билан ўлчанган узунликлари бўлса, узунлиги ўша бирлик билан ўлчанган x кесмани ясаш мумкин. Биз бу ерда $a, b, c, \dots$ кесмаларининг сон қийматларини $F(a, b, c, \dots)$ га қўйиб, x нинг сон қийматини топгандан кейин, узунлиги ўша қийматга тенг бўлган кесмани тилишимиз, яъни бирлик кесмани x марта олишимиз мумкин. Лекин бу ифодадан берилган $a, b, c, \dots$ кесмалардан ян бирлик кесмадан бевосита фойдаланиб, геометрик усулда яшнинг ҳам мумкин. Бунинг учун $F(a, b, c, \dots)$ ифода ушнинг аргументларига нисбатан ё рационал ифода бўлиши, ё фақат квадрат¹ илдиэларининг ўлчига олиниши керак. Бу ҳолда $F(a, b, c, \dots)$ ифодани бирлик кесмадан фойдаланиб, бир ўлчовли бир жиёсли ифодага келтириш мумкин.

Мисаллар:

I. $x = \frac{ab\sqrt{c}}{d}$ ифодага ясаш учун унинг махражини $q^2 = 1$ га кўпайтириб (q — берилган кесма), уни қуйидаги кўринишга келтираемиз:

$$x_1 = \frac{ab\sqrt{c}}{dq^2}.$$

Бу ифода бир ўлчовли бўлгани учун уш илгари кўрилган йўлар билан ясаш мумкин.

II. $x = \frac{ab\sqrt{c}}{d}$ ифода эса $x = \frac{ab\sqrt{cd}}{dq}$ кўринишда ёзиб олиниб, сўнгга ясалади.

III. $x = ab$ ифода $x = \frac{ab}{q}$ кўринишда ёзиб олиниб, тўртинчи пропорционал кесма сифатида ясалади.

IV. $x = abc$ ифода $x = \frac{abc}{q^2}$ кўринишда ёзиб олиниб, сўнгга ясалади.

V. $x = \frac{1}{a}$ ни $x = \frac{q^2}{a}$ шаклда ян

VI. $x = \frac{1}{a^2}$ ни $x = \frac{q^2}{a^2} = \frac{q^2}{a} \cdot \frac{q}{a} = \frac{Yq}{a}, Y = \frac{q}{a}$ шаклда ёзиб ясамиз.

VII. $x = \sqrt{a}$ ни $x = \sqrt{aq}$ шаклда ёзиб оламиз.

Толшириқлар

Қуйидаги ифодаларни ясаг (q — берилган):

$$\begin{aligned} \text{I. } x &= \frac{a}{bc}, \text{ II. } x = bc, \text{ III. } x = a^{-1}, \text{ IV. } x = a^2, \text{ V. } x = \frac{a^2 + b^2}{c}, \text{ VI. } x = \\ &= \frac{ab + c}{d}, \text{ VII. } x = \frac{ab - \sqrt{c}}{d}, \text{ VIII. } x = \frac{a^2 + bc - \sqrt{d}}{e}, \text{ IX. } x = \frac{a^2 + bc + d}{f}, \\ \text{X. } x &= \frac{ab^2 + c\sqrt{d} - 1}{g}, \text{ XI. } x = \frac{a^2 + b^2c - b\sqrt{c}}{dl}. \end{aligned}$$

¹ Квадрат илдиэ ва бунга келтириш мумкин бўлган илдиэлари билан сўнг квадратик илдиэ деб аташни шарт қиламиз.

§ 9. КВАДРАТ ТЕНГЛАМАНING ИЛДИЭЛАРИНИ ЯСАШ

Қўш геометрик масалалар квадрат тенглама тузиш ва тузилган тенгламанинг илдиэлари кесма сифатида ясаш йўли билан ечилади.

Матълумки, келтирилган $x^2 + px + q = 0$ квадрат тенгламанинг илдиэлари $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ формула билан аниқланиб, бу формула умуман бир жиёсли масала. Лекин геометрик маъмули масалаларни ечилишда тузилган квадрат тенгламалар $x^2 + px + q^2 = 0$ кўринишдаги бир жиёсли тенглама бўлиб, унинг $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}$ илдиэлари ҳам бир жиёсли формула билан ифодаланган.

Шунинг учун бу ифодани юқорида кўрилган йўлар билан ясаш мумкин. Бироқ юқорида кўрилган ифодалар мусбат бўлганлиги учун уларни ясадан чиқадиган кесмаларнинг йўналишларига эътибор қилинмаган эди. Лекин квадрат тенглама илдиэлари мусбат, маъфий ва, ҳатто, маъхум бўлиши мумкинлиги — бундай илдиэлари ясаш маъхус эътибор ва аниқлини талаб қилади.

Квадрат тенгламаларнинг ҳақиқий илдиэлари ясада шиклланадиган йўларда қуйидаги экинчиси қараб чиқамиз:

I. Уларнинг формулалари бўлиши асли ва
II. Виег теоремасига исосан ясаш.
1. Тенглама илдиэлари уларнинг формулалари бўлиши асли $x^2 + px + q^2 = 0$ тенгламадаги коэффициентларнинг ишораларига қараб, бу тенглама қуйидаги тўрт кўринишда учраши мумкин:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q^2 &= 0, & (1) \\ x^2 - px + q^2 &= 0, & (2) \\ x^2 + px - q^2 &= 0, & (3) \\ x^2 - px - q^2 &= 0. & (4) \end{aligned}$$

($p > 0$ деб фарз қиламиз).
Буларнинг илдиэлари ҳам ёзиб қўйамиз:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}, \quad (1')$$

$$x_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}, \quad (2')$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2}, \quad (3')$$

$$x_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2}. \quad (4')$$

(1') ва (2') формулалардаги $k = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}$ ифода, $\frac{p}{2} > q$ бўлса, гипотенузаси $\frac{p}{2}$ ва бир катети q кесматга тенг тўғри бурчакли учбурчакнинг иккинчи катети сифатида яшайди.

(3') ва (4') формулалардаги $k = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}$ ифода эса катетлари $\frac{p}{2}$ ва q кесмалардин иборат тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси сифатида яшайди.

Шунинг учун гипотенузаси k ва катети k ҳарфи билан белгилаб, юқоридagi формулаларни қисқача буилдай ёзиш мумкин:

$$x_{1,2} = -k \pm k \quad (1''); \quad x_{1,2} = k \pm k \quad (2''); \quad x_{1,2} = -k \pm k \quad (3''); \\ x_{1,2} = k \pm k \quad (4'').$$

Бу формулаларни ҳисобга қилишдан сўнгра буларнинг ҳаёнилари билан таъкидий чиқайлик.

1) $x_{1,2} = -k \pm k$ формуласи $x_{1,2} = -(k \mp k)$, ёки $x_1 = -(k - k)$ ва $x_2 = -(k + k)$ кўришда ёлсак, $k > k$ бўлган учун (1) тенгламанинг иккала илдири ҳам манфий эканлиги биланкади.

Шунинг учун бу илдишларга тегишли кесмалар биз хил йўналишда бўлишлари керак.

2) $x_{1,2} = k \mp k$ дан: $x_1 = k - k$ ва $x_2 = k + k$. Демак, илдишларнинг иккаласи ҳам ҳусбат; шунинг учун бу кесмалар ҳам бир хил йўналишда.

3) $x_{1,2} = -k - k$ ёки $x_{1,2} = -(k + k)$ дан: $x_1 = -(k - k)$ ва $x_2 = -(k + k)$. Буларнинг биринчисидан $x_1 > 0$ ва иккинчисидан $x_2 < 0$ диги билинади. Демак, (3) тенгламанинг илдишларига тегишли кесмаларнинг йўналишлари қарими-қарши бўлиши керак.

4) $x_{1,2} = k \pm k$ формуладан $x_1 = k + k$ ва $x_2 = k - k$. Булардан $x_1 > 0$ ва $x_2 < 0$ диги билинади. Демак, (4) тенгламанинг илдишларига тегишли кесмаларнинг йўналишлари ҳам бир-бирига қарама-қарши бўлиши керак.

Энди юқоридagi формулаларнинг ясаллигини кўрайлик.

1) $x_{1,2} = -(k \mp k) = -(\frac{p}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2})$ ни ясалш учун аввал $k = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}$ ни ясаймиз. Бунинг ҳаёлуи хўл билан ба-жирганда 184- чизмадаги $OA = \frac{p}{2}$ гипотенузаси ва $OB = q$ катетли тўғри бурчакли ABO учбурчак ҳосил булади, унди $|AB| = k = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}$. Тоғнадаи k катетли OA гипотенузаси қўлиш ва ундан айиркиш учун A нуқтадан k радиус билан σ

ва чизиб, унд OA тўғри чизик билан x_1 ва x_2 нуқталарда кесилтираёлаз.

$$|OX_1| = |OA| - |AX_1| = \frac{p}{2} - k = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}, \\ |OX_2| = |OA| + |AX_2| = \frac{p}{2} + k = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}.$$

Чизмадаги OX_1 ва OX_2 кесмалар бир хил йўналишда бўлиши ва иккаласининг ҳам O нуқтадан чап томонга йўналиши (1) тенгламанинг иккала илдири ҳам манфий эканлигига мос келади.

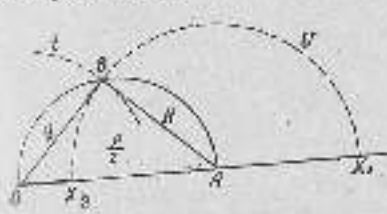
$$2) \quad x_{1,2} = k \pm k = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2} \text{ ки ҳам юқори-}$$

дагича $\frac{p}{2}$ гипотенузаси ва q катети бўйича ялсак, 185- чизмадаги тўғри бурчакли AOB учбурчак ва ундиг AO гипотенузаси билан $AX_1 = k$ кесматли қўлишдан $OX_1 = x_1$ илдиш ҳосил бўлади. Гипотенузаси k па-тоғна тенг AX_2 кесматни айиршдан $AX_2 = x_2$ илдиш ҳосил бўлади:

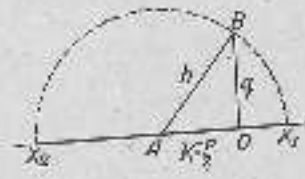
$$|OX_1| = |OA| + |AX_1| = \frac{p}{2} + k = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}, \\ |OX_2| = |OA| - |AX_2| = \frac{p}{2} - k = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}.$$

Чизмадаги OX_1 ва OX_2 кесмаларнинг O нуқтадан ўнг то-монга йўналишлари (2) тенглама илдишлариники ҳусбатлигига кўрсатади.

3) $x_{1,2} = -(k + k) = -(\frac{p}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2})$ ни ясалш учун ав-вал $k = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2}$ ифодадаи бир катети $|OA| = \frac{p}{2}$ ва иккинчи катети $|OB| = q$ тўғри бурчакли AOB учбурчакнинг $AB = k$ гипотенузаси сифатида ясаб оламиз (186- чизма).



184- чизма



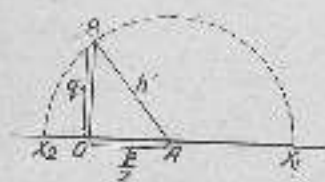
185- чизма

Сўнгра, A нуктадан AB радиус билан тизилган ёйни AO тўғри чизиқ билан X_1 ва X_2 нукталарда кесинтириб, $|OX_1| = x_1$ ва $|OX_2| = x_2$ илдизларни топамиз.

Ҳақиқатан.

$$|OX_1| = |AX_1| - |AO| = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2} - \frac{p}{2} = -\left(\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2}\right) > 0$$

$$|OX_2| = |OA| + |AX_2| = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2} = \left(\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2}\right) > 0$$



187-чизма

Чизмадаги OX_1 ва OX_2 кесмаларининг O нуктадан турган томонга йўналганлиги (3) тенглама илдизларидан бири (x_1) нинг мусбат ва иккинчиси (x_2) нинг манфий эканлигини кўрсатади.

$$4) \quad x_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2} = k \pm h$$

ҳам олдинги ҳолдагидек исалади (187-чизма).

Бу чизмадан кўриналиши:

$$|OX_1| = |OA| + |AX_1| = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2};$$

$$|OX_2| = |OA| - |AX_2| = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2}.$$

Демак, бу чизмадаги OX_1 кесма (4) тенгламанинг мусбат илдизи, OX_2 эса унинг манфий илдизи бўлади.

Шундай қилиб, квадрат тенглама илдизларини уларнинг формулалари бўйича ясаш учун қуйидаги тартибда иш олиб борилади:

I. Бир томонки формуладаги радикал билан ифодаланувчи тўғри бурчакли AOB учбурчак ясалади (бу учбурчакнинг радикал билан ифодаланган томонида R ҳарфи билан белгилайлик, кейинги тўртала чизмада $R = AB$ дийр); OA томон горизонтал тўғри чизиққа қўйилиб, тенгламанинг x олдидagi коэффициент мусбат ёки манфий бўлишига қараб, уш O дан ботлаб чап ёки ўнг томонга қўйилади.

II. Ясалган учбурчакдаги R томоннинг AO томон билан учрашган A учидан R радиус билан ϕ ёй (ёки қрим ялғиз) тизилади.

III. AOB учбурчакнинг AO томони (ёки давом) билан ϕ ёйни кесилган X_1 ва X_2 нукталари топилади. OX_1 ва OX_2 кесмалар тенгламанинг илдизлари бўлиб, O нуктадан ўнг томонга жойлашгани мусбат ва чап томонга жойлашгани манфий деб ҳисобланади.

Топшириқлар

1. Квадрат тенгламанинг илдизлари билан коэффициентлари орасидagi боғланишни ифодаловчи Виет теоремасини кейинги тўртала чизмаданг тушунтириш.

184. Чизмадаги ϕ ялғизга унинг таққориспаки O нуктадан ўтказилган OA нисбатини билан унинг OX_1 таққориспаки бўлиши ва $|OB| = q$ урсиманинг қатъий теоремаси аниқланиб, битта тенглик ёрқили боғлани керак (бу латин 186-чизмага нисбатан ҳоқ бажарилиг).

II. 186 ва 187-чизмаларга таъини Виет теоремасини исботлаш учун геометриянинг қайси теоремаси қилдирилди?

II. Тенглама илдизларини Виет теоремасига асосланиб ясаш.

Маълумки, $x^2 + px + q = 0$ тенгламанинг x_1 ва x_2 илдизлари билан унинг $-p$ ва q коэффициентлари орасида Виет кўрсатган

$x_1 + x_2 = -p$ ва $x_1 \cdot x_2 = q$ (1) муносабатлардан фойдаланиб ҳам уларни ясаш мумкин.

Бунда квадрат тенгламанинг юқоридаги тўрт ҳолини икки гурӯпга ажратиб қараймиз:

I. Илдизлари бир хил ишорали квадрат тенгламанинг илдизларини ясаш.

Илдизлари бир хил ишорали бўлган

$$x^2 + px + q = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - px + q = 0 \quad (3)$$

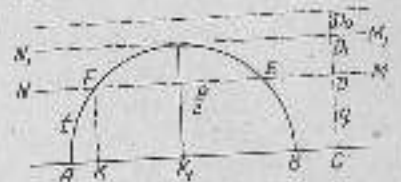
тенглама илдизларининг абсолют қийматларини (1) муносабат ёрдамида ясаш учун $|AB| = p$ кесмаки диаметр қилиб t айлана (ёки қрим ялғиз) чизиб, AB дан q масофага ётувли ва

(AB) га перпендикуляр MN тўғри чизиқни ўтказамиз (188-чизма). MN тўғри чизиқнинг t айлана билан кесилиши T (ёки E) нуктасидан AB диаметрга FK перпендикуляр туширамыз. AK ва BK кесмалар — илганган илдизларининг абсолют қийматлари бўлади, чунки исаланига кўра:

$$|AK| + |BK| = p \text{ ва } |AK| \cdot |BK| = |FK|^2 = q^2.$$

MN тўғри чизиқнинг t айлана билан кесилиши учун $q < \frac{p}{2}$ бўлиши шарт, бу шарт бажариб, берилган тенглама иккита ҳақиқий илдизга эга бўлади. Агар $q = \frac{p}{2}$ бўлса, MN тўғри чизиқ t айланата урилиб, тенглама иккита бир-бирига тенг илдизга эга бўлади. Башарти, $q > \frac{p}{2}$ бўлса, MN тўғри чизиқ t айлана билан умумий нуктага эга бўлмайди, яъни берилган тенглама ҳақиқий илдизга эга бўлмайди.

2. Илдизлари турли ишорали квадрат тенглама илдизларини ясаш.



188-чизма

Илдиэлари турли ипорали бўлган

ёки

$$x^2 + px - q^2 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 - px - q^2 = 0 \quad (5)$$

теңгасмалар илдиэларининг абсолют қийматларини ҳисап учун уларни аввал қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$x(x+p) = q^2 \quad (4')$$

ва

$$x(x-p) = q^2. \quad (5')$$

(4) теңгасмада x билан $x+p$ кесмаларнинг қўлайтмаси q кесманинг квадратига тең бўлганидан $x-p$ ни p диаметрли айлананинг марказидан ўтадиган кесувчи, x ни эса бу кесувчининг ташқи қисми дейиш мумкин (189-1 чизма). Шунинг учун $AB=p$ диаметр билан айлана чизиб, унинг иккиёрий C нуқтасидан ўтказилган уриқда $|CD|=q$ кесмани яқратган-дан кейин топилаган D нуқта ни марказдан ўтказилган DE кесувчи (4) теңлама манфий илдиэларининг абсолют қиймати, DE — унинг мусбат илдиэи бўлади.

Ҳақиқатан, ясаишга кўри:

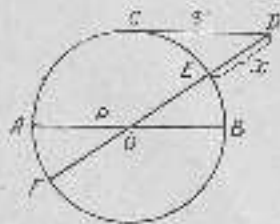
$$-|DE| + |DE| = -(|DE| + |EF|) + |DE| = -DE - p + |DE| = -p$$

ва

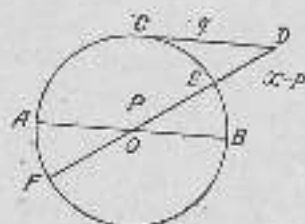
$$-|DF| + |DF| = -|CDP| = -q^2.$$

(5') теңламада x билан $x-p$ кесмаларнинг қўлайтмаси q кесманинг квадратига теңлашгандан булган x ни p диаметрли айлананинг марказ орқали ўтказилган кесувчи, $x-p$ ни эса бу кесувчининг ташқи бўлаги дейиш мумкин. Шунинг учун 189-1 чизмадаги DE кесувчи (5) теңламанинг мусбат илдиэи бўлиб, ундаги $|DE|$ эса манфий илдиэларининг абсолют қийматидир.

Шундан қилиб, илдиэларининг ишоралари ҳар хил бўлган (4) ва (5) теңламаларининг мусбат илдиэлари мос равишда



189-1 чизма



189-2 чизма

189-1, 2 чизмалардаги DE ва DF кесмалар бўлиб, уларнинг манфий илдиэларининг абсолют қийматлари эса x ва $x-p$ равишда DE ва DE кесмалардир.

Кейинги икки теңламанинг илдиэлари ҳақиқий бўлганини учун уларни ҳамма вақт ясаш мумкин.

§ 4. АЛГЕБРАИК МЕТОД ВОСИТАСИДА МАСАЛА ЕЧИШ

Ясашга доир масалани алгебраик метод билан ечиш йўллари қуйидагилардан иборат:

1. Масалада намунавчи фигура топилади деб фараз қилиб, у тахминан чизиб қўйилади.

2. Берилган масала бирорта кесмани (ёки бир неча кесмани) топинишга келтирилади.

3. Масалада берилган кесмаларни $a, b, c, \dots$ орқали ва намунавчи кесмаларни $x, y, z, \dots$ орқали белгилан, масаланинг шартларига ва баъзи бир тегишли теоремаларга таяниб, бу кесмаларни ўзаро боғловчи теңлама (ёки теңламалар системаси) тузилади. Тузилган теңлама масаланинг намунавчи қараб, 1, 2, 3 ёки 4- даражали бўлиши мумкин.

