Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Институт
фундаментального
образования

Н. В. БУРМАШЕВА
Е. Ю. ПРОСВИРЯКОВ
С. А. БЕРЕСТОВА

ИНЖЕНЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Н. В. Бурмашева
Е. Ю. Просвиряков
С. А. Берестова

ИНЖЕНЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом УрФУ
для студентов бакалавриата,
обучающихся по СУОС УрФУ
в области образования по инженерному делу,
технологиям и техническим наукам

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2022

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Б91

Рецензенты:

декан электротехнического факультета Уральского государственного университета путей сообщения, канд. физ.-мат. наук, доц. *В. В. Башуров*;
заведующий лабораторией прикладной механики Института машиноведения УрО РАН канд. техн. наук, доц. *Л. Ф. Спевак*

Научный редактор — канд. физ.-мат. наук, доц. *Е. М. Романовская*

Бурмашева, Наталья Владимировна.
Б91 Инженерная математика : учебное пособие / Н. В. Бурмашева, Е. Ю. Просвиряков, С. А. Берестова ; Министерство науки и высшего образования РФ. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2022. — 84 с.

ISBN 978-5-7996-3529-9

В учебном пособии в краткой форме изложены основные понятия векторной и матричной алгебр, основы дифференциального и интегрального исчисления. Приведено достаточное число примеров, раскрывающих суть вводимых понятий и описываемых методик. В издании предложены интерпретации операций с указанными приложениями из различных разделов механики.

Библиогр: 17 назв. Рис. 32

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-7996-3529-9

Оглавление

Предисловие

Уважаемые студенты, перед вами учебное пособие по инженерной математике. Изучение математики в университете начинается с первого курса. Постепенно вы систематизируете, обобщите и углубите знания, полученные в школе, а еще узнаете много нового материала, который сформирует у вас математический аппарат для решения инженерных и научных задач. По учебному плану инженерные дисциплины начинаются, как правило, со второго курса. Преподавателями, ведущими эти предметы, давно подмечено, что к моменту начала занятий студенты теряют навык решения задач по нужным разделам математики.

Действительно, существует проблема на первом курсе, когда на занятиях по различным разделам математики студенты не понимают, для чего им объясняются теоремы, методы решения уравнений и систем. Очевидно, что при отсутствии мотивации после успешной сдачи контрольных мероприятий студенты не уделяют должного внимания пройденному материалу, и он забывается. Таким образом, актуальной педагогической и методической задачей для преподавателей является подготовка учебных пособий, в которых рассматривается математический аппарат, необходимый для успешного усвоения учебного материала и сопровождаемый примерами из прикладных дисциплин (теоретической механики, сопротивления материалов, теории механизмов и машин, деталей машин и многих других).

Именно этим обстоятельством объясняется название пособия: «Инженерная математика». Инженерная математика — это относительно молодой раздел прикладной математики, разрабатывающий математические методы, приемы и алгоритмы, которые обычно используются в машиностроении и промышленности. В настоящем учебном пособии основное внимание уделено повторению и использованию математического аппарата векторной и матричной алгебры, интегрального и дифференциального счисления для решения различных задач механики. Пособие структурировано таким образом, что, помимо напоминания известных фактов, приводятся и разбираются примеры с демонстрацией материала для решения задач механики и физики.

Авторы пособия искренне надеются, что оно будет полезным при освоении новых учебных дисциплин. Желаем успеха!

Глава 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Определение вектора, классификация векторов

Поведение и состояние инженерных объектов описывается множеством различных параметров. Часть их них характеризуется только числом. Такие величины в научной литературе часто называются скалярными. Простейшими примерами скалярных параметров являются:

- масса,
- плотность,
- жесткость пружин,
- длина,
- площадь,
- объем,
- температура,
- сила тока,
- напряжение,
- сопротивление,
- концентрация примеси
- и многие другие важные характеристики.

Вспомните, что изучение математики и, как следствие, окружающего мира начинается с изучения чисел. Человек постепенно проходит путь знакомства с числовым миром. Путешествие начинается с рассмотрения натуральных чисел (подсчет предметов), затем переходят к целым числам (появление отрицательных чисел позволило учитывать долговые обязательства). Далее люди заметили, что очень часто нужно уметь оперировать с частями целых предметов, так появились рациональные числа (дроби). Со временем перестало хватать этого запаса чисел, и родились вещественные числа.

Развитие геометрии привело к тому, что математикам стало тесно в скалярном мире. Процессы и явления, которые характеризуются не только численным значением, но и некоторым направлением в пространстве (в частном случае — на плоскости), называются векторными. К их числу, очевидно, относятся такие физические характеристики, как:

- сила,
- скорость,
- ускорение,
- намагниченность,
- напряженность электрического поля.

Вектором называется совокупность направленных отрезков одинаковой длины [1]. Термин «вектор» начал устойчиво употребляться с 1845 г. в научных работах Уильяма Гамильтона. По иронии судьбы этот сугубо геометрический объект был рожден для построения новых числовых систем. Определение, данное выше, справедливо для классических (геометрических) векторов, к которым студенты привыкли со школы. Именно введение вектора позволяет описывать явление, где важно направление! Из жизненного опыта известно: падающий шарик, который можно считать материальной точкой, летит к земле, а подброшенный вверх — полетит к небу. Эти очевидные факты оказалось возможным формализовать и описывать единообразно только после введения векторов.

На рисунке 1 приведен пример вектора и даны его альтернативные обозначения: $\vec{a}$, $\overrightarrow{MN}$ (точка M — начало вектора, точка N — его конец). При этом если вектор обозначается одной буквой, то можно стрелку над ней не ставить, а саму букву выделять жирным шрифтом: $\vec{a} = \boldsymbol{a}$. Такое обозначение наиболее часто используется в литературе. Мы будем отдавать дань уважения школьной и университетской программе, применяя оба обозначения.

Для дальнейшего изложения материала введем (напомним) ряд определений [2; 3], без которых невозможно применять аппарат векторного исчисления.

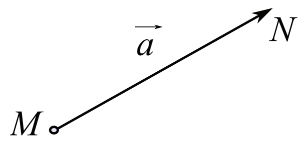


Рис. 1. Вектор

Модуль (длина) вектора — это расстояние между его началом и концом. Обозначается соответственно $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{MN}|$ или $|\boldsymbol{a}|$.

Нулевой вектор — вектор, у которого начало и конец совпадают. Обозначается $\vec{0}$ или **0.** Заметим, что нулевой вектор не имеет направления. Длина нулевого вектора равна 0.

Единичный вектор — вектор, длина которого равна единице. Пример единичного вектора — это орт координатной оси декартовой системы координат (рис. 2). Как будет показано далее, без ортов трудно дать скалярную характеристику векторам и вводить декартовые системы координат, необходимые для описания физических процессов и решения задач.

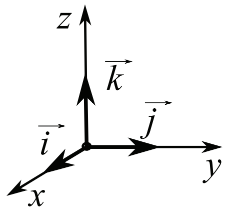


Рис. 2. Орты координатных осей

Если два вектора лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то они называются **коллинеарными** (рис. 3). Такие векторы обозначаются $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. Так как направление нулевого вектора не определено, то нулевой вектор считается по умолчанию коллинеарным любому вектору.

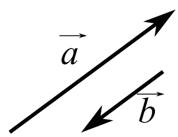


Рис. 3. Коллинеарные векторы

Два коллинеарных вектора, совпадающие по направлению, называются **сонаправленными**, обозначаются $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$.

Два коллинеарных вектора, направленные в разные стороны, называются **противонаправленными (антинаправленными, противоположно направленными)**, обозначаются $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$.

Два противонаправленных вектора, совпадающие по длине, называются **противоположными,** обозначаются $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$.

