

А. У. АБДУЛҲАМИДОВ, С. Х. ХУДОЙНАЗАРОВ

ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИДАН МАШҚЛАР ВА ЛАБОРАТОРИЯ ИШЛАРИ

Ўзбекистон Республикаси ФА мухбир аъзоси,
проф. Т. АЗЛАРОВ таҳририда

*Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим
вазирлиги олий ўқув юртлари талабалари учун
ўқув қўлланма сифатида тавсия этган*

ТОШКЕНТ — «ЎЗБЕКИСТОН» — 1995

2.19
А 15

Таъризчилар: физика-математика фанлари докторлари,
профессорлар Н. МУҲИДДИНОВ, М. ИСРОИЛОВ

Муҳаррир — Н. Гоипов

Абдулҳамидов А. У., Худойназаров С.

А 15 Ҳисоблаш усулларида машқлар ва лаборатория ишлари: Олий ўқув юртлари талабалари учун ўқув қўлланма / Т. Азларов таҳририда. — Т.: Ўзбекистон, 1995. — 223 б.

И. Автордош.

ISBN 5-640-01779-1

Ушбу қўлланма университетлар, педагогика институтлари ва олий техника ўқув юртларининг «Ҳисоблаш усуллари» курси материаллини ўз ичига олади.

Қитоб университетлар, педагогика институтлари ва олий техника ўқув юртлари талабаларига мўлжалланган.

22.19я73

№ 295—95

Алишер Навоий номидаги
Ўзбекистон Республикасининг
Давлат кутубхонаси

А $\frac{1602120000-51}{М 351 (04) -95}$ 95

«ЎЗБЕКИСТОН» нашриёти, 1995 й.

СЎЗ БОШИ

Ушбу масалалар тўплами университетларнинг «математика» ихтисоси бўйича «Ҳисоблаш усуллари ва ҳисоблашлардан практикум» курси дастури асосида тайёрланди. Китобни ёзишда ҳозирги вақтда амалда қўлланилаётган қатор дарсликлар ва қўлланмалардан фойдаланилди, қўлланманинг I—VII боблари профессор М. И. Исроиловнинг «Ҳисоблаш методлари, I қисм» (Тошкент, «Ўқитувчи», 1988) ўқув қўлланмасига мувофиқлаштирилди.

Қўлланма ўн бир бобдан иборат бўлиб, ҳар қайси бобнинг бошида ҳисоблашлар учун зарур назарий маълумот ва типик машқларни ечиш усуллари, услубий кўрсатмалар берилган, сўнг мавзуга доир машқлар, лаборатория иши вариантлари келтирилган. Китобнинг охирида боблар бўйича машқларнинг жавоблари ва уларни ечиш учун кўрсатмалар келтирилган. Мураккаб ҳисоблашларни ЭҲМ ёки микрокалькулятор (асосан, уларнинг программаланадиган турлари) ёрдами билан бажариш кўзда тутилади.

Ўзларининг қимматли маслаҳатлари, фикр-мулоҳазалари билан ушбу қўлланманинг тақомилига ҳиссаларини қўшган Ўзбекистон Фанлар академиясининг мухбир аъзоси проф. Т. А. Азларовга, проф. М. И. Исроилов, проф. Ш. Е. Ёрмухамедов, проф. Н. Муҳиддиновга ўз миннатдорчилигимизни изҳор этамиз.

«Ҳисоблаш усулларида машқлар ва лаборатория ишлари» қўлланмаси ўзбек тилида ёзилган илк тажриба сифатида нуқсонлардан холи бўлмаслиги табиийдир. Шунинг учун ҳам биз қўлланма ҳақидаги барча танқидий фикр ва мулоҳазаларни зўр мамнуният билан қабул қилишга тайёرمىз.

Муаллифлар

1-боб. МАСАЛАЛАРНИ СОНЛИ ЕЧИШ ЖАРАЁНИДА ВУЖУДГА КЕЛАДИГАН ХАТО

Миқдорнинг аниқ қиймати (аниқ сон) a билан унинг тақрибий қиймати (тақрибий сон) a^* орасидаги $a - a^*$ фарқ шу тақрибий соннинг *ҳақиқий хатоси*, $\Delta a^* = |a - a^*|$ эса унинг *абсолют (мутлақ) хатоси* дейилади. Агар a соннинг ўзи номаълум бўлса (масалан, ўлчаб топилган катталиқ қиймати ҳар вақт у ёки бу даражада четланишга эга бўлса), Δa^* ҳам ноаниқ бўлади. Лекин, кўпинча, Δa^* қабул қилиши мумкин бўлган чегара қийматини кўрсатиш мумкин. Унга тақрибий соннинг $\Delta(a^*)$ *лимит (чегаравий) абсолют хатоси* дейилади: $|a - a^*| \leq \Delta(a^*)$, ёки бундан $a^* - \Delta(a^*) \leq a \leq a^* + \Delta(a^*)$ ёки қисқароқ $a = a^* \pm \Delta(a^*)$. Бу ёзувлардаги $a^* - \Delta(a^*)$ га номаълум a қабул қилиши мумкин бўлган қийматларнинг *қуйи чегараси*, $a^* + \Delta(a^*)$ га эса унинг *юқори чегараси* дейилади. Тақрибий соннинг нисбий хатоси: $\delta a^* = \frac{\Delta a^*}{|a^*|}$, лимит нисбий хато: $\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|}$ (исмсиз сон ёки % да ёзилади). Нисбий хато ёрдамида a аниқ сон $a = a^* (1 + \delta(a^*))$ кўринишда ифодаланади.

Агар ечилиши талаб қилинадиган масала математик жиҳатдан тақрибий таърифланган, сонли маълумотлар тақрибий берилган бўлса, ҳисоблаш натижалари ҳам тақрибий бўлиб, улар йўқотилмас (систематик) хатога эга бўлади. Масалани ечишда тақрибий усулнинг қўлланилишидан услуб хатоси, сонларни яхлитлашдан ҳисоблаш хатоси (яхлитлаш хатоси) вужудга келади. Йўқотилмас, услуб ва ҳисоблаш хатоларининг йиғиндисы тўлиқ хатони ифодалайди.

Сонларни яхлитлашнинг содда қоида: сонни бирор хонанинг 1 бирлигигача аниқлик билан яхлитлаш учун шу хонадан ўнг томонда турган барча рақамлар ўчирилиб, нол-

лар билан алмаштирилади. Натижада вужудга келадиган абсолют хато ўчирилмай сақланган рақам хонасининг 1 бирлигидан ошмайди.

1-мисол. $\pi = 3,14159 \dots$ сони 0,0001 гача аниқлик билан яхлитланса, $\pi = 3,14159$ тақрибий сон ҳосил бўлади.

Юқори хонанинг 1 бирлигигача тўлдириш қондаси: сонни бирор хона бирлигининг ярмисигача аниқлик билан яхлитлаш учун: а) шу хонадан ўнг томонда турган барча рақамлар ўчирилади; б) агар чапдан биринчи ўчирилган рақам 5 ва ундан катта бўлса, сақланган рақамга 1 қўшилади, 4 ва ундан кичик бўлса, сақланадиган рақам ўзгартирилмайди. Натижада вужудга келадиган хато сақланган рақам хонаси 1 бирлигининг ярмидан ошмайди.

2-мисол. $\pi = 3,14159 \dots$ сони 0,00005 гача аниқлик билан яхлитланганда, $\pi \approx 3,1416$ сони ҳосил бўлади.

Қийматли $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_m$ рақамлари m та бўлган n хонали $a^* = \overline{a_1 a_2 \dots a_k \dots a_m} \cdot q^{n-m}$ тақрибий сон берилган бўлсин, бунда q — санок системасининг асоси. Агар шу соннинг абсолют хатоси $\Delta(a^*) \leq \omega q^{n-k+1}$ ($0,5 \leq \omega \leq 1$) бўлса, у ҳолда a_k рақам ва ундан чап томонда турган рақамлар ишончли рақамлар, ўнг томонда турган рақамлар эса ишончсиз рақамлар деб аталади. Тақрибий сон шундай ёзиладики, унинг охириги қийматли рақами ҳар доим ишончли бўлса, ишончсиз рақамлар ташланади.

3-мисол. 0,307 тақрибий сони ёзилишига кўра 10^{-3} гача (яъни учта қийматли рақамгача) аниқликка эга. Шу сон 10^{-4} гача аниқлик билан берилганда, уни 0,3070 кўринишда, 10^{-2} гача аниқлик билан берилганда эса охириги «7» рақами ишончсиз бўлиб қоларди ва шунга кўра сон 0,31 кўринишда ёзилган бўларди.

Функциянинг йўқотилмас хатоси. Аргументларнинг $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ тақрибий қийматлари ва $\Delta(x_1^*), \Delta(x_2^*), \dots, \Delta(x_n^*)$ абсолют хатолар бўйича $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциянинг y^* тақрибий қийматини ва $\Delta(y^*)$ абсолют хатони топиш керак бўлсин. Масала функциянинг $y^* - \Delta(y^*) \leq y \leq y^* + \Delta(y^*)$ ўзгариш соҳасини топишга келади. Агар қаралаётган $|x_i - x_i^*| \leq \Delta(x_i^*)$ ($i = \overline{1, n}$) соҳада f функция узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, хусусий ҳосилалари секин ўзгарса ва аргументнинг $\delta(x_1^*), \delta(x_2^*), \dots, \delta(x_n^*)$ нисбий хатолари етарлича кичик бўлса, функция хатоси қуйидаги формулалар бўйича ҳисобланиши мумкин:

$$\Delta(y^*) = \sum_{i=1}^n |f_{x_i}(x^*)| \cdot \Delta(x_i^*), \quad (1)$$

$$\delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{|f(x^*)|}, \quad \delta(y^*) = \sum_{i=1}^n |(\ln f(x^*))'_{x_i}| \cdot \Delta(x_i^*), \quad (2)$$

$$\delta(y^*) = \sum_{i=1}^n |x_i^* \{ \ln f(x^*) \}'_{x_i}| \cdot \delta(x_i^*).$$

Хусусан, n та мусбаг тақрибий сонлар $u = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ йиғиндисининг абсолют ва нисбий хатолари:

$$\Delta(u^*) = \sum_{i=1}^n \Delta(x_i^*), \quad \delta(u^*) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{u^*} \delta(x_i^*), \quad (3)$$

$u = x_1 - x_2$ айирма учун (бунда $x_1 > x_2 > 0$):

$$\Delta(u^*) = \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*), \quad \delta(u^*) = \frac{x_1^* \cdot \delta(x_1^*) + x_2^* \cdot \delta(x_2^*)}{u^*}. \quad (4)$$

Бир хил аниқликка эга бўлган $n > 10$ та тақрибий сон йиғиндисининг абсолют хатосини ҳисоблаш учун одатдаги $n \cdot \Delta$ эмас, балки эҳтимолий хусусиятга эга бўлган $\Delta \cdot \sqrt{3n}$ Чеботарев қондасидан (хатонинг имконли чегарасини ҳисоблашдан) фойдаланадилар.

4-мисол. Хатоси $\Delta x \leq 0,5 \cdot 10^{-k}$ бўлган $n = 16$ та тақрибий сон йиғиндисининг Δ чегаравий хатосини ((3) формула бўйича) ва ε имконли хатосини ((3') формула бўйича) топамиз:

$$\Delta = 16 \cdot \Delta x = 16 \cdot 0,5 \cdot 10^{-k} = 8 \cdot 10^{-k},$$

$$\varepsilon = \sqrt{3 \cdot 16} \cdot 0,5 \cdot 10^{-k} = 2\sqrt{3} \cdot 10^{-k} \approx 3,48 \cdot 10^{-k}.$$

Агар камаювчи ва айрилувчи тақрибий сонлар бир-бирларига яқин бўлсалар, уларнинг айирмаси кичик, аниқлиги паст бўлиши, натижада айирмада ишончли рақамлари кам бўлиши мумкин. Бунинг олдини олиш учун бошқа формулалардан фойдаланиш, ёки компоненталарни аниқроқ қилиб олиш керак бўлади.

5-мисол. $a = (5,7 \pm 0,08) - (5,6 \pm 0,06)$ ни ҳисоблайлик. $5,7 - 5,6 = 0,1$, $\Delta = 0,08 + 0,06 = 0,14$, яъни айирма $0,1$ га тенг бўлгани ҳолда, унинг абсолют хатоси ўзидан ҳам катта ($0,14$) бўлмоқда. Жавоб қониқарсиз. Компоненталар аниқроқ олиниши керак. Масалан, уларнинг абсолют

хатоси $\pm 0,025$ га тенг бўлганда, айирманинг хатоси $\Delta = 0,05$ бўлиб, унда битта қийматли рақам, хато $\pm 0,0001$ бўлганда, айирма хатоси $\Delta = 0,0002$ бўлиб, унда учта қийматли рақам мавжуд бўларди ($a \approx 0,100$).

$u = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n (x_i > 0)$ тақрибий сонлар кўпайтмасининг хатоси:

$$\Delta(u^*) = \sum_{i=1}^n \frac{u^*}{x_i} \Delta(x_i^*), \quad \delta(u^*) = \sum_{i=1}^n \delta(x_i^*). \quad (5)$$

$u = \frac{x_1}{x_2} (x_1, x_2 > 0)$ бўлинманинг хатоси:

$$\Delta(u^*) = \frac{1}{(x_2^*)^2} [x_2^* \cdot \Delta(x_1^*) + x_1^* \cdot \Delta(x_2^*)], \quad \delta(u^*) = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*). \quad (6)$$

Аргументи тақрибий қийматга эга бўлган $y = \lg x$ логарифм тақрибий қийматининг хатоси:

$$\Delta(y^*) = \frac{\Delta(x^*)}{x^*} = \delta(x^*); \quad (7)$$

$y = \lg x = M \ln x$ ўнли логарифм учун: $\Delta(\ln x^*) = M \delta(x^*) = 0,4343 \delta(x^*)$, бунда $M = \lg e \approx 0,4343$ — ўтиш модули.

Ишончли рақамларни санаш қоидалари. Тақрибий сонларни қўшиш ва айиришда тақрибий компоненталарнинг қайси бирида ўнли рақамлар сони энг кам бўлса, топилган натижада ҳам ўшанча ўнли рақам қолдирилади. Кўпайтириш ва бўлишда тақрибий компоненталарнинг қайси бирида энг кам ишончли рақам бўлса, натижада ҳам ўшанча ишончли рақам қолдирилади.

6-мисол. $a \approx 25$, $b \approx 160$, $c \approx 0,80$, $x = ab/c$ ни ҳисоблаймиз. a сони иккита, b учта, c иккита ишончли рақамга эга. Натижа иккита ишончли рақам билан олинishi керак:

$$x \approx (25 \cdot 160) / 0,80 = 5000 = 50 \cdot 10^2.$$

М А Ш Қ Л А Р

1. 17,00675 аниқ сонни 0,1 гача, 1 гача, $0,5 \cdot 10^{-9}$ гача аниқлик билан яхлитлаш хатосини топинг.

2. Ўлчаш натижасида деталнинг узунлиги 36,0 см экани аниқланган. Топилган қийматнинг нисбий хатоси 0,8% дан ошмайди. Деталь узунлигининг чегаравий қийматларини топинг.

3. Икки кесмадан бирининг узунлиги $1 \text{ м} \pm 1 \text{ мм}$, ик-

кинчисининг узунлиги $20 \text{ см} \pm 0,5 \text{ мм}$. Қайси кесманинг узунлиги аниқроқ топилган ва нима учун?

4. 34,5867 тақрибий соннинг нисбий хатоси $\pm 0,1\%$. Ишончсиз рақамларини аниқланг, сонни яхлитлаб, хатосини топинг.

5. Натурал логарифмнинг $e = 2,71828183 \dots$ асосини: а) етти та ишончли рақамгача аниқлик билан ёзинг; б) $0,5 \cdot 10^{-3}$ гача аниқлик билан яхлитланг. Натижаларнинг абсолют ва нисбий хатоларини топинг.

6. Нисбий хатоси $0,02\%$ дан ошмаслиги учун $\sqrt[3]{34}$, $\sqrt[3]{128}$, $\ln 56$ ни нечта ўнли ишора билан олиш керак?

7. (1) ва (2) формулалардан фойдаланиб, a^x ($a > 0$, $a \neq 1$), x^k (k — ҳақиқий сон), $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ (x — радианларда) функцияларнинг абсолют ва нисбий хатоларини топиш учун формулалар чиқаринг. Ихтиёрий k ва $x = 1,2 \pm 0,04n$ ($n = 1, 2, \dots, 10$) учун 2^x , x^k , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ нинг қийматини топинг.

8. Берилган: $a = 35 \pm 0,1$, $b = 2,34 \pm 0,02$, $c = 0,55(1 \pm 3\%)$. Қуйидагилар топилсин: 1) $x = 2a - b$; 2) $y = a + 5b$; 3) $t = ac$; 4) $u = c/b$; 5) $v = \sqrt[3]{ac}$; 6) $z = \lg b$.

9. Радиуси $2,4 \pm 0,2 \text{ см}$, ясовчиси $56 \pm 0,8 \text{ см}$ бўлган цилиндрнинг асос юзи, ён сирти ва ҳажмини топинг.

10. Ушбу $x = \frac{(a+b)c}{k-e}$ ифоданинг сон қийматини топинг. бунда $a = 50$, $34,6 < b < 34,7$, $19 < c < 20$, $3,2 < k < 3,3$, $e = 12$.

11. 10-мисол $a = 50$, $b \approx 46,00$, $c \approx 21$, $k \approx 4,842$, $e \approx 1,87$ да ечилсин.

12. Цилиндр асосининг радиуси $R \approx 4 \text{ м}$, баландлиги $H \approx 70 \text{ дм}$. S ён сирти ва V ҳажмини топинг. S ни $0,01 \text{ м}^2$ гача аниқлик билан топиш учун R ва H қандай аниқликда олиниши керак? V ни $0,1 \text{ м}^3$ гача аниқлик билан топиш учун-чи?

13. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ оралиқ учун $y = \lg \sin x$, $y = \lg \operatorname{tg} x$, $y = 10^x$ функциялар тақрибий қийматлари бўйича аргументнинг тақрибий қийматлари хатосини аниқлаш формулаларини чиқаринг.

14. Ушбу $y = \lg \operatorname{tg} x$ функция қийматларининг тўрт хонали жадвалидан фойдаланиб, аргументнинг $x \approx 60^\circ$ қиймати топилган. Бу қийматнинг абсолют хато катталиги баҳолансин.

15. Ушбу $\lg \sin x$ ва $\lg \operatorname{tg} x$ функциялар учун тўрт хонали жадваллардан фойдаланилиб, аргументнинг 30° , $42^\circ 30'$, 70°

қийматлари топилган. Бу қийматларнинг абсолют ва нисбий хатолари баҳолансин.

16. 10^x қийматлари (антилогарифмлар)нинг беш хонали жадвалидан $x \approx 5$ аниқланган. Бу топилган қийматнинг абсолют ва нисбий хатосини ҳисобланг.

17. Айлана узунлиги, доира юзи, конус ва цилиндрнинг ён сирти учун хатони ҳисоблаш формулаларини чиқаринг.

18. Ишончли рақамларни санаб қондаларидан фойдаланиб, тақрибий сонлар устида амалларни бажаринг: 1) $418,66781 + 12,4266 + 6,102 + 3,902$; 2) $\frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{2}{9} + \frac{4}{11}$ (сурат ва махражда аниқ сонлар турибди); 3) $17,906 - 6,5408$; 4) $37,523 + 0,60 - 6,5408$; 5) $\sqrt{12} - \sqrt{8} + \sqrt{14}$; 6) $0,2\sqrt{200} - 5\sqrt{7,08} + 0,4\sqrt{60} + 7\sqrt{10}$ (илдиз ишоралари олдида турган сонлар аниқ); 7) $78,064 \cdot 16$; 8) $0,5442 : 9$; 9) $7\sqrt{17 \cdot 2\sqrt{8}}$; 10) $4,964 \cdot 24,5 \cdot 4\sqrt{66}$; 11) $67,142 : 13$; 12) $45 : 66,42$; 13) $\overline{45,8 : 6\sqrt{19}}$; 14) $14 : 0,67 \cdot 5 - 0,18 : 2,4$.

19. Ушбу $a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$ формуладан фойдаланиб, Ойнинг Ер атрофида ҳаракатидаги марказдан қочма кучининг тезла-нишини ҳисобланг, бунда R км билан, T сутка билан ифо-да қилинган бўлиб, $\pi = 3,14159 \dots$ $R \approx 60,27r$, $r \approx 6371$ км, $T \approx 27,32$ сутка.

20. Ушбу $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

чексиз қаторлардан фойдаланиб, $\sin 0,8$ ва $\cos 0,3$ ларни тўртта ишончли рақамгача аниқлик билан топинг.

21. $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$ тенглама илдизларини тўртта ишончли рақам билан олиш учун озод ҳад нечта ишончли рақамга эга бўлиши керак?

1- ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

1. x аргументнинг Δx абсолют ёки δx нисбий хато қий-матлари маълум. $y = f(x)$ функция эга бўлиши мумкин бўл-ган $\Delta(y)$ ва $\delta(y)$ хато чегараларини ҳисобланг:

Вариант	Δx	δx	$f(x)$	Вариант	Δx	δx	$f(x)$
1		1,2%	$-(x+1)^3 - 2$	14	0,002		$\sqrt{\lg x}$
2		1,4%	$(x^2+1)/(x-1)$	15	0,003		$\sqrt{2^x}$
3	0,001		$\sqrt{x^2-4}$	16		1%	$\cos^3 2x$
4	0,002		$-\sqrt{10-x^3}$	17		1%	$\arctg \frac{1}{x}$
5		1%	$\log_{1/3}(x+1)$	18		2%	$\cos^2 3x$
6	0,002		$1/(1+x^3)$	19	0,002		4^{3x^2}
7		2%	$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$	20	0,002		$\sin^2 2x$
8	0,001		$-2 + \cos^2 x$	21		1%	$4^{1g^2 x}$
9		1,5%	$2 \lg \sqrt{x}$	22		2%	$\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{6-x}$
10	0,001		$\lg \cos x$	23		1%	$x^2-4x-45$
11	0,001		$\arctg x^2$	24	0,002		$\log_2 x^3$
12		1%	$2^{1g x}$	25		2%	$\log_3 (x+1)$
13	0,002		$\sqrt{\cos x}$				

2. $f(x)$ функция қийматини 4 та ишончли рақамгача аниқлик билан олиш учун x аргумент нечта ишончли рақам билан олиниши кераклигини топинг:

Вариант	$f(x)$	Вариант	$f(x)$
1	$x^3 \sin x$	14	$\sqrt{x} \cos x$
2	$x^2 \ln x$	15	$\sqrt{x} \sin x$
3	$e^x \sin x$	16	$\sqrt{x} \lg x$
4	$e^x \cos x$	17	$\sqrt{x} \operatorname{ctg} x$
5	$e^x \operatorname{tg} x$	18	$x/\sin x$
6	$e^x \cdot \operatorname{ctg} x$	19	$x/\cos x$
7	$\ln \operatorname{tg} x$	20	$x/\operatorname{tg} x$
8	$\ln \operatorname{ctg} x$	21	$x/\operatorname{ctg} x$
9	$\ln \sin x$	22	$\sin^3 x$
10	$\ln \cos x$	23	$\cos^3 x$
11	$x^3 \operatorname{tg} x$	24	$\operatorname{tg}^3 x$
12	$x^3 \operatorname{ctg} x$	25	$\operatorname{ctg}^3 x$
13	$x^2 \sin x$		

2-БОБ. ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

Илдизларни ажратиш. Ушбу

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

тенгламани тақрибий ечиш учун олдин унинг илдизи мавжуд бўлган етарлича кичик оралиқ аниқланади (илдиз ажратилади). Қуйидаги фикрлар илдиз ётган оралиқни ажратишга ёрдам беради:

1) Агар $f(x)$ узлуксиз функция $[a, b]$ оралиқнинг четки a ва b нуқталарида ҳар хил ишорали қийматларни қабул қилса, яъни

$$f(a)f(b) < 0 \quad (2)$$

шарт бажарилса, у ҳолда (1) тенглама шу оралиқда ҳеч бўлмаса битта ҳақиқий илдизга эга бўлади. Агар, бундан ташқари, $f(x)$ шу оралиқда монотон бўлса, яъни унда $f'(x)$ ҳосила мавжуд ва ишораси ўзгармаса, шу оралиқда $f(x)$ фақат битта илдизга эга бўлади. (2) тенгсизлик бажарилмаган тақдирда (1) тенглама $[a, b]$ оралиқда ё илдизга эга эмас, ё жуфт сондаги илдизларга эга (бунга каррали илдизлар ҳам киради).

2) Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аналитик (яъни шу оралиқдаги ҳар қайси нуқта атрофида яқинлашувчи даражали қаторга ёйилса) ва (2) шарт бажарилса, (1) тенглама шу оралиқда тоқ сондаги илдизларга эга бўлади.

3) Ушбу

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (3)$$

алгебраик тенглама учун $A = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{a_k}{a_0} \right|$, $A_1 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|$

бўлсин. У ҳолда (3) тенгламанинг барча илдизлари $r = \frac{1}{1 + A_1} < |x| < 1 + A = R$ ҳалқа ичида ётади, r ва R сонлари тенгламанинг x^+ мусбат, $-R$ ва $-r$ сонлари эса x^- манфий илдизларининг қуйи ва юқори чегараси бўлади.

4) Лагранж теоремаси: $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} = 0$ тенг-

ламанинг чандан биринчи манфий коэффициенти a_k ва барча манфий коэффициентлари ичида абсолют қиймат бўйича энг каттаси B бўлсин. У ҳолда бу тенглама мусбат илдизининг юқори чегараси

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} \quad (4)$$

бўлади.

5) Ньютон теоремаси: бирор $x = c > 0$ да $P(x)$ кўпхад ва унинг барча $P'(x)$, $P''(x)$, $\dots$, $P^{(n)}(x)$ ҳосилалари номанфий бўлсин. У ҳолда $P(x) = 0$ тенглама мусбат илдизларининг юқори чегараси $x^+ \leq R = c$ бўлади.

6) $K(x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n$,
 $L(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $M(x) = a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \dots + (-1)^n a_0$ кўпхадлар x^+ мусбат илдизларининг юқори чегараси мос тартибда R_1 , R_2 , R_3 бўлсин. У ҳолда (3) тенглама учун $\frac{1}{R_2} \leq x^+ \leq R$ ва $-R_1 \leq x^- \leq -\frac{1}{R_3}$ ўринли бўлади.

7) Ҳар қандай ҳақиқий коэффициентли тоқ даражали тенглама ҳеч бўлмаганда битта ҳақиқий илдизга эгадир.

8) Декарт теоремаси: (3) тенглама коэффициентлари кетма-кетлигида ишора алмашиниши сони қанча бўлса (бунда нолга тенг коэффициентлар эътиборга олинмайди), тенгламанинг шунча мусбат илдизи мавжуд ёки мусбат илдизлар сони ишора алмашишлар сонидан жуфт сонга кам.

9) Штурм теоремаси: (3) тенглама каррали илдизга эга бўлмасин. $P_1(x)$ орқали $P'(x)$ ҳосилани, $P_2(x)$ орқали $P(x)$ ни $P_1(x)$ га бўлишдан қоладиган қолдиқнинг тескари ишора билан олинганини, $P_3(x)$ орқали $P_1(x)$ ни $P_2(x)$ га бўлишдан қоладиган қолдиқнинг тескари ишора билан олинганини ва ш. ў. белгилайлик ва бу жараёни то қолдиқда $P_k(x) = P_k = \text{const}$ ўзгармас сон ҳосил бўлгунича давом эттирайлик. $P(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\dots$, $P_{k-1}(x)$, P_k Штурм кетма-кетлигига эга бўламиз. $P(x)$ нинг илдизларидан фарқ қилувчи $x = a$ сонини олиб, унда $P(a)$, $P_1(a)$, $P_2(a)$, $\dots$, P_k қийматлар кетма-кетлигида ишора алмашинишини аниқлаймиз. У A га тенг бўлсин. Худди шу каби $x = b$ да кетма-кетликдаги ишора алмашиши B бўлсин. У ҳолда $P(x) = 0$ тенгламанинг $(a; b)$ интервалдаги барча ҳақиқий илдизлари сони $A-B$ та бўлади.

1-мисол. $P(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ тенглама ҳақиқий илдизлари ётган чегара топилсин.

Ечиш. $a_0 = 1$, $a_n = -8$; 3-мулоҳаза бўйича $A = 8$, $A_1 = 1$, $r = 0,5$, $R = 9$. Тенгламанинг илдизлари $(-9; -0,5)$ ав $(0,5; 9)$ интервалларда ётади. Лагранж ёки Ньютон теоремаларига асосланиб, бу натижани аниқроқ баҳолаш мумкин. Ньютон теоремаси бўйича: $P'(x) = 4x^3 - 10x + 8$, $P''(x) = 12x^2 - 10$, $P'''(x) = 24x$, $P^{IV}(x) = 24$. Ихтиёрий $c = 2$ сонини оламиз. Унда $P > 0$, $P' > 0$, $P'' > 0$, $P''' > 0$, $P^{IV} > 0$. Демак, $c = 2$ — мусбат илдизларнинг юқори чегараси. Шунингдек, $K(x) = 0$ тенглама мусбат илдизларининг юқори чегараси $R_1 = 3$ бўлганидан 7- мулоҳаза бўйича $P(x) = 0$ тенглама манфий илдизларининг қўйи чегараси — $R_1 = -3$. Илдизлар $(-3; 2)$ оралиқда, аниқроғи эса олдин топилган натижа ҳам эътиборга олинса $(-3; -0,5)$, $(0,5; 2)$ интервалларда ётиши маълум бўлади. Энди илдизлар сонини аниқлайлик. $P(x)$ кўпхад коэффициентлари кетма-кетлигида ишора уч марта алмашмоқда: $+-+--$. Декарт теоремаси бўйича тенглама учта ёки битта мусбат илдизга эга. Манфий илдизлар сонини билиш мақсадида тенгламадаги x ни $-x$ га алмаштирамиз: $P(-x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8$. Бунда ишора бир марта алмашади: $+---$. Бунга қараганда $P(-x)$ битта мусбат (демак, $P(x)$ битта манфий) илдизга эга. Шундай қилиб, $(-3; -0,5)$ оралиқда берилган тенгламанинг битта манфий илдизи, $(0,5; 2)$ оралиқда эса битта ёки учта мусбат илдизи мавжуд. Зарур бўлса Штурм теоремасига мурожаат қилиш мумкин. Чунки у илдизларни ажратиш масаласини тўлароқ ҳал қилишга имкон беради:

$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8, \quad P_1(x) = P'(x) = 4x^3 - 10x + 8,$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 10x^2 + 16x - 16 & 2x^3 - 5x + 4 \\ -2x^4 - 5x^2 + 4x & x \\ \hline -5x^2 + 12x - 16, & \end{array}$$

$$\text{бундан } P_2(x) = 5x^2 - 12x + 16.$$

$$\begin{array}{r|l} 10x^3 - 25x + 20 & 5x^2 - 12x + 16 \\ -10x^3 - 24x^2 + 32x & 2x + 4,8 \\ \hline 24x^2 - 57x + 20 & \\ -24x^2 - 57,6x + 76,8 & \end{array}$$

$$0,6x - 56,8 \text{ ёки } 3x - 284, \text{ бундан } P_3(x) = 3x - 284.$$

Шу каби $15x^2 - 36x + 48$ ни $-3x + 284$ га бўлганда қолдиқда $133054 \frac{2}{3}$ қолади, бундан $P_4(x) = -133054 \frac{2}{3}$. Энди ихтиёрий -3 , $-2,9$, 0 , $1,5$ ва 2 сонларини олиб, уларда

Штурм функциялари кетма-кетлигида ишора қандай алмаши-
нишини кузатамиз (жадвалга қаранг):

x	-3	-2,9	0	1,5	2
$\text{sign} P(x)$	+	-	-	-	+
$\text{sign} P_1(x)$	-	-	+	+	+
$\text{sign} P_2(x)$	+	+	+	+	+
$\text{sign} P_3(x)$	+	+	+	+	+
$\text{sign} P_4(x)$	-	-	-	-	-
Ишора алмашинишлар сони	3	2	2	2	1

Жадвал устунларини солиштириб, $(-3; -2,9)$ интервал-
да тенгламанинг битта (манфий) илдизи, $(1,5; 2)$ интервал-
да битта (мусбат) илдизи борлигини аниқлаймиз.

Хорнер схемасини кетма-кет қўллаш йўли билан $P_n(x) =$
 $= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ кўпхад ва унинг
 $P_n^1(x)$, $P_n^2(x)$, $\dots$ ҳосилаларининг $x = \eta$ нуқтадаги қиймат-
ларини топиш: $P_n(x) = (x - \eta) Q_{n-1}(x) + R_1$, бунда $Q_{n-1}(x) =$
 $= b_0^{(0)} x^{n-1} + b_1^{(0)} x^{n-2} + \dots + b_{n-1}^{(0)}$ — бўлинма, R_1 — қолдиқ,
 $Q_{n-1}(x) = (x - \eta) Q_{n-2}(x) + R_2$ ва ҳоказо, $(j+1)$ — қадамда
 $Q_{n-j}(x)$ ни $(x - \eta)$ га бўлганда $Q_{n-j}(x) = (x - \eta) Q_{n-j-1}(x) + b_{n-j}^{(j)}$
ҳосил бўлсин. Натижада $P_n(x)$, $Q_{n-1}(x)$, $Q_{n-2}(x)$, $\dots$, $Q_1(x)$,
 $Q_0(x)$ кўпхадлар коэффицентларидан тузилган учбурчак
матрица ҳосил бўлади:

$$\begin{array}{cccccc}
 a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
 b_0^{(0)} & b_1^{(0)} & \dots & b_{n-2}^{(0)} & b_{n-1}^{(0)} & b_n^{(0)} \\
 b_0^{(1)} & b_1^{(1)} & \dots & b_{n-2}^{(1)} & b_{n-1}^{(1)} & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 & & & b_0^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} & \\
 & & & & b_0^{(n)} &
 \end{array} \quad (5)$$

бунда

$$\begin{aligned}
 b_0^{(j)} &= b_0^{(j-1)}, \quad b_i^{(j)} = b_i^{(j-1)} + b_{i-1}^{(j-1)} \eta \quad (i = \overline{1, n-j}, j = \overline{0, n}), \\
 b_i^{(-1)} &= a_i \quad (i = \overline{0, n}).
 \end{aligned} \quad (6)$$

Кўпхад ва ҳосила қийматлари қуйидаги муносабатлардан
аниқланади:

$$P_n(\eta) = b_n^{(0)}, P_n^{(1)}(\eta) = b_{n-1}^{(1)} \cdot 1!, \dots, P_n^{(n)}(\eta) = b_0^{(n)} n! \quad (7)$$

2-мисол. $P_4(x) = x^4 - 5x^3 + 8x - 8$ кўпхад ва унинг ҳосилаларининг $x = 2$ нуқтадаги қийматларини топамиз. Бунинг учун (6) формулалардан фойдаланиб, (5) матрицани тузамиз ва (7) муносабатлар бўйича $P(x)$ ва ҳосилаларнинг $x = 2$ даги қийматларини ҳисоблаймиз:

$x = 2$	1	0	-5	8	-8	$P_4(2) = 0! \cdot 4 = 4,$
	1	2	-1	6	4	$P_4^{(1)}(2) = 1! \cdot 20 = 20,$
	1	4	7	20		$P_4^{(2)}(2) = 2! \cdot 19 = 38,$
	1	6	19			$P_4^{(3)}(2) = 3! \cdot 8 = 48,$
	1	8				$P_4^{(4)}(2) = 4! \cdot 1 = 24.$
	1					

Илдизларни топиш. Кесмани тенг иккига бўлиш усули. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз ва $f(a) + f(b) < 0$ шарт бажарилсин. $f(x) = 0$ тенгламанинг шу оралиқда ётган ξ илдизини ϵ аниқликда топиш учун оралиқ тенг иккига бўлинади ва $c = (a+b)/2$ ўрта нуқта топилади. Агар $f(c) = 0$ (ёки $|f(c)| \leq \epsilon$) бўлса, $\xi = c$ (ёки $\xi \approx c$) бўлади ва масала ҳал. Агар $f(c) \neq 0$ (ёки $|f(c)| > \epsilon$) бўлса, $[a, c]$ ва $[c, b]$ оралиқлардан қайсисининг чекка нуқталарида $f(x)$ функция қарама-қарши ишорага эга бўлса, илдиз шу оралиқда ётади. Унинг чекка нуқталарини a_1, b_1 билан белгилаймиз. Янги кесманинг c_1 ўрта нуқтаси ξ нинг $\epsilon_1 \leq (b_1 - a_1)/2$ ёки $\epsilon_1 \leq f(c_1)$ аниқликдаги $x_1 = c_1$ биринчи яқинлашишидан иборат. Энди $[a_1, b_1]$ кесма тенг иккига бўлинади, $c_2 = (a_2 + b_2)/2$ ва $f(c_2)$ топилади ва ҳоказо. n -қадамда топилган кесма узунлиги $b_n - a_n = (b-a)/2^n$ бўлади. Ушбу $\epsilon_n = |x_n - \xi|$ белгилашни киритайлик. У ҳолда $\epsilon_{n+1} \leq 0,5 \epsilon_n (n = 1, 2, \dots)$ бўлади. Бунга қараганда кесмани тенг иккига бўлиш усули биринчи тартибли тезлик билан яқинлаштирувчи услублар синфига киради.

Оддий итерация усули. $f(x) = 0$ тенглама унга тенг кучли бўлган $x = \varphi(x)$ кўринишга келтирилади; x_0 бошланғич x қиймат (яқинлашиш) танланади; кейинги x_{n+1} яқинлашишлар ушбу рекуррент формула бўйича изланади:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

$n \rightarrow \infty$ да $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашишининг етарли шарти: Агар $\varphi(x)$ функция $S = \{x: |x - x_0| < \delta\}$ оралиқда $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq q|x_1 - x_2| (x_1, x_2 \in S, 0 < q < 1)$ Липшиц шартини қаноатлантирса ва $|\varphi(x_0) - x_0| \leq (1-q)\delta$ тенгсизлик бажарилса, $x = \varphi(x)$ тенглама S оралиқда ягона

ξ ечимга эга бўлади ва (8) кетма-кетлик ξ га яқинлашади. Агар $\varphi(x)$ функция S оралиқда $\varphi'(x)$ узлуксиз ҳосилага эга бўлса, етарлилик шарти

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad (9)$$

тенгсизлиги билан берилиши мумкин. Агар S оралиқда $\varphi'(x) > 0$ бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик монотон ўзгаради, $\varphi'(x) < 0$ бўлса — тебранади. Итерация жараёнининг ечимга интилиши тезлиги (услугунинг хатоси):

$$|x_n - \xi| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_0 - \varphi(x_0)|. \quad (10)$$

Бунга қараганда оддий итерация услуги ҳам биринчи тартибли тезлик билан яқинлаштирувчи услублар синфига киради.

3-мисол. Ушбу $x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ тенгламанинг илдизлари итерация услуги қўлланилиб, $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}$ аниқликда топилсин.

Ечиш. Тенглама илдизлари $(-3; -2,9)$ ва $(1,5; 2)$ оралиқларда ётади (1-мисол). Тенгламани турлича $x = \varphi(x)$ каноник кўринишда ёзиш мумкин: $x = -x^4 + 5x^2 - 7x + 8$, $x = (-x^4 + 5x^2 + 8)/8$, $x = \sqrt[4]{(x^4 + 8x - 8)/5}$ ва ҳоказо. Уларнинг ичидан биз қараётган оралиқларда (9) шарт бажариладиганини олишимиз керак. Жумладан, $(-3; -2,9)$ оралиқда $|(-x^4 + 5x^2 + 8)/8| > 1$, яъни итерация жараёни узоқлашади, $(1,5; 2)$ да эса оралиқнинг чап қисмидагина $|\varphi'(x)| < 1$ шарт бажарилади. Усулнинг қўлланиш мумкин бўлган чегараларини аёнлаштириш мақсадида $q = 0,75$ бўлсин деб оламиз ва $|\varphi'(x)| = \left| \frac{-2x^3 + 5x}{4} \right| \leq 0,75$ тенгсизлигини тузамиз. Унинг ечими $[-1,8229; -1]$, $[-0,8229; 0,8]$ ва $[1; 1,8229]$ лардан иборат. Бу оралиқлар ва илдизлар ётган оралиқларнинг умумий қисми $[1,5; 1,8229]$ бўлади ва шу оралиққа нисбатан итерация усулини қўллаймиз. Бошланғич яқинлашиш $x_0 = 1,7$ бўлсин. ε аниқликка эришини учун зарур бўладиган итерация қадамлари сони n ни (10) муносабатдан фойдаланиб аниқлаймиз: $\frac{\varphi(1,7) - 1,7}{1 - 0,75} \cdot 0,75^n \leq 0,5 \cdot 10^{-3}$ ёки $0,75^n \leq \frac{0,5 \cdot 10^3}{0,0622} \cdot 0,25 \approx 0,002$, бундан $n \geq 22$. Ҳисоблашларни (8) муносабат бўйича ЭХМ да бажариб, натижада $x_{22} = 1,7444102163572999$ ни оламиз, ёки кўрсатилган аниқликкача яхлитланса: $x \approx 1,744$.

Вестгейн усули. Умуман $\varphi(x)$ ни итерация жараёнини

яқинлаштирувчи қилиб танлаш ёнгил иш эмас. Шу жиҳатдан Вестгейн усули қулайроқ: у $\varphi'(x)$ нинг ихтиёрий қийматида қўлланилиши мумкин, $|\varphi'(x)| < 1$ да эса Вестгейн жараёни оддий итерация жараёнига нисбатан тезроқ яқинлашади. Бу усулни қўллашда олдин оддий итерация бўйича $x_1 = \varphi(x_0)$ топилади, сўнг $z_0 = x_0$, $z_1 = x_1$ деб олинади. Кейинги яқинлашишлар $x_{n+1} = \varphi(z_n)$ формула бўйича кетма-кет топилади, бунда $z_n = qz_{n-1} + (1-q)x_n$ ёки

$$z_n = x_n - q(x_n - z_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

ва ҳар қадамда q нинг қиймати ҳисоблаб турилади:

$$q \approx (x_{n+1} - x_n) / ((x_{n+1} - x_n) + (z_{n-1} - z_n)). \quad (12)$$

4-мисол. Вестгейн усули қўлланилиб, $x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ тенгламанинг илдиэлари $\varepsilon = 0,005$ аниқликда топилсин.

Ечиш. $x = (-x^4 + 5x^2 + 8)/8$ ва $x_0 = 1,7$ бўлсин. x_1 ни оддий итерация бўйича топамиз. Қолган ҳисоблашлар (11), (12) муносабатлар бўйича бажарилади (жадвалга қаранг):

4-мисол

Вестгейн усули

n	$x_{n+1} = \varphi(z_n)$	ε	q	$z_n = x_n - q(x_n - z_{n-1})$
0	1,7			1,7
1	1,7622375			1,7622375
2	1,73554241		0,30110195	1,7434977
3	1,7448291	0,0094	0,33416474	1,7443842
4	1,7444106	-0,000642		

4-қадамда $|\varepsilon| < 0,005$ бўлмоқда. $x \approx 1,7444$.

Ньютон усули (уринмалар усули). $f(x)$ — узлуксиз дифференциалланувчи функция ва $f(a)f(b) < 0$ бўлсин, яъни $f(x) = 0$ тенгламанинг илдиэи $\xi \in (a, b)$ бўлсин. x_0 бошланғич қиймат сифатида (a, b) оралиқнинг $f(x)f''(x) > 0$ бажариладиган чеккаси олинади. Кейинги яқинлашишлар:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n), \quad f'(x_n) \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Агар $f''(x)$ ҳосила узлуксиз ва $f'(\xi) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\xi - x_{n+1} = \frac{-f''(\xi_n)(\xi - x_n)^2}{2f'(\xi_n)}$ ($\xi_n \in [\xi, x_n]$) га эга бўламиз, яъни

Ньютон усули квадратик яқинлашувчи усул. Усулнинг яқинлашиш шартлари (Л. Канторович теоремаси): $f(x)$ функция $\{ |x - x_0| \leq \delta \} = S$ кесмада аниқланган ва икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

- 1) $f'(x_0) \neq 0$, $|(f'(x_0))^{-1}| \leq B$;
- 2) $|f(x_0)/f'(x_0)| \leq \eta$;
- 3) $|f''(x)| \leq K$, $\forall x \in S$;
- 4) $h = BK\eta \leq 1/2$, $a(h) = ((1 - \sqrt{1 - 2h})/h) \leq \delta$.

У ҳолда S кесмада $f(x) = 0$ тенгламанинг ечими мавжуд, унга $\{x_n\}_0^\infty$ кетма-кетлик яқинлашади ва $|\xi - x_n| \leq (2h)^{2^{n-1}} \eta / 2^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$ баҳолаш ўринли. Агар булардан ташқари $h \leq 1/2$ бўлса, у ҳолда $f(x) = 0$ тенглама $|x - x_0| \leq \delta < t^{**} = ((1 + \sqrt{1 - 2h})\eta)/h$ ораликда ягона ечимга эга бўлади.

$f'(x_n)$ ларни ҳисоблаш қийин бўлган ҳолларда Ньютон усулининг

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_0) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (14)$$

модификациясидан фойдаланилади. Ё илдиз p -каррали бўлган тақдирда

$$x_{n+1} = x_n - p f(x_n)/f'(x_n) \quad (15)$$

усул қўлланилади. Агар x_0 бошланғич яқинлашиш ноқулай танланганидан $|f(x_n)|$ кетма-кетликнинг монотон камайиши кузатилмаса,

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n f(x_n)/f'(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

модификацияланган усулдан фойдаланиш мумкин, бунда $\alpha_n (0 < \alpha_n \leq 1)$ кўпайтувчи $|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|$ тенгсизлик бажариладиган қилиб танланади. Кўпинча α_n ни танлашда ораликни тенг иккига бўлиш усулидан фойдаланадилар: $\alpha_n^{(0)} = 1$, $\alpha_n^{(1)} = 1/2$, $\alpha_n^{(2)} = 1/2^2$, $\dots$, $\alpha_n^{(l)} = 1/2^l$. Жумладан, $\alpha_n = \alpha_n^{(s)}$ да юқорида кўрсатилган тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда кейинги ҳисоблашлар (16) формула бўйича бажарилади.

Ватарлар усули. (13) формуладаги ҳосиланинг ўрнига $(f(x_n) - f(x'))/(x_n - x')$ нисбат қўйилиши билан ҳосил қилинади:

$$x_{n+1} = x_n - (x_n - x')f(x_n)/(f(x_n) - f(x')). \quad (17)$$

Бунда x_0 бошланғич яқинлашиш сифатида (a, b) оралиқнинг $f(x)f''(x) < 0$ бажариладиган чеккаси олинади, иккинчи учу эса жойидан кўзгалмайди (уни x' билан белгилаймиз).

5-мисол. Ньютон ва ватарлар усуллари қўлланилиб,
 $x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. 1) Тенгламанинг илдизлари $(-3; -2,9)$ ва $(1,5; 2)$ оралиқларда ётгани аниқланган эди (1-мисол). Биринчи оралиқни қарайлик. Бошланғич яқинлашиш сифатида $x_0 = -3$ ни олиш мумкин, чунки $f(-3)f'(-3) > 0$. Ҳисоблашларни (13) Ньютон формуласи бўйича бажарамиз:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n), \quad f(x_n) = x_n(x_n^2 - 5) + 8 - 8, \\ f'(x_n) = 2x_n(2x_n^2 - 5) + 8$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\varepsilon = x_{n+1} - x_n $
0	-3	4	-70	
1	-2,9428571	0,1577676	-64,5168	0,0024454
2	-2,9404117	0,0002809	-64,287328	0,00044
3	-2,9404073	-0,0000045		

Бу ўринга келиб $f(x) < 0$ бўлиб қолдики, бу ξ устидан «сакраб» ўтилганини ($f(x)$ графиги Ox ўқини кесиб ўтганини) билдиради. Лекин бунга усул «айбли» эмас, балки микро-калькуляторнинг техник имконияти етишмай қолгани сабаб-дир: у етгитагача ўнли рақамларни кўрсата олиши тўғрй-ли, x_3 нинг 10^{-8} ва кейинги хона рақамларини яхлитлаб ташлаган. Биз ҳисоблашларни давом эттириш мақсадида $x_3 = -2,9404074$ деб оламиз:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 3 & -2,9404074 & 0,0000016 & -64,286922 & 0 \\ 4 & -2,9404074 & & & \end{array}$$

Демак, $-2,9404074 < \xi < -2,9404073$, ёки $\xi \approx -2,940407$.

2) $f(-2,9)f'(-2,9) < 0$, $x_6 = -2,9$. (17) ватарлар усу-ли формуласи бўйича:

$$x' = -3 - \text{қўзғалмас нуқта} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x') \cdot f(x_n)}{f(x_n) - f(x')}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon = x_{n+1} - x_n $
0	-2,9	-2,5219	
1	-2,9386682	-0,1116625	-0,0386682
2	-2,9403338	-0,0047267	-0,0016656
3	-2,9404042	-0,0002041	-0,0000704
4	-2,9404072	-0,0000107	-0,0000003
5	-2,9404074	-0,0000016	-0,0000002

$$\xi = -2,940407.$$

3) Ньютон ва ватарлар усуллари биргаликда қўлланилганида ватарнинг чап учи вазифасини x_n лар бажариб боради:

n	Ньютон усули			Ватарлар усули	
	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\bar{x}_n$	$f(\bar{x}_n)$
0	-3	4	-70	-2,9	-2,5219
1	-2,9428571	0,1577676	-64,5168	-2,9403338	-0,0047267
2	-2,9404117	0,0002809	-64,287328	-2,9404073	-0,0000045
3	-2,9404073			-2,9404073	

$$\xi = -2,9404073.$$

МАШҚЛАР

1. Ушбу $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ тенгламанинг барча илдизлари (модуль бўйича) $\frac{|a_n|}{b + |a_n|} <$

$< |x| < 1 + \frac{c}{|a_0|}$ ҳалқа ичида ётишини исботланг, бунда $b = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\}$, $c = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$.

2. $x^n - x^{n-1} - \dots - x - 1 = 0$ ($n \geq 2$) тенглама ягона $\xi < 2$ мусбат илдизга эга бўлишини исботланг.

3. Мусбат коэффициентли $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ кўпхаднинг барча илдизлари $m < |x| < M$ қўш тенгсизликни қаноатлантиришини кўрсатинг, бунда:

$$m = \min_{1 \leq k \leq n} \frac{a_k}{a_{k-1}}, \quad M = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{a_k}{a_{k-1}}.$$

4. Мусбат коэффициентли $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ кўпхад учун қуйидагиларнинг ўринли бўлишини кўрсатинг:

а) агар $a_0 > a_1 > \dots > a_n$ бўлса, у ҳолда $P(x)$ нинг барча илдизлари $|x| \leq 1$ бирлик доирадан ташқарида ётади;

б) агар $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ бўлса, у ҳолда $P(x)$ нинг барча илдизлари $|x| \leq 1$ бирлик доира ичида ётади.

5. $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$ кўпхаднинг барча илдизлари модуллари бўйича

$$\rho + \max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{a_k}{a_0 \rho^{n-1}} \right|, \quad \forall \rho > 0$$

дан ортмаслигини кўрсатинг.

6. Ҳақиқий коэффициентли $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$ ($a_0 > 0$) кўп-
ҳаднинг ҳақиқий илдизлари:

$$\rho + \sqrt[k]{\max_i \left| \frac{a_i}{a_0 \rho^{i-1}} \right|}$$

дан ортмаслигини кўрсатинг, (унда ρ — ихтиёрий мусбат сон, k — биринчи манфий коэффициентнинг номери, a_i — манфий коэффициентлар.

7. $P(x)$ кўпҳадни $(x - \alpha)$ ($\alpha > 0$) икки ҳадга бўлганда Хорнер схемасидаги b_i лар номанфий, b_0 эса мусбат бўлсин: $b_0 = a_0 > 0$, $b_i \geq 0$ ($i = 1, n$). У ҳолда $P(x)$ нинг барча илдизлари α дан кичик бўлишини кўрсатинг.

8. Тенгламаларнинг ҳақиқий илдизлари ётган чегараларни кўрсатинг ва ҳақиқий илдизлари сонини топинг:

а) $x^4 - 35x^3 + 380x^2 - 1350x + 1000 = 0$; б) $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$; в) $x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 21x^2 - 10x - 24 = 0$; г) $x^5 + 4x^4 - 10x^3 - 65x^2 - 86x - 24 = 0$; д) $x^6 - 6x - 1 = 0$.

9. $f(x) = \sqrt[7]{7 - \sqrt{x^2 - 4x + 4}} - x + 3 = 0$ тенгламанинг тақрибий илдизи $\tilde{x} = 4,9$. Шу илдиз хатоси баҳолансин.

10. Гийёсиддин Жамшид ал-Коший (Мирзо Улуғбек илмий мактаби намояндаларидан бири, Самарқандда яшаб ижод этган, 1430 йилда вафот этган) $x^3 - kx + m = 0$ кўринишдаги тенгламани ечиш учун уни

$$x = \frac{m + x^3}{k}$$

кўринишга келтириб, ўзи тузган кетма-кет яқинлашишлар усулини қўллаган. Ал-Коший томонидан $k = 45$, $m = 0,7850393433644006$ да $x = \sin 1^\circ = 0,017452406437283571$ топилгани маълум. Усулнинг қисқача моҳияти:

бошланғич яқинлашиш $x_0 = 0$, биринчи яқинлашиш $x_1 = m/k$ бўлсин, $j = 1, 2, \dots$ учун қолган ҳисоблашлар ушбу рекуррент формулалар бўйича бажарилади:

$$q_j = (x_j^3 - x_{j-1}^3)/k, \quad x_{j+1} = x_j + q_1 + q_2 + \dots + q_j.$$

(ҳисоблашлар то $q_i \leq \varepsilon$ бўлганга қадар давом эттирилади, бунда ε олдиндан тайинланган хато катталиги.)

Ал-Коший усулини таҳлил қилинг, $\sin 1^\circ$ қийматини шу усулни қўллаб ва бевосита ЭХМ ёки микрокалькулятор ёрдами билан топиб, Ал-Коший топган натижа билан солиштиринг. Ал-Коший усулидан фойдаланиб, қуйидаги тенгламаларни ПМК ёки ЭХМ да ечинг:

а) $x^3 - 3x + 1,888 = 0$;

б) $x^3 - 3x + 0,1046719131717587 = 0$ (Қозизода Румий тенгламаси);

в) $x^3 + 5,8x + 1,9170038 = 0$.

11. Қуйида берилган тенгламаларнинг ҳақиқий илдиэларидан бирортаси тенг иккига бўлиш, оддий итерация, Вестгейн, Ньютон ва модификацияланган Ньютон, ватарлар усуллари қўлланиб топилсин:

1) $x - \frac{1}{(x+1)^2} = 0$; 2) $x - (x+1)^3 = 0$; 3) $x = 4 + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$;

4) $x - 2 - \sqrt[4]{x} = 0$; 5) $x - \frac{i}{10} e^{-x} = 0$; 6) $4 - 3x - \operatorname{tg} x = 0$;

7) $x^2 = \sin x - 0,5$; 8) $x^3 = \sin x$; 9) $x - \arcsin \frac{x+1}{4}$;

10) $x - 1 = \frac{\sin x}{10}$; 11) $x^2 = \ln(x+1)$; 12) $\ln x = 4 - x$; 13)

$x^2 = e^x + 2$; 14) $2^x = 4x$; 15) $x - 1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$; 16) $x^3 -$

$-x - 1 = 0$; 17) $x^3 - 1,5x^2 + 0,58x - 0,057 = 0$; 18)

$x^3 - 7x - 5 = 0$; 19) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = 0$; 20) $x^3 -$

$-5x^2 + 3x + 1 = 0$; 21) $x^3 + 7x^2 + 4x - 2 = 0$; 22) $2x^4 -$

$-7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$; 23) $2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$; 24)

$2x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 4x - 1 = 0$; 25) $0,1e^x - \sin^2 x + 0,5 = 0$,

$x \in [-5\pi, 5\pi]$; 26) $3x - \cos x - 1 = 0$; 27) $e^x - 6x - 3 =$

$= 0$; 28) $1,4^x - x = 0$; 29) $2x - 1,3^x = 0$; 30) $(x-1)^3 +$

$+0,5e^x = 0$; 31) $\sqrt{x+1} - 1/x = 0$; 32) $(x-1)^2 - 0,5e^x = 0$;

33) $5x - e^x = 0$; 34) $3x - e^{0,5x} = 0$; 35) $4 \cos(2x - 45^\circ) +$

$+12 \sin^2(2x - 45^\circ) - 11 = 0$; 36) $4 \sin(3x - 35^\circ) + 7 \cos^2(2x -$

$-37^\circ) - 6,715589 = 0$.

12. Ньютон усулидан фойдаланиб, а) n - даражалн

$x = \sqrt[n]{a}$ ($a > 0$) илдиэни ҳисоблаш; б) $x = 1/a$ ($a > 0$)

тескари микдорни ҳисоблаш; в) $x = 1/\sqrt{a}$ ($a > 0$)

квадрат илдиэнинг тескари қийматини ҳисоблаш; г)

$x = \sqrt{1+a^2}$ ($a > 0$); д) $x = 1/\sqrt{a(a+1)}$ ($a > 0$) қийматла-

рини тақрибий ҳисоблаш учун рекуррент формула тузинг ва ундан фойдаланиб кўрсатилган функцияларнинг $a = 2,3 + 0,002k$ ($k = \overline{0; 20}$) даги қиймаглари жадвалини тузинг.

13. n -каррали x^* илдиз бўлган ҳол ($f(x^*) = 0$, $f'(x^*) = 0$, $\dots$, $f^{(n-1)}(x^*) = 0$, $f^{(n)}(x^*) \neq 0$) учун Ньютон усулининг яқинлашиш тартибини аниқланг.

14. $x_{n+1} = x_n - (f'(x_n))^{-1} f(x_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) Ньютон модификацияланган усулининг яқинлашиш тартибини аниқланг.

2-а ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

1. Коэффициентлари 1-жадвалда кўрсатилган $P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ кўпхаднинг $P(4,82)$ қиймати Хорнер схемасидан фойдаланиб топилсин:

1-жадвал

Вариант	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
1	8,54	11,2	3,82	0,44	-0,48
2	10,36	12,69	0,79	14,39	-0,94
3	-12,78	14,35	17,1	-1,34	-1,72
4	15,65	17,58	21,7	-2,78	1,54
5	-11,2	5,08	-3,7	-3,65	4,09
6	-10,75	-30,2	-4,47	0,63	-3,17
7	-3,79	-4,74	32,8	9,75	-4,72
8	-4,8	-2,54	-3,12	7,07	-3,11
9	-37,6	2,58	-3,89	5,82	-6,64
10	-4,77	-31,58	-3,46	4,17	56,33
11	-3,41	-4,73	3,73	-0,8	-2,01
12	-34,1	50,2	-5,87	-7,02	4,43
13	12,04	-3,51	-2,54	8,91	4,72
14	1,09	-2,63	-3,81	-0,82	6,88
15	-23,2	35,03	-4,73	-5,95	0,76
16	2,89	9,85	14,15	5,38	7,24
17	4,45	2,91	-3,79	-6,75	-2,38
18	-4,79	5,38	-2,86	7,31	4,55
19	8,34	7,73	-9,29	-4,53	5,79
20	-0,6	6,73	11,24	-3,45	-3,51
21	5,7	4,97	-4,07	12,3	-5,96
22	3,6	21,3	-3,18	4,47	-6,04
23	-3,86	12,4	4,8	5,14	-4,23
24	-4,81	3,67	-4,55	6,82	-3,66
25	-3,97	4,33	-5,31	6,16	-4,21

2. Итерация усулидан фойдаланиб, $y = \sqrt[n]{x^m}$ функциянинг $x = a + bk$ даги қийматлари 10^{-4} гача аниқлик билан топилсин (n, m, a, b, k қийматлари 2-жадвалдан олинсин):

2-жадвал

Вариант	n	m	a	b	k	Вариант	n	m	a	b	k
1	3	4	3,3	2,7	0;15	14	9	10	2,7	-0,79	5;25
2	5	3	-2,1	5,4	0;16	15	10	3	24	-3,07	6;20
3	5	4	-3,5	0,7	0;20	16	3	5	-3,2	4	0;15
4	4	3	-5,4	6,2	0;15	17	5	4	21	7,5	0;12
5	6	5	-3,6	-2,5	0;15	18	5	6	-4,5	3,2	0;12
6	7	2	-4,1	-5,9	0;16	19	4	5	-3,5	9,6	0;15
7	7	3	-4,8	-32	0;15	20	6	5	-4,3	-4,8	0;18
8	7	4	-4,01	-4,7	0;15	21	7	3	-5,9	12,2	0;20
9	7	5	-3,4	-4,8	0;20	22	7	4	-3,4	16,5	0;18
10	7	8	4,6	-6,9	0;18	23	7	5	-6,1	-3,5	0;16
11	9	2	21	-5,4	0;15	24	7	6	-4,3	-7,03	0;16
12	9	4	-3,79	-4,6	0;15	25	7	9	-3,6	-5,8	0;18
13	9	7	-16	-0,8	3;18						

3. $f(x) = 0$ тенгламанинг (3-жадвал) ҳақиқий илдизлар сопи аниқлансин ва улар ётган чегаралар ажратилсин, оралиқни тенг иккига бўлиш, оддий итерация, Вестгейн, Ньютон ва ватарлар усуллари қўлланилганида неча қадамдан сўнг шу илдизларни $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$ аниқликда топиш мумкинлиги ҳисоблансин ва улар шундай аниқликда топилсин:

Вар.	$f(x) = 0$	Вар.	$f(x = 0)$
1	$x^3 - 1,5x^2 + 0,58x - 0,057 = 0$	14	$x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 20x^2 -$
2	$x^3 - 2,5x^2 - x + 2 = 0$		$-5x + 25 = 0$
3	$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$	15	$x^3 - 0,4x + 0,08 = 0$
4	$x^4 - 4x^3 + 5,5x^2 - 3x + 0,3 = 0$	16	$x^4 + x^3 - 6x^2 + 20x - 16 = 0$
5	$x^4 - 7,99x^3 - 24,10x^2 +$	17	$x^5 + 11x^4 + 101x^3 + 11x^2 +$
	$+47,81x + 80,21 = 0$		$+10 = 0$
6	$x^4 + 2,83x^3 - 4,5x^2 - 64x -$	18	$x^4 + 47,89x^3 + 797,3x^2 +$
	$-20 = 0$		$+5349x + 12300 = 0$
7	$x^5 - 3x^3 - 14x - 8 = 0$	19	$x^4 + 10x^3 - 1 = 0$
8	$x^5 - x - 0,2 = 0$	20	$x^5 + 1,1x - 1 = 0$
9	$x^5 + 3,2x^2 - 0,2163923 = 0$	21	$x^4 - 4x^3 - 40x^2 - 56x -$
10	$x^4 - 31,2x + 25,8944 = 0$		$-20 = 0$
11	$x^3 - 0,83x^2 + 5,2x -$	22	$x^3 + 7,05x^2 - x -$
	$-81,2868 = 0$		$-101,76 = 0$
12	$x^4 - 0,79x - 59,67 = 0$	23	$x^4 + 7,18x^3 + 8,244539 = 0$
13	$x^5 - 8,2x + 2077,8273 = 0$	24	$x^4 + 3x^3 - x + 6 = 0$
		25	$x^2 - x^3 + 1,51593 = 0$

2-ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

$f(x) = 0$ трансцендент тенгламанинг $[a, b]$ оралиқда ётган илдизлари оралиқни тенг иккига бўлиш усули, оддий итерация ёки Вестгейн усули, Ньютон усули ёки унинг модификацияларидан бири ёки ватарлар усули қўлланилиб, аниқликда топилсин:

Вариант	$f(x) = 0$	$[a, b]$	ϵ
1	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{0,6x} + \frac{x}{0,36 + x^3} = 0$	$[-1; 1]$	$1 \cdot 10^{-5}$
2	$e^{0,724x+0,1} - 2,831x = 0$	$[0; 1]$	$1 \cdot 10^{-5}$
3	$\sqrt{\frac{3x}{2}} e^{0,8x} - \frac{x}{0,64 + x^x} = 0$	$[-1; 0]$	$1 \cdot 10^{-5}$
4	$e^{0,866x+0,3} - 5,34x = 0$	$[0; 1]$	$1 \cdot 10^{-5}$
5	$x^3 + \sin x - 12x + 1 = 0$	$[0; 1]$	$1 \cdot 10^{-5}$
6	$x - \operatorname{tg} x + 0,268254 = 0$	$(0; \pi/2)$	$1 \cdot 10^{-6}$
7	$0,6x - \ln x - 1,2712108 = 0$	$[0; 1]$	$1 \cdot 10^{-8}$
8	$x^3 + 4 \sin x + 3,847569 = 0$	$[-1; 0]$	$1 \cdot 10^{-6}$
9	$e^x - 6x + 0,8177154 = 0$	$[0; 1]$	$1 \cdot 10^{-8}$
10	$x - \sin x - 0,0090795 = 0$	$[0; 1]$	$1 \cdot 10^{-8}$
11	$x^2 + 4 \sin x - 1,6280819 = 0$	$[0; 1]$	$1 \cdot 10^{-8}$

Ва- риант	$f(x) = 0$	$[a, b]$	ε
12	$1,5x - 2\sin x + 0,15432 = 0$	$[0; 1]$	$1 \cdot 10^{-4}$
13	$3x - \cos x - 0,21134 = 0$	$[0; 1]$	$1 \cdot 10^{-4}$
14	$1,4^x - x - 2,16765 = 0$	$[-2; -1]$	$1 \cdot 10^{-4}$
15	$1,7^x + x - 3,892647 = 0$	$[1; 2]$	$1 \cdot 10^{-4}$
16	$0,1e^x - \sin^2 x + 0,5 = 0$	$\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$	$1 \cdot 10^{-4}$
17	$2x - 1,3^x = 0$	$[0; 10]$	$1 \cdot 10^{-4}$
18	$(x-1)^3 + 0,7e^x - 0,645669 = 0$	$[0; 1]$	$1 \cdot 10^{-4}$
19	$4x - 0,5e^x - 3,1399 = 0$	$[1; 2]$	$1 \cdot 10^{-4}$
20	$4x + 0,8e^x - 7,4561 = 0$	$[1; 2]$	$1 \cdot 10^{-4}$
21	$3,4x - 0,6e^x + 0,05284 = 0$	$[0; 1]$	$1 \cdot 10^{-4}$
22	$-0,8x + 0,7e^x - 0,95453 = 0$	$[-1; 0]$	$1 \cdot 10^{-4}$
23	$3x + \lg x - 6,30103 = 0$	$[1; 3]$	$1 \cdot 10^{-4}$
24	$1,5 \sin(x-0,6) + x - 2,047 = 0$	$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	$1 \cdot 10^{-4}$
25	$x^3 - 2,8e^x + 2,5713 = 0$	$[-2; -1]$	$1 \cdot 10^{-4}$

3-б о б. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСINI ЕЧИШ

Ушбу боб

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1} \end{cases} \quad (1)$$

кўринишидаги чизиқли тенгламалар системасини ечишга бағишланади.