4. Агар тузилган теңламанинг даражаси иккидан юқори бўлса, уни аввал 1 ёки 2- даражали теңламаларга келтириш мумкин ёки мумкин эмаслиги аниқланади; агар мумкин бўлса, у 1 ёки 2- даражали теңламаларга келтирилади.

5. Топилаган теңламани (ёки теңламаларни) ечиб, намунавчи кесмаларни берилган кесмалар орқали аниқловчи ифодалар топилади.

6. Топилаган ифодалар текширилади, яъни ҳар қандай шартларда ҳам ёки баъзи ҳоллардагина бу ифодалар лозим бўлган ечимларни бериш-бермаслиги, битта ёки бир неча ечим ҳосил бўлиш-бўлмағлиги аниқланади.

7. Текшириш натижасига қараб, намунавчи кесма юқорида топилаган ифодаси бўйича маълум қуроллар воситаси билан ясаилади.

8. Агар масалада кесма эмас, балки бошқа бирор фигура сўралган бўлса, юқоридаги ишлар натижасида топилаган кесма ёрдамида сўралган фигура ясаилади.

112- масала. Катетларининг айирмаси r ва гипотенузаси h катетларнинг икки марта катта бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг.

Намунавчи учбурчакнинг кичик катетини x , катта катетини $x+r$ ва гипотенузасини $2x$ десак, булар орасидаги муносабатни қуйидаги теңлама билан кўрсатиш мумкин:

$$x^2 + (x+r)^2 = 4x^2.$$

Буни ечасак, x нинг икки қиймати топилади:

$$x_1 = \frac{r + r\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{r - r\sqrt{3}}{2}. \quad (1)$$

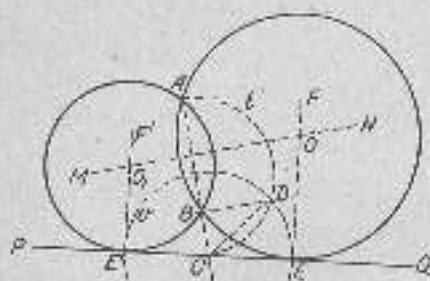
Бу икки ялданан биринчиси (мусбат бўлган учун) масаланинг жавобига жавоб беради.

Тошириқлар

I. Агар учун тошлаган нфолдан ва масаланинг бошқа шартларидан фойдаланиб, изланувчи учбурчакни яна.

II. Шу масаланинг соф геометрик усулда ҳам ечилишини кўрсатиш ва кўрилган икки усулни қайси бари ҳай эҳётдан афзалроқ эканлигини сўзлаб бериш.

III. Агар бу масала сўрилган тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасини килик катетидан 2 марта катти деб, масала шартини бир ҳалдор ўзгартирсак, унинг ечилишини қандай ўзгариш бўлади? Бу масалани алгебра ва усулда ечилиш ва соф геометрик усулда ечилиш ҳам уриниб кўриш.



190-1 чизма

112-А масала. Берилган икки нуктадан ўтиб, берилган тўғри чизиққа уринувчи айлана чизил.

Анализ. Изланувчи айлана 190-1 чизмадаги А ва В нукталардан ўтиб, PQ тўғри чизиққа уринувчи O марказли айлана бўлсин. Бу айланани кесиб учун унинг берилган А ва В нукталаридан ботқа яна бирорчи нуктасини, масалан, PQ тўғри чизиққа уринувчи нуктаси E ни топаяк кифой.

E нуктадан белгиланг учун унинг бирор маълум нуктагача бўлган масофасини аниқлаш керак. А, В нукталар ва PQ тўғри чизиқ берилган, шунинг учун АВ ва PQ тўғри чизиқларининг кесилиши C нуктаси маълум деб ҳисобланади. Шунингдек, $|CA| = a$ ва $|CB| = b$ кесмаларни ҳам маълум дес олаемиз. Демак, E нуктани топиш учун $|CA|$ ва $|CB|$ ёрдами билан CE кесма топила кифой.

Шундай қилиб, берилган масала CE кесмини топишга келтирилди.

CA ва CE кесмалар изланувчи O марказли айланга C нуктадан ўтказилган кесувчи ва уриниш бўлганга учун қуйидаги муносабатни ёзиш мумкин:

$$x^2 = |CE|^2 = |CA|^2 + |CB|^2 - ab, \quad \text{бўлган } x = \frac{1}{2} \sqrt{ab}. \quad (1)$$

Бу формула бўлган x кесмини касиб учун $|CA| = a$ ни диаметр қилиб, ярим айланада қилиб, (AC) га уқиб B нуктасидан B1) перпендикуляр чиқарилади. Бу перпендикулярнинг i ярим айлана билан кесилиши D нуктасини C нукта

билан туташтирилади. Янаишга кўра, қуйидаги теорема маълум бўлади:

$$|CD|^2 = |CA|^2 + |CB|^2 - ab, \quad \text{бўлган } |CD| = \frac{1}{2} \sqrt{ab}. \quad (2)$$

(1) ва (2) дан $|CE| = |CD|$ экани маълум бўлади.

$x = \frac{1}{2} \sqrt{ab}$ изланган C нуктадан (PQ бўлганга) уқ томонга қилиб, чап томонга ҳам қўйиб мумкин. Бунинг учун C нуктадан $|CD| = \frac{1}{2} \sqrt{ab}$ радиус билан ёи чизиб, уни (PQ) билан кесинтириш кифой. Бундан уриниш нукталари E ва E' ҳисоб бўлади.

Шундай қилиб, изланган айлана(лар) илос PQ тўғри чизиқ билан уриниш нуктасини топиш бўли аниқланди.

Изланувчи айлананинг маркази, AB кесманинг ўрти перпендикуляри билан (EF) $\perp$ (PQ) илос кесилиш нуктасиди ётади.

Янаш. Берилган А ва В нукталардан АВ тўғри чизиқ ўтказиб, уни берилган PQ тўғри чизиқ билан бирор C нуктада кесилишунга даяом элтирамиз. AC кесмининг диаметр қилиб, i ярим айланада чизиб, уни (BD) $\perp$ (AC) билан бирор D нуктада кесилишунга даяом элтирамиз. Сўнгра C нуктадан CD радиус билан ёи чизиб, унинг PQ тўғри чизиқ билан кесилиш нукталарини E ва E' билан белгилангиз. AB кесманинг MN ўрти перпендикуляри билан EF $\perp$ ва E'F' $\perp$ PQ тўғри чизиқларининг мос равишда кесилиши O ва O, нукталарини марказ қилиб, OE ва O'E' радиустари билан айланалар қилиамиз.

Исбот. Янаишга кўра, $|CE|^2 = |CD|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$ бўлганга учун А, В, E нукталар (CE) га E нуктала уринувчи айланада ётади.

Текшириш. Мазалада берилган А, В ва PQ образларининг ўзаро алоқаларига ҳароб қўлидаги ҳаллар учради мумкин:

I. Агар берилган А ва В нукталар PQ тўғри чизиқнинг бир тарафиди ётаб, АВ ва PQ тўғри чизиқлар ўзаро кесилишса, масала иккита ечимга эга бўлади (190-1 чизма). ((AB) $\perp$ (PQ) ҳолга тегишли айлана чизил.)

II. (AB) $\parallel$ (PQ) бўлса, масала битта ечимга эга бўлади (190-1 чизма).

III. Агар берилган нукталардан бири берилган тўғри чизиқда ётса, масала битта ечимга эга бўлади ((AB) $\parallel$ (PQ) га перпендикуляр ва олма бакиларда олиб айлана чизил).

IV. Агар берилган икки нукта берилган тўғри чизиқда ёи ундан ташқарида ёлган ҳолда устма-уст тушса, масала чексиз кўп ечимга эга бўлади.

V. Агар берилган нукталар устма-уст тушмай, берилган тўғри чизиққа ёи унинг икки тарафиди ётса, масала ечимга эга бўлмайди.

115-масала. Берилган квадратга бир учи квадратнинг бир учи билан устма-уст тушуви мумтазам икки учбурчак чизилг.

Анализ. $ABCD$ — берилган квадрат ва AEF учбурчак шартини текг томикли учбурчак бўлсин (193-1 чизма).

Чизмага мувофиқ,

$$\triangle ABE \cong \triangle ADF$$

тенгликни ёзиш мумкин.

Берилган квадрат томонини a билан ва BE кесмени x билан белгилаб, тушундаги муносабатларни ёзамиз:

$$EC = CF = a - x, \quad AE = \sqrt{a^2 + x^2} \quad \text{ва} \quad EF = (a - x)\sqrt{2}.$$

Лемак, $\sqrt{a^2 + x^2} = (a - x)\sqrt{2}$, бундан $x^2 - 4ax + a^2 = 0$ чиқади; буни етсак, $x = 2a \pm a\sqrt{3}$ бўлади.

Масаланинг шартига кўра, $x < a$ бўлгани учун топилган кейинги икки қийматдан фазов

$$x = 2a - a\sqrt{3}$$

гина масаланинг талабига жавоб беради.

Изданинг иккинчиси эса учбурчакнинг E ва F уchlari квадрат томонларининг давомида ётган ҳолга мос келади (193-II чизма), бунда „икки чизилг“ ибориси кенгроқ маънода тушунилади.

Бу масалани бундан кўра осонроқ йўл билан ҳам ечиш мумкин. Бу ҳолда $\angle EAC = 30^\circ$ эканлигидан фойдаланамиз.

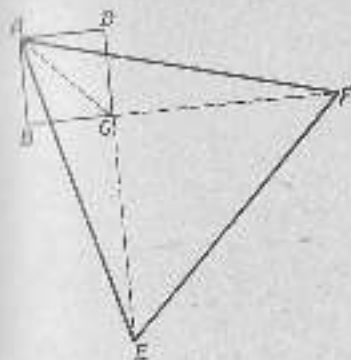
Бунинг учун A нуқтадан AC диагональ билан 30° ли бурчак ташкил қилинган икки тўғри чизик ўтказиб, уларнинг BC ва DC томонлар билан кесилган нуқталарини тўғри чизик билан туташтиришим.

Бироқ, алгебраик методни ишлатишнинг зарурлиги бунда ҳам кўриниб туради. Алгебраик метод кўрсатадики, агар учбурчакнинг икки учи квадратнинг икки томонида ёки уларнинг давомида бўлишини „квадратга икки чизилган учбурчак“ деб ҳисобланса, бу масаланинг икки хил халосига эришиш мумкин (193-II чизма).

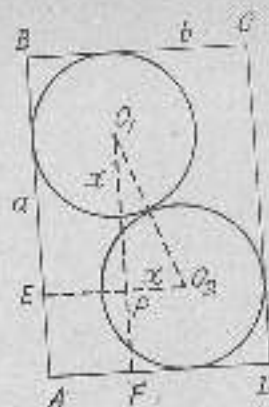
Демак, алгебраик метод билан бошқа методлар воситасида ечиш мумкин бўлган (ёки мумкин бўлмаган) масалаларни ҳам ечиш мумкин бўлар экан.

116-масала. Берилган тўғри тўртбурчакнинг қарма-қарши икки бурчагига икки чизилган ва ўзаро уранивчи икки тизим айлана чизилг.

Изданивчи айланалар 194-чизмадаги O_1 ва O_2 марказли айланалар деб фарз қилайлик. Бу айланаларни қавати учун уларнинг радиуси x топилса кифой, чунки у ҳолда уларнинг икки чизилиш хосасидан фойдаланиб марказларини топил мумкин.



193-II чизма



194-чизма

Берилган тўғри тўртбурчакнинг маълум $|AB| = a$ ва $|BC| = b$ томонларини айлананинг x радиуси билан бир тенглама воситасида боғлаш учун қизмала кўрсатилган қўшимча чизиларни ўтказайлик. Ҳосил бўлган O_1PO_2 тўғри бурчакли учбурчакнинг томонларини:

$$|O_1O_2| = 2x, \quad |O_1P| = a - 2x \quad \text{ва} \quad |O_2P| = b - 2x$$

қўшимча белгилаб, булар орасидаги муносабатни ёзамиз:

$$(a - 2x)^2 + (b - 2x)^2 = (2x)^2$$

ёки

$$4x^2 - 4(a + b)x + (a^2 + b^2) = 0.$$

Бу тенгламани ечипдан қўйилган икки илгиз ҳосил бўлади:

$$x_1 = \frac{a + b - \sqrt{2ab}}{2} \quad \text{ва} \quad x_2 = \frac{a + b + \sqrt{2ab}}{2}.$$

Товшириқлар

- I. Топилган икки илгиздан ҳақиқатан бири масалани қаватини айланаларнинг радиуси бўлиб олишдан аниқлаб, у айланаларни чизилг.
- II. Ҳар қандай тўғри тўртбурчак учун масала ечимга эришиш мумкин.

§ 8. ЯСАШ ИМКОНИЯТЛАРИ ҲАҚИДА УМУМИЙ МАЪЛУМОТ

Батам бор ҳар бир конструктив масалани геометрик ясаш йўли билан ечиш мумкин: бунда фақат тегишли ясаш қуролларини ўриштириш билан керак, чунки ҳар бир геометрик масала ҳар қандай шарт ёрдамида ечиливерилмайди, берилган масаланинг ўзинга мос қуролни ишлата билмаслик ярамайди.

тивасида ёниги бор масалани хая еча олишдан мумкин. Масалан, қадимги грек олими Архимед ва чизгичдан бошқа янаш қурооларни даярлаш имкониятлари учун бир неча классик масалаларни ечи олишганлар.

Кейинроқ улар ечи олмаган масалаларни ечили учун биргина ахас, балки бир неча йўллар ва бунда ишлатилган математик конструктив асбоблар таълифган. Шундай қилиб, конструктив масаланинг ечилиги бор ёки йўқ эканлиги аниқли тушунчалар. Бу йўлда қандай конструктив асбоблар билан қандай масалаларни ечиш имкониятига тўхталмаймиз. Биз фақат циркуль ва чизгич ёрдами билан қандай масалаларни ечиш мумкин ёки қандай масалаларни ечилиш мумкин эмаслиги масаласига тўхтаймиз.

1. Алгебраик ифодага билан берилган кесми ва циркуль ва чизгич воситасида ясалганлиги зарур ва етарли шартлари.

Юқорида нисол тариқасида келтирилган ифодаларни ясалганлигида, ҳамма ифодалар, ё берилган кесмаларнинг рационал функциялари, ё фақат уларнинг квадрат илдизларини ўз ичига олган ифодалар эканлигини кўрсатиш мумкин. Бу ҳол тасодифий эмас. Маълум $a, b, c, \dots$ кесмалар орқали ифодаланган $x = f(a, b, c, \dots)$ кесмига циркуль ва чизгич ёрдамида яшаш мумкин бўлганлиги учун бу ифода берилган кесмалардан иборат аргументларга нисбатан рационал ва биринчи даражали бир жиселли функция бўлган ёки рационал амаллар (қўшимча, айирма, қўпайтириш ва бўлиш амаллари) билан бир ва фақат квадрат илдизларни ўз ичига олган биринчи даражали бир жиселли функция бўлганлиги зарур ва етарли шарт эканлигини аналитик геометриядан фойдаланиб исбот қилиш мумкин (59-§ га қараңг).

Масалан:

$$1) x_1 = \frac{ab}{b+h}; \quad x_2 = \frac{a-b}{a+b} + \frac{bc}{a}; \quad x_3 = \frac{abcd}{b^2a} - \frac{a^2b}{ca} + \frac{(a^2 - 3ab + b^2)}{a^2 - 3a + b^2}.$$

Бу нисолларнинг ҳар бири рационал ва биринчи даражали (яъни бир ўлчовли) бир жиселли функция бўлганлиги учун уларни циркуль ва чизгич ёрдамида геометрик ясалш мумкин.

2) Ҳинбу нисолларнинг:

$$x_1 = \sqrt{\frac{abc}{d} - kl}, \quad x_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{ab}{c}}, \\ x_3 = \frac{a^2 + b^2 + \frac{ab}{c} - d}{a\sqrt{bc-d}} + \frac{b^2 - cd}{a} - l.$$

ҳар бири рационал амаллар билан квадрат (ёки бунга қўпайтирилган) илдизларни ўз ичига олган бир ўлчовли бир жиселли

ифода бўлганлиги учун уларни ҳам циркуль ва чизгич ёрдамида ясалш мумкин.

3) Қуйидаги ифодаларнинг:

$$x_1 = ab, \quad x_2 = \frac{a}{bc}, \quad x_3 = a^{-2}, \quad x_4 = a + bc, \quad x_5 = \frac{a^2 + bc - \sqrt{d}}{c} + dl.$$

илдизини ўчтаси биринчи даражали бўлганлиги ва кейинги иккинчиси эса бир жиселли бўлганлиги сабабли уларни циркуль ва чизгич воситасида ясалш мумкин эмас.

60-§ да кўришган йўл билан буларни биринчи даражали ва бир жиселли кўришганлиги келтирилганлиги кейинги ўлчов қуроолар ёрдамида ясалш мумкин.

4) Қуйидаги ифодаланган ж кесмига циркуль ва чизгич ёрдамида ясалш мумкин эмас:

$$x = \frac{ab}{c} + a\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

чунки бу ифода бир ўлчовли бир жиселли бўлганлиги, бунда рационал ва квадрат илдиз тошан амалларидан бошқа куб илдиз ҳам мажбул.

Шунингдек, 5, 6, 7, 8, 9, ... даражали ва, умуман, квадрат илдизга келтириб бўлмайдиган илдизларчи биринчиси ўз ичига олган ифодани циркуль ва чизгич ёрдамида ясалш мумкин эмас (бунинг сабаби бугун шу § нинг II бўлимида таълиф шом).

II. Масаланинг циркуль ва чизгич воситасида ечилиш шартлари (аломатлари).

Масаланинг шартларига ва маълум теоремаларга асосланиб тенглама тузиш ва унинг илдизларини қамалган кесми сифатида ясалган юқорида кўрдик.

63-§ 1 даги 142—146-масалаларни сепида тузиштан тенгламалар биринчи ёки иккинчи даражали алгебраик тенгламалар бўлиб, уларнинг илдизларини бир ёки бир неча тури чиқариш ва айланапар чиқариш орқали (яъни фақат чизгич ва циркуль ёрдамида) ясалш мумкин бўлади. Бу аниқлиги тасодифий ҳол эмас. Юқорида айтилганлиги, умуман биринчи ё иккинчи даражали алгебраик тенглама тузишга келтирилганлиги ҳар бир масалани циркуль ва чизгич воситасида ечилиш мумкинлигини аналитик геометриядан фойдаланиб исбот қилиш мумкин, чунки бундай тенгламаларнинг илдизлари 63-§ 1 да кўрилган шартларга жавоб беради.

Маълумки, алгебраик ўлчов билан ечилиш 3, 4 ва юқори даражали тенгламаларга келтирилганлиги масалалар ҳам кўп учраб туради. Ани шундай тенгламаларни алгебраик ечимай туриб, уларнинг илдизларини циркуль ва чизгич воситасида ясалш мумкин ё мумкин эмаслигини айтиш билганимиз керак. Бунинг учун алгебраик маълум бўлган қуйидаги жумлаларга мурожаат этаямиз:

а) агар рационал коэффициентли куб тенглаха рационал лардангина эга бўлмаса, у квадрат радикалларида ҳам ечиммай-
ди, яъни бундай тенглама тузатишга келтирилган масала цир-
куль ва чизик воситасида ечиммайди.

Рационал коэффициентли куб тенглаханинг рационал на-
дирларга эга бўлиш шарти қуйидагидан иборат:

б) агар тенглахадангик юқори даражали номанлуҳнинг
коэффициенти 1 бўлиб, қолган ҳамма коэффициентлари фақат
бутун сонлар бўлса, бундай тенгламанинг ҳар бир рационал
йодиси бутун сон бўлиб, у тенглахадангик одам ҳадиинг бутун-
чилири орасида бўлиши мумкин.

Бунга ҳисоблар кўрайлақ.

1) Рационал коэффициентли ушбу $x^3 - 4 = 0$ тенглаха одам
ҳадиинг бутунчилири бўлган $-1, \pm 2$ ва ± 4 сонларининг
бирориси ҳам бу тенглахани қанъатинтира одамиди. Ҳақиқат,
бу тенглама рационал ва квадрат иррационал надирларга эга
эмас.