Компланарные векторы — векторы, лежащие в одной или параллельных плоскостях. Отметим, что любые два вектора будут компланарны. Но не любые три (и более) вектора обязательно будут являться таковыми. При этом нулевой вектор компланарен любой системе компланарных векторов.

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются **равными**, если они:

1) сонаправлены $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$,

2) их длины равны $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ (рис. 4). Обозначается: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

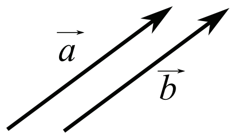


Рис. 4. Равные векторы

Заметим, что понятия равенства для скалярных и векторных величин различаются. Для равенства последних необходимо не только совпадение числовой характеристики (длины векторов), но и совпадение направлений. Последнее утверждение, в частности, означает, что равными будут не только полностью совпадающие векторы, т. е. имеющие общую начальную и общую конечную точки, но и те, которые можно совместить при помощи параллельного переноса.

Пример 1. Рассмотрим диск радиусом r, вращающийся с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр O диска (рис. 5).

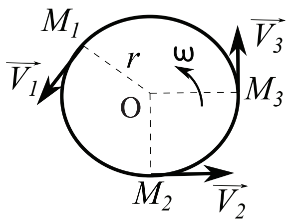


Рис. 5. Вращательное движение материальной точки

Сравним скорости точек M_1, M_2, M_3, лежащих на ободе диска. Векторы скорости $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ этих точек оказываются направлены в разные стороны (рис. 5), хотя величины этих скоростей совпадают и равны величине ωr. Последнее утверждение доказывается в теме «Вращательное движение твердого тела» курса теоретической механики. Таким образом, получаем, что $\vec{V}_1 \uparrow \vec{V}_2 \uparrow \vec{V}_3$.

Сначала может показаться, что векторы введены так строго, что их дальнейшая классификация невозможна. Однако это далеко не так. В зависимости от точки приложения (начала вектора) векторы делятся на свободные, скользящие и связанные.

Если точка приложения вектора может быть любой, то есть его можно переносить, то вектор называется **свободным** (рис. 6). Пример свободного вектора — ускорение свободного падения.

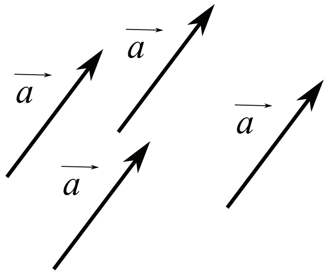


Рис. 6. Пример свободного вектора

Вектор называется **скользящим**, если его можно перемещать вдоль прямой, проходящей через начало и конец вектора (рис. 7). Примером скользящего вектора может служить вектор, изображающий угловую скорость твердого тела. Его положение в пространстве характеризуется положением оси вращения тела, вместе с тем он может быть расположен где угодно на этой оси.

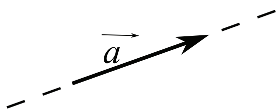


Рис. 7. Пример скользящего вектора

Векторы, для которых точка приложения имеет существенное значение, называются **связанными** (рис. 8). Примерами таких векторов выступают радиус-вектор точки или сила тяжести, действующая на тело.

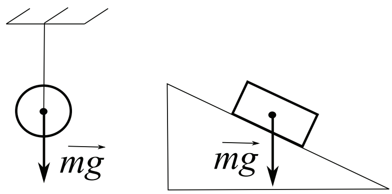


Рис. 8. Пример связанного вектора

Любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов образует **базис** в пространстве (рис. 9). Если $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — некоторый базис, то $(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1)$ — это другой базис, так как изменился порядок следования векторов.

Базис называется **прямоугольным декартовым**, если базисные векторы взаимно перпендикулярны (лежат на взаимно перпендикулярных прямых) и каждый из них является единичным вектором. Такой базис принято обозначать $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

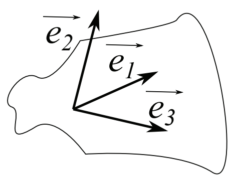


Рис. 9. Базис

Напомним, что прямоугольная декартовая система координат для трехмерного пространства проиллюстрирована на рис. 2.

1.2. Линейные операции над векторами

После введения нового математического объекта ему пытаются обоснованно приписать свойства, привычные при работе с числами. Далее мы введем и рассмотрим несколько операций над векторами. Знакомство начнем с рассмотрения так называемых линейных операций. Введение этих операций позволило построить изящный математический аппарат для решения задач механики и физики.

Линейными операциями над векторами называются операции сложения векторов и умножения вектора на число [4].

Сложение векторов. Существует несколько правил для сложения векторов: правило треугольника, правило параллелограмма и их обобщение — правило многоугольника. Вектор, который получается после одной или нескольких операций сложения, называется результирующим.

- Правило треугольника (рис. 10): начало вектора $\vec{b}$ совмещается с концом вектора $\vec{a}$. Тогда вектор $\vec{a}+\vec{b}$ направлен от начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$.

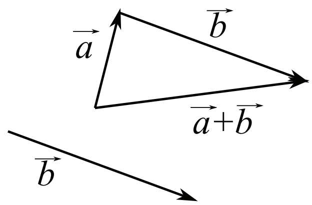


Рис. 10. Сложение векторов: правило треугольника

- Правило параллелограмма (рис. 11): начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совмещаются в одной точке, и вектор $\vec{a}+\vec{b}$ — это диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

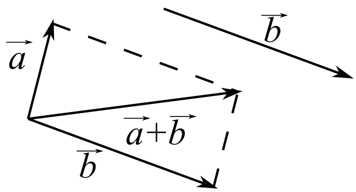


Рис. 11. Сложение векторов: правило параллелограмма

- Правило многоугольника (правило сложения нескольких векторов) (рис. 12). Вектор $\vec{a}_{n+1}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n$ замыкает ломаную линию, построенную следующим образом: конец предыдущего вектора совмещается с началом последующего, и вектор $\vec{a}_{n+1}$ направлен от начала $\vec{a}_1$ к концу $\vec{a}_n$.

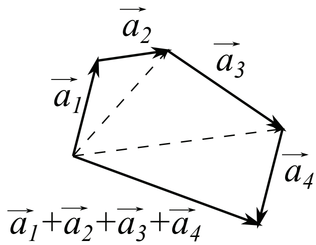


Рис. 12. Сложение векторов: правило многоугольника

Очевидно, что если на рис. 11 перенести вектор $\vec{b}$ параллельным образом с нижней стороны параллелограмма на его верхнюю (равную) сторону, то получим сложение двух векторов по правилу треугольника (см. рис. 10). Правило параллелограмма позволяет по теореме косинусов вычислить длину (модуль) результирующего вектора:

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha}.$$

Здесь α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если в правиле многоугольника (см. рис. 12) на каждом шаге (при добавлении каждого нового вектора) осуществлять замыкание ломаной (т. е. осуществлять сложение векторов), то будет получаться сложение пары векторов по правилу треугольника (см. рис. 10).

Заметим, что в силу, например, правила треугольника, сумма двух противоположных векторов равна нулевому вектору:

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}.$$

Умение находить сумму нескольких векторов оказывается полезным, например, при исследовании движения точки (или некоторого тела), находящейся под действием системы сил. В некоторых случаях указанную систему сил можно заменить действием одной силы (равнодействующей системы сил), эквивалентной этой системе.

Умножение вектора на число. **Произведением вектора** $\vec{a}$ **на** действительное **число** α ($\alpha \in R$) называется вектор $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, удовлетворяющий условиям:

а) $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$,

б) $\vec{b} \parallel \vec{a}$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $\alpha > 0$ и противонаправлены при $\alpha < 0$.

Вектор $m\vec{a}$, фигурирующий в записи второго закона Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ для материальной точки, как раз определяется произведением вектора ускорения $\vec{a}$ на действительное число m, в роли которого выступает масса точки.

Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ двух векторов называется сумма вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{b}$, противоположного вектору $\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

При этом начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совмещаются в одной точке, и вектор $\vec{a} - \vec{b}$ направлен от конца вектора $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$ (рис. 13).

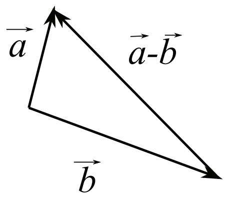


Рис. 13. Разность векторов

Пример 2. Даны векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (рис. 14). Построить вектор $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$.

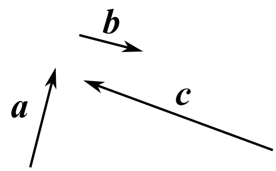


Рис. 14. Задание для самостоятельной работы

Решение. Для построения требуемой векторной суммы воспользуемся правилом многоугольника, согласно которому требуется откладывать каждый новый вектор от конца предыдущего (рис. 15).

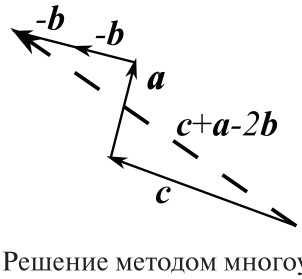


Рис. 15. Решение методом многоугольника

Задание 1. Даны векторы ***a***, ***b*** и ***c*** (см. рис. 14). Постройте векторы ***c*** + ***b***, 2***c*** – ***a*** + 3 ***b***, 3***c*** + ***a*** – 2***b***.

Свойства линейных операций:

1) коммутативный (переместительный) закон: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,
2) ассоциативный закон: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$,
3) дистрибутивный закон относительно скаляра: $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$,
4) дистрибутивный закон относительно вектора: $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$,
5) $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})=\beta(\alpha\vec{a})$.

Результат конечного числа линейных операций над векторами называется их **линейной комбинацией**:

$$\vec{b}=\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{a_k},$$

$\vec{b}$ — линейная комбинация векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n$ с коэффициентами $\alpha_i\in R\left(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\right)$.

Система векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n$ называется **линейно независимой**, если их линейная комбинация

$$\vec{b}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n$$

принимает нулевое значение только при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$. Иначе векторы $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n$ **линейно зависимы**.

Теорема 1. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. Тогда любой компланарный с ними вектор $\vec{c}$ может быть представлен в виде

$$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b},$$

где действительные коэффициенты x и y определяются единственным образом.

Такое представление называется **разложением вектора по двум неколлинеарным векторам**.

Теорема 2. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — некомпланарные векторы. Тогда любой вектор $\vec{d}$ может быть представлен в виде

$$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\quad\left(x,\ y,\ z\in R\right),$$

причем единственным образом.

Такое представление называется **разложением вектора по трем некомпланарным векторам**.

1.3. Проекция вектора на ось. Координаты вектора

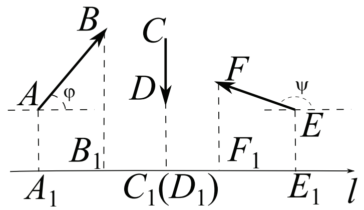
До этого пункта мы работали с вектором с точки зрения геометрии. Существует такой раздел математики как аналитическая геометрия, которая позволяет работать с геометрическими объектами при помощи чисел. Приступим к наделению векторов числовой структурой.

Осью называется направленная прямая. **Ортом оси** l называется единичный вектор $\vec{l}_0$, направление которого совпадает с направлением оси. Если известен некоторый вектор $\vec{a}$, сонаправленный с осью l, то орт $\vec{l}_0$ задается следующим равенством:

$$\vec{l}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Ортогональной проекцией точки M на ось l называется основание M_1 перпендикуляра, опущенного из M на l.

Ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется длина отрезка A_1B_1 этой оси, заключенного между ортогональными проекциями его начала и конца, взятая со знаком «+», если направление вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси, и со знаком «–», если эти направления противоположны (рис. 16).



$$\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|,\ \text{пр}_l\,\overrightarrow{CD} = 0,\ \text{пр}_l\,\overrightarrow{EF} = -\left|\overrightarrow{E_1F_1}\right|.$$

Рис. 16. Проекция вектора на ось

Углом между вектором и осью называется угол, на который нужно повернуть в положительном направлении ось до совпадения ее направления с направлением вектора (положительным считается поворот против часовой стрелки).

Например, на рис. 16

$$\varphi = (\overrightarrow{AB}, l), \quad (\overrightarrow{CD}, l) = \frac{3\pi}{2}, \quad \psi = (\overrightarrow{EF}, l).$$

Очевидно, проекцию вектора на ось можно найти по формуле

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi,$$

где $\varphi = (\overrightarrow{AB}, l)$.

Проекция линейной комбинации векторов равна такой же линейной комбинации их проекций:

$$\text{пр}_l \left(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right) = \alpha\text{пр}_l \vec{a} + \beta\text{пр}_l \vec{b}, \quad \alpha, \beta \in R.$$

В частном случае (если положить $\alpha = \beta = 1$) получим, что проекция суммы векторов равна сумме их проекций:

$$\text{пр}_l (\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b}.$$

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ с единичным базисом $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и выберем произвольную точку A. Тогда согласно Теореме 2 вектор $\overrightarrow{OA}$ единственным образом раскладывается по выбранному базису:

$$\overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

причем коэффициенты x, y, z есть проекции точки A на оси OX, OY, OZ (рис. 17). Коэффициенты x, y, z называются **координатами вектора** $\overrightarrow{OA}$.

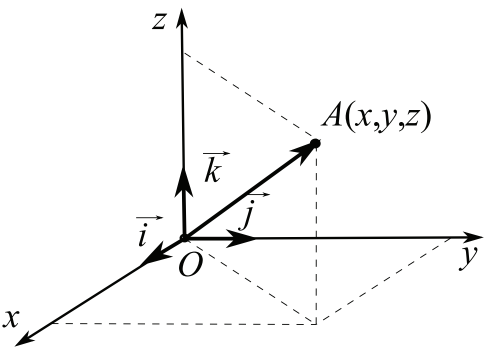


Рис. 17. Координаты вектора

Таким образом, можно дать еще одно определение вектора. **Вектором** называется упорядоченная тройка чисел (упорядоченная пара, если вектор плоский).

Пусть ненулевой вектор $\vec{a}$ задан в координатной форме $\vec{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$. Направление вектора в пространстве можно определить углами α, β, γ, которые вектор $\vec{a}$ образует с координатными осями (рис. 18). Эти углы и их косинусы называются направляющими. Они определяются исходя из следующих соотношений:

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad a_y = |\vec{a}|\cos\beta, \quad a_z = |\vec{a}|\cos\gamma.$$

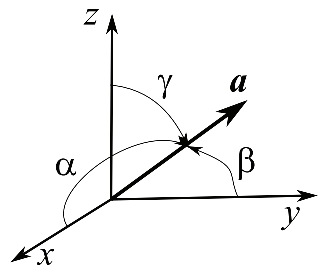


Рис. 18. Направляющие углы

Если задана система координат и в ней выбран некоторый базис, то и началу вектора (точке M), и его концу (точке N) соответствует своя тройка чисел, определяющая положение этих двух точек в пространстве относительно выбранной системы координат:

$$M(x_1,\ y_1,\ z_1) \text{ и } N(x_2,\ y_2,\ z_2).$$

Эти же координаты определяют векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$:

$$\overrightarrow{OM}(x_1,\ y_1,\ z_1), \quad \overrightarrow{ON}(x_2,\ y_2,\ z_2).$$

Следовательно, координаты вектора $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$ (в выбранном базисе) имеют вид:

$$\overrightarrow{MN}(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1).$$

Зная координаты двух векторов $\vec{a}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $\vec{b}(x_2,\ y_2,\ z_2)$, можно определить координаты суммы $\vec{a} + \vec{b}$, вектора $\alpha\vec{a}$ и линейной комбинации $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, а значит, и их длину:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2), \quad |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2};$$

$$\alpha\vec{a} = (\alpha x_1,\ \alpha y_1,\ \alpha z_1), \quad |\alpha\vec{a}| = \alpha\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2};$$

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\left(\alpha x_1+\beta x_2,\ \alpha y_1+\beta y_2,\ \alpha z_1+\beta z_2\right),$$

$$\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\alpha x_1+\beta x_2\right)^2+\left(\alpha y_1+\beta y_2\right)^2+\left(\alpha z_1+\beta z_2\right)^2}.$$

Пример 3 [5]. По данным точкам $A(2,\ 1,\ -1)$, $B(4,\ -3,\ 1)$, $C(2,\ 1,\ 0)$ найдите координаты вектора $\boldsymbol{c}$ = 3 $\boldsymbol{AB}$ — 2 $\boldsymbol{BC}$.