Гауссинг номаълумларни чиқариш (компакт) усули. Тўғри криш (берилган системани унга тенг кучли учбурчак матрицали системага келтириш ва номаълумларни йўқотиш): 1) система коэффицентларини жадвалнинг I қисмига тўлдирамыз;

2) ҳар қайси сатр коэффицентлари йиғиндисини $\sum_{j=1}^5$ контрол устунига ёзамиз, масалан, $a_{16} = \sum_{j=1}^5 a_{1j}$, $a_{26} = \sum_{j=1}^5 a_{2j}$;

3) $i = 1$ биринчи сатр коэффицентларини $a_{11} \neq 0$ га бўлиб, $b_{1j} = a_{1j}/a_{11}$ натижаларни I нинг (в) сатрига ёзамиз; $j = 2; 6$;

4) контрол: (в) сатр элементлари йиғиндисини $1 + \sum b_{1j}$ ($\sum$ устунида) b_{16} га тенг бўлиши керак: $b_{16} = 1 + \sum b_{1j}$;

5) жадвалнинг II қисми: $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}$ ($i=2, 3, 4, j=2$); 6) коэффициентларни ҳисоблаймиз ва уларни жадвалга киритамиз;

б) контрол: $\sum$ устун элементлари уларга мос сатр элементлари йиғиндисига тенг бўлиши керак: $a_{i6}^{(1)} = \sum_{j=2}^5 a_{ij}^{(1)}$ ($i=2, 3, 4$);

7) II нинг $i=2$ сатр элементларини $a_{22}^{(1)}$ га бўлиб, $(b^{(1)})$ сатрга ёзамиз;

8) контрол (4-банддаги каби): $b_{26}^{(1)} = 1 + \sum_{j=3}^5 b_{2j}^{(1)}$;

9) III қисм: $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot b_{2j}^{(1)}$ ($i=3, 4; j=3, 4, 5$);

10) контрол (6-банддаги каби): $a_{i6}^{(2)} = \sum_{j=3}^5 a_{ij}^{(2)}$ ($i=3, 4$);

11) $b_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(2)} / a_{33}^{(2)}$ ва контрол (4—б.): $b_{36}^{(2)} = 1 + \sum_{j=3}^5 b_{3j}^{(2)}$;

12) IV қисм: $a_{4j}^{(3)} = a_{4j}^{(2)} - a_{43}^{(2)} \cdot b_{3j}^{(2)}$ ($j=4, 5, 6$) ва контрол: $b_{46}^{(3)} = 1 + \sum_{j=4}^5 b_{4j}^{(3)}$.

Тескари юриш (x_4, x_3, x_2, x_1 номаълумларни топиш):

1) I' қисмга 1 ларни ёзамиз;

2) $x_4 = a_{45}^{(3)} / a_{44}^{(3)}$;

3) $(b^{(2)})$ сатрдан: $x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)} \cdot x_4$,

$(b^{(1)})$ сатрдан: $x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)} \cdot x_4 - b_{23}^{(1)} \cdot x_3$,

(b) сатрдан $x_1 = b_{15} - b_{14} \cdot x_4 - b_{13} \cdot x_3 - b_{12} \cdot x_2$;

4) контрол: $\sum$ устуни элементлари, яъни $\bar{x}_i$ лар уларга мос x_i ($i=4, 3, 2, 1$) лардан 1 та ортиқ бўлишлари керак; бунда $\bar{x}_4 = a_{46}^{(3)} / a_{44}^{(3)}$, $\bar{x}_3 = b_{36}^{(2)} - b_{34}^{(2)} \cdot \bar{x}_4$, $\bar{x}_2 = b_{26}^{(1)} - b_{24}^{(1)} \cdot \bar{x}_4 - b_{23}^{(1)} \cdot \bar{x}_3$, $\bar{x}_1 = b_{16} - b_{14} \cdot \bar{x}_4 - b_{13} \cdot \bar{x}_3 - b_{12} \cdot \bar{x}_2$.

Гаусс схемаси

Қисм	i	$a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3} \ a_{i4}$	Озод ҳад a_{i5}	Контрол	
				Σ	Σ'
I	1	$a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14}$	a_{15}	$\Sigma a_{1j} (=a_{16})$	
	2	$a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{24}$	a_{25}	$\Sigma a_{2j} (=a_{26})$	
	3	$a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ a_{34}$	a_{35}	$\Sigma a_{3j} (=a_{36})$	
	4	$a_{41} \ a_{42} \ a_{43} \ a_{44}$	a_{45}	$\Sigma a_{4j} (=a_{46})$	
	(B)	1 $b_{12} \ b_{13} \ b_{14}$	b_{15}	$b_{16} = a_{16} / a_{11}$	$1 + \Sigma b_{1j} \ j=\overline{2;5}$

Қисм	i	$a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3} \ a_{i4}$				Озод ҳад a_{i5}	Контрол	
							Σ	Σ'
II	2	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$	$\sum a_{2j}^{(1)}$	$j=\overline{2,5}$
	3	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	$a_{36}^{(1)}$	$\sum a_{3j}^{(1)}$	
	4	$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}$	$a_{46}^{(1)}$	$\sum a_{4j}^{(1)}$	
	(B ⁽¹⁾)	1	$b_{23}^{(1)}$	$b_{24}^{(1)}$	$b_{25}^{(1)}$	$b_{26}^{(1)}=b_{26}^{(1)} / a_{22}^{(1)}$	$1+\sum b_{2j}^{(1)}, j=$ $=\overline{3;5}$	
III	3	$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$	$\sum a_{3j}^{(2)}$	$j=\overline{3,5}$	
	4	$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}$	$a_{46}^{(2)}$	$\sum a_{4j}^{(2)}$		
	(B ⁽²⁾)	1	$b_{34}^{(2)}$	$b_{35}^{(2)}$	$b_{36}^{(2)}=$ $-a_{36}^{(2)} / a_{33}^{(2)}$	$1+\sum b_{3j}, j=\overline{4,5}$		
IV	4	$a_{44}^{(3)}$			$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}$	$\sum a_{4j}^{(3)} \ j=\overline{4,5}$	
I'				1	x_4	$\overline{x_4}$		
				1	x_3	$\overline{x_3}$		
			1		x_2	$\overline{x_2}$		
		1			x_1	$\overline{x_1}$		

Гаусс схемасидан фойдаланиб $A \vec{x} = \vec{b}$ ($A = [a_{ij}]^n$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\det A \neq 0$) система детерминантини топиш:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)} \quad (2)$$

$A^{-1} = [x_{ij}]^n$ тескари матрицани топиш учун $A \cdot A^{-1} = E$ муносабатдан ҳосил бўладиган $\sum_{k=1}^n a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij}$ чизиқли тенгламалар системалари (Гаусс схемасида биргаликда) ечилади, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, i, j = \overline{1; n}$.

1-мисол.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4,2x_2 + 1,6x_3 - 3x_4 = 3,2, \\ -0,4x_1 + 3x_2 - 2,4x_3 = -1,6, \\ 1,6x_1 - 0,8x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 1,5x_4 = 0 \end{cases}$$

система ечилсин, A^{-1} тескари матрица ва $\det A$ топилсин. Ҳисоблашларни вергулдан кейин иккита ўнли ишора билан бажаринг.

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	Контроль	
									Σ	Σ'
2	4,2	1,6	-3	3,2	1	0	0	0	9	
-0,4	3	-2,4	0	-1,6	0	1	0	0	-0,4	
1,6	-0,8	1	-1	-1	0	0	1	0	0,8	
1	-2	-1	1,5	0	0	0	0	1	0,5	
1	2,1	0,8	-1,5	1,6	0,5	0	0	0	4,5	4,5
3	3,84	-2,08	-0,6	-0,96	0,2	1	0	0	1,4	1,4
	-4,16	-0,28	1,4	-3,56	-0,8	0	1	0	-6,4	-6,4
	-4,1	-1,8	3	1,6	-0,5	0	0	1	-4	-4
1	1	-0,54	-0,16	-0,25	0,05	0,26	0	0	0,36	0,36
2	-2,53	0,73	-4,6	-0,59	-0,59	1,08	1	0	-4,90	-4,91
	-4,01	2,34	-2,63	-0,3	-0,3	1,07	0	1	-2,52	-2,53
	1	0,29	1,82	0,23	0,23	-0,43	-0,4	0	1,94	1,93
1	1,18	4,68	0,62	0,62	0,62	-0,65	-1,6	1	5,25	5,23
1	1	3,97	0,53	0,53	0,53	-0,55	-1,36	0,85	4,45	4,44
1	3,97	0,53	0,53	0,53	0,53	-0,55	-1,36	0,85	4,45	4,44
	2,98	0,38	0,38	0,38	0,38	-0,59	-0,79	0,25	3,21	3,22
	1,99	0,34	0,34	0,34	0,34	-0,15	-0,64	0,27	2,79	2,81
1	1,01	0,28	0,28	0,28	0,28	-0,04	-0,06	0,51	2,68	2,73

 x_i для A^{-1} матрица

Жавоб: $x_4 \approx 3,97$, $x_3 \approx 2,98$, $x_2 \approx 1,99$, $x_1 \approx 1,01$,
 $\det A = 2 \cdot 3,84 (-2,53) \cdot 1,18 = -22,93$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,28 & -0,04 & -0,06 & 0,51 \\ 0,34 & -0,15 & -0,64 & 0,27 \\ 0,38 & -0,59 & -0,79 & 0,25 \\ 0,53 & -0,55 & -1,36 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

Квадрат илдизлар усулини қўллаб симметрик матрица-
 ли $A \vec{x} = \vec{b}$ ($\det A \neq 0$) чизиқли алгебраик тенгламалар сис-
 темасини ечишда A матрица $A = T^*DT$ кўринишга келти-
 рилади, бунда T^* матрица T га қўшма,

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix},$$

d_{ii} элементлар $+1$ га ёки -1 га тенг, $d_{11} = \text{sign } a_{11}$,

$$t_{11} = \sqrt{|a_{11}|},$$

$$t_{ij} = \frac{a_{ij}}{d_{11} \cdot \bar{t}_{11}}, \quad j = \overline{2, n}, \quad t_{jj} = \sqrt{\left| a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} d_{kk} |t_{kj}|^2 \right|},$$

$$t_{ij} = 0, \quad i < j, \quad (3)$$

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \bar{t}_{kj} t_{ki} d_{kk}}{t_{ii} d_{ii}}, \quad i < j, \quad \bar{t}_{ki} \text{ ва } t_{ki} \text{ — ўзаро қўш}$$

ма комплекс сонлар, $d_{ii} = \text{sign} \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |t_{ki}|^2 d_{kk} \right), i > 1$.

A — ҳақиқий матрица ва унинг бош минорлари мусбат
 бўлган ҳолда $D = E$ бўлиб, (3) формулалар қуйидаги кўри-
 нишга келади:

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad t_{ij} = \frac{a_{ij}}{t_{11}}, \quad j = \overline{2, n}, \quad t_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} t_{kj}^2},$$

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}}, \quad i < j, \quad E \text{ — бирлик матрица} \quad (3')$$

Берилган $A\vec{x} = \vec{b}$ система унга эквивалент иккита учбурчак матрицали $T^*D\vec{y} = \vec{b}$, $T\vec{x} = \vec{y}$ системаларга алмаштирилади, улардан аввал y лар, сўнг x лар аниқланади:

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11} d_{11}}, \quad y_k = \frac{b_k - \sum_{s=1}^{k-1} \bar{t}_{sk} y_s d_{s,s}}{t_{kk} d_{kk}}, \quad k = \overline{2, n}, \quad (4)$$

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}, \quad y_k = \frac{x_k - \sum_{s=k+1}^n t_{ks} x_s}{t_{kk}}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 1, \quad (5)$$

(r) устуннинг (жадвалга қаранг) r элементлари

$$r_1 = \frac{\Sigma_1}{t_{11} d_{11}}, \quad (6)$$

$$r_k = \frac{\Sigma_k - \sum_{s=1}^{k-1} \bar{t}_{ks} r_s d_{s,s}}{\bar{t}_{kk} d_{kk}} \quad (6)$$

формулалар бўйича ҳисобланади. Бу қийматлар номаълум x_i лар олдидаги коэффицентлар ва озод ҳадлар йиғиндисига тенг бўлиши керак. Охирги контрол: (5) формулаларда y_i лар r_i ларга алмаштирилиб, x_i лар топилади, $x_i = x_i + 1$ бўлиши керак.

Квадрат илдишлар усули

	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	Озод ҳадлар	Контрол	
						Σ	(r)
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1	$\Sigma a_{1j} + b_1$	$= \Sigma_1$
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2	$\Sigma a_{2j} + b_2$	$= \Sigma_2$
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3	$\Sigma a_{3j} + b_3$	$= \Sigma_3$
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	b_4	$\Sigma a_{4j} + b_4$	$= \Sigma_4$
II	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	y_1	$\Sigma t_{1j} + y_1$	r_1
		t_{22}	t_{23}	t_{24}	y_2	$\Sigma t_{2j} + y_2$	r_2
			t_{33}	t_{34}	y_3	$\Sigma t_{3j} + y_3$	r_3
				t_{44}	y_4	$\Sigma t_{4j} + y_4$	r_4
III	$\frac{x_1}{x_1}$	$\frac{x_2}{x_2}$	$\frac{x_3}{x_2}$	$\frac{x_4}{x_4}$			

	Номгълумлар олиндаги коэффициент				Озод ҳад	Контрол Σ
	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}		
I	2 -3 4 1	-3 5 -1 2	4 -1 1 3	1 2 3 2	11 -6 1 1	15 -3 8 9
	t_{i1}	t_{i2}	t_{i3}	t_{i4}	y	Σ
II	1,414214	-2,121330 0,707079	2,828427 7,071384 7,550131	0,707107 4,949952 4,503632 1,649037	7,778175 14,849933 15,689721 1,723508	10,596613 27,577916 28,743484 3,372545
x_i	-1,477422	-2,187103	1,587086	1,08516		10,606598 27,57838 28,743515 3,368317
x	-0,475204	-1,184438	2,588619	2,042596		

2-мисол. Симметрик матрицали ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 11, \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

системани квадрат илдизлар усули билан ечамиз. (32-бетга қаранг).

Оралиқ ҳисоблашлардан намуналар:

$$y_2 = \frac{b_2 - t_{12}y_1}{t_{22}} = \frac{-6 - (-2,121330) \cdot 7,778175}{0,707079} = 14,849933;$$

$$r_1 = \frac{\Sigma_2 - t_{12}r_1}{t_{12}} = \frac{-3 - (-2,121330) \cdot 10,606598}{0,707079} = 27,57838;$$

$$x_3 = \frac{y_3 - t_{34}x_4}{t_{33}} = \frac{16,689721i - 4,503632i \cdot 1,045160}{7,550131i} = 1,587086,$$

$$\bar{x}_3 = \frac{r_3 - t_{34}\bar{x}_4}{t_{33}} = \frac{28,743515i - 4,503632i \cdot 2,042526}{7,550131i} = 2,588619.$$

$$x_1 = -1,477419, \quad x_2 = -2,167096, \quad x_4 = 1,045161.$$

Текшириш (x_i лар учун топилган қийматлар берилган системага қўйилади):

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 10,999969 & (\text{чегланиш } 0,0003\%) \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -6,000015 & (\text{ » } 0,00025\%) \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0,999981 & (\text{ » } 0,002\%) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0,999952 & (\text{ » } 0,005\%) \end{cases}$$

Итерация усули. Қўлланилишида $A \vec{x} = \vec{b}$ чизиқли тенгламалар системаси (бунда A —маҳсулмас матрица) $\vec{x} = B\vec{x} + \vec{c}$ кўринишга келтирилади. Яқинлашишлар

$$\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + \vec{c}^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

рекуррент формулалар бўйича изланади. Ихтиёрий $\vec{x}^{(0)}$ бошланғич яқинлашишда (7) оддий итерация усулининг яқинлашиши учун қуйидаги шартлардан бирининг бажарилиши етарли:

$$1) \|B\|_I < 1, \text{ бунда } \|B\|_I = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}|, \quad B = [b_{ij}]_1^n,$$

ёки

$$2) \|B\|_{II} < 1, \quad \|B\|_{II} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |b_{ij}|.$$

Итерация усулининг хатосини баҳолаш:

$$\|\vec{x} - \vec{x}^{(k)}\| \leq \frac{\|B\|^{k+1}}{1 - \|B\|} \|\vec{c}\|. \quad (8)$$

Зейдель усули. $A\vec{x} = \vec{b}$ система A матричасини $A = C + D$ кўринишга келтирамиз, бунда

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Натижада система $C\vec{x} = -D\vec{x} + \vec{b}$ кўринишга келади ва $C\vec{x}^{(k+1)} = -D\vec{x}^{(k)} + \vec{b}$ итерациялар билан ечилади. Ҳисоблашлар схемаси:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \text{ — бошланғич яқинлашиш; } \\ x_1^{(k+1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^n \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^{(k)}, \\ x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)}, \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{nj}}{a_{nn}} x_j^{(k+1)}. \end{array} \right.$$

Зейдель усулининг яқинлашиш шarti:

$$\max_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \text{ ёки } \max_j \sum_{i=1, i \neq j}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1. \quad (10)$$

3-мисол. Оддий итерация ва Зейдель усуллари қўлланilib,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad 2x_1 + 3,5x_2 - 4,5x_3 + x_4 = 3, \\ \text{(б)} \quad x_1 - 2,5x_2 - 4,5x_3 + x_4 = 2, \\ \text{(в)} \quad 10x_1 - 7x_2 - x_3 - 8x_4 = 2, \\ \text{(г)} \quad 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -4 \end{array} \right.$$

система $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-6}$ аниқликда ечилсин.

Ечиш. Системани x_i ларга нисбатан ечиб,

$$\begin{cases} x_1 = -1,75x_2 + 2,25x_3 - 0,5x_4 + 1,5, \\ x_2 = 0,4x_1 - 1,8x_3 + 0,4x_4 + 1,8, \\ x_3 = 10x_1 - 7x_2 - 8x_4 - 2, \\ x_4 = -5x_1 - x_2 + 0,5x_3 - 2 \end{cases}$$

кўринишга келтирайлик. Лекин бу системага нисбатан итерация жараёни, Зейдель жараёни ҳам яқинлашмайди. Чунки $\|B\|_1 = \max\{4,5; 2,6; 25; 6,5\} = 25 > 1$, $\|B\|_{II} = \max\{15,4; 9,75; 4,55; 8,9\} = 15,4 > 1$. Берилган система устида шундай айний алмаштиришлар бажарамизки, натижада ҳосил бўладиган янги системада $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ ($i=1,2,\dots,n$) бўлсин.

Чунончи:

$$\begin{cases} \text{(г)} & 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ \text{(а)} - \text{(б)} & x_1 + 6x_2 = 1, \\ \text{(а)} + \text{(б)} & 3x_1 + x_2 - 9x_3 + 2x_4 = 5 \\ \text{(г)} - \text{(а)} + \text{(б)} - \text{(в)} & x_1 - 3x_2 - 10x_4 = 7 \end{cases}$$

$$\text{ёки} \begin{cases} x_1 = -0,4 - 0,2x_2 + 0,1x_3 - 0,2x_4 \\ x_2 = \frac{1}{6}(1 - x_1), \\ x_3 = (-5 + 3x_1 + x_2 + 2x_4)/9, \\ x_4 = -0,7 + 0,1x_1 - 0,3x_2. \end{cases}$$

Бу ҳолда $\|B\|_1 = \max\{0,5; 0,17; 0,67; 0,4\} = 0,67 < 1$, $\|B\|_{II} = 0,61 < 1$. $\vec{x}^{(0)} = (0,4; 1; -5/9; -0,7)$ бўлсин. Ҳисоблашларни то $\vec{x}^{(k)}$ ва $\vec{x}^{(k+1)}$ яқинлашмишлар 10^{-6} гача устма-уст тушгунча давом эттирамиз:

3-мисол

Оддий итерация усули

к	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	-0,4	1	-0,5555555	-0,7
1	-0,3155555	0,16	-0,6444444	-0,68
2	-0,3604444	0,2311111	-0,7940740	-0,7795555
3	-0,3697185	0,2258666	-0,8232592	-0,8053777
4	-0,3664237	0,2287703	-0,8326716	-0,8047318
...				
18	-0,36773199	0,22795533	-0,8317289	-0,80515979
19	-0,36773200	0,22795533	-0,8317289	-0,80515980

Натижа: $x_1 = -0,367732$, $x_2 = 0,227955$, $x_3 = -0,831729$, $x_4 = -0,805160$.

к	$x_1^{(к)}$	$x_2^{(к)}$	$x_3^{(к)}$	$x_4^{(к)}$
0	-0,4	1	-0,5555555	-0,7
1	-0,51555555	0,25259258	-0,85489712	-0,8273333
2	-0,37054156	0,2284236	-0,83754086	-0,80558124
3	-0,36832256	0,22805376	-0,83200848	-0,80524839
4	-0,36776192	0,22796031	-0,83175803	-0,80516428
5	-0,367735	0,22795583	-0,83173086	-0,80516025
6	-0,36773221	0,22795536	-0,83172907	-0,80515983
7	-0,36773201	0,22795533	-0,83172893	-0,8051598

Натижа: $x_1 = -0,367732$, $x_2 = 0,227955$, $x_3 = -0,831729$,
 $x_4 = -0,805160$.

МАШҚЛАР

ЭХМ учун стандарт программалардан фойдаланиб Гаусс усули ва итерация усуллари ёрдамида $Ax = \vec{b}$ чизиqli тенгламалар системалари ечилсин. Симметрик матрицали система ҳолида квадрат илдизлар усулидан ҳам фойдаланилсин. Гаусс усули қўлланилганида $\det A$ ва A^{-1} тескари матрица ҳам топилсин. Итерация усуллари ва Зейдель усули қўлланилишидан олдин $\varepsilon = 10^{-3}$ аниқликка эришиш учун зарур бўладиган итерация қадамлари сони ҳисоблансин.

- 1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 14, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 39; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 18, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 26, \\ x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} 2x_3 + 5 = 3x_1, \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 10, \\ 6x_2 - 5x_1 + 2 = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 7 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2 = 0; \end{cases}$
- 7) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 12; \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 9) \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 10, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 19, \\ 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 31, \\ 4x_1 + x_2 - 12x_3 - 3x_4 = 40; \end{cases} & 10) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 x_3 + x_4 = 36, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 24, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 12, \\ x_1 - x_3 - x_3 + x_4 = 0; \end{cases} \\
 11) \quad & \begin{cases} 2,8x_1 + 3,4x_2 + 1,4x_3 = 2,2, \\ 3,6x_1 - 1,8x_2 + 2,9x_3 = 1,8, \\ 4,2x_1 + 5,2x_2 - 1,7x_3 = 0,9; \end{cases} & 12) \quad \begin{cases} 2,7x_1 + 3,8x_2 + 2,9x_3 = 1,7, \\ 3,1x_1 + 3,4x_2 + 2,8x_3 = 2,1, \\ 5,2x_1 - 1,7x_2 + 2,3x_3 = 3,8; \end{cases} \\
 13) \quad & \begin{cases} 4,1x_1 + 3,2x_2 + 2,9x_3 = 1,2, \\ 2,9x_1 + 3,1x_2 + 3,1x_3 = 3,1, \\ 8,5x_1 + 4,8x_2 + 5,8x_3 = 6,6; \end{cases} & 14) \quad \begin{cases} 10,1x_1 + 5,6x_2 + 7,3x_3 = 10,8, \\ 4,8x_1 + 6,1x_2 + 3,8x_3 = 7,7, \\ 5,1x_1 + 6,7x_2 + 2,2x_3 = 6,8; \end{cases} \\
 15) \quad & \begin{cases} 4,3x_1 + 3,1x_2 + 3,8x_3 = 1,8, \\ 5,1x_1 + 4,7x_2 + 5,8x_3 = 6,7, \\ 3,7x_1 + 3,8x_2 - 2,1x_3 = 4,3; \end{cases} & 16) \quad \begin{cases} 8,6x_1 + 6,8x_2 + 5,7x_3 = 2,01, \\ 4,8x_1 + 5,1x_2 + 3,7x_3 = 10,7, \\ 3,9x_1 - 3,1x_2 + 4,8x_3 = -8,8; \end{cases} \\
 17) \quad & \begin{cases} -4,2x_1 + 3,5x_2 + 4,8x_3 = 7,6, \\ 0,6x_1 + 3,4x_2 + 1,7x_3 = -0,34, \\ 1,7x_1 + 2,4x_2 - 2,5x_3 = 5,4; \end{cases} & 18) \quad \begin{cases} 5,4x_1 - 3,3x_2 + 6,4x_3 = -4,5, \\ 5,3x_1 - 2,7x_2 - 2,3x_3 = 2,8, \\ 5,6x_1 - 3,4x_2 + 5,6x_3 = 1,7; \end{cases} \\
 19) \quad & \begin{cases} 4,6x_1 + 2,7x_2 - 5,7x_3 = 4,8, \\ 3,7x_1 - 4,6x_2 + 2,9x_3 = 1,4, \\ 2,5x_1 + 5,5x_2 + 4,3x_3 = 2,6; \end{cases} & 20) \quad \begin{cases} 6,8x_1 - 3,7x_2 - 1,7x_3 = 2,9, \\ 4,4x_1 - 3,6x_2 - 7,7x_3 = -34, \\ -1,8x_1 + 1,3x_2 + 3,5x_3 = -2,2; \end{cases} \\
 21) \quad & A = \begin{bmatrix} 34,21 + \alpha & -3,42 & 3,57 \\ 3,31 & 31,49 + \alpha & 2,52 \\ 3,49 & 5,67 & 32,37 - \alpha \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\alpha = 0,15n, \quad n = \overline{0;15}, \quad b = (-0,4; 3,23; \alpha; 6,89)^1.$$

3- ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

Хар қайси вариантда $\vec{Ax} = \vec{b}$ чизиқли тенгламалар системаси берилган (1,2 ёки 3- мисол, n нинг қиймати кўрсатилган).

Топишириқ: 1) Гаусс усули қўлланилиб, система илдизлари $\epsilon = 0,5 \cdot 10^{-5}$ аниқликда топилсин; 2) $\det A$ ҳам шу ϵ аниқлик билан ҳисоблансин; 3) A^{-1} тескари матрица тузилсин; 4) шу система оддий итерация ва Зейдель усуллари билан ҳам ечилсин.

1- мисол.

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & 2 & -3 & \dots & (-1)^n n \\ -1 & a_2 & -3 & \dots & (-1)^n n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -3 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ \dots \\ 1/n \end{bmatrix}, \quad a_k = 1/k$$

$$2\text{-мисол. } A_n = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 4/3 & \dots & n/(n-1) \\ -a_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \vec{b}_n = \begin{bmatrix} n \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{matrix} a_k = 21/k, \\ \varepsilon = 0,5 \times \\ \times 10^{-3} \end{matrix}$$

$$3\text{-мисол. } A_n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -n+1 & 0 \end{bmatrix}, \vec{b}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ n \end{bmatrix}, \begin{matrix} \varepsilon = 0,5 \times \\ \times 10^{-5}, \end{matrix}$$

Вариант №	Мисол		Вариант №	Мисол	
	№	n		№	n
1	1	11	14	1	16
2	2	1001	15	2	1010
3	3	101	16	3	110
4	1	12	17	1	17
5	2	1002	18	2	1011
6	3	102	19	3	111
7	1	13	20	1	18
8	2	1003	21	2	1012
9	3	103	22	3	112
10	1	14	23	1	19
11	2	1004	24	2	1013
12	3	104	25	3	113
13	1	15			

4-боб. ЧИЗИҚЛИ БЎЛМАГАН ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

Оддий итерация усули. Берилган ушбу

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

тенгламалар системаси

[illegible]

каноник шаклга келтирилади. Сўнг $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ бошланғич яқинлашишлар танланади, кейинги яқинлашишлар эса

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{cases} \quad (3)$$

формулалар бўйича изланади. Агар φ_i ($i = \overline{1, n}$) функциялар
пах $\|\vec{x} - \vec{x}^{(0)}\| \leq \delta$ соҳада аниқланган, узлуксиз дифферен-
циалланувчи ва

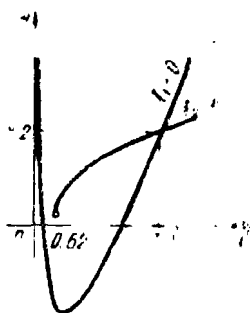
$$q_m = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^{(0)} \\ \|\vec{x} - \vec{x}^{(0)}\| \leq \delta}} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| \right\} < 1 \quad (4)$$

тенгсизликларни қаноатлантирса, ҳамда $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ бошланғич яқинлашишлар учун $|x_i^{(0)} - \varphi_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})| \leq \eta$ ($i = \overline{1, n}$), $\frac{\eta}{1 - q_m} \leq \delta$ шартлар бажарилса, (2) тенгламалар системаси шу соҳада ягона $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ечимга эга бўлади ва (3) кетма-кетликлар бу ечимга интилади ва интилиш тезлиги

$$|\xi_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\eta}{1 - q_m} q_m^n \quad (i = \overline{1, n}) \quad (5)$$

тенгсизликлар билан баҳоланади. q нинг қиймати m масофада (кубик масофада, нормада) ҳисобланади. U_s (октаэдрик) ёки l (сферик) масофада ҳам берилиши мумкин ([7], 53 — 54-бетлар).

4-мисол. ([7], 55-бет).
 $f_1(x, y) = 2x^2 - x(y + 5) +$
 $+ 1 = 0, f_2(x, y) = x + 3\lg x -$
 $- y^2 = 0$ системанинг мусбат
 илдизлари $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}$ аниқ-
 ликда топилсин.



1 - чизма

Ечиш. Системанинг илдизларини график ёрдамида тақрибан аниқлаймиз. ЭХМ қуйидаги натижани беради (1-чизма), программа ва чизмадан кўринишича шу илдиз $3,4 < x < 3,6$, $2,1 < y < 2,3$ тўғри тўртбурчак ичида ётади. (x_0, y_0) бошланғич яқинлашиш сифатида $(3,5; 2,2)$ нуқтани оламиз. Системани каноник шаклга келтирамиз:

$$x = \sqrt{0,5(x(y+5)-1)} = \varphi_1(x, y),$$

$$y = \sqrt{x + 3\lg x} = \varphi_2(x, y).$$

Энди $\{|x - 3,5| \leq 0,1, |y - 2,2| \leq 0,1\}$ соҳада (4) шартнинг бажарилишини текширамиз ($M = 0,43429$ — $\bar{y}$ тиш модули):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{y+5}{4\sqrt{0,5(x(y+5)-1)}}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{x}{4\sqrt{0,5(x(y+5)-1)}},$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{1 + \frac{3M}{x}}{2\sqrt{x+3\lg x}}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0; \quad \max_{x,y} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| = \frac{(2,3+5)\sqrt{2}}{4\sqrt{3,4(2,1+5)-1}} <$$

$$< 0,54, \quad \max_{x,y} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| = \frac{3,6\sqrt{2}}{4\sqrt{3,4(2,1+5)-1}} < 0,27,$$

$$\max_{x,y} \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| = \frac{1 + \frac{3M}{3,4}}{2\sqrt{3,4+3\lg 3,4}} < 0,27, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0;$$

$$\max \left(\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| \right) < 0,81, \quad \max \left(\left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| \right) < 0,27.$$

Демак, $q = 0,81 < 1$. Итерация жараёни яқинлашади. Қетма-кет яқинлашишларни $x_{k+1} = \sqrt{0,5(x_k(y_k+5)-1)}$ ва $y_{k+1} = \sqrt{x_k + 3\lg x_k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) формулалар бўйича ҳисоблаймиз:

4-мисол

Оддий итерация

k	x	y	k	x	y
0	3,5	2,2	4	3,48580	2,26084
1	3,47851	2,26544	5	3,48639	2,26113
2	3,48374	2,25891	6	3,48677	2,26131
3	3,48483	2,26050			

Жавоб: $x = 3,4866 \pm 0,2 \cdot 10^{-4}$, $y = 2,2612 \pm 0,1 \cdot 10^{-4}$.
 Ньютон усули. Ушбу

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = \overline{1, n}) \text{ ёки } \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (6)$$

чизиқли бўлмаган тенглама ечимининг бирор $\vec{x}^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$ яқинлашиши топилган бўлсин. Аниқ ечим $\vec{x} = \vec{x}^{(m)} + \vec{\varepsilon}^{(m)}$ кўринишда ёзилиши мумкин, бунда $\vec{\varepsilon}^{(m)} = (\varepsilon_1^{(m)}, \varepsilon_2^{(m)}, \dots, \varepsilon_n^{(m)})$ тузатма (тақрибий илдиз хатоси). Агар $\vec{f}(\vec{x})$ функция $\vec{x}$ ва $\vec{x}^{(m)}$ ни ўз ичига олган бирор қавариқ соҳада узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $\vec{f}(\vec{x}^{(m)} + \vec{\varepsilon}^{(m)}) = \vec{0}$ тенгламани $\vec{\varepsilon}$ вектор даражалари бўйича ёйиб (ва бунда чизиқли ҳадлар билан чегараланиб), $\vec{f}(\vec{x}^{(m)}) + \vec{f}'(\vec{x}^{(m)}) \vec{\varepsilon}^{(m)} = \vec{0}$ чизиқли тенгламани оламыз, ундаги $\vec{f}'(\vec{x}^{(m)})$ ҳосила $f_1, \dots, f_n$ функциялар системасининг $I(\vec{x}^{(m)})$ Якоби матрицасини ташкил қилади (қаранг: [5]):

$$I(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

$I(\vec{x}^{(m)})$ матрица ҳосмас деб фараз қилинган ҳолда $\vec{\varepsilon}^{(m)} = -I^{-1}(\vec{x}^{(m)}) \vec{f}(\vec{x}^{(m)})$, ниҳоят, $\vec{\varepsilon}^{(m)} = \vec{x}^{(m+1)} - \vec{x}^{(m)}$ бўлгани учун ушбу

$$\vec{x}^{(m+1)} = \vec{x}^{(m)} - I^{-1}(\vec{x}^{(m)}) \vec{f}(\vec{x}^{(m)}) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

рекуррент формулани ҳосил қиламиз. $\vec{x}^{(0)}$ бошланғич яқинлашиш сифатида изланаётган илдизнинг бирор дағал қиймати олиниши мумкин.

Хусусан, иккинчи тартибли $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ системани Ньютон усули бўйича ечиш учун $x_{n+1} = x_n - A_n/I_n$, $y_{n+1} = y_n - B_n/I_n$ формулалардан фойдаланамиз, бунда

$$A_n = \begin{vmatrix} f(x_n, y_n) & f'_y(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) & g'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}, \quad B_n = \begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) & f(x_n, y_n) \\ g'_x(x_n, y_n) & g(x_n, y_n) \end{vmatrix},$$

$$I_n = \begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) & f'_y(x_n, y_n) \\ g'_x(x_n, y_n) & g'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

5-мисол.

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2y^2 - 2x^3 - 5y^3 - 2,401 = 0, \\ g(x, y) = x^4 - 8y + 3,474 = 0 \end{cases}$$

система ечими $\varepsilon = 10^{-2}$ аниқликда топилсин.

Ечиш. $f'_x = 2xy^2 - 6x^2$, $f'_y = 2x^2y - 15y^2$, $g'_x = 4x^3$, $g'_y = -8$. Бошланғич яқинлашиш сифатида $(0,8; 0,5)$ ни оламиз. Кейинги ҳисоблашлар натижалари қуйидаги жадвалда жойлаштирилган:

5-мисол

Ньютон усули

n	x_n y_n	i_n g_n	f'_x f'_y	g'_x g'_y	A_n B_n	I_n
0	0,8 0,5	-0,0259999 -0,1164001	-3,44 -3,11	2,0479997 -8	-0,154004 0,4536699	33,889279
1	0,8045443 0,4866136	0,0228683 0,0000794	-3,502729 -2,921927	2,0830985 -8	-0,1827144 -0,04791504	34 108493
2	0,81090116 0,48801898	0,017864 0,0022413	-3,5591124 -2,9306218	2,1328662 -8	-0,1363436 -0,0460786	34,723523
3	0,81482765 0,49069052	0,0000608 0,0013111				

МАШҚЛАР

1. Қуйидаги чизикли бўлмаган тенгламалар системалари итерация усулини қўлланиб, $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ аниқликда ечилсин:

- 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, & x > 0, & x > 0, \\ \sin(x + y) - 1,6x = 0; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1, \\ \lg(xy + 0,1) = x^2; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \cos(x + y) - 1,2x = 0,2; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} 0,9x^2 + 2y^2 = 1, \\ \lg(xy + 0,3) = x^2; \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} 0,8x^2 + 2y^2 = 1, \\ \operatorname{ctg} xy = x^2; \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \sin(x + y) - 1,5x = 0,1; \end{cases}$

$$7) \begin{cases} 0,9x^2 + 2y^2 = 1, \\ \operatorname{tg}(xy + 0,2) = x^2; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 0,8x^2 + 2y^2 = 1, \\ \operatorname{tg}(xy + 0,4) = x^2; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \sin(x + y) = y - 0,1; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 0,5x^2 + 2y^2 = 1, \\ \operatorname{tg}(xy + 0,1) = x^2; \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 0,9x^2 + 2y^2 = 1, \\ \operatorname{tg}xy = x^2; \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \cos(x + y) - 1,2x = 0. \end{cases}$$

2. Қуйидаги системалар Ньютон усули қўлланилиб, $\varepsilon = 0,001$ аниқлик билан ечилсин:

$$1) \begin{cases} x^7 - 5x^2y^4 + 11,321303 = 0, \\ y^5 - 3x^4y - 3,642436 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (xy)^3 - 3x^3 - 6y^3 + 17,25 = 0, \\ x^4 - 9y - 2,5 = 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x^2 - xy - y^2 + 4x - 3y + \\ + 1,52 = 0, \\ y \cos y + x - 1,234829 = 0; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \sin(0,7x + y^2) + x^2 - \\ - y^2 - 0,8060918 = 0, \\ 25x^2 - y^2 - 9,615 = 0; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} e^{xy} - x^2 + y = 1,7676106, \\ (x + 0,5)^3 + y^2 = 3,234; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \sin(x + 2y) - xy = \\ = -0,70201589, \\ x^2 - y^2 = -0,5376; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \sin(x - y) + 2,3x = 4,9256629, \\ x^2 + y^2 = 5,5864188; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 5x - 6y + 20\lg x + 16 = 0, \\ 2x + y - 10\lg y - \\ - 0,834224 = 0; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \sin(x - 2,2y) - xy + \\ + 4,6754632 = 0, \\ \frac{x^3}{1,75} - y^2 + 1,7142858 = 0; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \operatorname{tg}(y - x) + xy = -9,1310061 \\ x^2 + y^2 = 18,32. \end{cases}$$

3. $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ векторнинг $\|\vec{x}\| = \max_i |x_i|$, $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$ нормаси қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантиришини кўрсатинг:

а) $\|\vec{x}\|_1 \leq \|\vec{x}\|_2 \leq n \|\vec{x}\|_1$, б) $\|\vec{x}\|_1 \leq \|\vec{x}\|_3 \leq \sqrt{n} \|\vec{x}\|_1$,
в) $n^{\frac{1}{2}} \|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_3 \leq \|\vec{x}\|_2$.

4. $d_k > 0, k = \overline{1, n}$ бўлсин. 1) $\max_{1 \leq k \leq n} (d_k |\vec{x}_k|)$, 2) $\sum_{k=1}^n d_k |\vec{x}_k|$,

3) $\sqrt{\sum_{k=1}^n d_k |x_k|^2}$ лар x векторнинг нормаси бўлиши исботлансин.

5. 1) $M(A) = n \max_{\substack{1 \leq i \\ j \leq n}} |a_{ij}|$ сони A матрицанинг нормаси бўлиши, 2) $\max_{\substack{1 \leq i \\ j \leq n}} |a_{ij}|$ сони A матрицанинг нормаси бўлолмаслиги, 3) $M(A)$ норма $\vec{x}$ векторнинг $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_3$ нормалари билан мослангани исботлансин.

6. $N(A) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$ сони A матрицанинг нормаси бўлиши исботлансин.

7. 1) $\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ норманинг $\|\vec{x}\|_1$ нормага бўйсۇниши, 2) $\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ норманинг $\|\vec{x}\|_2$ нормага бўйсۇниши исботлансин.

8. Қуйидаги тенгсизликлар исботлансин:

1) $n^{-1}M(A) \leq \|A\|_k \leq M(A)$ ($k=1, 2, 3$); 2) $n^{-1}M(A) \leq N(A) \leq M(A)$
 3) $n^{-1/2}N(A) \leq \|A\|_3 \leq N(A)$; 4) $n^{-1/2}N(A) \leq \|A\|_k \leq n^{1/2}N(A)$
 ($k=1, 2$); 5) $n^{-1/2}\|A\|_3 \leq \|A\|_k \leq n^{1/2}\|A\|_3$ ($k=1, 2$); 6) $n^{-1}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq n\|A\|_1$.

4-ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

Вариантда кўрсатилган чизиқли бўлмаган тенгламалар системаси ҳам оддий итерация усули ҳамда Ньютон усули билан $\varepsilon = 0,001$ аниқликда ечилсин (мисол № ва параметрлар жадвалда кўрсатилган):

1-мисол. $\begin{cases} \sin(x+\alpha) + \beta y = \gamma, \\ ax + b \cos(y+c) = d. \end{cases}$ 2-мисол. $\begin{cases} \cos(x+\alpha) + \beta y = \gamma, \\ ax + b \cos(y+c) = d. \end{cases}$

3-мисол. $\begin{cases} \operatorname{tg}(x+\alpha) + \beta y = \gamma, \\ ax + b \sin(y+c) = d. \end{cases}$ 4-мисол. $\begin{cases} \sin(x+\alpha) + \beta y = \alpha, \\ ax + b \sin(y+c) = d. \end{cases}$

Вар.	Мисол №	α	β	γ	a	b	c	d	Вар.	Мисол №	α	β	γ	a	b	c	d
1	1	1	-1	1,2	2	1	0	2	14	4	-1	1	1,5	1	-1	1	1
2	2	-1	1	0,5	1	-1	0	3	15	4	1	-1	1	2	1	0	2
3	1	0	2	2	1	1	-1	0,7	16	2	-1	1	0,8	1	-1	0	1
4	3	0	1	1,5	2	-1	-0,5	1	17	3	1	1	2	-1	1	0	2
5	1	0,5	-1	1	1	1	-2	0	18	4	0,5	-1	-1	1	-1	0	0,8
6	3	0,5	1	0,8	-2	1	0	1,6	19	2	1	0,7	1	0,3	-1	1	1,2
7	4	-1	1	1,3	1	-1	1	0,8	20	3	1,2	-1	3	1	-1	0,8	1,3
8	1	0	1	-0,4	2	-1	1	0	21	4	0,4	-1	1	-1	1	0,2	1,2
9	1	0	-2	1	-1	1	0,5	2	22	2	-0,4	1	-1	0,5	-1	0,3	1
10	1	2	-1	1,5	1	1	-2	0,5	23	3	0,5	1	2	1	1	0	0,7
11	1	1	-1	1,2	2	1	0	2	24	4	1	-1	0,8	0,3	1	0	2
12	2	-1	1	0,5	1	-1	0	3	25	2	0	1	1,2	0,8	2	0,3	1,2
13	3	0	2	2	1	1	-1	0,7									

5.6.6. МАТРИЦАЛАРНИНГ ХОС СОН ВА ХОС ВЕКТОРЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ

Нолдан фарқли $\vec{x}$ вектор учун

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x} \quad (1)$$

тенглик бажарилсин. Ундаги λ сони A квадрат матрицанинг хос сони ёки характеристик сони, $\vec{x}$ вектор A матрицанинг λ га мос хос вектори (умуман, a x ҳам A нинг хос вектори, бунда a -ихтиёрий сон). A матрицанинг барча хос сонлари тўплами A матрицанинг спектри, хос сонлар модуллариининг максимуми A матрицанинг $\rho(A)$ спектрал радиуси,

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

A матрицанинг асрий ёки характеристик тенгламаси, (2) тенгламанинг чап қисмидан иборат

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E) &= (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \\ &- p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_n) \end{aligned} \quad (3)$$

n - даражали кўпхад A матрицанинг характеристик кўпхад и,

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_n \quad (4)$$

эса A матрицанинг хос кўпхадидир. Хос сонлар ва хос векторларни топиш учун: 1) $P(\lambda)$ тузилади, 2) $P(\lambda) = 0$ тенгламадан барча λ_i ($i = \overline{1, n}$) хос сонлар топилади, 3) ушбу

$$(A - \lambda_i E) \vec{x} = \vec{0} \quad (5)$$

бир жинсли тенгламалар системасидан $\vec{x}$ хос векторлар аниқланади.

(4) кўпхаднинг p_i коэффициентлари A матрицанинг $(-1)^{i-1}$ ишора билан олинган i - тартибли диагональ минорлар йиғиндисига тенг:

$$p_1 = \sum_{j=1}^n a_{jj}, \quad p_2 = - \sum_{j < k} \begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jk} \\ a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$$p_3 = \sum_{j < k < i} \begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jk} & a_{ji} \\ a_{kj} & a_{kk} & a_{ki} \\ a_{ij} & a_{ik} & a_{ii} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad p_n = (-1)^{n-1} \det A.$$

Бу тенгликлардан кам фойдаланадилар: n нинг катта қийматларида ҳисоблашлар оғирлашади. Амалда эса аниқ (тўғри) усуллар ва итерацион усуллардан фойдаланилади. Аниқ усуллар қўлланилганда олдин p_i коэффициентлар топилади, сўнг $P(\lambda)$ кўпхад тузилиб, унинг илдизлари (λ_i лар) ва кейин $\vec{x}$ лар аниқланади. Итерацион усуллардан характеристик кўпхад тузиб ўтирилмай, тўғридан-тўғри хос сонлар ва хос векторлар бир вақтнинг ўзида топилади. Аниқ усуллар хос сонларнинг ҳаммасини топишга (муаммони тўлиқ ҳал қилишга), итерацион усуллар эса битта ёки бир нечта хос сон ва хос векторни топишга (муаммони қисман ҳал қилишга) имкон беради. Ҳисоблашларда

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{tr} A,$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det A \quad (6)$$

тенгликлардан кенг фойдаланадилар.

А.Н. Кривов усули. 1) Нолдан фарқли ихтиёрий $\vec{c}^{(0)} =$

$$\begin{cases} -29p_1 + 5p_2 + p_3 = 125, \\ -15p_1 + 3p_2 = 63, \\ -15p_1 + 3p_2 = 63. \end{cases}$$

Иккинчи ва учинчи тенгламаларнинг бир хил бўлаётгани олдинги $\vec{c}^{(0)}$, $\vec{c}^{(1)}$, $\vec{c}^{(2)}$ векторлар чизиқли боғланганлигини билдиради. Системани шу векторларнинг чизиқли комбинациясида тузамиз:

$$\begin{cases} 5p_1 + p_2 = -29, \\ 3p_1 = -15, \end{cases} \text{ бундан } p_1 = -5, p_2 = -4;$$

ф $(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4$, $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$; (6) муносабатга кўра $\lambda_3 = 5 + 14 - 25 + 4 + 1 = -1$. λ_1 ва λ_2 га мос бўлган $\vec{x}^{(1)}$ ва $\vec{x}^{(2)}$ хос векторларни топамиз ($\vec{x}^{(3)}$ ни топиш учун $\vec{c}^{(0)}$ бошқача танланиши керак). $m = 2$ бўлганидан $\beta_{12} = 1$, $\beta_{11} = \lambda_1 - p_1 = -4 + 5 = 1$, $\beta_{22} = 1$, $\beta_{21} = \lambda_2 - p_1 = -1 +$

$$+ 5 = 4, \text{ шунга кўра } \vec{x}^{(1)} = \beta_{11}\vec{c}^{(0)} + \beta_{12}\vec{c}^{(1)} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}, \vec{x}^{(2)} = \beta_{21}\vec{c}^{(0)} + \beta_{22}\vec{c}^{(1)} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Леве́рье усули. Қуйидаги

$$s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = SpA,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$s_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k = SpA^k, \quad (10)$$

$$A^k = A^{k-1}A, \quad k = \overline{0, n}, \quad k \leq n,$$

муносабаглардан фойдаланилиб, $\det(\lambda E - A) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n$ кўпхаднинг p_k коэффициентлари кетма-кет топилади:

$$p_k = -\frac{1}{k} (s_k + p_1s_{k-1} + p_2s_{k-2} + \dots + p_{k-1}s_1), \quad k = \overline{1, n}.$$

$$\text{2-мисол. } A = \begin{bmatrix} 5 & 30 & -48 \\ 3 & 14 & -24 \\ 3 & 15 & -25 \end{bmatrix} \text{ матрицанинг (1-мисол)}$$

характеристик полиноми тузилсин ва λ_i хос сонлари топилсин.

$$\text{Ечиш. } s_1 = SpA = 5 + 14 - 25 = -6,$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -29 & -150 & 240 \\ -15 & -74 & 120 \\ -15 & -75 & 121 \end{bmatrix}, \quad s_2 = SpA^2 = -29 - 74 + 121 = 18,$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 125 & 630 & -1008 \\ 63 & 314 & -504 \\ 63 & 315 & -505 \end{bmatrix}, \quad s_3 = SpA^3 = 125 + 314 - 505 = 66,$$

$$p_1 = -\frac{1}{1} s_1 = 6, \quad p_2 = -\frac{1}{2} (s_2 + p_1 c_1) =$$

$$= -\frac{1}{2} (18 + 6 \cdot (-6)) = 9,$$

$$p_3 = -\frac{1}{3} (s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1) = -\frac{1}{3} (-66 + 6 \cdot 18 + 9 \cdot (-6)) = 4,$$

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda + 4 = 0, \quad \text{бундан } \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -4, \quad \lambda_3 = -1.$$

А. М. Данилевский усули. Бу усулнинг моҳияти берилган A матрица устида кетма-кет ўхшаш алмаштиришлар бажариб, уни Фробениуснинг

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

нормал шаклига келтиришдан иборат. P нинг биринчи сатр элементлари A матрица характеристик кўпҳадининг p_i коэффициентларини ташкил этади: $D(\lambda) = \det(P - \lambda E) = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_n) = (-1)^n P(\lambda)$.

1- қадам. A матрицада $a_{n,n-1} \neq 0$ бўлсин. A ни ўнг томондан

$$M_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{a_{n1}}{a_{n,n-1}} & -\frac{a_{n2}}{a_{n,n-1}} & \dots & -\frac{a_{n,n-2}}{a_{n,n-1}} & \frac{1}{a_{n,n-1}} & -\frac{a_{nn}}{a_{n,n-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицага кўпайтирамиз:

$$AM_{n-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Энди AM_{n-1} ни чап томондан

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицага кўпайтирамиз:

$$A^{(1)} = M_{n-1}^{-1} AM_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2,n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}^{(1)} & a_{n-1,2}^{(1)} & \dots & a_{n-1,n-1}^{(1)} & a_{n-1,n}^{(1)} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$A^{(1)}$ нинг n -сатри изланаётган P матрицанинг n -сатри билан бир хил. AM_{n-1} ва $A^{(1)}$ матрицалар элементларини ҳисоблаш формулалари:

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{i,n-1} \frac{a_{nj}}{a_{n,n-1}} \quad (j = \overline{1, n}; j \neq n-1),$$

$$b_{n,n-1} = \frac{a_{i,n-1}}{a_{n,n-1}} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (12)$$

$$a_{ij}^{(1)} = b_{ij} \quad (1 \leq i \leq n-2, 1 \leq j \leq n), \quad a_{n-1,j} = \sum_{k=1}^n a_{nk} b_{kj} \quad (1 \leq j \leq n).$$

2-қадам. $A^{(1)}$ матрицада $a_{n-1,n-2}^{(1)} \neq 0$ бўлсин. Ҳисоблашлар биринчи қадамдагига ўхшаш. Энди $A^{(1)}$ устида ўхшаш алмаштиришлар бажарилади ва у n ва $(n-1)$ -сатрлари Фробениус шаклида бўлган янги $A^{(2)}$ матрицага айлантирилади:

$$A^{(2)} = M_{n-2}^{-1} A^{(1)} M_{n-2} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & \dots & a_{1,n-2}^{(2)} & a_{1,n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2,1}^{(2)} & \dots & a_{n-2,n-2}^{(2)} & a_{n-2,n-1}^{(2)} & a_{n-2,n}^{(2)} \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Бунда

$$M_{n-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n-1,1}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} & -\frac{a_{n-1,2}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n-1,n-3}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} & -\frac{1}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} & -\frac{a_{n-1,n-1}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} & -\frac{a_{n-1,n}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{n-2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}^{(1)} & a_{n-1,2}^{(1)} & \dots & a_{n-1,n-1}^{(1)} & a_{n-1,n}^{(1)} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ҳисоб формулалари:

$$b_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i,n-2}^{(1)} \cdot \frac{a_{n-1,j}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} \quad (j=\overline{1,n}; j \neq n-2),$$

$$b_{i,n-2}^{(2)} = \frac{a_{i,n-2}^{(2)}}{a_{n-1,n-2}^{(2)}}, \quad a_{ij}^{(2)} = b_{ij}^{(1)} \quad (i=\overline{1,n-3}),$$

$$\alpha_{n-2, i}^{(2)} = \sum_{k=1}^n \alpha_{n-1, k}^{(1)} b_{ki}^{(1)} \quad (12')$$

Агар $\alpha_{n-2, n-3}^{(2)} \neq 0$ бўлса, у чинчи қадам, $\dots$, $\alpha_{21}^{(n-2)} \neq 0$ бўлганда $(n-1)$ -қадам бажарилади. Натижада A матрица $A^{(n-1)} = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1 = P =$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{(n-1)} & \alpha_{12}^{(n-1)} & \dots & \alpha_{1, n-1}^{(n-1)} & \alpha_{1n}^{(n-1)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Фробениус каноник шаклига келади.

Усул қўлланилиши учун навбати билан $\alpha_{n, n-1} \neq 0$, $\alpha_{n-1, n-2} \neq 0, \dots, \alpha_{21}^{(n-2)} \neq 0$ бўлиши шарт. Шарт бажарилмай қолса (норегуляр ҳол), у ҳолда алмаштиришлар қуйидагича давом эттирилади: $(n-k)$ -қадамда ҳосил қилинган $A^{(n-k)}$ матрицада $\alpha_{k, k-1}^{(n-k)} = 0$ бўлсин. 1) Агар шу элементдан чапда бирор $\alpha_{ki}^{(n-k)} \neq 0$ ($i < k-1$) бўлса, $(k-1)$ -устун i -устун билан, $(k-1)$ -сатр ҳам i -сатр билан алмаштирилади ва Данилевский усулидаги $(n-k+1)$ -қадамга ўтилади. Бу алмаштиришлар $A^{(n-k)}$ матрицани чап ва ўнг томондан U матрицага кўпайтиришдан иборат $(A^{(n-k)}U)$, бунда:

$$(i) \quad (k-1)$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots \\ & & & & & & \\ \dots & \dots & & 1 & \dots & 0 & \dots \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (i) \\ (k-1) \end{matrix}$$

Сатр	M^{-1}	$A, A(i)$	Контроль	
			$\Sigma, i = \overline{1, n}$	Σ'
1		a_{11}	a_{13}	$a_{14} = \sum_i a_{1i}$
2		a_{21}	a_{23}	$a_{24} = \sum_i a_{2i}$
3		a_{31}	a_{33}	$a_{34} = \sum_i a_{3i}$
4	M_2	$m_{21} = \frac{-a_{31}}{a_{32}}$	$m_{23} = \frac{-a_{13}}{a_{33}}$	$m_{24} = \frac{-a_{34}}{a_{32}}$
5	M_2^{-1}	$a_{11}^{(1)} = a_{11} + a_{12} m_{21}$ $a_{21}^{(1)} = a_{21} + a_{22} m_{21}$ $a_{31}^{(1)} = a_{31} + a_{33} m_{21}$	$a_{13}^{(1)} = a_{13} + a_{12} m_{23}$ $a_{23}^{(1)} = a_{23} + a_{22} m_{23}$ $a_{33}^{(1)} = a_{33} + a_{32} m_{23}$	$a_{14}^{(1)} = a_{14} + a_{12} m_{24}$ $a_{24}^{(1)} = a_{24} + a_{22} m_{24}$ $a_{34}^{(1)} = a_{34} + a_{32} m_{24}$
5'		$a_{21}^{(1)} = a_{11}^{(1)} a_{31} + a_{21}^{(1)} a_{32} + a_{33}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)} = a_{13}^{(1)} a_{31} + a_{23}^{(1)} a_{32} + a_{33}^{(1)} a_{33}$	$a_{24}^{(1)} = a_{14}^{(1)} a_{31} + a_{24}^{(1)} a_{32} + a_{34}^{(1)} a_{33}$

Стор	M^{-1}	$A, A^{(i)}$	Σ	Σ'
II	$\frac{M_1}{M_1^{-1}}$	$m_{11} = \frac{1}{a_{21}^{(1)}} \quad -1$	$m_{13} = \frac{-a_{23}^{(1)}}{a_{21}^{(1)}}$	$-1 + m_{13} + m_{15}$
7	$\frac{-a_{21}^{(1)}}{a_{21}^{(1)}}$	$a_{11}^{(2)} = a_{11}^{(1)} m_{11}$	$a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(1)} + a_{11}^{(1)} m_{13}$	$a_{15}^{(2)} = a_{15}^{(1)} + a_{11}^{(1)} m_{15}$
8	$\frac{-a_{22}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} m_{11}$	$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} + a_{21}^{(1)} m_{13}$	$a_{25}^{(2)} = a_{25}^{(1)} + a_{21}^{(1)} m_{15}$
9	$\frac{-a_{23}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}}$	$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} m_{11}$	$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} + a_{31}^{(1)} m_{13}$	$a_{35}^{(2)} = a_{35}^{(1)} + a_{31}^{(1)} m_{15}$
7'	$\frac{-a_{11}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} + \frac{-a_{21}^{(2)}}{a_{21}^{(2)}} + \frac{-a_{31}^{(2)}}{a_{31}^{(2)}} = p_1$	$\frac{-a_{12}^{(2)}}{a_{12}^{(2)}} + \frac{-a_{22}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} + \frac{-a_{32}^{(2)}}{a_{32}^{(2)}} = p_2$	$\frac{-a_{13}^{(2)}}{a_{13}^{(2)}} + \frac{-a_{23}^{(2)}}{a_{23}^{(2)}} + \frac{-a_{33}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = p_3$	$a_{14}^{(2)} = a_{14}^{(1)} + a_{11}^{(2)},$ $i = 1, 3$

2) Агар ўша $a_{k,k-1}^{(n-k)} = 0$ элементдан чапда жойлашган барча элементлар ҳам нолга тенг бўлса, яъни:

$$A^{(n-k)} = \begin{bmatrix} a_n^{(n-k)} & \dots & a_{1,k-1}^{(n-k)} & a_k^{(n-k)} & \dots & a_{1,n-1}^{(n-k)} & a_n^{(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k-i,1}^{(n-k)} & \dots & a_{k-1,k-1}^{(n-k)} & a_{k-1,k}^{(n-k)} & \dots & a_{k-1,k-1}^{(n-k)} & a_{k-1,n}^{(n-k)} \\ \hline & & 0 & a_{kk}^{(n-k)} & \dots & a_{n-1}^{(n-k)} & a_{kn}^{(n-k)} \\ & & & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & \dots & 1 & & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & P^{(n-k)} \end{array} \right]$$

бўлса, Лаплас теоремаси бўйича $\det(A^{(n-k)} - \lambda E) = \det(B - \lambda E_{k-1}) \det(P^{(n-k)} - \lambda E_{n-k+1})$ топилади, бунда $\det(P^{(n-k)} - \lambda E_{n-k+1})$ бевосита ҳисобланади, B матрицага нисбатан эса Данилевский усули қўлланилади (53-бетга қаранг).

A матрицанинг ҳар бир λ хос сонга мос $\vec{x}$ хос вектори $\vec{x} = S\vec{y}$ муносабат ёрдамида аниқланади, бунда $\vec{y}$ вектор P Фробениус матрицасининг хос вектори, $S = M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1$, $P = S^{-1} A S$, $\vec{y}$ вектор $P\vec{y} = \lambda \vec{y}$, дан яъни:

$$\begin{cases} p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n = \lambda y_1 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} = \lambda y_n \end{cases} \quad (13)$$

системадан аниқланади, Хусусан, $y_n = 1$ деб қабул қилинса, $\vec{y} = (\lambda^{n-1}, \dots, \lambda_1)$ бўлади.

3-мисол. 1-мисолда кўрсатилган

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 30 & -48 \\ 3 & 14 & -24 \\ 3 & 15 & -25 \end{bmatrix}$$

матрицанинг хос сонлари ва хос векторлари топилин.