2) Қуйидаги тенгламага келтирилган масалаини циркуль
ва чизик воситасида ечим мумкин ё мумкин эмаслигини аниқ-
лайлақ:

$$2x^4 - 7x^2 + 3x + 5 = 0. \quad (1)$$

Бундаги x^4 нинг коэффициенти 2 бўлган ушбу бу тенгла-
хада яъни юқори даражали номанлуҳнинг коэффициенти $\neq 1$
бўлган тенгламага келтириб одамиз.

Бунинг учун (1) ни қуйидаги кўринишда ёзиб олайлик:

$$2x^4 - x^2 - 6x^2 + 3x + 5 = 0$$

ёки

$$x^2(2x - 1) - 3x(2x - 1) + 5 = 0. \quad (1)$$

Бунда қуйидаги шартни қабул қилайлик:

$$2x - 1 = t, \quad x = \frac{t+1}{2}. \quad (2)$$

Бу ҳилда (1) тенглама ушбу кўринишга келадик:

$$t^3 - 4t^2 - 5t + 20 = 0. \quad (3)$$

20 нинг бутунчилири ичидан 4 сонга бу тенглама надир
бўла олади, яъни қуйидаги қуйида:

$$t_1 = 4. \quad (4)$$

Бунинг учун (3) тенглама квадрат радикалларида ечимлади.

Ҳақиқатан (3) нинг чап томониини $t - 4$ га бўлишдан ояқ-
қан қиладик 0 га тенглаб, ҳосил бўлган квадрат тенгламани
ёсаси, ушбу надирлар одамиз:

$$t_2 = \sqrt{5}, \quad t_3 = -\sqrt{5}. \quad (5)$$

у учун тенглама қайимларини (2) га қўйсан, берилган (1)
тенглаханинг ушбу надирлари ҳосил бўлади:

$$x_1 = 2\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \quad (6)$$

Бу надирлар 63- § I да ёзилган талабларга жавоб беради.
Шунинг учун (1) тенглахадангик келтирилган масала циркуль ва чиз-
ик воситасида бемалол ечимлади.

116- А масала. Циркуль ва чизик воситасида берилган
ушбу айлананиг уринувчи айлана яъни мукамиллигини исбот
қилайик.

Бу масалага ечим учун даставвал маълум A_1, A_2 ва A_3 ай-
ланаларни уринувчи А айланани аналитик усулда топиб олиши-
миз керак. Бунинг учун уларнинг марказларини (тўғри бурчакли
координаталар системасида) ушбу нуқталар деб фарз қилай-
лик: $O_1(x_1, y_1)$, $O_2(x_2, y_2)$, $O_3(x_3, y_3)$ ва $O(x, y)$; радиустари-
ни эса r_1, r_2, r_3 ва r тар-билиб белгилаб олайлик.

Масалаини шартига кўра, паланушчи А (O, r) айлана бе-
рилган, учал айлананинг ҳар бирига уриналиши учун бу
уриналиш шартини қуйидагича ёзиб хушқили:

$$|O_1O| = r + r_1, \quad (1)$$

$$|O_2O| = r \pm r_2, \quad (2)$$

$$|O_3O| = r - r_3. \quad (3)$$

Бундаги ҳар икки радиуснинг айтиндисини қатнашган тенг-
ликлар ташқи уриналиш ва ҳар икки радиус айирмаси қат-
нашган тенгликлар эса икки уриналиш шартларини кўрсатиши
181- I, II, III чизмалардан кўринали.

Агар (1), (2), (3) тенгликларининг чап томонидангик масуалар
узунлигини O_1, O_2, O_3 ва O марказларининг қабул қилинган
координаталари орқали ёсаси, бу тенгликлар қуйидаги кўри-
нишга келадик:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (r \pm r_1)^2, \quad (1')$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (r \pm r_2)^2, \quad (2')$$

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = (r \pm r_3)^2. \quad (3')$$

Бу уч номанлуҳия ушбу квадрат тенглахалар системасини
маълум йўллар йўлан қилиб, излашган А айлана марказининг
 x, y координаталари ва r радиуси топилади.

Топишриқлар

I. Тўғридангик учал тенглахадангик ҳавсалири одам, ушбу надирлар йўли
тенглахалирининг одамидангик ҳавсалири одамидангик айртм-айртм ҳавсалири одам
рини; бундангик ҳосил бўладикан (x, y, r адога асбобли берилган даражани)
ушбу ҳавсалири одамидангик (1) ва (3) тенглама системасини x ва y га асбобли
одам, x ва y тар-билиб топилади r ҳа афодилират (1'), (2'), (3') тенглама-
ларининг бирини қуйиб, r га асбобли квадрат тенглама ҳосил қилина. Бу
тенгламада одам, r нинг афодилират топили.

II. x , y ва z пар ушун топилган ифодаларни даркуш ва тизинг ёрдаида ясаи шикрланган тўғрисидаги (101-§ 1).
 Баск даркуш ва чизинг ёрдаида ясаи шикрланган ифодаларни даркуш ва тизинг ёрдаида ясаи шикрланган тўғрисидаги (101-§ 1).

117-масала. (Деяни масаласи.) *Ҳажми берилган кубнинг ҳажмидан икки марта каттаи бўлган куб ясаи.*

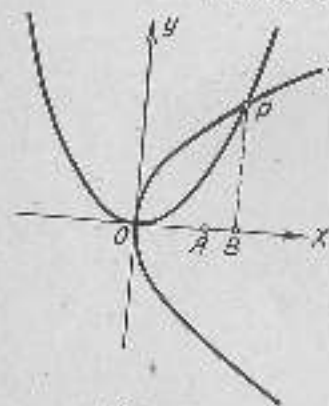
Берилган кубнинг қирраси a ва сўралган кубнинг қирраси x орқали белгиласак, масаланинг шаритаи ҳувофи, $x^3 = 2a^3$ ёки $x^3 - 2a^3 = 0$ тенглама тузилади.

Ҳосил бўлган тенгламанинг чат тамонини кулайтувчиларга ажратсак,

$$(x - a\sqrt[3]{2})[x^2 + ax\sqrt[3]{2} + a^2\sqrt[3]{4}] = 0$$

тенглама ҳосил бўлади.

Бу тенгламанинг бир қадим $x - a\sqrt[3]{2}$ бўлиб, қолган иккита қадим мавҳум сикрлар! Шуқалай қилиб, тенгламанинг бирдан-бир ҳақирой қадим $x - a\sqrt[3]{2}$ бўлади, a кесма берилган деб ҳисобласак, $x - a\sqrt[3]{2}$ кесмаи даркуш ва чизинг ёрдаида белгиласак бўлмайди, чунки x нинг ифодасида куб қадим қатнашмоқда.



106-сикра

Бу ифодани иккита тарйбола ёрдаида ясаи мумкин.
 Тенглахлари

$$y^2 = 2ax \text{ ва } x^2 = ax$$

бўлган иккита тарйболаи олайлик (бу сикра a берилган кубнинг қирраси, 196-сикра).

y ни иккинчи тенгламадан топиб, биринчи тенгламага қўйсак:

$$x^2 - 2a^2x = 0 \text{ ёки } x(x^2 - 2a^2) = 0$$

тенглама ҳосил бўлади.

$x = 0$ қадим параболаларнинг координаталар бошидаги ухушк нуқтаиинг абсциссаси берилади.

$x = a\sqrt[3]{2}$ қадим кесмаи берилади. Деяни, параболаларнинг иккинчи кескини нуқтаи бўлган P кинг абсциссаси излануви қўйинг қирраси бери экан. Агар биз қўрсатилган параболаларни тиза олсак, кубнинг ҳажми икки лиса арттириш масаласини ҳақирой олсак экан.

Кубнинг ҳажми иккилаш масаласини иккита тўғри бурчик ёрдаи билан ҳақирой мумкин. Бунг эраидаги 401-сикра илгарг Паатан қўрсатилган.

$OA = a$ — берилган кубнинг қирраси тенг бўлсин.

O нуқтадан OA тўғри қияқни перпендикуляр тўғри қияқни қўйсак, унда $OB = 2a$ кесмаи қўйсак (196-сикра). Иккита тўғри бурчикни шуқалай жойлаштирамиз:

1) биринчи бурчакнинг C учг $[BO]$ нинг излануви, иккинчи бурчакнинг D учг жга $[AO]$ нинг излануви ётсин;

2) биринчи бурчакнинг бир томони A нуқтадан, иккинчи бурчакнинг бир томони B нуқтадан ўтсин;

3) бурчакларнинг қолган томонлари бир CD тўғри қияқда ётсин. Бу ҳақда OC кесма излануви кубнинг томони x га тенг бўлади. Ҳақирой, ACD ва CDB тўғри бурчакни уябурчаклардан, тўғри бурчакнинг учини тизингизга қўйсак, тизингизга билинганнинг қолган қияқни тизингизга қўйсак:

$$|OA| : |OC| = |OC| : |OD| \text{ ва } |OC| : |OD| = |OD| : |OB|.$$

Бу тенглахлардан:

$$|OA| : |OC| = |OC| : |OD| \text{ ва } |OA| : |OC| = |OD| : |OB|$$

ёки

$$|OA| \cdot |OD| = |OC|^2 \text{ ва } |OA| \cdot |OB| = |OC| \cdot |OD|.$$

Агар бу тенглахларга $|OA| = a$ ва $|OB| = 2a$ қияқларни қўйиб, тенглахларни ҳақирой қўлайтсак:

$$2a^2 = |OC|^2.$$

Бундан OC кесмаинг излануви кесма абсцисси якиқ бўлади.

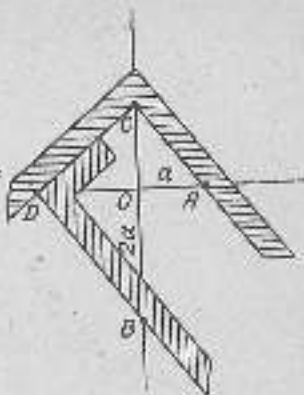
118-масала. *Ихтиёрый бурчакни тенг учга бўлинг.*

Бу масалани ҳам даркуш ва қияқ ёрдаи билан ҳақирой бўлмайди.

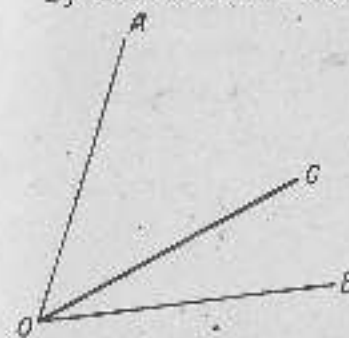
Бунг илтиош учун ихтиёрый $\angle AOB = \alpha < 90^\circ$ ни берилган ва $\angle COB = \frac{\alpha}{3}$ ни излануви бурчаки қолган қияқлик (197-сикра).

Агар биринчи кесма берилган бўлса, $\frac{\alpha}{3}$ бурчакни яғаш ва $x = \cos \frac{\alpha}{3}$ кесмаи яғаш масалалари тенг қўлайди.

Берилган α билан излануви $\frac{\alpha}{3}$



107-сикра



108-сикра

ни ёки сиза билан $\cos \frac{\pi}{3}$ ни бир тенглама ёрдамида биламиз
ушунга тригонометриядан маълум бўлган

$$\cos 3\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi \quad (1)$$

формуладан фенілалениамиз.

Агар (1) да $1/r$ — «дей» фараз қилсан, бу тенглик куйдаги кўриништа келади:

$$\cos x = 4 \cos^8 \frac{x}{8} - 3 \cos \frac{x}{2}. \quad (1')$$

АБНР

$$2 \cos x = x \text{ na } 2 \cos \frac{\pi}{3} = x$$

дво фараз қилсек, кейинги тинглама тубандати кўриништа келадиган:

$$\frac{\sigma}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^3 - 3\frac{x}{2} \ln x - 3x - a = 0, \quad (1'')$$

Олқы аяғыбыздан мақалымки, (1^а) дағи ушпчи даражаны тентеаманынг калкызлары ушпг коэффициентлери оркани, укуний додда куд илтизам орласида ироллазанади. Шунинг ушун укуний додда бурлякни тент ур булакка ширкуль ва чизик орласи билан булай буамизди.

Маънада, $a = \frac{x}{3}$ бўлганда $a = 1$ бўлиб, (1^a) тешлама $x^a = -3x - 1 = 0$ кўриништа келади.

Бу сангамианинг шайларни рационал ҳам эмас, квадрат
иррационал ҳам эмас. Шулнинг учун ўқинг ишдашларида бир-
куди ва қизғин бирами билан ҳаёб бўлмайди. Булган 60' ли
бурчакни биркуди ва тизик бирамида тегил уч бўлакка бўлиб
бўлмайди, деган хулоса чиқарамиз.

Э саятти, Атар беридиги бурчак $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \dots, \frac{\pi}{n}$ (n — бүтүн натурал сан) бўлса, бўлган бурчакни маркули ва манзил бўлимида таъриф қўйлаша бўлади мумкин. Ҳақиқатан $\alpha = \frac{\pi}{2}$ да $\alpha = \frac{\pi}{4}$ бўлганда нисбатинида $\alpha = 0$ да $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бўлиб, (π) билан: қўйилган бурчакни қўйилган

$$x^3 - 3x - 0 \text{ and } x^3 - 3x - \sqrt{2} = 0$$

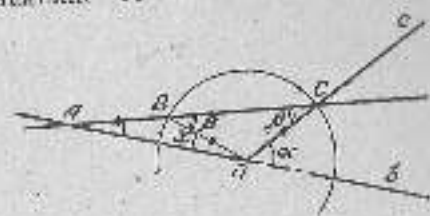
Бугарлар биттимишлеги билдиргә $0, \sqrt{11} - \sqrt{6}$, иккенчиси биле $-\sqrt{6}, \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ буганлар үзүн бугарлар, паргалар ла билгил билдәләр биле билдәләр.

Агер піркудан ва-закта (A ва B) пунктаси боғлашган бир тасхонли чизгичдан фойдалансанг, бурчакли тент учга қў-
лиш қараладиган ечим бўлади.

Числеността безплодних индивиди намалява, когато се увеличава числеността на индивиди, които са в репродуктивна възраст.

$h_0c = x$ ихтиёрдай буырак бўлсин (196-қизма). O марказдан шуғуллик эълоди a та теги раънус билан айлана қизамиз. Айлана берилган бурчанинг c тамоди билан C нуқтада қосилсин. C нуқтадан шуғулдай түгри чыық ўтказамызки, унинг A ва B нуқталары хис раънида бурчанинг тежжанинг даромида ва айланган айланалар ётаб.

$|AB| = a$ бўлади (бунидан ўзини назарда тутиб, қуллашнинг белгиланадиган асосий ёрлаши билан ўтказиш мумкин дейилган қиёмнади). У ҳолда $\angle AOB$ бурчак $\angle O_1C$ бурчакнинг учдан бериға тегиб бўлади. Ҳақиқатан, B ни O билан туташтирсак, $|AB| = |OB| - |OC| = a$ бўлади. Тегиш билан учбурчаклардан ва т



1986-44820

булардан $\alpha = \frac{2}{3}$ келиб чикади. Бу
 учрада биринчи марта Архимед топган.

119-мисала. (Ч. бири кыяратурасы.) Берилген доира-
да төгө көптөгөн мисаллар квадрат жазылат.

1) Дээрх квадратурасы хэдийгчлээ мисалд хамт үзвэл хуучин хэмжээг хэсгээр хувиар, буюу хэдхэн "Рейд" хувиар (хэрэглээний 2000 жил илгэрл) мэдээллийг бичигдэг. Үндэс, сурталын квадратныг төмөрчин дээрх диаметрныг $\frac{2}{3}$ буюу хэдхэн төмөрчин хувиар хэрэглээг гүйцэтгэдэг.

Берилган доиранинг радиусини R деб, изланувчи квадрат-
нинг томинини x десак, ҳасаратнинг талаби қуйидаги тенгсиз-
ликка ифодаланади:

$$x^2 = rR^2; \text{ буилад } x = R\sqrt{r}.$$

х шунга тоқилган ифода билан фақат квадрат илдиз иштирок этади. Шунинг учун бу ифода янаб бўладиган ифодага ухшаш кўринади. Гап шундаки, бизга бу ифодада иштирок этган кесмалардан фақат R кесма берилган. Мисалча бирлик кесми белгиласан ҳолда узунлиги x га тенг бўлган кесмани ҳаёб бўладими ёки бўлмайди. Дегни саволга келиб тикилиди. XIX асрдан бу кесмачи поинтиллигича қилиб келган эди, фақат XIX асрнинг ўрталаридангина π нисат трансцендент сон эканлиги исбот қилинди. Бу эса π сонни коэффциентлари рационал бўлган кўпхалнинг илдизи бўлиб олмастлигини кўрсатади.

Демак, π сони рационал сонлар орқали ва уларнинг ҳеч қандай радикаллари орқали ифода қилинмайдиган хусусий ҳолда π рационал кингдерингт чекли сонлари квадрат алгебралари ор-

қети ҳам ифода қилинмайди. Шунинг учун $x = R/\sqrt{5}$ кесми
ни циркуль ва чизма билан ҳасб бўлмағ экан; лекин
доиранинг квадратураси ҳам циркуль ва чизма билан
ёқилмас экан. Доиранинг квадратурасини трансцендент қилиш
лар (масалан, Архимед сфери) ёрдамчи усуллар мен
жуз. Биз шулардан бириги (Г. Мюллер қўрсатганини) бери
миз. Биринч кесме берилганда, бу усул ёрдам билан 2
тени кесмани тақрибий ҳасб қилиш. Бу асалининг қилиш
бажариладигани 19). Чизмадан қўриш мумкин. Чизмадан:

$|OE| = 1, |OA| = |OB| = 4, \angle EOC = 45^\circ, (CD) \perp (AB),$
 $|AD| \cdot |DB| = |DC|^2$ ёки $(3 + |ED|)|DB| = |DC|^2$. Чизмадан
 $|DC| = |ED|$ бўгани учун

$$(3 + |ED|)|DB| = |ED|^2 \quad (1)$$

$$|ED| + |DB| = 5, \quad (2)$$

(2) тенгламаси (1) тенглака билан биргаликда ечсак,

$$|AD| = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} = 6,2840... \approx 2\pi.$$

120. масала. Берилган учта бисектрисадан бундан тена
ёшли учбурчак ҳасб.
Аялмиз. Тенг ёшли ABC учбурчак берилган, унинг бис
сектрисалари: $|AF| = |CF| = 1$ ва $|AD| = b$, бўлсин (20% ҳа
м).

Бу ҳолда, агар $\angle AFE = x$ десак,

$$\angle EFA = \angle FAC = \angle ACE = x + 2x = 3x \text{ бўлиб,}$$

$$\angle ABC = 180^\circ - 4x \text{ бўлади.}$$

$$\triangle ABD \text{ дан: } |AD| = \frac{|BD|}{\sin A} = \frac{b}{\sin 2x} \quad (1)$$

$$\triangle ABC \text{ дан: } \frac{|AB|}{\sin 2x} = \frac{|AC|}{\sin (180^\circ - 4x)} = \frac{|AC|}{\sin 4x} \quad (2)$$

Бундан:

$$|AD| = \frac{|AC| \cdot \sin 2x}{4x} \quad (2')$$

$$\triangle AFE \text{ дан: } \frac{|AF|}{\sin (180^\circ - 3x)} = \frac{1}{\sin 3x} \text{ ва ёқсак, } |AC| = \frac{1 \sin 3x}{\sin 2x}.$$

Буни (2') га қўйсак,

$$|AD| = \frac{1 \sin 3x}{\sin 4x} \quad (3)$$

бўлиб, AD нинг (1) ва (3) ифодаларини тенглашмиз.

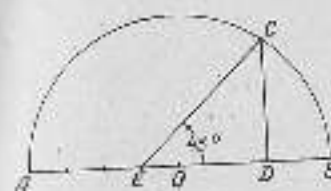
Бу ҳолда:

$$\frac{b}{\sin 2x} = \frac{1 \sin 3x}{\sin 4x} \text{ ёки } b = \frac{1 \sin 3x}{2 \cos 2x} \quad (4)$$

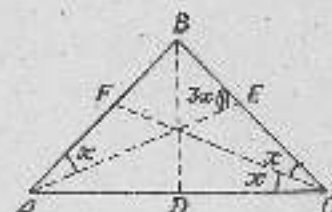
ёки $2x$ га қисқартиш натижасида йўқолган $x = 18^\circ$ ва 90°
чизиқлар мисли шартин қаноатлантирмайди. Агар $1 = 2b$ деб
фараз қилсак, (4) тенглик

$$\cos 2x = \sin 3x \quad (4')$$

қўриниши келади. Бундан $2x + 3x = 90^\circ$ ва $x = 18^\circ$.