Решение. Зная координаты точек A, B и C, найдем координаты векторов $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{BC}$:

$$\boldsymbol{AB}=\left\{4-2,\ -3-1,\ 1-(-1)\right\}=\left\{2,\ -4,\ 2\right\},$$

$$\boldsymbol{BC}=\left\{2-4,\ 1-(-3),\ 0-1\right\}=\left\{-2,\ 4,\ -1\right\}.$$

Теперь найдем координаты вектора $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{BC}=3\cdot\left\{2,\ -4,\ 2\right\}-2\cdot\left\{-2,\ 4,\ -1\right\}=$$

$$=\left\{6,\ -12,\ 6\right\}-\left\{-4,\ 8,\ -2\right\}=\left\{6-(-4),\ -12-8,\ 6-(-2)\right\}=\left\{10,\ -20,\ 8\right\}.$$

Пример 4 [6]. Даны точки $A(-1,\ 5,\ -10)$, $B(5,\ -7,\ 8)$, $C(2,\ 2,\ -7)$, $D(5,\ -4,\ 2)$. Убедитесь, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ являются сонаправленными.

Решение. Вычислим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{AB}=\left\{5-(-1),\ -7-5,\ 8-(-10)\right\}=\left\{6,\ -12,\ 18\right\},$$

$$\overrightarrow{CD}=\left\{5-2,\ -4-2,\ 2-(-7)\right\}=\left\{3,\ -6,\ 9\right\}.$$

Заметим, что координаты векторов пропорциональны, коэффициент пропорциональности равен 2. Значит, справедливо равенство $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$. Так как коэффициент пропорциональности есть положительное число, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ являются сонаправленными.

Пример 5. Вычислите длину вектора $2\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}=(3,\ -4,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 0,\ 5)$.

Решение. Построим вектор $2\vec{a}=2\cdot(3,\ -4,\ 1)=(6,\ -8,\ 2)$. Далее определим координаты вектора $2\vec{a}-\vec{b}$:

$$2\vec{a}-\vec{b}=(6,\ -8,\ 2)-(-1,\ 0,\ 5)=\left(6-(-1),\ -8-0,\ 2-5\right)=(7,\ -8,\ -3).$$

Теперь вычислим длину этого вектора:

$$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{7^2+(-8)^2+(-3)^2}=\sqrt{49+64+9}=\sqrt{122}.$$

Пример 6 [7]. Найдите проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Oz, если известны координаты обеих точек: $A(3,\ 4,\ 1)$, $B(-1,\ -3,\ 5)$.

Решение. Определим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}=(-1-3,\ -3-4,\ 5-1)=(-4,\ -7,\ 4).$$

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Oz (на направление ее орта — вектора $\vec{k}$), является координата z данного вектора, поэтому

$$\text{пр}_{\vec{k}}\,\overrightarrow{AB}=4.$$

Пример 7. Найдите координаты точки B, если $\overrightarrow{CB}=(8,\ -2,\ 5)$ и $C(3,\ 2,\ -1)$.

Решение. Вектор $\overrightarrow{CB}$ — это вектор, начало которого совпадает с точкой C, а конец этого вектора — с точкой B. Значит, координаты этого вектора связаны с координатами этих двух точек соотношениями:

$$\overrightarrow{CB}=\left(x_B-x_C,\ y_B-y_C,\ z_B-z_C\right)=\left(x_B-3,\ y_B-2,\ z_B-(-1)\right)=(8,\ -2,\ 5).$$

Из последнего равенства легко определяем координаты точки B:

$$\begin{cases} x_B=8+3=11, \\ y_B=-2+2=0, \\ z_B=5+(-1)=4. \end{cases}$$

Задание 2. Даны точки $M_1=\{3,\ 4,\ 1\}$, $M_2=\{1,\ -2,\ 3\}$ и вектор $\vec{a}=\{1,\ 4,\ 8\}$. Найдите величину проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на вектор $\vec{a}$.

Задание 3. По данным точкам найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $2\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$, если:

- $A(1,\ 4,\ -3)$, $B(0,\ -2,\ 1)$, $C(2,\ 3,\ 0)$;
- $A(-1,\ -7,\ -1)$, $B(1,\ 0,\ -1)$, $C(-1,\ 2,\ -1)$;
- $A(0,\ -5,\ 2)$, $B(-4,\ -4,\ 6)$, $C(0,\ 6,\ 1)$;
- $A(2,\ -2,\ 4)$, $B(-4,\ -4,\ 6)$, $C(-6,\ 6,\ -1)$.

Задание 4. Определите, при каких значениях вещественных коэффициентов α и β векторы $\vec{a}=2\vec{i}+4\vec{j}+\beta\vec{k}$ и $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}$ будут коллинеарны.

Задание 5. Вычислите модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, если заданы координаты его начала и конца: $A(3,\ -1,\ -1)$, $B(-7,\ -11,\ 4)$.

Задание 6. Определите последнюю координату вектора $\vec{a} = (7,\ -4,\ z)$, если известна его длина: $|\vec{a}| = 9$.

Задание 7. Вычислите направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (5, -12, 0)$.

Задание 8. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 3\sqrt{2}$ и углы между вектором и осями координат $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 90^\circ$, а угол γ неизвестен.

Задание 9. Даны два вектора: $\vec{a} = (2,\ -3,\ 1)$ и $\vec{b} = (5,\ 1,\ -1)$. Определите проекции векторов $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ на координатные оси.

1.4. Скалярное произведение векторов

Определение суммы векторов и умножение скаляра на число существенно расширяет возможности для решения практических задач. Тем не менее возникает закономерный вопрос: нельзя ли ввести каким-то образом операцию умножения векторов. С одной из них — скалярным произведением — вы знакомы еще со школы. Переходим к изучению умножения векторов.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скаляр (число), равный $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, где $\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначается: $(\vec{a},\vec{b})$ или $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Таким образом, сначала введено школьное определение скалярного произведения:

$$(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Заметим, что ввиду равенств $|\vec{a}|\cos\varphi = \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, $|\vec{b}|\cos\varphi = \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$ (рис. 19), скалярное произведение можно представить в следующем виде:

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}.$$

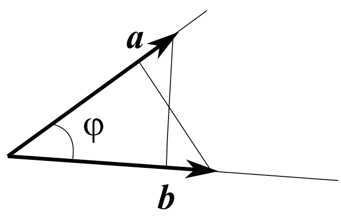


Рис. 19. Иллюстрация проектирования и скалярного произведения

Свойства скалярного произведения:

- $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$ — свойство коммутативности,
- $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$ — свойство ассоциативности,
- $\alpha(\vec{a},\vec{b})=(\alpha\vec{a},\vec{b}),\ \alpha\in R$,
- $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$ — длина вектора,
- $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b})=0$ — критерий ортогональности векторов.