Сатр	M^{-1}	$A, A^{(i)}$ матрицалар			Σ	Σ'
1		5	30	-48	13	
2		3	14	-24	-7	
3		3	$\overline{15}$	-25	-7	
1	M_1^{-1}	-0,2	0,066667	-1	1,666667	0,466667
4	3	-1	2,00001	2,00001	3,00002	1,00001
5	15	0,2	0,933338	-0,666662	0,466676	-0,466662
6	-25	0	1,000005	0,000005	1,000010	0,000005
5'		$\overline{0}$	-5,000025	-3,9999	16,0002	

Етакчи элемент $\overline{a_{21}^{(1)}} = 0$. Етакчилик ролини алмаштириш учун унинг чап томонида элемент ҳам йўқ (2 — нерегуляр ҳол). Ҳисоблашлар узилади. Шу жойгача

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 2,00001 & 2,00001 \\ \overline{0} & -5,000025 & -3,9999 \\ 0 & 1,000005 & 0,000005 \end{bmatrix} \text{ га эга бўлган эдик, ёки}$$

матрица элементларини бирларгача яхлитласак,

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & P^{(1)} \end{bmatrix}, \text{ ёки } P = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4$, бундан $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \text{tr } A = -(\lambda_1 + \lambda_2) = (-1 - 5) - (-4 - 1) = -1$. Иккинчи нерегуляр ҳолда хос векторларни Данилевский усули бўйича топиб бўлмайди, бошқа усулларга мурожаат қилишга тўғри келади.

Модуль бўйича энг катта бўлган битта ёки бир нечта хос сонларни топиш учун итерация усули. Ихтиёрий $\vec{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})'$ нол бўлмаган бошланғич векторни оламир

ва векторларнинг $\vec{y}^{(0)}, \vec{y}^{(k)} = A \vec{y}^{(k-1)}$ ($k = 1, 2, \dots$) рекуррент кетма-кетлигини тузамиз. А матрицанинг модуль бўйича энг катта хос сони (у каррали бўлган ҳолда ҳам)

$$\lambda_1 \approx y_i^{(k+1)} / y_i^{(k)} \quad (14)$$

бўлади. Унга мос $\vec{x}^{(1)}$ нинг қиймати нормаллаштириб олинади: $\vec{x}^{(1)} = A^k \vec{y}^{(0)} = \left(\frac{y_1^{(k)}}{\sqrt{\vec{y}^{(0)}, \vec{y}^{(0)}}}, \dots, \frac{y_n^{(k)}}{\sqrt{\vec{y}^{(0)}, \vec{y}^{(0)}}} \right)$

Агар итерациялар кетма-кетлигида мос компонентларнинг нисбатлари тартибсиз ўзгарса, ишоралар алмашиши рўй берса, бу ҳол комплекс хос сонларнинг мавжудлигидан дарак беради. Иккинчи хос сон ва хос вектор $\lambda_2 \approx (y_i^{(k+1)} - \lambda_1 y_i^{(k)}) / (y_i^{(k)} - \lambda_1 y_i^{(k-1)})$, $\vec{x}^{(2)} \approx \vec{y}^{(k+1)} - \lambda_1 \vec{y}^{(k)}$ муносабатлардан топилади.

4-мисол. $A = \begin{bmatrix} 5 & 30 & -48 \\ 3 & 14 & -24 \\ 3 & 15 & -25 \end{bmatrix}$ матрицанинг хос сон-

лари ва уларга мос хос векторлари итерация усули қўлланилиб топилсин, $\epsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}$.

Е чи ш. $\vec{y}^{(0)} = (1, 0, 0)$ бўлсин. $\vec{y}^{(i)} = A \vec{y}^{(i-1)}$ векторлар кетма-кетлигини тузамиз (жадвал) ва энг катта хос ва унга мос хос векторни топамиз:

4-мисол

Итерация усули

$\vec{y}^{(k)}$ \ A	$\begin{matrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 30 \\ 14 \\ 15 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -48 \\ -24 \\ -25 \end{matrix}$	$y_1^{(k+1)}/y_1^{(k)}$	$y_2^{(k+1)}/y_2^{(k)}$	$y_3^{(k+1)}/y_3^{(k)}$
	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$			
$\vec{y}^{(0)}$	1	0	0			
$\vec{y}^{(1)}$	5	3	3	5		
$\vec{y}^{(2)}$	-29	-15	-15	-5,8	-5	-5
$\vec{y}^{(3)}$	125	63	63	-4,3103	-4,2	-4,2
$\vec{y}^{(4)}$	-509	-255	-255	-4,072	-4,0476	-4,0476
$\vec{y}^{(5)}$	2045	1023	1023	-4,0177	-4,0118	-4,0118

$\vec{x}^{(k)}$ \ A	5 3 3	30 14 15	-48 -24 -25	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$
	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$	$y_1^{(k+1)}$	$y_2^{(k+1)}$	$y_3^{(k+1)}$
$\vec{y}^{(6)}$	-8189	-4095	-4095	-4,0044	-4,0029	-4,0029
$\vec{y}^{(7)}$	32765	16383	16383	-4,0011	-4,0007	-4,0007
$\vec{y}^{(8)}$	-131069	-66335	-65535	-4,0003	-4,0002	-4,0002
$\vec{y}^{(9)}$	524285	262143	262143	-4,00007	-4,00005	-4,00005

$$\vec{x}^{(1)} \approx \vec{y}^{(9)} = (524285; 262143; 262143)', \quad \lambda_1 = -4 \text{ ёки}$$

$$\vec{x}^{(1)} \approx (0,8165; 0,4082; 0,4082)'.$$

4-мисол

 λ_1 нм ҳисоблаш

$y_i^{(9)}$	$\lambda_1 y_i^{(8)}$	$y_i^{(9)} - \lambda_1 y_i^{(8)}$	$y_i^{(8)}$	$\lambda_1 y_i^{(7)}$	$y_i^{(8)} - \lambda_1 y_i^{(7)}$	λ_2
524285	524276	9	-131069	-131060	-9	-1
262143	262140	3	-65535	-65532	-3	-1
262143	262140	3	-65535	-65532	-3	-1

$$\lambda_2 = -1, \quad \vec{x}^{(2)} \approx \vec{y}^{(9)} - \lambda_1 \vec{y}^{(8)} = (9; 3; 3)', \quad \lambda_3 = 5 + 14 - 25 = -1.$$

$\vec{x}^{(3)}$ ни топиш учун $\vec{y}^{(0)}$ бошланғич вектор бошқача танла-
нишни лозим.

Итерация усули қўлланилиб мусбат аниқланган симметрик матрицанинг хос сонлари ва хос векторларини излашда характеристик кўпхад илдизларининг ҳақиқий ва мусбат бўлиши, хос векторлар ҳақиқий бўлиши ва ортогоналлик шартини (яъни $(\vec{x}^{(i)}, \vec{x}^{(j)}) = \sum_{k=1}^n x_k^{(i)} x_k^{(j)} = 0, \quad i \neq j$ бўлиш шартини)

қаноатлантириши эътиборга олинад. $\vec{x}^{(1)}$ биринчи хос векторни топиш мақсадида $\vec{A}\vec{x}^{(1)} = \lambda_1 \vec{x}^{(1)}$ га асосланиб, ушбу система тузилади:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1) x_1^{(1)} + a_{12} x_2^{(1)} + \dots + a_{1n} x_n^{(1)} = 0, \\ a_{21} x_1^{(1)} + (a_{22} - \lambda_1) x_2^{(1)} + \dots + a_{2n} x_n^{(1)} = 0, \\ \vdots \\ a_{n1} x_1^{(1)} + a_{n2} x_2^{(1)} + \dots + (a_{nn} - \lambda_1) x_n^{(1)} = 0 \end{cases} \quad \text{ёки}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1} (a_{11} x_1^{(1)} + a_{12} x_2^{(1)} + \dots + a_{1n} x_n^{(1)}), \\ \dots \\ x_{n-1}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1} (a_{n-1,1} x_1^{(1)} + a_{n-1,2} x_2^{(1)} + \dots + a_{n-1,n} x_n^{(1)}), \end{cases} \quad (14)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{x_n^{(1)}} (a_{n1} x_1^{(1)} + a_{nn} x_n^{(1)})$$

Хос компонентларнинг ҳаммасини бирор сонга кўпайтириш ёки бўлиш мумкин. Шунга кўра $x_n^{(1)} = 1$ деб оламиз. Система n та $\lambda_1, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{n-1}^{(1)}$ номаълумли n та тенгламадан иборат бўлиб қолади. Бу номаълумлар системадан итерация йўли билан топилади. Энди λ_2 ва $\vec{x}^{(2)}$ ни топниш мақсадида юқорида кўрсатилганига ўхшаш равишда $\lambda_2 x_i^{(2)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(2)} (i=\overline{n})$ система тузилади ва $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}) = \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{(1, m)} / x_j^{(2)} + x_n^{(2)} = 0$ ортогоналлик шартидан фойдаланган ҳолда компоненталарнинг бирортаси, масалан $x_n^{(2)}$ ни бошқалари орқали ифодаланади. Худди шу $x_n^{(2)}$ компонента системага қўйилади. Натижада:

$$\begin{cases} x_i^{(2)} = \frac{1}{\lambda_2} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}^{(1)} x_j^{(2)} (i=\overline{1, n-2}), \\ \lambda_2 = \frac{1}{x_{n-1}^{(2)}} \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1,j}^{(1)} x_j^{(2)}, \quad a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{in} x_j^{(1, m)}, \quad m=0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (15)$$

Бу $(n-1)$ - тартибли системадан иборат. Унга $x_{n-1}^{(2)} = 1$ қўйилаб, қолган $\lambda_2, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_{n-2}^{(2)}$ номаълумлар итерация йўли билан аниқланади. Шунга ўхшаш қолган хос сон ва хос векторлар изланади.

5-мисол. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ матрицанинг хос сонлари ва

хос векторлари $\epsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}$ аниқлик билан топилсин.

Ечиш. Матрица симметрик ва мусбат аниқланган (Сильвестр шартлари бажарилади): $D_1 = 3 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 12 > 0, D_3 = \det A = 93 > 0.$ (14) системани тузамиз:

$$\begin{cases} 3x_1^{(i)} + 2x_2^{(i)} + 2x_3^{(i)} = \lambda_i x_1^{(i)}, \\ 2x_1^{(i)} = 6x_2^{(i)} + x_3^{(i)} = \lambda_i x_2^{(i)}, \\ 2x_1^{(i)} + x_2^{(i)} + 8x_3^{(i)} = \lambda_i x_3^{(i)}, \end{cases} \quad (16)$$

бунга $i = 1, x_3^{(1)} = 1$ қўйилса,

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1} (3x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} + 2), \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1} (2x_1^{(1)} + 6x_2^{(1)} + 1), \\ \lambda_1 = 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + 8. \end{cases} \quad (16')$$

Бошланғич яқинлашиш сифатида $x_1^{(1,0)} = 1, x_2^{(1,0)} = 1$ ни олайлик. $\lambda_1^{(0)} = 11$ бўлади. $\|B\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{5}{11}, \frac{8}{11} \right) = \frac{8}{11} < 1$, итерация жараёни яқинлашади.

5- мисол

Итерация усули

k	$x_1^{(1,k)}$	$x_2^{(1,k)}$	$\lambda_1^{(k)}$	k	$x_1^{(1,k)}$	$x_2^{(1,k)}$	$\lambda_1^{(k)}$
0	1	1	11	8	0,48111	0,56434	9,52657
1	0,63636	0,81818	10,09091	9	0,47992	0,56141	9,52126
2	0,54955	0,71171	9,81081	10	0,47920	0,55962	9,51802
3	0,51699	0,64922	9,68320	11	0,47876	0,55853	9,51605
4	0,50081	0,61233	9,61394	12	0,47849	0,55787	9,51485
5	0,49169	0,59035	9,58733	13	0,47832	0,55747	9,51412
6	0,48631	0,57715	9,54976	14	0,47822	0,55721	9,51367
7	0,48307	0,56918	9,53632	15	0,47816	0,55707	9,51340

$$\vec{x}^{(1)} = (0,478; 0,557; 1)', \lambda_1 = 9,513.$$

λ_2 ва $\vec{x}^{(2)}$ ни топиш мақсадида (16) системага $i=2$ ни қўямиз. $\vec{x}^{(1)}$ ва $\vec{x}^{(2)}$ векторларнинг ортогоналлигидан: $0,478 x_1^{(2)} + 0,557 x_2^{(2)} + 1 \cdot x_3^{(2)} = 0$, ёки $x_3^{(2)} = -0,478 x_1^{(2)} - 0,577 x_2^{(2)}$. Агар $x_2^{(2)} = 1$ деб олсак,

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{\lambda_2} (2,044 x_1^{(2)} + 0,886), \lambda_2 = 1,522 x^{(2)} + 5,443. \quad (16'')$$

Бошланғич яқинлашиш сифатида $x_1^{(2,0)} = 1$ ни олайлик, $\lambda_2^{(0)} = 6,965$ бўлади. $\vec{x}^{(2)}$ ва λ_2 ни итерация усулини қўллаб, (16'') системадан топамиз:

k	$x_1^{(2,k)}$	$x_2^{(2,k)}$	$\lambda_2^{(k)}$	k	$x_1^{(2,k)}$	$x_2^{(2,k)}$	$\lambda_2^{(k)}$
0	1	1	6,965				
1	0,42067	1	6,08327	6	0,23613	1	5,80239
2	0,28699	1	5,87980	7	0,23588	1	5,80201
3	0,25045	1	5,82419	8	0,23580	1	5,80189
4	0,24002	1	5,80831	9	0,23578	1	5,80186
5	0,23701	1	5,80372	10	0,23578	1	5,80185

$x_3^{(2)} = -0,478 \cdot 0,23578 - 0,557 \cdot 1 = -0,66970$. Шундай қилиб, $\vec{x}^{(2)} = (0,236; 1; -0,670)'$, $\lambda_2 = 5,802$.

Учинчи $\vec{x}^{(3)}$ хос векторни аниқлашда $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(3)}) = 0$ ва $(\vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}) = 0$ ортогоналлик хусусиятлардан фойдаланамиз: $0,478 x_1^{(3)} + 0,557 x_2^{(3)} + x_3^{(3)} = 0,0236 x_1^{(3)} + x_2^{(3)} - 0,670 x_3^{(3)} = 0$. Бу системага $x_3^{(3)} = 1$ ни қўямиз. Натижада $\vec{x}^{(3)} = (-3,962; 1,605; 1)$, сўнг (16) системанинг охири тенгласидан $i = 3$ да $\lambda_3 = 1,690$ ни аниқлаймиз.

МАШҚЛАР

Матрицаларнинг хос сонлари ва хос векторлари детерминантларни тўғридан-тўғри ҳисоблаш усули билан топилсин:

$$\begin{aligned}
 1. A &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad 2. A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \\
 3. A &= \begin{bmatrix} 10 & 2 & 10 \\ -2 & -1 & -6 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad 4. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \\
 5. A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 7 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad 6. A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Матрицаларнинг хос сонлари ва хос векторлари Қрилов, Леверрье, Данилевский усуллари қўлланилиб топилсин:

$$\begin{aligned}
 7. A &= \begin{bmatrix} 1 & 1,2 & 2,5 & 3 \\ 1,2 & 1 & 2 & 1 \\ 2,5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1,2 \end{bmatrix}, \quad 8. A = \begin{bmatrix} 1,5 & 2,5 & 3,5 & 4,5 \\ 2,5 & 3 & 2,1 & 3,1 \\ 3,5 & 2,1 & 4 & 1 \\ 4,5 & 3,1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$9. A = \begin{bmatrix} 1,12 & 0,32 & 0,21 & 0,11 \\ 0,32 & 2,12 & 3,12 & -0,8 \\ 0,18 & 0,24 & 4 & 0,26 \\ 0,24 & 0,56 & 0,6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$10. A = \begin{bmatrix} 0,51 & -2 & 0,4 \\ 2 & 0,6 & 3 & -0,6 \\ 0,80,7 & 2 & -0,2 \\ 1,20,5 & 2,2 & 6 \end{bmatrix} \quad 11. A = \begin{bmatrix} 1,75 & 1,72 & 3,32 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0,25 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$12. A = \begin{bmatrix} 2 & 0,5 & 1,3 & -1 \\ 0,4 & 3 & 0,6 & 0,8 \\ 0,5 & 0,7 & 4 & 0,9 \\ 0,8 & 0,9 & 1,2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$13. A = \begin{bmatrix} -3,2 & 2,2 & 2,4 & 3,5 \\ -1,3 & 2,3 & 3 & 0,2 \\ 6,22 & 0,14 & 2 & -2,45 \\ 6 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$14. A = \begin{bmatrix} 2,00 & 0,34 & 0,22 & 0,25 \\ 1,56 & 2 & 0,43 & 0,18 \\ 0,34 & 5 & -0,26 & 0,65 \\ 3 & 0,16 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Итерациялар усули қўлланилиб матрицаларнинг модуль бўйича энг катта хос сон ва унга мос хос вектори топилсин:

$$15. A = \begin{bmatrix} 3,8 & 1 & 1,8 \\ 1 & 3,4 & 1,8 \\ 1,8 & 1,8 & 3,9 \end{bmatrix} \quad 16. A = \begin{bmatrix} 4,2 & 1 & 2,3 \\ 1 & 4,4 & 2 \\ 2,3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$17. A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad 18. \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$19. A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,9 & 0,1 \\ 0,9 & 2,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 1 \end{bmatrix} \quad 20. A = \begin{bmatrix} 2,4 & 1 & 1,1 \\ 1 & 3,2 & 1,2 \\ 1,1 & 1,2 & 3,6 \end{bmatrix}$$

21. Агар барча $\vec{x}$ хос векторлар учун $(A\vec{x}, \vec{x}) > 0$ бўлса, у ҳолда λ га боғлиқ бўлмаган шундай доимий $\delta > 0$ сон мавжудки, барча $\vec{x}$ ларда $(A\vec{x}, \vec{x}) \geq \delta(\vec{x}, \vec{x})$ бўлади. Исбот қилинг.

22. Агар A ва B бир хил тартибли квадрат матрица бўлса, у ҳолда $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ матрицанинг характеристик кўп-ҳади $A + B$ ва $A - B$ матрицалар характеристик кўпҳадларининг кўпайтмасига тенглигини исбот қилинг.

23. Ихтиёрий A матрица ва α сон учун A ва $A - \alpha E$ матрицалар бир хил хос векторга эга бўлишини кўрсатинг.

5-ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

1) Матрицаларнинг хос сонлари ва хос векторлари топилсин. Ҳисоблашлар ЭХМ да бажарилсин, $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-5}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1,25 + \alpha & 1,2 & 0,48 & 0,12 \\ 1,2 & 2,1 + \beta & 0,3 & 0,18 \\ 0,48 & 0,3 & 2,4 + \alpha & 0,16 \\ 0,12 & 0,18 & 0,16 & 3,2 + \beta \end{bmatrix}$$

2) Матрицаларнинг модуль бўйича энг катта хос сони ва унга мос хос вектори топилсин:

$$B = \begin{bmatrix} 2,1 + \gamma & -1 & 0,3 & 0,5 \\ -1 & 2,2 + \gamma & 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 & 2,3 + \gamma & 0,7 \\ 0,5 & 0,6 & 0,7 & 2,4 + \gamma \end{bmatrix}$$

Var. №	α	β	γ	Var. №	α	β	γ	Var. №	α	β	γ
1	0,8	0,1	0,2	9	1,4	0,2	0,5	17	1,4	0,6	0,88
2	0,9	0,2	0,6	10	1,4	0,4	0,68	18	1,5	0,42	0,76
3	0,8	0,3	0,3	11	1,4	0,5	0,58	19	1,6	2	2
4	0,9	0,1	0,9	12	1,5	0,2	0,66	20	1,8	3	2,2
5	1,1	0,2	0,22	13	1,5	0,3	0,7	21	1,8	4	2,1
6	1,2	0,1	0,32	14	1,24	0,4	0,73	22	2,2	2	2,4
7	1,3	0,2	0,8	15	1,36	0,5	0,78	24	2,3	1	2,3
8	1,3	0,1	0,4	16	1,38	0,6	0,8	25	2,4	1	2,5

6-606. ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛАШ

Бирор $y = f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда $y_k = f(x_k) (k = \overline{0; n})$ жадвал қийматлари билан берилган бўлсин ва уни шу оралиқда интерполяцияловчи

$$y = P_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i \quad (1)$$

кўпхадни тузиш талаб қилинсин. Унинг c_i коэффициентлари

$$\sum_{i=0}^n c_i x_k^i = y_k \quad (k = \overline{0; n}) \quad (2)$$

тенгламалар системасидан аниқланиши мумкин. Лекин бунинг учун одатда бевосита махсус формулалардан (масалан, $L_n(x)$ Лагранж, $N(x)$ Ньютон формулаларидан) фойдаланилади.

Лагранж интерполяцион кўпхадни ушбу кўринишга эга бўлади:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)} y_j, \quad (3)$$

ёки $\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i) = (x-x_0)\dots(x-x_n)$, $\omega'(x) = \sum_{k=0}^n \prod_{i \neq k} (x-x_i)$ белгилашлар киритилса:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\omega(x)}{\omega'(x_j)(x-x_j)} y_j \quad (3')$$

Агар $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = h = \text{const}$ бўлса, у ҳолда x_0 дан x гача қадамлар сони $t = \frac{x-x_0}{h}$, x_0 дан x_j гача қадамлар сони $j = \frac{x_j-x_0}{h}$, у ҳолда $x-x_j = h(i-j)$, $\omega(x) = h^{n+1} t(t-1)\dots(t-n)$, $\omega'(x_j) = (-1)^{n-j} j! (n-j)! h^n$ бўлади. Натижада:

$$L_n(x) = t(t-1)\dots(t-n) \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j} y_j}{(t-j) j! (n-j)!} \quad (3'')$$

$L_n(x)$ формуланинг хатоси:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{(n+1)}}{(n+1)!} |\omega(x)|, \quad (4)$$

бунда $M_{n+1} = \max_{[a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)|$, $\xi \in [a, b]$.

Кўрсатилган $y = f(x)$ функциянинг x нуктадаги қийматини топиш талаб қилинганида Эйткен схемасидан («чиллики» кўпайтиришдан) фойдаланиш ҳисоблашларни енгиллаштирилади:

$x_0 \rightarrow x \quad y_0$
 $x_1 \rightarrow x \quad y_1 \quad L_{(01)}(x)$
 $x_2 \rightarrow x \quad y_2 \quad L_{(12)}(x) \quad L_{(012)}(x)$
 $x_3 \rightarrow x \quad y_3 \quad L_{(23)}(x) \quad L_{(123)}(x) \quad L_{(0123)}(x)$
 $\dots$
 $x_n \rightarrow x \quad y_n \quad L_{(n-1, n)}(x) \quad L_{(n-2, n-1, n)}(x) \quad L_{(n-3, n-2, n-1, n)}(x) \quad L_{(n-4, \dots, n)}(x) \dots$
 Бундаги ҳар қайси $L_{(0,1 \dots k)}(x)$ белги $x_0, x_1, \dots, x_k$ тугунлар бўйича тузилган $L_n(x)$ Лагранж интерполяцион кўпҳадининг x нуктадаги қийматини ифодалайди ва улар қуйидаги формулалар бўйича топилади:

$$L_{(01)}(x) = \frac{(x_1 - x)y_0 - (x_0 - x)y_1}{x_1 - x_0},$$

$$L_{(12)}(x) = \frac{(x_2 - x)y_1 - (x_1 - x)y_2}{x_2 - x_1},$$

$\dots$

$$\begin{aligned}
 L_{(01k)}(x) &= \frac{(x_1 - x)L_{(0k)}(x) - (x_0 - x)L_{(1k)}(x)}{x_1 - x_0} = \\
 &= \frac{(x_k - x)L_{(0,1)}(x) - (x_1 - x)L_{(0k)}(x)}{x_k - x_1},
 \end{aligned}$$

ва ш. ғ.

1-мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt{x}$ функциянинг $f(100) = 10$, $f(121) = 11$, $f(144) = 12$ қийматлари маълум. Лагранж интерполяцион формуласидан фойдаланиб $f(115)$ қийматини қандай аниқликда топиш мумкин? $f(115)$ топилсин.

Ечиш. 1) $f''' = \frac{3}{8} x^{-5/2}$, $M_3 = \frac{3}{8} \cdot 100^{-5/2} = \frac{3}{8} \cdot 10^{-5}$,

$$\begin{aligned}
 |R_3(x)| &\leq \frac{3}{8} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{3!} |(115 - 100)(115 - 121)(115 - 144)| \approx \\
 &\approx 1,6 \cdot 10^{-3}.
 \end{aligned}$$

2)

i	$x_i - x$	y_i	$L(i, i+1)$	$L(i, i+1, i+2)$
0	-15	10		
1	6	11	10,714285	
2	29	12	10,73913	10,7178

$f(115) \approx 10,72$.

$x_i \in [a, b]$ тугунлар шундай танланиши керакки,

$\max_{[a, b]} |\omega(x)| = \min_{[x_0, \dots, x_n]} \max_{[a, b]} |\omega(x)|$ бўлсин, яъни интерполяциялаш

хатоси энг минимал бўладиган бўлсин. $[-1; 1]$ кесмада бундай оптимал тугунлар $T_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} \cos((n+1) \arccos x)$ Чебишев 1-жинс кўпҳадининг

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (5)$$

илдизларидан иборатдир. Ихтиёрий $[a, b]$ кесма учун оптимал тугунлар

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \quad (k = \overline{0, n}) \quad (6)$$

формула бўйича изланади.

Бўлинган айирмалар. x_i, x_j тугунлар билан берилган биринчи тартибли бўлинган айирма:

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j},$$

x_i, x_j, x_m тугунлар бўйича тузилган иккинчи тартибли бўлинган айирма:

$$f(x_i, x_j, x_m) = \frac{f(x_j, x_m) - f(x_i, x_j)}{x_m - x_i},$$

умуман, $(k-1)$ -тартибли бўлинган айирма:

$$f(x_0, \dots, x_k) = \frac{f(x_1, \dots, x_k) - f(x_0, \dots, x_{k-1})}{x_k - x_0}.$$

Ҳисоблашларда қуйидаги муносабатдан ҳам фойдаланилади:

$$f(x_0, \dots, x_k) = \frac{f^{k+1}(\xi)}{(k+1)!}, \quad x_0 \leq \xi \leq x_k.$$

Ньютоннинг бўлинган айирмалли интерполяцион кўпҳади
қуйидаги кўринишда тузилади:

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \dots + \\ + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}), \quad (7)$$

$$R_n(x) = f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \quad (8)$$

Формулани тузиш жараёнида Эйткен схемасидан фойдаланиш мумкин.

2-мисол. $y = f(x)$ функциянинг қуйидаги жадвалда берилган қийматлари бўйича $N_n(x)$ Ньютон формуласи тузилсин ва $f(3,7608)$ қиймати топилсин.

x	0	2,5069	5,0154	7,5270
y	0,3989423	0,3988169	0,3984408	0,3978138

Ечиш. Бўлинган айирмалар жадвалини тузамиз:

x_n	f_n	$f(x_n, x_{n+1})$	$f(x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$	$f(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3})$
0	0,3989423	$-5 \cdot 10^{-5}$	$-1,99 \cdot 10^{-5}$	0
2,5069	0,3988169	$-14,99 \cdot 10^{-5}$	$-1,99 \cdot 10^{-5}$	
5,0154	0,3984408	$-24,96 \cdot 10^{-5}$		
7,5270	0,3978138			

$$N(x) = 0,3989423 - 0,0000500x - 0,0000199x(x - 2,5069), \\ f(3,7608) \approx N(3,7608) = 0,39903658 \approx 0,399037.$$

3-мисол. $S(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ ($n = 1, 2, \dots$)
чекли қатор йиғилсин.

Ечиш.

3-мисол

Бўлинган айирмалар

n	$S(n)$	$S(n, n+1)$	$S(n, n+1, n+2)$	$S(n, n+1, n+2, n+3)$	$S(n, \dots, n+4)$
1	1	$5-1=4$	$(9-4)/(3-1)=2,5$	$(3,5-2,5)/(4-1)=1/3$	0
2	5	9	$(16-9)/(4-2)=3,5$	$1/3$	0
3	14	16	$(25-16)/(5-3)=4,5$	$1/3$	
4	30	25	$(36-25)/(6-4)=5,5$		
5	55	36			
6	91				

$S(n)$ учинчи даражали кўпхад экан. (17) формула бўйича:

$$S(n) = S(1) + S(1; 2)(n-1) + S(1, 2, 3)(n-1)(n-2) + \\ + S(1, 2, 3, 4)(n-1)(n-2)(n-3) = 1 + 4(n-1) + \\ + 2,5(n-1)(n-2) + \frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3) = 1 + 4n -$$

$$- 4 + 2,5n - 7; 5n + 5 + \frac{1}{3}n^3 - 2n^2 + \frac{11}{3}n - 2 = \\ = \frac{1}{3}n^3 + 0,5n^2 + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Чекли айирмалар: $f_{i+1} - f_i = \Delta f_i = \nabla f_{i+1} = \delta f_{i+1/2} =$
 $= f'_{i+1/2}$, умуман,

$$\Delta^k f_i = \Delta(\Delta^{k-1} f_i) = \Delta^{k-1}(\Delta f_i) = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i,$$

$$\nabla^k f_i = \dots = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}, \quad \delta^k f_i = \dots$$

$$= \delta^{k-1} f_{i+1/2} - \delta^{k-1} f_{i-1/2},$$

$$f_i^k = f_{i+1/2}^{k-1} - f_{i-1/2}^{k-1}.$$

Айирмалар жадвали

x	f	f'	f''	f'''	$f^{(4)}$
x_0	f_0	$f'_{1/2}$	f''_1	$f'''_{3/2}$	$f^{(4)}_2$
x_1	f_1	$f'_{3/2}$	f''_2	$f'''_{5/2}$	
x_2	f_2	$f'_{5/2}$	f''_3		
x_3	f_3	$f'_{7/2}$			
x_4	f_4				

Бўлинган айирма ва чекли айирма орасидаги муносабат:

$$f(x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{f_{i+k/2}^k}{h^k k!} = \frac{\Delta^k f_i}{h^k k!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Агар (7) — (8) Ньютон бўлинган айирмали интерполяцион кўпхадидида бўлинган айирмалар чекли айирмалар билан алмаштирилса, $x_i = x_0 + ih$ ($h = \text{const}$, $i = 0, 1, \dots, n$) тугунлар бўйича Ньютон 1-формуласи олинади:

$$N_1(x) = f_0 + t f'_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2} f''_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f'''_{3/2} + \\ \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-(n-1))}{n!} f^{(n)}_{n/2}, \quad (7')$$

Қолдиқ ҳади:

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t-1) \dots (t-n) \quad (8')$$

Ньютон 2-интерполяция формуласи ($x_i = x + ih$, $h = \text{const}$, $i = \overline{0, n}$):

$$N_{II}(x) = f_0 + f_{-1/2}^1 + f_{-1}^2 \frac{t(t+1)}{2!} + \dots + f_{-n/2}^n \frac{t(t+1) \dots (t+(n-1))}{n!}, \quad (7'')$$

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t+1) \dots (t+n) \quad (8'')$$

Гаусс формулалари: 1) жами $2n+1$ та $x_0, x_0+h, x_0-h, \dots, x_0+n, x_0-nh$ тугун бўйича

$$G_I(x) = f_0 + f_{1/2}^1 t + f_0^2 \frac{t(t-1)}{2} + f_{1/2}^3 \frac{t(t-1)}{3!} + \dots + f_{1/2}^{2n-1} \frac{t(t^2-1) \dots (t^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!} + f_0^{2n} \frac{t(t^2-1) \dots (t^2-(n-1)^2)(t+n)}{(2n)!} \quad (9)$$

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi) h^{2n+1}}{(2n+1)!} t(t^2-1) \dots (t^2-n^2). \quad (10)$$

2) $x_0, x_0-h, x_0+h, \dots, x_0-nh, x_0+nh$ тугунлар бўйича

$$G_{II}(x) = f_0 + f_{1/2}^1 t + f_0^2 \frac{t(t+1)}{2!} + f_{-1/2}^3 \frac{t(t^2-1)}{3!} + \dots + f_{-1/2}^{2n-1} \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2) \dots (t^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!} + f_0^{2n} \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2) \dots (t^2-(n-1)^2)(t+n)}{(2n)!} \quad (9')$$

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} h^{2n+1} t(t^2-1)(t^2-2^2) \dots (t^2-n^2). \quad (10')$$

Стирлинг формуласи:

$$S(x) = f_0 + \mu f_0^1 t + f_0^2 \frac{t^2}{2} + \dots + \mu f_0^{2n-1} \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2) \dots (t^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!} + f_0^{2n} \frac{t(t^2-1) \dots (t^2-(n-1)^2)}{(2n)!}, \quad (11)$$

бунда $\mu f_0^{2n-1} = 0,5 (f_{1/2}^{2n-1} + f_{-1/2}^{2n-1})$. Қолдиқ ҳади:

$$R_{2n}(x) = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} t(t^2-1)(t^2-2^2) \dots (t^2-n^2). \quad (12)$$

Бессел формуласи: агар $\frac{1}{2} (f_0^{2n} + f_1^{2n}) = \mu f_{1/2}^{2n}$ деб қўйилса, ушбу кўринишга келади:

$$\begin{aligned} B(x) = & \mu f_{1/2} + f_{1/2}^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) + \mu f_{1/2}^2 \frac{t(t-1)}{2!} + \dots + \\ & + \mu f_{1/2}^{2n} \frac{t(t^2-1) \dots (t^2-(n-1)^2)(t-n)}{(2n)!} + \\ & + f_{1/2}^{2n+1} \frac{t(t^2-1) \dots (t^2-(n-1)^2)(t-n) \left(t - \frac{1}{2} \right)}{(2n+1)!}, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{2n+2}(x) = & \frac{h^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} t(t^2-1) \dots (t^2- \\ & - n^2)(t-(n+1)) \end{aligned} \quad (14)$$

Стирлинг ва Бессел формуллари Гаусс формулларида келтириб чиқарилади. $|t| \leq 0,25$ бўлган ҳолда Стирлинг, $0,25 \leq t \leq 0,75$ да эса Бессел формуласидан фойдаланиш маъқул. Ньютон формуллари бўйича жадвалнинг боши ва охиридаги, Бессел ва Стирлинг формуллари бўйича эса жадвалнинг ўртасидаги қийматларга асосланиб интерполяцион кўпхад тузиш мумкин.

Математик жадвал тузишда h қадамни шундай танлайдиларки, натижада интерполяциялаш хатоси тайинланган ε қийматдан ортмасин. Масалан, $0 \leq t \leq 1$ да $y_3(t) = t(t-1)\left(t - \frac{1}{2}\right)$ ва $y_4(t) = t(t^2-1)(t-2)$ кўпхадларнинг қолдиқ ҳадлари

$$R(x) = \frac{M_3 h^3}{72 \sqrt{3}} + \frac{3 M_4 h^4}{128} \leq \varepsilon \quad (15)$$

бўлиши керак, бунда $\max y_3(t) = \frac{1}{12 \sqrt{3}}$, $\max y_4(t) = \frac{9}{128}$.

4-мисол. Бессел формуласи қўлланилиб, $f(x) = e^x$ функциянинг [2; 3] да ётган қийматлари жадвалини $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-5}$ аниқликда тузиш учун h қадам қандай катталиқ билан олиниши керак?

Ечиш. (25) дан фойдаланамиз. $f^{III}(x) = f^{IV}(x) = e^x$,

$M_3 = M_4 = \max_{[2; 3]} e^x = e^3 = 20,085535$, $R(x) \approx 20,20 \left(\frac{h^3}{72 \sqrt{3}} + \frac{3h^4}{128} \right) \leq \leq 0,5 \cdot 10^{-5}$, бундан $h \approx 0,03$.

Экстраполяциялаш бир-икки қадамгача чегараларда ба- жарилади. Шу мақсадда жадвал бошида $N_1(x)$ формуладан, жадвалнинг охирида $N_{11}(x)$ формуладан фойдаланиш мумкин.

Икки аргументли $z = f(x, y)$ функцияни (x_i, y_k) нуқта- лар тўпламида интерполяциялаш. Дастлаб бирор $y_m = \text{const}$ жадвал қийматида $f(x, y_m)$ функция x бўйича интерполя- цияланади. Натижада y нинг кўрсатилган қиймати бўйича z нинг $\Delta^1 z$ чекли айирмалар жадвали тузилади. Шундан сўнг z функция y бўйича интерполяция қилинади. Уч ва ундан ортиқ ўзгарувчили функциялар ҳам шунга ўхшаш тартибда интерполяция қилинади. Маълум бир $P(x, y)$ ин- терполяцияон кўпхад тузилиши талаб қилинган ҳолда x ва y га нисбатан шу турдаги формулалар алоҳида-алоҳида ту- зилиб, бири иккинчисига қўйилади.

5-мисол. $z = f(x, y)$ функциянинг қўш жадвали берил- ган. $z = f(0,5; 0,03)$ ҳисоблансин.

$x \backslash y$	0,4	0,7	1,0
0,00	2,500	1,429	1,000
0,05	2,487	1,419	0,995
0,10	2,456	1,400	0,981

Ечиш. 1) y нинг ҳар қайси жадвал қийматига мос ра- вишда z нинг чекли айирмалар жадвалини тузамиз ($h = 0,3$):

$y = 0,00$

x	z	Δz	$\Delta^2 z$
0,4	2,500	-1,071	0,642
0,7	1,429	-0,429	
1,0	1,000		

$y = 0,05$

x	z	Δz	$\Delta^2 z$
0,4	2,487	-1,068	0,644
0,7	1,419	-0,424	
1,0	0,995		

$y = 0,10$

x	z	Δz	$\Delta^2 z$
0,4	2,456	-1,056	0,637
0,7	1,400	-0,419	
1,0	0,981		

2) $x_0 = 0,4$ бошланғич тугун бўлсин. У ҳолда:

$$t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0,5 - 0,4}{0,3} = \frac{1}{3}.$$

3) Қолган ҳисоблашларни $N_1(x)$ бўйича бажарамиз:

$$f(0,5; 0,00) = 2,500 - \frac{1}{3} \cdot 1,071 + \frac{1/3 \cdot (-2/3)}{3} \cdot 0,642 = 2,072,$$

$$f(0,5; 0,05) = 2,487 - \frac{1}{3} \cdot 1,068 - \frac{1}{9} \cdot 0,642 = 2,069,$$

$$f(0,5; 0,10) = 2,456 - \frac{1}{3} \cdot 1,056 - \frac{1}{9} \cdot 0,637 = 2,033,$$

$$x = 0,5$$

y	z	Δz	$\Delta^2 z$
0,00	2,072	-0,003	-0,033
0,05	2,069	-0,036	
0,10	2,033		

$y_0 = 0,00$ дан $y = 0,03$ гача оралиқ учун $p = (0,03 - 0) / 0,05 = 0,6$. У ҳолда:

$$f(0,5; 0,03) = 2,072 + 0,6 \cdot (-0,003) + \frac{0,6(0,6-1)}{2!} \cdot (-0,033) = 2,074.$$

Тескари интерполяциялашда итерация усули қўлланилиши мумкин. Бунинг учун, масалан, $y = f(x) \approx N_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1) \dots (t-n+1)$ кўпхад $t = \varphi(t)$ кўринишига келтирилади: $t = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2! \Delta y_0} t(t-1) - \dots$, бунда $t_0 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0}$ — бошланғич яқинлашиш.

6-мисол. Ушбу $y = \lg x$ функциянинг қуйидаги қийматлар жадвали бўйича x нинг $y = 1,35$ га мос қиймати топилсин:

x	20	25	30
y	1,3010	1,3979	1,4771

Ечиш.

x	y	$\Delta y \cdot 10^{-4}$	$\Delta^2 y \cdot 10^{-4}$
20	1,3010	969	-177
25	1,3979	792	
30	1,4771		

$$y_0 = 1,3010, t_0 = (y - y_0) / \Delta y_0 = (1,35 - 1,3010) / 0,0969 = 0,506,$$

$$t_1 = 0,506 + \frac{177}{2,969} \cdot 0,506(0,506 - 1) = 0,506 - 0,023 = 0,483,$$

$$t_2 = 0,506 + \frac{177}{2,969} \cdot 0,483(0,483 - 1) = 0,506 - 0,023 = 0,483,$$

$$t = 0,483, x = x_0 + th = 20 + 0,483 \cdot 5 = 22,42.$$

Ҳар хил узоқлашган тугунлар ҳолида $L_n(x)$, бўлинган айирмали $N(x)$ ва бошқа формулалар қўлланилади. Бунинг учун формуладаги x ва y жойлари алмаштирилади.

7-мисол. Ушбу $f(x) = x^2 + \ln x = 0$ тенгламанинг $[0,5; 1]$ оралиқда ётган илдизи топилсин.

Ечиш. $f(0,5) < 0, f(1) > 0$. Қадам $h = 0,05$.

7-мисол

$f(x)$ қийматлар жадвали

x	x^2	$\ln x$	$f(x)$	x	x^2	$\ln x$	$f(x)$
0,50	0,25	-0,6932	-0,4432	0,80	0,64	-0,1232	0,4169
0,55	0,3025	-0,5979	-0,2954	0,85	0,7225	-0,1625	0,5600
0,60	0,36	-0,5108	-0,1508	0,90	0,81	-0,1054	0,7046
0,65	0,4225	-0,4308	-0,0683	0,95	0,9025	-0,0513	0,8512
0,70	0,49	-0,3567	0,1333	1,00	1,0000	0,0000	1,0000
7,75	0,5625	-0,2877	0,2748				

$f(0,65) \cdot f(0,70) < 0$ бўлмоқда. $x_0 = 0,65, x_1 = 0,70$ деб оламиз. Шундай x^* ни топамизки, унда $y^* = 0$ бўлсин.

7-мисол

Тенгламани Эйткен схемаси билан ечиш

i	$\frac{y_i}{y_i - 0}$	x_i	$L(i-1, i)$	$L(i-2, i-1, i)$	$L(i-3, \dots, i)$	$L(i-4, \dots, i)$	$L(i-5, \dots, i)$
0	-0,0083	0,65					
1	0,1333	0,7	0,652931				
2	0,2748	0,75	0,652898	0,652930			
3	0,4169	0,8	0,653308	0,652705	0,652925		
4	0,5600	0,85	0,654333	0,652320	0,652644	0,652921	
5	0,7046	0,9	0,656362	0,651391	0,653861	0,652561	0,652915
6	0,8512	0,95	0,659686	0,649970	0,652755	0,654387	0,651984
7	1,0000	1	0,663978	0,649448	0,650635	0,654171	0,654431
i	$L(i-6, \dots, i)$		$L(i-7, \dots, i)$				
6	0,652906						
7	0,651608		0,652895				

$$y^* \approx 0,6529, \varepsilon = -5,0 \cdot 10^{-5}.$$

Берилган $f(x)$ функцияни сонли дифференциаллаш масаласи $f(x)$ силлиқ ўзгарувчан бўлган чегараларда $f^{(m)}(x) \approx \approx P_n^m(x)$ ($m \leq n$) тақрибий тенгликдан фойдаланишга асосланади, $P_n(x)$ — интерполяцион кўпхад.

8-мисол. Бирор $y = f(x)$ функциянинг ушбу

$$\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y \times 10^{-4}$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	1,6990	414	—36	5
55	1,7404	378	—31	
60	1,7782	347		
65	1,8129			

қийматлар жадвалига асосланиб, $f'(50)$ топилсин.

Ечиш.

$$N(x) = y_0 + q \Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{3} \Delta^3 y_0 + \dots,$$

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \quad dq = \frac{1}{h} dx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dy}{dq},$$

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6} \Delta^3 y_0 + \dots \right],$$

$$R'_n(x) = \frac{(-1)^n}{h} \frac{\Delta^{n+1} y_0}{n+1}, \quad q = \frac{50-50}{h} = 0,$$

$$y'(50) = \frac{1}{5} (0,0414 + \frac{(-1)}{2} \cdot (-0,0036) + \frac{1}{3} \cdot 0,0005) \approx 0,0087.$$

Сонли дифференциаллашда интерполяция қадамни кичрайтириш формуладаги кейинги ҳадларни ташлашдан вужудга келадиган хатони (кесим хатосини) камайтиради, лекин яхлитлаш хатосини оширади. Шунга кўра, умуман, дифференциаллашнинг сонли усуллари формулаларнинг яқинлашишини таъминлай олмайди.

Сплайнлар ёрдамида функцияларни яқинлаштириш. $[a, b]$ оралиқ $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1; n, x_0 = a, x_n = b$) қисмларга ажратилган бўлсин. Бирор узлуксиз $f(x) \in C[a, b]$ функция учун m -тартибли интерполяцион полиноминал сплайн деб, ушбу шартларни қаноатлантирувчи $S_m(x)$ функцияга айтилади:

1) $[a, b]$ оралиқнинг ҳар бир $[x_{i-1}, x_i]$ қисмида y m .

— даражали $S_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ кўпхаддан иборат; 2) $[a, b]$ оралиқ бўйича $m — 1$ - тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга; 3) x_k тугунларда $S_m(x_k) = f(x_k)$ ($k = \overline{0, n}$).

$m = 1$ бўлган ҳолда $S_1(x)$ нинг графиги синиқ чизикдан иборат. Агар $n \rightarrow \infty$ да $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0$ бўлса, у ҳолда

$S_1(x)$ сплайн $f(x) \in C[a, b]$ функцияга текис яқинлашади. Текис яқинлашиш хусусияти $S_2(x)$ квадратик сплайн ва $S_3(x)$ кубик сплайнлар учун ҳам ўринли бўлиб, яқинлашиш тезлиги сплайннинг тартибига ва $f(x)$ нинг силлиқлигига мувофиқ равишда ортади.

Сплайнни тузиш учун $a_0, \dots, a_n$ коэффициентлар аниқланиши керак. Чизикли $S_1(x) = a_0 + a_1x$ сплайннинг a_0, a_1 коэффициентларини топиш учун $f(x_{i-1})$ ва $f(x_i)$ қийматлар етарли. 3) шартга асосланиб ушбу

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_{i-1} = f(x_{i-1}) \quad (i = \overline{1, n}), \\ a_0 + a_1x_i = f(x_i) \end{cases}$$

системани тузамиз ва ундан a_0, a_1 ларни аниқлаймиз. $m \geq 2$ бўлган ҳолда $S_m(x)$ нинг ягона бўлишини таъминлаш учун яна $m — 1$ та қўшимча шарт қўйилиши керак. Одатда бундай шартлар $f(x)$ нинг яқинлашиш хусусиятлари, сплайн икки қўшни бўлагининг туташган нуқталарида силлиқ бўлишлари ва бошқа талабларга кўра, шунингдек, четки a ва b нуқталарда турли чегаравий шартлар билан қўйилади.

1-масала. Ушбу $s(x)$ ($s(x) \in S_1$) функциялар қуйидаги

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}, \quad J_1(s) = \int_0^1 (s'(x))^2 dx < \infty$$

шартларни қаноатлантирсин. Бу функциялар орасидан шундай $s_1(x)$ функцияни топиш талаб қилинадик, унга кўра $\inf_{s \in S_1} J_1(s)$ олинadиган бўлсин. Биздан x_i нуқталарда $S_1(x)$

онланинг бирор маънода $f(x)$ билан бир хил қийматга эга бўлган ва нисбатан силлиқ функцияларидан бирини, яъни энг кичик $\|s'\|_{L_2}$ нормали функцияни топиш талаб эти-

лади. Маълумки, $J = \int_a^b F(s(x), s'(x)) dx$ аниқ интегрални

максимум ва минимумга эриштирадиган ҳар қандай $s(x)$ функция $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial s'} \right) - \frac{\partial F}{\partial s} = 0$ Эйлер тенгламасини қаноат-

лантириши керак. Бизда бу тенглама $s''(x) = 0$ кўринишида. Шунга кўра изланаётган $s_1(x)$ функция ҳар бир $[x_{i-1}, x_i]$ оралиқда чизиқлидир. Демак, $s_1(x)$ биринчи тартибли $S_1(x)$ сплайндан иборат.

2-масала. $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = \overline{1, n}$, $x_0 = a$, $x_n = b$) қисмларга ажратилган $[a, b]$ оралиқда жадвал кўринишида берилган $f(x)$ функцияни интерполяцияловчи шундай $S_2(x)$ квадратик сплайн тузилсинки, у учун юқорида кўрсатилган 1) — 3) шартлар ва қўшимча 4) шарт бажарилсин, яъни:

1) ҳар қайси $[x_{i-1}, x_i]$ оралиқда сплайн бўлаги $s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ кўринишидаги кўпхаддан иборат; 2) $S_2(x) \in C' [a, b]$; 3) $S_2(x_k) = f_k$; 4) $x_0 = a$ да $s'(a) = A$, ҳар қайси x_i ($i = \overline{1, n-1}$) нуқтада $s'(x-0) = s'(x+0)$ тенглик ўринли бўлсин.

Ечиш: Сплайннинг $[x_0, x_1]$ оралиқдаги бўлагини топиш учун кўрсатилган шартлардан фойдаланиб ушбу системани тузамиз:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = f_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = f_1, \\ a_1 + 2a_2x_0 = A. \end{cases}$$

Системани ечиб, топилган a_0 , a_1 ва a_2 коэффициентлар бўйича изланаётган $s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ни тузамиз.

Тўрнинг қолган ҳар қайси $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = \overline{2, n}$) қисми учун

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_{i-1} + a_2x_{i-1}^2 = f(x_{i-1}), \\ a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 = f(x_i), \\ s'(x_i-0) = s'(x_i+0) \end{cases}$$

кўринишидаги система тузилади ва изланаётган $s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ кўпхад олинади, бунда $s'(x) = a_1 + 2a_2x$.

9-мисол. Бирор $f(x)$ функция $f'(0,78) = -2,5$ ва

x	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28

жадвал билан берилган. Уни интерполяцияловчи иккинчи тартибли сплайн тузилсин.

Ечиш: $[0,78; 1,56]$ оралиқ учун:

$$\begin{cases} a_0 + 0,78a_1 + 0,78^2a_2 = 2,5, \\ a_0 + 1,56a_1 + 1,56^2a_2 = 1,2, \\ a_1 + 2 \cdot 0,78a_2 = -2,5. \end{cases}$$

Системани ечиб, $a_2 = 1,069$, $a_1 = -4,168$, $a_0 = 5,1$ ни топамиз. Изланаётган учҳад $s(x) = 5,1 - 4,168x + 1,069x^2$ бўлади.

[1,56; 2,34] оралиқ учун: олдинги оралиқ учун топилган муносабатдан фойдаланиб, $s'(1,56) = -4,168 + 2,136 \cdot 1,56 = -0,83$ ни аниқлаймиз. Сўнг қуйидаги системани тузамиз:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 \cdot 1,56 = -0,833, & (4) \text{ шартга мувофиқ} \\ a_0 + 1,56a_1 + 1,56^2a_2 = 1,2, \\ a_0 + 2,34a_1 + 2,34^2a_2 = 1,12. \end{cases}$$

Бу системадан $a_2 = 0,936$, $a_1 = -3,755$, $a_0 = 4,781$ аниқланади. Бу оралиқ учун изланаётган кўпҳад $s(x) = 4,781 - 3,755x + 0,936x^2$ бўлади. [2,34; 3,12] оралиқ учун:

$$s'(2,34) = -3,755 + 2 \cdot 0,936 \cdot 2,34 = 0,625,$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 \cdot 2,34 = 0,625, \\ a_0 + a_1 \cdot 2,34 + a_2 \cdot 2,34^2 = 1,12, \\ a_0 + a_1 \cdot 3,12 + a_2 \cdot 3,12^2 = 2,25. \end{cases}$$

Бундан $a_2 = 1,056$, $a_1 = -4,317$, $a_0 = 5,44$ ва $s(x) = 5,44 - 4,317x + 1,056x^2$.

[3,12; 3,81] оралиқ учун:

$$s'(3,12) = -4,317 + 2 \cdot 1,056 \cdot 3,12 = 2,27244 \approx 2,272,$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 \cdot 3,12 = 2,272, \\ a_0 + a_1 \cdot 3,12 + a_2 \cdot 3,12^2 = 2,25, \\ a_0 + a_1 \cdot 3,81 + a_2 \cdot 3,81^2 = 4,28. \end{cases}$$

Бундан $a_2 = 0,971$, $a_1 = -3,787$, $a_0 = 4,614$ ва $s(x) = 4,614 - 3,787x + 0,971x^2$.

Шундай қилиб, тузилиши талаб этилаётган $S_3(x)$ сплайн кетма-кет жойлашган $[x_{i-1}, x_i]$ оралиқлар учун топилган $s(x)$ учҳадлар мажмуасидан иборат.

3-масала. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $S(x)$ интерполяцион кубик сплайн тузилсин:

1) ҳар қайси $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = \overline{1; n}$) оралиқда $S_3(x) \in H_3(P)$, бунда $H_3(P)$ — даражаси $m = 3$ дан катта бўлмаган кўпҳадлар тўплами;

$$2) S_3(x) \in C^2[a, b];$$

$$3) \text{ Тўрнинг } x_k (k = \overline{0; n}) \text{ тугунларида } S_3(x_k) = f_k;$$

$$4) S'_3(a) = S'_3(b) = 0.$$

Ечиш. Изланаётган $S_3(x)$ сплайн ҳар қайси $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = \overline{1; n}$) ораликда $m = 3$ -даражали $s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ кўринишдаги кўпхаддан иборат. Ҳар қайси кўпхаднинг тўртта a_0, a_1, a_2, a_3 коэффиценти аниқланиши керак. Шу мақсадда 3) шарт бўйича иккита тенглама, $x_i (i = \overline{0; n})$ нуқталарда сплайн эгри чизиқлари эгрилигининг нолга тенг бўлиш ёки $s'(x_i - 0) = s'(x_i + 0)$ бўлиш шарти ва 4) қўшимча шарт бўйича яна икки тенглама, жами тўрт тенгламалар система тузамиз. Шундан сўнг масала юқорида (2-масалада) кўрсатилганича ҳал қилиниши мумкин. Лекин биз [1] нинг 295 — 298-бетларида берилган умумий кўрсатмадан фойдаланамиз. $S_3(x)$ сплайн ва унинг ҳосиласи қуйидаги кўринишда изланади:

$$S_3(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_{i-1} - \frac{M_{i-1} h_i^2}{6} \right) \frac{x_i - x}{h_i} + \left(f_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad (16)$$

$$S'(x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{M_i - M_{i-1}}{6} h_i, \quad (17)$$

бунда $h_i = x_i - x_{i-1}$, $M_i = S''_3(x_i)$, $M_0 = M_n = 0$. Номалум $M_{n-1}, M_{n-2}, \dots, M_1$ катталик қийматларини ҳисоблаш алгоритми:

$$i = \overline{1; n-1}; \quad l_i = h_i/6, \quad b_i = (h_i + h_{i+1})/3,$$

$$c_i = h_{i+1}/6, \quad d_i = (f_{i+1} - f_i)/h_{i+1} - (f_i - f_{i-1})/h_i,$$

$$q_0 = 0, \quad P_i = l_i q_{i-1} + b_i, \quad q_i = -c_i/p_i,$$

$$u_0 = 0, \quad u_i = (d_i - l_i u_{i-1})/p_i;$$

$$k = \overline{1; n-2}: \quad M_{n-1} = u_{n-1}, \quad M_k = q_k M_{k+1} + u_k$$

Агар $f(x) \in C^k[a, b]$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) бўлса, у ҳолда сплайннинг $r(x) = f(x) - S(x)$ хатоси:

$$\max_{a \leq x \leq b} |r^{(p)}(x)| \leq ch^{k-p} \quad (k \geq p),$$

бунда c тўрага боғлиқ бўлмаган ўзгарувчи, $h = \max_{1 \leq x \leq n} h_i$.

10-мисол. $f(x)$ функция

x_i	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
f_i	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28

жадвал билан берилган ва $f''(0,78) = f''(3,81) = 0$. Уни интерполяцияловчи учинчи даражали $S_3(x)$ сплайн тузилсин ва функциянинг $x = 1; 2; 3; 3,5$ нуқталардаги қиймати ҳисоблансин.

Ечиш: 1) Ҳисоблаш натижаларини кетма-кет жадвалга ёзамиз:

10-мисол

Интерполяцион кубик сплайн

i	x_i	f_i	h_i	l_i	b_i	c_i	d_i	p_i	q_i	u_i	M_i
0	0,78	2,5							0	0	0
1	1,56	1,2	0,78	0,13	0,52	0,13	1,5641	0,52	-0,25	3,0079	2,4332
2	2,34	1,12	0,78	0,13	0,52	0,13	1,5513	0,4875	-0,2667	2,9492	2,2991
3	3,12	2,25	0,78	0,13	0,49	0,115	1,4933	0,4553	-0,2526	2,4376	2,4376
4	3,81	4,28	0,69	0,115							0

2) $i = 1$, $[0,78; 1,56]$ оралиқ учун (16) муносабат бўйича:

$$\begin{aligned}
 S_3(x) &= M_0 \frac{(x_1 - x)^3}{6h_1} + M_1 \frac{(x - x_0)^3}{6h_1} + \left(f_0 - \frac{M_0 h_1^2}{6} \right) \frac{x_1 - x}{h_1} + \\
 &+ \left(f_1 - \frac{M_1 h_1^2}{6} \right) \frac{x - x_0}{h_1} = 0 + 2,4332 \frac{(x - 0,78)^3}{6 \cdot 0,78} + \\
 &+ (2,5 - 0) \frac{1,56 - x}{0,78} + \left(1,2 - \frac{2,4332 \cdot 0,78^2}{6} \right) \frac{x - 0,78}{0,78} = \\
 &= 0,51989708x^3 - 1,2165592x^2 - 1,0340559x + 3,8 \approx \\
 &\approx 0,52x^3 - 1,217x^2 - 1,034x + 3,8; \quad S_3(1) \approx 2,049.
 \end{aligned}$$

$i = 2$, $[1,56; 2,34]$ оралиқ учун:

$$S_3(x) = M_1 \frac{(x_2 - x)^3}{6h_2} + M_2 \frac{(x - x_1)^3}{6h_2} + \left(f_1 - \frac{M_1 h_2^2}{6} \right) \frac{x_2 - x}{h_2} -$$

$$-\left(f_2 - \frac{M_2 h_2^2}{6}\right) \frac{x - x_1}{h_2} = \dots \approx -0.030x^3 + 1,350x^2 - 5,042x + 6,681; S_3(2) \approx 1,76.$$

$i = 3$, [2,34; 3,12] оралиқ учун:

$$S_3(x) = \dots \approx 0,30x^3 + 0,942x^2 - 4,360x + 5,775; S_3(3) \approx 1,98.$$

$i = 4$, [3,12; 3,71] оралиқ учун:

$$S_3(x) = \dots \approx -0,589x^3 + 6,730x^2 - 22,473x + 24,773, S_3(3,5) \approx 3,29.$$

Умумий ҳолда сплайн даражалари турлича (лекин m , дан ортиқ бўлмаган даражали) кўпхадлардан иборат бўлаклардан тузилган бўлиши мумкин.

11-мисол. x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш-жадвал тарзида берилган:

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
35	?	41	437	47	999	53	1425	59	2301	65	3766
36	?	42	584	48	864	54	1500	60	2575	66	4039
37	324	43	727	49	913	55	1642	61	2720	67	4659
38	381	44	822	50	1016	56	1789	62	2701	68	5015
39	331	45	845	51	1098	57	2039	63	3221	69	5835
40	425	46	922	52	1224	58	2009	64	3018	70	?

Учинчи даражали сплайн-функция тузилсин.

Е чи ш. Таянч нуқталарини (сплайн бўлаклари туташадиган интерполяцион тугунларини) танлаймиз. Улар (37; 324), (42; 584), (55; 1642), (69; 5835) бўлсин. 1) [37; 42] оралиқдаги сплайн бўлагини $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$ тўғри чи-зиқ кўринишида тасвирлаймиз, бизда $x_1 = 42$, $y_1 = 584$, $f'(42) = \frac{584 - 324}{42 - 37} = 52$. Натижада $y - 584 = 52(x - 42)$, ёки $y = 52x - 1600$;

2) [42; 55] оралиқдаги бўлак учун

$$f(x) = A + B(x - x_1) + C(x - x_1)^2 + D(x - x_1)^3 \quad (18)$$

учинчи даражали кўпхадни танлаймиз. Сплайннинг ҳар ик-ки қўшни бўлаги ўзлари туташадиган нуқтада бир хил қияликка ва y'' нинг бир хил қийматига эга бўлсин. Бу шаргга кўра $x_1 = 42$ нуқтада: $f(42) = 584 = A$, $f'(42) = 52 = B$, $f''(42) = 2C + 6D \cdot (42 - 42) = 0$ ва бундан $C = 0$, $D =$

$= (f(x_2) - A - B(x_2 - x_1) - C(x_2 - x_1)^2) / (x_2 - x_1)^3 = (1642 - 584 - 52(55 - 42) - 0) / (55 - 42)^3 = 0,1738734$. Иккинчи бўлак:

$$y = 584 + 52(x - 42) + 0,1738734(x - 42)^3; \quad (19)$$

3) [55; 69] оралиқ учун учинчи даражали $f(x) = K + L(x - x_2) + M(x - x_2)^2 + N(x - x_2)^3$ кўпхадни тузамиз. $x = 55$ нуқтада бу чизиқ ва (19) чизиқ бир хил $f'(55)$ ва $f''(55)$ қийматларга эга бўлиши кераклиги шартидан фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned} f(55) &= 1642, \quad f'(55) = 52 + 3 \cdot 0,1738734(55 - 42)^2 = \\ &= 140,15381, \quad f''(55) = 2 \cdot 3 \cdot 0,1738734(55 - 42) = 13,562125, \\ f(55) &= K = 1642, \quad f'(x) = L + 2M(x - 55) + 3N(x - 55)^2, \\ f'(55) &= L = 140,15381, \quad f''(x) = 2M + 2 \cdot 3N(x - 55), \\ f''(55) &= 2M = 13,562125, \quad M = 6,7810625. \end{aligned}$$

N ни топишда (69; 5835) нуқта координаталаридан ҳам фойдаланамиз: $5835 = 1645 + 140,15381(69 - 55) + 6,7810625(69 - 55)^2 + N(69 - 55)^3$, бундан $N = 0,3286291$ ва натижада $f(x) = 1642 + 140,15381(x - 55) + 6,781063(x - 55)^2 + 0,3286291(x - 53)^3$;

4) Функциянинг $x = 35, 36$ ва 70 даги қийматларини топиш учун сплайннинг биринчи бўлаги (тўғри чизиқ кесмаси) ва охириги бўлаги (эгри чизиқ кесмаси) экстраполяция қилинади.

9-мисол

Ҳосил қилинган сплайн қийматлари жадвали

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
35	220	41	532	47	866	53	1387	59	2332	65	4050
36	272	42	584	48	934	54	1508	60	2533	66	4442
37	324	43	636	49	1008	55	1642	61	2798	67	4868
38	376	44	689	50	1089	56	1789	62	2798	68	5332
39	428	45	745	51	1179	57	1952	63	3365	69	5835
40	480	46	803	52	1278	58	2132	64	3692	70	6379

Масаланинг шартда берилган маълумотлар ва бу жадвал маълумотларини солиштириб, сплайн берилган қийматларни бир қадар силлиқлаганини кўрамиз.