199- чизма



200- чизма

Маълумки,

$$\sin 18^\circ = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}.$$

18° ва 54° бурчақлардан ва $|AF| = 1$ дан фойдаланиб, ABE
учбурчакни, кейин ABC учбурчакни ҳасблаймиз.

Бу эса қабул қилинган хусусий ҳолда бу масалани циркуль
ва чизма билан ҳасб қилиш мумкинлигини кўрсатади.

Агар $1 = 4b$ деб фараз қилсак, (4) ифода қўйилган қўри
қишга киради:

$$\cos 2x = 2 \sin 3x \text{ ёки } 1 - 2 \sin^2 x = 2 (3 \sin x - 1 \sin^3 x)$$

ёки

$$8 \sin^3 x - 2 \sin^2 x - 6 \sin x + 1 = 0. \quad (4'')$$

Агар $x = \frac{\pi}{12}$ деб фараз қилсак,

$$y^3 - y^2 - 12y + 8 = 0 \quad (4''')$$

чиқди. Бу тенгламадаги оғир ҳал бўлган 8 нинг ҳеч қайси
бўлувчиси тенгламанинг чап томонини ҳасб қилишга ола
майди.

Демак, бу тенгламанинг янамаляри рационал ва квадратик
иррационал сонлар экан. Шунинг учун бу масала ҳам циркуль
ва чизма билан ҳасб қилинмайди.

64-§. МАШҚ УЧУН МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

282. Қуйидаги ифодалар билан берилган кесмаларни ясаг:

$$I. x = \frac{a^3}{c}, x = \frac{(a+b)^2}{a}$$

$$II. x = \frac{abc}{d}, x = \frac{abc}{de}, x = \frac{a^2b}{cd}, x = \frac{a^3}{b^2}$$

$$III. x = \frac{a^2+b^2}{a+b}, x = \frac{a^2-b^2}{a}$$

$$IV. x = \sqrt{\frac{abc}{d}}, x = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, x = \frac{ab}{a+b}$$

$$V. x = \sqrt{ab-a^2}, x = \sqrt{\frac{a^2c}{b}-a^2}, x = \sqrt{4a^2-4a^2}$$

$$VI. x = \frac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}}, x = \frac{ab^2}{c\sqrt{4a^2-3b^2}}$$

$$VII. x = a\sqrt{b}, x = \frac{a}{\sqrt{b}}, x = a\sqrt{b} - a\sqrt{b} + \frac{a^2}{b(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

$$VIII. x = 2\sqrt{abcd} + 3\sqrt{a^2bc}, x = \frac{4}{\sqrt{a^2b} + a^2cd + \sqrt{a^2b^2 - b^2cd(a^2cd)}}$$

$$IX. x = a\sqrt{2} + \sqrt{2a^2-b^2}, x = a(\sqrt{3} + \sqrt{10} - \sqrt{5})$$

$$X. x = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a-b}}, x = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}, x = \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2-ab}}$$

$$XI. x = a\sqrt{m} + b\sqrt{n} \text{ (бу ерда } m \text{ ва } n \text{ — бутун ва мусбат сонлар)}$$

$$XII. x = \frac{a^2\sqrt{3}+b^2\sqrt{3}}{a-b}, x = \frac{(b^2\sqrt{3}+c^2\sqrt{3})a}{b^2-cd}$$

$$XIII. x = a\sqrt{3-\sqrt{5}}, x = \sqrt[3]{a^3+b^3}$$

283. Қуйидаги тенгламалардан ҳар бирининг ялғизларини ясаг:

$$x^2 + bx + c = 0, x^2 - bx - c = 0$$

284. Қуйидаги ифодалардан тайинларни бир жипсик:

$$I. x = \frac{ab}{c} + \sqrt{ab} - 2\sqrt{a^2-b^2} + 2b$$

$$II. x = ab + \sqrt{ab} - \frac{a^2-b^2}{c} + 2\sqrt{b}$$

$$III. x = \sqrt{\frac{abc}{d}} + a^2 + \sqrt{ab-b^2}$$

$$IV. x = a^2b + 2a + b^2\sqrt{ab} + 2abc$$

$$V. x = ab + c + 2a$$

$$VI. x = a + \frac{bc}{a} + b$$

$$VII. x = 2 + \frac{a}{b}$$

$$VIII. x = \frac{a^2+b^2}{a-b} + \frac{a^2b^2-c^2}{a\sqrt{ab+c^2}} + \sqrt{a^2-b^2}$$

285. Қуйидаги ифодаларни бир ўттовди бир жипсик ифодага келтир (бирлик кесма берилган):

$$I. x = ab$$

$$II. x = a^2$$

$$III. x = b$$

$$IV. x = a^{-1}$$

$$V. x = abc$$

$$VI. x = a^{-1}$$

$$VII. x = ab^{-1}$$

$$VIII. x = \sqrt{a}$$

$$IX. x = \sqrt{b}$$

$$X. x = a\sqrt{b}$$

$$XI. x = \frac{a}{\sqrt{b}}$$

$$XII. x = \frac{a}{a+\sqrt{b}}$$

286. Қуйидаги ифодалар билан берилган кесмаларни ясаг (бир жипсик ифодага келтир):

$$I. x = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}, II. x = a+2, III. x = R\sqrt{a}, IV. x = R\sqrt{2}$$

$$V. x = R(\sqrt{3} - \sqrt{2}), VI. x = a^{-1}, VII. x = a^2\sqrt{a}$$

$$VIII. x = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2} \text{ (X. } x = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \text{ X. } x = a+bc$$

$$XI. x = R\sqrt{2-\sqrt{3}}, XII. x = a\sqrt{bc}, XIII. x = \sqrt{a+b}$$

$$XIV. x = 2\sqrt{R^2-r^2}, XV. m = \sqrt{\frac{2(b+c)-a^2}{2}}, XVI. x = a + \frac{b}{c}$$

287. Иккинчиси a ва ўрта пропорционал қиймати b бўлган x ва y кесмаларни ясаг.

288. Берилган b_1 ва b_2 ўзлавлеларни бўйича тенг билан ўчбурчак ясаг. (Айнан ўчбурчакнинг b кесми аниқлаб олинган.)

289. Берилган ўчбурчакка шундай икки тўғри тўртбурчак чизилган, унинг томонларининг нисбати берилган жипс сонга тенг бўлсин.

290. Икки томон ва улар орасидagi бурчакнинг биссектрисаси берилган ўчбурчак ясаг.

291. Берилган m кесмага нисбати $a^2:b^2$ қоби бўлган x кесма ясалсин (a ва b — берилган кесмалар).

292. Берилган айлана ташқарисига шундай нуқта топилсинки, бу нуқтадан айланага ўтказилган уризма шу нуқтадан ва айлана марказидан ўтказилган кесувчидан икки марта қисқа бўлсин.

293. Берилган айлана ташқарисига ётган нуқтадан шундай кесувчи ўтказилсин, у кесуви шу айлана билан маълум нисбатда бўлсин.

294. Берилган ўчбурчакнинг асосига параллел тўғри чизик билан ўрта ва чет кесилган бўлсин.

295. Берилган ўчбурчак ўзининг асосига перпендикуляр тўғри чизиклар билан ўрта тенгдон бўлакка бўлинсин.

296. Берилган доираги концентрик айланалар билан 2, 3, ... тенгдон бўлакларга бўлинсин.

297. Берилган тўғри тўртбурчакни унга тенгдон бўлган ва асоси берилган кесмага тенг тўғри тўртбурчакка аксонтириш.

65-§. АРАЛАШ МАСАЛАЛАР

298. Доира ичига берилган нуқтадан шундай вагар ўтказилсин, у вагар шу нуқтага тенг иккига бўлинсин.

299. Айлана ичига берилган нуқтадан берилган узуналикда вагар ўтказилсин.

300. Берилган нуқтадан берилган айланага шундай кесувчи ўтказилсин, унинг бу айлана ичига қолган қисми берилган кесмага тенг бўлсин.

301. Доира ичига берилган нуқтадан шундай вагар ўтказилсин, бу вагарнинг берилган нуқтадан икки тарафда ётган бўлакларининг айрилиши берилган кесмага тенг бўлсин.

Кесүүчү функцияга, үчүн a жана b түргө чыгышар билат кесинүүдөн мин
ракинда жасаа бүткөн A на B нуктарлар кубуудан таякка жаап берсин

$$\frac{MA}{AB} = \frac{20}{24}$$

356. Кушндагилар бўйича паразитология ялғиз

б) баалтсан, тусгаарлагдсан хувьд;

б) баалдсаныг, дмэгдэлдвэрийн хисбатн ба узар өрөсдэги бүрэлтн

г) буюу бүртгэлтэй томоог нь үзүүлж, үзүүлэлтүүдийг

г) биік буртаң, томовық ба иккітұя томовының (шу томовына теңестірілген) бағалануына негізделген.

ТЕН. БАЛАНДИНИНГ ПРЕБЛТ.

367. А. В. С. нурлар берилган. Шундай айвонни чапаниги, қанни маъна
 1 да ётиб, узи А нурга уришса ва С нурдан берилган а уюлганидаги на
 тар ажрасин.

358. Урта K_1 , K_2 , K_3 айланалары берилган. Шундай радиустеклиги, унинг ўқири беришган айқинларда ётиб, томонлари еса тўғриқатлаш чизиқларини параллел бўлади.

330. Берилмаз А ва В суқталар орқали ўтган шундай айланка мизиники у берилмаз А ўتراги тизик билими йосиригада аниқла бўлган вақтар билимига берилмаз А юзмавиз тили бўлган.

300. Берилган лиски нуктадан ўтувчи шудай аёқлар қоронғилик, у берилган а торон қизиқдан берилган а қасиқлар ёғини.

361. Болотдан 33 түтүктөн үңкү, Болоттан А. айынагы үзүлүңкү шүбкөй аласы жеминин, унагы дөңсөөлөт а түтүк санын. Билал кескинине патина-силла доска бугангы ичинин бадалыгы Болоттан А. кескинине таскы бугангы.

802. Берилган А нуқтадан ўқиб, берилган А аниқлига эътиборини шу-
дай айлана қилишни, у берилган а туғри чиқарилади берилган А ҳаёфа
ётсин.

363. Берилган A тўғрисида ўқиб, берилган a тўғрисида чинлиги у берилган A айланмадан безилмас δ масофада бўлади.

ЭКОНОМ.

ЖАВОБ ВА КЎРСАТМАЛАР

1606

1-5.

2. ИФ. Илмукучи тўғри чиқиб 201-1 қилмадаги «ABC» нисбатида берилган P нуқтадан ўтувчи XPO доғ фарз қилинган, яъни қуёвдаги тиласини қозғати дейлик.

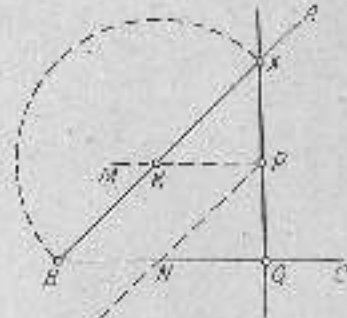
$$|PX| = |PQ| \quad (1)$$

(1) дати X нутқани тилиш усти ВА нутқани бирор халқуи нутқани
унгани бўлган кассофасини аниқлати кифой. Бузиш: унги берилган P нутқ
тағин

(24) (8C) (2)

Утказиб, янги BA нур билан кесиниш нуқтаси K га эътибор қилайлик: (1) ва (2) ва нур, $[KX] \perp [DK]$ бўлади. Лекин, шундангина X нуқта Берилган P нуқта билан BA ва BC нурлар ёрдамида топилм мумкин. Булар X нуқтанинг мавқуи, BK масофаси нур билан. Бундан кўрагина, PX нурга қарабди нур билан мавқуи бўлади.

5- П. Изложба на пункт Вермелат у-
бучилик на димитровиет кеакиши дук-
тан. 08.11.44.



201- 34345

11 505

d. 2.

[illegible]

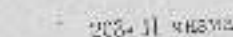
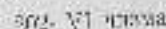
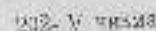
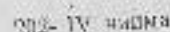
Атар күшбүрүккө жамынтыгы ээргин устала түрдө булалат, уягы ар бир бүрүктөгү күлүм бүрүктүн цыктыгын үшүртөт, тилектеги тоюмдарынан буу-луктарыгын алыштыгына да жериндеги уу-агына уягы уягы уягы, каталар тилектеги аягы үшүртөт (201-н чыкты).

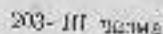
11-У. Ораси ўзгаришларини A ва B нукталардан B нуктаси борат бўлганда ҳаф фазия қилайлик (20-й чизма). A нуктадан бошлал тешиқроқ ердан A_1 кесма ўтказил, унинг қизғишга $10A_1 - 1$ A_1 кесма шартланган. Сунгра $-0,4C \leq -0,04B$ нольлик: энди дошлар қизғишда 80 тигра чизилган C қилиб, унинг A C тигра чизил билан қизғишга B нуктасидан C нуктаси A_1B кесма шартланган A_1B кесмага теги бўлади.

¹ Биринчи даражы — тарыхый жасалат номеринин, кийинки раз даражы — бул жасалаттын дээр элпирилик номеринин белгилери.



13-II, Тегри ярында уңда-солда O әткәсіздә әзиз төмөндә үйрә

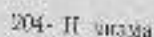
 $\alpha_{12} = 1 = 1.347$ 



дан (EF) — (MN) — фториди. Топилган F протон пайланиши перисекуляристе MN тўғри чиқилган асоси бўлади.

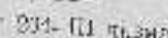
Бунинг ўғрилиги яқиништа кўра тоғ ёқин ABX ва BAE ўғриқчи.

директор Ташлагдан келб чикади.

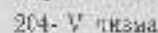
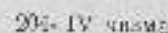


Энд C марказдан AB га теги радиуси балла BSK эг ички, буки PO ай балла медал, K ички тегидаги. (AX) (AM) суади. Булар тегидаги теги балл ABX га CBX учурчаларниг конгруентлиги тааки ички ка-
лиди.

234-11 FILMS

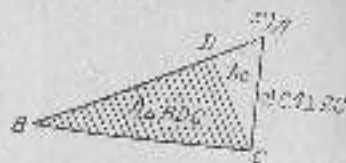
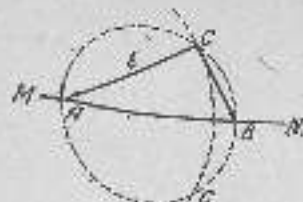


15-III, Магаради 204-VI чызы



- 1) $\triangle A_1OB \cong \triangle B_1OA$,
- 2) $\triangle AA_1C \cong \triangle BB_1C$,
- 3) $\triangle AOC \cong \triangle BOC$.

205-1 97820

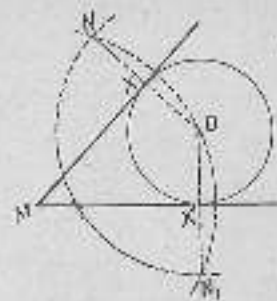
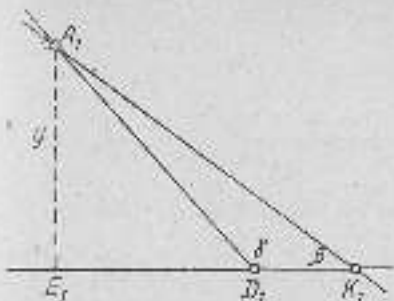
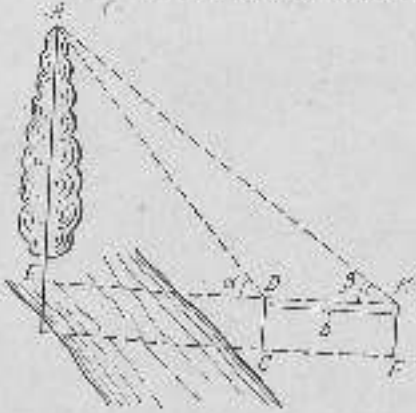


берилган ABC бурчадагы етти томонлиқ изотроф узунига, лекин бари-
биринчи тоғи ёқдан BD ва BE кесмалар акратиб, D ва E нукталар узун-
таралиди (200-1 чизма). Ойбига, DE кесмалар бирден F ни телиб, уни
бурачакнинг 8 угри билан туташтиралади.
20-1. Изотроф AC, BC, AB кесмалар.

22-1. Берилдег пурдан АП хесмада реңг томонго АВС учурта хосла

22-8. Остига бориб беккайдиган экиро **AB** эсим (масалан, дархат)га кунлик ҳалол ширинроҳ ва тикироҳ: **ер** танаб олади, унинг ёроор **C** нукта-сига ёроор **B**ачага **D** ни тегинди. Заъизга **AB**кратлади ва 202-11 чизмда ёроордан **AB** - α ёроордан (бурчак унчагинчи оқий шиф-транслорлардан **AB** - α ёроордан хик менсати).

Решение. По условию AB — хорда дуги $\widehat{BAC}$ окружности, у нас RF — диаметр окружности, на котором хорда AB перпендикулярна. По теореме о хордах, перпендикулярной к диаметру, имеем $AF = BF$. По условию $AC = BC$. Значит, $\triangle ACF \cong \triangle BCF$ по трем сторонам. Тогда $\angle ACF = \angle BCF$. Значит, CF — биссектриса $\angle ACB$. По теореме о биссектрисе имеем $\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BC}$. Но $AC = BC$, значит, $AF = BF$. Значит, F — середина AB . По теореме о медиане имеем $CF \perp AB$. Значит, CF — высота $\triangle ABC$. По условию $CF = 1$. По теореме о медиане имеем $CF = \frac{1}{2} AB$. Значит, $AB = 2$. По теореме о хордах, перпендикулярной к диаметру, имеем $AF = BF = 1$. По теореме о медиане имеем $CF = \frac{1}{2} AB$. Значит, $AB = 2$. По теореме о хордах, перпендикулярной к диаметру, имеем $AF = BF = 1$. По теореме о медиане имеем $CF = \frac{1}{2} AB$. Значит, $AB = 2$.



10 марта (жасалган, 100 и 1030 марта) кыскартырышымен ҳәсият бәлгәһә D_1K_1 ҳәсиятлә қоғозлаң пәһиз қылаҗаң; тоңаҗаң - ва 3 бурчаклаң ясаҗаң.

23-П. (36). I OM(1) ва $(O, 2\pi)$ айланаларни тизиб, уларнинг кескинми нуқталарини беришдан $(O, 2\pi)$ айланга марказдан билан туғаштиришни оғизидан берилган айланани X ва X' нуқталарда кесиб ўтди. MX (ва MX') түзри перпендикуляр шилликлелар тўғрисида ахтаришларда ишбатилади (238-чиқал).

$$\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AY|}{|YB|} = \frac{m}{n} \quad (1)$$

Э) Берилган А нуктадан m_1 таъриф радиуси билан берил, A_1 нуктадан $2m_1$ таъриф радиуси билан иккинчи ёйни чизамиз. (Бу ерда g - ёйларнинг кесми бўлади, улар шундан ташқари олинч қоракчи, $m_1 + m_2 = AB$ бўлсин.) Бу ёйларнинг кесимининг C нуктасини ҳисоблаш учунгина билан тулаштирилган ҳолат бўлган. Ҳаётдаги ҳайвонларнинг Ҳа ҳолати:

Бүгүндө:

декабрь 193, 86, 87-х годов

Натриения неламбда λ ба γ нүктэдэрэн тогтот λ -нэс мэдэгдэ бүлэг.

[illegible]

34. Изложете $\triangle ABC$ нинг AC тохона, A бурчига ва жоссиялет AD тегислиги (буларга D ноксга туширилатган AC тегиздикнинг асосидур) берилган ҳолда AD ни бурчигини $\angle ABD$ —бурчига биттири билими.