Пусть в некотором ортогональном базисе $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ известны координаты двух векторов:

$$\vec{a}(x_1,y_1,z_1) \text{ и } \vec{b}(x_2,y_2,z_2).$$

Тогда, раскладывая по теореме 2, с. 16, эти векторы по выбранному базису

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\quad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$$

и проводя простейшие преобразования

$$(\vec{a},\vec{b})=\left((x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}),(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})\right)=(x_1\vec{i},x_2\vec{i})+(x_1\vec{i},y_2\vec{j})+(x_1\vec{i},z_2\vec{k})+$$

$$+(y_1\vec{j},x_2\vec{i})+(y_1\vec{j},y_2\vec{j})+(y_1\vec{j},z_2\vec{k})+(z_1\vec{k},x_2\vec{i})+(z_1\vec{k},y_2\vec{j})+(z_1\vec{k},z_2\vec{k})=$$

$$=x_1x_2\underbrace{(\vec{i},\vec{i})}_{=1}+x_1y_2\underbrace{(\vec{i},\vec{j})}_{=0}+x_1z_2\underbrace{(\vec{i},\vec{k})}_{=0}+y_1x_2\underbrace{(\vec{j},\vec{i})}_{=0}+y_1y_2\underbrace{(\vec{j},\vec{j})}_{=1}+y_1z_2\underbrace{(\vec{j},\vec{k})}_{=0}=$$

$$=z_1x_2\underbrace{(\vec{k},\vec{i})}_{=0}+z_1y_2\underbrace{(\vec{k},\vec{j})}_{=0}+z_1z_2\underbrace{(\vec{k},\vec{k})}_{=1},$$

в силу свойства скалярного произведения, получим:

$$(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Опираясь на определение скалярного произведения двух векторов, можно найти угол между ними:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\Rightarrow\varphi=\arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right).$$

Пример 8. Даны координаты точек $A(-5,\ 1,\ 6)$, $B(1,\ 4,\ 3)$ и $C(6,\ 3,\ 9)$. Найдите проекцию вектора $\vec{c}=\overrightarrow{BC}$ на вектор $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$.

Решение. Вычислим координаты векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$:

$$\vec{c}=\overrightarrow{BC}=(6-1,\ 3-4,\ 9-3)=(5,\ -1,\ 6),$$

$$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \left(1 - (-5),\ 4 - 1,\ 3 - 6\right) = (6,\ 3,\ -3).$$

Применяя приведенную выше формулу

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left|\vec{b}\right| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$$

к векторам $\vec{c}$ и $\vec{d}$, получим:

$$\text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = \frac{\left(\vec{c}, \vec{d}\right)}{\left|\vec{d}\right|}.$$

Подставим в это выражение координаты векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ и сделаем ряд простых вычислений:

$$\text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = \frac{\left(\vec{c}, \vec{d}\right)}{\left|\vec{d}\right|} = \frac{5 \cdot 6 + (-1) \cdot 3 + 6 \cdot (-3)}{\sqrt{6^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \frac{9}{\sqrt{54}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Задание 10. Найдите проекцию вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, если известны координаты точек $A(2,\ -3,\ 5)$, $B(-1,\ -1,\ 6)$, $C(0,\ 2,\ 1)$.

Скалярное произведение векторов необходимо для вычисления элементарной работы $A\left(\vec{F}\right)$, совершаемой силой $\vec{F}$ на некотором малом перемещении $d\vec{r}$ (рис. 20):

$$A\left(\vec{F}\right) = \left(\vec{F},\ d\vec{r}\right).$$

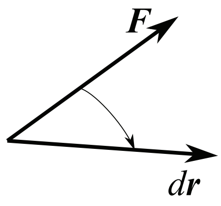


Рис. 20. Работа силы

Задание 11. Вычислите, какую работу производит сила $\vec{F} = (-2,\ 3,\ 5)$, если ее точка приложения движется прямолинейно, перемещаясь из положения $A(2,\ -1,\ 4)$ в положение $B(4,\ -2,\ -3)$.

Пример 9. Найдите значение параметра t, при котором векторы $\vec{a} = (-4,\ 2,\ t)$ и $\vec{b} = (-1,\ 1,\ 2)$ ортогональны.

Решение. Векторы будут ортогональны, если выполняется равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Вычислим это скалярное произведение по заданным координатам векторов:

$$(\vec{a},\vec{b})=(-4)\cdot(-1)+2\cdot1+t\cdot2=6+2t.$$

Это выражение обращается в нуль только при $t=-3$.

Пример 10. Даны три силы $\vec{F}_1=(2,\ -2,\ 3)$, $\vec{F}_2=(0,\ 3,\ -1)$, $\vec{F}_3=(-4,\ 5,\ 3)$, приложенные к одной точке. Вычислите, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда точка ее приложения движется прямолинейно из положения $A(0,\ 1,\ -1)$ в положение $B(4,\ 5,\ 3)$.

Решение. Величина работы равнодействующей силы $\vec{F}$ на некотором перемещении $\vec{l}$ находится с помощью скалярного произведения:

$$A(\vec{F})=(\vec{F},\vec{l}).$$

Определим величину этого перемещения:

$$\vec{l}=\overrightarrow{AB}=(4-0,\ 5-1,\ 3-(-1))=(4,\ 4,\ 4)$$

и величину равнодействующей трех данных сил:

$$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=(2+0+(-4),\ -2+3+5,\ 3+(-1)+3)=(-2,\ 6,\ 5).$$

В итоге имеем:

$$A(\vec{F})=(\vec{F},\vec{l})=4\cdot(-2)+4\cdot6+4\cdot5=36.$$

Пример 11. Даны координаты вершин треугольника $A(2,\ 5,\ 3)$, $B(-3,\ 0,\ -1)$, $C(-4,\ 3,\ -1)$. Определите внутренний угол треугольника при вершине C.

Решение. Искомый угол находится между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, выходящими из вершины C. Найдем координаты этих двух векторов:

$$\overrightarrow{CA}=(2-(-4),\ 5-3,\ 3-(-1))=(6,\ 2,\ 4),$$

$$\overrightarrow{CB}=(-3-(-4),\ 0-3,\ -1-(-1))=(1,\ -3,\ 0).$$

Угол между данными векторами находится с помощью определения скалярного произведения:

$$\cos C=\frac{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|}.$$

В результате подстановки имеющихся данных получаем

$$\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=6\cdot 1+2\cdot(-3)+4\cdot 0=0,$$

откуда непосредственно следует, что $\cos C=0$, т. е. угол при вершине C — прямой.

Задание 12. Даны векторы $\vec{a}=(1,\ -4,\ 2)$ и $\vec{b}=(-1,\ 0,\ 5)$. Найдите следующие величины:

- $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$,
- $\vec{b}^2$,
- $\left(2\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Задание 13. Вычислите работу силы $\vec{F}=(-2,\ 3,\ 1)$, когда ее точка приложения перемещается из начала координат в конец вектора $\vec{l}=(4,\ 7,\ 9)$.

Задание 14. Даны вершины четырехугольника $A(1,\ -2,\ 2)$, $B(1,\ 4,\ 0)$, $C(-4,\ 1,\ 1)$, $D(-5,\ -5,\ 3)$. Докажите, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

Задание 15. Определите, при каком значении λ векторы $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=\lambda\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

1.5. Векторное произведение векторов

При умножении двух векторов ранее получалось число (скаляр). Оказывается, можно построить умножение векторов так, что в результате такой операции получится вектор. Переходим к знакомству (повторению) векторного произведения.

Тройка некомпланарных векторов $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$, имеющих общее начало, **называется правой (левой)**, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ вращение первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ по кратчайшему пути наблюдается против часовой стрелки (или по ней), рис. 21.