М А Ш Қ Л А Р

1. Бирор $y = f(x)$ функциянинг $x_i (i = \overline{1, m})$ нуқталардаги $f(x_i)$ қийматлари берилган. Лагранж интерполяцион формуласидан фойдаланиб, $f(x_i)$ қийматлар ҳисоблансин;

1) $x_i = 0,41 + 0,05(i - 1)$, $i = \overline{1; 5}$, $f(x_i) = 1,5068; 1,5841; 1,6820; 1,8220; 1,9155$. $x_j = 0,43; 0,54; 0,57; 0,62$;

2) $x_i = 11,2 + 0,8(i - 1)$, $i = \overline{1; 6}$, $f(x_i) = 6,403; 6,782; 7,211; 7,746; 8,062; 8,485$; $x_j = 11,5; 12,5; 13,0; 15,3$;

3) $x_i = 50 + 6(i - 1)$, $i = \overline{1; 5}$, $f(x_i) = 0,0488; 0,0531; 0,0581; 0,0644; 0,0681$; $x_j = 53; 60; 70; 75$;

4) $x_i = 4,1 + 0,3(i - 1)$, $i = \overline{1; 7}$, $f(x_i) = 166,53; 175,06; 185,89; 201,38; 211,70; 227,05; 231,77$; $x_i = 4,2; 5,2; 5,5; 6,0$;

5) $x_i = 110 + 50i$, $i = \overline{0; 5}$, $f(x_i) = 111,63; 117,35; 124,61; 134,98; 141,91; 152,20$; $x_j = 170; 230; 340; 370$;

6) $x_i = 3,1 + 0,5i$, $i = \overline{0; 4}$, $f(x_i) = 1,3634; 1,4333; 1,5068; 1,5841; 1,6653$; $x_j = 3,3; 4,3; 4,8; 5,3$;

7) $x_i = 0,51 + 0,1i$, $i = \overline{0; 7}$, $f(x_i) = 0,4882; 0,5312; 0,5728; 0,6131; 0,6518; 0,6889; 0,7112$; $0,7481$; $x_j = 0,65; 0,85; 0,95; 1,22$;

8) $x_i = 41 + 5(i - 1)$, $i = \overline{1; 6}$, $f(x_i) = 64,83; 67,82; 71,41; 78,10; 81,24; 84,76$; $x_j = 49; 53; 64; 67$;

9) $x_i = 1100 + 10(i - 1)$, $i = \overline{1; 5}$, $f(x_i) = 11163; 11735; 12337; 12969; 13634$; $x_i = 1115; 1125; 1135; 1145$;

10) $x_i = 31 + 5(i - 1)$, $i = \overline{1; 7}$, $f(x_i) = 55,68; 60,00; 64,81; 70,71; 74,16; 78,74; 81,16$; $x_j = 33,00; 40,00; 53,00; 60,00$.

2. Жадвалларда кўрсатилган қийматларни қабул қилувчи ва даражаси энг паст бўлган кўпхадлар тузилсин:

а)	x	y	б)	x	y
	350	0,0534522		55	0,018181818
	353	0,0532246		53	0,018867925
	359	0,0527780		49	0,020000000

в)	x	y	г)	x	y
	9	0,3333333		89	9,4339811
	11	0,3015113		92	9,5916630
	14	0,2672612		96	9,7979590

д)	x	y	е)	x	y
	70	4,1212853		61	0,016393443
	71	4,1408177		63	0,015873016
	74	4,1983367		66	0,015151515

3. Юқорида (2- мисолда) келтирилган жадваллар бўйича y нинг қуйида берилган қийматларига мос x аргумент қийматлари топилин:

а) $y = 351$, $y = 358$; б) $y = 54$, $y = 50$; в) $y = 10$, $y = 13$;
 г) $y = 9,4868330$, $y = 9,7467943$; д) $y = 4,1601676$, $y = 4,1793392$;
 е) $y = 0,016129032$, $y = 0,015384615$.

4. Тескари интерполяциялашдан фойдаланиб, тенгламаларнинг $[a, b]$ ораликда ётган илдизлари ε аниқликда топилсин:

а) $x^2 - \lg(x + 2) = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $a = 0,5$, $b = 1$;

б) $x^2 + \ln x - 4 = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $a = 1,5$, $b = 2$;

в) $\lg(5 - x) + 2 \lg \sqrt{3 - x} - 1 = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $a = 1$, $b = 2$;

г) $\lg(x + 1,5) + \lg x = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $a = 0,1$, $b = 1$;

д) $x^3 - 5x + 3 = 0$, $\varepsilon = 0,01$, $[0; 1,5]$;

е) $x^3 + 4x + 3 = 0$, $\varepsilon = 0,001$, $[-0,8; 1]$;

ж) $2 + 7x - x^3 = 0$, $[-3; 3]$;

з) $x^6 + x^2 - 1 = 0$, $\varepsilon = 0,001$, $[0; 1]$;

и) $x^3 + 3x - 1 = 0$, $\varepsilon = 0,0001$, $[0; 1]$;

й) $\cos x - \cos 2x - \sin 3x = 0$, $\varepsilon = 0,0001$, $[0,25; 1]$;

к) $2 \sin^3 x + 3 \sin^2 x - 2 \sin x = 0$, $\varepsilon = 0,0001$, $[0,2; 1]$;

л) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x - 1,75 = 0$, $\varepsilon = 0,0001$, $[0; 1]$.

5. Қуйидаги чекли қаторлар йиғилсин ($n = 1, 2, \dots$):

а) $S(n) = 1^3 + 3^3 + \dots + n^3$;

б) $K(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$;

в) $L(n) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$;

г) $M(n) = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

д) $N(n) = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$;

е) $P(n) = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!$

6. Қуйида $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ва $l(x)$ функцияларнинг қийматлар жадваллари келтирилган:

x_i	$f(x_i)$	$g(x_i)$	$h(x_i)$	$l(x_i)$
0	-1	-3	-0,2	-1
0,1	-0,7949957	-2,6550704	-0,1956625	-0,8999999
0,2	-0,5799279	-2,249523	-0,1826312	-0,799936
0,4	-0,118757	-1,2112264	-0,1302229	-0,595904
0,55	0,2559402	-0,1773886	-0,0673978	-0,4223193
0,63	0,4667554	0,4869273	-0,0254242	-0,3074765
0,7	0,6579704	1,1441596	0,0162497	-0,182351
0,84	1,0610102	2,7087839	0,1138244	0,191298
0,9	1,2429301	3,4979546	0,1616117	0,4314407
1,0	1,5597528	4,9999995	0,24948971	1

Лагранж ва Ньютон формулаларидан фойдаланиб топилсин:

а) $x = 0,12; 0,45; 0,67; 0,93; -0,9; 1,1$ ларга мос f , g , h , l функцияларнинг ва уларнинг биринчи тартибли ҳосилаларининг қийматлари;

б) $f = -0,8; 0$, $g = -1,2; 0$, $h = -0,15; 0$ ва $l = -0,3; 0$ га мос бўлган x нинг қийматлари.

7. 1-мисол Ньютон, Гаусс, Стирлинг ва Бессель формулаларидан фойдаланиб ҳал қилинсин. Шу билан бирга кўрсатилган x нуқталарда y' ва y'' ҳосилаларнинг қийматлари топилсин ва хато баҳолансин.

8. $f(x)$ функция жадвал тарзида берилган:

x	0	1,5	3
$f(x)$	1,8	2,4	3,5

Функцияни интерполяцияловчи а) биринчи тартибли, б) квадратик сплайнлар тузилсин.

9. $f(x)$ функцияни интерполяциялаш учун тоқ сонли тугунларга эга бўлган текис Δ тўрда параболик сплайн тузилсин, $S_2'(a) = 0$.

10. x_i , $i = 0, n$, $x_i - x_{i-1} = h_i$, $x_0 = a$, $x_n = b$ тўрда: қуйидаги қўшимча шартлар билан кубик сплайн тузилсин;

1) $S_3'(a) = 0$, $S_3'(b) = 1$; 2) $S_3'(a) = S_3'(b)$, $S_3''(a) = S_3''(b)$
3) $S_3''(a) = A$, $S_3'(b) = B$.

11. $f(x)$ функция жадвал тарзида ва қўшимча шартлар билан берилган. Учинчи тартибли $S_3(f, x, \Delta_i)$ сплайн тузилсин ва функциянинг кўрсатилган x нуқтадаги қиймати топилсин, $M_i = S_3'(x_i)$:

1)	i	1	2	3	4	5	6
	x_i	0,10	0,14	0,20	0,25	0,28	0,30
	$f(x_i)$	1,0068	1,0314	1,1016	1,1205	1,1630	1,1782

$$2M_1 + M = 2,8674, \quad M_5 + 2M_6 = 2,84; \quad x = 0,22;$$

2)	i	1	2	3	4	5	6
	x_i	0,18	0,22	0,25	0,28	0,34	0,35
	$f(x_i)$	1,3216	1,3396	1,3870	1,4204	1,4484	1,4602

$$2M_1 + 0,2 M_2 = 2,7189, \quad 0,3M_5 + M_6 = 1,0074, \quad x=0,26;$$

3)	i	1	2	3	4	5	6
	x_i	0,1	0,14	0,16	0,20	0,25	0,28
	$f(x_i)$	0,0996	0,1280	0,1604	0,1816	0,2102	0,2308

$$2M_1 + M_2 = -0,3605, \quad 0,3M_5 + M_6 = -0,4580, \quad x = 0,15;$$

4)	i	1	2	3	4	5	6
	x_i	0,2	0,24	0,26	0,32	0,35	0,39
	$f(x_i)$	1,0052	1,0170	1,0252	1,0318	1,0454	1,0528

$$2M_1 + M_2 = 3,0076, \quad 0,5M_5 + M_6 = 3,7605, \quad x = 0,28;$$

5)	i	1	2	3	4	5	6
	x_i	0,2	0,24	0,27	0,30	0,32	0,38
	$f(x_i)$	1,1214	1,1712	1,2100	1,2485	1,2670	1,3613

$$2M_1 + 0,3M_2 = 2,2680, \quad 0,4M_5 + 2M_6 = 3,0782, \quad x=0,26.$$

12. $z = f(x, y)$ функция қўш жадвал тарзида берилган.
 $z = f(x_j, y_j)$ қийматлар топилсин:

1)	$x \backslash y$	0,3	0,6	0,9
	0,00	0,09	0,36	0,81
	0,05	0,1075	0,3925	0,8575
	0,10	0,13	0,43	0,91
	$x_f = 0,5, \quad y_f = 0,08;$			

2)	$x \backslash y$	1,2	1,6	2,0
	1,0	-0,872	0,216	3
	1,5	-2,672	-2,104	0
	2,0	-4,472	-4,504	-3
	$x_f = 1,5, \quad y_f = 1,6.$			

6-ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

$y = f(x)$ функциянинг қийматлар жадвали берилган (масалан, $f(5,51) = 23,84$):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	23,76	23,84	23,93	24,02	24,11	24,19	24,28	24,37	24,45	24,54
5,6	24,63	24,72	24,81	24,89	24,98	25,07	25,16	25,25	25,34	25,41
5,9	27,34	27,43	27,53	27,62	27,72	27,81	27,90	27,99	28,09	28,18
6,3	31,17	31,27	31,37	31,47	31,57	31,67	31,77	31,87	31,97	32,07
6,6	34,21	34,32	34,42	34,52	34,63	34,73	34,84	34,94	35,05	35,15
6,9	37,39	37,50	37,61	37,72	37,83	37,94	38,05	38,16	38,26	38,37
7,1	39,59	39,70	39,82	39,93	40,04	40,15	40,26	40,38	40,49	40,60
7,5	44,18	44,30	44,41	44,53	44,65	44,77	44,89	45,01	45,13	45,25
1,6	4,953	5,003	5,053	5,104	5,155	5,207	5,259	5,312	5,366	5,420
1,8	6,050	6,110	6,172	6,234	6,297	6,360	6,424	6,488	6,556	6,619
2,0	7,389	7,463	7,538	7,614	7,691	7,768	7,846	7,928	8,005	8,085
2,3	9,974	10,07	10,18	10,28	10,38	10,49	10,59	10,70	10,81	10,91
2,4	11,02	11,13	11,25	11,36	11,47	11,59	11,71	11,82	11,94	12,06
3,0	1,099	1,102	1,105	1,109	1,112	1,115	1,118	1,122	1,125	1,128
3,1	1,131	1,135	1,138	1,141	1,144	1,147	1,150	1,154	1,157	1,160
3,2	1,163	1,166	1,169	1,173	1,176	1,179	1,182	1,185	1,188	1,191
3,3	1,194	1,197	1,200	1,203	1,206	1,209	1,212	1,215	1,218	1,221
3,6	1,281	1,284	1,287	1,289	1,292	1,295	1,298	1,300	1,303	1,306
3,7	1,308	1,311	1,314	1,316	1,319	1,322	1,324	1,327	1,330	1,332
3,8	1,335	1,338	1,340	1,343	1,346	1,348	1,351	1,353	1,356	1,358
3,9	1,361	1,364	1,366	1,369	1,371	1,374	1,376	1,379	1,381	1,384
4,0	1,386	1,389	1,391	1,394	1,396	1,399	1,401	1,404	1,406	1,409
2,8	16,45	16,61	16,78	16,95	17,12	17,29	17,46	17,64	17,81	17,99
2,9	18,27	18,36	18,54	18,73	18,92	19,11	19,30	19,49	19,69	19,89
3,0	20,09	20,29	20,49	20,70	20,91	21,16	21,33	21,54	21,76	21,98

Топшириқ: 1) $[a, b]$ ораликда жадвал қийматларини қабул қилувчи энг паст даражали интерполяцион кўпхад тузилсин; 2) жадвал қийматлари икки марта зичлансин; 3) ҳар қайси y_i қийматга мос x_i қиймат ва ҳар қайси x_k га мос y_k қиймат топилсин; 4) x_i интерполяция тугунларида $f'(x)$ ҳосила қабул қиладиган қийматлар топилсин; 5) ҳисоблаш хатолари баҳолансин.

Ҳисоблашлар албатта Лагранж ва Ньютон формуллари ва ихтиёрий учинчи интерполяцион формула билан такрор бажарилсин ва топилган натижалар таққослансин:

Вариант №	[a, b]	n_j	x_k
1	5,5;5,59	23,8; 23,9; 24,0; 24,5	5,49; 5,543; 5,576
2	5,6;5,69	24,7; 24,85; 25,1; 25,38	5,595; 5,623; 5,684
3	5,9;5,99	27,4; 27,65; 27,8; 28,0	5,89; 5,914; 5,985
4	6,3;6,39	31,2; 31,5; 31,65; 31,9	6,29; 6,315; 6,384
5	6,6;6,69	34,3; 34,45; 34,9; 35,1	6,59; 6,643; 6,685
6	6,9;6,99	37,4; 37,65; 37,97; 38,3	6,89; 6,933; 6,975
7	7,1;7,19	39,6; 39,90; 40,13; 40,5	7,08; 7,124; 7,185
8	7,5;7,59	44,23; 44,6; 44,93; 45,2	7,49; 7,523; 7,585
9	1,6;1,69	4,98; 5,085; 5,300; 5,414	1,59; 1,608; 1,687
10	1,8;1,89	6,047; 6,35; 6,494; 6,587	1,79; 1,809; 1,877
11	2,0;2,09	7,45; 7,764; 7,923; 8,05	1,99; 2,013; 2,085
12	2,3;2,39	10,00; 10,45; 10,68; 10,87	2,29; 2,304; 2,388
13	2,4;2,49	11,10; 11,55; 11,78; 11,96	2,493; 2,446; 2,487
14	3,0;3,09	1,097; 1,104; 1,11; 1,126	2,988; 3,015; 3,087
15	3,1;3,19	1,129; 1,1313; 1,148; 1,149	3,09; 3,132; 3,186
16	3,2;3,29	1,16; 1,165; 1,18; 1,190	3,19; 3,208; 3,287
17	3,3;3,39	1,19; 1,196; 1,208; 1,22	3,28; 3,306; 3,375
18	3,6;3,69	1,28; 1,283; 1,29; 1,304	3,58 3,612; 3,687
19	3,7;3,79	1,307; 1,313; 1,32; 1,329	3,69; 3,707; 3,746
20	3,8;3,89	1,333; 1,336; 1,35; 1,357	3,78; 3,803; 3,886
21	3,9;3,99	1,359; 1,362; 1,370; 1,380	3,88; 3,905; 3,987
22	4,0;4,09	1,384; 1,390; 1,400; 1,405	3,98; 4,016; 4,088
23	2,8;2,89	16,43; 16,50; 16,98; 17,90	2,79; 2,805; 2,887
24	2,9;2,99	18,15; 18,20; 18,95; 19,80	2,89; 2,907; 2,967
25	3,0;3,09	20,06; 20,32; 21,22; 21,90	2,98; 3,013; 3,078

7-б о б. ИНТЕГРАЛЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ

Квадратур формула. Берилган $I = \int_a^b f(x) dx$ интегрални чекли йиғиндига алмаштириш орқали ҳосил қилинади. Хусусан, $L_n(x)$ Лагранж интерполяцион формуласидан фойдаланиб, қуйидаги кўринишдаги формула олиниши мумкин:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k), \quad (1)$$

$$A_k = \int_a^b \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx, \quad (2)$$

бунда $x_k (k = 0, 1, \dots, n)$ — квадратур формуланинг тугунлари, A_k — коэффициентлари, $\sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ — квадратур йиғинди.

$L_n(x) = x^m (m = \overline{0; n})$ бўлган ҳолда A_k коэффициентларни топиш учун $I = \int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$ ифодага келмак $m = 0, 1, \dots, n$ қўйилиб, ушбу

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_k x_k^0 = \sum_{k=0}^n A_k = I_0, \\ \sum_{k=0}^n A_k x_k = I_1, \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{k=0}^n A_k x_k^m = I_n \end{cases} \quad (3)$$

система тузилади. Бу системанинг детерминанти $D = \prod_{k>l} (x_k - x_l) \neq 0$ Вандермонд детерминантидан иборатлигини кўриш қийин эмас.

1-мисол. Ушбу $I = \int_0^2 f(x) dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$ кўринишдаги квадратур формула тузилсин. Бунда: $x_0 = 0, 2$, $x_1 = 0, 5$, $x_2 = 0, 8$.

Ечиш. Биз $L_n(x) = x^m (m = 0, 1, 2)$ дан фойдаланайлик:

$$I_0 = \int_0^2 x^0 dx = 2, \quad I_1 = \int_0^2 x dx = 2, \quad I_2 = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}.$$

(3) системани тузамиз:

$$\begin{cases} 0,2^0 \cdot A_0 + 0,5^0 \cdot A_1 + 0,8^0 \cdot A_2 = 2, \\ 0,2 A_0 + 0,5 A_1 + 0,8 A_2 = 2, \\ 0,2^2 A_0 + 0,5^2 A_1 + 0,8^2 A_2 = 8/3. \end{cases}$$

Бундан $A_0 = 4,814814$, $A_1 = -10,962962$, $A_2 = 8,1481476$ аниқланади. Натижада:

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx = & 4,814814 f(0,2) - 10,962962 f(0,5) + \\ & + 8,1481476 f(0,8). \end{aligned}$$

$[a, b]$ ораликда олинган бирор $\rho(x)$ вазн функцияси ёрдами билан A_k коэффициентларни ҳисоблашда қулай бўлган

$$I = \int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (1')$$

$$A_k = \int_a^b \rho(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx \quad (2')$$

кўринишдаги муносабатларни тузиш мумкин. Хусусан, $[-1; 1]$ оралиқда $f(x)$ функцияни $P_m(x)$ кўпхад билан яқинлаштиришда $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ олинади.

Ньютон-Котес формулалари интеграллаш $[a, b]$ чекли оралиғида тенг h қадам билан узоқлашган $x_k = a + kh$, $k = 0, n$ тугунлар ва доимий вазн функцияси билан олинган квадратура формулаларидан иборат бўлиб, улар қуйидаги кўринишда берилиши мумкин:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n B_k f(a+kh), \quad (4)$$

бунда B_k — Котес коэффициентлари:

$$B_k = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (t-j) dt, \quad t = (x-a)/h. \quad (5)$$

$$n=1 \text{ да } B_0 = B_1 = \frac{1}{2}.$$

$$n=2 \text{ да } B_0 = B_2 = \frac{1}{6}, B_1 = \frac{4}{6},$$

$$n=3 \text{ да } B_0 = B_3 = \frac{1}{8}, B_1 = B_2 = \frac{3}{8}.$$

$$n=4 \text{ да } B_0 = B_4 = \frac{7}{90}, B_1 = B_3 = \frac{32}{90}, B_2 = \frac{12}{90},$$

$$n=5 \text{ да } B_0 = B_5 = \frac{19}{288}, B_1 = B_4 = \frac{75}{288}, B_2 = B_3 = \frac{50}{288}.$$

Трапециялар формуласи (4) формуланинг $n=1$ бўлгандаги хусусий ҳолидан иборат:

$$J = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

қолдик ҳади:

(6)

$$R(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

$[a, b)$ оралиқ тенг n бўлакка бўлинган умумий ҳолда:

$$J = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} (y_0 + y_n + 2(y_1 + \dots + y_{n-1})),$$

бунда $y_i = f(x_i)$

$$R(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b). \quad (6')$$

Симпсон формуласи. (4) формуланинг $n = 2$ бўлгандаги хусусий ҳолидан иборат ($x_2 = x_0 + 2h$):

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)), \quad (7)$$

қолдик ҳади:

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{IV}(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

$2n + 1$ та тугун учун умумлашган Симпсон формуласи:

$$J = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} [(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})]. \quad (7')$$

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{IV}(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b), \quad y_i = f(x_i).$$

2-мисол. Қандай n ларда $J = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin 2x}{4x} \right) dx$ ин-

теграл қийматини умумлашган трапециялар ва Симпсон формулалари ёрдамида $0,5 \cdot 10^{-6}$ аниқликда топиш мумкин? Берилган интеграл қийматини $n = 5$ учун шу формулалар билан топинг ва аниқлигини баҳоланг.

Ечиш. 1) Интеграл остидаги $v(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2x}{4x}$ функциянинг иккинчи ва тўртинчи тартибли ҳосилаларини баҳолашимиз керак бўлади. Маълумки,

$$\int_0^1 \cos^2 ux \, du = \left(\frac{u}{2} + \frac{1}{4x} \sin 2xu \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} \sin 2x = v(x),$$

$$|(\cos^2 ux)'| = |-2 \cos ux \cdot \sin ux \cdot u| = u \sin 2ux,$$

$$|(\cos^2 ux)''| = 2u^2 \cos 2ux,$$

$$|(\cos^2 ux)'''| = 4u^3 \sin 2ux,$$

$$|(\cos^2 ux)^{(IV)}| = 8u^4 \cos 2ux.$$

ва

$$\left| \frac{d^2 v}{dx^2} \right| = 2 \int_0^1 u^2 \cos 2ux \, du \leq 2 \int_0^1 u^2 \, du = 2 \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\left| \frac{d^4 v}{dx^4} \right| = 8 \int_0^1 u^4 \cos 2ux \, du \leq 8 \int_0^1 u^4 \, du = \frac{8}{5}.$$

Қолдиқ ҳадлар учун (6') ва (7') формулаларга кўра n қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантириши керак:

а) умумлашган трапециялар формуласи қўлланилганида

$$\frac{1}{12n^3} \cdot \frac{2}{3} \leq 0,5 \cdot 10^{-6}.$$

бундан $n \geq 48$, яъни J ни $0,5 \cdot 10^{-6}$ аниқликда топиш учун камида $n+1=49$ та тугун олиниши керак;

б) умумлашган Симпсон формуласи қўлланилганида

$$\frac{1}{2880n^4} \cdot \frac{8}{5} \leq 0,5 \cdot 10^{-6},$$

бундан $n \geq 6$ аниқланади, яъни интеграл J ни $0,5 \cdot 10^{-6}$ аниқликда топиш учун камида $2n+1=13$ та тугун олиниши керак.

2) Энди интегрални ҳисоблашга ўтамыз. Бунда $n=5$ деб олиниши керак:

а) трапециялар формуласидан фойдаланамиз. У изланаётган қийматни $0,2 \cdot 10^{-4}$ аниқликда бера олади ($R(f)$ учун (6') формулага $n=5$ ни қўйинг ва ҳисоблашларни бажаринг). $[0; 1]$ оралиқни $n=5$ та тенг қисмга ажратамиз ($h=0,2$, $x_i = 0 + ih$, $i = \overline{0; 5}$). y_i ординаталарни ҳисоблаймиз ($y_i = v(x_i)$):

x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y_i	1	0,986773	0,948347	0,888350	0,812366	0,727324

(6') формула бўйича:

$$J = \frac{1}{10} (y_0 + y_5 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)) = \\ = 0,8998999 \approx 0,8999.$$

б) (7') формула бўйича ҳисоблашлар бажарилганида $[0; 1]$ ораліқни узунлиги $h = (1-0)/(2 \cdot 5)$ га тенг бўлган 10 та ораліқчаларга бўламиз ва уларнинг учларига мос y_i ,

$i = 0; 10$ ординаталарни ҳисоблаймиз:

$y_0 = 1$, $y_1 = 0,9966733$, $y_2 = 0,98677291$ (юқоридаги жадвалга қаранг), $y_3 = 0,970535$, $y_4 = 0,948347$, $y_5 = 0,920735$, $y_6 = 0,888350$, $y_7 = 0,851946$, $y_8 = 0,812366$, $y_9 = 0,770513$, $y_{10} = 0,727324$.

Нижояг, (7') умумлашган Симпсон формулалари бўйича олдин $R(f) = 1 \cdot 10^{-6}$ ни, сўнг шунга мувофиқ яхлитлашларни ҳам бажариб, $J \approx 0,90135376 \approx 0,901254$ ни топамиз.

Симпсон кубатур формуласи $R\{a \leq x \leq A; b \leq y \leq B\}$ соҳа бўйича $J = \int\limits_{(R)} \int f(x, y) dx dy = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy$ интегрални топишда қўлланилади, бунда $f(x, y)$ функция кўрсатилган соҳа ичида ва унинг чегарасида узлуксиз.

Хусусан, Ox ва Oy ўқлари бўйича қадам $h = \frac{A-a}{2}$, $k = \frac{B-b}{2}$ бўлган ҳолда Симпсон кубатур формуласининг кўриниши:

$$J = \frac{hk}{9} \{ [f(x_0, y_0) + f(x_2, y_0) + f(x_0, y_2) + f(x_2, y_2) + \\ + 4[f(x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1)] + \\ + 16f(x_1, y_1)] \}. \quad (8)$$

Умумлашган формулада эса қадам $h = \frac{A-a}{2n}$, $k = \frac{B-b}{2m}$ бўлиб, $x_i = x_0 + ih$ ($x_0 = a$, $i = 0; 2n$) ва $y_j = y_0 + jk$ ($y_0 = b$,

$j = \overline{0; 2m}$ тугунларга мос $f(x_i, y_j) = f_{ij}$ қийматлар учун ушбу кўринишда ёзилади:

$$\iint_{(R)} f(x, y) dx dy = \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m [(f_{2i, 2j} + f_{2i+2, 2j} + f_{2i+2, 2j+2} + f_{2i, 2j+2}) + (4f_{2i+1, 2j} + f_{2i+2, 2j} + f_{2i+2, 2j+1} + f_{2i, 2j+1}) + 16f_{2i+1, 2j+1}] \quad (8')$$

3-мисол. $J = \int_0^{1,5} \int_0^{1,5} \left(10 - \frac{x^2 + y^2}{8}\right) dx dy$ қўш интеграл то-

пилсин.

Ечиш: $h = (1-0)/2 = 0,5$, $k = (1,5-0)/2 = 0,75$;

$x \backslash y$	0	0,5	1
0	10	9,9688	9,875
0,75	9,9297	9,8984	9,8046
1,5	9,7188	9,6875	9,5938

(8) формула бўйича:

$$J = \frac{0,5 \cdot 0,75}{9} ((10 + 9,875 + 9,5938 + 9,7188) + 4(9,9688 + 9,8046 + 9,6875 + 9,9297) + 16 \cdot 9,8984) = 14,797.$$

Гаусс квадратур формуласи. Гаусс типдаги квадратур формулалар

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (9)$$

кўринишида берилди ва улар тугунларнинг танланишига ҳамда $f(x)$ функциянинг юқори даражали силлиқ бўлишига қараб алгебраик юқори даражали аниқликка эга бўлади. Одатда $A_1, A_2, \dots, A_n$ коэффициентларни ва $x_1, x_2, \dots, x_n$ тугунларни шундай танлайдиларки, натижада (9) тақрибий тенглик даражаси мумкин бўлгунча юқори барча кўпхадлар учун аниқ бўлсин. (9) формула даражаси $2n-1$ дан ортмайдиган барча кўпхадларни аниқ интеграллаши учун у интерполяцион бўлиши ва $\omega_n(x)$ кўпхад $[a, b]$ оралиқда $\rho(x)$

вази билан даражаси n дан кичик бўлган барча $Q(x)$ кўп-
хадларга ортогонал бўлиши керак:

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n(x) Q(x) dx = 0,$$

бунда $\rho(x) \geq 0$, $\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$.

(9) формуланинг қолдиқ ҳади:

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) dx, \xi \in [a, b]. \quad (10)$$

Гаусс туридаги формулаларнинг барча A_k коэффициентлари
мусбатдир. Одатда Гаусс квадратур формуласи номи билан
(9) формуланинг $\rho(x) \equiv 1$ бўлган хусусий ҳоли аталади,
унда $[a, b]$ оралиқ чекли бўлиб, маълум чизиқли алмашти-
ришлар билан $[-1; 1]$ га келтирилади:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (11)$$

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)}{[(2n)!]^3(2n+1)} f^{(2n)}(\xi), \xi \in [-1; 1], \quad (12)$$

x_k тугунлар чап қисми $L_n(x)$ Лежандр кўпхадидан иборат
бўлган ушбу тенгламанинг илдизларидан ташкил то-
пади:

$$\frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \equiv 0. \quad (13)$$

Хусусан, $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = x$, $L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $L_3(x) =$
 $= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ ва ҳоказо. A_k коэффициентлар қуйидаги
формула бўйича аниқланади:

$$A_k = \frac{2}{(1 - x_k^2) [L_n'(x_k)]^2} \quad (k = 1; n). \quad (14)$$

Формуланинг $n = 1 - 6$ учун тугунлари, коэффициентлари,
қолдиқ ҳадлари:

$$n = 1 \text{ учун } x_1 = 0, A_1 = 2, R_1 = \frac{1}{3} f''(\xi),$$

$$n = 2 \text{ учун } x_1 = -x_2 = -0,5773502692, A_1 = A_2 = 1, \\ R_2 = \frac{1}{135} f^{IV}(\xi),$$

$$n = 3 \text{ учун } x_1 = -x_3 = -0,774596692, x_2 = 0, A_1 = \\ = A_3 = \frac{5}{9}, A_2 = \frac{8}{9}, R_3 = \frac{1}{15750} f^{(6)}(\xi),$$

$$n = 4 \text{ учун } x_1 = -x_4 = -0,8611363116, x_2 = -x_3 = \\ = -0,3399810436, A_1 = A_4 = 0,3478548451, A_2 = A_3 = \\ = 0,6521451549, R_4 = \frac{1}{3472875} f^{(8)}(\xi);$$

$$n = 5 \text{ да: } x_1 = x_5 = -0,9061798456, x_2 = -x_4 = \\ = -0,5384693101, x_3 = 0, A_1 = A_5 = 0,2369268851, A_2 = \\ = A_4 = 0,478628705, A_3 = 0,5688888899, R_5 = \frac{1}{1237732650} f^{(10)}(\xi);$$

$$n = 6 \text{ да: } x_1 = -x_6 = -0,9324695142, x_2 = -x_5 = \\ = -0,6612093865, x_3 = -x_4 = -0,2386191861, A_1 = A_6 = \\ = 0,1713244924, A_2 = A_5 = 0,3607615730, A_3 = A_4 = \\ = 0,4679139346,$$

$$R_6 = \frac{1}{648984486150} f^{(12)}(\xi).$$

$\int_a^b f(t) dt$ интегрални ҳисоблашда (11) формуладан фойда-
ланиш учун $t = \frac{b-a}{2} x + \frac{b+a}{2}$ алмаштириш киритилади:

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2} x + \frac{a+b}{2}\right) dx = \\ = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n A_k f(t_k) + \tilde{R}_n^*(f),$$

$t_k = \frac{b-a}{2} x_k + \frac{b+a}{2}$, x_k — Гаусс квадратур формуласининг
[−1; 1] оралиқдаги тугунлари, A_k — уларга мос коэффици-
ентлар, $\tilde{R}_n^* = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} R_n$.

4-мисол. Ушбу $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ интегрални Гаусс формуласи ёрдамида ҳисоблаб топинг.

Ечиш: 1) $x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2} = \frac{1}{2} (t+1)$ алмаштириш

киритамиз: $J = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{1 + \frac{1}{8} (t+1)^3} = 4 \int_{-1}^1 \frac{dt}{8 + (t+1)^3};$

2) $n=4$ бўлсин. У ҳолда: $J = 4 \left[0,347855 \left(\frac{1}{8 + (-0,861136+1)^3} + \frac{1}{8 + (0,861136+1)^3} \right) + 0,652145 \left(\frac{1}{8 + (0,339981+1)^3} + \frac{1}{8 + (0,339981+1)^3} \right) \right] = 0,835624.$ Интегралнинг аниқ қиймати 0,835598.

Ушбу

$$\int_a^b (b-x)^\alpha (x-a)^\beta f(x) dx \quad (\rho(x) = (b-x)^\alpha (x-a)^\beta, \alpha > -1, \beta > -1)$$

кўринишдаги интегралларни ҳисоблашда Гаусс типдаги квадратур формулалардан фойдаланиш учун интеграллаш оралиғи чизиқли алмаштиришлар йўли билан $[-1; 1]$ стандарт оралиққа келтирилади. Натижада:

$$J = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (15)$$

Бунда тугунлар вазифасини n - даражали

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}] \quad (16)$$

Якоби кўпхадларининг илдизлари бажаради,

$$A_k = 2^{\alpha+\beta+1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \cdot \frac{1}{(1-x_k^2) [P_n'(\alpha+\beta)(x_k)]^2}, \quad (17)$$

бунда $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (z > 0)$ — Эйлернинг иккинчи жинс

интеграл, $\alpha = \beta = 0$ бўлганда (16) Якоби кўпхадлари Лежандр кўпхадларига, (15) формула (11) Гаусс формуласига айланади.

Мелер формуласи ((15) квадратур формуланинг хусусий кўринишларидан бири):

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k), \quad (18)$$

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad \rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}, \quad R_n(f) = \\ = \frac{\pi}{(2n)! 2^{2n-1}} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (19)$$

5-мисол. Ушбу $J = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} (1+x^2)}, \quad n=5,$ ин-

теграл ҳисоблансин.

Ечиш: $x = \pm 1$ нуқтада интеграл чексизликка айланади. Агар бунда $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ деб қабул қилинса, Мелер квадратур формуласидан фойдаланиш мумкин бўлади:

$$J \approx \frac{\pi}{5} \sum_{k=1}^5 \frac{1}{1+x_k^2}, \quad x_k = \cos \frac{2k-1}{10} \pi = \frac{\pi}{5} \left(\frac{1}{1+\cos^2 \frac{\pi}{10}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{1+\cos^2 \frac{3\pi}{10}} + \frac{1}{1+\cos^2 \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{1+\cos^2 \frac{7\pi}{10}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{1+\cos^2 \frac{9\pi}{10}} \right) = \frac{\pi}{5} (0,52506982 + 0,74322282 + 1 + \\ + 0,74322282 + 0,52506985) = 2,496241.$$

Чебишев квадратур формуласи қуйидаги кўринишда берилади:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k), \quad n = 1(1) 7. \quad (20)$$

Формуланинг тугунлари:

$$n = 1, \quad x_1 = 0;$$

$$n = 2, \quad -x_1 = x_2 = 0,577350269;$$

$$n = 3, -x_1 = x_3 = 0,7071067812, x_2 = 0;$$

$$n = 4, -x_1 = x_4 = 0,79465444723, -x_2 = x_3 = 0,1875924741;$$

$$n = 5, -x_1 = x_5 = 0,8324974870, -x_2 = x_4 = 0,3745414096, x_3 = 0;$$

$$n = 6, -x_1 = x_6 = 0,8662468181, -x_2 = x_5 = 0,4225186538, -x_3 = x_4 = 0,2666354015;$$

$$n = 7, -x_1 = x_7 = 0,8838617008, -x_2 = x_6 = 0,5296567753, -x_3 = x_5 = 0,3239118105, x_4 = 0;$$

$$n = 9, -x_1 = x_9 = 0,9115893077, -x_2 = x_8 = 0,6010186554, -x_3 = x_7 = 0,5287617831, -x_4 = x_6 = 0,1679061842, x_5 = 0.$$

6-мисол. Ушбу $J = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$ интеграл ҳисоблансин.

Ечиш: $n = 7$ бўлсин. $t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} = \frac{x+1}{2}$ ал-

маштириш киритиб, интеграллаш оралиғини $[-1; 1]$ га келтирамиз. Бизда $dt = 0,5 dx$, $1+t^3 = (8+(x+1)^3)/8$, $t=0$ да $x=-1$, $t=1$ да $x=1$ ва

$$J = \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+(x+1)^3},$$

(20) формуладан фойдаланамиз:

$$J = \frac{2}{7} \sum_{k=1}^7 \frac{1}{8+(x_k+1)^3} = \dots = 0,835637, x_k \text{ тугунлар}$$

қиймати юқорида келтирилган жадвалдан олинади.

Эйлер—Маклорен формуласи қуйидагидан иборат:

$$\int_a^b f(x) dx = T_n + \Delta + R_{2k}(f), \quad (21)$$

бунда $h = (b-a)/n$, $\Delta = - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h^{2j} B_{2j}}{(2j)!} [f^{(2j-1)}(b) -$

— $f^{(2i-1)}(a)$] — трапециялар катта формуласига тузатма, $0 \leq \tau \leq 1$.

$$R_{2k}(f) = \frac{h^{2k+1}}{(2k)!} \int_0^1 \varphi_{2k}(\tau) \sum_{j=0}^{n-1} f^{(2k)}(a + jh + h\tau) d\tau, \quad (22)$$

$$T_n = h \left[\frac{j(a) + j(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(a + jh) \right];$$

Бернулли сонлари: $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_{2k+1} = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, $B_{12} = -\frac{691}{2730}$, $B_{14} = -\frac{7}{6}$, $B_{16} = -\frac{3616}{510}$, $\dots$.

Бернулли кўпхадлари: $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$, $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$, $B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$, $B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$.

$\Phi_n(x) = B_n(x) - B_n$ ($n = 1, 2, \dots$) — Бернулли кўпхадларидан фақат озод ҳад билан фарқ қиладиган функция. $x = 0$ ва $x = 1$ да бу функция ($\Phi_1(x)$ дан ташқари) нолга айланади. $(0; 1)$ оралиқда $\Phi_2(x)$, $\Phi_4(x)$, $\Phi_6(x)$, $\dots$ кўпхадлар доимий, $\Phi_{2k}(x)$ кўпхад $(-1)^k$ ишорага эга, $x = 0,5$ да $\Phi_3(x)$, $\Phi_5(x)$, $\Phi_7(x)$, $\dots$ нолга айланади. $\Phi_{2k+1}(x)$ кўпхад $(0; 0,5)$ оралиқда $(-1)^{k-1}$ ишорага, $(0,5; 1)$ оралиқда $(-1)^k$ ишорага эга.

7-мисол (қаранг: (7), 352-б). Эйлер — Маклорен формуласи ёрдамида

$$J = \int_1^2 \left(\cos x - \frac{1}{x^2} + \operatorname{sh} x \right) dx$$

интеграл $1 \cdot 10^{-4}$ гача аниқлик билан ҳисоблансин.

Ечиш: $n = 5$ бўлсин. У ҳолда $h = (2-1)/5 = 0,2$, $x_i = 1 + 0,2i$ ($i = 0; 5$),

$$f(x_0) = f(1) = 0,71550, \quad f(x_1) = f(1,2) = 1,17738, \quad f(x_2) = \\ = f(1,4) = 1,56407, \quad f(x_3) = f(1,6) = 1,95577, \quad f(x_4) = f(1,8) = \\ = 2,40636, \quad f(x_5) = f(2) = 2,96077, \quad .$$

$$T_5 = 0,2 \left[\frac{f(x_0) + f(x_5)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_4) \right] = 1,788342.$$

Учинчи тартибли ҳосила билан чегараланамиз:

$$f'(x) = -\sin x + \frac{2}{x^3} + \operatorname{ch} x, \quad f''(x) = \dots, \quad f'''(x) = \sin x + \\ + \frac{4}{x^6} + \operatorname{ch} x, \quad f'(1) = 2,70161, \quad f'(2) = 3,10290, \quad f'''(1) = \\ = 26,38455, \quad f'''(2) = 5,42150,$$

$$\Delta = -\frac{(0,2^{2 \cdot 1/6})}{2!} (3,10290 - 2,70161) - \frac{0,2^4 \cdot (-1/30)}{4!} (5,42150 - \\ - 26,38455) = -0,0013842178. \quad J = 1,78696.$$

Ушбу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (23)$$

кўринишдаги квадратур формулада тугунлар вазифасини Че-
бишев—Эрмит

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

кўпҳадининг илдишлари ўтайди, формулада

$$A_k = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_k)]^2}, \quad R_n(f) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\xi). \quad (24)$$

(23) формула тугунлари ва коэффициентлари:

$$n = 1: x_1 = 0, \quad A_1 = 1,7724538509;$$

$$n = 2: -x_1 = x_2 = 0,7071067812, \quad A_1 = A_2 = \\ = 0,8862269255;$$

$$n = 3: -x_1 = x_3 = 1,2247448714, \quad A_1 = A_3 = 0,2954089752, \\ A_2 = 1,1816359006; \quad x_2 = 0;$$

$n = 4$. $-x_1 = x_4 = 1,6506801239$, $-x_2 = x_3 = 0,5246476233$, $A_1 = A_4 = 0,08131283545$,
 $A_7 = A_3 = 0,8040140900$;

$n = 5$: $-x_1 = x_5 = 2,0201828708$, $-x_2 = x_4 = 0,9585724646$, $x_3 = 0$, $A_1 = A_5 = 0,01995324206$,
 $A_2 = A_4 = 0,3936193232$, $A_3 = 0,9453087205$;

$n = 6$: $-x_1 = x_6 = 2,3506049737$, $-x_2 = x_5 = 1,3358490740$, $-x_3 = x_4 = 0,436077119$, $A_1 = A_6 = 0,004530009906$, $A_2 = A_5 = 0,1570673203$, $A_3 = A_4 = 0,7246295952$.

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

$H_n(x)$ кўпхад $(-\infty; +\infty)$ ораликда $\rho(x) = e^{-x^2}$ вазн билан ортогонал система ташкил қилади.

8-мисол. Ушбу $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{5+x} dx$ интеграл ҳисоблансин

($n = 10$).

Ечиш. (23) формула бўйича:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{5+x} dx \approx \sum_{k=1}^{10} A_k \cdot \frac{1}{5+x_k}.$$

$n = 5$ учун x_k ва A_k қийматларини юқорида келтирилган жадвалдан оламиз. $A_2 = A_4$ ва $A_1 = A_5$, шунга кўра:

$$\begin{aligned} J &\approx A_3 \cdot \frac{1}{5+x_3} + A_2 \left(\frac{1}{5+x_2} + \frac{1}{5+x_4} \right) + A_1 \left(\frac{1}{5+x_1} + \frac{1}{5+x_5} \right) = \\ &= 0,9453087 \cdot \frac{1}{5} + 0,3936193 \left(\frac{1}{5-0,9585724} + \frac{1}{5+0,9585724} \right) + \\ &+ 0,0199532 \left(\frac{1}{5-2,0201829} + \frac{1}{5+2,0201829} \right) = 0,3620556. \end{aligned}$$

Ушбу

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (25)$$

кўринишдаги квадратур формулада тугунлар сифатида n -даражали

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x})$$

Лагерр кўпҳадининг илдизлари олинади. Формулада:

$$A_k = \frac{n! \Gamma(\alpha + n + 1)}{x_k [L_n^{(\alpha)}(x_k)]^2}, \quad R_n(f) = \frac{n! \Gamma(\alpha + n + 1)}{(2n)!} f^{(2n)}\left(\frac{\tau}{5}\right). \quad (26)$$

(25) квадратура формуласи тугунлари ва коэффициентлари ($n=1(1)6$ учун; $\alpha=0$):

$$n=1: x_1=1, A_1=1;$$

$$n=2: x_1=0,5857864376, x_2=3,4142135624, A_1=0,8535533906, A_2=0,1464466094;$$

$$n=3: x_1=0,4157745568, x_2=2,2942803603, x_3=6,2899450829, A_1=0,7110930059, A_2=0,2785177336, A_3=0,0103892565;$$

$$n=4: x_1=0,3225476896, x_2=1,7457611012, x_3=4,5366202969, x_4=9,3950709123, A_1=0,6031541043, A_2=0,3574186924, A_3=0,0388879085, A_4=0,0005392947;$$

$$n=5: x_1=0,2635603197, x_2=1,4134030591, x_3=3,5964257710, x_4=7,0858100059, x_5=12,6408008443, A_1=0,5217556106, A_2=0,3986668111, A_3=0,0759424497, A_4=0,0036117558, A_5=0,0000233700;$$

$$n=6: x_1=0,2228466042, x_2=1,8889321017, x_3=2,9927363261, x_4=5,7751435691, x_5=9,8374674184, x_6=15,9828739806, A_1=0,4589646740, A_2=0,4170008308, A_3=0,1133733821, A_4=0,0103991974, A_5=0,0002610172, A_6=0,0000008985.$$

Бир неча Лагерр кўпҳади ($\alpha=0$ да): $L_0(x)=1$, $L_1(x)=-x+1$, $L_2(x)=x^2-4x+2$, $L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6$, $L_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+74$.

$$9\text{-мисол. Ушбу } J = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+\sqrt{x}} dx \text{ интеграл ҳисоб-}$$

лансин, $\varepsilon=10^{-3}$.

Ечиш. (25) формулада $f(x)=(1+\sqrt{x})^{-1}$. $n=4$ бўлсин. x_k, A_k ($k=1; 4$) қийматларини юқорида келтирилган жадвалдан оламиз:

$$J = 0,60315 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{0,32255}} + 0,35742 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1,74578}} + \\ + 0,038891 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{4,53662}} + 0,00539 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{9,39507}} = \\ = 0,5524 \approx 0,552.$$

Вазн функциясини ажратиш усули. Агар $I = \int_a^b f(x) dx$ интеграл остидаги $f(x)$ функция $[a, b]$ ораллиқнинг бир ёки бир неча нуқтасида чексизликка айланса, у шундай $f(x) = \rho(x)\varphi(x)$ кўринишида ёзиладики, бунда $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да чегараланган ва етарлича узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин, $\rho(x) > 0$ — вазн функцияси.

10-мисол. Ушбу $\int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{1-x} dx$ интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. Бу ерда $x = \pm 1$ да интеграл остидаги функция чексизликка айланади, $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ деб олиб, Меллер (21) формуласидан фойдаланамиз, $n = 5$ бўлсин. У ҳолда:

$$J \approx \frac{\pi}{5} \sum_{k=1}^5 e^{2x_k} (x_k = \cos \frac{2k-1}{10} \pi), \quad J \approx \frac{\pi}{5} (7,3890557 + \\ + 3,2399907 + 1 + 3,2085429 + 0,14925292) = 7,1615267.$$

Аддитив усул (Л. В. Канторович таклиф қилган). Интеграл остидаги функция $f(x) = (x-c)^\alpha \varphi(x)$ ($c \in [a, b]$, $\alpha > -1$) кўринишига эга бўлиб, $[a, b]$ ораллиқда $\varphi(x)$ нинг k -тартибгача ҳосилалари мавжуд. У ҳолда $f(x)$ функция $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ кўринишида ёзилади, бунда

$$f_1(x) = \sum_{j=0}^k \frac{\varphi^{(j)}(c)}{j!} (x-c)^{j+\alpha}, \quad f_2(x) = (x-c)^\alpha [\varphi(x) - \varphi(c) - \\ - \sum_{j=1}^k \frac{\varphi^{(j)}(c)}{j!} (x-c)^j].$$

$f_1(x)$ даражали функция бўлиб, у осон интегралланади. Квадрат қавс ичидаги ифода ва унинг k -тартибли ҳосиласи

$x=c$ да нолга айланади. Демак, $f_2(x)$ функция $x=c$ да махсусликка эга эмас ва шу нуқтада унинг $k + [\alpha]$ тартибли ҳосиласи узлуксиз. Шунга кўра $\int_a^b f_2(x) dx$ га нисбатан бирор квадратур формула қўлланилиши мумкин.

11-мисол. Ушбу $J = \int_2^4 [(t^2-2)(t^2-4)]^{-1/2} dt$ интеграл ҳисоблансин.

Ечиш: Интеграл остидаги функция $x=2$ нуқтада $[(2^2-2)(t-2)(2+2)]^{-1/2} = [8(t-2)]^{-1/2}$ кўринишдаги махсусликка эга. Махсуслигини ажратган ҳолда функцияни $f(t) = [(t^2-2)(t^2-1)(t^2-4)]^{-1/2} - [8(t-2)]^{-1/2}$ кўринишида ёзамиз. Бу ҳолда $\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = 0$. Интегрални $J = J_1 + J_2$ кўри-

нишига келтириб ечамиз. Бунда $J_1 = \int_2^4 f(t) dt$ бирор квадратур формула билан ҳисобланади:

11-мисолга

$n = 10$

Трапециялар формуласи

n	t	$f(t)$	n	t	$f(t)$	n	t	$f(t)$
1	2,2	-0,14312695	5	3,0	-0,18452254	9	3,8	-0,17577466
2	2,4	-0,1702855	6	3,2	-0,18329041	2	$\Sigma =$	-3,1628694
3	2,6	-0,18054165	7	3,4	-0,18117931	0	$t \rightarrow 2$	0
4	2,8	-0,18411678	8	3,6	-0,17859699	10	4	-0,17284832

$$J_1 = -0,333572.$$

$$J_2 = \int_2^4 [8(t-2)]^{-1/2} dt \text{ ни бевосита ҳисоблаймиз:}$$

$$J_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{t-2} \right]_2^4 = 1 - 0 = 1;$$

Шундай қилиб, $I = J_1 + J_2 = -0,333572 + 1 = 0,666428$.

Л. А. Люстерник ва В. А. Диткин кубатур формуласининг жўриниши:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \approx \pi \left[\frac{1}{4} f(0) + \frac{1}{8} \sum_{i=0}^5 f(P_i) \right] \quad (27)$$

Агар Ω — маркази координаталар бошида жойлашган бирлик доира бўлса, P_i нуқталар $P_i = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\varphi_i = \frac{\pi}{3} i$ ($i = 0; 5$) қутб координаталарида берилади; Ω — бирлик доира ичига чизилган мунтазам олтибурчак бўлган ҳолда:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{43}{65} f(0) + \frac{125}{336} \sum_{i=0}^5 f(P_i) \right] \quad (28)$$

бунда $P_i = \left(\sqrt{\frac{14}{15}}, \varphi_i = \frac{\pi}{3} i, i = 0; 5 \right)$; агар Ω — квадрат ($-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$) бўлса,

$$\begin{aligned} \iint_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy &\approx \frac{8}{7} f(0, 0) + \frac{20}{63} \left[f\left(\sqrt{\frac{14}{15}}, 0\right) + \right. \\ &+ f\left(-\sqrt{\frac{14}{15}}, 0\right) \left. \right] + \frac{5}{9} \left[f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \right. \\ &+ f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \\ &\left. + f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

(27) — (29) формулалардан Ω ихтиёрий радиусли доира, ихтиёрий радиусли доира ичига чизилган мунтазам олтибурчак, эллипс, тўғри тўртбурчак бўлган ҳолда ҳам фойдаланиш мумкин. Фақат ўзгарувчилар мос тартибда алмаштирилиши керак. Агар Ω ихтиёрий шаклга эга бўлса, у юқорида кўрсатилган турдаги соҳалар йиғиндисига келтирилади.

12-мисол. Ушбу $I = \iint \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$ интеграл ҳисоблансин. $\Omega: x^2 + y^2 \leq 2x$.

Ечиш. $x^2 + y^2 - 2x + 1 \leq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 1$, ёки $x_1 = x + 1, y_1 = y$ алмаштириш бажарилса, $I = \iint_{\Omega_1} \sqrt{1+(x_1-1)^2+y_1^2} dx_1 dy_1, \Omega_1: x_1^2 + y_1^2 \leq 1$ — бирлик доира. (27) формуладан фойдаланамиз. Қулайлик учун интеграл остидаги функцияни қутб координаталарида ёзамиз:

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad y_1 = \rho \sin \varphi, \quad f(x_1, y_1) = \sqrt{2 + 2\rho \cos \varphi + \rho^2},$$

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \varphi_i = \frac{\pi}{3} i, \quad i = \overline{0;5},$$

$$I \approx \pi \left[\frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{8} \sum_{i=0}^5 \sqrt{\frac{8}{3} + 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \frac{\pi}{3} i} \right] = 4.85838.$$

Монте — Карло усули. Бу усул m -каррали $I = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_m) dx_1, \dots, dx_m$ интегрални ҳисоблашда қўлланилади, бунда Ω соҳа m -ўлчовли $0 \leq x_i \leq 1$ ($i = 1, m$) бирлик кубда ётади. Тасодифий сонларнинг $[0; 1]$ оралиқда текис тақсимланган m та кетма-кетлигини оламиз:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \dots, & x_n^{(1)}, & \dots, \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \dots, & x_n^{(2)}, & \dots, \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ x_1^{(m)}, & x_2^{(m)}, & \dots, & x_n^{(m)}, & \dots, \end{array}$$

Исталган $P_i(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(m)})$ ($i = 1, 2, \dots$) нуқталар m -ўлчовли бирлик кубда текис тақсимланган тасодифий нуқталар сифатида қаралиши мумкин.

Жами N та тасодиғий нуқтадан n таси Ω соҳага, қолган $N - n$ таси Ω дан ташқарига тушган бўлсин. N нинг етарлича катта қийматида

$$I \approx \frac{V_{\Omega}}{n} \sum_{i=1}^n f(P_i) \quad (30)$$

ўринли бўлади (V_Ω — интеграллаш соҳасининг m -ўлчовли ҳажми). V_Ω ни ҳисоблаш қийин бўлса, $V_\Omega \approx n/N$ деб оли-

ниши мумкин. У ҳолда $I \approx \frac{1}{N!} \sum_{i=1}^n f(P_i)$.

13-мисол. Монте — Карло усули қўлланилиб, $\iint_D \sqrt{x^2 - y^2} dx dy$ интеграл ҳисоблансин, Ω — учлари $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(1; 1)$ нукталарда жойлашган учбурчак.

Ечиш: Ω соҳа $0 \leq x \leq 1$, $y \leq x$ лар билан чегараланган тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ бирлик квадратга қарашли. RND функциянинг ЭХМ хотирасига

олдиндан киритилган, қийматлари (тасодифий сонлар) жадвалдан фойдаланамиз:

[0; 1] ораликда текис тақсимланган тасодифий сонлар

0,57705	0,05926	0,00188	0,52906	0,05758
0,71618	0,66289	0,55709	0,09461	0,00336
0,73710	0,35483	0,86977	0,99602	0,88222
0,70131	0,09393	0,31303	0,69962	0,98585
0,16961	0,30304	0,11578	0,31311	0,52103
0,53324	0,55186	0,93045	0,27004	0,91827
0,43166	0,64093	0,93011	0,65339	0,07069
0,26275	0,20514	0,42844	0,93382	0,13928

Жадвалда кетма-кет келувчи ва Ω га қаринли бўлган ҳар икки сонни $P(x, y)$ тасодифий нуқтанинг координатлари сифатида қабул қиламиз. Уларни учта ўнли ишорагача яхлитлаб олайлик. Масалан, $x_1 = 0,577$, $y_1 = 0,716$. Бундай сонлар жуфти $N = 20$ та бўлиб (қуйидаги жадвалга қаранг), улардан n та жуфти $0 \leq x \leq 1$, $y \leq x$ шартни қаноатлантирсин (жадвалнинг $y \leq x$ графасига + қўямиз):

13-мисолга

Монте — Карло усули

x	y	$y \leq x$	$f(x, y)$	x	y	$y \leq x$	$f(x, y)$
0,577	0,716	—		0,930	0,428	+	0,82566094
0,737	0,701	+	0,22752582	0,529	0,095	+	0,52039984
0,170	0,533	—		0,996	0,700	+	0,70853087
0,432	0,263	+	0,34271708	0,313	0,270	+	0,15833192
0,059	0,663	—		0,653	0,934	—	
0,355	0,094	+	0,34232878	0,058	0,003	+	0,057922361
0,303	0,552	—		0,882	0,986	—	
0,640	0,205	+	0,60627963	0,521	0,918	—	
0,902	0,557	—		0,071	0,139	—	
0,870	0,323	+	0,80781866	$n=10$			4,5975159
0,116	0,930	—					

Интеграллаш соҳаси (учбурчак) нинг юзи: $V_{\Omega} = 0,5 \cdot 1 \cdot 1 = 0,5$.

(30) формула бўйича: $I \approx \frac{1}{2 \cdot 10} \cdot 4,597159 = 0,22987579 \approx 0,230$.

МАШҚЛАР

$$1. \int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \text{ интерполяцион квадра-}$$

тур формула коэффициентлари учун $\sum_{k=1}^n A_k = \int_a^b \rho(x) dx$ тенглик ўринли бўлишини кўрсатинг.

2. 1-мисолда $\rho(x) = 1$, $n = 2$, $x_1 = a$, $x_2 = b$ бўлган ҳол учун интерполяцион квадратур формула тузилсин.

3. 1-мисолда $\rho(x) = 1$, $n = 3$, $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$, $x_3 = b$.

Интерполяцион квадратур формула тузилсин.

4. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, 2-масалада чиқариладиган квадратур формуланинг қолдиқ ҳади топилсин.

5. 3-масалада тузиладиган квадратур формуланинг қолдиқ ҳади топилсин.

6. Трапециялар квадратур формуласи умумий интерполяцион квадратур формулага асосланиб чиқарилсин.

7. Жисмнинг Ox ўқиға перпендикуляр бўлган кесимининг $S = S(x)$ юзи $S(x) = Ax^2 + Bx + C$ ($a \leq x \leq b$, A, B, C — доимий сонлар) қонун бўйича ўзгаради. Шў жисмнинг ҳажми $V = \frac{b-a}{6} \left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right]$ га тенглигини, яъни Симпсон формуласи билан ифодаланишини кўрсатинг.

8. Қўйидаги квадратур формулаларни келтириб чиқаринг:

$$a) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} f\left(\cos \frac{k\pi}{n+1}\right) + R_n,$$

$$R_n = \frac{\pi}{2^n} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}, \quad -1 \leq \xi \leq 1;$$

$$b) \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x) dx = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} \times \\ \times f\left(\cos \frac{2k\pi}{2n+1}\right) + R_n,$$

$$R_n = \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}, \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

9. Учинчи даражали кўпҳадни аниқ интеграллайдиган

$$\int_0^1 f(x) dx \approx C_0 f(0) + C_1 f(1) + C_2 f'(0) + C_3 f'(1) + C_4 f(0.5)$$

кўринишидаги квадратур формулани тузинг.

10. Учинчи даражали кўпхадни аниқ интегралловчи

$$I = \int_{-1}^1 f(x) \sin \frac{\pi}{2} x dx = C_1 f(-1) + C_0 f(0) + C_1 f(1)$$

кўринишидаги квадратур формулани тузинг.

11. Ушбу $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ нинг қийматини трапециялар форму-

ласидан фойдаланиб $1 \cdot 10^{-3}$ аниқликда топиш учун нечта тугун олиниши етарли. Интегрални ҳисобланг.

12 — 43 - машқларда берилган интеграллар трапециялар ва Симпсон формулалари ёрдамида топилсин ва хато баҳолансин:

12. $\int_1^2 \frac{xdx}{(x+3)^2}$, $n = 10$. 13. $\int_0^3 \frac{xdx}{(3x+1)^3}$, $n = 10$. 14. $\int_1^2 \frac{x^2 dx}{(5x+1)^2}$,

$n = 10$. 15. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{(3x+2)^2}$, $n = 10$. 16. $\int_1^3 \frac{x^3 dx}{(2x+3)^4}$, $n = 10$.

17. $\int_1^3 \frac{dx}{x(4x-1)^3}$, $n = 10$. 18. $\int_0^3 \frac{dx}{3x^2+x+4}$, $n = 10$.

19. $\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^3}$, $n = 10$. 20. $\int_1^{2.8} \frac{dx}{x(3 \cdot 2^3 + x^3)}$, $n = 8$.

21. $\int_{-0.2}^{2.4} \frac{x^3 dx}{2,81^4 + x^2}$, $n = 8$. 22. $\int_2^{2.5} \frac{dx}{(9x+2)\sqrt{9,8x+4}}$, $n = 10$.

23. $\int_{-1,2}^{2,5} \sqrt{2x+3} \sqrt{(0,8x+4)^3} dx$, $n = 10$. 24. $\int_{-0,2}^{0,3} \sqrt{1-x^2} x^3 dx$,

$n = 10$. 25. $\int_{-0,5}^1 \sqrt{(3-x^2)^2} x dx$, $n = 15$. 26. $\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{3,61-x^2}}$,

$n = 8$. 27. $\int_1^{1,5} \frac{dx}{x \sqrt{3,61-x^2}}$, $n = 10$. 28. $\int_{1,2}^{2,2} \frac{dx}{x \sqrt{x^5+2,25}}$, $n = 10$.

$$29. \int_{1,2}^{2,2} \frac{dx}{x \sqrt{x^5 - 2,25}}, \quad n = 10. \quad 30. \int_{0,7}^{2,2} \sqrt[5]{5,2x - 3,08} \, dx, \quad n = 10.$$

$$31. \int_{0,3}^{1,9} \frac{\sqrt{x} \, dx}{\sqrt{2,1^3 - x^3}}, \quad n = 8. \quad 32. \int_0^{\pi/2} \sin 0,92 x \, dx, \quad n = 6.$$

$$33. \int_0^{\pi/2} \sin^2 0,8 x \, dx, \quad n = 6. \quad 34. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin 0,6x}, \quad n = 6.$$

$$35. \int_0^{\pi/2} \cos^2 0,8 x \, dx, \quad n = 6. \quad 36. \int_0^{\pi/2} \sin 0,32x \sin 0,8x \, dx, \quad n = 8.$$

$$37. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 0,7x \, dx}{\cos^2 0,7x}, \quad n = 8. \quad 38. \int_{0,2}^{\pi/3} \operatorname{ctg}^2 2x \, dx, \quad n = 8. \quad 39. \int_{0,2}^{\pi/3} \frac{\operatorname{ctg}^2 0,3x \, dx}{\sin^2 0,3x},$$

$$n = 12. \quad 40. \int_0^1 e^{x^2} \, dx, \quad n = 10. \quad 41. \int_0^1 e^{x^2} \, dx, \quad n = 10.$$

$$42. \int_0^2 e^{0,6x} \sin 0,8x \, dx, \quad n = 10. \quad 43. \int_0^{\pi/2} e^{0,6x} \cos x \, dx, \quad n = 10.$$

44 — 59 - машқларда берилган интеграллар трапециялар ёки Симпсон формуласи ёрдами билан ε аниқликда ҳисоблансин.

$$44. \int_1^2 \frac{x \, dx}{(x+3)^2}, \quad \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}. \quad 45. \int_0^3 \frac{x \, dx}{(3x+1)^3}, \quad \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}.$$

$$46. \int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}, \quad \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}. \quad 47. \int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2}, \quad \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}.$$

$$48. \int_0^1 x \ln(1+x) \, dx, \quad \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}. \quad 49. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \, dx,$$

$$\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}. \quad 50. \int_0^1 \frac{dx}{1+e^{0,3x}}, \quad \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}. \quad 51. \int_{0,5}^{1,5} \sin \ln x \, dx,$$

$$\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}. \quad 52. \int_{0,5}^{1,5} \cos \ln x \, dx, \quad \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}. \quad 53. \int_0^{\pi/4} \ln \cos x \, dx,$$

$$\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}. \quad 54. \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - 0,5 \sin^2 x} \, dx, \quad \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}.$$

$$55. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x}}, \quad \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}. \quad 56. \int_0^{1/2} \frac{\arcsin x \, dx}{x}, \quad \varepsilon = 0,5 \times$$

$$\times 10^{-3}. \quad 57. \int_0^{1/2} \frac{\arctg x \, dx}{x}, \quad \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}. \quad 58. \int_0^1 \frac{\arctg x \, dx}{1+x},$$

$$\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}. \quad 59. \int_0^{0,5} \frac{(\arctg x)^2 \, dx}{x}, \quad \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}.$$

60 — 65-масалаларда функцияларнинг кўрсатилган x_i лардаги $F(x_i)$ қийматларини $1 \cdot 10^{-6}$ аниқликда топиш ва графикларини ясаш талаб қилинади (ҳисоблашлар ЭХМ да ба-
жарилсин):

$$60. F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt \quad (\text{интеграл синус}), \quad x = 0 \left(\frac{\pi}{36} \right) \frac{\pi}{2},$$

$x = 0 \quad (0,1) \quad 10.$

$$61. F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt \quad (\text{Френель функцияси}), \quad x =$$

$= 0 \quad (0,1) \quad 10.$

$$62. F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} \, dt \quad (\text{Лаплас функцияси}), \quad x =$$

$= 0 \quad (0,1) \quad 4.$

$$63. F(x) = - \int_0^x \ln \cos t \, dt \quad (\text{Лобачевский функцияси}), \quad x =$$

$= 0 \quad \left(\frac{\pi}{36} \right) \quad \frac{\pi}{3}.$

$$64. F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 t}} \quad (1\text{-жинс эллиптик инте-}$$

грал), $x = 0 \left(\frac{\pi}{36} \right) \frac{\pi}{2}, \quad \alpha^2 = 0,1 \quad (0,1) \quad 0,5.$

65. $F(x) = \int_0^x \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 t} dt$ (2-жинс эллиптик интеграл), $x = 0 \left(\frac{\pi}{36} \right) \frac{\pi}{2}$, $\alpha^2 = 0,1$ (0,1) 0,5.