[illegible]

36. Адам кызыгуучу кубулуштар $\triangle ABC$ доо, AC томонун тегертендиги боёкдарына BD ба кедарасына BE деек, $\triangle BDE$ еркин-кы фигура бууа кы, туура уш жазуу $|BD| = |AD| + |AE| = |AD| + \frac{1}{2}|AC|$ жазууна берилген BE гипотенузасы. Ерданда ашш жумуша ба буууш ёрмэжкы A ба C аякдарына тоууш кып кырыкы.

37. Бүгүнкү өткөндөрдө демалыш чакырылган реңгине:

3%. Бу хам агаарын чанарын дээшлэлт өсөжээ.

33. БУДУЋИ ЕЛАНЦИ ХИМ. ЗАВЕЗЕ НА УНИВЕРЗИТЕТУ ТОКИО

48. Страдагач үлбөрчөккөз берилген. Төмөнкүлөр гинотексум өзү унутулган үлбөрчөккө өз башындагынын катары катары аялган. Өзү бөрүчөккө үлбөрчөк берилген. Өзү бөрүчөккө берилген.

11. Ашигласан өмчийг иргэн түүрэг бүрчлэн утгаартай бичиж өргөдөг.

42. Бу хам довози содирги масала киба экилади

48. Ассалому алайкум! Бизнинг қўғишларимизда ҳамма катта бўлади.

43. Бу хам дээрли 41-хэсэгэдэхи кэби сүлжэлэ. Дөнгө, эхэндэ чиглэсдэгтэ ахыг хүргэ бурчлалт уабууригидэй күйс барилалт. Ёруултэ фжууртэ учиртэ крбул ктлүүлшисэтэ кэрэб, бэрэлгэнэ хэвэлэ бар, шкэлтэ ноль ехиситэ егэ брүдэлэ шүмкинэ (Бүгдэй хэсэгтэхи ахтэлэхи фигуралдэгтэ хэрэглэгшэнэ тэглэлэ олтэй кэрэк.)

45. 5x настанги хам тусрах олонтги махара кэдэ очин нууриг

46. Девотизм чингисхандан сархуу.

47. Аниани пизанеллини түүрт бурганди үндүртөн ердэини фигура бугуна.

48. Агар калкүрүтү үч бурчтук теб $\triangle ABC$ ны кабыл кылабы, үчүн AC терең, A бурчтук ны экинчи чыгышты айткандагы γ радиустук бурчтук теб теб үч бурчтук, Калкүрүтү фигурасы — $\triangle AOC$ Биздин, чүндө AC эрсең

$OM' = \frac{A}{2}$ бурчдан $\angle OBP = \gamma$ билан тигиз бۆлүнчү, бул радиустун арасы

Ва ўндай шаклдан ушбурчакка ўнинг ҳақ тўлиқлиги (буларни O нукта) нисбатан ушбурчакка яна қандайдан бўлинишни даржага ва OD хис ўли қор қиздан AC томонига тўғриқилиш қорқандиқуда) қосмолар).

49. Анализ сценариев Дала-дэри бичигдэл уншуулгын дүр бүр: Өдөрчиг-фигура бэлэ-эдэлт, Мэсэлд-цэрээрэнг-түхшлэнг.

50. 18-мисли ки кадомтегисеи кардиди

51, 45- КОСЪДЪ КЪЩОУЩА СЪ КЪРАСЪ

52. Оқуғиң, яхшидан келтир очуғиң.

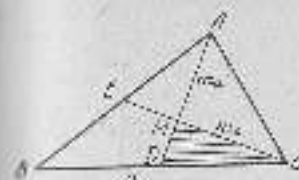
53. 50-массаж дэбл эрнш юунаа.

54. Гачининг бодлогонд 44-мэсэдэгч нэгд эрхэлдэг

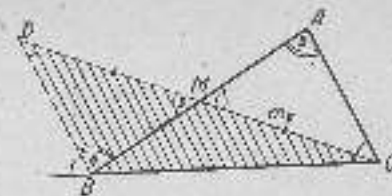
55. "Дриазин" фластурада ниспи 44-данашария каби, илганучи фластура: 9тиги эса 30-массаларни каби 30жаридат.

58. Губина, Игорь Юрьевич 12.07.20

37. Бүгд өртц, денсис, 49-механикага даба буюушлага



941-9434



012-447844

38. Анализ эффективности работы кароты, работающего в режиме бурения. Улучшение работы кароты.

[illegible]

60. Тоғондары $|GD| = \frac{1}{3} m$, $|AC| = \frac{2}{3} m$ ва $|AD| = \frac{1}{3} m$ нисбатлар
даб хабарат $\triangle GCD$ ушбуларак ёришми фигуралар (211-қисм).

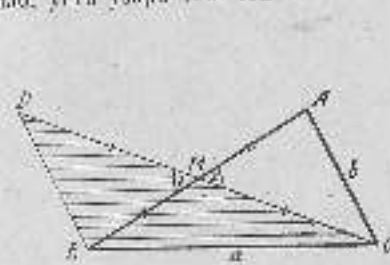
[illegible][illegible][illegible]

63. Изобразите учбурни. 214-чазогиле ABC учбурни. $|AD| = 1$

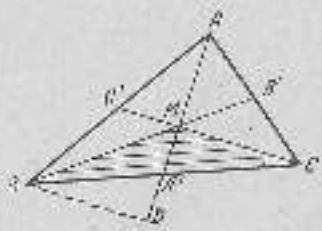
ВВ-1 - ма на) СС-1 - ма, эскинар
ва АМС уйбурчакларин биринчи,
фигура 897: олтинча иккинч

64. Сұрақтар төртінші бөлімнің 213-ші бабына сәйкес АБС түрлімше бағытталған қаржылық қызметкерлердің қызметін бақылауға арналған.

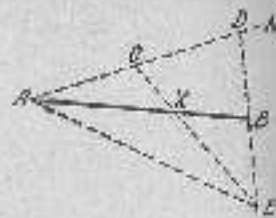
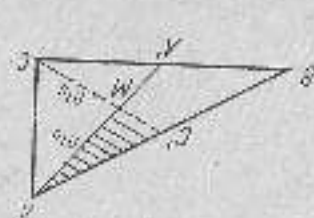
65. Берилген AB чыдаанын бир уюлду (мисалын, A чыдаа) AB жана башка иайыбрий, бурчак тиликка килуучу AN кур, уткызмаз, ва A пукта



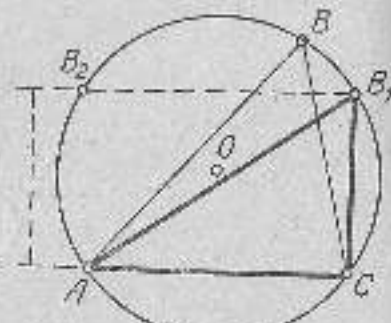
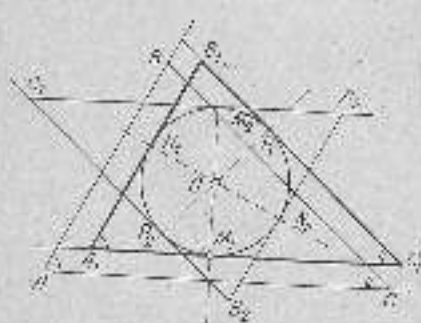
313. 4213411



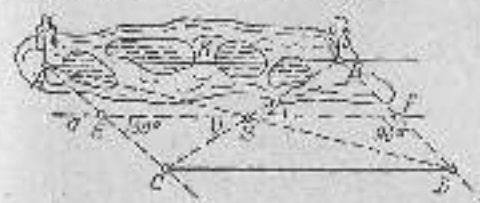
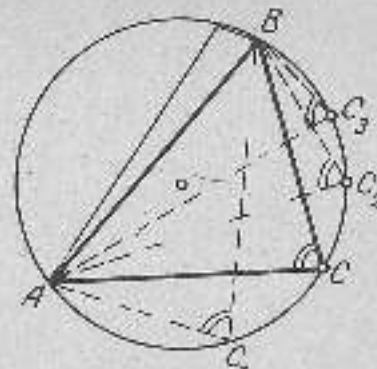
014-443764



D нүктесі P нүкті біздің тұтандыраб, DB аямаһының лавсылығы $BE = DN$ қасиаты дүһині C на P нүктелерінің тұтандырууы аямаһы AB қасиаты бйрер X нүктесі қарса, $|BX| = \frac{1}{3} |AB|$ қасиаты бйрер



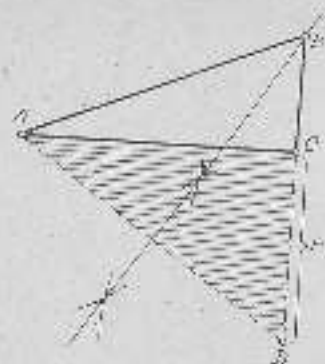
70. Сўраган учбурчлик 216-МН
чиноқда берилган айқинлашмика
чиноқлик ΔABC да ундаги
 $|AB| + |BC| - 1$ на $\angle C$ берилган
даб фарз қилайлик. Агар учбурч-
ликнинг AP тоқлини қозғий сак-
каб, C нукталикни ўқини уяй тур-
ган AB бўйича ётарлиқра борас.
 $\angle C$ ноп қатталиги ётарлиқра-
даки BC нукталикни ётарлиқ-
ра ётарлиқ бораб. Бу ётарлиқда у
шундай BC туғилмика ага бўли-
дики, $|AB| + |BC|$ йиғинди на-
салада берилган $\angle C$ дама ўқили-
мика айқин теги бўйли қолати.



IV 508

12-5

85. Маълумки бундан каллаи ушбу еркинлик ΔABC катет AB гипотенузасини BC катет устун (B нуқтадан бошлб) унни (M нуқта). Хосил бўлган $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$ ва айрилиги D унни A нуқта билан айлантирилган. Ҳосил бўлган ΔABC бўлиши ΔACD бўлишига асосланган бўлади, бундан бериши AC ва CD катетлар бўлишига ушб есиб, бундан келиб чики ΔABC ва ΔACD унни унни ABC унни унни B уш AD бўлишига асосланган бўлишига асосланган BC катетлар ушб билан жаббатилар топиб бериб.

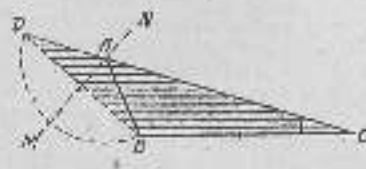


87. Татакнияз чизмадан түзгн буу-
чакта $\triangle ABC$ нн берилген AC катет
на калган катетлерининин $[AB] + [BC] = 1$
дифференциал фойдаланыб, калган катетин
топуб. Үчүн уякит BC катетди диконан
 $BD = 48$ кесме сызганмыс. А на D нун
татарин тугаткыраб. $\triangle ABC$ аралачи
фигура досид катетини $(217-2)$ чилин.

88. 218-2 чизмадан ABC учбурч
на тарафна BD учбурчн сызганчы фн-
тура келди. Кейинги учбурчанин то-
палди эки 21-масаалиниг ечиштинин
фойдаланам.

90. Иккитүзүлгө нүктө S чоңдуктагы
фараз кылып, берилген $\angle A$ бүртүгүнүн
иккөөсүн томогунда үчтү ичкиге бел-
гилеп күйүзөт. B жана C нүктөлөрүн үчтүн
тириб, хосам бүткүз $\angle ABC$ га түтүш-
күлсөк, ушунда AB жана AC угуу билиши
 $\angle A$ бүртүгө ая келсөк, шакт томогунун
 $\angle A$ жана AB мадасынын өзгөчөсүндө. Де-
гунда $\angle A$ угуу өкфатунда топтоп ички-
мадасы томогунда берилген кесме угууна
тири BD кесменин үзгө берилгенден
кесиниши

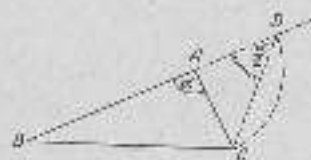
91. Назватгачи ушбурани 218-П шимидиги $\triangle ABC$ кеб фирал килатгях. Ушгир AC томони, $ABC = \alpha$ бурчани на $|AB| = |BC| = |AD| = r$ бурчани ушгир ушдиги C на D зукталарни туташтириб, $\triangle ACD$ га эвтибор килатгир; ушгир AC за $|AD| = r$ томонлари билиа $\angle ADC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ бурчани килатгир. Ойлагани ушгир



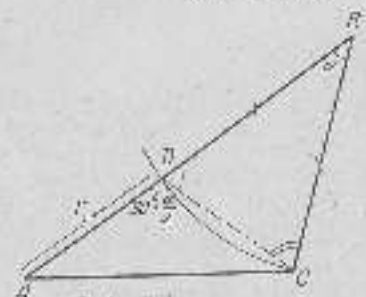
217-1 9/13/04



217-1170H-329



218-1 434834:



218-17 40337

бу үчбүчүктөн янги мүмкүн (21- мисал). Бу үчбүчүктөн кээбирин
ABC са үчүп, анын өңүнө B үчүн тегинди аныктайбыз.

31. А. Умар католда кыска кымет узундукта (түбү түзөлгөнү үчүн) бөлүнөт) кесме аянтта, тоңомак нуктагы кыска кыметтеги үңкүр бурчын кыска түбү калмак үчү бөлүк түзгөнү менен. Кесме бөлүнүшү менен бурчтук үчбүрчүк бөлүнөт сүзүр бөлүнөт, бул үчү 21-десла кесме кесме нуктагы на үңкүр бөлүнөт калмак үчү үчбүрчүк түзүр бөлүнөт калмак (калм кесме бөлүнөт) калмак нуктагы.

92. Тахминоти ҳақиқати ABC таҷрибаҳои берилан BC тоқилини C ундаи AB тоқилин CD баъдидин улғийишани хосна билаз тўри бур-
чакли ACB таҷрибани қатъии фазои бўлади.

93. А. Исламуним унбурмакнинг показида, шакл томонининг беролган берилган ва ақирисидан унинг томонда (7-8) масала. Бу ҳолда берилган масала—шакл томонини ва унинг томонини тузилган биланнинг берилган унбурмакнинг деган масалага ҳалда. Бу энди масаладан шик—тиротушдан ва бу ҳатта берилган туғри бўлмади унбурмак масаладан биланнинг унбурмакнинг шиклиги томонини берилган унинг масаладан унбурмакнинг томонини қилган бўлади.

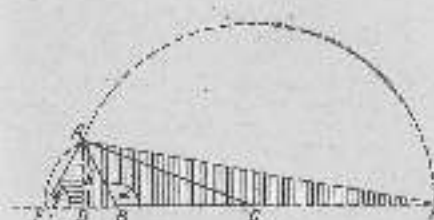
93. Б. Одатдин тасмавнинг сўлигиндан фойдаловдим

84. 219-чиқарида таққиринг чизилган $\triangle ABC$ учбurchакинг периметри, B бурчаги ва $|AB| = 2$ баълиқилар халатин 126 кирибдир, BC жиссиян дэзон-парини $|BE| = |AB|$ ва $|CE| = |AC|$ жиссиякирин кузайс. А нуктакин E ва F нукталар билэн туташтирилин. Хосил булган ABF учбurchах ериминин фигур-са бэлиқилэн.

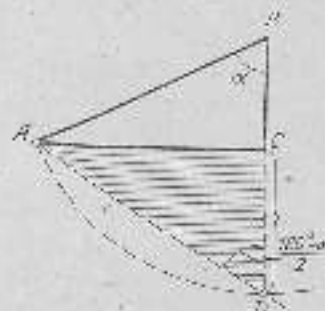
95. Атар кылауучу үчбүчүгү 210° өрөөнөтү ABC үчбүчүгүк кылауучу бериктеги бурчактарын $\angle B$ кылауучу $\angle C$ деген, AB үчбүчүгүк өрөөнөтү фигурасын.

98-IV, Икки утвр бурлагини барилган айвираси нь мангук йакин-
тасны ү бурчлуулан тогтс одог, буюу Икки 95-мэсэлэгэ нэгэди

96-У. Илалмұхаммед Бүршімхан $\triangle ABC$ ги басынды нүктесі қиылысқан кезінде түзілген үшбұрыш $\triangle BPC$ чығымдық $\triangle ACP$ дүр.



219. 201803



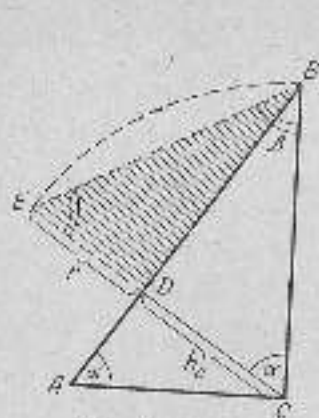
219-1-11543

98-VI. Түптийллийн нэмэлтэй гэсэн бүрэлхэн $\triangle ABC$ -д (219-1 тэмдэг)
 $a+b_c = |BC| + |CD| + |CE| + |DE| + |DE| = r$ бөгөөд. Шүүмжтэй үүний
 илэр үүрэг бүрэлхэн $\triangle BDE$ өнгө E бүрэлхэн төлө олгох, бу бүрэлхэн хэсэг
 бүрэлхэн бүрэлхэн BC -д.

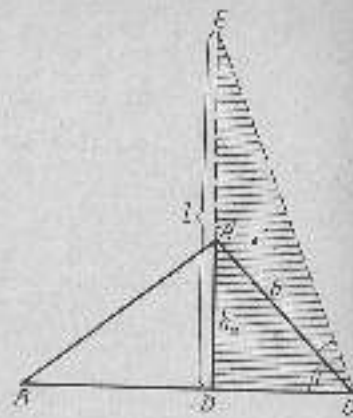
Никитадан төмөндөгү кереметтерлер бүткөнү үчүн $\angle BCE = \angle BAC$ —а деген B бурчунан сырткары $\angle BCE$ кенч BC жээгине өткөзгөн бурчтан бөлүнөт, үч бурчтук үч бурчтук к бурчтук жээгине бүткөнтүсүз B бурчунан дагы мезгилденет.

96-УП. Олдин а жасоо к-ростомосунга к-рине:

97-1. Изобразить в ABC на плоскости экран бора сдвинутый фигура 218-III.
визуально: тупой бурчаки ΔCDE 149, чьяк унне $|DE| = z_0 + \delta = 1$
кажети на E чьак бурчаки ердакеца хон яош мулени; бундан изабери.

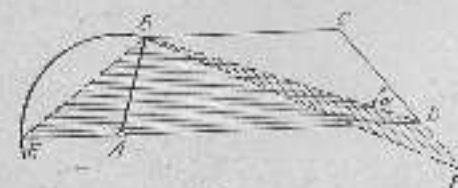


219- II чизма



218- III чизма

учбурчакни ҳам ўқиш мумкин: CD катети устунга берилган $\alpha = \angle C$ кесмани ўқийди, B нуқтани топилади ва CH гипотенузасининг ўрта перпендикулярига DE катет билан кескичлариб, натижадаги учбурчакнинг A учини топилади.
97-II, 97-I масала кўрсатмасига қаранг.
97-III, 97-I масала кўрсатмасига қаранг.
98. Бу масала 1-§ даги II-масалага келтириб ечиш мумкин.
99, 98-масала кўрсатмасига қаранг.
100. Дастлабдан, помалум ички бурчагиларни берилган бўлинидан ва айриналик бўлинига бу бурчақларни топиб олинган, кундан бу масалада 4-§ даги II-масалага келтириб ечиш мумкин.



220- чизма

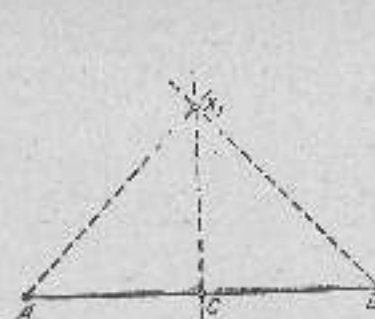
ли катет учбурчак ёрдамчи фигура бўлади.
104, 86-масаладан фойдаланиб ечиш.
105, 85-масалага келтириб ечиш.
106. Ниланган трапеция 220-чизмадаги $ABCD$ деб фарз қилинса, унда BDF ва DBE учбурчаклар ёрдамчи фигура бўлади.

ҲАҚИҚА

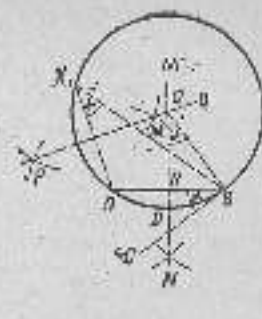
13-§. А

38-II. Маълум айланма билан теңсезликлари бўлган SR радиусини айланга ва унинг марказидан олибрат.