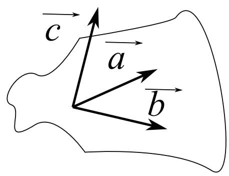


Рис. 21. Тройка некомпланарных векторов:
$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ — левая тройка; $(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$ — правая тройка; $(\vec{c},\vec{a},\vec{b})$ — левая тройка

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

- вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
- тройка $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ — правая,
- $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, где $\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Векторное произведение обозначается так: $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a},\vec{b}]$. При этом его длина может быть определена по эквивалентной (определению) формуле:

$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a},\vec{b})^2}$.

Свойства векторного произведения:

- $\vec{a}\times\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\,||\,\vec{b}$ — критерий коллинеарности векторов,
- $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$ — свойство антикоммутативности,
- $(\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \alpha(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(\alpha\vec{b})$ — свойство ассоциативности,
- $(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\times\vec{c} = \alpha(\vec{a}\times\vec{c}) + \beta(\vec{b}\times\vec{c})$ — свойство дистрибутивности,

Пусть в некотором ортогональном базисе известны координаты двух векторов:

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1) \text{ и } \vec{b}(x_2, y_2, z_2),$$

тогда координаты векторного произведения этих векторов находятся из символического определителя

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(y_1z_2 - y_2z_1) - \boldsymbol{j}(x_1z_2 - x_2z_1) + \boldsymbol{k}(x_1y_2 - x_2y_1) =$$

$$= \boldsymbol{i}(y_1z_2 - y_2z_1) + \boldsymbol{j}(x_2z_1 - x_1z_2) + \boldsymbol{k}(x_1y_2 - x_2y_1),$$

подробные правила вычисления которого рассмотрены в главе 2.

Геометрический смысл векторного произведения: модуль векторного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ как на сторонах (рис. 22):

$$S_{\square} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|.$$

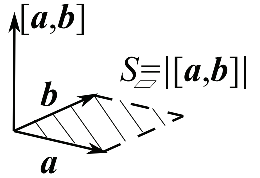


Рис. 22. Геометрический смысл векторного произведения

Напомним, что векторное произведение используется, например, при вычислении ускорения Кориолиса в сложном движении твердого тела:

$$\overrightarrow{a_c} = 2\overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{V_r},$$

где $\overrightarrow{\omega_e}$ — угловая скорость переносного движения, а $\overrightarrow{V_r}$ — линейная скорость относительного движения.

Векторное произведение составляет основу и формулы для расчета скоростей точек твердого тела при его движении (формулы Эйлера):

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

где $\vec{v}_o$ — скорость полюса, $\vec{\omega}$ — угловая скорость точек тела при вращении вокруг выбранного полюса, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки твердого тела относительно полюса.

Также эта операция используется в статике: при определении условий равновесия тела под действием пространственной системы сил необходимо определить главный момент относительно произвольного центра. Напомним некоторые сведения о моменте вектора относительно точки и системе скользящих векторов [8]. Моментом $\boldsymbol{r}_O{}^0$ вектора $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{AB}$, где A — заданное начало, B — конец вектора относительно какой-нибудь точки O называется вектор, равный векторному произведению радиуса-вектора $\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OA}$ на заданный вектор, т. е.

$$\boldsymbol{r}_O{}^0 = \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{r}.$$

Пример 12. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$, вычислите:

$$\left|\left(3\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - 3\vec{b}\right)\right|.$$

Решение. Упростим выражение, определяющее длину вектора, заданную в постановке задачи, с помощью указанных выше свойств векторного произведения:

$$\left(3\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - 3\vec{b}\right) = 3\vec{a} \times \vec{a} - 9\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - 3\vec{b} \times \vec{b}.$$

Заметим, что первое и последнее слагаемые в этой сумме равны нулю. В результате остается сумма:

$$\left(3\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - 3\vec{b}\right) = -9\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a}.$$

При этом векторные произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{b} \times \vec{a}$ связаны между собой:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Значит, окончательно получаем:

$$\left(3\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - 3\vec{b}\right) = -10\vec{a} \times \vec{b}.$$

Длина указанного векторного произведения находится через длины входящих в него векторов:

$$\left|\left(3\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - 3\vec{b}\right)\right| = \left|-10\vec{a} \times \vec{b}\right| = 10 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi = 10 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = 10\sqrt{3}.$$

Пример 13. Даны $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 12$. Вычислите $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Решение. Используя формулы

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \text{ и } \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, найдем $0 \le \varphi \le \pi$:

$$\cos\varphi = \frac{12}{2 \cdot 10} = \frac{3}{5}, \quad \sin\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Тогда по определению векторного произведения имеем:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi = 10 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} = 16.$$

Пример 14. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$, вычислите:

$$\left|(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})\right|.$$

Решение. Используя свойства векторного произведения, преобразуем выражение, определяющее вид вектора, длину которого необходимо найти:

$$(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b}) = 2\vec{a}\times\vec{a}+4\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}+2\vec{b}\times\vec{b} = 4\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a} =$$

$$= 4\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{b} = 3\vec{a}\times\vec{b}.$$

Посчитаем длину получившегося вектора:

$$|3\vec{a}\times\vec{b}| = 3\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi = 3\cdot 1\cdot 2\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Пример 15. Даны точки $A(2,\ -1,\ 2)$, $B(1,\ 2,\ -1)$, $C(3,\ 2,\ 1)$. Найдите координаты вектора, определяемого векторным произведением:

$$(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA})\times\overrightarrow{CB}.$$

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$:

$$\overrightarrow{BC} = (2,\ 0,\ 2),$$

$$\overrightarrow{CA} = (-1,\ -3,\ 1),$$

$$\overrightarrow{CB} = (-2,\ 0,\ -2).$$

На основе этих данных вычислим координаты вектора $(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA})$:

$$\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA} = (4,\ 6,\ 0).$$

Теперь посчитаем координаты искомого вектора:

$$(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA})\times\overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -12\vec{i}+8\vec{j}+12\vec{k}.$$

Таким образом, получаем $(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA})\times\overrightarrow{CB} = (-12,\ 8,\ 12)$.

Задание 16. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, вычислите:

$$\left|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - 4\vec{b})\right|.$$

Задание 17. Даны векторы $\vec{a} = (2,\ 5,\ 7)$ и $\vec{b} = (1,\ 2,\ 4)$. Найдите координаты векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$.

Задание 18. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Определите и постройте вектор $\vec{a} \times \vec{b}$. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Задание 19. Сила $\overrightarrow{F} = (2,\ -4,\ 5)$ приложена к точке $M(4,\ -2,\ 3)$. Определите момент силы $\overrightarrow{F}$ относительно точки $A(3,\ 2,\ -1)$.

1.6. Умножение трех векторов

После изучения двух способов умножения векторов становится понятным желание распространить эту операцию на большее число векторов. Ограничимся различными способами умножения для трех векторов.

Для умножения трех векторов обычно рассматривают два наиболее распространенных способа: смешанное произведение и двойное векторное произведение. Результат смешанного произведения — число, результат двойного векторного — вектор.

Смешанным произведением трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется число, составленное следующим образом: $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$. Обозначается: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

Геометрический смысл смешанного произведения: модуль смешанного произведения трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ численно равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на сторонах (рис. 23):

$$V_{\text{пар-да}} = \left|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\right|.$$

И, как следствие, объем пирамиды, построенной на тех же векторах, равен:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар-да}} = \frac{1}{6}\left|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\right|.$$

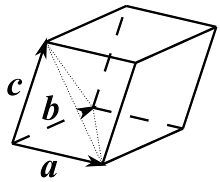


Рис. 23. Геометрическая интерпретация смешанного произведения

Свойства смешанного произведения:

- $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$,
- $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$ — циклические перестановки,
- $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$ — два вектора меняются местами,
- $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$, если векторы компланарны. Верно и обратное утверждение.