66. $y = \ln(1 - x^3)$ ($0 \leq x \leq 0,5$) эгри чизик ёйининг узунлиги 10^{-6} гача аниқликда топилсин.

67. Ярим ўқлари: 1) $a = 10$, $b = 6$; 2) $a = 1$, $b = 0,5$ бўлган эллипс ёйининг узунлиги 10^{-2} аниқликда топилсин.

68. $y = \sin x$ синусоиданинг $0 \leq x \leq \pi$ оралиқдаги узунлиги 10^{-2} аниқликда топилсин.

66. $\rho\varphi = 1 \left(\frac{3}{4} \leq \varphi \leq \frac{4}{3} \right)$ гиперболик спирал ёйининг узунлиги 10^{-3} аниқликда топилсин.

70. $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$ чизик ва абсциссалар ўқи билан чегараланган эгри чизикли трапециянинг юзи топилсин.

71. $y = \tanh x$, $y = \frac{2}{3} \cos x$ чизиклар ва ординаталар ўқи билан чегараланган эгри чизикли учбурчакнинг юзи $0,5 \cdot 10^{-5}$ аниқликда топилсин.

72. 1) $x^4 + y^4 = 31,36x^2$; 2) $x^4 + y^4 = x^3$ чизик билан чегараланган шаклнинг абсциссалар ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажми топилсин ($\epsilon = 10^{-3}$).

73. $y = 2x - x^2$ парабола ва абсциссалар ўқи билан чегараланган шаклнинг ординаталар ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўладиган жисм ҳажми топилсин ($\epsilon = 10^{-3}$).

74. Томони 7,8 га тенг бўлган мунтазам олтибурчак томонларидан бири атрофида айланади. Ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажми топилсин ($\epsilon = 10^{-2}$).

75. Жисмнинг тезлиги $v = \sqrt{1+t}$ м/с формула билан берилади. Дастлабки 10 с ичида жисм ўтган масофани топинг ($\epsilon = 10^{-1}$ м).

76. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ Декарт япроғи юзини 10^{-1} аниқликда топинг.

77 — 100-машқларда келтирилган интеграллар Гаусс туридаги формулалар ёрдамида топилсин ва топилган натижадаги хато қиймати баҳолансин:

$$77. \int_1^2 \frac{x dx}{(x+3)^2}, n = 9.$$

$$78. \int_0^3 \frac{x dx}{(3x+1)^3}, n = 10.$$

$$79. \int_1^2 \frac{x^2 dx}{(5x+1)^2}, n = 12.$$

$$80. \int_1^3 \frac{x^3 dx}{(2x+3)^4}, n = 10.$$

81. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}, n=3.$ 82. $\int_0^1 e^{x^2} dx, n=10.$
83. $\int_0^1 e^{-x^2} dx, n=14.$ 84. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}, n=10.$
85. $\int_{-0.2}^{0.3} \sqrt{1-x^2} x^3 dx, n=11.$ 86. $\int_{-0.5}^1 \sqrt{(3-x)^3} x dx, n=10.$
87. $\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{3,61-x^2}}, n=10.$ 88. $\int_1^{1.5} \frac{dx}{x \sqrt{3,61-x^2}}, n=10.$
89. $\int_0^2 e^{0,6x} \sin 0,8x dx, n=8.$ 90. $\int_0^{\pi/2} e^{0,6x} \cos x dx, n=8.$
91. $\int_0^1 x \ln(1+x) dx, n=10.$ 92. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx, n=8.$
93. $\int_{0,0}^{1,5} \cos \ln x dx, n=10.$ 94. $\int_{0,5}^{1,5} \sin \ln x dx, n=10.$
95. $\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{1+x^2} dx, n=5.$ 96. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x) dx}{1+x^2}, n=4.$
97. $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x dx}{x}, n=10.$ 98. $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx, n=10.$
99. $\int_0^1 \frac{\operatorname{irctg} x}{1+x} dx, n=10.$ 100. $\int_0^{\pi/4} \ln \cos x dx, n=8.$

101 — 114- машқларда * келтирилган интеграллар Гаусс туридаги формулалар ёрдами билан ε аниқликда топилсин (ҳисоблашларда ЭХМ*дан фойдаланилсин):

101. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} dx, \varepsilon=10^{-3}.$ 102. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x)e^{-x^2}}{2+x} dx, \varepsilon=10^{-4}.$

$$103. \int_0^{1/3} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx, \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}. \quad 104. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx,$$

$$\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-2}.$$

$$105. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(e^{0,4x}+1,5)}, \varepsilon = 10^{-5}. \quad 106. \int_0^1 \sqrt{x} \sin x^2 dx,$$

$$\varepsilon = 10^{-6}.$$

$$107. \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} e^{-x} dx, \varepsilon = 10^{-6}. \quad 108. \int_0^1 \sqrt{x} e^{x^2} dx,$$

$$\varepsilon = 10^{-6}.$$

$$109. \int_0^1 \sqrt{x} e^{-x^2} dx, \varepsilon = 10^{-4}. \quad 110. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin x^2 dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$111. \int_{-1}^1 \frac{x \arcsin x}{(1+x^2)^{3/2}} dx, \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}. \quad 112. \int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$\varepsilon = 10^{-5}.$$

$$113. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \varepsilon = 10^{-5}. \quad 114. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2(1-x)^2}}, \varepsilon = 10^{-5}.$$

115—138- машқларда берилган хосмас интеграллар ε гача аниқликда ҳисоблансин:

а) Чексиз чегарали интеграллар:

$$115. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}, \varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}. \quad 116. \int_0^1 \frac{x^2}{1-x^2} dx,$$

$$\varepsilon = 1 \cdot 10^{-6}.$$

$$117. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}, \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-6}. \quad 118. \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^3)} dx,$$

$$\varepsilon = 1 \cdot 10^{-2}.$$

$$119. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx, \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-1}. \quad 120. \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx,$$

$$\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-1}.$$

$$121. \int_0^{+\infty} e^{-3x} \cos 0,8x dx, \varepsilon = 1 \cdot 10^{-6}. \quad 122. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx, \\ \varepsilon = 1 \cdot 10^{-6}.$$

$$123. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}, \varepsilon = 1 \cdot 10^{-6}. \quad 124. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx, \varepsilon = 1 \cdot 10^{-6}.$$

б) $[a, b]$ интеграллаш оралиғи чекли бўлиб, унда $f(x)$ функция фақат битта нуқта атрофида чегараланмаган:

$$125. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \varepsilon = 1 \cdot 10^{-6}. \quad 126. \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}, \varepsilon = 1 \cdot 10^{-6}.$$

$$127. \int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}, \varepsilon = 1 \cdot 10^{-6}. \quad 128. \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}, \varepsilon = 1 \cdot 10^{-6}.$$

$$129. \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}, \varepsilon = 1 \cdot 10^{-6}. \quad 130. \int_{-9}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^3}, \\ \varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}.$$

$$131. \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1+x) dx, \varepsilon = 10^{-4}. \quad 132. \int_0^1 (1-x)^{-1} \ln x dx, \\ \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$133. \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x dx}{(1+x^2)^3}, \varepsilon = 10^{-4}. \quad 134. \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$135. \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \varepsilon = 10^{-3}. \quad 136. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(25+x^2)(1+x^2)}, \\ \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$137. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{3x}+1}, \varepsilon = 10^{-2}. \quad 138. \int_0^1 \frac{x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}}{1+x^2} dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

139 — 142-машқларда кўрсатилган функцияларнинг ол-
тита ўнли ишорали жадваллари тузилсин ва графиклари
ясалсин (ЭХМ дан фойдаланинг):

$$139. F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} \text{ (интеграл логарифми), } x=0 \text{ (0,01) } 0,5.$$

$$140. F(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt \text{ (Эйлер дилогарифми), } x = 0 \text{ (0,01) } 1.$$

$$141. F(x) = - \int_0^x \ln \cos t dt \text{ (Лобачевский функцияси), } x = 0 \left(\frac{\pi}{36} \right) \frac{\pi}{2}.$$

$$142. F(x) = \int_0^x \ln \frac{1+t}{1-t} \frac{dt}{t}, x = 0 \text{ (0,01) } 1.$$

143 — 145- машқларда берилган каррали интеграллар, трапециялар, Симпсон ва Гаусс формулаларини такрор қўлланиш усулидан фойдаланиб ҳисоблансин (бунда n_x ва n_y лар x ва y бўйича олинган тугунлар сони):

$$143. \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy, n_x = n_y = 8.$$

$$144. \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}, n_x = n_y = 6.$$

$$145. \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin(x+y) dx dy.$$

146 — 148- машқларда берилган каррали интеграллар Люстерник — Диткин кубатур формуласи қўлланилиб ҳисоблансин:

$$146. I = \iint_{\Omega} (x^2 + 4y^2 + 9) dx dy, \Omega: x^2 + y^2 \leq 4.$$

$$147. I = \iint_{\Omega} (x + xy - x^2 - y^2) dx dy, \Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.$$

$$148. I = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2 - 4x - 4y + 10) dx dy, \Omega: x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0 \text{ (эллипс билан чегараланган соҳа, чегараси билан).}$$

149 — 152- машқларда берилган каррали интеграллар Монте — Карло усули қўлланилиб ҳисоблансин:

$$149. \iint_{\Omega} e^{\frac{x}{y}} dx dy, \Omega — \text{парабола } (y^2 = x) \text{ ва } x = 0, y = 1$$

тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли учбурчак.

$$150. I = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} + 2) dx dy, \Omega: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \text{ кесмалар билан чегараланган квадрат.}$$

$$151. I = \iiint_{\Omega} (x + y - z + 10) dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 < 3.$$

$$152. I = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz, \Omega: x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1, x \leq 3, y \leq 3, z \leq 3.$$

7. ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

1- топшириқ: Ушбу $I = \int_a^b \frac{x e^{mx} dx}{(1 + mx)^2}, m = 0,6 + 0,1k$ интеграл трапециялар ва Симпсон квадратура формулалари қўлланилиб, ε аниқликда ҳисоблансин:

теграл трапециялар ва Симпсон квадратура формулалари қўлланилиб, ε аниқликда ҳисоблансин:

Вар.	a	b	k	ε	Вар.	a	b	k	ε
1	0,1	2,1	-3	10^{-3}	16	0,3	1,8	-5	10^{-4}
2	0,2	1,7	-8	10^{-2}	17	-0,4	1,6	-12	10^{-4}
3	0,3	2,2	-10	10^{-2}	18	-0,3	2,7	10	10^{-3}
4	0,1	3	8	10^{-3}	19	-1	1,2	2,4	10^{-4}
5	0,4	2,4	0,2	10^{-3}	20	0,2	2,4	-8	10^{-3}
6	0,5	2,3	0	10^{-4}	21	0,3	2,6	-9	10^{-2}
7	0,5	2,1	-4	10^{-2}	22	0,4	3,2	3,4	10^{-2}
8	0,2	1,8	-10	10^{-3}	23	0,3	3	-8	10^{-3}
9	0,3	2,2	3	10^{-3}	24	-0,2	2,1	-10	10^{-3}
10	0,4	1,9	1	10^{-2}	25	0,1	2,8	-14	10^{-4}
11	0	1,6	-2	10^{-4}	26	-0,1	1,9	-5	10^{-4}
12	-0,2	1,8	10	10^{-3}	27	0,4	2,2	10	10^{-3}
13	1	2,8	8	10^{-3}	28	0,3	2,3	8	10^{-3}
14	0,4	3,2	10	10^{-2}	29	0,1	2,6	8	10^{-3}
15	0,3	3,2	-5	10^{-3}	30	-0,2	2	4,4	10^{-4}

2- топшириқ: Қуйидаги беш интегралдан вариантларда кўрсатилган учтаси Гаусс типидagi квадратур формулалардан фойдаланиб, тўртта ишончли рақамгача аниқликда ечилсин (n — тугунлар сони):

$$I_1 = \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{1 + \cos^2 \alpha x}, \quad I_2 = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-1/2} f(x) dx,$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} q(x) dx,$$

$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{a+x} e^{-x^2} dx \quad (a = 1,0 + 0,25k),$$

$$I_5 = \int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+bx^4}} \quad (b = 0,2 + 0,1m).$$

Реп. №	I_1				I_2	I_3		I_4	I_5
	a_1	b_1	α	n	$f(x)$	α	$q(x)$	k	m
1	0,1	2,1	-0,3	6	x^3	1	$\sin 3x$		
2	0,3	3,2	0,7	5	$1/x$	0	$\cos^4 x$		
3	1,8	2,8	1,1	5	$1/x^2$	1	$\cos 4x$		
4	0,4	2,2	0,8	5	$1/x^3$	0	$\ln x$		
5	-0,8	2,1	4	6	x	1	$1/(1-3x)^2$		
6	0,3	1,8	3,2	6	x^4			1	
7	0,2	1,7	0,9	6	$1-x^2$			2	
8	0,4	1,9	2,1	6	$x^2/(1-x^2)$			3	
9	-0,4	1,5	-2,2	6	$x^3/(1-x^2)$			4	
10	+0,4	1,3	2,2	5	$1/(x(1-x^2))$			5	
11	0,3	2,2	-1	5	$1/(x^2(1-x^2))$			6	
12	0,2	1,8	-4,2	5	$1/(x^3(1-x^2))$			7	
13	0,5	2,4	2,2	5	$x^2(1-x^2)$			8	
14	-0,9	1,7	1,4	6	$x/(1-x^2)$			9	
15	-0,5	1,9	1,8	5	$x^3(1-x^2)$			10	
16	-0,7	2,4	2,2	6	$(1-x^2)^2$				0
17	0,8	2,8	2,8	5	$x(1-x^2)^2$				1
18	0,4	3,2	3,0	5	$x^2(1-x^2)^2$				2
19	0,4	3,6	2,4	5	$x^3(1-x^2)^2$				3
20	0,3	2,4	2,6	5	$(1+x^3)^{-1}$				4
21	0,7	2,8	2,8	5	$(1+x^2)^{-1}$				5
22	-0,2	2,4	2,6	6	$(1+x^2)^{-2}$				6
23	0,1	2,2	2,4	6	$(1+x^2)^{-1/3}$				7
24	0,2	2,5	3,2	6	$(1+x^2)^{-3}$				8
25	0,2	2,6	-4	5	e^{3x}				9
26	0,5	2,9	-0,8	5	$(1+x^2)^{-4}$				10
27	0,4	3,2	3,1	5	$(1+x^2)^{-5}$				11
28	0,3	2,8	2	5	$(1+x^2)^{-2/3}$				12
29	-0,5	2,2	2,2	5	$(1+x^2)^{-3/4}$				13
30	-0,8	2,4	3,2	5	$\ln^2 x$				14

8-606. ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН КОШИ МАСАЛАСИНИ СОНЛИ ЕЧИШ УСУЛЛАР

Кетма-кет дифференциаллаш усули. Агар

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

бошланғич масалада кўрсатилган тенглама учун Коши теоремаси шартлари бажарилса, яъни f функция $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ бошланғич нуқта атрофида аналитик бўлса, изланаётган $y = y(x)$ ечим $x = x_0$ атрофида Тейлор қатори кўринишида берилади:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + \frac{y'_0}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{y_0^{(n)}}{n!} (x - x_0)^n + \dots = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_0^{(n)}}{i!} (x - x_0)^i \end{aligned} \quad (3)$$

(3) тенгликда $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ коэффициентларгина (бошланғич шарт қийматлари) маълум. Қолган $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, \dots$ коэффициентларни аниқлаш учун берилган тенглама дифференциалланиб, ҳосил қилинган тенгликда $y^{(n)}$ ҳосила ўрнига унинг f ифодаси қўйилади: $y^{(n+1)} = f_1(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$; энди бу тенглик дифференциалланади ва яна $y^{(n)}$ ўрнига f қўйилади: $y^{(n+2)} = f_2(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ва ҳоказо; ҳосил қилинган $y^{(n)}, y^{(n+1)}, y^{(n+2)}, \dots$ тенгликларга (2) бошланғич шартлар қўйилиб, $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, \dots$ ҳисобланади. Агар $|x - x_0|$ катталики (3) қаторнинг яқинлашиш радиусидан ошмаса, $n \rightarrow +\infty$ да $y(x) \approx \sum_{i=0}^n \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$

тақрибий ечим хатоси нолга интилади.

1-мисол. Ушбу $y'' = xy y'$, $y'(0) = y(0) = 1$ бошланғич масала ечими даражали қатор кўринишида топилсин. Ечимнинг $y(-0,5)$ қийматини $\varepsilon = 0,001$ аниқликда ҳисоблаш учун қатор неча ҳад билан олиниши керак?

Ечиш: Қуйидагиларга эга бўламиз:

1) $y''(0) = 0 \cdot y(0) \cdot y'(0) = 0$; 2) $y''' = y y' + x y y'' + x (y')^2$, $y'''(0) = 1$; 3) $y^{(4)} = 2(y')^2 + 2y y'' + x y y''' + x y y'' + 2x y'$, $y^{(4)}(0) = 2$; 4) шу тартибда $y^{(5)}(0) = 3$, $\dots$, $y^{(n)}(0) = n - 2, \dots$; 5) изланаётган ечим;

$$y = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!} + \dots;$$

б) бу қатор $x = -0,5$ нуқтада $\frac{x^3}{3!}$ ҳадидан бошлаб ишораси алмашинувчи сонли қатордан иборат, унинг ҳадлари абсолют қиймат бўйича монотон камаяди:

$$\left| \frac{nx^{n+2}}{(n+2)!} : \frac{(n+1)x^{n+3}}{(n+3)!} \right| = \left| \frac{n(n+3)}{(n+1)x} \right| > 1, |x| = 0,5,$$

ҳамда $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{nx^{n+2}}{(n+2)!} \right| = 0$. Бундай қаторда олдинги n та ҳадини қолдириш билан чегараланилса, қолдиқ: $|R_n| = |S - S_n| < |a_{n+1}| = \frac{(n+1)|x^{n+3}|}{(n+3)!}$, $|x| = 0,5$. Биз $|R_n| < \varepsilon$ бўлиш шартидан фойдаланамиз:

$n = 1$ да $|R_1| = \frac{2 \cdot 0,5^4}{4!} = 0,0052 > 0,001$ га, $n = 2$ да эса $|R_2| = 0,0004 < 0,001$ га эга бўламиз. Бунга қараганда $y(-0,5)$ қийматини $0,001$ гача аниқликда олиш учун $y(x)$ қаторида олдинги $1+x$ га яна иккита ҳад қўшилиши kifoya қилади:

$$y(x) \approx 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!}.$$

2-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y'(x) = y \cos x - z \sin x, \\ z'(x) = y \sin x + z \cos x, \end{cases}$$

$$x_0 = 0, y_0 = y(0) = 1, z_0 = z(0) = 0$$

бошланғич масала ечилсин ва $[0; 0,2]$ ораликда $h = 0,05$ қадамда $1 \cdot 10^{-3}$ аниқликдаги ечим қийматлари жадвали тузилсин.

Е ч и ш: Ечимни

$$y(x) = y_0 + \frac{y_0'}{1!} x + \frac{y_0''}{2!} x^2 + \dots + \frac{y_0^{(k)}}{k!} x^k + \dots$$

(4)

$$z(x) = z_0 + \frac{z_0'}{1!} x + \frac{z_0''}{2!} x^2 + \dots + \frac{z_0^{(k)}}{k!} x^k + \dots$$

даражали қаторлар кўринишида излаймиз. Номалум $y_0', z_0', y_0'', \dots$ қийматларни қуйидагича аниқлаймиз:

1) берилган системага $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$ бошланғич қиймагларни қўйсак, $y'_0 = 1$, $z'_0 = 0$ ҳосил бўлади;

2) системани x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\begin{cases} y''(x) = -(y + z') \sin x - (z - y') \cos x, \\ z''(x) = -(z - y') \sin x + (y + z') \sin x \end{cases} \quad (5)$$

ва бу ифодаларга маълум қийматларни қўйиб, $y''_0 = 1$, $z''_0 = 1$ ни топамиз. Энди (5) системани дифференциаллаймиз ва шу тартибда кетма-кет дифференциаллашлар ва $y'''(x)$, $z'''(x)$, $y^{IV}(x)$, $z^{IV}(x)$, $y^{(5)}(x)$, $z^{(5)}(x)$ ифодаларига маълум қийматларни қўйиш йўли билан $y'''_0 = -0$, $z'''_0 = 3$, $y^{IV}_0 = -6$, $z^{IV}_0 = 5$, $y^{(5)}_0 = -23$, $z^{(5)}_0 = -5$, $\dots$ қийматларни аниқлаймиз.

3) топилган қийматлар (4) тенгликларга қўйилса, изланаётган ечим ифодалари олинади:

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{23}{120}x^5 + \dots, \quad (6)$$

$$z(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{5}{120}x^5 + \dots; \quad (7)$$

4) ечимнинг $[0; 0,2]$ оралиқдаги қийматларини $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ аниқликда олиш учун ҳар қайси $y(x)$ ва $z(x)$ функцияларни қаторларга ёйиб, уларда қанчадан ҳад қолдирилиши кифоя қилади? Изланаётган n сони $|R_n(x)| < \varepsilon$ тенгсизлик бўйича аниқланиши мумкин, бунда $R_n(x)$ — қаторнинг қолдиқ ҳади. Қаторларнинг маълум хоссаларидан (хусусан, Вейерштрасс теоремасидан) фойдаланайлик. $y(x)$ ва $z(x)$ қаторлари учун

$$a = 1 + 0,2 + 0,2^2 + 0,2^3 + \dots \quad (8)$$

қатор мажоранта вазифасини бажара олади. $y(x)$ ва $z(x)$ қаторларнинг қолдиқ ҳадлари a нинг мос қолдиқ ҳадидан кичик. a қатор қолдиқ ҳади $\frac{0,2^{n+1}}{1-0,2}$ га тенг. У ҳолда $|R_n(x)| <$

$< \frac{0,2^n}{4} < 1 \cdot 10^{-3}$. Бундан $n > 3$ бўлишини аниқлаймиз. Демак, ечим тўртинчи даражали кўпҳадлар кўринишида олиниши мумкин:

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4, \quad z(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^4.$$

5) y ва z нинг талаб қилинаётган қийматларини (7) формула бўйича ҳисоблаймиз. Бунда оралиқ ҳисоблашлар $1 \cdot 10^{-6}$ аниқликда бажарилиши мумкин. Охириги натижа $1 \cdot 10^{-4}$ аниқликда яхлитланади:

x	0	0,05	0,10	0,15	0,2
y	1	1,0518	1,1050	1,1611	1,2196
z	0	0,0251	0,0505	0,0767	0,1044

Аниқмас коэффициентлар усули. Агар бошланғич шартлар билан берилган $\varphi_0(x)y^{(n)}(x) + \varphi_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + \varphi_n(x)y(x) = f(x)$, $\varphi_0(x) \neq 0$ чизиқли дифференциал тенгламанинг $\varphi_i(x)$ ўзгарувчан коэффициентлари ва $f(x)$ функция бирор соҳада $x - x_0$ нинг даражалари бўйича яқинлашувчи қаторларга ёйилса, изланаётган $y(x)$ ечим шу соҳада яқинлашувчи $y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$ даражали қатор кўринишида тасвирланади. Номайлум a_i коэффициентларни аниқмас коэффициентлар усули бўйича топиш мумкин. Масалан,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad x_0 = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \quad (9)$$

бошланғич масалани ечиш талаб қилиниб, $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ коэффициентлар $x_0 = 0$ нуқта атрофида аналитик функциялардан иборат бўлсин:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \quad (10)$$

Ечим $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ даражали қатор кўринишида изланади. c_i коэффициентларни топиш учун бу тенгликни икки марта дифференциаллаб, (9) тенгламага қўямиз:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}, \\ &\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \end{aligned} \quad (11)$$

(11) тенгламадаги кўпайтиришлар бажарилиб, ўхшаш ҳадлар

коэффициентлари тенглаштирилса, қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2c_2 + c_1p_0 + c_0q_0 = r_0, \\ x^1 & 3 \cdot 2c_3 + 2c_2p_0 + c_1p_1 + c_2q_0 + c_0q_1 = r_1, \\ x^2 & 4 \cdot 3c_4 + 3c_3p_0 + 2c_2p_1 + c_1p_2 + c_2q_0 + c_1q_1 + c_0q_2 = r_2, \\ \dots & \dots \\ x^n & (n+2)(n+1)c_{n+2} + Q(c_{n+1}, c_n, \dots, c_1, c_0) = r_n, \end{array} \quad (12)$$

бунда Q ифода $c_0, c_1, \dots, c_{n+1}$ аргументларнинг чизиqli функцияси. c_0 ва c_1 бошланғич шартлар бўйича аниқланади: $c_0 = y(0) = y_0$, $c_1 = y'(0) = y'_0$. Қолган c_i коэффициентлар (12) системадан топилади.

3-мисол. Ушбу $y'' + y' + x^2y = \frac{x}{1-x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ бошланғич масала ечилсин.

Ечиш: $p(x) = 1$, $q(x) = x^2$, $r(x) = \frac{x}{1-x} = x + x^2 + \dots + x^n + \dots$, бундан $|x| < R=1$. Ечимни $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$ кўринишида излаймиз. Бу ифоданинг ҳосилаларини тузамиз:

$$\begin{aligned} y' &= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots, \\ y'' &= 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + 4 \cdot 3c_4x^2 + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

$y, y', y'', z(x)$ қаторларни берилган тенгламага қўямиз ва аниқмас коэффициентлар усулидан фойдаланиб, ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0, \\ 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 = 1, \\ c_0 + 3c_3 + 4 \cdot 3c_4 = 1, \\ c_1 + 4c_4 + 5 \cdot 4c_5 = 1, \\ \vdots \end{cases}$$

$c_0 = y(0) = 0$, $c_1 = y'(0) = 1$. Қолган коэффициентларни системадан бирма-бир аниқлаймиз: $c_2 = -\frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{3}$, $c_4 = 0$, $c_5 = 0$,

Натижада: $y \approx x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3$. Ечим хатосини баҳолаш мақсадида y, y', y'' ифодаларни берилган тенгламага қўя-

миз ва тенгликнинг иккала томонидаги ифодалар фарқи ε ни аниқлаймиз:

$$\varepsilon = (-1 + 2x) + (1 - x + x^2) + \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^5\right) - \frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^5 - \left(x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}\right) = x^4 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{1-x}\right), \quad |x| < 1.$$

Хусусан, $x = 0,3$ учун ечим қиймати ва хато катталиги қуйидагича бўлади: $y(0,3) \approx 0,3 - \frac{1}{2}0,09 + \frac{1}{3} \cdot 0,027 = 0,3047 \approx 0,30$, $\varepsilon = 0,015$.

Итерация усули. Ушбу

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (13)$$

Коши масаласини ечиш талаб қилинсин. Агар бунда Пикар теоремаси шартлари бажарилган бўлса, чунончи, $f(x, y)$ функция бирор $R\{|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, унга нисбатан $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ Липшиц шarti бажарилган бўлса, y ҳолда изланаётган $y = y(x)$ интеграл чизиқ $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ оралиқда $y - y_0 = -M(x - x_0)$ ва $y - y_0 = M(x - x_0)$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакда ёгади, бунда $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = \max|f(x, y)|$.

$$(13) \text{ муносабатларни } \int_{x_0}^x y' dx = y(x) - y(x_0) \text{ ёки } y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx \text{ кўринишида қайтадан ёзамиз. Кейинги}$$

тенглик бўйича $y = y(x)$ ечимга яқинлашувчи $y = y^{[n]}(x)$, $n = 1, 2, \dots$, функциялар кетма-кетлиги аниқланади:

$$y^{[n]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y^{[n-1]}(x)) dx, \quad \varepsilon_n(x) \leq L^n M \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Бошланғич яқинлашиш $y^{[0]}(x)$ сифатида ихтиёрий функция жумладан, $y = y_0$ бошланғич қиймат олиниши мумкин.

Итерация усули бўйича $\frac{dy}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y})$ ($\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$) систе-

мани ечиш учун дастлаб бу система интеграл шаклда қайтадан ёзилади:

$$\vec{y} = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(x, \vec{y}) dx, \quad \vec{y}^{[0]} = \vec{y}_0, \quad \text{бунда } \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},$$

$$\int_{x_0}^x \vec{f} dx = \begin{bmatrix} \int_{x_0}^x f_1 dx \\ \vdots \\ \int_{x_0}^x f_n dx \end{bmatrix}.$$

Яқинлашишлар $\vec{y}^{[i]} = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(x, \vec{y}^{[i-1]}) dx$ формула бўйича топилади.

Усулни n -тартибли дифференциал тенгламага нисбатан қўллаш учун бу тенглама система кўринишига келтирилиши керак.

4-мисол. Ушбу $y' = x + y$, $y(0) = 2$ масала ечимининг $R\{0 \leq x - x_0 \leq 1, |y - y_0| \leq 1\}$ соҳада $0,3 \cdot 10^{-3}$ аниқликдаги қийматини берувчи яқинлашиши топилсин.

Ечиш. Равшанки, $f(x, y) = x + y$ функция R соҳада аниқланган ва узлуксиз. R соҳа чегаралари $0 \leq x - 0 \leq 1$, $|y - 2| \leq 1$ дан ёки $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ дан иборат. Қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned} M &= \max |f(x, y)| = \max |x + y| = 3, \quad L = \max |f'_y(x, y)| = \\ &= \max |1| = 1, \quad h = \min \left(1; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \quad \varepsilon_{\max} = \max_{(0; 1/3)} |y - \\ &- y^{[n]}| \leq 3 \cdot 1^2 \cdot \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!} < 0,3 \cdot 10^{-3}, \quad 3^n \cdot n! > 1 \cdot 10^4, \quad n \geq \\ &\geq 5. \quad \text{Демак, изланаётган яқинлашиш камида } n=5\text{-тартибли} \\ &\text{бўлиши керак. Уни топамиз: } y^{[0]} = y(0) = 2, \quad y^{[1]} = 2 + \\ &+ \int_0^x (x + 2) dx = 2 + 2x + \frac{x^2}{2!}, \quad y^{[3]} = 2 + \int_0^x (x + y^{[1]}) dx = \\ &= 2 + 2x + 3 \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}, \quad \dots, \quad y^{[5]} = 2 + 2x + 3 \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \right. \\ &\left. + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \right) + \frac{x^6}{6!}. \end{aligned}$$

Рунге — Кутта усуллари. Юқорида биз Қоши масаласи-

ни ечишда қўлланиладиган аналитик усуллардан айримларини кўрсатиб ўтдик. Энди усулларнинг бошқа тури — Рунге — Кутга усуллари гуруҳи ҳақида маълумот берамиз. Бу усуллар қўлланилганида $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ Коши масаласи $y(x)$ хусусий ечимининг h қадам билан тенг узоқликда ётган x_{j+1} ($j = 0, 1, 2, \dots$) нуқталарга мос y_{j+1} тақрибий қийматлари

$$y_{j+1} = y_j + \Delta y_j \quad (14)$$

формула бўйича изланади, бунда Δy_j орттирма $K_i(h) = hf(\xi_i, \eta_i)$ миқдорларнинг ушбу чизикли комбинацияларидан иборат:

$$\Delta y_j = \sum_{i=1}^q p_i K_i(h), \quad (15)$$

бунда

$$\xi_i = x_0 + \alpha_i h, \quad \eta_i = y_0 + \sum_{m=1}^{i-1} \beta_{im} K_m(h), \quad \alpha_1 = 0,$$

$$K_1(h) = hf(x, y),$$

$$K_2(h) = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} K_1(h)),$$

$$K_3(h) = hf(x + \alpha_3 h, y + \beta_{31} K_1(h) + \beta_{32} K_2(h)),$$

$$\dots$$

$$K_q(h) = hf(x + \alpha_q h, y + \beta_{q1} K_1(h) + \dots + \beta_{q, q-1} K_{q-1}(h)).$$

(14) формула қўлланилганда вужудга келадиган $\varepsilon(x)$ хато Рунге қоидаси бўйича баҳоланиши мумкин. Унга мувофиқ x нинг ҳар қайси қийматига мос $y(x)$ қиймати h ва H қадамлар билан кетма-кет ҳисобланади, сўнг қуйидаги формуладан фойдаланилади (унда $H = kh$):

$$\varepsilon(x) \leq \frac{|y_h(x) - y_H(x)|}{|h^s - H^s|} \cdot h^s, \quad (16)$$

бунда s — (14) формуланинг бир қадамда h га нисбатан аниқлик тартиби (ёки даражаси), унинг учун $\Delta y_i \approx y(x_{i+1}) - y(x_i)$ тақрибий тенглик хатоси h^{s+1} тартибли катталиқка эга; k — бирор сон.

Усулнинг хусусий кўринишлари:

1) $q = 1$ бўлган ҳол (Эйлер усули):

$$y_{j+1} = y_j + hf_j, \quad f_j = f(x_j, y_j). \quad (17)$$

Бу усул қўлланилаётган ораликда h қадам k марта кичрайтирилса, оралик бўйича умумий хато ҳам k марта кичрайдиган ($s = 1$). Агар $H = 2h$ қилиб олинса, у ҳолда (16) бўйича

$$\varepsilon(x) \leq |y_h(x) - y_H(x)|$$

га эга бўламиз.

2) $q = 2$ бўлган ҳол (Эйлер усулининг аниқлиги яхшиланган модификациялари):

$$y_{j+1} = y_j + p_1 K_1(h) + p_2 K_2(h), \quad (18)$$

бунда $K_1(h) = hf(x_j, y_j)$, $K_2(h) = hf(x_j + \alpha_2 h, y_j + \beta_{21} K_1(h))$.

Хусусан, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2}$ бўлганда,

$$y_{j+1} = y_j + hf_{j+\frac{1}{2}} \quad (19)$$

га эга бўламиз. Бу формула қўлланилаётган ораликда h қадам m марта кичрайтирилса, шу оралик бўйича усулнинг жамғарилган хатоси m^2 марта камаяди ($s = 2$).

Нихоят, $q = 4$ бўлган (Рунге — Кутта усули номи билан аталидиган) ҳолда:

$$\Delta y = \frac{1}{6} (K_1(h) + 2K_2(h) + 2K_3(h) + K_4(h)), \quad (20)$$

бунда

$$K_1(h) = hf(x, y), \quad K_2(h) = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{K_1(h)}{2}\right),$$

$$K_3(h) = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2} K_2(h)\right),$$

$$K_4(h) = hf(x + h, y + K_3(h)).$$

Бошланғич шартлар билан берилган

$$\begin{cases} y'(x) = f_1(x, y, z), & y(x_0) = y_0, \\ z'(x) = f_2(x, y, z), & z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

система (20) формулага асосланиб ечилади:

$$K_{1y}^{(i)} = hf_1(x_j, y_j, z_j)$$

$$K_{1z}^{(i)} = hf_2(x_j, y_j, z_j)$$

$$K_{2y}^{(i)} = hf_1\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \right.$$

$$K_{2z}^{(i)} = hf_2\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \right.$$

$$\left. + \frac{K_{1y}^{(i)}}{2}, z_j + \frac{K_{1z}^{(i)}}{2}\right)$$

$$\left. + \frac{K_{1y}^{(i)}}{2}, z_j + \frac{K_{1z}^{(i)}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
K_{3y}^{(j)} &= hf_1 \left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{K_{2y}^{(j)}}{2}, z_j + \frac{K_{2z}^{(j)}}{2} \right) & K_{3z}^{(j)} &= hf_2 \left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{K_{2y}^{(j)}}{2}, z_j + \frac{K_{2z}^{(j)}}{2} \right) \\
K_{4y}^{(j)} &= hf_1(x_j + h, y_j + K_{3y}^{(j)}, z_j + K_{3z}^{(j)}) & K_{4z}^{(j)} &= hf_2(x_j + h, y_j + K_{3y}^{(j)}, z_j + K_{3z}^{(j)}) \\
y_{j+1} &= y_j + \frac{1}{6} (K_{1y}^{(j)} + 2K_{2y}^{(j)} + 2K_{3y}^{(j)} + K_{4y}^{(j)}) & z_{j+1} &= z_j + \frac{1}{6} (K_{1z}^{(j)} + 2K_{2z}^{(j)} + 2K_{3z}^{(j)} + K_{4z}^{(j)})
\end{aligned} \quad (21)$$

Юқори тартибли дифференциал тенгламаларни ечиш учун дастлаб улар эквивалент тенгламалар системасига келтирилиши керак. Жумладан, $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0$ бошланғич масаладаги тенглама $y' = z$, $z' = f(x, y, z)$ тенгламалар системасига келтирилади. Рунге—Кутта усуллари бўйича $y(x)$ ечим учун $h_1 = h$ қадам билан y_j қиймат, $h_2 = 2h$ қадам билан Y_j қиймат аниқланган бўлсин. У ҳолда топилган натижанинг абсолют хатоси $E_j = \frac{|Y_j - y_j|}{(2h)^4 - h^4} \cdot h^4 = \frac{1}{15} |Y_j - y_j|$ бўлади (Рунге қоидаси).

5-мисол. (20) формуладан фойдаланиб, $h = 0,2$ қадам билан $y' = \frac{y-x}{y+x}$, $y(0) = 1$ бошланғич масаланинг $[0; 1]$ оралиқдаги ечим қийматлари топилсин.

Ечиш:

5-мисолга

$h = 0,2$

Рунге — Кутта усули

i	x_j	y_j	$K_{1y}^{(j)}$	$K_{2y}^{(j)}$	$K_{3y}^{(j)}$	$K_{4y}^{(j)}$	Ҳисоблашлардан намуналар
0	0	1	0,1	0,2	$K_1^{[0]} = 0,2 \cdot \frac{1-0}{1+0} = 0,2$		
	0,1	1,1	0,1667	0,3334	$x + \frac{h}{2} = 0 + 0,1 = 0,1$		
	0,1	1,0833	0,1662	0,3324	$y_0 + \frac{K_2^{[0]}}{2} = 1 + \frac{0,1667}{2} = 1,0833$		
	0,2	1,1662	0,1414	0,1414	$y_0 + K_3^{[0]} = 1 + 0,1622 = 1,1662$		
				0,1678	$\Delta y_0 = \frac{1}{6} (0,2 + 0,3334 + 0,3324 + 0,1414) = 0,1678$		

j	x_j	y_j	$K=0,2 \frac{y-x}{y+x}$	$\frac{PK}{p=1, 2, 2, 1}$	Хисоблашлардан намуналар
1	0,2	1,1678	0,1415	0,1415	$K_1^{[1]} = 0,2 \cdot \frac{1,1678 - 0,2}{1,1678 + 0,2} = 0,1415$
	0,3	1,2386	0,1220	0,2440	$y_1 + \frac{K_1^{[1]}}{2} = 1,1678 + 0,0708 = 1,2386$
	0,3	1,2288	0,1215	0,2430	$y_1 + \frac{K_2^{[1]}}{2} = 1,1678 + \frac{1,1220}{2} = 1,2288$
	0,4	1,2893	0,1053	0,1053	$y_1 + K_3^{[1]} = 1,1678 + 0,1215 = 1,2893$
				0,1223	$\Delta y_1 = \frac{1}{6} (0,1415 + 0,2440 + 0,2430 + 0,1053) = 0,1223$
2	0,4	1,2901	0,1053	0,1053	$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1,1678 + 0,1223 = 1,2901$
	0,5	1,3428	0,0915	0,1829	
	0,5	1,3359	0,0906	0,1812	
	0,6	1,3812	0,0789	0,0789	
				0,0913	$\Delta y_2 = \frac{1}{6} (0,1053 + 0,1829 + 0,1812 + 0,0789) = 0,0913$
3	0,6	1,3815	0,0790	0,0790	
	0,7	1,421	0,0680	0,1360	
	0,7	1,4155	0,0676	0,1352	
	0,8	1,4491	0,0556	0,0556	
				0,0678	$\Delta y_3 = \frac{1}{6} (0,0790 + 0,1360 + 0,1352 + 0,0556) = 0,0678$
4	0,8	1,4493	0,0577	0,0577	
	0,9	1,4782	0,0486	0,0972	
	0,9	1,4736	0,0483	0,0966	
	1,0	1,4976	0,0398	0,0398	
				0,0486	$\Delta y_4 = 0,0486$
5	1,0	1,4979			

Натижа: $y(0) = 1$, $y(0,2) = 1,1678$, $y(0,4) = 1,2901$, $y(0,6) = 1,3815$, $y(0,8) = 1,4493$, $y(1) = 1,4979$. Ечим қий-
матларининг қандай аниқликка эга эканини билиш мақса

дида ҳисоблашларни $h = 0,4$ қадам билан такрор бажарамиз ва уларни янги натижалар билан солиштирамиз:

5-мисолга

$h = 0,4$

Рунге — Кутта усули

j	x_j	y_j	$K = 0,4(y-x)/(y+x)$	$pK, p = 1, 2, 2, 1$
0	1	1	0,4	0,4
	0,2	1,2	0,2857	0,5714
	0,2	1,1427	0,2809	0,5618
	0,4	1,2809	0,2091	0,2091
				$\Sigma / 6 = 0,2904$
1	0,4	1,2904	0,2107	0,2107
	0,6	1,3958	0,1640	0,3280
	0,6	1,4778	0,1694	0,3388
	0,8	1,6472	0,1384	0,1384
				$\Sigma / 6 = 0,1593$
2	0,8	1,4497		

$y(0,4)$ ва $y(0,8)$ нинг олдин ва ҳозир топилган қийматлари $1 \cdot 10^{-4}$ разряд рақамлари билан фарқ қилмоқда. Шунга кўра, умуман, $y(x)$ учун топилган қийматларнинг чегаравий абсолют хатолари $0,5 \cdot 10^{-3}$ га тенгдир.

6-мисол. $y(2) = 1$ ва $y'(2) = 0$ бошланғич шартлар билан берилган $y'' = \frac{y - xy'}{1 - x}$ дифференциал тенглама ечимининг [2; 3] оралиқдаги қийматлари жадвали $h = 0,2$ қадам билан тузилсин.

Ечиш: $y' = z$ (белгилаш), $z(2) = 0$, $z' = \frac{y - xz}{1 - x}$ системани ҳосил қиламиз ва (21) схемадан фойдаланиб, ҳисоблашларни y ва z га нисбатан параллел бажарамиз:

6-мисолга

$i = \overline{1; 4}, p = 1, 2, 2, 1$

Рунге — Кутта усули

j	x_j	y_j	z_j	K_{iy}	K_{iz}	pK_{iy}	pK_{iz}
0	2	1	1	0	-0,2	0	-0,2
	2,1	1	-0,1	-0,02	-0,22	-0,04	-0,44
	2,1	0,99	-0,11	-0,022	-0,222	-0,044	-0,444
	2,2	0,978	-0,222	-0,0444	-0,2444	-0,0444	-0,2444
						-0,0214	-0,2214

j	x_j	y_j	z_j	K_{iy}	K_{iz}	pK_{iy}	pK_{iz}
1	2,2	0,9786	-0,2214	-0,0443	-0,2443	-0,0443	-0,2443
	2,3	0,9564	-0,3436	-0,0687	-0,2688	-0,1374	-0,5376
	2,3	0,9442	-0,3558	-0,0712	-0,2712	-0,1424	-0,5424
	2,4	0,9074	-0,4926	-0,0985	-0,2985	-0,0985	-0,2985
						-0,0705	-0,2705
2	2,4	0,9081	-0,4919	-0,0984	-0,2984	-0,0984	-0,2984
	2,5	0,8589	-0,6411	-0,1282	-0,3282	-0,2564	-0,6564
	2,5	0,8440	-0,6560	-0,1312	-0,3312	-0,2624	-0,6624
	2,6	0,7769	-0,8231	-0,1646	-0,3646	-0,1646	-0,3646
						-0,1903	-0,3303
3	2,6	0,7778	-0,8222	-0,1644	-0,3644	-0,1644	-0,3644
	2,7	0,6956	-1,0044	-0,2009	-0,4009	-0,4018	-0,8018
	2,7	0,6773	-1,0227	-0,2045	-0,4045	-0,4090	-0,8090
	2,8	0,5733	-1,2267	-0,2453	-0,4453	-0,2453	-0,4453
						-0,2034	-0,4034
4	2,8	0,5744	-1,2256	-0,2451	-0,4451	-0,2451	-0,4451
	2,9	0,4519	-1,4482	-0,2896	-0,4896	-0,5792	-0,9792
	2,9	0,4296	-1,4704	-0,2941	-0,4941	-0,5882	-0,9882
	3	0,2803	-1,7197	-0,3939	-0,5439	-0,3939	-0,5439
						-0,2928	
5	3	0,2816					

Агар ҳисоблашлар $h = 0,4$ қадам билан бажарилса, натижада $y(2,4) = 0,8414$, $z(2,4) = -0,5651$ қийматлар ҳосил бўлади. Умумий хато катталигини Рунге қойдаси бўйича баҳолаймиз:

$$E_y = \frac{1}{15} \cdot |0,9081 - 0,8414| = 0,0044 \leq 0,5 \cdot 10^{-2},$$

$$E_z = \frac{1}{15} |-0,5651 + 0,4919| = 0,00488 \leq 0,5 \cdot 10^{-2}.$$

Чекли — айирмали усуллар. Адамс усулининг турли вариантлари $y_j - y_{j-1} = h \sum_{i=0}^m b_{-i} f_{j-i}$, $y_0 = y(x_0)$, $x_j - x_{j-1} = h$ муносабатда b_{-i} ($i = 0, m$) коэффициентларни турлича танлаш орқали олинади.

Адамснинг экстраполяция формуласи ($b_0 = 0$)¹

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24} (55 f_j - 59 f_{j-1} + 37 f_{j-2} - 9 f_{j-3} + \dots) \quad (22)$$

ёки

$$y_{i+1} = y_i + \eta_i + \frac{1}{2} \Delta \eta_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_{i-3}, \quad (23)$$

бунда $\eta_i = hf(x_i, y_i)$, $\Delta^k \eta_{i-k}$ — k -тартибли чекли айирма.

Адамсинг интерполяция формуласи $\left(b_0 = \frac{9}{24}\right)$:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2} + \dots) \quad (24)$$

ёки

$$y_{i+1} = y_i + \eta_{i+1} + \frac{1}{2} \Delta \eta_i - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_{i-1} + \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_{i-2},$$

$$\eta_i = hf(x_i, y_i) \quad (25)$$

Ҳисоблаш $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ лардан иборат бошланғич кесмани (жадвалнинг кириш қисмини) аниқлашдан бошланади. Бунда y_0 бошланғич шарт сифатида берилган, қолган қийматлар бирор қадамли усул билан аниқланади. Шу мақсадда Рунге — Кутта усули қўлланилганида h қадам кейинги ҳисоблашлардагига нисбатан кичик олинishi керак. Сўнг экстраполяция формуласи, кетидан коррекция (тузатиш) мақсадида интерполяция формуласи қўлланилади.

7-мисол. Адамс усули қўлланилиб, $y' = \frac{1}{y^2 - x}$, $y(1) = 0$ дифференциал тенглама ечимининг $x = 1, 1; 1,2; \dots; 2$ нуқталардаги қийматлари $\epsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ аниқликда топилсин.

Ечиш: 1) y_0, y_1, y_2, y_3 бошланғич кесмани Рунге — Кутта усули бўйича аниқлаймиз (жадвалларда x ва y дан ташқари қолган қийматлар 10^6 марта ошириб олинган):

7-мисолга

Бошланғич кесмани аниқлаш Рунге-Кутта усули

i	x_i	y_i	$f = \frac{1}{y_i^2 - x_i}$	$K = 0.1 f$	$pK, \begin{matrix} p=1, 2, 2, 1 \end{matrix}$	Изоҳ
0	1	0	-100000	-10000	-10000	
	1,05	-0,05	-954654	-95465	-190931	$y(1,05) =$ $= y(1) + \frac{K_1}{2}$
	1,05	-0,047733	-954445	-95445	-190890	$y = (1,05) =$ $= y(1) + \frac{K_2}{2}$
	1,1	-0,095445	-916683	-91668	-91668	$y(1,1) =$ $= y(1) + K_3$
$\Delta y_0 = (\sum pK)/6 = -0,095582$						

i	x_j	y_j	$f = \frac{1}{y_j^2 - x_j}$	$K = 0,1 f$	$pK, \\ p=1, 2, 2, 1$	Изоҳ
1	1,1	-0,095582	-916705	-91671	-91671	$y(1,1) = y(1) + \Delta y_0$
	1,15	-0,141418	-884955	-88496	-176991	
	1,15	-0,139830	-884605	-88461	-176921	
	1,2	-0,184043	-857540	-85754	-85754	
$\Delta y_1 = -0,088556$						
2	1,2	-0,184138	-857565	-85757	-85757	
	1,25	-0,227018	-834402	-83440	-166880	
	1,25	-0,225858	-834037	-83404	-166807	
	1,3	-0,267542	-814053	-81405	-81405	
$\Delta y_2 = -0,083475$						
3	1,3	-0,267613				

2) (23) ва (25) формулалардан фойдаланамиз. Оралиқ натижалар қуйидаги жадвалга киритиб борилади. Бошланғич кесма маълумотлари остидан синиқ чизиқ ўтказилган, интерполяция бўйича топилган қийматлар рамкалар ичига ёзилган; $y_j = y_{j-1} + \Delta y_{j-1}$, бунда Δy қиймати (23) ва (25) бўйича топилади:

7-мисолга $\times 10^{-6}$ $h = 0,1$ Адамс усули

i	x_j	y_j	Δy	η 0,1 f	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$
0	1	0	-95582	-100000	8330	-2416	850
1	1,1	-95582	-88556	-91670	5914	-1566	468
2	1,2	-184138	-83475	-85756	4348	-1098	261
3	1,3	-267613	-79570	-81408	3250	-837	161
4	1,4	-347183	-76815	-78158	2413	-676	95
4	1,4	-347185					
5	1,5	-423998	-74789	-75745	1737	-581	46
5	1,5	-425816					
6	1,6	-498787	-73361	-74008	1156	-535	9
6	1,6	-498969					
7	1,7	-572148	-72480	-72852	621	-526	-34
7	1,7	-572164					
8	1,8	-644628	-72126	-72230	95	-560	

i	x_i	y_i	Δy	$\eta=0,1f$	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$
8	1,8	—644645	—72304	—72136	—465		
9	1,9	—716754					
9	1,9	—716786					
10	2	—789058					
10	2	—789106					

Жавоб:

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$y(x)$	0	—0,09558	—0,18414	—0,26761	—0,34718	—0,42400
	1,6	1,7	1,8	1,9	2	
	—0,49880	—0,57215	—0,64463	—0,71676	—0,78906	

Милн усулининг моҳияти изланаётган $y(x)$ ечим қийматини олдин тақрибий баҳолаш (прогноз), сўнг бу қийматни тузатишдан (коррекция қилишдан) иборат. Ҳисоблашлар жараёнида $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ бошланғич масала $y(x)$ хусусий ечимининг y_{i-4} , y_{i-3} , y_{i-2} , y_{i-1} қийматлар бўйича y_i қийматни топиш талаб қилинади. Бунинг учун: 1) y_0 , y_1 , y_2 , y_3 қийматлар (бошланғич кесма) аниқланади, бунда y_0 берилган, y_1 , y_2 , y_3 лар Рунге — Кутта ёки бирор бошқа бир қадамли усул билан топилиши керак; 2) y нинг 1-яқинлашиши ушбу

$$y_i = y_{i-4} + \frac{4h}{3} (2y'_{i-3} - y'_{i-2} + 2y'_{i-1}) \quad (26)$$

(олдиндан айтиш) формуласи бўйича топилади:

$$y_4^{[1]} = y_0 + \frac{4h}{3} (2y'_1 - y'_2 + 2y'_3);$$

3) $y'_i = f(x_i, y_i^{[1]})$ муносабат бўйича $(y_4^{[1]})' = f(x_4, y_4^{[1]})$ ҳисобланади;

4) y_i нинг 2-яқинлашиши

$$y_i = y_{i-2} + \frac{h}{3} (y'_{i-2} + 4y'_{i-1} + y'_i) \quad (27)$$

коррекция формуласи бўйича топилади:

$$y_4^{[2]} = y_2 + \frac{h}{3} (y'_2 + 4y'_3 + (y_4^{[1]})');$$

5) $y_4^{[2]}$ тақрибий қиймат хатоси ҳисобланади:

$$\epsilon_4 = \frac{1}{29} |y_4^{[2]} - y_4^{[1]}|.$$

Агар бунда ϵ қиймати тайинланган чегарадан ортиқ бўлса, y_4 кичрайтирилган h қадам билан такрор ҳисобланади; 6) энди $y_5^{[1]}$ яқинлашиш, сўнг $y_5^{[2]}$ яқинлашиш ва ϵ_5 аниқланади ва ҳоказо.

8- мисол. Милн усули қўлланилиб, $x' = 2x + 5z$, $y' = -(1 - \sin t)x - y + 3z$, $z' = -x + 2z$ дифференциал тенгламалар системасининг $x(0) = x_0 = 2$, $y(0) = y_0 = 1$, $z(0) = z_0 = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечининг $0 \leq t \leq 0,5$ оралиқдаги қийматлари $h \leq \Delta t \leq 0,1$ қадам билан топилсин.

Е чи ш. 1) Бошланғич кесмани Рунге — Кутта усули билан топамиз (асосий жадвал); 2) $j = 0, 1, 2, 3$ учун топилган қийматлар $\vec{A}$ вектор координаталарини ташкил этсин:

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Бу қийматларни берилган системага қўйиб, $\vec{A}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ қийматларни аниқлаймиз; 3) y' тенглама қийматларини ҳисоблаш учун алоҳида 2- ёрдамчи жадвал тузамиз. Жадвалнинг $j = 1, 2, 3$ - сатрларини тўлдирамиз; 4) 1-ёрдамчи жадвалнинг $j = 4$ устунларининг $2\vec{A}'_{j-3}$ дан $\vec{A}_{j1}$ гача турган еттита сатр катакларини тўлдирамиз. Бунда $\vec{A}_{j1} = \vec{A}_{j-4} + \frac{0,1}{3} (2\vec{A}'_{j-3} - \vec{A}'_{j-2} + 2\vec{A}'_{j-1})$; 5) $j = 4$ устунларининг қолган катакларини тўлдирамиз, бунда $\vec{A}_{j11} = \vec{A}_{j-2} + \frac{0,1}{3} (\vec{A}'_{j-2} + 4\vec{A}'_{j-1} + \vec{A}'_j)$. Топилган $\vec{A}_{j1}$, яъни $x_4 = 2,23152$, $y_4 = 1,07268$, $z_4 = 0,92106$ ва $\vec{A}_{j11}$ ($x_4 = 2,23153$, $y_4 = 1,07270$, $z_4 = 0,92106$ қийматларни асосий жадвалга ўтказамиз; 6) берилган тенгламага x_4 , y_4 , z_4 ни қўйиб, x'_4 , y'_4 (2- ёрдамчи жадвалнинг $j = 4$ сатри) ва z'_4 ни топамиз ва уларни асосий жадвалга киритамиз; 7) ҳисоблашларни $j = 5$ га нисбатан 4), 5), 6)

бандларда кўрсатилган тартибда бажарамиз; 8) $\varepsilon = \left| \frac{\vec{A}_I - \vec{A}_{II}}{29} \right|$ текшириш формуласи ёрдамида коррекциядан кейинги хато катталигини баҳолаймиз (асосий жадвал).

8-мисолга Асосий жадвал (3) — (6) устунлар $\times 10^{-5}$

i	t	$\vec{A}_I$	$\vec{A}'_I$	$\vec{A} = \vec{A}_{II}$	$\vec{A}' = \vec{A}'_{II}$	$\varepsilon = \left \frac{\vec{A}_I - \vec{A}_{II}}{29} \right $
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	0			$x_0 = 200000$ $y_0 = 100000$ $z_0 = 100000$	100000 0 0	
1	0,1			$x_1 = 208984$ $y_1 = 100497$ $z_1 = 99500$	79532 9882 -9984	
2	0,2			$x_2 = 215880$ $y_2 = 101953$ $z_2 = 98006$	58270 19074 -19868	
3	0,3			$x_3 = 220619$ $y_3 = 104266$ $z_3 = 95533$	36424 26911 -28553	
4	0,4	223152 107268 92106	14226 32798 -38940	$x_4 = 223153$ $y_4 = 107270$ $z_4 = 92106$	14224 32795 -38941	0 0 0
5	0,5	223458 110740 87758	-8126 36209 -47942	$x_5 = 223459$ $y_5 = 110742$ $z_5 = 87758$		0 0 0

8-мисолга 1-ёрдмчи жадвал (2) — (7) устунларни $\times 10^{-5}$

α	$j=4$			$j=5$		
	$\alpha x'$	$\alpha y'$	$\alpha z'$	$\alpha x'$	$\alpha y'$	$\alpha z'$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$2 \vec{A}_{I-3}$	159064	19764	-19968	116540	38148	-39736
$-\vec{A}_{I-2}$	-58277	-19074	19868	-36427	-26911	29553
$2 \vec{A}_{I-1}$	72854	53822	-59106	28448	76827	-88063

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Σ_I	173648	54512	-59206	108561	88064	-98246
$\frac{0,4}{3} \Sigma_I$	23152	7268	-7894	14474	10243	67647
$\vec{A}_{j-4}$	200000	100000	100000	208984	100497	99500
$\vec{A}_{j1}$	223152	107268	92106	223458	110740	86401
$\vec{A}_{j-2}$	58270	19074	-19868	36427	26911	-29553
$4 \vec{A}'_{j-1}$	145708	107644	-118213	56896	131180	-155760
$\vec{A}'_{j1}$	14226	32798	-38940	-8126	36209	-47942
Σ_{II}	218204	159516	-177020	85197	194300	-233255
$\frac{0,1}{3} \Sigma_{II}$	7273	5317	-5900	2840	6476	-7775
$\vec{A}_{j-2}$	215880	101953	98006	220619	104266	95533
$\vec{A}_{jII}$	223153	107270	92106	223459	110742	87758

8- мисолга

2- ёрдамчи жадвал

$\sin t \approx t - t^3/6 + t^5/120$

t	t'	$t^3/6$	$t^5/120$	$\sin t$	$1 - \sin t$	$(1 - \sin t)x$	y'
1	0,1	0,000167	0,000000	0,099833	0,90017	1,88120	0,09882
2	0,2	0,001333	0,000003	0,198669	0,80133	1,72992	0,19074
3	0,3	0,0045	0,000020	0,295520	0,70448	1,55422	0,26911
4	0,4	0,010667	0,000085	0,389418	0,61058	1,36252	0,32798
5	0,5	0,020833	0,000260	0,479427	0,52057	1,16326	0,36209

Адамс — Штермер усули. Бу усул $y'' = f(x, y, y')$ кўринишдаги тенглама билан берилган бошланғич масалани ечишда қўлланилади. Бунинг учун олдин тенглама $y' = z$ алмаштириш орқали $\begin{cases} y' = z, \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$ система кўринишига келтирилади.

Сўнг тенгламалардан биринчиси Адамс экстраполяция формуласи, иккинчиси эса Штермер формуласи қўлланилиб ечилади:

$$z_{n+1}' = z_n + h \left[f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{5}{12} \nabla^2 f_n + \frac{3}{8} \nabla^3 f_n + \frac{25}{720} \nabla^4 f_n \right]$$

(Адамс экстраполяцион формуласи),

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2 \left[f_n + \frac{1}{12} \nabla^2 f_n + \frac{1}{12} \nabla^3 f_n + \frac{19}{240} \nabla^4 f_n \right]$$

(Штермер формуласи).

Тўрлар усули. Бирор $D = [a, b]$ оралиқда берилган оддий дифференциал тенглама ёки дифференциал тенгламалар системасини ва шу оралиқнинг учларидан бирига қўйилган қўшимча шартни (Коши масаласини) қансатлантирувчи $u(x)$ функцияни топиш талаб қилинсин. Биз бу масалани L дифференциал оператор ёрдамида қўйидаги символик тенглик кўринишида ёзамиз:

$$Lu = f, \quad (28)$$

бунда f — берилган ўнг қисм. Қўйилаётган масалани ечишда кўпинча тўрлар усули (айирмалли усул) қўлланилади. $[a, b]$ оралиқдаги тўр деб, шу оралиқда кетма-кет олинган нуқталарнинг (тугунларнинг) ихтиёрий чекли тўпламига айтилади. Шундай қилиб, тўрда ушбу шарт бажарилган бўлади:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Тугунлар орасидаги масофага тўр қадами дейилади. Барча қадамлар тенг бўлган ҳолда текис (текис тақсимланган) тўрга, акс ҳолда текис тақсимланмаган тўрга эга бўламиз. Максимал қадамни h орқали белгилайлик. Бу ҳолда тўрни D_h орқали белгилаймиз. Тўр тугунларида аниқланган $f(x)$ функцияга тўр функцияси дейилади.