32-I. Барисцент H ўқ: берилган AB кесмани A ва B нуқталардан теңсезликлари берилган X_1 нуқтага қарай, унда $(X_1C) \perp (AB)$ теңсезликлари ўқилиши (221-I чизма), X_1 нуқтани A ва B нуқталар билан теңсезликлари ҳосил бўлган учбурчак $\triangle ACH_1 \cong \triangle BCH_1$ бўлади. Демак, X_1 нуқта AB кесмани AB ўрта перпендикулярида ёнир экан.



221- I чизма



221- II чизма

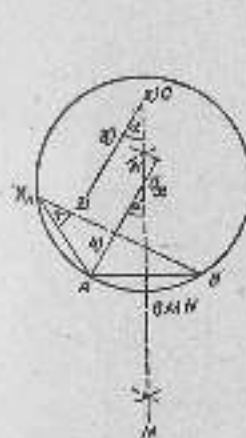
Иккинчи B ўқ. 221-I чизмада $|AX_1| = |BX_1|$ лиғи мумкин. AB кесмани AB ўрта перпендикуляри C нуқтага фарз қилинган. Бу ҳақда X_1C кесма — теңсезликлари $\triangle AX_1B$ нинг медианаси, баъзанлиги (на биссектрисаси) бўлади, яъни X_1 нуқта AB кесмани AB ўрта перпендикулярида ёнир.

32-VIII. Берилган иккала айланма марказлари орасидаги кесмани AB перпендикуляридаги ҳар бир нуқта бу айланаларга теңсезликлари иккита айлананинг маркази бўлинига эътибор қилиш.

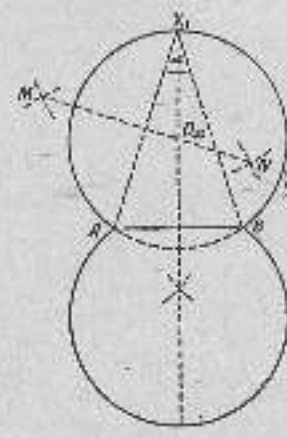
35-VI. а) Агар айланма чизмаси бўлган 221-II чизмада OB радиусини қилиб, бу радиусни унинг B учидан BC перпендикулярига ўтказсан, бу ўрнини билан AB катет орасида маълум α бурчаққа теңсезликлари ҳосил бўлади. Бундан айланма марказини олиб қилишда катетнинг OC радиусини асаси бўлиб маълум бўлади.

б) айлананинг марказини 221-III чизмада кўрсатилган H нуқта билан ҳам топиш мумкин;

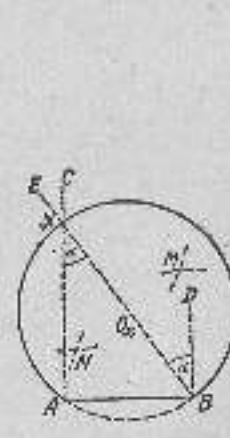
в) агар X_1 нуқтани асос AB кесмани AB ўрта перпендикуляри бурчақлари $\frac{180^\circ - \alpha}{2}$ бўлган $\triangle AX_1B$ теңсезликлари билан учбурчакнинг учи сифатли топибса, айлананинг марказини топишда $\triangle AX_1B$ кесмани AB ўрта перпендикуляри AN дан фойдаланиш мумкин (221-IV чизма);



221- III чизма



221- IV чизма

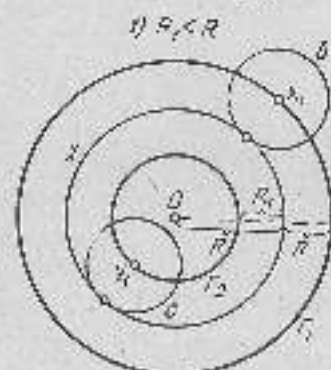


221- V чизма

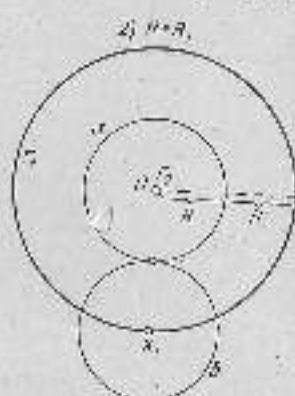
а) алар X нуктасы бир хатаны AB кескенди ва унинг ёнидаги ўтхир бурчаги 90° —а дан иборат бўлган тўғри бурчадан учбуртонининг бир учи сифатида топилди, айлана мезгилнинг учбурчақ гипотенузасининг ўрта нуктаси сифатида топилди дунхис бўлади (221-V чизма).

12-§

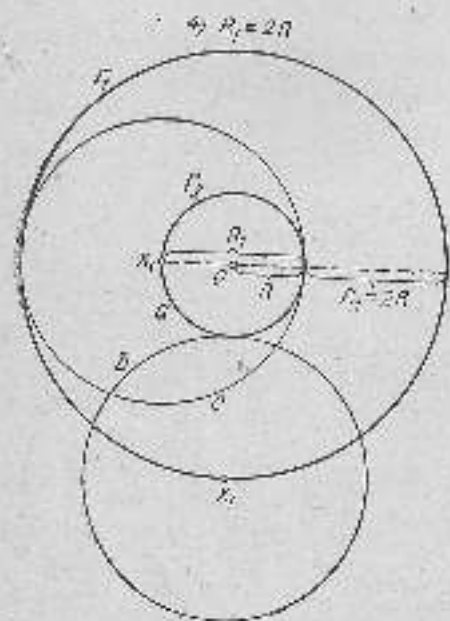
38. Перпендикуляр айланага кески: маълум нуқтадаги трикушча айланалар иррадиациянинг сўзлаши—уш айлана маркази айлан маълум нуқта ордами ўтхир чизилган иборат.



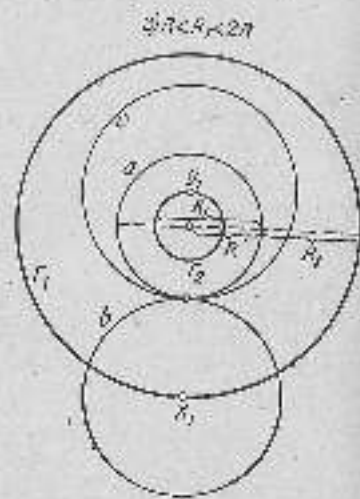
221-VI чизма



221-VII чизма



221-VIII чизма

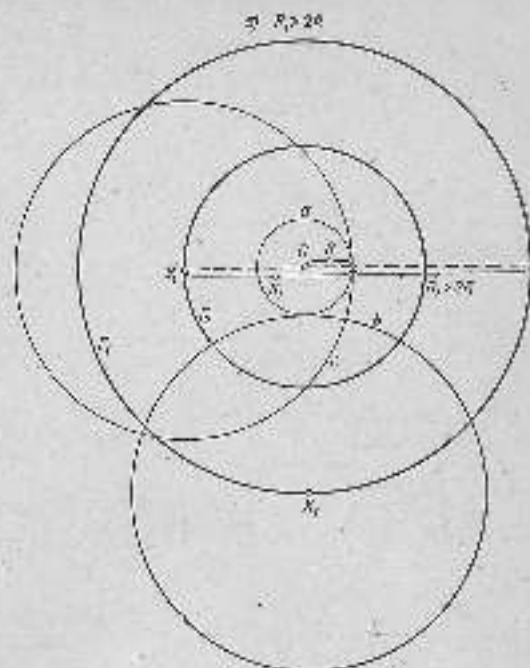


221-IX чизма

Берилган тўғри айланага ўтхир хатани нуктасыда урилуни айланага марказларнинг ўртаси ва шу тўғри хатани унинг маълум нуқтадаги ўтхирлиги берилганлар тўғри чизилган иборат.

39-II. Айланада берилган R ва R_1 радиустарига бир-бирига перпендикуляр катталарнинг олдига қараб, бу айланадан жамий сифатида бир айлана ала нуқтадан ўтхир хатани берилган нуқтадан иборат.

Ҳақиқатан, берилган айланани N радиусига эгалтириш, R_1 радиусининг ушайтара боғлиқ, текиртири шундай ваёйлашарин берилди.



221-X чизма

R ва R_1 қарши-қаршилик	Ҳақиқатан, қаршилик, ай. нук. қаршилик радиустари	Ҳақиқатан, қаршилик	Берилган ай. нук. қаршилик
1. $R_1 < R$	$R+R_1$ ва $R-R_1 > 0$	2 та	221-VI
2. $R_1 = R$	$R+R_1$ ва $R-R_1 = 0$	1 та	221-VII
3. $R_1 > R$	$R+R_1$ ва $R-R_1 < 0$	2 та	221-VIII
4. $R_1 = 2R$	$R+R_1 = 3R$ ва $R-R_1 = -R$	2 та	221-IX
5. $R_1 > 2R$	$R+R_1$ ва $R-R_1 < -R$	2 та	221-X

40-A. Бу ҳақиқатан бундай айлана қилиши: маълум нуқтадан ўтхир хатани нуктасыда урилуни айланага марказларнинг ўртаси ва шу тўғри хатани унинг маълум нуқтадаги ўтхирлиги берилганлар тўғри чизилган иборат.

40-B. Берилган айланада ўтхир хатани ала нуқтадан ўтхир хатани нуктасыда урилуни айланага марказларнинг ўртаси ва шу тўғри хатани унинг маълум нуқтадаги ўтхирлиги берилганлар тўғри чизилган иборат.

40-C. Берилган айланада ўтхир хатани ала нуқтадан ўтхир хатани нуктасыда урилуни айланага марказларнинг ўртаси ва шу тўғри хатани унинг маълум нуқтадаги ўтхирлиги берилганлар тўғри чизилган иборат.

186. Параллелизмнинг дақиқлилари. Эриқиде қосил бўлиш табиур-
тақлардан биттасига қарат (биздаги бурчак китирок латинки олади ку-
лайроқ; бу бурчакнинг учини унинг қаринсизига қосрин ўртаси билан ту-
лаштиниг).

24-8

[illegible]

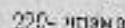
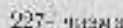
25-5

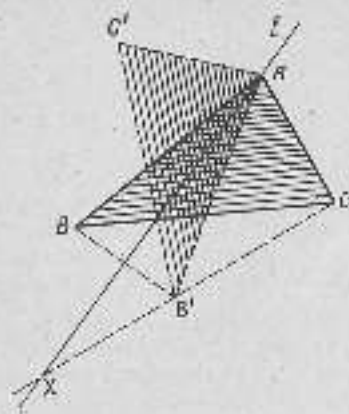
63. SS_1 тўри шизининг X нуқтасига қилинган тўқнаб қабۇл қиладиган нуқталарини ёзиққа, масалан, B нуқтани SS_1 га қилибган симметрияк ахсантарини ва $[4X]$ лиг дегирини қизиб олтиш керак (226-тизав).

БҮ ХЭДХЭ

$\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3$

6) $\angle B$, $\angle B'$ тәңрәң чыгыш $\angle C$ $\angle C'$, һәм $\angle A$ $\angle A'$ бердәүләтләре белән.

[illegible]

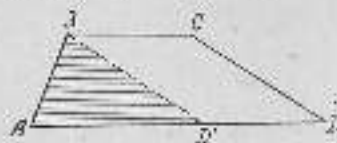


231-чиена

Бу касиле, берилген M ва M' нукталардан ўтиб, берилган l (ёки k) тўғри чизикқа узралиқча айланмачилик, ҳосил қилинганга келилади.

185. Агар l тўғри чизик учбурчакнинг икки соҳасидан ўтса, берилган учбурчакни берилган l тўғри чизикқа нисбатан симметрик ABC учбурчакка аксидактираувиш (231-чиена).

CB' ва l тўғри чизикларнинг кесилишган нуқтаси X — изланувчи нуқта бўлади. Берилган l тўғри чизик учбурчакдан ташқарида ётган ҳол учун масалани ейтир.



232-чиена

186. Изланувчи учбурчак 232-чиенадан BXY учбурчак деб фарз қилиб, берилган ABC учбурчакнинг учинчи AB томони ва нисбатан симметрик қилиб, ABC учбурчакка аксидактираувиш, бу ҳолда C нуқта C' нуқтага ва D нуқта D' нуқтага, Y нуқта Y' нуқтага аксидактираувилади. Бу аксидактираувишлар ҳосил бўлган $AB'C'$ учбурчакни эълани AB' томонига нисбатан яна бир марта аксидактираувиш. Бу ҳолда учбурчакнинг B ва B' нуқталари, D ва D' нуқталари ва Y ва Y' нуқталари бар тўғри чизикда ётади; демак, паҳлалуви BXY учбурчакнинг X учини тоқити учун берилган учбурчакнинг AB томонини юздордаги бўлган ҳолатда қилинган DD' тўғри чизик билан кесилишиши керак эли.

VIII-Б О Б

28-§

201-IV. ABC учбурчакнинг медианаларини қилиб, уларни икки мартадан ўзaro қилишдан ҳосил DM ва AN тўғри чизикларни ўтказишдан ҳосил бўлган фигурага аксидактираувиш.

202-I. AB томон AC диагоналга параллел кечтирилган учун $ABXC'$ фигура параллелограммдир. Шу сабабдан $|BX| = |AC|$ бўлади (20-чиена).

AD томон ҳам AC диагоналга параллел кечтирилган сабабдан $ACYD$ фигура ҳам параллелограммдир. Шунинг учун $|AC| = |DY|$ бўлади. Шу

сабабдан $BXYD$ фигура ҳам параллелограмм бўлади, $|BD| = |XY|$ бўлади. Булардан қасқилиб, бундай янги қўйиш мумкин:

- I. $|AB| = |CX|$ ва $|AC| = |BX|$,
 $|AD| = |CY|$ ва $|AC| = |DY|$.

Бундан $|BX| = |DY|$; демак, $BXYD$ параллелограммдир. Бундан эса $\angle DOB = \angle BXY$.

- II. $(AB) \parallel (CX)$ ва $\angle ABC = \angle BCX$,
 $(AB) \parallel (CX)$ ва $(AD) \parallel (CY)$ ва $\angle BAD = \angle XCY$,
 $(AD) \parallel (CY)$ ва $\angle ADC = \angle YCD$.

III. $(AB) \parallel (CX)$ ва CD кесилиш бўлганда $\angle(AB, CD) = \angle XCD$ бўлади. $(AD) \parallel (CY)$ ва BC кесилиш бўлганда $\angle(AD, BC) = \angle BCD$ бўлади. Тўртбурчак ҳосилга доир жуда кўп масалаларни ечишда шундаги $BXYD$ параллелограмм ёрдамида фигура аксидактираувиш бажарилади.

Масалата берилганлардан батылари $BXYD$ параллелограммни тоғишга низокият берса, берилганларнинг қолганлари иланган тўртбурчакнинг бир учини тоқити, бу параллелограммдан изланувчи тўртбурчакка етиш низокиятини беради.

29-§

65. A—I. Айланмачиликнинг параллеллик рақамини AC диагонални CD томонини бўйича параллел кечтириб ўтириш.

66. A—II. Ёш томонларининг бирини трапециянинг кичик асоси бўйича параллел кечтиришдан ҳосил бўлган учбурчакнинг ёрдамида фигура аксидактираувиш қилиб орқали масала ечилади. 233-чиенага трапециянинг CD томонини CB бўйича параллел кечтириш, қилинган ABD' учбурчак ҳосил қилинган.

67-II. Чизилган K_1 ва K_2 айланалардан ҳеч бирига K_2 айлана билан уч қилинганга мумкин; булардан бирига K_2 га урилиши ёки унинг билан кесилиши мумкин; булардан бирига K_2 билан кесилиш, яъни қилиш ушунга урилиши мумкин; буларнинг иккинчи ҳали K_2 билан кесилиши мумкин; буларнинг бири K_2 билан ушунга-ушунга мумкин. Шу ҳолатларга тасвир қилинган.

30-§

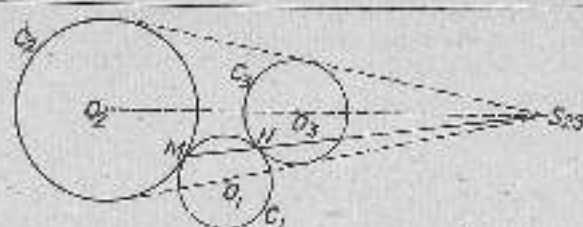
203. Берилган a ва b тўғри чизиклардан бирики, масалани, a тўғри чизикнинг узунлиги l ҳисобга тенг ва йўналиши берилган a тўғри чизик билан

аксидактираувиш $\vec{MM'}$ ва $\vec{MM''}$ векторлар бўйича параллел (яъни тоғиш) қилинган. Бундан a' ва a'' тўғри чизиклар ҳосил бўлади. a' ва a'' тўғри чизикларнинг b тўғри чизик билан кесилишган нуқталаридан l қосмага параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиклар a ва b тўғри чизиклар билан кесилиш, изланган ҳолатларни беради.

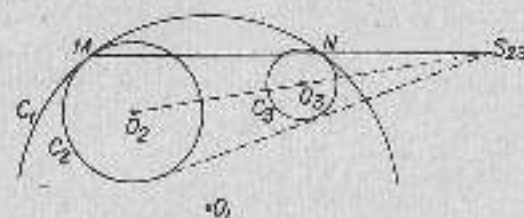
Агар a билан b тўғри чизиклар тўғри кесилишса, масала иккинчи кичикга эва бўлади (234-чиенадан қабл). Агар $a \parallel b$ бўлса, масаланинг ечилиш бўлмайди, ёки l ҳисобга кўп ечилиш эва бўлади.

204. Берилган A нуқтани берилган a тўғри чизикқа параллел қилиб, AM вектор бўйича кечтириш (235-чиена). A нуқтананг образи бўлган A' нуқта билан B нуқта орасидан янги қосмага $A'B'$ ҳосил қилинган.

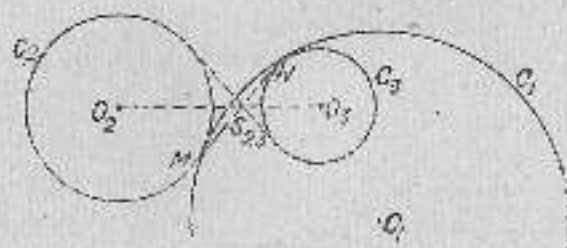
Бу ҳолат билан b тўғри чизикнинг кесилишган нуқтаси C бўлади. Энди CA' кесилиш узунлиги ва йўналиши маълум бўлган $A'A$ га параллел кечтириб, DA' ҳолатга келтирилади. Ҳосил бўлган $BCDA$ синг чизик берилган



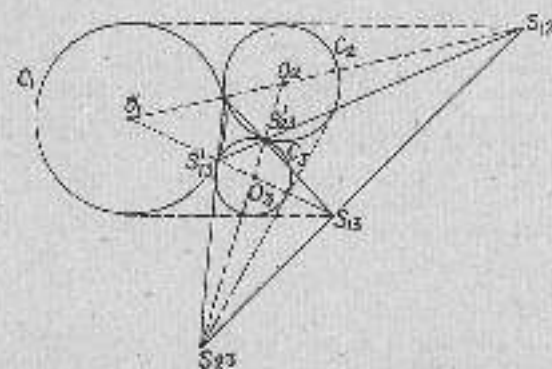
242-чи рақам



243-чи рақам



244-чи рақам



245-чи рақам

бошқа) нукталарни ёки C нуктасини белгилаб, унга ҳам ўша гомотетияни амалга оширамиз. Бундан ҳосил бўлади, C нуктаси A' ва B' нукталари билан туташтиришдан ҳосил бўлган $\triangle A'B'C'$ нинг тўғри бурчакли эканлигини кесат қилиши шундан.

41-§

1. 133-мисалдаги илкге ўқидиран ҳар бирини $O_1O_2O_3$ учбурчакни транс-версад ҳисоблаб, уларга Менелай теоремасини татибқ қилиш керак.