Знак смешанного произведения векторов связан с их ориентацией:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})>0 \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \text{ — правая тройка,}$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})<0 \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \text{ — левая тройка.}$$

Двойное векторное произведение трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — это вектор, получаемый следующим образом:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} \text{ или } \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$

Двойное векторное произведение может быть записано в виде формул

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}), \qquad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

и раскрывается по правилу: средний вектор на скалярное произведение оставшихся минус крайний вектор в скобке на скалярное произведение оставшихся. В русскоязычной научной и учебной литературе это правило называют сокращенно: «бац минус цаб».

Вопросы для самоконтроля к главе 1

1. Какие физические объекты описываются векторами? Сформулируйте определение вектора.
2. Приведите классификацию векторов, проиллюстрируйте ее соответствующими примерами.

3. Какие векторы называют линейно зависимыми и линейно независимыми?
4. Дайте определение скалярного произведения и сформулируйте основные свойства скалярного произведения.
5. Дайте определение векторного произведения и сформулируйте основные свойства векторного произведения.
6. Дайте определение смешанного произведения и сформулируйте основные свойства смешанного произведения.
7. Дайте определение двойного векторного произведения и сформулируйте основные свойства двойного векторного произведения (тождество «бац минус цаб»).

Список библиографических ссылок к главе 1

1. Рябушко А. П., Жур Т. А. Высшая математика. Теория и задачи. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Минск : Вышэйшая школа, 2017. 303 с.
2. Борисенко А. И., Тарапов И. Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М. : Высшая школа, 1963. 252 с.
3. Литова Г. Г., Ханукаева Д. Ю. Основы векторной алгебры. Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов. М. : РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина, 2009. 90 с.
4. Лаптев Г. Ф. Элементы векторного исчисления. М. : Наука, 1975. 336 с.
5. Катунцева Н. Л. Практикум по математике. Векторная алгебра. Комсомольск-на-Амуре : КнАГТУ, 2015. 80 с.
6. Горская Т. Ю. Задачник по темам «Векторная алгебра. Аналитическая геометрия» для студентов очной формы обучения направления 08.03.01 «Строительство» (бакалавриат). Казань : Изд-во Казанск. гос. арх.-строит. ун-та, 2017. 34 с.
7. Векторная алгебра : практикум по высшей математике / сост. Е. В. Башкинова, О. С. Афанасьева. Самара : Самар. гос. техн. ун-т, 2008. 37 с.
8. Диментберг Ф. М. Винтовое исчисление и его приложения в механике. М. : Наука, 1965. 200 с.

Глава 2. МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Понятие матрицы

В главе 1 показано, что понятие векторов расширяет представление о числах и что вектор характеризуется несколькими числами. Оказывается, существуют более общие системы чисел, которые в обиходе мы называем таблицами, или массивами. В математике за такими структурами закрепилось другое название. **Матрица** — это прямоугольная таблица, образованная из элементов некоторого множества и состоящая из m строк и n столбцов [1–3]. Для матриц используется несколько альтернативных обозначений:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ или } \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Здесь a_{ij} — элемент матрицы, стоящий на пересечении строки под номером i и столбца под номером j, где $i = \overline{1, \mathrm{m}}$, $j = \overline{1, n}$, т. е. $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Наряду с приведенными используют также и другие (сокращенные) обозначения:

$$(a_{ij}), \quad [a_{ij}], \quad \|a_{ij}\|.$$

Матрицы обозначают прописными латинскими буквами A, B, C, ..., иногда добавляя их размерность, например $A_{m \times n}$.

Пример 16. Матрица

$$A_{2\times 4}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 0\\ 3 & 4 & 7 & 2\end{pmatrix}$$

есть матрица размера 2×4, т. к. она содержит 2 строки и 4 столбца.

Матрицы A и B размера $n\times m$ называются **равными**, если они совпадают поэлементно, т. е. $a_{ij}=b_{ij}$ для любых $i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$. Иными словами, у равных матриц совпадает количество строк и столбцов, а также элементы на пересечении строки под номером i и столбца под номером j.

Пример 17. Матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & -10 & 100\\ e & \pi & \sqrt{2}\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}4-2 & 10-20 & 10^2\\ e & \pi & 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}$$

размера 2×3 (две строки и три столбца) совпадают. В этом легко убедиться, совершив элементарные вычисления в матрице B.

Пример 18. Матрицы одинакового размера

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ и } D=\begin{pmatrix}(-1)^{-2021} & 0\\ 0 & (-1)^{-2022}\end{pmatrix}$$

являются различными, поскольку отличаются одним элементом.

Если один из размеров матрицы $m\times n$ равен единице ($m=1$ или $n=1$), то получившаяся матрица называется, соответственно, **вектор-строкой** или **вектор-столбцом**:

$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ \dots\\ b_{m1}\end{pmatrix}$
(вектор-строка) Число n элементов вектор-строки называется длиной.	(вектор-столбец) Число m элементов вектор-столбца называется высотой.

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом. Например, $(4)_{1\times 1}$ есть число 4.

Если горизонтальная и вертикальная размерности матрицы совпадают ($m = n$), то матрица называется **квадратной**. Размерность n квадратной матрицы $n \times n$ называется ее **порядком**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(квадратная матрица n-го (произносится — «энного») порядка)

В общем же случае (когда $m \neq n$) матрица называется **прямоугольной**.

Пример 19. Матрица $A_{3\times1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ является прямоугольной матрицей-столбцом размера 3×1, а матрица $B_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ — квадратная матрица размера 3×3.

Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, содержащая элементы с одинаковыми индексами, т. е. диагональ $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$, соединяющая левый верхний и правый нижний углы матрицы.

Пример 20. У квадратных матриц второго порядка

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } D = \begin{pmatrix} (-1)^{-2021} & 0 \\ 0 & (-1)^{-2022} \end{pmatrix}$$

диагональные элементы, соответственно, равны:

$$c_{11} = c_{22} = 1 \text{ и } d_{11} = -1,\ d_{22} = 1.$$

Побочной диагональю матрицы называются элементы диагонали $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \dots, a_{n1}$, соединяющей правый верхний и левый нижний углы матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \boxed{\boxed{a_{14}}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{\boxed{a_{23}}} & a_{24} \\ a_{31} & \boxed{\boxed{a_{32}}} & \boxed{a_{33}} & a_{34} \\ \boxed{\boxed{a_{41}}} & a_{42} & a_{43} & \boxed{a_{44}} \end{pmatrix},$$

Здесь элементы, заключенные в квадрат, лежат на главной диагонали, а элементы, отмеченные двойным квадратным контуром, — на побочной.

Пример 21. У квадратных матриц второго порядка

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } D=\begin{pmatrix} (-1)^{-2021} & 0 \\ 0 & (-1)^{-2022} \end{pmatrix}$$

оба побочных диагональных элемента раны нулю.

2.2. Виды матриц

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется **единичной**. Обозначается буквой E, или I:

$$E=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ столбцов}}$$

(единичная матрица n-го порядка)

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**. Обозначается буквой O:

$$O = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{n\ \text{столбцов}}.$$

В качестве примера укажем квадратную нулевую матрицу 2-го порядка:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, называется **треугольной**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(**верхнетреугольная** матрица n-го порядка)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(**нижнетреугольная** матрица n-го порядка)

2.3. Операции над матрицами

2.3.1. Линейные операции над матрицами

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковой размерности (число строк матриц и число столбцов матриц совпадают) называется такая матрица $C = (c_{ij})$, что каждый ее элемент есть сумма соответствующих элементов матриц A и B, т.е.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = \overline{1,\mathrm{m}},\ j = \overline{1,n}).$$

Свойства матричного сложения:

- $A + B = B + A$ — коммутативность,

- $(A+B)+C=A+(B+C)$ — ассоциативность,
- $A+O=A$.