Қаралаётган $[a, b]$ оралиқда аниқланган, узлуксиз ва етарлича силлиқликка эга бўлган бирор $u(x)$ функция ҳосилаларини тақрибий ҳисоблаш масаласи устида тўхталамиз. Ушбу

$$u_{x,i}^- = (u_i - u_{i-1})/h, \quad u_{x,i}^+ = (u_{i+1} - u_i)/h,$$

$$u_{x,i}^0 = (u_{i+1} - u_{i-1})/(2h), \quad u_i = u(x_i)$$

айирмалли нисбатларга мос тартибда $u(x)$ функциянинг $x = x_i$ нуқтадаги чап, ўнг ва марказий айирмалли ҳосилаларни дейилади. Дифференциал ифодани айирмалли ифода билан алмаштиришда вужудга келадиган хатони топиш у қадар қийин эмас. Жумладан, $x = x_i$ нуқтага нисбатан чап айирмалли ҳосилани

$$u_{x,i} = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

кўринишида Ёзсак, Тейлор формуласи ёрдамида қуйидагига эга бўламиз:

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x),$$

бундан

$$u_{x,i} = u'(x_i) - \frac{h}{2} u''(\xi_i).$$

Бунга қараганда аппроксимация хатоси $u_{x,i} - u'(x_i) = O(h)$ дан ёки $h \rightarrow 0$ даги $O(h)$ катталиқдан иборат, яъни биз h га нисбатан биринчи тартибли аппроксимацияга эга бўламиз. Шу каби қолган айирмалар нисбатлар учун қуйидагилар ўринли:

$$u_{x,i} = u'(x_i) + \frac{h}{2} u''(\xi_i^{(1)}), \quad \text{ёки } u_{x,i} = u'_i + O(h).$$

$$\text{бунда } \xi_i^{(1)} \in (x_i, x_{i+1}),$$

$$u_{xx,i} = u''(x_i) + \frac{h^2}{6} u'''(\xi_i^{(2)}), \quad \text{ёки } u_{xx,i} = u''_i + O(h^2),$$

$$\text{бунда } \xi_i^{(2)} \in (x_{i-1}, x_{i+1}).$$

$x_i \in D_h$ нуқтада $u''(x)$ иккинчи тартибли ҳосилани

$$u_{xx,i} = \frac{1}{h} (u_{x,i} - u_{x,i}) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

иккинчи айирмалар ҳосила орқали тақрибий алмаштириш мумкин. Тейлор формуласининг ёйилмаси бу алмаштириш хатоси учун қуйидаги ифодани беради:

$$u_{xx,i} - u''(x_i) = \frac{h^2}{12} u^{IV}(\xi_i).$$

яъни иккинчи тартибли аппроксимация ўринли. Ҳақиқатан,

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \frac{h^3}{6} u'''(x_i) + \\ &+ \frac{h^4}{24} u^{IV}(x_i) + \frac{h^5}{120} u^V(x_i) + \frac{h^6}{720} u^{VI}(x_i) + \dots, \\ u_{i-1} &= u(x_i - h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) - \end{aligned}$$

$$-\frac{h^3}{2} u'''(x_i) + \frac{h^4}{24} u^{IV}(x_i) - \frac{h^5}{120} u^V(x_i) + \frac{h^6}{720} u^{VI}(x_i) - \dots,$$

$$2u_j = -2u(x_j),$$

$$u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i = h^2 u''(x) + \frac{h^4}{12} u^{IV}(x) + \frac{h^6}{120} u^{VI}(x) + \dots$$

ёки бундан:

$$u_{xx,i} = u''(x_i) = \frac{h^2}{12} u^{IV}(x) + O(h^4).$$

Энди (қаранг: (14), 260-бет) ўзгарувчан $k(x)$ коэффициентли

$$Lu = \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) \quad (29)$$

дифференциал ифодани ушбу

$$L_h u = (au_x^-)_{x,i} = \frac{1}{h} \left(a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) \quad (30)$$

айирмали нисбат билан алмаштириш устида тўхталамиз, бунда $a = a(x)$ функция D_h тўрда аниқланган. Қандай шартларда $(au_x^-)_{x,i}$ нисбат x_i нуқтада $(ku')'$ дифференциал ифодани h бўйича иккинчи тартиб билан аппроксимация қилишини билиш мақсадида ушбу

$$u_{x,i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = u'_i + \frac{h}{2} u''_i + \frac{h^2}{6} u'''_i + O(h^3),$$

$$u_{x,i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = u'_i - \frac{h}{2} u''_i + \frac{h^2}{6} u'''_i + O(h^3)$$

ёйилмаларни (30) муносабатга қўямиз ($u'_i = u'(x_i)$). Нагжижада:

$$\begin{aligned} L_h u &= \frac{a_{i+1} - a_i}{h} u'_i + \frac{a_{i+1} + a_i}{2} u''_i + \\ &+ \frac{h(a_{i+1} - a_i)}{6} u'''_i + O(h^2). \end{aligned}$$

Иккинчи томондан:

$$Lu = (ku')' = ku'' + k'u'.$$

У ҳолда:

$$L_h u - Lu = \left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h} - k'_i \right) u'_i - \left(\frac{a_{i+1} + a_i}{h} - k_i \right) u''_i -$$

$$-\frac{h(a_{i+1}-a_i)}{6} u''' - 0(h^2).$$

Бунга қараганда $L_h u - Lu = 0(h^2)$ бўлиши учун ушбу

$$\frac{a_{i+1}-a_i}{h} = k'(x_i) - 0(h^2), \quad \frac{a_{i+1}+a_i}{2} = k_i + 0(h^2) \quad (31)$$

шартларнинг бажарилиши етарли. Уларнинг чиқарилишида биз $u^{IV}(x)$ ҳосила узлуксиз ва $k(x)$ эса дифференциалланувчи функция деб фараз қилдик.

9-мисол. $a_i = \frac{k(x_i) + k(x_{i+1})}{2}$ функция учун (30) айирмалар нисбат (29) дифференциал ифодани иккинчи тартиб билан аппроксимация қилишини кўрсатамиз.

Бунинг учун берилган a_i да (31) шартларнинг бажарилишини билиш етарли. Қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} L_h u - Lu &= \left[\frac{(k_i + k_{i+1}) - (k_i + k_{i-1})}{2h} u'_i + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(k_i + k_{i+1}) - (k_i + k_{i-1})}{4} u''_i + \right. \\ &\quad \left. - \frac{h(k_i + k_{i+1} - k_i - k_{i-1})}{12} u'''_i - 0(h^2) \right] - (k_i u'_i + k_i u'_i) = \\ &= \left(\frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} - k'_i \right) u'_i + \left(\frac{k_{i+1} + 2k_i + k_{i-1}}{4} - k_i \right) u''_i + \\ &\quad + \frac{h(k_{i+1} - k_{i-1})}{12} u'''_i + 0(h^2). \end{aligned}$$

Иккинчи тартибли аппроксимацияга эга бўлишимиз учун

$$\frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} = k'_i + 0(h^2)$$

ва

$$\frac{k_{i+1} + 2k_i + k_{i-1}}{4} = k_i + 0(h^2)$$

бўлиши керак. Бу муносабатлардан биринчисининг ўринли экани юқорида (139-бет) кўрсатилган эди. Иккинчиси учун қуйидагиларни оламиз:

$$\begin{aligned} \frac{k_{i+1} + 2k_i + k_{i-1}}{4} - \frac{k_i'' + hk'_i + \frac{h^2}{2} k''(\xi_i) + 2k_i + k_i - hk'_i + \frac{h^2}{2} k''(\xi_i)}{4} &= \\ &= k_i + 0(h^2). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0, & x \in [a, b], & (x) \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{b-a} \right)^2, \\ u(a) = 0, & u'(a) = \frac{\pi k}{b-a}, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (32)$$

дифференциал масала $D_h = \{x_i = a + ih, i = \overline{0, N}\}$ текис тўрда

$$\begin{cases} \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} + \lambda^{(h)} y_j = 0, & j = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = 0, & y_1 = \frac{\pi k h}{b-a}, & hN = b-a, & y_j = y(x_j), & x_j = a + jh \end{cases} \quad (33)$$

айирмали схема билан аппроксимацияланган. Кўрсатилган дифференциал ва айирмали масалаларнинг хос қийматлари бўйича ечимлари топилсин ва аппроксимация хатоси баҳолансин.

Ечиш: 1) Берилган (32) тенгламада λ ни доимий фарз қилайлик. $u = e^{rx}$ алмаштириш киритсак, $r^2 + \lambda r = 0$ характеристик тенглама ҳосил бўлади. Унинг дискриминанти манфий. Маълум алмаштиришлардан сўнг, бошланғич масаланинг ечими олинди:

$$u = \sin \left(\frac{\pi k}{b-a} (x-a) \right) \text{ ёки } u_k = \sin \frac{\pi k (x-a)}{b-a},$$

$$k = 1, 2, \dots, N-1.$$

2) (33) тенгламалар системасини

$$-1 \cdot y_{j-1} + 2 \cdot y_j - 1 \cdot y_{j+1} = \lambda^{(h)} h^2 y_j$$

кўринишга келтирайлик, ёки

$$Ay = \lambda^{(h)} y,$$

бунда A $N-1$ -тартибли симметрик матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A матрица $N-1$ та $\lambda_k^{(h)}$, $k = 1, N-1$ ҳақиқий хос қийматга эга. Уларни топиш мақсадида (33) айирмали тенгламани

$$y_{i-1} - (2 - \mu) y_i + y_{i+1} = 0, \quad \mu = h^2 \lambda_k^{(h)} \quad (37)$$

кўринишида қайтадан ёзамиз ва унга мос

$$q^2 - (2 - \mu) q + 1 = 0$$

характеристик тенгламани ечамиз. Бу тенгламанинг дискриминанти манфий. Унинг илдизлари:

$$q_{1,2} = \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)^2 - 1},$$

$$1 - \frac{\mu}{2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi k h}{b-a}\right)^2 < 1,$$

Бу қўшма комплекс сонларнинг модули ва аргументини то-
пайлик:

$$\rho = \sqrt{\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)^2}\right)^2} = 1,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)^2}}{1 - \frac{\mu}{2}}.$$

Кейинги тенгликка ва масаланинг шартларига қараганда

$$\cos \varphi = 1 - 0,5 \mu,$$

бундан

$$\mu = 2(1 - \cos \varphi) = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 4 \sin^2 \frac{\pi k}{2N}, \quad k = \overline{1, N-1}$$

ва (33) масаланинг хос сонлари учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\lambda_k^{(h)} = \frac{2}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k}{2N}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad hN = b-a.$$

(34) тенгламанинг умумий ечими ушбу

$$y_i = C_1 q_1^i + C_2 q_2^i$$

кўринишда изланади, унда $C_1 = -C_2$ бўлишини аниқлаш қийин эмас. Умумий ечим изланаётган y_i хос функцияларни беради:

$$\begin{aligned} y_i &= C_1 (q_1^i - q_2^i) = C_1 (\cos \varphi + i \sin \varphi - \cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= C_1 \cdot 2i \sin \varphi, \end{aligned}$$

— 0,5 i деб қўйилса, энг охири қуйидаги олинади:

$$y_j = \sin \varphi = \sin \frac{\pi k j}{N}, \quad k, j=1, 2, \dots, N-1.$$

ос функциялар j га боғлиқ бўлмаган ихтиёрий доимийга-ча аниқликда топилганини кўрамыз.

МАШҚЛАР

1—8-машқларда бошланғич масалалар келтирилган. Уларнинг ечими кетма-кет дифференциаллаш ва аниқмас коэффициентлар усуллари қўлланилиб, даражали қатор кўринишида топилсин:

1. $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = 0,5$. Ечим 0,001 гача аниқликка эга бўлиши учун изланаётган қатор нечта ҳади билан олиниши керак? $y(0,2)$ ҳисоблансин.

2. $y'' + yy' - 2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$; $y(x)$ ечимни ифодаловчи қаторнинг дастлабки тўрт ҳади топилсин; $y(0,5)$ қиймат ва $\int_0^x y(x) dx$ интеграл 0,001 гача аниқлик билан топилсин.

3. $y'' = yy' - x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$; ечим дастлабки олтинчи ҳади билан даражали қатор кўринишида топилсин.

4. $y'' + y' + x^2y = \frac{x}{1-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ ($0 \leq x \leq 0,2$, $h = 0,05$, $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$).

5. $y'' - xy' - 2y = e^{-x^2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0,5$; $y(x)$ ва $y'(x)$ нинг $0 \leq x \leq 0,15$ оралиқдаги қийматлари $h = 0,05$ қадам билан 0,00001 аниқликда топилсин.

6. $xy'' + 2y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, ($0 \leq x \leq 0,2$, $h = 0,05$, $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$).

7. $\begin{cases} y' = xy + z \\ z' = y - z \end{cases}$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$ ($0 \leq x \leq 0,2$, $h = 0,05$, $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$).

8. $\begin{cases} y' = x + z^2 \\ z' = yx \end{cases}$, $y(0) = 1$, $z(0) = -1$ ($0 \leq x \leq 0,2$, $h = 0,05$, $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$).

9—14-машқларда итерация усули қўлланилиб, курсатилган бошланғич масалалар ечими учун бошланғич икки-уч яқинлашиш топилсин:

9. $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = 0$. 10. $y' = y^2 + xy + x^2$, $y(0) = 1$. 11. $y' = xy + \sqrt{x}$, $y(0) = 0$.

12. $y' = y \sin x + x$, $y(0) = 0$. 13. $y' = xy^3 - 1$, $y(0) = 0$; $y(1)$ нинг қиймати $1 \cdot 10^{-2}$ гача аниқликда топилсин.

14. $y' = y + x$, $y(0) = 1$; $y(1)$ учун бошланғич бешта яқинлашиши топилсин ва уларнинг аниқлиги баҳолансин.

15 — 24-машқларда Рунге — Кутта усулларидан бири қўлланилиб, бошланғич шартлар билан берилган дифференциал тенгламалар ва дифференциал тенгламалар системалари ечимининг $[a, b]$ оралиқдаги қийматлар жадвали $h = 0,1$ қадам билан тузилсин:

15. $y' = 0,5xy$, $y(0) = 1$, $[0; 1]$. 16. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, $[0; 1]$. 17. $y' = 1 + xy^2$, $y(0) = 0$, $[0; 1]$. 18. $y' = \frac{y}{x+1} - y^2$, $y(0) = 1$, $[0; 1]$. 19. $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 0$, $[0; 1]$. 20. $y' = x + \sqrt{y}$, $y(0,5) = 0,7240$, $[0,5; 1,5]$. 21. $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 0$, $[0; 0,4]$. 22. $y' = x \ln y - y \ln x$, $y(1) = 1$, $[1; 1,6]$.

$$23. \begin{cases} y' = -xz, & y(0) = 0, z(0) = 1, \\ z' = \frac{y}{x}, & [0; 1]. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} y' = (z - y)x, \\ z' = (z + y)x, \end{cases} \quad y(0) = z(0) = 1, [0; 1].$$

24 — 32-машқларда Адамс усули қўлланилиб, дифференциал тенгламалар ва системаларнинг $[x_0, x_n]$ оралиқдаги ечим қийматлари жадвали $1 \cdot 10^{-4}$ аниқлик билан тузилсин. Бошланғич кесмани топишда Рунге — Кутта усулидан фойдаланилсин:

$$24. y' = 2x - y, y(0) = 1, [0; 0,5], h = 0,05.$$

$$25. y' = -(x + 2y), y(0) = 1, [0; 1], h = 0,1.$$

$$26. y' = 2y^2 - 3, y(0) = 1, [0; 0,5], h = 0,05.$$

$$27. \begin{cases} y' = -2x + y, & y(0) = 2, z(0) = -2, [0; 0,5], h = \\ z' = x + 2y - 3z, & = 0,05. \end{cases}$$

$$28. y' = (xy^2 - 1)y, y(0) = 1, h = 0,1.$$

$$29. y' = y_2 e^x + 2y, y(0) = 1, [0; 1], h = 0,1.$$

$$30. y' = \frac{1}{y^2 - x^2}, y(1) = 0, [1; 2], h = 0,1.$$

$$31. y' = \frac{\sin bt}{a^2 + y^2}, \quad a = 1,0 + 0,2n, \quad b = 1,0 + 0,3k,$$

$$n, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$32. \begin{cases} x' = \ln(b + \sqrt{a^2 t^2 + y^2}), & x(0) = 1, \quad y(0) = 0,5, \\ y' = \sqrt{a^2 t^2 + x^2} \end{cases}$$

$$a = 2,0 + 0,5n, \\ n = 0,3, \quad b = 2,0 + 0,5k, \\ k = 0,5, \quad h = 0,1.$$

33 — 34- машқларда Милн усули қўлланилиб, дифференциал тенгламаларнинг $[a, b]$ оралиқдаги ечимлари 10^{-4} гача аниқлик билан топилсин:

$$33. y' = -y \left(\frac{1}{2x} + \frac{2y}{\alpha} \right) \ln x, \quad y(1) = 1, \quad [1; 3], \quad \alpha = 0,5 + 0,25k, \quad k = 0; 20.$$

$$34. y = \frac{1}{\alpha \sin x} - y \operatorname{tg} x, \quad y(0) = 1, \quad \alpha = 0,4 + 0,02k,$$

$$k = 0, 20, [0; 1],$$

35. Ўзгарувчан $k(x)$ коэффициентли

$$\begin{cases} k(x) u''(x) + k'(x) u'(x) = f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 2 \end{cases}$$

дифференциал масала ушбу

$$\frac{1}{h} \left(a_{j+1} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} - a_j \frac{y_j - y_{j-1}}{h} \right) = j(x_j), \quad j = \overline{1; N-1},$$

$$y_0 = 1, \quad D_h = \{x_j = jh, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = 2, \quad h = 1/N, \quad a_j = k(x_j - 0,5h)$$

айирмали масала билан аппроксимация қилинган. Аппроксимация тартибини аниқланг.

36. 35- масала $a_j = \sqrt{k(x_j) k(x_{j-1})}$ функция учун ечилсин.

37. Ушбу

$$\begin{cases} u'(x) + 2u = 0, & x \in [0; 1], \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

дифференциал масаланинг $[u]_h$ аниқ ва уни аппроксимацияловчи

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + 2y_j = 0, & j = \overline{1; N-1}, \quad h = 1/N, \\ y_0 = 1, \quad y_1 = 1 - 2h \end{cases}$$

айирмали масаланинг $y^{(n)}$ ечими топилсин ва шу ечимлар бўйича $\| [u]_h - y^{(n)} \|_{C_h}$ баҳолансин, бунда $\| \cdot \| = \max (|u_j - y_j|)$.

8-ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

1-топшириқ: Ушбу $y' = \frac{\alpha}{x^2 + y^2 + \beta}$, $y(0) = 0$ бошланғич масала хусусий ечимининг $[0; 0,5]$ оралиқдаги қийматлари $h = 0,1$ қадам билан $1 \cdot 10^{-5}$ аниқликда топилсин:

1-жадвал

Вариант №	α	β	Вариант №	α	β	Вариант №	α	β
1	1,0	2,6	9	1,8	1,4	17	2,6	1,8
2	1,4	2,2	10	1,4	1,0	18	2,2	1,4
3	1,8	2,6	11	1,0	2,4	19	1,8	1,0
4	2,2	1,0	12	1,4	1,8	20	1,4	3,0
5	2,6	3,0	13	1,8	3,0	21	1,5	2,8
6	3,0	2,6	14	2,2	2,6	22	2,7	1,4
7	2,6	2,2	15	2,6	1,4	23	2,0	1,8
8	2,2	1,8	16	3,0	2,2	24	2,4	2,0
						25	2,5	1,9

2-топшириқ: Ушбу

$$\begin{cases} y' = \cos(\mu y) + z, \\ z' = \sqrt{x^2 + \gamma z^2} + y \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0,5$$

бошланғич масала хусусий ечимининг $[0; 0,3]$ оралиқдаги қийматлари $h = 0,1$ қадам билан топилсин ва уларнинг аниқлиги Рунге қондаси бўйича баҳолансин:

2-жадвал

Вариант №	μ	γ	Вариант №	μ	γ	Вариант №	μ	γ
1	2,0	3,5	10	2,5	3,5	18	2,0	2,0
2	2,5	3,0	11	2,0	3,0	19	2,5	4,5
3	3,0	2,5	12	2,0	4,5	20	3,0	3,0
4	3,5	2,0	13	2,5	4,5	21	3,2	2,0
5	2,0	4,0	14	2,0	2,5	22	3,3	1,8
6	2,5	2,5	15	2,5	2,0	23	2,4	1,8
7	3,0	2,0	16	3,0	3,5	24	2,2	2,4
8	3,5	4,5	17	3,5	3,0	25	2,4	3,0
9	3,0	4,0						

3- топшириқ: Қуйидаги бошланғич масалалар ечилсин ($h = 0,1$, $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$):

Вариант
№

1. $x^2 y'' - 6y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, [1; 2].
2. $x^2 y'' - 12y = 0$, $y(2) = 11$, $y'(2) = 9,6$, [2; 3].
- 3 — 8. $x^2 y'' + xy' - y = mx^2$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1,8$, [1; 1,5],
 $m = 1; 6$.
- 9 — 13. $xy'' + (x + k)y' + ly = 0$, [1; 1,5]:

Вар. №	k	l	$y(1)$	$y'(1)$
9	0	1	0,367879	0
10	0	-1	1	1
11	1	1	0,367879	-0,367879
12	2	1	1	-1
13	2	2	0,367879	-0,367879

14. $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$,
[0; 0,5].
15. $x^3 y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,
[0; 0,5].
16. $x^2 y'' - xy' + y = 3x^3$, $y(1) = 1,75$, $y'(1) = 4,25$ [1; 1,5].
17. $y'' + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}y = 8x$, $y(1)$, $y'(1) = 0,8$, [1; 1,5].
18. $y'' - 3y' = x^2 + 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, [0; 1].
19. $xy'' + y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, [0; 0,5].
20. $x^2(x + 1)y'' - 2y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$, [1; 2].
21. $y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$, $y(1) = 0,77$, $y'(1) = -0,44$, [1; 1,7].
22. $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 3x$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 6$, [0; 0,5].
23. $y'' - 3y' = x^2 + 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, [0; 0,5].
24. $y'' + y \operatorname{ch} x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, [0; 0,5].
25. $x'' + \frac{y'}{x} + y = 0$, $y(1) = 0,77$, $y'(1) = -0,44$, [1; 1,5]

9-БОБ. ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

Икки нуқтали чегаравий масала. $[a, b]$ оралиқнинг ичида

$$F(x, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

тенгламани, оралиқнинг чекка нуқталарида

$$\varphi_i[u(a), u'(a), \dots, u^{(n-1)}(a)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\psi_j[u(b), u'(b), \dots, u^{(n-1)}(b)] = 0, \quad j = N+1, N+2, \dots, n \quad (2)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u = u(x)$ функцияни топиш талаб қилинади. Агар (1)–(2) тенгламалар $u(x)$, $u'(x)$, $\dots$, $u^{(n)}(x)$ ларга нисбатан чизиқли бўлса, биз чизиқли чегаравий масалага эга бўламиз. Кейинги мулоҳазаларда биз қисқалик учун асосан ушбу $n = 2$ бўлган ҳол билан чегараланамиз:

$$\begin{cases} u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), & (3) \\ \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = A, \quad \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = B, & (4) \end{cases}$$

бунда $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ функциялар берилган ва улар $[a, b]$ оралиқда узлуксиз, α_0 , α_1 , β_0 , β_1 , A , B — ўзгармас сонлар. $A = B = 0$ бўлган ҳолда (4) шартлар бир жинсли шартлар дейилади. Масала ягона $u(x)$ ечимга эга бўлиши ва $u(x)$ нинг етарлича юқори тартибли ҳосилалари мавжуд бўлиши учун $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$ шартларнинг бажарилиши зарурдир.

Чекли айирмалар усули. $[a, b]$ оралиқда олинган $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i = x_0 + ih$, $h = (a - b)/n$, $i = 1; n - 1$ тугунларда (3) тенгламанинг коэффициентлари $p(x_i) = p_i$, $q(x_i) = q_i$, $f(x_i) = f_i$ қийматларни қабул қилсин. Агар u' , u'' ҳосилалар мос

равишда $\frac{y_{i+1} - y_i}{h}$, $\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$ каби айирмали нис-

батлар билан алмаштирилса, натижада (3), (4) ифодалар $n + 1$ номаълумли $n + 1$ та чизиқли алгебраик тенгламалар системасига келади:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases} \quad (5)$$

Системани ечиб, $u(x_i) \approx y(x_i)$ қийматлар жадвалига эга бўламиз.

1-мисол. Чекли айирмалар усули қўлланилиб, ушбу

$$u'' - x^3 u' = 4, \quad u(1) = 0, \quad u(1,4) = 0,2492$$

чегаравий масала ечимининг $u(1,1)$, $u(1,2)$ ва $u(1,3)$ қийматлари топилсин.

Ечиш: u'' , u' ҳосилаларни айирмали ҳосилалар билан алмаштириб, қуйидагиларни оламиз:

$$\frac{y_{i+1} 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - x_i^3 \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 4,$$

ёки

$$2y_{i+1} - 4y_i + 2y_{i-1} - x_i^3 h y_{i+1} + x_i^3 h y_{i-1} = 8h^2,$$

ёки

$$(2 + x_i^3 h) y_{i-1} - 4y_i + (2 - x_i^3 h) y_{i+1} = 8h^2. \quad (6)$$

Бизда $h = 0,1$. Уни ва $x_1 = 1,1$, $x_2 = 1,2$, $x_3 = 1,3$, $y_1 = 0$, $y_4 = 0,2492$ ларни (6) тенгламга қўйиб, ушбу системани тузамиз:

$$\begin{cases} (2 + 1,1^3 \cdot 0,1) y_1 - 4y_1 + (2 - 1,1^3 \cdot 0,1) y_2 = 8 \cdot 0,1^2, \\ (2 + 1,2^3 \cdot 0,1) y_1 - 4y_2 + (2 - 1,2^3 \cdot 0,1) y_3 = 8 \cdot 0,1^2, \\ (2 + 1,3^3 \cdot 0,1) y_2 - 4y_3 + (2 - 1,3^3 \cdot 0,1) y_4 = 8 \cdot 0,1^2. \end{cases}$$

Системани ечиб, $y_1 = -0,0093$, $y_2 = 0,0216$, $y_3 = 0,1029$ ларни топамиз. Улар $u(x)$ ечимнинг изланаётган қийматларини $1 \cdot 10^{-4}$ аниқликда ифодалайди.

Агар (3) масалада изланаётган $u = u(x)$ функцияни g етарлича силлиқликка эгаллиги маълум бўлса, у ҳолда $u'(a)$ ҳосилани $\frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}$ орқали, $u'(b)$ ни эса $\frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}$

орқали алмаштириш аниқроқ натижа беради. Алмаштиришларда дифференциаллаш ва интеграллаш ҳисобининг формулаларига чекли айирмали аналоглар ҳам қўлланилади. Жумладан,

а) $(v\omega)' = v'\omega + v\omega'$ формуланинг аналоглари:

$$(PH)_{\bar{x}, i} = P_i H_{\bar{x}, i} + H_{i-1} P_{\bar{x}, i}, \quad (7)$$

$$(PH)_{x, i} = P_i H_{x, i} + P_{x, i} H_{i+1}, \quad (8)$$

$$\text{б) } \int_a^b v(x) \omega'(x) dx = \int_a^b \omega(x) v'(x) dx + v(b) \omega(b) - v(a) \omega(a)$$

формуланнинг аналог:

$$(P, H_x) = -(H, P_x) + P_N H_N - P_0 H_0. \quad (9)$$

n нинг катта қийматларида (5) системани ечиш оғирлашади. Бу ҳолда (3) — (4) чегаравий масалани ечишни иккита Коши масаласини ечишга келтириш маъқул. Ушбу отишув усулининг моҳияти ҳам шундан иборат.

Отишув усули. Берилган масалада $\alpha_0 \neq 0$ фараз қилинади ва ечим $u = Cv + w$ кўринишда изланади, бунда v ушбу

$$\begin{cases} v'' + p(x)v + q(x)v = 0, \\ v(a) = \alpha_1, \quad v'(a) = -\alpha_0. \end{cases} \quad (10)$$

Коши масаласининг ечими, w эса

$$\begin{cases} w'' + p(x)w' + q(x)w = f(x), \\ w(a) = \frac{A}{\alpha_0}, \quad w'(a) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Коши масаласининг ечимидан иборат. C доимий (4) чегаравий шартларга асосланиб ушбу формула бўйича топилади:

$$C = \frac{B - [\beta_0 w(b) + \beta_1 w'(b)]}{\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b)}. \quad (12)$$

(10) Коши масаласини ушбу айирмалли масалага алмаштирамыз:

$$\begin{cases} \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} + p_i \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} + q_i v_i = 0, \\ v_0 = \alpha_1, \quad \frac{-v_2 + 4v_1 - 3v_0}{2h} = -\alpha_0. \end{cases} \quad (13)$$

(13) системадан қуйидагиларни оламиз:

$$\begin{aligned} v_0 = \alpha_1, \quad v_1 &= \frac{\alpha_1 (1 + p_1 h) - \alpha_0 h \left(1 + \frac{p_1}{2} h\right)}{1 + p_1 h + \frac{q_1}{2} h^2}, \\ v_{i+1} &= \frac{(2 - q_i h^2) v_i - \left(1 - \frac{p_i}{2} h\right) v_{i-1}}{1 + \frac{p_i}{2} h}, \quad i = 1, n-1, \\ v(b) = v_n, \quad v'(b) &= \frac{3v_n - 4v_{n-1} + v_{n-2}}{2h}. \end{aligned}$$

Шу тартибда (11) дифференциал масала ҳам алмаштирилади:

$$\begin{cases} \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{h^2} + p_i \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} + q_i w_i = f_i, & i = \overline{1; n-1}, \\ w_0 = \frac{A}{\alpha_0}, \quad \frac{-x_2 + 4w_1 - 3w_n}{2h} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Бу системадан қуйидагилар олинади:

$$w_0 = \frac{A}{\alpha_0}, \quad w_1 = \frac{\frac{1}{2} f_1 h^2 + \frac{A}{\alpha_0} (1 + p_1 h)}{1 + p_1 h + \frac{q_1}{2} h^2},$$

$$w_{i+1} = \frac{(2 - q_i h^2) w_i - \left(1 - \frac{p_i}{2} h\right) w_{i-1} + f_i h^2}{1 + \frac{p_i}{2} h}, \quad i = \overline{1; n-1},$$

$$w(b) = w_n, \quad w'(b) = \frac{3w_n - 4w_{n-1} + w_{n-2}}{2h}.$$

Энди (12) бўйича C аниқланади, ва ниҳоят:

$$w_i = C v_i + \bar{w}_i \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Ҳайдаш усули. Моҳиятига кўра ҳайдаш усули номаълумларни кетма-кет чиқариш усулининг вариантларидан бири ҳисобланади. Шунга кўра ундан айирмали схемаси таркибида уч диагонал матрицали чизиқли алгебраик тенгламалар системаси бўлган чегаравий масалаларни ечишда фойдаланиш осон (уч диагонал матрицали айирмали схема ҳақида 8-бобда келтирилган 10-мисолга қаранг).

(3) — (4) чегаравий масала бўйича ушбу

$$\begin{cases} \frac{y_{j+2} - 2y_{j+1} + y_j}{h^2} + p_j \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + q_j y_j = f_j, & j = \overline{0; N-2}, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_N + \beta_1 \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = B \end{cases} \quad (16)$$

айирмали масала тузилган бўлсин. Бу масала икки босқичда ҳал қилинади.

1-босқич. Тўғри ҳайдаш (юриш):

1) (15) тенглама

$$y_{j+2} + m_j y_{j+1} + k_j y_j = h^2 f_j, \quad h - \text{қадам} \quad (17)$$

кўринишга келтирилади ва $j = \overline{0; N-2}$ учун m_j , k_j коэффициентлар ва $h^2 f_j$ ўнг қисм ифодаси қийматлари аниқланиб, жадвалга киритилади (2-мисол, жадвалнинг (1) — (5) устунлари, қуйига қаранг), бунда

$$m_j = -2 + hp_j, \quad k_j = 1 - hp_j + h^2 q_j, \quad j = \overline{0; N-2}. \quad (18)$$

2) (17) системанинг ушбу

$$y_2 + m_0 y_1 + k_0 y_0 = h^2 f_0$$

биринчи ($j = 0$ ҳолидаги) тенгламасига (16) биринчи чегаравий шарт бўйича олинадиган

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - hA}{\alpha_1 - h\alpha_0}$$

ифода қўйилиши натижасида

$$y_1 = \frac{\alpha_1 - h\alpha_0}{m(\alpha_1 - h\alpha_0) + k_0 \alpha_1} \left(\frac{k_0 h A}{\alpha_1 - h\alpha_1} + h^2 f_0 - y_0 \right)$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан ушбу ифода қийматлари топилади:

$$c_0 = \frac{\alpha_1 - h\alpha_0}{m_0(\alpha_1 - h\alpha_0) + k_0 \alpha_1}, \quad d_0 = \frac{k_0 h A}{\alpha_1 - h\alpha_0} + h^2 f_0.$$

c_0 ва d_0 қийматларини жадвалга киритамиз ((6), (7) устунлар).

Шу каби алмаштиришлар $j = \overline{1; N-2}$ учун ушбу рекуррент формулаларни беради:

$$y_{j+1} = c_j (d_j - y_{j+2}), \quad (19)$$

$$c_j = \frac{1}{m_j - k_j c_{j-1}}, \quad d_j = f_j h^2 - k_j c_{j-1} d_{j-1}. \quad (20)$$

c_j ва d_j қийматлари ҳам жадвалга жойлаштирилади.

2-босқич. Тескари ҳайдаш (юриш):

1) Олдин y_N аниқланади. Шу мақсадда (16) иккинчи чегаравий шарт ва (19) системанинг $j = N-2$ бўлган ҳолдаги $y_{N-1} = c_{N-2} (d_{N-2} - y_N)$ тенгламаси бўйича ҳосил қилинадиган ушбу

$$y_N = \frac{\beta_1 c_{N-2} d_{N-2} + B h}{\beta_1 (1 + c_{N-2}) + \beta_0 h}. \quad (21)$$

y_N қиймати ((8) устуннинг пастдан энг охириги катаси) жадвалга киритилади.

2) жадвалга олдин киритилган c_j , d_j ва y_j қийматлардан фойдаланиб (19) рекуррент формула бўйича кетма-кет y_{N-1} , y_{N-2} , $\dots$, y_1 лар ва биринчи чегаравий шарт (16) бўйича y_0 аниқланади.

2- мисол. $y'' - 2xy' - 2y = -4x$, $y(0) - y'(0) = 0$, $y(1) = 3,71828$ чегаравий масаланинг $x_i = 0,1i$ ($i = \overline{1;10}$) нуқталардаги ечими ҳайдаш усули қўлланилиб топилсин.

Ечиш: Масалани тўр масалага келтирамиз:

$$\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} - 2x_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - 2y_i = -4x_i,$$

ёки

$$\begin{cases} y_{i+1} - 2(1 - x_i h) y_{i+1} + (1 + 2x_i h - 2h^2) y_i = -4x_i h^2, \\ y_0 - \frac{y_1 - y_0}{h} = 0, \quad y_{10} = 3,71828, \quad h = 0,1, \end{cases}$$

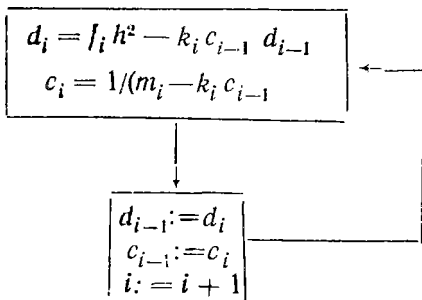
бунда $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1$, $A = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta = 0$, $B = 3,71828$, $m_i = -2(1 + 0,1x_i)$, $k_i = 0,98 + 0,2x_i$, $f_i = -4x_i$, $x_i = 0,1i$ $i = \overline{0;10}$.

Тўғри юриш: жадвалга $i = \overline{0;8}$ учун x_i , m_i , k_i , $f_i h^2$ қийматларини киритамиз. Ҳисоблаш схемаси: $x_i = x_{i-1} + 0,1$; $m_i = m_{i-1} - 0,02$; $k_i = k_{i-1} + 0,02$; $f_i h^2 = f_{i-1} h^2 - 0,004$ (жадвалнинг 1 — 5 - устунлари); c_0 ва d_0 ларни ҳисоблаймиз:

$$c_0 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 h}{m_0(\alpha_1 - \alpha_0 h) + k_0 \alpha_1} = \frac{-1,1}{-2(-1,1) - 0,98} = -0,90164,$$

$$d_0 = \frac{k_0 A h}{\alpha_1 - \alpha_0 h} + f_0 h^2 = 0.$$

Қолган d_i , c_i ($i = \overline{1;8}$) қийматларни ҳисоблаш схемаси (6 — 7 - устунлар):



i	x_i	m_i	k_i	$f_i h^2$	Тўғри юриш		Теска- ри юриш y_i	Контроль $y(x)$ ани қ қиймати
					d_i	c_i		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	0,0	-2	0,98	0	0	-0,90164	1,11785	1,00000
1	0,1	-2,02	1	-0,004	-0,004	-0,89413	1,22963	1,11005
2	0,2	-2,04	1,02	-0,008	-0,01165	-0,88653	1,36377	1,24081
3	0,3	-2,06	1,04	-0,012	-0,02274	-0,87873	1,52125	1,39417
4	0,4	-2,08	1,06	-0,016	-0,03718	-0,87067	1,70431	1,57351
5	0,5	-2,10	1,08	-0,020	-0,05496	-0,86231	1,91678	1,78403
6	0,6	-2,12	1,10	-0,024	-0,07613	-0,85364	2,16432	2,03333
7	0,7	-2,14	1,12	-0,028	-0,10079	-0,84465	2,45494	2,33232
8	0,8	-2,16	1,14	-0,032	-0,12905	-0,83535	2,79972	2,79648
9	0,9						3,21387	3,14791
10	1						3,71828	3,71828

Тескари юриш: $y_{10} = \frac{\beta_1 c_8 d_8 + B h}{\beta_1(1 + c_8) + \beta_0 h} = \frac{B h}{\beta_0 h} = B = 3,71828$.

Қолган y_i ($i = 9, 8, \dots, 1$) қийматлар $y_i = c_{i-1}(d_{i-1} - y_{i+1})$ бўйича, y_0 эса $y_0 - \frac{y_1 - y_0}{0,1} = 0$ бошланғич шартдан фойдаланиб топилади: $y_0 = 1,11785$ (8-устун). Контрол мақсадида (9) устунда аниқ ечим $y = x + e^{x^2}$ нинг қийматлари келтирилган.

Итерация усули иккинчи тартибли чизиқли бўлмаган

$$\{u'' = f(x, u, u'). \quad (22)$$

$$\{\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = A, \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = B \quad (23)$$

чегаравий масалани ечишда қўлланилади.

$[a, b]$ оралиқда h қадам билан тенг узоқлашган $x_0 = a$, $x_j = x_0 + jh$ ($j = 1; N - 1$) тугунлар системасини оламир. (22), (23) чегаравий масала $N + 1$ та номаълумли $N + 1$ та чизиқли бўлмаган тенгламадан иборат

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} = f\left(x_j, y_j, \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h}\right), j = 1; N - 1, \\ \Gamma_0[y] = \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \\ \Gamma_n[y] = \beta_0 y_N + \beta_1 \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = B \end{cases} \quad (24)$$

айирмали масалага келтирилади. (24) система итерация усули бўйича ушбу формулалар ёрдамида ечилади:

$$y_{j+1}^{[r+1]} - 2y_j^{[r+1]} + y_{j-1}^{[r+1]} = h^2 f \left(x_j, y_j^{[r]}, \frac{y_{j+1}^{[r]} - y_{j-1}^{[r]}}{2h} \right),$$

$$j = \overline{1; N-1}, \quad (25)$$

$\Gamma_0[y^{[r+1]}] = A$, $\Gamma_N[y^{[r+1]}] = B$, r — яқинлашиш номери.

Изланаётган яқинлашишлар қуйидагича ошкор ифодаланиши мумкин:

$$y_j^{[r+1]} = \frac{h}{\Delta} [A\beta_0(b-a) + A\beta_1 + \alpha_1 B] + \frac{j}{\Delta} (\alpha_0 B - A\beta_0) +$$

$$+ h^2 \sum_{i=1}^{N-1} g_{ij} f_i^{[r]}, \quad (26)$$

бунда $a, b, A, B, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ лар берилган, Δ ва g_{ij} лар қуйидаги формулалар бўйича ҳисобланади:

$$\Delta = \frac{1}{h} [\alpha_0 \beta_0 (b-a) + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0] \quad (27)$$

$$g_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \left(i\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{h} \right) \left(j\beta_0 - \beta_0 N - \frac{\beta_1}{h} \right), & i \leq j, \\ \frac{1}{\Delta} \left(j\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{h} \right) \left(i\beta_0 - \beta_0 N - \frac{\beta_1}{h} \right), & i > j, \end{cases} \quad (28)$$

3-мисол. $y'' = 2 + y^2$, $y(0) = y(1) = 0$ чегаравий масаланинг $x_k = 0,1k$ ($k = \overline{1; 9}$) нуқталардаги ечим қийматлари итерация методи қўлланилиб топилсин.

Ечиш: $n = (b-a)/h = (1-0)/0,1 = 10$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $A = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$, $B = 0$ $f(x, y) = 2 + y^2$, (27) ва (28) муносабатлар бўйича:

$$\Delta = \frac{1}{0,1} [1 \cdot 1 \cdot (1-0) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1] = 10,$$

$$g_{ik} = \begin{cases} 0,1i(k-10), & i \leq k, \\ 0,1k(i-10), & i \geq k, \end{cases}$$

$$y^{[r+1]} = 0,01 \sum_{i=1}^9 g_{ik} f_i^{[r]}.$$

g_{ik} коэффициентлар: $i = 1$ бўлса, $g_{ik} = 0,1(k-10)$ бўлади, масалан, $g_{11} = -0,9$, $g_{12} = -0,8$, $g_{13} = -0,7, \dots$, $g_{19} = -0,1$;

	k	1	2	3	4	5
1	$y_k^{[1]}$	-0,0916665	-0,163252	-0,2145815	-0,24547	-0,2557825
	$f_k^{[1]}$	2,0084028	2,0266512	2,0460452	2,0602555	2,0654247
2	$y_k^{[2]}$	-0,0917404	-0,1633973	-0,214787	-0,245358	-0,255844
	$f_k^{[2]}$					

	k	6	7	8	9
r	x_r	0,6	0,7	0,8	0,9
0	$y_k^{[0]}$	-0,24	-0,21	-0,16	-0,09
	$f_k^{[0]}$	2,0576	2,0441	2,0256	2,0081
1	$y_k^{[1]}$	-0,24547	-0,2145815	-0,163252	-0,0916665
	$f_k^{[1]}$	2,0602555	2,0460452	2,0266512	2,0084020
2	$y_k^{[2]}$	-0,245358	-0,214787	-0,163397	-0,091748
	$f_k^{[2]}$				

Изланаётган ечим қийматининг x_k ($k = 1; 9$) нуқталардаги $y_k^{[1]}$ ва $y_k^{[2]}$ яқинлашишлари $1 \cdot 10^{-3}$ гача аниқликда уст-ма-уст тушаётганини кўрамиз. Бундан ҳам аниқроқ натижа олишга зарурият бўлса, кўрсатилган йўл билан $y_k^{[3]}$, $y_k^{[4]}$, ... яқинлашишлар ҳисобланиши керак бўлади.

Галеркин усули (3), (4) чегаравий масала ечимини аналитик кўринишда (функциялар йиғиндисини кўринишида) олишга имкон беради.

Ушбу

$$\begin{cases} L[y] = f(x), & L[y] \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y, \\ \Gamma_a[y] = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a), & \Gamma_b[y] = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) \end{cases} \quad (29)$$

чегаравий масалани ечиш талаб этилсин. $[a, b]$ ораликда

$$u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x), \dots \quad (30)$$

базис функциялар системаси берилган ва улар ушбу шартларни қаноатлантирсинлар:

1) (30) система ортогонал, яъни

$$\int_a^b u_i(x) u_j(x) dx = 0, \quad i \neq j, \quad \int_a^b u_i^2(x) dx \neq 0; \quad (31)$$

2) (30) тўплам тўла системани ташкил этади, яъни барча $u_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) функцияларга ортогонал бўладиган ҳолдан фарқли бошқа функция мавжуд эмас;

2) чекли сондаги $u_i(x)$ ($i = \overline{0; n}$) базис функциялар системаси шундай танланадики, $u_0(x)$ функция бир жинсли бўлмаган

$$\Gamma_a[u_0] = A, \quad \Gamma_B[u_0] = B \quad (32)$$

чегаравий шартларни, $u_i(x)$ ($i = \overline{1; n}$) функциялар эса

$$\Gamma_a[u_i] = \Gamma_b[u_i] = 0 \quad (i = \overline{1; n}) \quad (32')$$

чегаравий шартларни қаноатлантирсинлар.

(29) чегаравий масаланинг изланаётган ечими

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \quad (33)$$

кўринишда топилади. c_i коэффициентлар шундай танланиши керакки, R боғланмаслик квадратидан олинган

$$\int_a^b R^2(x, c_1, c_2, \dots, c_n) dx \quad (34)$$

интегралнинг қиймати энг кичик бўлсин, бунда

$$R(x, c_1, \dots, c_n) = L[u_0] + \sum_{i=1}^n c_i L[u_i] - f(x).$$

Ортогоналлик шартини

$$\int_a^b u_k(x) R(x, c_1, \dots, c_n) dx = 0 \quad (k = \overline{1; n}),$$

ёки

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_a^b u_k(x) L[u_i] dx = \int_a^b u_k(x) \{f(x) - L[u_0]\} dx,$$

ёки

$$\sum_{i=1}^n c_i a_{ik} = b_k \quad (35)$$

система кўринишида ёзамиз, бунда

$$a_{ik} = \int_a^b u_k(x) L[u_i] dx, b_k = \int_a^b u_k(x) \{f(x) - L[u_0]\} dx. \quad (36)$$

(35) системадан c_i қийматлар аниқлаб олинади.

4-мисол. $y'' + 2xy' - 2y = 2x^2$, $y'(0) = -2$, $y(1) + y'(1) = 0$ чегаравий масала Галеркин усули қўлланилиб ечилсин.

Ечиш. $u_0(x)$, $u_1(x)$, ... функциялар системасини 1, x , x^2 , ... функциялар комбинациялари кўринишида танлаймиз. Бунда $u_0(x)$ функция (32) шартларни қаноатлантирсин, яъни $u_0^1(0) = -2$, $u_0(1) + u_0^1(1) = 0$ бўлсин, қолган $u_k(x)$ лар (32') шартларни қаноатлантирсин. $u_0(x)$ ни $u_0(x) = b + cx$ кўринишида излаймиз. $u_0^1(x) = c$, иккинчи томондан шартга кўра $c = -2$, $u_0(1) + u_0^1(1) = 0$, ёки $(b + c \cdot 1) + c = 0$, бундан $b = 4$. Шундай қилиб, $u_0(x) = 4 - 2x$. (32') га кўра $\Gamma_0[u_k] = 0$, $\Gamma_1[u_k] = 0$, ёки $u_k^1(0) = 0$, $u_k(1) + u_k^1(1) = 0$. $u_k(x)$ функцияларни $u_k(x) = b_k + x^{k+1}$ кўринишида излаймиз. $u_k^1(0) = (k + 1)x^k = 0$. Бунга қараганда $\Gamma_0[u_k] = 0$ шарт бажарилмоқда. Иккинчи шарт $\Gamma_1[u_k] = 0$ дан фойдаланиб, b_k ни топамиз: $(b_k + 1^{k+1}) + (k + 1) \cdot 1^k = 0$, бундан $b_k = -(k + 2)$. Биз $k = 1, 2$ бўлган ҳоллар билан чегараланамиз. $u_0(x) = 4 - 2x$, $u_1(x) = -3 + x^2$. $u_2(x) = -4 + x^3$ базис функциялар системаси ҳосил бўлади. Ечимни $y(x) = u_0(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ кўринишида излаймиз:

$$L[u_0] = (4 - 2x) + 2x(4 - 2x)' = 2(4 - 2x) = -8,$$

$$L[u_1] = (x^2 - 3)'' + 2x(x^2 - 3)' - 2(x^2 - 3) = 2x^2 + 8,$$

$$L[u_2] = (x^3 - 4)'' + 2x(x^3 - 4)' - 2(x^3 - 4) = 4x^3 + 6x + 8,$$

(36) бўйича:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_0^1 u_1(x) L[u_1] dx = \int_0^1 (x^2 - 3)(2x^2 + 8) dx = \\ &= -22,93333, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= \int_0^1 u_2(x) L[u_1] dx = \int_0^1 (x^3 - 4)(2x^2 + 8) dx = \\ &= -32,33333, \end{aligned}$$

$$a_{21} = \int_0^1 u_1(x) L[u_2] dx = \int_0^1 (x^2 - 3)(4x^3 + 6x + 8) dx =$$

$$= -31,16667,$$

$$a_{22} = \int_0^1 u_2(x) L[u_2] dx = \int_0^1 (x^2 - 4)(4x^3 + 6x + 8) dx =$$

$$= -44,22857,$$

$$b_1 = \int_0^1 u_1(x) \{f(x) - L[u_0]\} dx = \int_0^1 (x^2 - 3)(2x^2 + 8) dx =$$

$$= -22,93333,$$

$$b_2 = \int_0^1 u_2(x) \{f(x) - L[u_0]\} dx = \int_0^1 (x^3 - 4)(2x^2 + 8) dx =$$

$$= -32,33333.$$

(35) системани тузамиз:

$$\begin{cases} c_1 a_{11} + c_2 a_{21} = b_1, \\ c_1 a_{12} + c_2 a_{22} = b_2 \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} -22,93333 c_1 - 31,16667 c_2 = -22,93333, \\ -32,33333 c_1 - 44,22857 c_2 = -32,33333, \end{cases}$$

бундан $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ аниқланади. Изланаётган ечим:

$$y(x) = u_0(x) + 1 \cdot u_1(x) + 0 \cdot u_2(x) = x^2 - 2x + 1. \quad \checkmark$$

Коллокация усулида (29) чегаравий масала ечими

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \quad (37)$$

кўринишида изланади. Бунда $u_i(x)$ ($i = \overline{0; n}$) чизиқли боғланмаган функциялар (32), (32') шартларни қаноатлантиради.

$$R(x, c_1, \dots, c_n) = L[y] - f(x) = L[u_0] - f(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n c_i L[u_i] \quad (38)$$

фарқ шундай олинадикки, $y[a, b]$ ораликдаги коллокация нуқталари деб аталувчи $x_1, x_2, \dots, x_n$ нуқталар система-сида нолга айлансин. Бу нуқталарнинг сони (33) ифодадаги

номаълум коэффициентлар сонига тенг бўлиши керак.
 $c_1, c_2, \dots, c_n$ коэффициентлар

$$\begin{cases} R(x_1, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0, \\ R(x_2, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0, \\ \vdots \\ R(x_n, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \end{cases} \quad (39)$$

системадан аниқланади.

Коллокация усули чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламаларни ечишда ҳам қўлланиши мумкин. Жумладан, $y'' = f(x, y, y')$ тенгламанинг ечими чизиқли чегаравий шартни қаноатлантирсин. Бу ҳолда боғланмаганлик (фарқ) $R(x) = y'' - f(x, y, y')$, (39) эса $c_1, c_2, \dots, c_n$ номаълумларга нисбатан чизиқли бўлмаган тенгламалар системасидан иборат бўлади.

5-мисол. Коллокация усули қўлланилиб, $y'' + (1 + x^2)y + 1 = 0$ тенгламанинг $y(-1) = y(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш: Тенгламага ва чегаравий шартларга қараганда изланаётган ечим жуфт функция бўлиши керак. Базис функциялар сифатида $u_0(x) = 0$, $u_1(x) = 1 - x^2$, $u_2(x) = x^2(1 - x^2)$ кўпхадларни оламир. Ечимни $y = c_1(1 - x^2) + c_2x^2(1 - x^2) = (1 - x^2)(c_1 + c_2x^2)$ кўринишида излаймиз. Коллокация нуқталари $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$ бўлсин. Бизда $f(x) = -1$, $L[y] = (1 - x^2)(c_1 + c_2x^2)'' + (1 - x^4)(c_1 + c_2x^2) = -(1 + x^4)c_1 + (2 - 11x^2 - x^6)c_2$. Боғланмаганлик: $R(x) = L[y] - f(x) = 1 - (1 + x^4)c_1 + (2 - 11x^2 - x^6)c_2$. Бунга $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$ қийматларни қўйиб, $1 - c_1 + 2c_2 = 0$, $1 - \frac{17}{16}c_1 - \frac{49}{64}c_2 = 0$ системани тузамиз. Бундан $c_1 = 0,957$, $c_2 = -0,022$ олинади. Изланаётган ечим: $y \approx 0,957(1 - x^2) - 0,022x^2(1 - x^2)$.

МАШҚЛАР

1 — 7- чегаравий масалаларнинг x_k нуқталардаги ечим қийматлари чекли айирмалар усуллари (чизиқли алгебраик тенгламалар системасига келтириш усули, ҳайдаш усули, отишув усули) қўлланилиб топилсин:

$$1. y''(x) = \frac{2}{x} y'(x) - \frac{4}{x^2 + 2} y(x) = 8, y'(0,5) = 0,5,$$

$$y(1) + y'(1) = 1, x_k = 0,1k, k = \overline{5}; 10, \varepsilon = 1 \cdot 10^{-2}.$$

$$2. y''(x) + y'(x) - \frac{1}{x} y(x) = \frac{x+1}{x}, y(0,5) = -0,5 \ln 2, \\ y(1) = 0, x_k = 0,1 k, k = \overline{5; 10}, \varepsilon = 1 \cdot 10^{-2}.$$

$$3. 4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-1,5k}, y(0) = 3, y(1) = \\ = 0,89252, x_k = 0,2 k, k = \overline{1; 4}, \varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}.$$

$$4. y'' - 4y' + 4y = f(x), \varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}, \text{ бунда:}$$

$$1) f(x) = 1, y(0) = 2,25, y(1) = 0,25, x_k = 0,1 k, k = \overline{1; 9};$$

$$2) f(x) = e^{-x}, y(0) = 1 \frac{1}{y}, y(1,2) = 24,284451, x_k = 0,1 k, \\ k = \overline{1; 11},$$

$$3) f(x) = 3e^{2x}, y(-1) = 0,203003, y(0) = 1, x_k = 0,2 k, \\ k = \overline{1; 4};$$

$$4) f(x) = 2(\sin 2x + x), y(0) = 1,75, y(1) = 15,6741, \\ x_k = 0,1 k, k = \overline{1; 9};$$

$$5) f(x) = \sin x \cos 2x, y(0) = 1 \frac{1}{169}, y(1) = 109,20221, \\ x_k = 0,1 k, k = \overline{1; 9}.$$

$$5. y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6, y'(0) = 3,2, y(1) = \\ = 3,7168365, x_k = 0,1 k, k = \overline{1; 9}.$$

$$6. y'' + y = -\sin 2x, y(\pi) = 1, y(1,5\pi) = \frac{1}{3}, x_k = \\ = \frac{\pi}{20}, k = \overline{1; 9}.$$

$$7. \text{Тенгламаларнинг } [0; 1] \text{ оралиқда } y(0) = y(1) = 0 \text{ че-} \\ \text{гаравий шартларни қаноатлантирувчи ечим қийматлари то-} \\ \text{пилсин } (x_i = 0,1 i, i = \overline{1; 9}, \alpha = 1 + 0,4k, k = \overline{0; 3}, \beta = \\ = 2,5 + 0,5n, n = \overline{0; 5}):$$

$$1) y'' + (\alpha + x^3)y' + (1 - x^2)y = e^{1-\beta} x^2;$$

$$2) y'' + x^2 y' + (\alpha - x)y = \frac{x}{x^2 + \beta};$$

$$3) y'' + y' \sin \alpha x + y = \frac{1}{\beta + \sin^2 \alpha x},$$

$$4) y'' + \frac{y'}{1+x^2+\beta} + \alpha y = x.$$

8--10- масалаларда чегара қийматлари билан берилган иккинчи тартибли чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламаларнинг $[a, b]$ оралиқнинг x_k нуқталардаги ечим қийматлари итерация усули қўлланилиб топилсин (h — қадам, ε — талаб қилинган аниқлик):

$$8. xy'' + x(y')^2 - y' = 0, y(2) = 2, y(4) = 3,386294, h = 0,2, \varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}.$$

$$9. 2y'' = 3y^2, y(-2) = 1, y(0) = 0,25, h = 0,2, \varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}.$$

$$10. 8y'' + 9y'^4 = 0, y(0) = -1, y(7) = 2, h = 1, \varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}.$$

11—15- чегаравий масалалар аналитик усуллар (Галеркин, коллокация усуллари) қўлланилиб ечилсин:

$$11. 2y'' + 5y' = f(x), \text{ бунда:}$$

$$1) f(x) = 5x^2 - 2x - 1, y(0) = 2, y'(1) = -0,1252125;$$

$$2) f(x) = e^x, y(0) + y'(0) = -0,21428571, y(1) = 1,470411;$$

$$3) f(x) = 29 \cos x, y'(0) = 2,5, y(1) + y'(1) = 8,3880768.$$

$$12. y''(x) + \frac{0,5\alpha}{x\alpha + 1} y'(x) - \sqrt{\alpha x + 1} y(x) = 2(\alpha x + 1),$$

$$y'(0) = -\alpha, y(1) = -2\sqrt{\alpha + 1}, \alpha = 0,3m, m = 1; 10.$$

$$13. y''(x) + xy'(x) - 2y(x) = 2(\alpha^2 - 1), y(0) = 1, y(1)$$

$$+ y'(1) = 3\alpha^2 + 1, \alpha = 0,5m, m = 1; 10.$$

$$14. y'' - 2xy' + 2y = f(x), y(0) = 0, y'(1) = 1, \text{ бунда:}$$

$$1) f(x) = x; 2) f(x) = 3x^2 + x - 1; 3) f(x) = 5x^3 - 3x^2 + x;$$

$$4) f(x) = 0,5(5x^3 - 3x^2 - 0,5x + 1).$$

$$15. y'' - y' = f(x), \text{ бунда:}$$

$$1) f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, y(0) = 3,3862943, y(1) = 1,5534866;$$

$$2) f(x) = e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}} y(-1) = 1,5841668, y(0) = 2,2853981;$$

$$3) f(x) = e^{2x} \cos e^x, y(0) = 1,4596977, y(1) = 4,6300157.$$

1- топшириқ: Чегаравий масалаларнинг $x_k \in [a, b]$, $k = \overline{0,10}$, нуқталардаги ечим қийматлари чекли—айирмалли усуллардан бири қўлланилиб, $1 \cdot 10^{-3}$ аниқликда топилсин:

Вариант:

$$1. y'' + xy' + y = x + 1, y(0,5) + 2y'(0,5) = 1, y'(0,8) = 1,2.$$

$$2. y'' + 0,5xy' + (1 + 2\pi^2 x^2)y = 4x, y(0) = 1, \\ y(1) = 1,367.$$

$$3. y'' + (x - 1)y' + 3,125y = 4x, y(0) = 1, y(1) = 1,367.$$

$$4. y'' + 2xy' + 2y = \frac{2(5 - 2x)}{(2 - x)^3}, y(0) = 1, y(1) = 1,367.$$

$$5. y'' + (1 + x^3)y' + (1 - x^2)y = e^{1-2,5x^2}, y(0) = y(1) = 0.$$

$$6. y'' + x^2 y' + (1 - x)y = \frac{x}{x^2 + 2,5}, y(0) = y(1) = 0.$$

$$7. (x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0, y(0) = -1, y(1) = 1.$$

$$8. y'' + y' \sin x + y = \frac{1}{2,5 + \sin^2 x}, y(0) = y(1) = 0.$$

$$9. x^2(x + 1)y'' - 2y = 0, y(1) = 2, y(2) = 1,5.$$

$$10. y'' + \frac{y'}{\sqrt{x^2 + 2,5}} + y = x, y(0) = y(1) = 0.$$

$$11. y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0, y(0) = 0, y(0,785) = 3,4938$$

$$12. (x^2 + 1)y'' + 5xy' + 4y = 0, y(0) = 0, y(1) = 0,3534.$$

$$13. y'' + x^2 y' + (1,4 - x)y = \frac{x}{x^5 + 3}, y(0) = y(1) = 0.$$

$$14. y'' - xy' + xy = 0, y(0) = 0, y(1) = 1,083.$$

$$15. (x^2 + 1)y'' + 5xy' + 3y = 0, y(0) = 1, y(1) = 0,3534.$$

$$16. xy'' + y' - xy = 0, y(1) = 1,266059, y(2) = 2,277778$$

$$17. xy'' + 2y' + xy = 0, y(1) = 0,841471, y(2) = 0,841471.$$

$$18. 2x^2 y'' + (3x - 2x^2)y' - (x + 1)y = 0, \\ y(1) = 2,718182, y(2) = 3,69453.$$

$$19. 9x^2 y'' - (x^2 - 2)y = 0, y(0) = 0, y(1) = 1,033586.$$

Эркин тебранишлар тенгламаси: $y'' + ay' + by^1 = 0$.

Вариант	a	b	Чегаравий шарт:
20	2	0,5	$y(0) = 2, y(2) = 1,602618$
21	2	1	$y(-1) = 0, y(0) = 1$
22	0	$\pi^2/4$	$y(0) = y(1) = 1$

23. $3x^2 y'' - x^2 y' + (x - 2)y = 0, y(1) = 2,5, y(2) = 2,5.$

24. $y'' + (x^4 + 1)y = 0, y(1) = 0,3149857, y(2) = -0,4446632.$

25. $(x^2 + 1)y'' - y = 0, y(0) = 0, y(1) = 1.$

2-топшириқ. Чегаравий масалаларнинг ечимини Галеркин ва коллокация усуллари қўлланилиб топилсин.

Вариант:

1. $y'' - y' \cos x + y \sin x = \cos x, y(-\pi) = y(\pi) = 2.$

2. $y'' + x^2 y' - xy = e^x, y(0) = y(1) = 0.$

3. $y'' - y' \cos x + y \sin x = \sin x, y(-\pi) = y(\pi) = 2.$

4. $y'' + x^2 y' - xy = e^{x^2}, y(0) = y(1) = 0.$

5. $y'' - y' \cos x + y \sin x = \cos 2x, y(-\pi) = y(\pi) = 2.$

6. $y'' + x^2 y' - xy = \sin x, y(0) = y(1) = 0.$

7. $y'' - y' \cos x + y \sin x = \sin 2x, y(-\pi) = y(\pi) = 2.$

8. $y'' + x^2 y' - xy = \cos x, y(0) = y(1) = 0.$

9. $y'' - 2xy' + 2y = 3x^2 + x - 1, y(0) = 0, y'(1) = 1.$

10. $y'' + y' - \frac{y}{x} = x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}, y(0) = 0, y'(1) = 1.$

11. $y'' - 2xy' + 2y = 5x^3, y(0), y'(1) = 1.$

12. $y'' + x^2 y' - xy = \lg x, y(0) = y(1) = 0.$

13. $y'' - 2xy' + 2y = 5x^3 - 3x^2 + x, y(0) = 0, y'(1) = 1.$

14. $y'' - 2xy' + 2y = 0,5(x^3 - 3x^2 - 0,5x + 1), y(0) = 0, y'(1) = 1.$

15. $y'' - xy' - y = 1, y(0) = 1, y'(1) = 1,297443.$

16. $y'' - \frac{2x}{x^2 + 1}y' + \frac{2y}{x^2 + 1} = 0, y(0) = -1, y'(1) = 3.$

17. $x^2 y'' - xy' + y = 4x^3, y(1) = 2, y(e) = 25,5221.$

18. $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 4x^2 + 2, y(1) = 1, y(2) = 4.$

$$19. y'' - (1 + x^2)y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(1) = \frac{7}{12}.$$

$$20. y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}, \quad y(0) = 3, \quad y(1) = 7,07465.$$

$$y'' + a^2 y = \operatorname{ctg} ax \text{ учун:}$$

Вариант	a	Чегаравий шарт
21	1	$y(\pi/4) = 0,5328401, \quad y(\pi/2) = 1.$
22	π	$y(0,6) = 0,6728232, \quad y(0,8) = -0,154815.$
23	2	$y(\pi/6) = 1,247097, \quad y(\pi/3) = 0,4849537.$
24	$\pi/2$	$y(1) = 1, \quad y(1,5) = 0,2525837.$
25	$\pi/6$	$y(1) = -1,03745, \quad y(2) = 0,18623.$

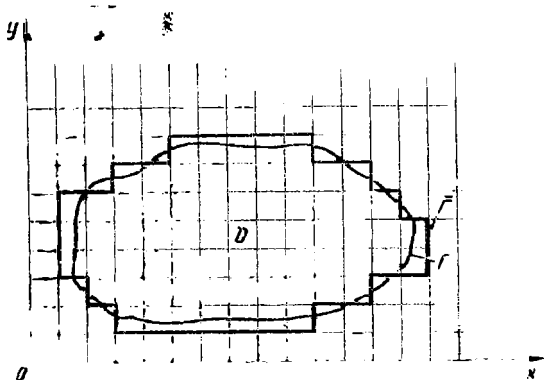
10-боб. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар кўпинча сонли усуллар (чунончи, тўрлар усули) ва аналитик усуллар (чунончи, акад. В.Г.Галеркин усули) қўлланилиб ечилади. Биз ушбу бобда асосан тўрлар усуллари (айирмали усуллар) устида тўхталамиз.