II. Мана теоремасини асосан кесат қилинади. Бунда қуйидаги ҳаллар-ни қараш керак.

1. C_1 айлана C_2 , C_3 айланаларини эквалентга татибқ уришган ҳол (242-чи рақам).

2. C_1 айлана C_2 , C_3 ларини эквалентга икки уришган ҳол (243-чи рақам).

3. C_1 айлана C_2 га татибқ ва C_3 га икки уришган ҳол (244-чи рақам).

4. Уччала айлана ўзаро татибқ уришган ҳол (245-чи рақам).

XI БОБ

43-§

62-IV. Диагоналларнинг берилган нисбатидан ва берилган бурчадан фойдаланиб, $A_1M'D_1$ учбурчакни кесат, унинг ёндамида $A_1B_1C_1D_1$ параллело-граммини топишга (246-чи рақам).

Синус теоремани параллелограммининг ўзини асослангизиб, ҳисоблабчи $A_1B_1C_1D_1$ параллелограммининг ҳосил қилишга.

82-V. 247-чи рақамда фойдаланиш.

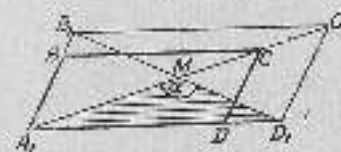
44-§

83-I. $\triangle ABC$ ва $\triangle A_1B_1C_1$ бўлишни кесатлаб, татибқ пропорциялар тузиб, $BD + AC = 1$ эканлиги кесат қилиш керак.

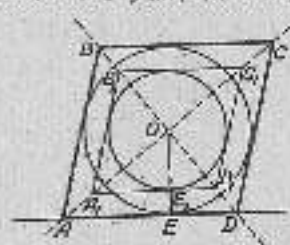
45-§

83-VA. 86-мисалдаги ила Бомба йул билан ечишга ёрдам қилаётган қуйидаги тушунтани олган эсимиз ўтойлаш; 247-I чи рақамдаги тўғри бурчак-ли $\triangle ABC$ га (унда кўрсатилаган асосдан) икки чизилган $MNPQ$ квадрат, нинг N уш шу учбурчак тўғри бурчаклининг биссектрисаси бўлак гомоте-тиясининг ҳосиллиги нуктасига тўғри келади.

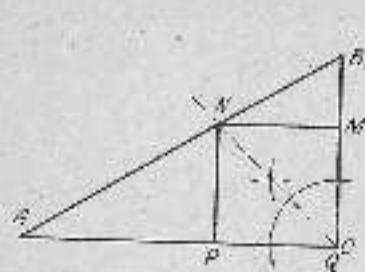
247-II чи рақамда берилган екиабрик $\triangle ABC$ га икки чизилган квадрат кесат, учун уш шундай тўғри бурчакли $\triangle A_1B_1C_1$ га кесатиб оламизки, унинг A ва C ўлкари берилган $\triangle ABC$ нинг A ва C ўлкарига ктиб, учинчи



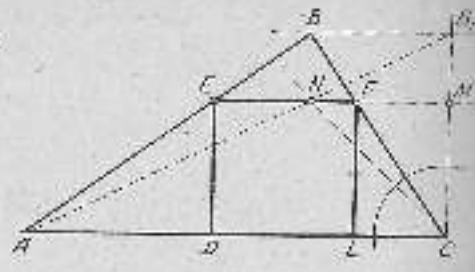
246-чи рақам



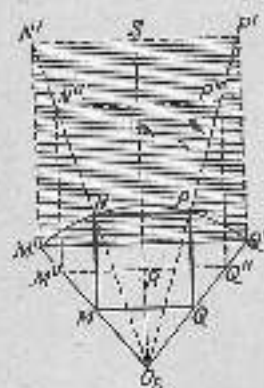
247-чи рақам



247-1. 3-кимо



247-II. 4-кимо



248. 5-кимо

46-§

III-III. Математик енгилит илалит берилган M нукта $[AOC]$ бурчакка қўйилган бўлган бурчакдан ташқарилган экинчи хатрак.

IV-V. Берилган тўғри тизилган берилган M нуктага қишлоқат $\frac{m}{k}$ коэффициент билан томонотик ахсаблардан қарақ.

XII Б О Б

52-§

13. III-1 шиклада $[OA] \cdot [OA'] = [OB] \cdot [OB']$ бўлганда, учун ушунга $[OA] \cdot [OB] = [OA'] \cdot [OB']$ шиклада. Бу тенгсизлик $\angle AOB \leq \angle A'OB'$ унда-
си $\angle AOB$ биле $\angle A'OB'$ га ўзлашганин айталик. Бундан $\angle A'OB' =$

$= \angle AOB - 90^\circ$ натижа бўлади. Демак, B нукта AO диаметрининг диаметри қилиб қўйилган айланани қўйилган бўлади. Бу айлананинг O дан бошқа ҳар бир C нуктасини инверсия биле C' нукта берилган (тўғри шиклада) бўлади.

14. Берилган нукта биле диаметрал қарши бўлган нукта инверсия биле айлананинг диаметри биле қарши нуктага қарши бўлади. (187-III шиклада)

15. Берилган айлананинг берилган нукта биле қарши нуктага қарши бўлади. Бу нукта инверсия биле қарши нуктага қарши бўлади.

16. Берилган айлананинг берилган нукта биле қарши нуктага қарши бўлади. Бу нукта инверсия биле қарши нуктага қарши бўлади. (187-III шиклада)

356

53-§

17. Тўғри тизилган икки айлананинг берилган нукта биле қарши нуктага қарши бўлади. Бу нукта инверсия биле қарши нуктага қарши бўлади. (187-III шиклада)

18. Бундай икки айлананинг берилган нукта биле қарши нуктага қарши бўлади. Бу нукта инверсия биле қарши нуктага қарши бўлади. (187-III шиклада)

19. Бундай икки айлананинг берилган нукта биле қарши нуктага қарши бўлади. Бу нукта инверсия биле қарши нуктага қарши бўлади. (187-III шиклада)

$$m = D_0^2 \cdot k - [OC] \cdot \frac{[OC']}{[OC]} = [OC] \cdot [OC']$$

$$\text{Бундан } r = \sqrt{[OC] \cdot [OC']}$$

54-§

1. а) Берилган a ва b айланалар инверсия биле қарши нуктага қарши бўлади. Бу нукта инверсия биле қарши нуктага қарши бўлади. (187-III шиклада)

б) Берилган a ва b айланалар инверсия биле қарши нуктага қарши бўлади. Бу нукта инверсия биле қарши нуктага қарши бўлади. (187-III шиклада)

XII Б О Б

58-§

281-I. $\sqrt{6}$ ва $\sqrt{5}$ биле $\sqrt{11}$ биле $\sqrt{10}$ биле қарши нуктага қарши бўлади.

281-II. Бундан $x = \sqrt{n} = \sqrt{(n-1)^2 + 1}$, $\sqrt{n-1} = \sqrt{(n-2)^2 + 1}$, $\sqrt{n-2} = \sqrt{(n-3)^2 + 1}$, ... формулалар биле қарши нуктага қарши бўлади. Бу нукта инверсия биле қарши нуктага қарши бўлади. (187-III шиклада)

281-IV. $x = \sqrt{n} = \sqrt{a^2 + b^2}$ биле $x = \sqrt{n} = \sqrt{a^2 + b^2}$ биле қарши нуктага қарши бўлади. Бу нукта инверсия биле қарши нуктага қарши бўлади. (187-III шиклада)

281-XI. Кейинги уч шиклада айлананинг қарши нуктага қарши бўлади. Бу нукта инверсия биле қарши нуктага қарши бўлади. (187-III шиклада)

Охири қарши нуктага қарши бўлади. Бу нукта инверсия биле қарши нуктага қарши бўлади. (187-III шиклада)

64-§

289. Бу шиклада айлананинг қарши нуктага қарши бўлади. Бу нукта инверсия биле қарши нуктага қарши бўлади. (187-III шиклада)

$$k = \frac{mb}{ab}$$

356

290. Берилган ABC ушбўриқда берилган AB, BC тоқиналар орасидики B бурчакки: берилган BD биссектрисасики (CB) || (AB) билан бирер A бурчакда қосилтуруақ дўзим элиқиле. BCC ушбўриқкилик: элтеқили фигуре билим дўқилиқи қўқотилиқи ҳарак.

Вүрүгү UT_1 н дасыаыа $\triangle ASD$ ы UDS кк кебеглиб, буга чыдагыч
уполовондугу DS кооммун тоңко оуаш кыык.

202. Сүрүлгүн М. Укуктан берилген абалага: үчкүлүктөгү АТ урууну күүлүктүм (У—үрүмдү күүлүктүм), ж-а АТ ок у бидан бөлүнбө (О айдага берекени), бериле чыккандагы на берилген сөздөн күүлүктөгү төкмөчүлүктөн күүлүктүм жигенди.

$$y^2 = x^2 - r \text{ so } 2x = y \pm \sqrt{r}.$$

233. Сизилган кесүүтүндөгү өтөшкү бүйүктүгү h , түзөлгүсү бүтөтүмү u ты уурада түзөлгүсү u бийик бөлүмдөгү, сизилген түрткү h бар сүз-
гүдөгү чыңгызгы көчүмү h уурада алгачкы теорема h тинде, күйүдөгү
уурадагыларга башы күйүтү.

$$x: y = m: n \text{ or } (x \neq y) \wedge x = y$$

294. Берилдик АЗС үчтүрчүлүктөгү АС арасындагы үчтүрчүлүк DE түрүндө DE үчтүрчүлүктөгү S өлчөмү менен $S_{ABC} = S_1$ жана $S_{ADE} = S_2$ болсо, S_1 менен S_2 арасындагы байланышты таппагыз.

$$S_1 S_2 = S_{-1} S_2 \text{ and } S_1 S_2 = S_{-1} (S_1 - S_2)$$

ΕΥΡΩΠΑ

$$S_1 = -\frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S_1^2}{4} - S} \quad (1)$$

2434

$$(S_1)_1 = \frac{1}{9} S_1 (\sqrt{5} - 1)$$

42

$$(S_1)_3 = -\frac{3}{2} S(1 - \sqrt{5}) \quad (11)$$

олжады. Мәселенін шартқа кўра $S_1 \in S$ булган керек. Шунинг учун (F) деген биринчи шартынтинга пайдала олмаса.

Медианата на дугата, $\triangle DBD \sim \triangle ABC$ бидејќи дугите AB и AC се еднакви.

$$S = (S_{1N} - |A \otimes F|, \text{gDP}) \quad (2)$$

Също така (2) дан възниква от 80 и 100 и 250 млн.

203. Берилган ABC учбурлакнинг AC томони ўтказилганда таянч қилинган перпендикуляр AD нисси M ва N нуқталардан чиқарилган ($AD \perp BC$, $AD \perp MN$, AC) тасвир қилган деб фарз қилиш. AM ва AN кескин вақтиг қилиш. Бундан ушбу Берилган учбурлакнинг AB ёлганлигини ўқитиб, ABC ва AMN учбурлақларга нисбатан ҳажмга қаратаган тағйир қилиш қилиш.

$$0 \leq AK(1) + AN(0) + AG(1) + AC(0) = 1, 3.$$

$\triangle AOD \sim \triangle ANM$ дан хам бир пропорциона тусны, нислэз пропорционайн AN нэвч үйлэлж тохирно.

P ва A шуклидир инқилаб паринодикузаришис ёриқатан учбуртавини AS таъмин билин қилдиран буқаманида.

250

[illegible]

логично, что для изучения кинематики вращений вращающегося тела необходимо знать, как изменяется угловая скорость.

ЎРТА МАКТАБ ЎҚИТУВЧИЛАРИ УЧУН КЎРСАТМАЛАР

Шарҳ	Таблиця №	Програмадан Мазун ва Тавзеҳ	№	Мисол ва Кўрсаткич	Тавзеҳ қилинган материал	Ахборот қилинган материал	Билгиларнинг таълиқ қилинган материали
VI	1	I. Асосий тушунича- лар					
	1	Кескалар ус- тида ёнаклар	4-§	7 ва I— VI топи- шир- лар	циркуль, мазмун	—	—
	2	Кескани тақ- рибий равишта теги бўлиш- га бўлиш	4-§	18—V*	циркуль	—	—
	3	Бурчаклар ус- тида ақиллар	4-§	9, I—IV	циркуль, қозғал	—	—
	4	Ҳар хил бур- чаклар асоси	4-§	9, I—IV топиш- риқлар	циркуль, таъриф	§—V* топиш- риқ	Дала циркуль мазмун, бурчак бачани (астро- номия), таъриф қозғалчалар
	5	Тўғри чизик қа ўтказилган перпендикуляр- лар	4-§	13, I—IV топиш- риқ 14, I—III топиш- риқ	чизик, теги, мазмун хил ўт- бурчак	14—IV* V*, VI*	Дала циркуль мазмун, бурчак бачани (астро- номия), таъриф қозғалчалар
	6	Бурчакли теги бўлишларга тақ- рибий бўлиш	4-§	17—VII*	циркуль, транспор- тир ва мазмун	—	—
	7	Ер устида бур- чакларнинг ўлча- ш ва асоси	4-§	—	—	9—V*	Эккер, астро- номия, маҳсул ва таъриф
	8	II. Уч бур- чак					
	8	Тўғри чизик қа изобата- симметрия Симметрияли фигураларнинг тегишли	24-§A 24-§B	I—V топ- ширик	циркуль, мазмун	I—IV V—VI	Қотоз ва рақ- лар, халат, тўғри тўғри- так, рақш шак- лидаги қар- лар
	9	Уч томонли бўлиш учбур- чак асоси	4-§	8, I—V топиш- риқ	циркуль, мазмун	8—VI* 8—VII*	Дала циркуль
	10	Икки томонли ва узлар ораси- даги бурчакли қўра учбурчак асоси	4-§	10, 10— I—IV	циркуль, мазмун	10—V* VI*	Таъриф ва қоз- ғалчалар

REFERENCES

[illegible]

Сифат	Тартиб №	Программани ном ва тавалло	§	Масала номера	Ҳисоб қилиш қоида- лари	Амал қилиш қоида- лари	Бухорини қилиш қоида- лари
VII		дарса ширати йили билан участкалар нинг шайири олиш	4-§				
	18	IV. Тўрт бур- ча халар					
	19	Марказий симметрия					
	20	Симметрия мар- казини эга бўл- ган бадди фи- гуралар	9-§	75-1—XII	дикуляр, чизмач		
	21	Параллело- граммлар исом	4-§	16-1—VI	дикуляр, чизмач		
	22	Кесмаи тенг бўлакларга бў- лаш	8-§	75-1—XII	дикуляр, чизмач		
	23	Трапеция исом	13-§	22-VII	дикуляр, чизмач		
	24	V. Айланча	4-§	23-1—XV	дикуляр, чизмач		
	25	Берилган ун- ишга бўйича айланча исом	4-§	24-1, II	дикуляр, чизмач	24-III	
	26	Айланчага ун- ишга бўйича ун- иш	4-§	25-1—III	дикуляр, чизмач		
VIII		VI. Пропор- ционал кес- малар. Ҳа- минш фигу- ралар	4-§	26, 27	дикуляр, чизмач		
	27	Кесмаи бо- ришган шайири да бўлиш	4-§	26, 27	дикуляр, чизмач		
	28	Тўртинчи про- порционал ва бўртта пропор- ционал кесма- лар исом	4-§	26, 27	дикуляр, чизмач		
	29	Ухланиш фигу- ралар исом	26-§ 28-§	75-1— VII	дикуляр, чизмач		
	30						

Сифат	Тартиб №	Программани ном ва тавалло	§	Масала номера	Ҳисоб қилиш қоида- лари	Амал қилиш қоида- лари	Бухорини қилиш қоида- лари
IX	26	Эр участка- синини шайири олиш	36-§				
	27	Торий бўл- майдадек ба- ламлисини на масофаи аниқ- лаш	36-§	75		75-IX ² - XII ²	Табк на қи- яшмалар, эксор ва чизмач, ак- ралисини
	28	Мунтазам қўлбўричлар халар	65- 66-§		дикуляр, чизмач		
	29	VII. Геомет- рик алмаш- тиришлар	22-§	13A-1—8			
	30	Геометриқ ал- маштириш ха- мла асосий ту- шуричлар	27— 28-§				
	31	Параллел қу- лиш	29	66—68, 203, 204, 207—213			
	32	Параллел қу- лишнинг методи билан масофа- лар чизм	30-§				
	33	Уш симмет- риясини асосий тушуричлар, чисмалар	24-§ 42-§	1—XXII			
	34	Симметрия методи билан масофа чизм	25-§	68—69	дикуляр, чизмач	60-маса- ла топ- ишлари, 61-маса- ла	
	35	Марказий симметрия					
	36	Айланча	31-§ 33-§	120—223	дикуляр, чизмач		
	37	Айланчанинг методи билан масофа чизм	32-§	70—72			
	38	Гомотетия	34- 37-§		дикуляр, чизмач	68-§	75-IX ² —XII ²
	39	Ухланиш методи билан масофа чизм	42- 45-§	75-89			
	40						

Додони	Тартип №	Программани сўли ва ўзгариш	№	Материал масалалар интервал	Результат нишонла- ш ва ба- ҳо	Ахали масалалар хисса покази	Билан ишлов нишонла- ш ва ба- ҳо
	39	Геометрия ўзгариш	13— 14-§	30—48	циркуль, чизгич	—	14-§, 50 А-жа- сага
	40	Геометрия ўзгариш метод били масала- лар ечиш	15— 22-§	108—188	циркуль, чизгич	—	17-§, 108 20-§, 58—119

Эслатиш. Юқорида кўрсатилган материаллар битта ўқувчидан
сўрашлари зарур бўлган эди оз (минимал) ҳажмдаги материаллар.
Китобдаги бошқа материаллар эса кўра ўқувчилар учун ва ўқитувчилар
кўра материаллар ширин ва студентлар учун бўлиши.