Айирмали схемалар, уларни қуриш ва дифференциал масалани аппроксимациялаш. Тўрлар усули ёки чекли айирмалар усулининг моҳияти ҳосилаларни чекли—айирмали ифодалар орқали алмаштириш йўли билан дифференциал тенгламани чекли—айирмали (алгебраик) тенгламага келтиришдан иборат. Масалан, бирор кўрсатилган Γ контур билан чегараланган D соҳанинг ичида ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Лаплас тенгламасини, Γ чегарада эса маълум шартларни қаноатлантирувчи $u(x, y)$ функцияни топиш талаб этилсин (2-чизма). Шу мақсадда XOY текислигида ўзаро перпендикуляр $x = x_0 + ih$ ва $y = y_0 + kl$ ($i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) тўғри чизиқлар оилаларини D соҳани қоплайдиган қилиб чизайлик. Ҳосил бўлган тўрдан Γ эгри чизиқли контурни яхши аппроксимацияловчи $\bar{\Gamma}$ тўрли контур ажратилади. $\bar{\Gamma}$ контур $\bar{D}$ тўрли соҳани чегаралайди. $\bar{D}$ соҳанинг ҳар қайси (x_i, y_k) , $i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ нуқтаси учун айирмали тенглама ечимининг u_{ik} қиймати топилиши керак. Бу қийматлар (1)



2- чизма

дифференциал тенгламанинг тақрибий ечим қийматлари дан иборатдир. Γ контур шундай ясаладик, берилган эгри чизиқли Γ контур $\bar{\Gamma}$ билан чегараланган тўрнинг икки қўшни ички тугуни оралиғидан эмас, балки битта чегара ва битта ич-

ки тугун орасидан ўтадиган бўлсин.

(1) тенгламага ушбу

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (2)$$

айирмали тенглама мувофиқ келади, бунда:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} - \frac{u(x, y) - u(x-h, y)}{h} = \\ &= \frac{1}{h^2} [u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)], \\ u_{xx} &= \frac{1}{h^2} [u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}], \\ u_{yy} &= \frac{1}{l^2} [u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Дирихле масаласи (биринчи чегаравий масала) учун тўр усули. Шундай $u = u(x, y)$ функция топилиши керакки, у D соҳанинг ичида

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (4)$$

Пуассон тенгламасини, Γ чегарада

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y). \quad (5)$$

шартни қаноатлантирсин, бунда $\varphi(x, y)$ — берилган узлуксиз функция.

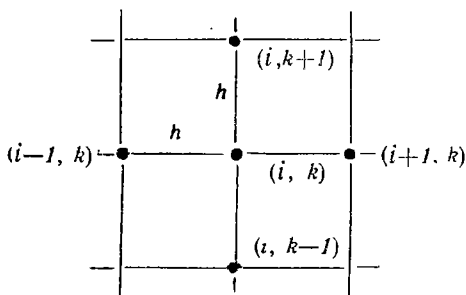
Ox ва Oy ўқлари бўйича h ва l қадам билан тўр қура-миз. (4) тенгламадаги иккинчи тартибли ҳосилаларни мос айирмали ифодалар билан алмаштирсак, ушбу

$$\frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} + \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2} = f_{ik} \quad (6)$$

айирмали тенглама ҳосил бўлади, бунда $f_{ik} = f(x_i, y_k)$ ($i, k = 0, \pm 1, \dots$).

Хусусий ҳосилаларни чекли айирмалар орқали ифодалаш:

№	Ҳосила	Схема	Тақрибий формула
1	$\frac{\partial u}{\partial x}$	$\begin{array}{c} h & h \\ \bullet & & \bullet \\ \hline \end{array}$	$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h}$
2		$\begin{array}{c} \bullet & & \bullet \\ \hline \bullet & & \bullet \end{array}$	$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,k+1} - u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k-1} - u_{i-1,k-1}}{4h}$
3	$\frac{\partial u}{\partial y}$	$\begin{array}{c} & \bullet \\ \hline & \bullet \\ & \bullet \end{array}$	$\frac{\partial u_{ik}}{\partial y} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l}$
4		$\begin{array}{c} \bullet & & \bullet \\ \hline \bullet & & \bullet \end{array}$	$\frac{\partial u_{ik}}{\partial y} = \frac{u_{i+1,k+1} + u_{i-1,k+1} - u_{i+1,k-1} - u_{i-1,k-1}}{4l}$
5	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\begin{array}{c} \bullet & - & \bullet & - & \bullet \\ \hline \end{array}$	$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2}$
6		$\begin{array}{c} \bullet & - & \bullet & - & \bullet \\ \hline \bullet & - & \bullet & - & \bullet \end{array}$	$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x^2} = \frac{1}{12h^2} (-u_{i+2,k} + 16u_{i+1,k} - 30u_{ik} + 16u_{i-1,k} - u_{i-2,k})$
7	$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$	$\begin{array}{c} \bullet & & \bullet \\ \hline \bullet & & \bullet \end{array}$	$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4hl} (u_{i+1,k+1} - u_{i+1,k-1} - u_{i-1,k+1} + u_{i-1,k-1})$
8	$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$	$\begin{array}{c} \bullet \\ \\ \bullet \\ \\ \bullet \\ \\ \bullet \\ \\ \bullet \end{array}$	$\frac{\partial^4 u_{ik}}{\partial y^4} = \frac{1}{l^4} (u_{i,k+2} - 4u_{i,k+1} + 6u_{i,k} - 4u_{i,k-1} + u_{i,k-2})$



3- чизма

$\bar{G}$ соҳанинг барча тугунлари учун u_{ik} функциянинг қиймагларини ҳисоблашда тугунлар нечта бўлса, шунча тенгламадан иборат система тузилиши керак.

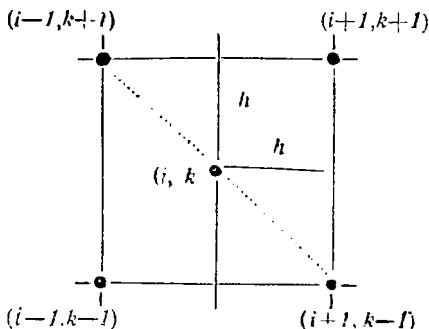
Квадрат тўрли (яъни $l = k$ бўлган) соҳада (6) тенглама соддалашади:

$$u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4u_{ik} = h^2 f_{ik} \quad (7)$$

ёки Лаплас тенгламаси учун:

$$u_{ik} = \frac{1}{4} (u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1}) \quad (8)$$

(3- чизма; тугунлар ўз индекслари билан ишораланган), ёки 4- чизмада кўрсатилган схе-



4- чизма

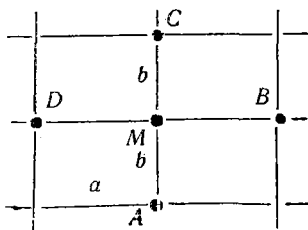
мадан фойдаланилса, Лаплас ва Пуассон тенгламалари учун чекли — айирмали тенгламалар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} u_{ik} = \frac{1}{4} (u_{i-1,k-1} + u_{i+1,k-1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k+1}), \\ u_{ik} = \frac{1}{4} (u_{i-1,k-1} + u_{i+1,k-1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k+1}) + \\ + \frac{h^2}{2} f_{ik}. \end{cases} \quad (9)$$

Лаплас тенгламасини чекли — айирмали тенглама билан алмаштириш хатоси $|R_{ik}| \leq \frac{h^2}{6} M_4$ тенгсизлик билан баҳорланади, бунда $M_4 = \max \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right\}$.

Агар тўр ячейкалари тўғри тўртбурчак шаклида бўлса (яъни тўғри тўртбурчакли тўр, 5- чизма), $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ Пуассон тенгламасини ечиш учун

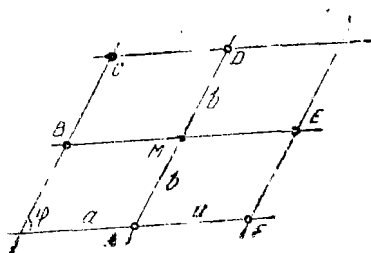
$$u_M = \frac{a^2(u_A + u_C) + b^2(u_B + u_D) - a^2 b^2 f_M}{2(a^2 + b^2)}$$



5- чизма

айирмалли тенгламани оламиз. Квадрат ($a = b$) бўлган ҳол учун бу тенглама соддаланиб, (9) муносабатларнинг иккинчиси ҳосил бўлади. Параллелограмм тўр учун (6- чизма):

$$u_M = \frac{\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \lambda_3 s_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} -$$



6- чизма

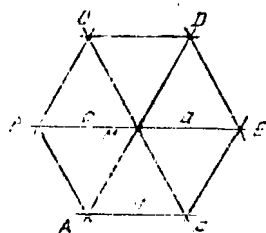
$$- \frac{f_M \sin^2 \varphi}{2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}, \quad \lambda_1 = \frac{-\cos \varphi}{ab} + \frac{1}{b^2}.$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{a^2} - \frac{\cos \varphi}{ab}, \quad \lambda_3 = \frac{\cos \varphi}{ab}, \quad s_1 = \frac{u_A + u_D}{2},$$

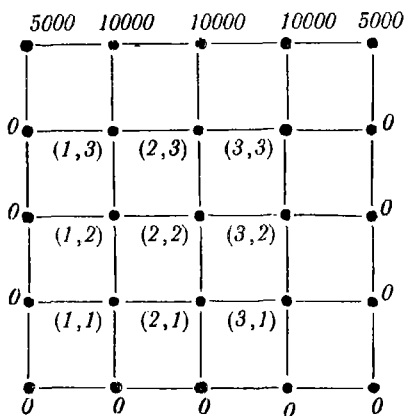
$$s_2 = \frac{u_B + u_E}{2}, \quad s_3 = \frac{u_C + u_F}{2}.$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ да тўғри тўртбурчакли тўрға, $a = b$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ да тенг томонли учбурчакли тўрға ўтилади (7- чизма). Кейинги ҳолда:

$$u_M = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3} - \frac{f_M a^2}{4} = \frac{u_A + u_B + u_C + u_D + u_E + u_F}{6} - \frac{f_M a^2}{4}.$$



7- чизма



8- чизма

беради. Координаталар бошини $A(0; 0)$ нуқтага жойлаштирайлик. Тўғқизта $(1; 1), (2; 1), \dots, (3; 3)$ ички нуқталардаги (тугунлардаги) $u_{11}, u_{21}, \dots, u_{33}$ қийматларни топишимиз керак. Чегаравий қийматлар симметрик ($u_{11} = u_{31}, u_{12} = u_{32}, u_{13} = u_{33}$) бўлганидан, тўғқизта эмас, балки олти тугун учун (9) чекли — айирмали тенгламадан иборат система тузамиз:

$$\begin{cases} 0 + u_{21} + u_{12} + 0 = 4u_{11}, \\ u_{11} + 0 + u_{31} + u_{22} = 4u_{21}, \\ 0 + u_{11} + u_{22} + u_{13} = 4u_{13}, \\ u_{12} + u_{21} + u_{32} + u_{23} = 4u_{22}, \\ 0 + u_{12} + u_{23} + 10000 = 4u_{13}, \\ u_{12} + u_{22} + u_{33} + 10000 = 4u_{23}, \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} u_{21} + u_{12} = 4u_{11}, \\ 2u_{11} + u_{22} = 4u_{21}, \\ u_{11} + u_{22} + u_{13} = 4u_{13}, \\ u_{21} + 2u_{12} + u_{23} = 4u_{22}, \\ u_{12} + u_{23} + 10000 = 4u_{13}, \\ u_{12} + u_{22} + u_{13} + 10000 = 4u_{23}. \end{cases}$$

Системани Гаусс усули билан ечиб, $u_{11} = u_{31} = 714$, $u_{21} = 982$, $u_{12} = u_{32} = 1875$, $u_{22} = 2500$, $u_{13} = u_{33} = 4286$, $u_{23} = 5268$ қийматларни топамиз.

Чекли — айирмали тенгламалар системасини итерация усули билан ечиш (Либман ўрталаш жараёни): $u_{ij}^{(0)}$ бошланғич яқинлашиш танланади; тўрли соҳанинг ички нуқталари учун $u_{ij}^{(k)}$ яқинлашишлар ушбу формула бўйича топилади:

1-мисол. Текис пластинка томони 1 га тенг квадрат шаклида бўлиб, ташқи муҳитдан изоляцияланган, чекка нуқталари эса 8-чизмада кўрсатилганидек доимий катталиқдаги температура билан иситилади. Пластинканинг ички нуқталарида температура қандай тақсимланиши аниқлансин.

Ечиш: Температура тақсимотини $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Лаплас тенгламасининг $u = u(x, y)$ ечими

$$u_{ij}^{[k+1]} = \frac{1}{4} [u_{i+1,j}^{[k]} + u_{i-1,j}^{[k]} + u_{i,j+1}^{[k]} + u_{i,j-1}^{[k]}], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Бошланғич яқинлашишни топиш йўллари: 1) ички тугунларга мос бошланғич яқинлашишни топиш учун чегарадаги қийматларга асосланган интерполяциядан фойдаланиш; 2) чекли айирмали тенгламаларни каттароқ қадам бўйича тузиш. Лаплас тенгламаси тақрибий ечимининг хатоси Рунге принциpidан фойдаланиб баҳолашиши мумкин.

2-мисол. Чегаравий шартлар квадратда (9-чизма) берилган Лаплас тенгламаси ечилсин.

Ечиш: Масалани ечиш учун 10-чизмада тасвирланганидек ҳисоблаш андазаси ясалади (ҳар қайси тугун квадратга алмаштирилган).

Итерация' жараёнида чегаравий қийматлар ўзгармай қолади. Шунга кўра кейинги андазалар бу қийматларсиз, 5×5 кўринишидаги квадратлар шаклида тасвирланади. Андазаларни тўлдириш тартиби:

1) Бошланғич яқинлашишларни аниқлаш: ички тугунлардаги чегаравий қийматларни интерполяциялаймиз.

	0	0	0	0	0	0
15,45						0
29,39						0
40,45						0
47,56						0
50						0
	50	47,56	40,45	29,39	15,45	

9- чизма

	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
15,45						0,00
29,39						0,00
40,45						0,00
47,56						0,00
50,00						0,00
	50,00	47,56	40,45	29,39	15,45	

10- чизма

1- андаза

12,88	10,30	7,72	5,15	2,31
24,54	19,69	14,85	10,00	5,15
34,05	27,65	21,25	14,85	7,72
40,92	35,29	27,65	19,69	10,30
45,46	40,92	34,05	24,54	12,88

2- андаза

12,57	10,07	7,58	5,08	2,58
24,00	19,34	14,66	10,00	
33,39	27,32	21,25		
40,34	34,28			
45,46				

$u(x, y)$ функция 5-устун бўйича (пастдан юқорига томон) 15,45 дан 0,00 гача чизиқли камаяди, деб қабул қилинса, u_{i5} нинг бошланғич қийматлари сифатида $u_{i5}^{[0]} = \frac{15,45}{6} (6 - i) \ (i = \overline{1;5})$ қийматлар олиниши мумкин: $u_{15}^{[0]} = 12,88$, $u_{25}^{[0]} = 10,30$, $u_{35}^{[0]} = 7,72$, $u_{45}^{[0]} = 5,15$, $u_{55}^{[0]} = 2,31$. Бунда $u_{5i}^{[0]} = u_{i5}^{[0]}$ бўлганидан, ўнг томондаги 5-устун ва юқоридан биринчи сатр катакларини симметрик тўлдирамыз (1-андаза). Энди юқоридан иккинчи сатр (ва ўнгдан иккинчи устун) элементларини ҳисоблашда $u(x, y)$ функция 29,39 дан 5,15 гача чизиқли камаювчи деб олинади ва $u_{i4}^{[0]} = \frac{29,39 - 5,15}{5} (6 - i) + 5,15 \ (i = \overline{2;5})$ муносабатдан фойдаланилади. Шу тартибда 1-андазанинг қолган катаклари тўлдирилади; 2) 1-андазани асосий андазанинг (10-чизма) ўртасига (бўш катаклар устига) жойлаштирамыз ва (10) формуладан фойдаланиб, 1-яқинлашишларни бирма-бир ҳисоблаймиз. Жумладан,

$$u_{15}^{[1]} = \frac{1}{4} (u_{25}^{[0]} + u_{05}^{[0]} + u_{16}^{[0]} + u_{14}^{[0]}) = \frac{1}{4} (10,30 + 15,45 + 0,00 + 24,54) = 12,57,$$

$$u_{14}^{[1]} = \frac{1}{4} (u_{24}^{[0]} + u_{01}^{[0]} + u_{5}^{[0]} + u_{3}^{[0]}) = \frac{1}{4} (19,69 + 29,39 + \\ + 34,05 + 12,88) = 24,00.$$

Натижаларни 2- андазага ёзамиз (қийматлар симметрик бўлганидан, андазанинг фақат ярми тўлдирилган). Ҳисоблашлар кетма-кет келувчи иккита итерация (иккита андаза қийматлари) бир-биридан тайинланган ϵ қадар (масалан, 0,05 гача аниқликда) фарқ қилганида тўхтатилади. Қуйида намуна учун яна икки андаза келтирилган:

11- андаза

11,89	9,18	6,94	4,60	2,32
22,84	17,81	13,42	9,06	
32,07	25,58	19,58		
39,24	32,47			
44,64				

16- андаза

11,78	9,00	6,64	4,43	2,22
22,66	17,51	13,06	8,78	
32,86	25,22	19,18		
39,05	32,16			
44,54				

16- андаза : қийматлари 2- мисолда берилган чегаравий масаланинг ечимларидан иборат.

Параболик тур тенгламалар учун тўрлар усули. Ушбу

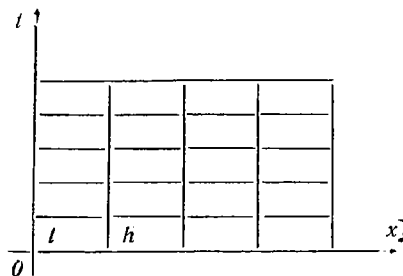
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (11)$$

тенгламани,

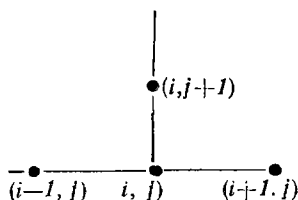
$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 < x < s) \quad (12)$$

бошланғич шартни ва

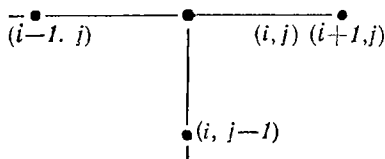
$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t) \quad (13)$$



11- чизма



12- чизма



13- чизма

ёки

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{l} \quad (14')$$

$a = 1$ бўлган ҳолда (11) тенглама қуйидагича алмаштирилиши мумкин:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (15)$$

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (15')$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u(x, t)$ функцияни топиш талаб қилинади (иссиқлик ўтказувчанлик учун аралаш масала). Бунинг учун $\tau = a^2 t$ алмаштириш орқали (11) тенглама $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ кўринишга келтирилади. Шунга кўра кейинги мулоҳазаларда $a = 1$ деб қабул қилиниши мумкин.

Айтайликки, $t \geq 0$, $0 \leq x \leq s$ ярим текисликда иккита $x = ih$, $t = jl$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots$) параллел тўғри чизиклар оиласи қурилган бўлсин (11- чизма).

Биз $x_i = ih$, $t_j = jl$, $u(x_i, t_j) = u_{ij}$ белгилашларни киритамиз ва ҳар қайси (x_i, t_j) ички тугун учун ҳосилаларни мос айирмалар билан алмаштирамиз:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{l}$$

ёки $\sigma = l/h^2$ белгилаш киритилса:

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma) u_{ij} + \sigma (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \quad (16) \quad (12\text{-чизма}),$$

$$(1 + 2\sigma) u_{ij} - \sigma (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} = 0 \quad (17) \quad (13\text{-чизма}).$$

Кейин σ шундай танланиши лозимки, натижада айирмалли тенглама турғун ва хатоси энг кичик бўлсин. (17) тенглама ҳар қандай σ да, (16) тенглама эса $0 < \sigma \leq 0,5$ да турғундир. $\sigma = 1/2$ ва $\sigma = 1/6$ да (16) тенглама $u_{i,j+1} =$

$= \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2}$, $u_{i,j+1} = \frac{1}{6} (u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j})$ кўринишига келади. Бу тенгламалар ва (17) тенглама $0 \leq x \leq s$, $0 \leq t \leq T$ соҳада мос равишда

$$|u - \bar{u}| \leq \frac{2}{3} M_1 h^2, \quad |u - \bar{u}| \leq \frac{T}{135} M_4 h^4,$$

$$|u - \bar{u}| \leq T \left(\frac{1}{2} + \frac{h^2}{12} \right) M_1$$

хатога эга бўлади, бунда

$$M_1 = \max \{ |f^{(4)}(x)|, |\Phi'(t)|, |\Psi''(t)| \}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq s,$$

$$M_2 = \max \{ |f^{(6)}(x)|, |\Phi^{(4)}(t)|, |\Psi^{(4)}(t)| \}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq s.$$

Бир жинсли бўлмаган параболик тенглама учун аралаш масала тўрлар усули билан ечилганида $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t)$ дифференциал тенглама $u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma) u_{ij} + \sigma (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + IF_{ij}$, ёки $\sigma = 1/2$ ва $\sigma = 1/6$ бўлганда

$$u_{i,j+1} = 0,5 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + IF_{ij}, \quad (16')$$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6} (u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j}) + IF_{ij} \quad (17')$$

айирмалли тенгламага алмаштирилади. Кейинги икки айирмалли тенгламанинг хатоси қуйидагича баҳоланади:

$$\begin{aligned} |\bar{u} - u| &\leq \frac{1}{4} \left(M_2 + \frac{1}{3} M_4 \right) h^2, \quad |\bar{u} - u| \leq \\ &\leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{3} M_3 + \frac{1}{5} M_5 \right) h^4, \end{aligned}$$

бунда

$$M_2 = \max \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}, \quad M_3 = \max \left\{ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right\}, \quad M_4 = \max \left\{ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\},$$

$$M_5 = \max \left\{ \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right\},$$

3-мисол. $\sigma = 0,5$ бўлган ҳол учун (16) тенгламадан фойдаланиб, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x, 0) = \sin \pi x$ ($0 \leq x \leq 1$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$, ($0 \leq t \leq 0,025$) масала ечилсин.

Ечиш: x аргумент бўйича қадам $x = 0,1$ бўлсин. $\sigma = \frac{l}{h^2} = 0,5$. Шунга кўра t аргумент бўйича қадам $l = 0,5h^2 = 0,005$ бўлади. Чегара қийматлари симметрик. Шу сабабли жадвалга $x = 0; 0,1; 0,2; \dots; 0,5$ га мос қийматларни киритамиз. Ҳисоблашлар $u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2}$ формула бўйича бажарилади. Ҳисоблашлардан намуналар:

$$j = 0 \text{ учун } u_{11} = 0,5 (u_{20} + u_{00}) = 0,5 (0,5878 + 0) = 0,2939,$$

$$u_{21} = 0,5 (u_{30} + u_{10}) = 0,5 (0,8090 + 0,3090) = 0,5590.$$

3-мисолга

Тўрлар усули

j	$x \backslash t$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0,3090	0,5878	0,8090	0,9511	1,0000
1	0,005	0	0,2939	0,5590	0,7699	0,9045	0,9511
2	0,010	0	0,3795	0,5316	0,7318	0,8602	0,9045
3	0,015	0	0,2658	0,5056	0,6959	0,8182	0,8602
4	0,020	0	0,2528	0,4808	0,6619	0,7780	0,8182
5	0,025	0	0,2404	0,4574	0,6294	0,7400	0,7780
$\bar{u}(x, t) > 0,025$		0	0,2414	0,4593	0,6321	0,7431	0,7813
$ \bar{u} - u $		0,025	0	0,0010	0,0019	0,0027	0,0031
							0,0033

Иссиқлик ўтказиш тенгламаси учун ҳайдаш усули. Бу ерда $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq T$ ярим текисликда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (18)$$

тенгламанинг $u(x, 0) = f(x)$, $u(0, t) = \varphi(t)$, $u(a, t) = \psi(t)$, бошланғич ва чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб қилинади. Бунинг учун x ва t аргументлар бўйича h ва l қадамлар танланади, ҳосилалар ҳар қайси ички тугунга мос равишда чекли айирмали ифодаalar билан

алмаштирилади ва $f(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функцияларнинг чегаравий нуқталарда қийматлари ҳисобланади. $s = h^2/l$ алмаштириш киритиб, ушбу системага эга бўламиз:

$$u_{i-1,j+1} - (2+s) u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} + s u_{ij} = 0, \quad (19)$$

$$(i = \overline{1;n}, j = 0, 1, 2, \dots)$$

$$u_{i0} = f(x_i), \quad (20)$$

$$u_{0j} = \varphi(t_j), \quad (21)$$

$$u_{nj} = \psi(t_j). \quad (22)$$

Бу системани ечиш учун дастлаб (19) тенглама

$$u_{i,j+1} = a_{i,j+1} (b_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) \quad (23)$$

кўринишига келтирилади, бунда $a_{i,j+1}$, $b_{i,j+1}$ сонлар

$$a_{1,i+1} = 1/(2+s), \quad b_{1,i+1} = \varphi(t_{j+1}) + u_{1j}s \quad (24)$$

$$a_{i,j+1} = 1/(2+s-a_{i-1,j+1}), \quad b_{i,j+1} = a_{i-1,j+1} b_{i-1,j+1} + su_{ij} \quad (i = \overline{2;n}) \quad (25)$$

формулалар бўйича топилади. Сўнг (22) чегаравий шартлар бўйича $u_{n,j+1} = \psi(t_{j+1})$, (23) формула бўйича $u_{i,j+1}$ кетма-кет аниқланади (бунда $i = n-1, n-2, \dots, 1$). Масалани ечиш тартиби:

Тўғри юриш: (21) чегаравий шартлар ва (24), (25) формулалар бўйича $a_{1,j+1}$, $b_{1,j+1}$, $a_{i,j+1}$, $b_{i,j+1}$ ($i = \overline{2;n}$) сонлар топилади.

Тескари юриш: (22) чегаравий шартлардан $u_{n,j+1} = \psi(t_{j+1})$ аниқланади. Сўнг (23) формула бўйича қуйидагилар ҳисобланади:

$$\begin{aligned} u_{n-1,j+1} &= (u_{n,j+1} + b_{n-1,j+1}) a_{n-1,j+1}, \\ u_{n-2,j+1} &= (u_{n-1,j+1} + b_{n-2,j+1}) a_{n-2,j+1}, \\ &\dots \dots \dots \\ u_{1,j+1} &= (u_{2,j+1} + b_{1,j+1}) a_{1,j+1}. \end{aligned} \quad (26)$$

4-мисол. Ҳайдаш усули қўлланилиб, $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламани ва $u(x, 0) = 4x(1-x)$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш: Айтайлик, $h = 0,1$, $l = 0,01$ бўлсин. Унда

$s = h^2/l = 1$ бўлади. $u(x, t)$ функциянинг $t = 0,01$ қатлам-даги қийматини аниқлаймиз.

Тўғри юриш: Жадвал тузиб, унинг u_{i0} -сатрига $f(x_i)$ ($i = \overline{0; 10}$) бошланғич қийматларни тўлдирамиз ва $j = 0$ учун (24), (25) формулалар бўйича қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/3, \quad b_{11} = u_{10} = 0,36, \quad a_{21} = 1/(3 - a_{11}) = 3/8 = 0,375, \\ b_{21} &= a_{11}b_{11} + u_{20} = 0,12 + 0,64 = 0,76, \quad a_{31} = 1/(3 - a_{21}) = \\ &= 1/2,625 = 0,381, \quad b_{31} = a_{21}b_{21} + u_{30} = 0,375 \times \\ &\times 0,760 + 0,84 = 1,125. \end{aligned}$$

4-мисолга

Ҳайдаш усули

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10
u_{i0}	0	0,360	0,640	0,840	0,960	1,000	0,960	0,840	0,640	0
a_{i1}		0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	
b_{i1}		0,360	0,760	1,125	1,389	1,530	1,544	1,430	1,186	
u_{i1}	0	0,310	0,572	0,764	0,882	0,921	0,882	0,764	0,571	0

Тесқари юриш: Чегаравий шартлардан $u_{10,1} = 0$, (26) формулалар бўйича эса u_{i1} ($i = 9, 8, \dots, 1$) қийматларни ҳисоблаймиз. Жумладан, $j = 0$ да:

$$u_{91} = (u_{10,1} + b_{91}) a_{91} = 0,813 \cdot 0,382 = 0,310,$$

$$u_{81} = (u_{91} + b_{81}) a_{81} = (0,310 + 1,186) \cdot 0,382 = 0,571,$$

.....

$$u_{11} = (u_{21} + b_{11}) a_{11} = (0,572 + 0,360) \cdot 0,333 = 0,310.$$

Гиперболик тур тенгламалар учун тўрлар усули. Тор тебраниши учун аралаш масалада.

$$\frac{\sigma^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (27)$$

тенгламанинг

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s, \quad (28)$$

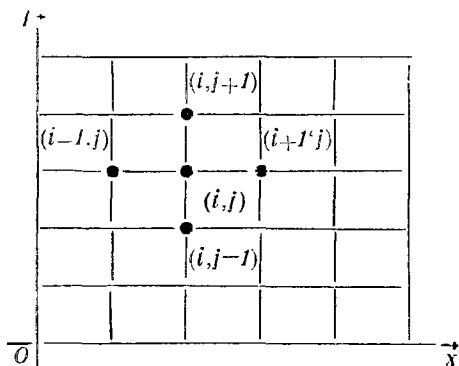
бошланғич ҳамда

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t) \quad (29)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб қилинади. Бунинг учун янги $\tau = at$ ўзгарувчи киритиш орқали (27) тенглама

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (30)$$

кўринишга келтирилади (бошқа сўз билан айтганда $\alpha = 1$ деб олинади). Энди $t \geq 0$, $0 \leq x \leq s$ (14-чизма) ярим текисликда $x = ih$, $t = jl$ ($i, j = \overline{0; n}$) параллел тўғри чизиқлар оиласини қурамыз ва (30) тенгламани чекли айирмалли тенглама билан алмаштирамыз:



14- чизма

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{l^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (31)$$

Агар $\alpha = l/h$ белгилаш киритилса, бу тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + \alpha^2 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}). \quad (32)$$

) 32) тенглама $\alpha \leq 1$ да турғунликка эга, у $\alpha = 1$ да қуйидаги кўринишга келади:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} = u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \quad (33)$$

(33) тенглама хатоси қуйидагича баҳоланади:

$$|\bar{u} - u| \leq \frac{h^2}{12} [M_4 h + 2M_2] T + T^2 M_4, \quad (34)$$

бунда $\bar{u}$ — аниқ ечим, $M_k = \max \left\{ \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right|, \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right| \right\}$.

(32) тенгламани тузишда 14-чизмада кўрсатилган тугунлардан фойдаланилган. Бунга қараганда $u(x, t)$ функциянинг t_{j+1} қатламдаги қийматини ҳисоблаш учун ундан олдинги икки қатламдаги қийматларини билиш зарур. Шу мақсадда қуйидаги усуллардан фойдаланилади.

1-усул: (28) бошланғич шартда $u_i(x, 0)$ ҳосила $\frac{u_{i1} - u_{i0}}{l} = \Phi(x_i) = \Phi_i$ айирмалли ифода билан алмаштирилади. Натижада $j = 0$, $j = 1$ қатламларда $u(x, t)$ функциянинг қийматлари учун ушбу

$$u_{i0} = f_i, \quad u_{i1} = f_i + l \Phi_i \quad (35)$$

формулалар ҳосил бўлади. Хато қуйидагича баҳоланади:

$$|\hat{u}_{i1} - u_{i1}| \leq \frac{\alpha h}{2} M_2, \quad M_2 = \max \left\{ \left| \frac{\partial u^2}{\partial t^2} \right|, \left| \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \right| \right\}. \quad (36)$$

2-усул: $u_i(x, 0)$ ҳосила $(u_{i1} - u_{i,-1})/(2l)$ айирмални ифода билан алмаштирилади, бунда $u_{i,-1}$ ифода $u(x, t)$ функциянинг $j = -1$ қатламдаги қиймати. (28) бошланғич шартдан фойдаланиб, $u_{i0} = f_i$, $(u_{i1} - u_{i,-1})/(2l) = \Phi_i$ га эга бўламиз. $j = 0$ қатлам учун (33) тенгламани ёзамиз: $u_{i1} = u_{i+1,0} + u_{i-1,0} - u_{i,-1}$. Кейинги икки тенгламадан $u_{i,-1}$ ни чиқарамиз:

$$u_{i0} = f_i, \quad u_{i1} = 0,5 (f_{i+1} + f_{i-1}) + l \Phi_i. \quad (37)$$

Хато:

$$|\hat{u}_{i1} - u_{i1}| \leq \frac{h^4}{12} M_4 + \frac{h^3}{6} M_3, \quad M_k = \max \left\{ \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|, \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right| \right\},$$

$$k = 3, 4.$$

5-мисолни ечишда бу усулдан фойдаланилган.

5-мисол. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x, 0) = 0,2x(1-x) \sin \pi x$,
 $u_t(x, 0) = 0$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$ масала тўрлар усули қўлланилиб ечилсин.

Ечиш: $h = l = 0,05$ қадам билан квадрат тўр ясаймиз. Бошланғич шартдан фойдаланиб,

$$u_{i0} = f_i, \quad u_{i1} = 0,5 (f_{i+1} + f_{i-1}) \quad (i = \overline{0;10}) \quad (38)$$

системани тузамиз. Жадвални тўлдириш тартиби:

1) $u_{i0} = f(x_i)$ қийматларни ҳисоблаб, биринчи сатрга ёзамиз. Масалада берилган маълумотлар симметрик бўлганидан жадвални $0 \leq x \leq 0,5$ учун тўлдириш етарли. Биринчи устунга чегара қийматлари ёзилади.

2) Биринчи сатрдаги u_{i0} қийматлардан фойдаланиб, (38) формула бўйича u_{i1} ни ҳисоблаймиз ва иккинчи сатрга ёзамиз.

3) (33) формула бўйича $j = 1$ учун u_{ij} қийматларини ҳисоблаймиз:

$$u_{12} = u_{21} + u_{01} - u_{10} = 0,0065 + 0 - 0,0015 = 0,0050,$$

$$u_{22} = u_{31} + u_{11} - u_{20} = 0,0122 + 0,0028 - 0,0056 = 0,0094,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_{10,2} = u_{11,1} + u_{91} - u_{10,0} = 0,0478 + 0,0478 - 0,0500 = 0,456.$$

Шу тартибда $j = 2, 3, \dots, 10$ учун ҳисоблашлар бажарилади. Солиштириш мақсадида энг охириги сатрда ечимнинг аниқ қийматлари келтирилган.

5-мисолга

u_{ij} қийматлари $\times 10^{-4}$

Турлар усули

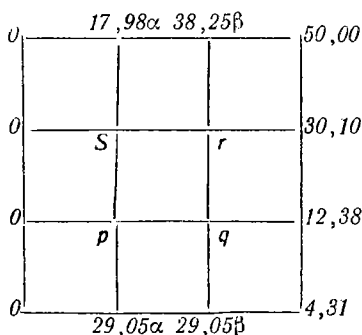
$x_i \backslash t_i$	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0	15	56	116	186	265	340	405	457	489	500
0,05	0	28	65	122	190	264	335	398	447	478	489
0,10	0	50	94	139	198	260	322	377	419	447	456
0,15	0	66	124	170	209	256	302	343	377	397	405
0,20	0	74	142	194	228	251	277	302	321	335	338
0,25	0	76	144	200	236	249	251	255	260	262	265
0,30	0	70	134	186	221	236	227	209	196	190	186
0,35	0	58	112	155	186	199	194	168	139	120	115
0,40	0	42	79	112	133	144	140	124	92	64	54
0,45	0	21	42	57	70	74	74	64	42	26	13
0,50	0	-1	-1	0	-2	0	-2	-1	-2	-2	-2
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

М А Ш Қ Л А Р

1. Ўзгармас куч таъсири остида квадрат пластинканинг деформацияланиши $\Delta u = -1$ Пуассон тенгламасига келади, чегара қийматлари нолга тенг. Тенглама тўрлар усули қўлланилиб ечилсин.

2. Тўрлар усули қўлланилиб, Лаплас тенгламасининг p, q, r, s нуқталардаги ечими топилсин, чегара шартлари 15-чизмада кўрсатилган (квадрат тўр), $\alpha = 0,9 + 0,1k$ ($k = 0, 1, 2$), $\beta = 1,01 + 0,01n$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4$).

3. Учларни $A(0; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 1)$, $D(1; 0)$ нуқталарда жойлашган квадрат учун Лаплас тенгламасининг ечимини топинг. Чегара шартлари жадвалда келтирилган. Ечим қийматларини $h = 0,25$ қадам билан ҳисобланг.



15-чизма

Вариант	$u _{AB}$	$u _{BC}$	$u _{CD}$	$u _{AD}$
1	$30y$	$30(1-x)$	0	0
2	$30y$	$30 \cos \frac{\pi x}{2}$	$30 \cos \frac{\pi y}{2}$	0
3	$50y(1-y^2)$	0	0	$50 \sin \pi x$
4	$20y$	20	$20y^2$	$50x(1-x)$
5	0	$50x(1-x)$	$50y(1-y^2)$	$50x(1-x)$
6	$30 \sin \pi y$	$20x$	$20y$	$30x(1-x)$

4. $x = 0,1m$ ($m = 0,1, \dots, 10$), $t = 0,02$ тўрда $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha(x^2 - 2t)$ ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 0,02$) тенгламанинг $u(x, 0) = 0$ ($0 \leq x \leq 1$), $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = \alpha t$ ($0 \leq t \leq 0,02$) шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, $\alpha = 0,5k$, $k = 1; 6$, $h = 0,1$, $t = 0,02$.

5. $x = 0,1m$ ($m = 0,1, \dots, 10$), $t = 0,02$ тўр учун $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 0,02$), $u(0, t) = e^{\alpha t}$, $u(1, t) = e^{\alpha(t-1)}$ ($0 \leq t \leq 0,02$), $u(x, 0) = e^{-\alpha x}$ ($0 \leq x \leq 1$), $\alpha = 2 + 0,3k$, $k = -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$ масаланинг ечими топилсин ($h = 0,1$).

6. $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 2(1 + \alpha)$, $u(x, 0) = x^2$, $u(0, y) = \alpha y^2$, ($0 \leq x, y \leq 1$), $u|_{\Gamma} = (1 - \alpha)x^2 + \alpha$ Пуассон тенгламаси учун чегаравий масала (x_m, y_n) , $x_m = 0,2m$, $y_n = 0,2n$ тўрда ечилсин, бунда Γ — айлананинг бир қисми, $x \geq 0$ ва $y \geq 0$ да $x^2 + y^2 = 1$; $a = 0,3k$ ($k = 1; 10$).

10-ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

1-топшириқ: Учлари $A(0; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 1)$ $D(1; 0)$ нуқталарда жойлашган квадрат учун Лаплас тенгламаси Либман усули қўлланиб ечилсин. Қадам $h = 0,125$, чегаравий шартлар жадвалда берилган, $\epsilon = 0,01$.

Вариант	$u _{AB}$	$u _{BC}$	$u _{CD}$	$u _{AD}$
1	$24y$	$24(1-x^2)$	0	0
2	$24y$	$24 \cos \frac{\pi x}{2}$	$24 \cos \frac{\pi y}{2}$	0
3	$48y(1-y^2)$	0	0	$48 \sin \pi x$
4	$20y$	20	$20y^2$	$48x(1-x)$
5	0	$48x(1-x)$	$48y(1-y^2)$	$48x(1-x)$
6	$24 \sin \pi y$	20	$16y$	$24x(1-x)$
7	$24(1-y)$	$16\sqrt{x}$	$16y$	$24x(1-x)$
8	$24(1-y)$	$20\sqrt{x}$	$20y$	$24(1-x)$
9	$48 \sin \pi y$	$30\sqrt{x}$	$30y^2$	$48 \sin \pi x$
10	$30y^2$	30	30	$30 \sin \frac{\pi x}{2}$
11	$24y^2(1-y)$	$42 \sin \pi x$	0	$8x^2(1-x)$
12	$18y$	$18(1-x^2)$	$27\sqrt{y}(1-y)$	0
13	$20(1-y^2)$	20x	20	20
14	$30y^2$	30	$30y$	$15x(1-x)$
15	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0
16	$20y$	$20 \cos(\pi x/2)$	$20 \cos(\pi y/2)$	$30x^2$
17	$28y(1-y^2)$	0	0	$28 \sin \pi x$
18	$48 \sin \pi y$	$24\sqrt{x}$	$24y^2$	$48 \sin \pi x$
19	$32y^2$	32	40	$32 \sin \pi x/2$
20	$30 \sin \pi y$	10x	10y	$30x(1-x)$
21	$30\sqrt{y}$	$30(1-x)$	$20y(1-y)$	0
22	$48y$	$48(1-x)$	40	$\begin{cases} 64(1-x), \\ 0, 5 < x \leq 1, \\ 64x, 0 \leq x \leq 0, 5 \end{cases}$
23	$40y^2(1-y)$	$68 \sin \pi x$	0	$12x^2(1-x)$
24	$50y^2$	50	$50y$	$50x(1-x)$
25	$10\sqrt{y}$	$10(1-x)$	$20y(1-y)$	0

2-топ шириқ: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x, 0) = f(x)$, $u(0, t) = \varphi(t)$,
 $u(1, t) = \psi(t)$ ($0 \leq t \leq T$) чегаравий масала ечилсин, x бўйи-
ча қадам $h = 0,1$:

а) $f(x) = (ax^2 + b) \sin \pi x$, $\varphi(t) = 0$, $T = 0,02$ учун:

Вариант	a	b
1	1,1	1,2
2	1,3	1,1
3	1,5	1,3
4	1,3	1,4

б) $f(x) = e^{-bx} \sin ax$, $\varphi(t) = 0$, $\psi(t) = e^{-b} \sin a$, $T = 0,02$ учун:

Вариант	a	b
5	$\pi/12$	0,1
6	$\pi/4$	0,2
7	$\pi/3$	0,3
8	$\pi/6$	0,4

в) $\varphi(t) = \psi(t) = 0$ ва $f(x)$ нинг ушбу қийматлари учун:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$f(x)$	0	0,0266	$0,0372 - \alpha$	0,0388	0,0418	$0,0402 + 2\alpha$	0,0816

Вариант	α	Вариант	α
9	0,01	11	0,005
10	0,007	12	0,006

г) $f(x) = (ax^2 + b)e^{-1}$, $\varphi(t) = b$, $\psi(t) = (a+b)e^{-1}$, $T = 0,01$

Вариант	a	b	Вариант	a	b	Вариант	a	b
13	1,1	2,1	15	1,5	2,3	17	1,2	2,5
14	1,3	2,2	16	1,4	2,4	18	1,6	2,6

д) $f(x) = e^{-\alpha x}$, $\varphi(t) = e^{\alpha t}$, $\psi(t) = e^{\alpha(t-1)}$, $T = 0,02$,

Вариант	α	Вариант	α	Вариант	α	Вариант	α
19	0,8	22	1,7	25	2,9	28	2,8
20	1,1	23	2,3	26	3,2	29	1,5
21	1,4	24	2,6	27	3,0	30	1,8

3-топшириқ: Ушбу $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг $0 \leq t \leq 0,5$, $0 \leq x \leq 1$ текисликдаги ечими $h = 0,1$ қадам билан топилсин. Бошланғич ва чегара шартлар вариантларда кўрсатилган.

Вариант:

1. $u(x, 0) = (1, 2x^2 + 1, 1) \sin \pi x$, $u_t(x, 0) = 0$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$.
2. $u(x, 0) = (1, 1x^2 + 1) \sin \pi x$, $u_t(x, 0) = \dot{u}(0, t) = 0$, $u(1, t) = 1$.
3. $u(x, 0) = (1, 3x^2 + 1, 1) \sin \pi x$, $u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0$.
4. $u(x, 0) = (1, 4x^2 + 1, 1) \sin \pi x$, $u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0$.
5. $u(x, 0) = (1, 5x^2 + 1, 1) \sin \pi x$, $u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0$.
6. $h = l = 0,1$ квадрат тўрда, $u(x, 0) = (1, 5x^2 + 1, 2) \sin \pi x$, $u_t(x, 0) = 0, 1x$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$.
7. $h = l = 0,1$ квадрат тўрда, $u_t(x, 0) = (1, 5x^2 + 0, 9) e^{-x}$, $u_t(x, 0) = 0$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 2, 4 e^{-1}$.
8. $u(x, 0) = x(x+1)$, $u_t(x, 0) = \cos x$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 2(t+1)$.
9. $u(x, 0) = x^2 - 0, 5x - 0, 5$, $u_t(x, 0) = \sin(x+0, 2)$, $u(0, t) = t - 0, 5$, $u(1, t) = 3t$.
10. $u(x, 0) = -3x^2 + 3x$, $u_t(x, 0) = \cos(x+0, 5)$, $u(0, t) = 2t$, $u(1, t) = 0$.
11. $u(x, 0) = 0, 5(x^2 + 1)$, $u_t(x, 0) = x \sin 2x$, $u(0, t) = 0, 5 + 3t$, $u(1, t) = 1$.
12. $u(x, 0) = x \cos \pi x$, $u_t(x, 0) = (x+1)^2$, $u(0, t) = 2t$, $u(1, t) = 0$.
13. $u(x, 0) = (x+1) \sin \pi x$, $u_t(x, 0) = x^2 + x$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0, 5t$.
14. $u(x, 0) = 0, 5x(x+1)$, $u_t(x, 0) = x \sin x$, $u(0, t) = 2t^2$, $u(1, t) = 1$.
15. $u(x, 0) = (x+1) \cos \frac{\pi x}{2}$, $u_t(x, 0) = 1 - x^2$, $u(0, t) = 0, 5t$, $u(1, t) = 2$.
16. $u(x, 0) = (1 - x^2) \sin \pi x$, $u_t(x, 0) = 2x + 0, 8$, $u(0, t) = 1 + 0, 5t$, $u(1, t) = 0$.
17. $u(x, 0) = (x+0, 5)^2$, $u_t(x, 0) = (x+1) \cos x$, $u(0, t) = 0, 5(0, 5+t)$, $u(1, t) = 3$.
18. $u(x, 0) = x(2x - 0, 5)$, $u_t(x, 0) = \sin 2x$, $u(0, t) = t^2$, $u(1, t) = 1, 8$.

19. $u(x, 0) = (x + 0,6)(x + 0,5)$, $u_t(x, 0) = \sin(x + 0,3)$,
 $u(0, t) = 0,5$, $u(1, t) = 3 - 2t$.
20. $u(x, 0) = (2 - x) \cos \pi x$, $u_t(x, 0) = (x + 0,8)^2$, $u(0, t) =$
 $= 0,5 t$, $u(1, t) = 0$.
21. $u(x, 0) = (x + 0,6) \sin \frac{\pi x}{2}$, $u_t(x, 0) = 0,3(x^2 + 1)$, $u(0, t) =$
 $= 0,5$, $u(1, t) = 1,2 t$.
22. $u(x, 0) = (x + 0,1)(0,5x + 1)$, $u_t(x, 0) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$,
 $u(0, t) = 2$, $u(1, t) = 4,5 - 3t$.
23. $u(x, 0) = (x + 0,2) \cos \frac{\pi x}{2}$, $u_t(x, 0) = 1 + x^2$, $u(0, t) =$
 $= 0,4t$, $u(1, t) = 1,2$.
24. $u(x, 0) = (x^2 + 1)(1 - x)$, $u_t(x, 0) = 1 - \cos x$, $u(0, t) =$
 $= 1$, $u(1, t) = 0,5t$.
25. $u(x, 0) = (x^2 + 0,6) \sin \pi x$, $u_t(x, 0) = (x + 0,3)^2$, $u(0, t) =$
 $= 0,5$, $u(1, t) = 2t - 1$.

11-б о б. ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

Интеграл тенглама деб, номаълум $y(x)$ функция интеграл ишораси остида бўлган

$$y(x) = C(x) + \int_{A(x)}^{B(x)} F(x, t, y(t)) dt \quad (1)$$

кўринишдаги тенгламага айтилади, бунда $F(x, t, y)$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ функциялар берилган.

Оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласини ечишни мос интеграл тенгламани ечишга олиб келиш мумкин. Хусусан,

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & f \in C(D), (x_0, y_0) \in D, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

бошланғич масаланинг x_0 нуқтани ўз ичига олган бирор $[a, b]$ оралиқдаги $y = y(x)$ ечимини

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

интеграл тенгламанинг ҳам ечимидан иборат ва, аксинчэ,

шу интеграл тенгламанинг $[a, b]$ оралықда узлуксиз бўлган ечими берилган бошланғич масаланинг ечимидан иборат, бунда $C(D)$ орқали D соҳада узлуксиз бўлган функциялар синфи белгиланган.

Эллиптик тенгламаларга (хусусан, $\Delta u = 0$ Лаплас ва $\Delta u = c$ Пуассон тенгламаларга) доир чегаравий масалаларни ечиш ҳам интеграл тенгламага келтирилиши мумкин. Бундай мисолларни кўплаб келтириш мумкин.

Фредгольм ва Вольтерра чизиқли интеграл тенгламалари. Бирор $K(x, t)$ функция (x, t) ўзгарувчилар текислигидаги

$$\Omega = \{ (x, t); a \leq x \leq b, a \leq t \leq b \}$$

квадратда аниқланган бўлсин. Ушбу

$$y'(x) = \int_a^b K(x, t) y(t) dt + f(x) \quad (1)$$

кўринишдаги тенгламага *Фредгольм чизиқли иккинчи жинс интеграл тенгламаси*,

$$\int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x) \quad (2)$$

тенгламага эса *Фредгольм чизиқли биринчи жинс интеграл тенгламаси* дейилади, бунда $f(x)$ ва $K(x, t)$ функциялар берилган, $f(x)$ — тенгламанинг озод ҳади, $K(x, t)$ — ядроси. Улар учун ушбу

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt < \infty, \quad (3)$$

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \quad (4)$$

тенгсизликларнинг бажарилиши шарт.

Қўп ҳолларда (1) тенгламага λ сонли параметрни кири-тиб, λ га боғлиқ бўладиган интеграл тенгламалар оиласини ҳосил қиладилар:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt \quad (5)$$

(Фредгольм параметрли иккинчи жинс интеграл тенгламаси).

Агар $K(x, t)$ ядро ушбу

$$K(x, t) = \begin{cases} K(x, t), & a \leq t \leq x, \\ 0, & x < t \leq b \end{cases}$$

махсус кўринишга эга бўлса, у ҳолда (1) ва (2) тенгламалар

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) y(t) dt + f(x), \quad (6)$$

$$\int_a^x K(x, t) y(t) dt = f(x) \quad (7)$$

кўринишга келади. Бу ҳолда улар мос тартибда *Вольтерра иккинчи жинс ва биринчи жинс интеграл тенгламалари* деб аталади. Бунда $K(x, t)$ функция Вольтерра интеграл тенгламасининг ядроси.

Ушбу

$$\int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^\alpha} = f(x), \quad 0 < \alpha < 1, \quad \alpha = \text{const} \quad (8)$$

Абель тенгламаси Вольтерра биринчи жинс тенгламасининг хусусий ҳолидан иборат.

1-мисол. Қуйидагилардан қайси бири Фредгольм тенгламасидан иборат?

$$a) \quad y(x) = \int_1^\infty e^{-xt} y(t) dt = f(x), \quad (*)$$

$$б) \quad y(x) = \int_0^\infty e^{-xt} y(t) dt = f(x). \quad (**)$$

Е ч и ш: (3) тенгсизликдан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} a) \quad \int_1^\infty \int_1^\infty |K(x, t)|^2 dx dt &= \int_1^\infty dx \int_1^\infty e^{-2xt} dt = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{x e^{2x}} dx < \\ < \frac{1}{2} \int_1^\infty dx = \infty. \end{aligned}$$

Демак, (*) тенглама — Фредгольм тенгламаси.

$$б) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-2xt} dx dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

Бунга қараганда (**) тенглама Фредгольм тенгламаси эмас.

Интеграл тенгламаларнинг ечими деб, шу тенгламаларга қўйилганда уларни $x \in (a, b)$ бўйича айниятга айлантирувчи $y(x)$ функцияга айтилади.

2-мисол. $y(x) = 0,99984$ ифода $y(x) = e^x - x - \int_0^1 x(e^{xt} - 1) y(t) dt$ интеграл тенгламани тақрибан қаноатлантиришини текширинг.

Ечиш: $y(x) = e^x - x - x \int_0^1 (e^{xt} - 1) \cdot 0,99984 dt = e^x - x - 0,99984 x \left(\int_0^1 e^{xt} dt - \int_0^1 dt \right) = e^x - x - 0,99984 x \left(\left(\frac{1}{x} e^{xt} \right) \Big|_0^1 - t \Big|_0^1 \right) = 0,00016 (e^x - x) + 0,99984 \approx 0,99984, \Delta = 0,00016 |e^x - x|$. Тенгламанинг аниқ ечими $y(x) = 1$ дир.

$(0; +\infty)$ интервалда (6) Вольтерра тенгламаси янги $H(x, t)$,

$$K(x, t) = H(x, t) \cdot U(x - t) = \begin{cases} H(x, t), & t < x \text{ ларда} \\ 0, & t \geq x \text{ ларда} \end{cases}$$

ядро киритиш йўли билан (1) Фредгольм тенгламасига келтирилиши мумкин. Шунингдек, (7) Вольтерра тенгламаси

$$H(x, t) = \frac{\frac{\partial K(x, t)}{\partial x}}{K(x, x)}, \quad \bar{f}(x) = \frac{\frac{df(x)}{dx}}{K(x, x)}$$

дифференциаллашлар орқали (6) кўринишга келтирилади.

Агар берилган интеграл тенглама чегараланмаган ядрога эга бўлса, маълум алмаштиришлар орқали уни чегараланган ядроли тенгламага келтириш мумкин.

$$3\text{-мисол. } f(x) = \int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad (0 < \alpha < 1) \text{ тенглама}$$

(Абелнинг умумлашган тенгламаси) чегараланмаган ядрога эга бўлсин. Унинг ечими мавжуд, у қуйидагича топилиши мумкин.

Тенгламадаги x ни s га алмаштирамиз, сўнг ҳосил бўлган тенгликнинг иккала қисмини $\frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}$ га кўпайтирамиз ва s бўйича 0 дан x гача интеграллаймиз:

$$\int_0^x \frac{f(s) ds}{(x-s)^{1-\alpha}} = \int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{y(t)}{(s-t)^\alpha} dt,$$

ёки ўнг қисмда интеграллаш тартибини ўзгартирсак:

$$\int_0^x y(t) dt \int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha} (s-t)^\alpha} = \int_0^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}},$$

сўнг $s = t + y(x-t)$ алмаштиришни киритсак,

$$\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha} (s-t)^\alpha} = \int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha (1-y)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi},$$

у ҳолда

$$\int_0^x y(t) dt = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}},$$

$$y(t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds \right].$$

$a_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) узлуксиз коэффициентли

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x) y(x) = F(x), \\ y(0) = C_0, y'(0) = C_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = C_{n-1} \end{cases}$$

чизиқли дифференциал тенглама учун Қоши масаласини ечиш (7) кўринишдаги интеграл тенгламани ечишга (ва аксинча) келтирилиши мумкин. Масалан,

$$\begin{cases} y''(x) + a_1(x) y'(x) + a_2(x) y(x) = F(x), \\ y(0) = C_0, y'(0) = C_1 \end{cases}$$

тенгликларга $y''(x) = \varphi(x)$ (ва бундан $y' = \int_0^x \varphi(t) dt + C_1$,

$y = \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + C_1 x + C_0$ лар топилиб), $K(x, t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)]$, $f(x) = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x)$ алмаштиришлар киритилса, натижада

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt$$

Вольтерра тенгламаси олинади. Энди бундан $\varphi(x)$ аниқланиб, y нинг ифодасига қўйилади ва шу билан бошланғич масала ечими (у ягона) ҳосил қилинади.

Фредгольмнинг 2-жинс интеграл тенгламаларини тақрибий ечиш усуллари:

1. $K(x, t)$ ядрони ажралган ядрога алмаштириш усули. Агар (1) турдаги интеграл тенгламанинг $L(x, t)$ ядроси

$$L(x, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \beta_i(t) \quad (9)$$

кўринишида тасвирланиши мумкин бўлса, унга ажраладиган ядро дейилади. Бунда $\alpha_i(x)$ ва $\beta_i(t)$ ($i = \overline{1; n}$) лар $[a, b]$ оралиқда узлуксиз ва чизиқли боғланмаган функциялар. Ажралган ядроли тенглама ечимини излаш у қадар мураккаб эмас. Шунга кўра ихтиёрий $K(x, t)$ ядроли

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt \quad (1)$$

тенглама ядросини $L(x, t)$ ажралган ядрога тақрибан алмаштирадилар ва янги

$$\bar{y}(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b L(x, t) \bar{y}(t) dt \quad (10)$$

тенгламанинг $\bar{y}(x)$ ечимини берилган (1) тенглама ечими деб қабул қиладилар. (1) тенглама ечими

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i(x) \quad (11)$$

кўринишида изланади, бунда

$$c_i = \int_a^b \beta_i(t) y(t) dt. \quad (12)$$

(11) ифодани (12) га қўямиз. Натижада:

$$c_i = \int_a^b \beta_i(t) f(t) dt + \lambda \int_a^b \beta_i(t) \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j(t) dt \quad (i = \overline{1; n})$$

ёки

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^n c_j A_{ij} = f_i \quad (i = \overline{1; n}), \quad (13)$$

бунда

$$f_i = \int_a^b \beta_i(t) f(t) dt, \quad A_{ij} = \int_a^b \alpha_j(t) \beta_i(t) dt.$$

Энди (13) тенгламалар системасидан c_i лар аниқланиб, (11) га қўйилиши керак.

Одатда ажралган ядро сифатида $K(x, t)$ функция Тейлор қаторининг олдинги бир неча ҳадини олиш билан чегараланадилар.

(1) ва (10) муносабатларга асосланиб, изланаётган $y(x)$ ва топилган $\bar{y}(x)$ тақрибий ечим орасидаги $\delta = |y(x) - \bar{y}(x)|$ фарқ катталигини қўйидагича баҳолаш мумкин:

$$|\delta| < \frac{N|\lambda|(1+|\lambda|R_k^2)h}{1-|\lambda|h(1+|\lambda|R_k)} + \eta, \quad (14)$$

бунда N миқдор $|f(x)|$ нинг юқори чегараси,

$$h > \int_a^b |K(x, t) - L(x, t)| dt, \quad \eta > |f(x) - f_1(x)|.$$

R_K ва R_L лар K ва L ядроларнинг резольвенталари. Резольвенталар ушбу муносабатлар бўйича топилади:

$$R_L(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}, \quad R_K > \int_a^b |R_L(x, t; \lambda)| dt.$$

$$a_{sk} = \int_a^b \alpha_k(x) \beta_s(x) dx \quad \text{ва}$$

$$D(x, t, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1(x) & \dots & \alpha_n(x) \\ \beta(t) & 1-\lambda a_{11} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_n(t) & -\lambda a_{n1} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$D(\lambda)$ нинг илдизлари $L(x, t)$ ядронинг хос қийматларидан иборат.

Ўзлуксиз функцияларнинг $C(0; 1)$ фазосида қўйидаги нормалар киритилади:

$$\|K\| = \max_{C[0,1]} |K(x, t)|, \quad \|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

$\Omega\{a \leq x, t \leq b\}$ соҳада квадрат билан жамланадиган функциялар тўпламида эса норма қўйидагича аниқланади:

$$\|K\| = \left(\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt \right)^{1/2}, \quad \|f\| = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Кирилган норма тушунчасидан фойдаланиб, $\lambda = 1$ бўлган ҳолда δ ни ((14) тенгсизлик) қуйидагича баҳолаш мумкин:

$$\|\delta\| \leq \|\Lambda\| (1 + \|R_K\|) (1 + \|R_L\|) \|f\|, \quad (15)$$

бунда $\Lambda(x, t)$ ифода

$$\Lambda(x, t) = K(x, t) - L(x, t)$$

муносабат бўйича аниқланади, унда $L(x, t)$ — ажралган ядро, $\|\Lambda\| \geq \|K\| - \|L\|$ (норманинг хоссаси). R_K ва R_L резольвенталар нормалари қуйидагича баҳоланади:

$$\|R_K\| \leq \frac{\|K\|}{1 - \|\lambda\| \cdot \|K\|}, \quad \|R_L\| \leq \frac{\|L\|}{1 - \|\lambda\| \cdot \|L\|}.$$

4-мисол. $y(x) = \sin x + \int_0^1 (1 - x \cos xt) y(t) dt$ интеграл тенглама унинг ядросини ажралган ядрога алмаштириш билан ечилсин.

Ечиш: $K(x, t) = 1 - x \cos xt = 1 - x \left(1 - \frac{x^2 t^2}{2!} + \frac{x^4 t^4}{4!} - \dots \right).$

Ажралган $L(x, t)$ ядро сифатида қаторнинг дастлабки учта ҳадини оламиз: $L(x, t) = 1 - x + \frac{x^3 t^2}{2}$. Натижада янги

$$\widetilde{y}(x) = \sin x + \int_0^1 \left(1 - x + \frac{x^3 t^2}{2} \right) \widetilde{y}(t) dt$$

тенгламага эга бўламиз ва унинг ўнг томонини қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\widetilde{y}(x) = \sin x + c_1(1 - x) + c_2 x^3, \quad (16)$$

бунда

$$c_1 = \int_0^1 \widetilde{y}(t) dt, \quad c_2 = 0,5 \int_0^1 t^2 \widetilde{y}(t) dt. \quad (17)$$

(16) ни (17) тенгликларга қўямиз:

$$\begin{cases} c_1 = 1 - \cos 1 + 0,5c_1 + 0,25c_2, \\ c_2 = \frac{1}{24}c_1 + \frac{1}{12}c_2 + \sin 1 - 1 + \frac{1}{2}\cos 1. \end{cases}$$

Системадан $c_1 = 1,0031$, $c_2 = 0,1674$ аниқланади. Изланаётган ечим

$$\bar{y}(x) = 1,0031(1-x) + 0,1674 x^3 + \sin 1.$$

$||\lambda|| = ||y - \bar{y}||$ ни (15) муносабатдан фойдаланиб баҳолаймиз. $[a, b]$ да квадрати интегралланувчи функциялар учун қуйидагиларга эга бўламиз (навбатлашувчи ишорали қатор учун Лейбниц теоремасидан фойдаланган ҳолда):

$$\Lambda(x) = K(x) - L(x) = \left(1 - x + \frac{x^{3/2}}{2} - \frac{x^{5/4}}{4!} + \dots\right) - \left(1 - x + \frac{x^{3/2}}{2}\right) = -\frac{x^{5/4}}{4!} + \dots = \left(\begin{array}{c} \text{Лейбниц} \\ \text{теоремаси} \\ \text{бўйича} \end{array}\right) = -\frac{x^{5/4}}{24^2},$$

$$||\Lambda(x)|| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b \Lambda^2(x, t) dx dt} = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{10/8}}{24^2} dx dt} = \frac{1}{72 \sqrt{11}} < \frac{1}{238},$$

$$||K|| \leq \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 (1 - x \cos xt)^2 dx dt} < \frac{3}{5},$$

$$||L|| \leq \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 \left(1 - x + \frac{x^{3/2}}{2}\right)^2 dx dt} < \frac{3}{5},$$

$$||f|| = \sqrt{\int_0^1 \sin^2 x dx} = \frac{\sqrt{2 - \sin 2}}{2} < \frac{3}{5}.$$

Резольвенталар нормаларини баҳолаймиз:

$$||R_k|| \leq \frac{||K||}{1 - ||\lambda|| \cdot ||K||} = \frac{\frac{3}{5}}{1 - 1 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{3}{2},$$

$$||R_L|| \leq \frac{||L||}{1 - ||\lambda|| \cdot ||L||} = \dots = \frac{3}{2}.$$

Натижада:

$$||\delta|| > \frac{1}{238} \left(1 + \frac{3}{2}\right) \left(1 + \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} = 0,01575 \dots < 0,016.$$

2. Кетма-кет яқинлашишлар усули. Кетма-кет яқинлашишлар

$$y^{[n]}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y^{[n-1]}(t) dt \quad (18)$$

рекуррент формула бўйича тузилади; $y^{[0]}(x)$ бошланғич яқинлашиш ихтиёрий танланади. (18) кетма-кетликнинг (1) тенглама ечими $y(x)$ га яқинлашиш шarti:

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \quad B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt}, \quad (19)$$

n — яқинлашиш хатоси:

$$|y(x) - y^{[n]}(x)| \leq F \cdot C_1 \cdot B^{-1} \cdot \frac{|\lambda B|^n}{1 - |\lambda B|} + Y C_1 B^{-1} |\lambda B|^n, \quad (20)$$

бунда

$$F = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}, \quad Y = \sqrt{\int_a^b y_0^2(x) dx},$$

$$C_1 = \sqrt{\max_{a \leq x \leq b} \int_a^b K^2(x, t) dt}.$$

5-мисол. Кетма-кет яқинлашишлар усули қўлланилиб,

$$y(x) = 1 + \int_0^1 xt^2 y(t) dt$$

тенглама ечилсин.

Ечиш: Бизда $\lambda = 1$, $K(x, t) = xt^2$. (19) шартнинг бажарилишини текшираимиз:

$$\int_0^1 \int_0^1 (xt^2)^2 dx dt = \dots = \frac{1}{15}, \quad B = \sqrt{\frac{1}{15}}, \quad |\lambda| < \frac{1}{B}.$$

Демак, итерация усули қўлланилиши мумкин. Уни қўллаимиз.

$y^{[0]} = 1$ бўлсин. У ҳолда:

$$y^{[1]} = 1 + \int_0^1 xt^2 dt = 1 + x \cdot \frac{1}{3} \approx 1 + 0,3333x,$$

$$y^{[2]} = 1 + \int_0^1 xt^2 \left(1 + \frac{t}{3}\right) dt = \dots = 1 + \frac{5x}{12} \approx 1 + 0,41666x,$$

$$y^{[3]} = 1 + \int_0^1 xt^2 \left(1 + \frac{5t}{12}\right) dt = \dots = 1 + \frac{7x}{16} \approx 1 + 0,4375x,$$

$$y^{[4]} = 1 + \int_0^1 xt^3 \left(1 + \frac{7t}{16}\right) dt = \dots = 1 + \frac{85}{192}x \approx 1 + 0,4427x,$$

$$y^{[5]} \approx 1 + 0,444x.$$

Бешинчи яқинлашиш хатосини баҳолаймиз:

$$F = \sqrt{\int_0^1 1^2 \cdot dx} = 1, Y = \sqrt{\int_0^1 1^2 \cdot dx} = 1,$$

$$C_1 = \sqrt{\max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 x^2 t^4 dt} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$|\delta| \leq 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{15} \cdot \left| 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{15}} \right|^5 \left(\frac{1}{1 - \left| 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{15}} \right|} + 1 \right) =$$

$$= \dots \approx 4,667 \cdot 10^{-3}.$$

3. Квадратуралар усулининг моҳияти аниқ интегрални бирор квадратур формула ёрдамида чекли йиғиндига алмаштиришдан иборат. (6) ва (7) тенгламалар учун

$$\tilde{y}_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} \tilde{y}_j = f_i \quad (i = \overline{1; n}), \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^n A_j K_{ij} \tilde{y}_j = f_i \quad (i = \overline{1; n}) \quad (22)$$

га эга бўламиз, бунда $\tilde{y}_i \approx y(x_i)$, $K_{ij} = K(x_i; x_j)$, $\overline{f_i} = f(x_i)$.

y_i лар мос равишда (21) ёки (22) чизиқли алгебраик тенгламалар системаларидан аниқланиб олинади. Хусусан, (1) тенглама ечими

$$\tilde{y}(x) = f(\tilde{x}) + \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j) \tilde{y}_j \quad (23)$$

кўринишда изланади, A_j коэффицентлар ва x_j абсциссалар (21) ёки (22) да қайси квадратур формула олинганига қараб танланади:

1) Трапециялар формуласи учун $h = (b - a)/n$, $A_0 = A_n = h/2$, $A_j = h$ ($j = 1; n - 1$), $x_j = a + jh$ ($j = 0; n$); бу ҳолда квадратура қолдиғи:

$$R_n(Ky) = -\frac{(b-a)^3}{12(n-1)^2} \left[\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} (Ky) \right]_{\xi=p, a \leq p \leq b};$$

2) Симпсон формуласи учун $n = 2m$, $h = (b - a)/(2m)$, $A_0 = A_{2m} = h/3$, $A_1 = A_3 = \dots = A_{2m-1} = 4h/3$, $A_2 = A_4 = \dots = A_{2(m-1)} = 2h/3$, $x_j = a + jh$ ($j = 0; 2m$);

$$R_n(Ky) = -\frac{1}{90} \cdot \frac{(b-a)^5}{(2m)^4} \left[\frac{\partial^5}{\partial \xi^5} (Ky) \right]_{\xi=p, a \leq p \leq b};$$

3) Гаусс формулалари учун $A_j = (b - a) A_j^{(n)}$, $x_j = a + (b - a) x_j^{(n)}$, бунда $x_j^{(n)}$ — Гаусс абсциссалари, $A_j^{(n)}$ — $(0; 1)$ интервал учун Гаусс коэффициентлари:

$$R_n(Ky) = -\frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{[(2n)!]^3 (2n+1)} \left[\frac{\partial^{2n+1}}{\partial \xi^{2n+1}} (Ky) \right]_{\xi=p, a \leq p \leq b}.$$

6-мисол. Симпсон квадратур формуласидан фойдаланиб,

$$y(x) + \int_0^{0,5} \frac{1}{5 + \cos(x+t)} y(t) dt = \sin \pi x$$

тенглама ечилсин.

Еч и ш: $n = 2$ бўлсин. У ҳолда $m = 1$, $h = \frac{0,5}{2} = \frac{1}{4}$, $A_0 = A_{10} = \frac{h}{3} = \frac{1}{12}$, $A_1 = A_3 = \dots = A_9 = \frac{1}{3}$, $A_2 = A_4 = \dots = A_8 = \frac{1}{6}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$,

$$y(x) = \sin \pi x - \frac{1}{12} \left(\frac{y_0}{5 + \cos(x+0)} + \frac{y_2}{5 + \cos(x+0,5)} + \frac{4y_1}{5 + \cos(x+0,25)} \right) = \sin \pi x - \frac{1}{12} \left(\frac{y_0}{5 + \cos x} + \frac{y_2}{5 + \cos(x+0,5)} + \frac{4y_1}{5 + \cos(x+0,25)} \right).$$

Тенгликка $x = 0; 0,25; 0,5$ лар кетма-кет қўйилиб, сод-далаштиришлар бажарилса,

$$\begin{cases} 1,0138889y_0 + 0,014178164y_1 + 0,058156214y_2 = 0, \\ 0,013961225y_0 + 0,014539053y_1 + 1,056712656y_2 = \\ = 0,70710675, \\ 0,014178164y_0 + 1,015041297y_1 + 0,058156214y_2 = 1 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Системадан $y_0 \approx -0,000004$, $y_1 \approx 0,596$, $y_2 \approx 0,834$ лар аниқланади ва $y(x)$ учун юқорида топишган тенгликка қўйилади.

Тақрибий ечим хатосини баҳолаш учун $R(Ky)$ ни ҳисоблаш керак бўлади. Лекин ҳисоблашларни ЭХМ да бажариш мақсадида қуйидагича йўл тутиш мумкин:

Ихтиёрий олинган $n = p$ ва $n = p + q$ ($p, q \in Z^+$) учун (21) муносабат бўйича иккита тенгламалар системаси тузилади ва бу системалардан $\tilde{y}_1(p), \dots, \tilde{y}_p(p)$ ва $\tilde{y}_1(p+q), \dots, \tilde{y}_{p+q}(p+q)$ қийматлар аниқланади, сўнг (23) бўйича $n = p$ ва $n = p + q$ учун $\tilde{y}_p(x)$ ва $\tilde{y}_{p+q}(p+q)$ тақрибий ечим қийматлари топилади. Агар ушбу

$$a) \frac{1}{b-a} \int_a^b |\tilde{y}_{p+q}(x) - \tilde{y}_p(x)| dx < \varepsilon; \quad \varepsilon > 0,$$

$$b) \max_{a < x < b} |\tilde{y}_{p+q}(x) - \tilde{y}_p(x)| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

икки шартдан бирортаси бажарилса, у ҳолда ҳисоблашлар тўхтатилади ва $\tilde{y}(x) \approx \tilde{y}_{p+q}(x)$ қабул қилинади.

Вольтерра тенгламаларини тақрибий ечиш:

Агар $K(x, t)$ ядро $R\{a \leq t \leq x \leq b\}$ соҳада, $f(x)$ эса $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, ихтиёрий x да

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) y(t) dt \quad (6)$$

тенглама ягона $y(x)$ ечимга эга бўлади.

Бу ечим ушбу

$$y(x) \approx \tilde{y}_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda^k \varphi_k(x) \quad (24)$$

кўринишда изланади. Ундаги $\varphi_k(x)$ ифода

$$\dots, \quad \varphi_0(x) = f(x), \quad \varphi_{k+1}(x) = \int_a^x K(x, t) \varphi_k(t) dt \quad (25)$$

рекуррент формула бўйича аниқланади. Агар

$$N = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \quad M = \max_K |K(x, t)|$$

бўлса, у ҳолда

$$|\varphi_k(x)| \leq \frac{M^k (b-a)^k N}{k!}.$$

Тақрибий ечим хатоси қуйидагича баҳоланади:

$$|y(x) - \tilde{y}_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\lambda|^k M^k (b-a)^k N}{k!}$$

ёки

$$|y(x) - \tilde{y}_n(x)| \leq \frac{L^{n+1} N}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{L}{n+2}} \quad (L = |\lambda| \cdot M(b-a)).$$

(25) бўйича ҳисоблашларни бажаришда тугунлари тенг узоқлашган квадратур формулалардан фойдаланиш мумкин:

а) умумлашган трапециялар формуласи қўлланилганида

$$h = (b-a)/m, \quad x_k = a + kh, \quad K(x_i, x_j) = K_{ij}, \quad \varphi_n(x_k) = \varphi_{nk},$$

$$\varphi_{n+1, k} = \frac{h}{2} [K_{ko} \varphi_{no} + 2(K_{k-1} \varphi_{n1} + K_{k2} \varphi_{n2} + \dots + \\ + K_{k, k-1} \varphi_{n, k-1} + K_{nk} \varphi_{kk})] \quad (k = \overline{0; m}),$$

$$\tilde{y}_{ink} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \varphi_{ik}, \quad (k = \overline{0; m}); \quad (26)$$

б) умумлашган Симпсон формуласи қўлланилганида

$$h = (b-a)/(2m), \quad x_k = a + kh,$$

$$\varphi_{n+1, 2k} = \frac{h}{3} \{K_{2k, 0} \tilde{\varphi}_{no} + 4(K_{2k, 1} \tilde{\varphi}_{n1} + K_{2k, 3} \tilde{\varphi}_{n3} + \dots + \\ + K_{2k, 2k-1} \tilde{\varphi}_{n, 2k-1}) + 2(K_{2k, 2} \tilde{\varphi}_{n, 2} + K_{2k, 4} \tilde{\varphi}_{n, 4} + \dots + \\ + K_{2k, 2k-2} \tilde{\varphi}_{n, 2k-2}) + K_{2k, 2k} \tilde{\varphi}_{n, 2k}\} \quad (27) \\ (n = 0, 1, 2, \dots; k = \overline{1; m}).$$

k тоқ бўлган ҳолда $\tilde{\varphi}_{n+1, k}$ қийматларини интерполяция йўли билан топишга тўғри келади.

(6)' Вольтерра иккинчи жинс тенгламасини тақрибий ечишнинг яна бир усули тенглама таркибидаги интегрални бирор квадратур формула ёрдамида чекли йиғинди орқали

ифодалашдир. Масалан, шу мақсадда умумлашган трапециялар формуласи қўлланилганида аввал $[a, b]$ оралиқ $x_k = a + kh$ ($k = \overline{0; n}$, $a = x_0$, $b = x_n$) нуқталар ёрдамида n қисмга ажратилади. $\tilde{y}_k$ ($k = \overline{0; n}$) тақрибий қийматларни эса ушбу формула бўйича кетма-кет аниқлаш мумкин:

$$\tilde{y}_k = \frac{1}{1 - \frac{\lambda h}{3} K_{kk}} \left\{ f_k + \frac{\lambda h}{2} K_{k0} \tilde{y}_0 + h \lambda \sum_{i=1}^{k-1} K_{ki} y_i \right\}. \quad (28)$$

7-мисол. Интеграл тенгламанинг ечими топилсин:

$$y(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t} y(t) dt.$$

Ечиш: *Биринчи усул.* Ечимни

$y(x) \approx \tilde{y}_4(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x)$ кўринишида излаймиз, бунда

$$y_0(x) = f(x) = e^x, \quad y_k(x) = \int_0^x K(x, t) y_{k-1}(t) dt.$$

$$y_1(x) = \int_0^x e^{x-t} \cdot e^t dt = \dots = x e^x,$$

$$y_2(x) = \int_0^x e^{x-t} \cdot t e^t dt = \dots = \frac{1}{2} x^2 e^x,$$

$$y_3(x) = \int_0^x e^{x-t} \cdot \frac{1}{2} t^2 e^t dt = \dots = \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 e^x,$$

$$y_4(x) = \int_0^x e^{x-t} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} t^3 e^t dt = \dots = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 e^t,$$

$$y(x) \approx e^x \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \right),$$

Тенгламанинг аниқ ечими $y = e^{2x}$. Таққослаш мақсадида аниқ ва тақрибий ечимларнинг $x = 0$ ва $x = 1$ даги қийматларини келтирамиз:

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 7,3890557, \quad \tilde{y}(0) = 1, \quad \tilde{y}(1) = 7,3620131.$$

Иккинчи усул. Тенгламадаги интегрални умумлашган

трапеция формуласи ёрдамида алмаштиришдан фойдаланиб ечимнинг

$$x_i = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1$$

нуқталардаги қийматини ҳисоблаймиз ($h=0,2$, $K=e^{x-t}$, $f=e^x$).

7-мисолга

$K_{ij} = K(x_i, x_j)$, $f_i = e^{x_i}$ қийматлари жадвали

i	x_i	$K_{0,i}$	$K_{1,i}$	$K_{2,i}$	$K_{3,i}$	$K_{4,i}$	$K_{5,i}$	f_i
0	0	1,00000	1,22140	1,49182	1,82212	2,22554	2,71828	1
1	0,2	0,81873	1,00000	1,22140	1,49182	1,82212	2,22554	1,22140
2	0,4	0,67032	0,81873	1,00000	1,22140	1,49182	1,82212	1,49182
3	0,6	0,54881	0,67032	0,81873	1,00000	1,22140	1,49182	1,82212
4	0,8	0,44933	0,54881	0,67032	0,81873	1,00000	1,22140	2,22554
5	1	0,36788	0,44933	0,54881	0,67032	0,81873	1,00000	2,71828

28) формула бўйича:

$$y(0) \approx \tilde{y}_0 = f_0 = 1,0000,$$

$$y(0,2) \approx \tilde{y}_1 = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} K_{11}} \left[f_1 + \frac{\lambda h}{2} K_{10} \tilde{y}_0 \right] \approx 1,4928,$$

$$y(0,4) \approx \tilde{y}_2 = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} K_{22}} \left[f_2 + \frac{\lambda h}{2} K_{20} \tilde{y}_0 + h \lambda K_{21} \tilde{y}_1 \right] \approx 2,2285,$$

$$y(0,6) \approx \tilde{y}_3 = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} K_{33}} \left[f_3 + \frac{\lambda h}{2} K_{30} \tilde{y}_0 + h \lambda (K_{31} \tilde{y}_1 + K_{32} \tilde{y}_2) \right] \approx 3,32679,$$

$$y(0,8) \approx \tilde{y}_4 = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} K_{44}} \left[f_4 + \frac{\lambda h}{2} K_{40} \tilde{y}_0 + \right.$$

$$\left. + h \lambda (K_{41} \tilde{y}_1 + K_{42} \tilde{y}_2 + K_{43} \tilde{y}_3) \right] \approx 4,96632,$$

$$y(1) \approx \tilde{y}_5 = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} K_{55}} \left[f_5 + \frac{\lambda h}{2} K_{50} \tilde{y}_0 + \right.$$

$$\left. + h \lambda (K_{51} \tilde{y}_1 + K_{52} \tilde{y}_2 + K_{53} \tilde{y}_3 + K_{54} \tilde{y}_4) \right] \approx 7,41386.$$

Таққослаш мақсадида аниқ ечим қийматларини ва тақрибий ечим қийматлари хатосини кўрсатамиз:

$$\begin{aligned}y(0) &= 1, \varepsilon_0 = 0, \\y(0,2) &= 1,4918, \varepsilon_1 = 0,001, \\y(0,4) &= 2,2255, \varepsilon_2 = 0,0029, \\y(0,6) &= 3,3201, \varepsilon_3 = 0,0067, \\y(0,8) &= 4,953, \varepsilon_4 = 0,01, \\y(1) &= 7,389, \varepsilon_5 = 0,025.\end{aligned}$$

МАШҚЛАР

1 — 3- машқларни ечишда ядрони Тейлор қаторининг аввалги учта ҳади йиғиндисидан иборат бўлган ажралган ядрога алмаштиришдан фойдаланилсин:

$$1. \quad y(x) = e^x - x - \int_0^1 x(e^{xt} - 1) y(t) dt.$$

$$2. \quad y(x) = -0,1 \int_0^1 \sin \frac{xy}{p} y(t) dt = 1 + x^2, \quad \lambda = \frac{1}{p}, \quad p = \overline{5;10}.$$

$$3. \quad y(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + \int_0^1 (1 - \cos xt^2) xy(t) dt.$$

4 — 6- машқларни ечишда кетма-кет яқинлашишлар усулидан фойдаланилсин:

$$4. \quad y(x) = 1 + \int_0^1 xt^2 y(t) dt.$$

$$5. \quad y(x) = \frac{5}{6} x + \frac{1}{2} \int_0^1 xty(t) dt.$$

$$6. \quad y(x) = x^2 + \int_0^1 xt^2 y(t) dt.$$

7 — 13- машқларни ечишда кўрсатилган квадратур формулалардан фойдаланилсин:

$$7. \quad y(x) + \int_0^1 \frac{y(t)}{1+x^2+t^2} dt = 1,5 - \alpha x^2 \quad (\text{трапедиялар формуласи, } n=4), \quad \alpha = 1; 5.$$

$$8. y(x) - 0,3 \int_0^1 \frac{1}{\ln(\alpha - xt)} y(t) dt = 1 + e^x \quad (\text{трапециялар}$$

формуласи, $\alpha = \overline{2;10}$, $n = 4$).

$$9. y(x) - \int_0^{0,96} \frac{(1 + \alpha x + t) y(t)}{2 + x^2 + t^2} dt = e^{-x} \quad (\text{Симпсон форму-$$

ласи, $n = 4$, $\alpha = \overline{1;10}$).

$$10. y(x) - \frac{1}{3} \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{\beta + y} y(t) dt = \frac{1}{1+x}, \quad \beta = \overline{1;10}$$

(Симпсон формуласи, $n = 6$).

$$11. y(x) - \int_0^1 \frac{1+x+t}{2+tx} dt = 1 - \gamma x^2, \quad \lambda = \overline{1;10} \quad (\text{Гаусс ти-$$

пидаги формулалардан бири, $n = 4$).

$$12. y(x) + \frac{1}{4} \int_0^1 \cos\left(\frac{x}{\gamma+t}\right) y(t) dt = e^x, \quad \gamma = \overline{1;10} \quad (\text{Гаусс}$$

формулалари, $n = 4$).

$$13. y(x) - \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{x-t}{10t+\gamma} y(t) dt = \frac{1}{1+x^2}, \quad \gamma = \overline{10;15} \quad (\text{Гаусс}$$

формулаларидан бири).

14 — 16-машқларда келтирилган интеграл тенгламаларни ечишда ҳар хил усуллардан фойдаланилсин:

$$14. y(x) = a + \int_0^x xt^\alpha y(t) dt, \quad \alpha = \overline{0;10}, \quad a = \overline{1;10},$$

$$15. y(x) = e^{-\alpha} + \int_0^x e^{x+\beta t} y(t) dt, \quad \alpha = \overline{0;10}, \quad \beta = \overline{1;10},$$

$$16. y(x) = x^\alpha + \int_0^x xt^\beta y(t) dt, \quad \alpha = \overline{0;10}, \quad \beta = \overline{1;10}.$$

11-ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

а) Интеграл тенглама вариантда кўрсатилган квадратур формула қўлланилиб $1 \cdot 10^{-3}$ гача аннқликда ечилсин:

$$1. \ y(x) + \int_0^{0,5} \frac{(1+t) y(t)}{2 + \sin \beta \pi(x+t)} dt = 1 + \alpha \sin \pi x,$$

$$2. \ y(x) - \int_0^{0,8} \frac{y(t)}{1 + \gamma e^{-\gamma t}} dt = \delta \operatorname{ch} x;$$

б) Интеграл тенгламани ечишда ядрони Тейлор қаторининг дастлабки уч ҳади йиғиндисига алмаштириш усулидан фойдаланинг:

$$3. \ y(x) - \int_0^1 \frac{\cos(\eta xt)}{t} y(t) dt = f(x), \quad \eta = 0,5 + 0,1 \cdot k.$$

$$4. \ y(x) - \int_0^1 (1+t) (e^{\mu xt} - 1) y(t) dt = f(x), \quad \mu = 0,3 +$$

$$+ 0,2m; \quad \mu = -0,2 + 0,3i.$$

Вар.	Мисол №	Квадр. формуласи $f(x)$	α	β	γ	δ	k	m	i
1	1	трапеция	1	0,3					
	3	$f(x) = x^2$					2		
2	2	трапеция			0,2	1			
	4	$f(x) = x^3$						1	
3	1	Симпсон	2	0,5					
	4	$f(x) = \sqrt{x}$							1
4	2	Симпсон			0,5	1			
	3	$f(x) = 1/\sqrt{x}$					2		
5	1	Гаусс	3	0,1					
	3	$f(x) = (1-x)$					2		
6	2	Гаусс			0,2	0,3			
	4	$f(x) = e^{-x}$						2	
7	1	Симпсон	1	0,2					
	4	$f(x) = x^4$						1	

Вар.	Мисол. №	Квадр. форму.	α	β	γ	δ	k	m	l
		$f(x)$							
8	2	Симпсон			0,1	0,2			
	3	$f(x) = e^{-2x}$					3		
9	1	трапеция	2	0,4					
	3	$f(x) = \sqrt[3]{x}$					1		
10	2	Гаусс			0,1	0,3			
	4	$f(x) = (1+x)$							2
11	1	Гаусс	2	0,3					
	3	$f(x) = e^{-x}$					1		
12	2	трапеция			1	0,2			
	4	$f(x) = 1+2x$							2
13	1	Симпсон	3	0,2					
	3	$f(x) = -\sqrt{x}$					2		
14	2	Гаусс			0,8	1			
	4	$f(x) = 1/x^2$							1
15	1	трапеция	1	0,4					
	4	$f(x) = x^2$						2	
16	2	Симпсон			2	0,2			
	3	$f(x) = 1/x^3$					3		
17	1	Гаусс	2	2					
	4	$f(x) = 2\sqrt{x}$							1
18	2	трапеция			0,7	0,3			
	3	$f(x) = 1/2\sqrt{x}$						1	
19	1	Симпсон	1	0,1					
	4	$f(x) = 1-\sqrt{x}$							1
20	2	Гаусс			1	3			
	3	$f(x) = 1+\sqrt{x}$					1		
21	1	трапеция	2	0,2					
	4	$f(x) = 2x^2$						1	
22	2	Симпсон			2	2			
	3	$f(x) = 2x^{2/3}$					2		
23	1	Гаусс	3	0,3					
	4	$f(x) = 3x^2$							2

Вар.	Мисол. №	Квадр.форму. $f(x)$	α	β	γ	δ	h	m	i
24	2	трапеция			3	1			
	3	$f(x) = 3x^3$					3		
25	1	Симпсон	1	0,2					
	4	$f(x) = 1/x^3$						2	

МАШҚЛАРНИНГ ЖАВОБЛАРИ ВА ҚЎРСАТМАЛАР

1-606

1. 17,0; 17; 17,007; $|\Delta| = 0,00675$; 0,00675; 0,00025.
 2. Қўрсатма: $\frac{\Delta(l)}{l} = \delta(l)$, $\Delta(l) = 36,0 \cdot 0,8\% = 36,0 \cdot 0,008 = 0,288$ см, $IKЧ = l - \Delta(l)$, $ЛОЧ = l + \Delta(l)$, $35,7 < l < 36,3$ (см). 3. Иккинчи кесма. 4. $\Delta(a^*) = 0,034 \leq \omega \cdot 10^{-1}$ ($0,5 \leq \omega \leq 1$). Шунга кўра 8, 6, 7 рақамлари ишончсиз. $a^* = 34,6$, $\Delta a^* = 1,33 \cdot 10^{-2}$. 5. 2,718282; 2,718; $\Delta = -2,818 \cdot 10^{-4}$; $-1,037 \cdot 10^{-2}\%$. 6. Қўрсатма: илдиз учун $\Delta(a^*) = a a^{a-1} \cdot \Delta(a)$ ва $\delta(a^*) \approx a \cdot \delta(a)$ лардан фойдаланинг.

7.

y	Δ	δ
$\sin x$	$\cos x \cdot \Delta x$	$\operatorname{ctgx} \cdot \Delta x$
$\cos x$	$\sin x \cdot \Delta x$	$\operatorname{tgx} \cdot \Delta x$
tgx	$\sec^2 x \cdot \Delta x$	} $2 \operatorname{cscx}^2 x \cdot \Delta x$
ctgx	$\operatorname{csc}^2 x \cdot \Delta x$	
a^x	$a^x \ln a \cdot \Delta x$	$\Delta x \cdot \ln a$
$(a > 0, a \neq 1)$		

Қўрсатма: $x = 1,2 \pm 0,04$ учун $\Delta(\sin x) = \cos x \cdot \Delta x = \cos 1,2 \cdot 0,04 \approx 0,0145$. $\sin x$ нинг қиймати иккита қийматли рақам билан олиниши мумкин: $\sin 1,2 \approx 0,93$. 8. 1) $x = 67,66 \pm \pm 0,22 \approx 68$; 3) $t = 19,25 \pm 0,6325 \approx 19$. 13. Қўрсатма: Жумладан, $y = \lg \operatorname{tgx}$ учун қуйидагини оламин:

$$y = \frac{\lg e}{\operatorname{tgx}} \times \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{2M}{\sin 2x} dx, \text{ бунда } M = \lg e \approx 0,4343. \text{ Бундан}$$

$dx \approx 1,15 \sin 2x dy$, $\Delta x \approx 1,15 \sin 2x \cdot \Delta y$ (рад.). Шу каби $\Delta x \approx 2,30 \operatorname{tgx} \cdot \Delta y$ (рад.). $\Delta x \approx 0,4343 \cdot 10^{-x} \cdot \Delta y$. 14. $\Delta x \approx \approx 1,15 \sin 2x \cdot \Delta y$, бунда $\sin 2x = \sin 120^\circ = \sqrt{3}/2$, $\Delta y = = 0,5 \cdot 10^{-5}$ (тўрт хонали жадвалнинг аниқлиги). У ҳолда:

$\Delta x \approx 1,15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,5 \cdot 10^{-5}$ рад $\approx 0,5 \cdot 10^{-5}$. 15. Кўрсатма:

$y = f(x)$ функция учун аргументнинг Δx^* абсолют хатосини $\Delta x^* = \frac{1}{|f'(x^*)|} \cdot \Delta y$ ($f'(x^*) \neq 0$) формула бўйича ҳисоблаш

мумкин. Логарифмларнинг тўрт хонали жадвалларида сонларнинг ўнли логарифмлари $\Delta y = 0,5 \cdot 10^{-5}$ гача аниқликда берилади. $x = \frac{\pi}{6} \pm \Delta x$ бўлсин. $y = \lg \sin x$ бўйича $(\lg \sin x)' =$

$$= 0,4343 \operatorname{ctg} x, \left(\lg \sin \frac{\pi}{6} \right)' = 0,75223, \Delta x^* = \frac{1}{0,75223} \cdot 0,5 \times$$

$$\times 10^{-5} = 6,6 \cdot 10^{-6}. \quad 20. \quad \frac{x}{1!} = 0,8; \quad -\frac{x^3}{3!} = -0,8 \cdot \frac{x^3}{6} =$$

$$= -8,5333328 \cdot 10^{-2}, \quad \frac{x^5}{5!} = \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{x^2}{4 \cdot 5} = 0,00273067, \quad -\frac{x^7}{7!} =$$

$$= -0,000041610157, \quad \frac{x^9}{9!} = \frac{x^7}{7!} \cdot \frac{x^2}{8 \cdot 9} = 0,0000003699. \quad \text{Нати-}$$

жалар қўшилса, $\sin 0,8 \approx 0,7173561 \approx 0,7174$. 21. Тўртта, 15-масалага берилган кўрсатмадан фойдаланинг.

2-боб

1. Кўрсатма. $|x| > 1$ фараз қилинса, $|P(x)| \geq |a_0 x^n| - (|a_1 x^{n-1}|) \dots + \dots + |a_n| \geq |a_0| |x|^n - c(|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \dots + 1)$. Геометрик прогрессия ҳадларини йиғиб, маълум алмаштиришлардан сўнг $|P(x)| > \left(|a_0| - \frac{c}{|x|-1} \right) |x|^n$ олинади. Энди x нинг қандай қийматларида $|P(x)| = 0$ (ёки $P(x) = 0$) бўлишини текширинг. Натижа $|x| < 1 + \frac{1}{|a_0|}$ га олиб келиши ке-

рак. Сўнг $x = \frac{1}{y}$ алмаштириш киритинг ва олдин чиқарилган

хулосадан фойдаланинг. 2. Кўрсатма. Мусбат илдизлар сонини билишда Декарт теоремасидан фойдаланинг, сўнг илдизнинг юқори чегараси R ни аниқланг. 9. $\Delta \leq 0,1$. 10. q_i

қиймат x_{i+1} ва x_i яқинлашишлар ўртасидаги фарқни кўрсатади. $q_1 > q_2 > \dots > q_i > \dots$. Ҳақиқатан ҳам, $q_1 = \frac{x_{i-1}^3 - x_{i-2}^3}{k = 45} =$

$$= \frac{(x_{i-1} - x_{i-2})(x_{i-1}^2 + x_{i-1}x_{i-2} + x_{i-2}^2)}{45} =$$

$$= q_{i-1} \frac{x_{i-1}^2 + x_{i-1} x_{i-2} + x_{i-2}^2}{45}. \text{ Леким } x = \sin 1^\circ, -1 \leq x \leq 1.$$

$$\text{Шунга кўра тах } (x_{i-1}^2 + x_{i-1} x_{i-2} + x_{i-2}^2) = 3, q_i \leq \frac{1}{15} q_{i-1}.$$

$$\text{Мисол учун, } q_1 = 1,1798426 \cdot 10^{-7}, q_2 = 2,3955555 \cdot 10^{-12},$$

$$q_2/q_1 \approx 2 \cdot 10^{-5}. \text{ Умуман, ал-Коший жараёни } -\sqrt{\frac{k}{3}} \leq$$

$$\leq x \leq \sqrt{\frac{k}{3}} \text{ да яқинлашади: } |\varphi'(x)| = \left| \left(-\frac{x^3 + m}{k} \right)' \right| =$$

$$= \frac{3x^2}{k} \leq 1 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{\frac{k}{3}}. \text{ «Электроника. 32 ВТЦ 101» мони-}$$

тори ёрдамида x учун олинган яқинлашишлар: $x_1 =$

$$= 0,017445318747716, x_2 = 0,0174523978056, x_3 =$$

$$= 0,017452406337352, \dots, x_{11} = 0,017452406437352, \dots$$

Мисолларнинг жавоблари: а) 0,79998; б) 0,03490482872567;

в) $-0,324617$. 11. 1) $0,46557, \varepsilon = 8 \cdot 10^{-7}$; 2) $-2,3247,$

$\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$; 3) $-0,987$; 4) $3,290161 < \xi < 3,2901915$;

5) $0,091064455 < \xi < 0,091308595$; 6) $0,90693973 < x <$

$< 0,90724103$ (рад.); 7) $1,195$ (рад.), $|\varepsilon| = 1,5 \cdot 10^{-3}$; 8) $0,$

$\pm 0,9286265$ (рад.); 9) $0,34218504$ (рад.); 10) $1,0885978$ (рад.);

11) $0,8436547$; 12) $2,9262711$; 13) $-1,491645$; 14) **Кўрсатма.**

$$x_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{x_{n-1}} \text{ рекуррент муносабатдан фойдаланинг. } f(0)f(1) <$$

< 0 . Бошланғич яқинлашишни $(0; 1)$ оралиқдан танлаб, МК

нинг RgO регистрига киритинг. Программадан фрагмент

$\Pi \rightarrow X \oslash 2F_{x^y} 4 \div C/\Pi \quad X \rightarrow \Pi \oslash \text{БП} \oslash \oslash$. Натижа: $x =$

$$= 0,30990712; 15) 1,4898239; 16) 1,3247145 < \xi < 1,3247183;$$

17) **Кўрсатма.** Ҳисоблашларда $f(x) = x(x(x-1,5) + 0,58) -$

$-0,057$ деб олинг. $0,9553376 < \xi < 0,95535285$; 25) $1,1123196 <$

$< \xi_1 < 1,1123892, 1,6067378 < \xi_2 < 1,6068426$ (рад.); 32)

$0,21330566 < \xi < 0,21333007$; 35) $-7,5^\circ$; 36) 12° . 12.

$$\text{а) } x_{k+1} = \frac{a + (n-1)x_k^n}{nx_k^{n-1}}. \text{ 13. Биринчи тартибли. 14. Биринчи}$$

тартибли.

3-боб

$$1. 1) x_3 = -1, x_2 = 2, x_1 = -3, \det A = 5,$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0,8 & 0,6 \\ 1 & -0,6 & -0,2 \\ 1 & -0,2 & -0,4 \end{bmatrix}; 2) x_4 = -1, x_3 = 2, x_2 = 0, x_1 = 1, \det A = 117,$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,05128 & 0,15385 & 0,17949 & 0,15384 \\ 0,11111 & 0 & 0,22222 & -0,33334 \\ 0,00855 & -0,30770 & -0,13675 & 0,35898 \\ -0,24786 & -0,07693 & -0,03419 & 0,58974 \end{bmatrix};$$

$$3) x_3 = 3,85446, \det A = 426,$$

$$x_2 = 2,18075,$$

$$x_1 = 0,95070,$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,09859 & 0,04225 & -0,00704 \\ -0,02817 & 0,17840 & -0,2582 \\ -0,04225 & -0,06573 & 0,12207 \end{bmatrix};$$

$$11) x_3 = 0,637596, \det A = 65,496,$$

$$x_2 = 0,28655,$$

$$x_1 = 0,189263$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0,143825 & 0,199015 & 0,163063 \\ 0,247243 & -0,162453 & -0,025650 \\ 0,401245 & -0,004273 & -0,263533 \end{bmatrix}.$$

4-606

$$2. 1) x = 1,03817, y = -0,88734; 2) x = 2, y = 1,5;$$

$$3) x = 0,8, y = 1,2; 4) x = 2,3, y = 1,9; 5) x = 0,9, y = 0,7;$$

$$6) x = 0,32, y = -0,8; 7) x = 1, y = 2,1415926; 8) x = 1,$$

$$y = 3,5; 9) x = 2, y = 2.$$

$$5. 1) M(A) = n \max_{\substack{i \leq 1 \\ i > n}} |a_{ij}| \text{ функционал (бунда } n \text{ — натурал сон)}$$

A матрицанинг нормаси бўлади. Ҳақиқатан, $n \geq 0$, $|a_{ij}| \geq 0$ бўлганидан $M(A) \geq 0$ (норма бўлишнинг 1-шарти, [7], 114-бет). Иштиёрий α сони учун

$$M(\alpha A) = n \max_{i \geq 1, j \leq n} |\alpha a_{ij}| = |\alpha| \cdot M(A) \text{ (2-шарти). } M(A) =$$

$$= n \max_{i \geq 1, j \leq n} |a_{ij}|, M(B) = n \max_{i \geq 1, j \leq n} |b_{ij}| \text{ (бир турли } A \text{ ва } B \text{ матри-$$

$$\text{цалар бўлган ҳолда) } M(A+B) = n \max_{i \geq 1, j \leq n} |a_{ij} + b_{ij}| \leq$$

$$\leq n (\max_{i \geq 1, j \leq n} |a_{ij}| + \max_{i \geq 1, j \leq n} |b_{ij}|) = M(A) + M(B) \text{ (3-шарти).}$$

$[a_{ij}] \cdot [b_{kl}]$ матрицалар кўпайтмаси маънога эга бўлган тақдирда

$$(жумладан, бир турли квадрат матрицалар ҳолида) M(AB) =$$

$$= n \max_{\substack{i \geq 1 \\ i \leq n}} |a_{ij} b_{kl}| \leq n \max_{\substack{i \geq 1 \\ i \leq n}} |a_{ij}| \cdot n \max_{\substack{k \geq 1 \\ k \leq n}} |b_{kl}| = M(A) M(B) \text{ бў-$$

$$\text{лади (4-шарт); 2) } \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \text{ функционал норма эмас. Ҳақи-$$

қатан, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ва $\|A\| = \max |a_{ij}| = 1$ бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\|A^2\| = \max |(A^2)_{ij}| = 2$ ва натижада $\|A^2\| > \|A\| \cdot \|A\|$ бўлиб, матрица нормаси бўлишнинг 4-шарти бажарилмайди ([7], 114-бет); 3) Матрица нормасининг вектор нормаси билан мосланганлиги таърифи ва теоремадан фойдаланинг ([7], 115-бет).

5-606.

$$1. D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ёки $D(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$.

Тенгламанинг илдизларини ажратамиз. $D'(\lambda) = -3\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$ тенглама илдизлари $-0,8685$ ва $1,5352$; ишоралар жадвали:

λ	$-\infty$	$-0,8685$	$1,5352$	$+\infty$
$\text{sign } D(\lambda)$	+	-	+	-

$D(\lambda)$ учта ҳақиқий илдизга эга. 2-§ да қаралган усуллардан бирортасидан фойдаланиб илдизлардан бирини, масалан, λ_2 ни топамиз. $\lambda_2 \approx 0,4707$. λ_1 ва λ_3 ни топиш мақсадида $D(\lambda)$ кўпхадни $\lambda - \lambda_2$ икки ҳадга бўлишда ҳосил бўладиган квадрат тенгламани ечамиз: $\lambda - 0,5293\lambda - 4,2491 = 0$, $\lambda_1 \approx -1,8136$, $\lambda_3 \approx 2,3429$. Ҳар қайси λ га мос хос вектор $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$ тенгликдан топилади. Жумладан λ_1 бўйича

$$\begin{cases} 2,8136 x_1^{(1)} + 4x_2^{(1)} + x_3^{(1)} = 0, \\ -x_1^{(1)} + 2,8136 x_2^{(1)} + 3x_3^{(1)} = 0, \\ x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} + 0,8136 x_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

бир жинсли тенгламалар системаси олинади.

Уни ечамиз: $\begin{cases} 2,8136 x_1^{(1)} + 4x_2^{(1)} = -x_3^{(1)} \\ -x_1^{(1)} + 2,8136 x_2^{(1)} = -3x_3^{(1)} \end{cases}$; $x_3^{(1)} = 1$ бўлсин.

У ҳолда системадан: $x_1^{(1)} = 0,7709$, $x_2^{(1)} = -0,7923$. Шундай

қилиб, $\vec{x}^{(1)} = (0,7709; -0,7923; 1)'$. Шу тартибда $\lambda_2 = 0,4707$ ва $\lambda_3 = 2,3429$ лар бўйича тузилган бир жинсли тенгламалар системаларидан $\vec{x}^{(2)} = (1; -0,2256; 0,3731)'$. $\vec{x}^{(3)} = (1; 0,2842; 0,2061)'$ аниқланади. 2. $D(\lambda) = -\lambda^3 + 21\lambda +$

+ 72. 3. $\lambda_1 \approx 2,103$, $\lambda_2 \approx 10,083$, $\lambda_3 = -5,187$. 6. $\lambda_1 = -0,414$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2,414$. 7. Леверрье усули қуйидагиларни беради: $s_1 = \text{Sp } A = 4,2$, $s_2 = \text{Sp } A^2 = 49,82$, $s_3 = \text{Sp } A^3 = 262,068$, $s_4 = \text{Sp } A^4 = 1841,3858$, $p_1 = -4,2$, $p_2 = -122,214$, $p_3 = 153,4916$, $p_4 = 1175,8341$, $\det (\lambda E - A) = \lambda^4 - 4,2\lambda^3 - 122,214\lambda^2 + 153,491\lambda + 1175,8341$. 17. $\lambda \approx 4,46$, $\vec{x}^{(1)} = (0,90; 0,42; 0,12)'$. 18. $\lambda_1 \approx 3,61804$, $\vec{x}^{(1)} = (0,37; -0,60; 0,60; -0,37)'$. 21. Кўрсатма: Хос сонларнинг экстремал хоссасидан фойдаланинг.

6-боб

1. 1) $f(0,43) = 1,5412$, $f(0,54) = 1,76415$, $f(0,57) = 1,8491$; 2) $f(11,5) = 6,589$, $f(12,5) = 7,021$, $f(13,0) = 7,348$; 3) $f(53) = 0,05107$; $f(60) = 0,05622$; 4) $f(4,2) = 172,571$, $f(5,2) = 208,447$, $f(5,5) = 220,782$; 5) $f(170) = 118,399$, $f(230) = 128,801$, $f(340) = 146,047$; 6) $f(3,3) = 1,3909$, $f(4,3) = 1,5372$, $f(4,8) = 1,6161$; 7) $f(0,65) = 0,5475$, $f(0,85) = 0,6285$, $f(0,95) = 0,6673$; 8) $f(49) = 69,343$, $f(53) = 74,084$, $f(64) = 81,999$; 9) $f(1115) = 12032,3$, $f(1125) = 12649,1$, $f(1135) = 13297,1$; 10) $f(33,00) = 58,803$, $f(40,00) = 60,425$, $f(53,00) = 81,594$. 4. д) 0,660; е) $-0,674$; ж) $-2,49$; з) 0,826; и) 0,3222; й) 0,7854; к) 0,5236; л) 0,3491. 5. а) $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$; б) $\frac{1}{4} n(n+1) \cdot (n+2)(n+3)$; в) $\frac{n}{n+1}$; г) $\frac{n}{3n+1}$; д) $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$; е) $(n+1)! - 1$. 12. 1) 0,2964; 2) $-2,825$.

7-боб.

2. Кўрсатма: (3) кўринишдаги система тузилсин. Жав.: $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$. 3. $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)]$. 4. Кўрсатма: $R(f) = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} \times [f(a) + f(b)]$, $f(x) \in C^{(2)}$ ёки $R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx - \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_0 + h)]$. Кейинги ифодани кетма-кет икки марта дифференциаллаш, алмаштиришларда $R(0) = 0$, $R'(0) = 0$ ни эътиборга олиш, сўнг h бўйича интеграллаш ва ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиш керак. Натижада: $R =$

$$= -\frac{h^2}{12} f''(\xi), \xi \in (x_0, x_n). \quad 5. R(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{IV}(\xi), \xi \in [a, b].$$

7. Кўрсатма. $S(x)$ — иккинчи даражали кўпхад. Шунга кўра $n = 2$ учун Ньютон—Котес ((4)—(5)) формулаларидан фойдаланинг. 9. Кўрсатма. (3) кўринишида система тузинг ёки бирор, жумладан (24) Эйлер—Маклорен формуласидан фойдаланинг. Кейинги ҳолда $n = 2$, $f = 1$ олиниши

мумкин. Шунга мувофиқ, $\int_0^1 f(x) dx \approx 0,5 (f(0) + f(1))/2 + f(0,5) - 0,02083333 (f'(1) - f'(0))$. 11. Кўрсатма.

$R_n(x) \leq \varepsilon$; $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-2}$ дан фойдаланинг. 12. 0,5731435. 13.

— 0,010555555. 14. 0,030907892. 15. 0,09426583. 16.

— 0,09106854. 17. 0,00967. 18. 0,31497152. 19. 0,0014328179.

20. 0,02651105. 21. 0,1066587. 22. 0,12256524.

23. — 0,1102893. 24. — 0,00156856. 25. 1,376826. 26.

0,3853359. 27. 0,28538158. 28. 0,21996378. 29. 0,27884185.

30. 1,9687099. 31. 0,6549504. 32. 0,9507247. 33. 1,1251338.

35. 0,96908105. 36. 0,27454882. 37. 0,93811371. 38.

0,9156059. 39. 63917,483. 40. 1,462681, $|R_{10}| < 0,12 \cdot 10^{-3}$.

41. 0,74627. 42. 2,8687724. 43. 1,4458326. 46. 0,337.

47. 1,209. 48. 0,251. 49. 0,272. 50. — 1,8479. 51. — 0,0413;

52. 0,9525. 53. — 0,086. 54. 1,351. 55. 1,686. 56. 0,507.

57. 0,488. 58. 1,089. 59. 0,116. 66. 0,598612. 67. 1) 51,04;

2) 4,84. 68. 3,82. 69. 0,822. 70. 4. 71. 0,189492. 72.

1) 367,809; 2) 0,617. 73. 8,378. 74. Кўрсатма: Гульден

теоремасидан фойдаланинг. $V = 6708,82$. 75. 23,7 м. 76. 1,5.

81. 0,836582. 82. 1,463243. 84. 1,570796. 91. 0,249987.

95. 0,272198. 96. 0,272203. 102. 0,9559. 111. 0,0001243.

Кўрсатма. Бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланиб,

интегрални $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ кўринишига келтиринг,

сўнг Мелер квадратур формуласидан фойдаланинг. 115. $J =$

$$= \int_0^c + \int_c^{+\infty} \text{ бўлсин. } 1 + x^4 \geq x^4 \text{ дан } \int_c^{+\infty} \leq \int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3c^3} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Бундан $c \geq \sqrt[3]{\frac{2}{3 \cdot 10^{-3}}} = 8,7358 \dots \approx 9$. $c = 10$ да $J \approx$

$\approx \int_0^{10} \frac{dx}{1+x^4}$ бўлади. Жав.: $J \approx 1,111$. 116. Кўрсатма.

Функция $[0; 1]$ оралиқда ягона $x = 1$ махсусликка эга. $f(x) =$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x)^{-1/2} \cdot x^2 (1+x)^{-1/2} = (1-x)^{-1/2} \varphi(x) \quad (c = 1 \in [0; 1], \alpha = -1/2 > -1), [0; 1] \text{ да } \varphi(x) \text{ мавжуд. Канторович-нинг махсусликини ажратиш усули қўлланилиши мумкин.}$$

$$c=1 - \text{узилиш нуқтаси. } g(x) \text{ ни } x=1 \text{ нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёямиз: } g(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{g''(1)}{2!}(x-1)^2 + g_1(x). \text{ Бу ифодага } g(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, g'(1) = \frac{7}{4\sqrt{2}}, g''(1) = \frac{19}{16\sqrt{2}} \text{ қийматларни қўйиб, } J = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{7}{4}(x-1) + \frac{19}{32}(x-1)^2 \right] dx + \int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot g_1(x) dx =$$

$$= J_1 + J_2 \text{ ни оламиз. Бунда } J_1 = \frac{1}{32\sqrt{2}} \left(-5 \int_0^1 \sqrt{1-x} dx + \right.$$

$$\left. + 18 \int_0^1 x \sqrt{1-x} dx + 19 \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx \right). \text{ Бирор квадратур формуладан фойдаланамиз. Натижада: } J_1 \approx 0,757305. J_2 =$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}} \left\{ x^2 (1+x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{7}{4}(x-1) + \frac{19}{32}(x-1)^2 \right] \right\} dx$$

$$\text{ бўлиб, } \int \text{ ишораси остидаги функция } x=1 \text{ нуқта атрофида узлуксиз (нолга тенг). } J_2 \text{ ни ҳисоблаймиз. } J_2 = 0,028003. \text{ Шундай қилиб, } J = 0,757305 + 0,028003 = 0,785398.$$

117. 0,306853. 118. 0,5. 119. 0,5. 120. 0,5. 121. 0,311203. 122. 1,131972. 123. 1,570796. 124. 1,285398. 125. 1,570796. 126. 2,666667. 127. 1. 128. 2. 129. 0,604600. 130. —0,73576. 131. —0,2088. 132. —1,645. 133. —0,1250. 134. —1,089. 135. 1,234. 136. 0,0524. 137. 0,231. 138. 3,1416. 146. $36\pi < J < 100\pi$. 147. $-8 < J < \frac{2}{3}$. 148. $4\pi < J < 22\pi$. 149. 0,5. 150. $4 > J > 8(5-2\sqrt{2})$. 151. $28\pi\sqrt{3} < J < 52\pi\sqrt{3}$. 152. $24 < J < 72$.

8-боб

1. $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{27}{4} \cdot \frac{x^4}{4!} + \dots$,
тўртта ҳад, $y(0,2) = 0,57$. 2. $y(x) = x^2 - 0,1x^5 + 0,01250x^5 - 0,00159x^{11} + \dots$; 0,96951; 0,318. 3. $y(x) = 1 + x + 0,5x^2 + 0,333333x^3 + 0,25x^4 + 0,116666x^5$; 4. $y(x) = x - 0,5x^2 +$

$+ 0,333333 x^3 + 0,016666 x^6 + 0,013492 x^7$. 5. $y(x) = 1 + 0,5x - 0,25x^4 + 0,25x^6$. 6. $y(x) = 1 - 0,16666x^2 - 0,833333x^4$. 7. $y(x) = x - 0,5x^2 + 0,6666667x^3 - 0,25x^4$, $z(x) = 1 - x + x^2 - 0,5x^3 + 0,2917x^4$. 8. $y(x) = 1 + x + 0,5x^2 - 0,33333x^3 - 0,166667x^4$, $z(x) = -1 + 0,5x^2 + 0,33333x^3 + 0,125x^4$. 9. $y^{[1]}(x) = 0,33333x^3$, $y^{[2]}(x) = 0,3333x^3 + 0,015873x^7$, $y^{[3]}(x) = 0,3333x^3 + 0,015873x^7 + 0,000962x^{11} + 0,000017x^{15}$. 10. $y^{[2]} = 1 + x + 1,5x^2 + 1,3333x^3 + 0,541667x^4 + 0,25x^5$. 11. $y^{[1]} = 0,66667x^{3/2}$, $y^{[2]} = 0,6667x^{3/2} + 0,190476x^{7/2}$, $y^{[3]} = 0,66667x^{3/2} + 0,190476x^{7/2} + 0,034632x^{11/2}$. 12. $y^{[2]} = 0,5x^2 + x \sin x - 0,5x^2 \cos x + \cos x$.

15.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	...	1
y	1	1,005000	1,010025	1,025175	1,045679	...	1,241794

18.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y	1	0,99091	0,97530	0,95520	0,93219	0,90754

0,7	0,8	0,9	1
0,88188	0,85598	0,83006	0,80502

19. $y(1) = 0,3181$. 20.

$y(1,5) = 3,0042$. 21. $y(0,4) = 0,4647$. 22. $y(1,6) = 0,8032$.

23.

x	0,4	0,6	0,8	1,0
y	-0,07841	-0,17202	-0,29507	-0,44005
z	0,96040	0,91200	0,84629	0,76520

24.

x	0,4	0,6	0,8	1,0
y	1,0064	1,0826	1,1042	1,2606
z	1,1667	1,3965	1,7662	2,3460

35. $O(h^2)$. 36. $O(h^2)$. 37. $\| [u]_h - u^{(h)} \|_{U_h} \leq ch^2$.

9-606.

1.

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	-3,94	-3,87	-3,76	-3,59	-3,34	-3,00

$$2. \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 0,9 & 1,0 \\ \hline y & -0,35 & -0,31 & -0,25 & -0,18 & -0,09 & 0,0 \end{array}.$$

$$3. \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & 0,0 & 0,2 & 0,4 & 0,6 & 0,8 & 1,0 \\ \hline y & 3,0 & 2,371 & 1,366 & 1,464 & 1,145 & 0,893 \end{array}.$$

$$4. 1) \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} x & 0,0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,8 \\ \hline y & 2,25 & 2,45 & 2,64 & 2,80 & 2,92 & 2,97 & 2,91 & 2,68 & 2,23 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 0,9 & 1,0 \\ \hline 1,46 & 0,25 \end{array}. \quad 6. \begin{array}{c|c|c|c|c} x & \pi & 21\pi/20 & 22\pi/20 & 23\pi/20 \\ \hline y & 1 & 1,143 & 1,250 & 1,312 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 24\pi/20 & 25\pi/20 & 26\pi/20 & 27\pi/20 & 28\pi/20 & 29\pi/20 & 1,5\pi \\ \hline 1,322 & 1,276 & 1,74 & 1,021 & 0,822 & 0,589 & 0,333 \end{array}$$

$$8. \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} x & 2,0 & 2,2 & 2,4 & 2,6 & 2,8 & 3,0 & 3,2 & 3,4 \\ \hline y & 2,0000 & 2,1906 & 2,3646 & 2,5247 & 2,6729 & 2,8109 & 2,9400 & 3,0613 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} 3,6 & 3,8 & 4,0 \\ \hline 3,1756 & 3,2837 & 3,3863 \end{array}. \quad 9. \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & -2 & -1,8 & -1,6 & -1,4 & -1,2 & -1,0 \\ \hline y & 1 & 0,826 & 0,694 & 0,592 & 0,510 & 0,444 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} -0,8 & -0,6 & -0,4 & -0,2 & 0,0 \\ \hline 0,391 & 0,346 & 0,309 & 0,277 & 0,25 \end{array}. \quad 10. \begin{array}{c|c|c} x & 0,0 & 1,0 & 2,0 \\ \hline y & -1 & -0,413 & 0,080 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 3,0 & 4,0 & 5,0 & 6,0 & 7,0 \\ \hline 0,520 & 0,924 & 1,302 & 1,659 & 2 \end{array}. \quad 11. 1) y(x) = 1 + e^{-\frac{5}{12}x} +$$

$$+ \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{5} x^2 + \frac{7}{25} x; \quad 2) y(x) = 1 + e^{2,5x} + \frac{1}{7} e^x;$$

$$3) y(x) = 1 + e^{-2,5x} + 5 \sin x - 2 \cos x.$$

$$15. 1) y(x) = e^x(x+1) - (e^x + 1) \ln(e^x + 1) + 1;$$

$$2) y(x) = 0,5 e^x [a c \sin e^x + e^x \sqrt{1 - e^{2x}} + 1] + 0,3333 \times \\ \times \sqrt{(1 - e^{2x})^3} + 1; 3) y(x) = e^x - \cos e^x + 1.$$

10-боб.

1. Кўрсатма. Изланаётган $u(x, y)$ функция симметрик, $f(x, y)$ функция эса ўзгармас, чегара шартлар нолга тенг, Шунга кўра чекли—айирмалли тенгламани квадратнинг (1; 1), (2; 1), (1; 2) (2; 2) тугунларга эга бўлган тўртдан бир қисми бўйича тузиш етарли. Жавоб: $u_{11} = 0,0429$, $u_{12} = u_{21} = 0,0547$, $u_{22} = 0,0703$. 4. Кўрсатма. $\sigma = 0,5$ учун (1') формуладан фойдаланинг. Масаланинг аниқ ечими $u(x, t) = \alpha x^2 t$. 5. Кўрсатма. $\tau = \frac{1}{\alpha} t$ алмаштириш киритинг. Масаланинг аниқ ечими: $u(x, t) = e^{\alpha(t-x)}$. 6. Масаланинг аниқ ечими: $u(x, y) = x^2 + \alpha y^2$.

11-боб.

$$3. \text{ Аниқ ечими: } y(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + \left(\frac{58}{9} - \frac{11}{3} \sin 1^\circ - \right. \\ \left. - \frac{52}{15} \cos 1^\circ \right) x^3. 4. y^{[n]}(x) = 1 + \frac{4}{9} x, y^{[0]}(x) = 1. 5. y^{[0]}(x) = \\ = 0, y^{[n]}(x) = \left(1 - \frac{5}{6^n} \right) x. 14. a = 1, \alpha = 2 \text{ да } y(x) \approx 1 + \\ + \frac{1}{3} x^4 + \frac{1}{21} x^8 + \frac{1}{11 \cdot 21} x^{12}.$$

АДАБИЁТ

1. Бахвалов Н. С. Численные методы, т. I, — М.: Наука, 1973.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. I. 3-нашри. М.: Наука, 1966.
3. Воробьева Г. Н., Данилова А. Н. Практикум по численным методам, 2-нашри, М.: Высшая школа, 1990.
4. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций, 2-қайта ишланган нашри. М.: Гостехиздат, 1954.
5. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1970.
6. Демидович Б. П. Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа — М.: 1967.
7. Исроилов М. И. Ҳисоблаш методлари, 1-қисм, — Тошкент: Ўқитувчи, 1988.
8. Қобулов В. Қ. Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси. — Тошкент: Ўқитувчи, 1976.
9. Копченлова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. — М.: Наука, 1972.
10. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики — М.: Наука, 1977.
11. Мысовских И. П., Лекции по методам вычислений. — М.: Физматгиз, 1962.
12. Никольский С. М. Квадратурные формулы, 2-е изд. — М.: Наука, 1972.
13. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы — М.: Наука, 1989.
14. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974.
15. Хемминг Р. В. Численные методы — М.: Наука, 1972.

МУНДАРИЖА

Сўз боши	3
1-б о б. Масалаларни сонли ечиш жараёнида ҳосил бўладиган хато	4
Сонларни яхлитлашнинг содда қоидаси	4
Юқори разряднинг 1 бирлигигача тўлдириш қоидаси	5
Функциянинг йўқотилмас хатоси	5
Ишончли рақамларни санаш қоидалари	7
Машқлар	7
1- лаборатория иши	9
2-б о б. Тенгламаларни тақрибий ечиш	11
Илдизларни ажратиш	11
Илдизларни топиш. Қесмани тенг иккига бўлиш усули	15
Оддий итерация усули	15
Вестгейн усули	16
Ньютон усули (уринмалар усули)	17
Ватарлар усули	18
Машқлар	20
2-а лаборатория иши	23
2-б лаборатория иши	25
3-б о б. Чизиқли тенгламалар системаларини ечиш	26
Гаусснинг номаълумларни чиқариш (компакт) усули	26
Квадрат илдизлар усули	30
Итерация усули	33
Машқлар	36
3- лаборатория иши	37
4-б о б. Чизиқли бўлмаган тенгламалар системаларини тақрибий ечиш	38
Оддий итерация усули	38
Ньютон усули	41
Машқлар	42
4 — лаборатория иши	44
5-б о б. Матрицаларнинг хос сон ва хос векторларини ҳисоблаш	45
А. Н. Кривов усули	46
Леверье усули	48

А. М. Данилевский усули	49
Модуль бўйича энг катта бўлган битта ёки бир неча хос сонлар- ни топиш учун итерация усули	56
Машқлар	61
5- лаборатория иши	63
6- б о б. Функцияларни интерполяциялаш.	64
Лагранж интерполяцион кўпҳади	64
Бўлинган айирмалар	66
Ньютоннинг бўлинган айирмали интерполяцион кўпҳади.	67
Чекли айирмалар	68
Гаусс формулалари	69
Стирлинг формуласи.	69
Бессел формуласи.	70
Экстраполяциялаш	71
Икки аргументли $z = f(x, y)$ функцияни (x_j, y_k) нуқталар тўп- ламида интерполяциялаш	71
Тескари интерполяциялашда итерация усули	72
Берилган $f(x)$ функцияни сонли дифференциаллаш	74
Сплайнлар ёрдамида функцияларни яқинлаштириш	74
Машқлар.	81
6- лаборатория иши	86
7- б о б. Интегралларни тақрибий ҳисоблаш	87
Квадратур формула	87
Ньютон-Котес формулалари	89
Трапециялар формуласи.	89
Симпсон формуласи	90
Симпсон кубатур формуласи	92
Гаусс квадратур формулалари	93
Мелер формуласи	97
Чебишев квадратур формуласи.	97
Эйлер-Маклорен формуласи	98
Вазн функциясини ажратиш усули.	103
Аддитив усул.	103
Л. А. Люстерник ва В. А. Диткин кубатур формуласи.	104
Монте-Карло усули	106
Машқлар.	107
7- лаборатория иши.	117
8- б о б. Оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи- ни сонли счиш усуллари	119
Кетма-кет дифференциаллаш усули	119
Аниқмас коэффициентлар усули	122
Итерация усули	124
Рунге-Кутта усуллари	125
Чекли-айирмали усуллар. Адамснинг экстраполяция формуласи.	131
Адамснинг интерполяция формуласи.	132
Милн усули	134
Адамс-Штермер усули	137
Тўрлар усули	138
Машқлар.	144
8- лаборатория иши.	147

9- б о б. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни тақрибий ечиш.	149
Икки нуқтали чегаравий масала	149
Чекли айирмалар усули	149
Отишув усули	151
Ҳайдаш усули	152
Итерация усули	155
Галеркин усули	158
Коллокация усули	161
Машиқлар.	162
9- лаборатория иши.	165
10- б о б. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш	167
Айирмалар схемалар, уларни қуриш ва дифференциал масалани аппроксимациялаш	167
Дирихле масаласи.	168
Чекли-айирмалар тенгламалар системасини итерация методи билан ечиш (Либман ўрталаш жараёни)	172
Параболик тур тенгламалар учун тўрлар усули	175
Иссиқлик ўтказиш тенгламаси учун ҳайдаш усули	178
Гиперболик тур тенгламалар учун тўрлар усули	180
Машиқлар.	183
10- лаборатория иши	184
11- б о б. Интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш	188
Фредгольм ва Вольтерра чизиқли интеграл тенгламалари	189
$K(x, t)$ ядрони ажралган ядрога алмаштириш усули	193
Қетма-кет яқинлашишлар усули	197
Квадратуралар усули.	198
Вольтерра тенгламаларини тақрибий ечиш	200
Машиқлар.	204
11- лаборатория иши	206
Машиқларнинг жавоблари ва кўрсатмалар	209
Адабийёт	220

АБДУХАКИМ АБДУХАМИДОВ,
САЙФУЛЛА ХУДОЙНАЗАРОВИЧ ХУДОЙНАЗАРОВ

УПРАЖНЕНИЯ И ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ
ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ МЕТОДАМ

На узбекском языке

Издательство «Ўзбекистон» — 1995, 700129, Ташкент, Навои, 30.

Қичик муҳаррир Ш. Соибназарова
Бадий муҳаррир Ж. Гурова
Техник муҳаррир Н. Сорокина, А. Горшкова
Мусаҳҳиҳ Ҳ. Абдуқодирова

Теришга берилди 22.09.94. Босишга рухсат этилди 20.04.95.
Бичими 84×108¹/₃₂. «Литературная» гарнитурада юкори босма
усулида босилди. Шартли бос. т. 11,76. Нашр т.11,41. Нусха-
си 5000. Буюртма № 595. Баҳоси шартнома асосида.

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Нашр
№ 130 — 94.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси ижарадаги
Тошкент матбаа комбинатида босилди. 700129, Тошкент, Навоий
кўчаси, 30.