ҚИЙШИҚ БУРЧАКЛИ УЧБУРЧАКЛАР ЯСАШГА ДОИР
МАСАЛАЛАРДАН ЦИРКУЛЬ ВА ЧИЗГИЧ ЁРДАМИДА ЕЧИШ
БЎЛМАЙДИГАН МАСАЛАЛАР РЎЙХАТИ

- 1) a, b, b_A
- 2) a, b, r
- 3) a, b, r_a
- 4) a, b, r_c
- 5) a, A, b_D
- 6) a, B, b_A
- 7) a, h_a, b_A
- 8) a, h_a, b_A
- 9) a, m_a, b_B
- 10) a, m_a, r
- 11) a, m_a, r_a
- 12) a, m_a, r_b
- 13) a, m_b, b_A
- 14) a, m_b, b_B
- 15) a, m_b, b_c
- 16) a, m_b, r
- 17) a, m_b, r_a
- 18) a, m_b, r_b
- 19) a, m_b, r_c
- 20) a, b_A, h_B
- 21) a, b_A, r
- 22) a, b_A, r_a
- 23) a, b_A, r_b
- 24) a, b_B, h_c
- 25) a, b_B, R
- 26) a, b_B, r
- 27) a, b_B, r_a
- 28) a, b_B, r_b
- 29) a, b_B, r_c
- 30) a, b_B, S_A

- 31) A, h_a, b_B
- 32) A, h_a, b_c
- 33) A, m_a, b_c
- 34) A, m_b, b_A
- 35) A, m_b, h_B
- 36) A, m_b, b_c
- 37) A, m_b, r
- 38) A, m_b, r_a
- 39) A, m_b, r_b
- 40) A, m_b, r_c
- 41) $A, m_b, 2p$
- 42) A, b_A, b_B
- 43) A, b_A, b_C
- 44) A, b_B, R
- 45) A, b_B, r_a
- 46) $A, b_B, 2p$
- 47) A, b_B, S_A
- 48) h_a, h_a, b_A
- 49) h_a, h_a, R
- 50) $h_a, h_a, 2p$
- 51) h_a, m_a, b_B
- 52) $h_a, m_a, 2p$
- 53) h_a, m_b, b_A
- 54) h_a, m_b, b_B
- 55) h_a, m_b, b_C
- 56) h_a, m_b, R
- 57) h_a, m_b, r
- 58) h_a, m_b, r_a
- 59) h_a, m_b, r_b
- 60) h_a, m_b, r_c
- 61) $h_a, m_b, 2p$

- 62) h_a, b_A, b_B
- 63) h_a, b_B, b_C
- 64) h_a, b_B, R
- 65) h_a, b_B, r
- 66) h_a, b_B, r_a
- 67) h_a, b_B, r_b
- 68) h_a, b_B, r_c
- 69) $h_a, b_B, 2p$
- 70) h_a, b_B, S_A
- 71) m_a, m_b, b_C
- 72) m_a, m_b, b_C
- 73) m_a, m_b, R
- 74) m_a, m_b, r
- 75) m_a, m_b, r_a
- 76) m_a, m_b, r_b
- 77) $m_a, m_b, 2p$
- 78) m_a, b_A, b_B
- 79) m_a, b_A, r
- 80) m_a, b_A, r_a
- 81) m_a, b_A, r_b
- 82) $m_a, b_A, 2p$
- 83) m_a, b_A, S_A
- 84) m_a, b_A, b_C
- 85) m_a, b_B, R
- 86) m_a, b_B, r
- 87) m_a, b_B, r_a
- 88) m_a, b_B, r_b
- 89) m_a, b_B, r_c
- 90) $m_a, b_B, 2p$

- 92) m_a, R, r
 93) m_a, R, r_0
 94) m_a, R, r_0
 95) m_a, R, r_0
 96) $m_a, R, 2p$
 97) m_a, R, S_1
 98) m_a, r, r_0
 99) $m_a, r, 2p$
 100) m_a, r, S_1
 101) m_a, r_a, r_0
 102) m_a, r_a, S_1
 103) $m_a, r_a, 2p$

- 104) m_a, r_a, S_1
 105) $m_a, 2p, S_1$
 106) b_A, b_B, b_C
 107) b_A, b_B, R
 108) b_A, b_B, r
 109) b_A, b_B, r_0
 110) b_A, b_B, r_a
 111) $b_A, b_B, 2p$
 112) b_A, b_B, S_1
 113) b_A, R, r
 114) b_A, R, r_0
 115) b_A, R, r_a

- 116) $b_A, R, 2p$
 117) b_A, R, S_1
 118) b_A, r, r_0
 119) b_A, r_a, r_0
 120) b_A, r_a, S_1
 121) $b_A, r_a, 2p$
 122) b_A, r_a, S_1
 123) $R, r, 2p$
 124) R, r, S_1
 125) R, r_a, S_1
 126) $R, 2p, S_1$

ГЕОМЕТРИК ЯСАШГА ДОИР АДАБИЁТ

1. Александров И. И. Сборник геометрических задач на построение с решениями, Учпедгиз, М., 1950.
2. Артунов Б. И. и Бадк М. Б. Геометрические построения на плоскости, Учпедгиз, М., 1935.
3. Адаер А. Теория геометрических построений, Л., 1910.
4. Берг М. Ф. Приемы решения геометрических задач на построение, М., 1928.
5. Воронцов А. М. Геометрия круга, М., 1934.
6. Глазков А. Н. Сборник геометрических задач на построение, М., 1933.
7. Зетель С. И. Геометрия линейки и геометрия циркуля, АПН, М., 1930.
8. Демар Г. Методическое пособие к решению геометрических задач на построение, 1907.
9. Моденов П. С. Геометрические преобразования, "Мат. в школе", № 6, 1948.
10. Мисирогев Н. В. Геометрические построения. Пособие для учителей, Учпедгиз, М., 1939.
11. Пикунин Н. А. Геометрические построения с помощью практических инструментов, Кривизан, Сиддирополь, 1947.
12. Нестеренко Н. М. Геометрические построения в плоскости, Лобовского, Гостехиздат, 1950.
13. Орловко М. Н. Решение геометрических задач на построение в курсе математики ср. школы. Пособие для учителей, Учпедгиз, Минск, 1953.
14. Олифер Г. М. О решении геометрических задач на построение, "Мат. в школе", № 2, 1952.
15. Перепелкин Д. И. Геометрические построения в ср. школе. Пособие для учителей, Учпедгиз, М., 1953.
16. Поляковский Т. П. Метод подобия в решении задач на построение, "Мат. в школе", № 6, 1952.
17. Рудин Ф. О квадратуре круга, ОНТИ, 1935.
18. Ротавинский В. О. Геометрические построения при помощи циркуля и восточной линейки, ВОФЭМ, № 563, 564, 1912.
19. Сидорженко А. С. Геометрические построения в плоскости Лобовского, под общ. ред. Н. Ф. Кагана, Гостехиздат, М.—Л., 1951.

20. Симогоржевский А. С. Развитие теории геометрических шестеренок в гиперболической плоскости. Статья в Известиях Киевского ордена Ленина Политехнического института, т. XV, Гостехиздат, 1954.

21. Симогоржевский А. С. О делении отрезка прямой на равные части. Статья в тех же Известиях, т. XIX, Гостехиздат, 1955.

22. Симогоржевский А. С. Липейка и теоретические построения. Гостехиздат, М., 1955.

23. Сергиенко Г. П. Решение задач на построение в VI—VII классах. Учпедгиз, М., 1955.

24. Сеников Л. Н. Об исследовании в задачах на построение. Мат. в шк., № 2, 1952.

25. Стратенский А. А. Вспомогательные геометрические места точек в курсе геометрии ср. школы. Учпедгиз, М., 1954.

26. Ушаков Н. Решение геометрических задач на построение методом половин. Мат. в школе, № 2, 1940.

27. Фетисов А. Н. Геометрические преобразования. Мат. в школе, № 4, 5, 6, 1940.

28. Фурсенко В. Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольника. Мат. в школе, 1957, № 5, 6.

29. Цальке Н. Геометрические построения на ограниченной кривой плоскости. Огиз, 1956.

30. Четверухин Н. Ф. Геометрические методы. Изд. СССР. Учпедгиз, Ташкент, 1959.

31. Четверухин Н. Ф. Геометрические построения и приближения. Учпедгиз, Москва, 1945.

32. Четверухин Н. Ф. Вопросы исследования и методики геометрических построений в школьном курсе геометрии. Известия АПН, 1946, вып. VI.

33. Шатуновский С. О. Об измерениях прямолинейных отрезков и построении их с помощью циркуля и линейки. Одесс, 1925.

34. Шатуновский С. О. Предисловие к книге Адлера. Теория геометрических построений.

35. Школьник А. Т. Бесконечные деления и задачи деления круга. Учпедгиз, М., 1944.

36. Штейнер Я. Геометрические построения, выполнимые с помощью прямой и неподвижного круга, 1939.

Краткие задачи

37. Адамар Ж. А. Элементарная геометрия. Пособие для высших педагогических заведений и преподавателей ст. школы. Под ред. и с приложениями Д. Н. Перельмана. Учпедгиз, М., т. I, 1949; т. II, 1952.

38. Воксис П. М. Методика геометрии. Учпедгиз, М., 1947.

39. Вудворт В. М. Методика преподавания математики в средней школе. Пер. ред. А. Н. Маркушевича. Учпедгиз, М., 1943.

40. Вольфарт О. Основные идеи проективной геометрии.

41. Габриэлев П. А. Элементарная геометрия, т. I. М., 1954.

42. Гильберт Д. Основы геометрии. М.—Л., 1914.

43. Гуля Н. М. Сборник геометрических задач. М., 1940.

44. Дедонс П., Жигонирский О. и Фетисов А. И. Сборник геометрических задач. Пособие для учителей. Учпедгиз, М., 1951.

45. Мельник С. И. Новая геометрия треугольника. М., 1943.

46. Зыков В. П. Очерки истории учения называемых геометрических знаний. Учпедгиз, М., 1955.

47. Историко-математические исследования, выпуск VI. Гостехиздат, М., 1953.

48. Кутузов Б. Н. Геометрия. Пособие для учителей и педагогических институтов. Учпедгиз, М., 1953.

49. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения вышес. т. I и II. Л., 1935—1938.

50. Клейн Ф. Начала по изложению поперечной элементарной геометрии. Киев, 1898.

51. Киселев А. П. Геометрия, I к.

52. Куроп Р. и Рабинс Г. Четвертое математика. Гостехиздат, М., 1945.

53. Калиткин П. М. Теория и практика при решении геометрических задач. Опыт передового учителя. Учпедгиз, М.—Л., 1953.

54. Киселев А. П. Стереометрия, I к.

55. Кутузов Б. В. Додателски геометрии на геометрия асепарии элементарна. Учпедгиз, Ташкент, 1951.

56. Лобачев Н. Н. Очерк по истории точных наук, кн. 1. Элементарные науки древности.

57. Моденов П. С. Сборник задач по специальной геометрии элементарной математики. Изд. Советская наука, М., 1957.

58. Мотоловский В. Н. Элементы истории математики в школе. Учпедгиз, М., 1953.

59. Методика преподавания математики. Пособие для учителей институтов. Под общ. ред. С. Е. Макарова. Учпедгиз, Ленинградское отд., 1952.

60. Начала Евклида, ГИИЛ, 1948.

61. Никитин П. И. Геометрия. Учпедгиз, М., 1956.

62. Никитин П. И. и Мастова Г. Г. Сборник задач по геометрии. Учпедгиз, М., 1957.

63. Погодин Е. В. Анализируемая геометрия на плоскости. Учпедгиз, М., 1953.

64. Перельман Д. И. Элементарная геометрия курса, I кн. Геометрия ученика деревни. Ташкент, 1952.

65. Преподавание математики в школе в свете политехнического обучения. Сборник статей под редакцией Фетисова А. И.

66. Политехническое обучение и преподавание математики. Изд. АПН, М., 1954.

67. Радзинер Г. и Теллид О. Число и фигура, 1933.

68. Симогоржевский А. С. О многоугольниках. Статья в Известиях Киевского ордена Ленина Политехнического института, т. XVI, под Ак. архитектуры СССР, Киев, 1951.

69. Симогоржевский А. С. О геометрии Лобачевского. Гостехиздат, М., 1957.

70. Цейтен Г. Г. История математики в древности и в ср. века, ОНТИ, 1932.

71. Четверухин Н. Ф. О некоторых методологических вопросах преподавания геометрии, АПН, М., 1955.

72. Углом И. М. Геометрические преобразования, т. I, Гостехиздат, М., 1953.

73. Сморжковский О. С., Астриб О. М. и др. Методика развития задач на побуду, Киев, 1908.

74. Сморжковский А. С. Линейка в геометрических построениях, 1957.

75. Модерн П. С. и Пархомович А. С. Геометрические преобразования, М., 1961.

76. Сетоводнев Н. С. Геометрия алмашториллар еяси, Т., 1953.

77. Г. Г. Маедова. Методика обучения решению задач на построение, М., 1931.

78. В. В. Рельев. Общие методы преподавания математики, М., 1958.

79. В. Н. Холодский. Очерки по вопросам обоснования математики, 1908.

80. И. М. Углом, В. Г. Антипузе. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, т. I, М., 1962.

81. Скопен П. А. и Жаров. Задачи и теоремы по геометрии.

82. Линдман. Старые и новые в круге.

83. Р. К. Отажонов. Факультативные материалы по геометрии. "Учпукти", Т., 1973.

84. Р. К. Отажонов. Конструктивная геометрия элементарно, "Учпукти", Т., 1974.

85. Р. К. Отажонов. Векторная алгебра элементарно, "Учпукти", Т., 1976.

МАУНДАРИОНА

Биринчи нахрига сўз боши	3
Иккинчи нахрига сўз боши	4
Учинчи нахрига сўз боши	5
Тўртинчи нахрига сўз боши	5
Кириш	7
I-§. Дастлабки тушунчалар	7
I б о б. Яншига доир масалаларни ечишдаги асосий босқичлар	
1-§. Бичим босқичлари ҳақида умумий натижа	11
2-§. Масалани босқичлаб ечишга бид билим бир масалалар	12
II б о б. Элементар масалалар	
4-§. Элементар масалалар ечишга масалалар	27
III б о б. Билвосита ечиладиган масалалар	
5-§. Нуқта, кесма, тўғри чизиқ ва бурчаклар яншига доир масалалар	38
3-§. А. Уйбурчак ва тўғрибурчакларни зондавич элементлар сови ҳақида тушунча	59
6-§. Уйбурчаклар яншига доир масалалар	60
7-§. Тўғрибурчаклар яншига доир масалалар	61
8-§. Трапециялар яншига доир масалалар	63
9-§. Параллелограмм яншига доир масалалар	64
10-§. Кўйбурчаклар яншига доир масалалар	64
IV б о б. Тўғрилаш методи	
11-§. Тўғрилаш методининг мақсиди ва унинг татбиқи яншига	66
12-§. Машиқ учун масалалар	70
V б о б. Нуқтавий тушунчалар ва уларни топшига доир масалалар	
13-§. Кириш	72
13-§. А. Нуқтавий тушунчаларни ўзгаришнинг аҳамияти	72
13-§. Б. Нуқтавий тушунчаларни тушунча таърифи ва нуқтавий тушунчаларни топши усули	73
13-§. В. Асосий нуқтавий тушунчалар	74
14-§. Нуқтавий тушунчалар топшига доир масалалар ва уларни босқичлаб ечиш	
14-§. А. Савоҳ ва масалалар	115
VI б о б. Яншига доир масалаларни нуқтавий тушунчалар методи билан ечиш	
15-§. Нуқтавий тушунчалар методи билан ечиладиган масалаларнинг таълиқи	117
16-§. Биринчи таълиқи масалалар	118

17-§. Машқ учун масалалар	119
18-§. Иккинчи тарафга масалалар	119
19-§. Машқ учун масалалар	121
20-§. Учинчи тарафга масалалар	121
21-§. Машқ учун масалалар	125

Геометрик аксиоматизациялар методларига кириш

22-§. Умумий тушунчалар	128
А. Геометрик аксиоматизациянинг қисқич қисми	128
Б. Геометрик аксиоматизациянинг шартли рақобатли	128
В. Геометрик аксиоматизациялар ва уларнинг асослари	130
Г. Геометрик аксиоматизациянинг баъзи хиллари	135
23-§. Аксиоматизациялар групулари ҳақида тушунча	143
24-§. А. Тасвирлаш учун усуллари	148

IV б.б. Ҳ.қ. симметрияси

24-§. Дастлабки тушунчалар	143
25-§. А. Тасвирлаш учун усул рақобатли	156
А. Симметрик фигураларни амалий усуллар билан аниқлаш ёки бўлашақ оқшоқ топшига доир масалалар	156
Б. Баъзи геометрик фигураларнинг симметрик ўлчовлари тушунча доир масалалар	156
В. Геометрик фигураларни симметрик аксиоматизация доир масалалар	157
Г. Ҳ.қ. симметрияни таърифлашнинг таърифлиги доир масалалар	158
25-§. Симметрия методлари	159
26-§. Машқ учун масалалар	163

V б.б. Параллел кўчирish

27-§. Дастлабки тушунчалар	163
28-§. Параллел кўчирish доир масалалар	172
29-§. Параллел кўчирish методлари билан масалалар ечиш	173
30-§. Машқ учун масалалар	178

IX б.б. Нуқта атрофида айланттириш (бурша)

31-§. Дастлабки тушунчалар	180
32-§. Айланттириш методлари билан масалалар ечиш	181
33-§. Машқ учун масалалар	186

X б.б. Гомотетия

34-§. Дастлабки тушунчалар	190
Г. Гомотетиянинг таърифи ва нуқтага гомотетик таърифлиги	190
В. Гомотетиянинг баъзи бит хоссалари	192
35-§. Тўғри кўчирish гомотетик фигура	194
36-§. Кўчирish гомотетик фигура	196
37-§. Айланттириш гомотетик фигура	199
38-§. Паппограф	205
39-§. Трансверсали. Менелай теоремаси	207
40-§. Ҳар иккинчи гомотетия бўлган ўша фигура ҳақидаги теорема	209
41-§. Айланттириш Ҳомотетия ҳақида Менелай теоремаси	211

XI б.б. Гомотетия методлари

Дастлабки масалалар	213
42-§. Гомотетия методлари билан масалалар	214
43-§. Биринчи тарафга масалалар	215
44-§. Иккинчи тарафга масалалар	224
45-§. Учинчи тарафга масалалар	226
46-§. Тўртинчи тарафга масалалар	226
47-§. Бешинчи тарафга масалалар	229
48-§. Машқ учун масалалар	237

XII б.б. Инверсия

49-§. Инверсиянинг таърифи ва турлари	234
50-§. Нуқтага инверсия аксиоматизация	236
51-§. А. Инверсиянинг хоссалари	237
52-§. Инверсия нуқталар икки нуқтанинг муқим бир хоссаи	239
53-§. Тўғри кўчирish инверсия аксиоматизация	244
54-§. Айланттириш инверсия хоссаи	247
55-§. Инверсия хос бўлган еришгайли айлантиришнинг баъзи муқим хоссаи	275
56-§. Инверсия методлари	277
57-§. Машқ учун масалалар	289

XIII б.б. Алгебраик метод

58-§. Алгебраик методларни геометрик асос	291
59-§. Бир кўчирish тушунча ва унинг геометрик асосларидан асосийлиги	294
60-§. Бир кўчирishлиги таъриф	295
61-§. Квадрат тенглама билан ишловларни асос	297
62-§. Алгебраик метод кўчирishида масалалар ечиш	303
63-§. Асос Вайерштрасс ҳақида умумий таъриф	309
64-§. Машқ учун масалалар	320
65-§. Аралаш масалалар	321
Жавоб ва кўчирishлар	325
Ўрта кўчирish кўчирishлари учун кўчирishлар	326
Қошма кўчирish кўчирishлари билан доир масалалардан кўчирish ва кўчирish еришдаги етиб бўлмайдиган масалалар рўйхати	367
Адабий	369

1971 йил
170

Гуи

- 17- §. Машк ут
- 18- §. Икхити
- 19- §. Машк ут
- 20- §. Училиш
- 21- §. Машк ут

Геометрих а

- 22- §. Училиш
- А. Гев
- Б. Гев
- В. Гев
- Г. Гев

- 23- §. Аксид

- 23- §. А. Гев

VII боб

- 24- §. Лашт

- 24- §. А. Гев

- А. С

- Б. Гев

- В. Гев

- Г. Гев

- Г. Гев

- Г. Гев

- 25- §. Сил

- 26- §. Машк ут

VIII боб

- 27- §. Лашт

- 28- §. Лашт

- 29- §. Лашт

- 30- §. Лашт

IX боб

- 31- §. Лашт

- 32- §. Лашт

- 33- §. Лашт

X боб

- 34- §. Лашт

- 35- §. Лашт

- 36- §. Лашт

- 37- §. Лашт

- 38- §. Лашт

- 39- §. Лашт

- 40- §. Лашт

- 41- §. Лашт

XI боб

- 42- §. Лашт

- 43- §. Лашт

- 44- §. Лашт

- 45- §. Лашт

- 46- §. Лашт

- 47- §. Лашт

- 48- §. Лашт

- 49- §. Лашт

- 50- §. Лашт

ИБ № 655

На уобластни ниво

РАХИМ ХАРИКОВ (РАХИМОВ) ХАРИКОВ

МЕТОДЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

Для студентов педагогических институтов и учителей средних школ

Изданы впервые, переработаны

Надательство „Фантум“

Тошкент — 1978

Рецензенты: А. Абдурашидов, Р. Каримов

Балкан редактор Д. Соми

Тех. редактор Н. Сирожид

Корректор М. Туребаева

Тираж: Серия 803 1977 г. Бюджет: выпуск 1984, 1978 г. Формат: 60×90, № 3 тир. 2000 экз. Цена: 10 копеек. Остаток: 100 экз. изд. 1984 г. Шаранов, 1. 20, 5. Изд. 1. 20, 5. Изд. 1984 г. Изд. 1. 20, 5. Изд. 1. 20, 5.

„Фантум“ издательство, Тошкент, 1978 г. Формат: 60×90, № 3 тир. 2000 экз.

Узбекистон ССР Министрлар Советининг издательств, полиграфия ва кинематография ишлари буйича вазирлиги Тошкент: „Фантум“ полиграффой ва кинематография ишлари буйича вазирлиги, Тошкент, 1978 г. Формат: 60×90, № 3 тир. 2000 экз.

Полиграфия № 1 Тошкентдаги полиграффой ва кинематография ишлари буйича вазирлиги Тошкент: „Фантум“ полиграффой ва кинематография ишлари буйича вазирлиги, Тошкент, 1978 г. Формат: 60×90, № 3 тир. 2000 экз.