Разностью двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинаковой размерности называется такая матрица $C=(c_{ij})$, что каждый ее элемент есть разность соответствующих элементов матриц A и B, т. е.

$$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij} \quad (i=\overline{1,\mathrm{m}},\ j=\overline{1,n}).$$

Отметим, что операции сложения и вычитания, введенные для двух матриц, могут быть распространены и на большее число матриц.

Пример 22. Пусть даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 8\\ 4 & -4 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}7 & 2 & -3\\ -4 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A+B=\begin{pmatrix}2+7 & 0+2 & 8+(-3)\\ 4+(-4) & -4+3 & 1+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 2 & 5\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix},$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2-7 & 0-2 & 8-(-3)\\ 4-(-4) & -4-3 & 1-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -2 & 11\\ 8 & -7 & -4\end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ **на вещественное число** λ называется матрица $B=(b_{ij})$, такая, что

$$b_{ij}=\lambda a_{ij} \quad (i=\overline{1,\mathrm{m}},\ j=\overline{1,n}).$$

Свойства умножения матрицы на число:

- $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$ — сочетательное свойство относительно числового сомножителя,
- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ — дистрибутивность относительно суммы матриц,
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ — дистрибутивность относительно суммы чисел,
- $0\cdot A=O$,
- $1\cdot A=A$.

Матрица $-A=(-1)A$ называется **противоположной** матрице A. Отметим, что разность матриц A и B можно рассматривать как сумму матрицы A и матрицы, противоположной матрице B, т. е.

$$A-B=A+(-B).$$

Пример 23. Произведением матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

на число $\alpha = 4$ будет матрица

$$B = 4A = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 & 4\cdot 3 & 4\cdot(-2) \\ 4\cdot 0 & 4\cdot\sqrt{2} & 4\cdot 4 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 1 & 4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -8 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 16 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.3.2. Нелинейные операции над матрицами

Матрица *A* называется **согласованной** с матрицей *B*, если число столбцов матрицы *A* совпадает с числом строк матрицы *B*.

Пример 24. Из трех матриц

$$A_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

согласованными являются: *A* с *C*, *B* с *A*, *C* с *B* и *C* с *A*. Матрица *A* не согласована с *B*, а матрица *B* не согласована с матрицей *C*.

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ **на матрицу** $B_{n\times k} = (b_{jl})$ называется матрица $C_{m\times k} = (c_{il})$, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы *A* на соответствующие элементы l-го столбца матрицы *B*, т. е.

$$c_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} \qquad (i = \overline{1,m},\ l = \overline{1,k}).$$

Получение элемента c_{il} схематически изображается так:

$$\begin{array}{c} i \\ \end{array}\!\begin{pmatrix} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \\ l \end{array} = \begin{array}{c} i \\ \end{array}\!\begin{array}{c} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \otimes & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \\ l \end{array}.$$

Пример 25. Рассмотрим подробно вычисление произведения AC матриц

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

по правилу «строка на столбец». Поскольку число столбцов матрицы A совпадает с количеством строк матрицы C, получим квадратную матрицу второго порядка:

$$AC = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7\cdot 5 + 8\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) + 4\cdot 3 & 7\cdot 4 + 8\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 4\cdot 1 \\ 5\cdot 5 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 3 & 5\cdot 4 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 38 \\ 28 & 20 \end{pmatrix}.$$

Свойства матричного умножения:

- $A \cdot B \neq B \cdot A$ — некоммутативность.

Если в некотором частном случае $A \cdot B = B \cdot A$, то такие матрицы называются коммутативными (или перестановочными).

Пример 26. Рассмотрим теперь умножение матриц CA, определенных выше. В этом случае в результате умножения будет получена квадратная матрица четвертого порядка:

$$CA = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & 36 & -5 & 24 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -10 & 1 & -2 \\ 26 & 23 & -3 & 13 \end{pmatrix} \neq AC.$$

Последний пример иллюстрирует тот факт, что при умножении матрицы нельзя переставлять. При перемене порядка множителей могут получаться матрицы разного порядка.

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ — ассоциативность.

Пример 27. Рассмотрим три матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Вычислим произведения, стоящие в обеих частях проверяемого равенства:

$$[A\cdot B]\cdot C=\left[\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot(-28)+3\cdot 38 & 4\cdot 93+3\cdot(-126)\\ 7\cdot(-28)+5\cdot 38 & 7\cdot 93+5\cdot(-126)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -6\\ -6 & 21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 7+(-6)\cdot 2 & 2\cdot 3+(-6)\cdot 1\\ (-6)\cdot 7+21\cdot 2 & (-6)\cdot 3+21\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix},$$

$$A\cdot[B\cdot C]=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}(-28)\cdot 7+93\cdot 2 & (-28)\cdot 3+93\cdot 1\\ 38\cdot 7+(-126)\cdot 2 & 38\cdot 3+(-126)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-10 & 9\\ 14 & -12\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot(-10)+3\cdot 14 & 4\cdot 9+3\cdot(-12)\\ 7\cdot(-10)+5\cdot 14 & 7\cdot 9+5\cdot(-12)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

- $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C.$
- $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C,$

Пример 28. Рассмотрим три матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Выполним операции в левой и правой частях проверяемого равенства:

$$A\cdot[B+C]=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 6\\ 7 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 6+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 10\\ 3\cdot 6+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & 26\\ 46 & 58\end{pmatrix},$$

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 26 \\ 46 & 58 \end{pmatrix}.$$

- $(\lambda A) \cdot B = \lambda (A \cdot B)$,
- $A \cdot O = O \cdot A = O$, где A и O — квадратные матрицы одного порядка,
- $A \cdot E = E \cdot A = A$, где A и E — квадратные матрицы одного порядка.

Пусть n — некоторое натуральное число. Тогда n-й **степенью матрицы** A называется матрица A^n, равная:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}.$$

Введем также нулевую степень квадратной матрицы, полагая $A^0 = E$, где E — единичная матрица того же порядка.

Матрица, полученная из данной матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с соответствующим номером, называется **транспонированной** к A и обозначается A^{T}. Операция нахождения транспонированной матрицы называется транспонированием матрицы.

Пример 29. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ построим транспонированную матрицу. Получим:

$$B = A^T = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойства транспонирования матриц:

- $\left(A^T\right)^T = A$,
- $(A + B)^T = A^T + B^T$,
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$,
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Квадратная матрица A называется **симметричной (симметрической)**, если она не изменяется в результате транспонирования, т. е. $A^{\mathrm{T}} = A$. Несложно убедиться, что любая диагональная матрица будет симметричной.

Пример 30. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 6 & 3 & -9 \\ 5 & 3 & 8 & 7 \\ -4 & -9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

является симметричной, поскольку в результате транспонирования не меняется:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 6 & 3 & -9 \\ 5 & 3 & 8 & 7 \\ -4 & -9 & 7 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

Квадратная матрица A называется **кососимметричной (кососимметрической)**, если совпадает со своей транспонированной, умноженной на число (-1), т. е. $A^{\mathrm{T}} = -A$.

Пример 31. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & -9 \\ -5 & -3 & 0 & 7 \\ 4 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

является кососимметричной, ее транспонированная матрица противоположна исходной матрице:

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 9 \\ 5 & 3 & 0 & -7 \\ -4 & -9 & 7 & 0 \end{pmatrix} = -A.$$

2.4. Определитель матрицы

Для квадратной матрицы A порядка n введем числовую характеристику, называемую **определителем** (или **детерминантом**). Обозначение: $det\,A$, или $|A|$, или Δ.

1. Если $n = 1$, то $A = (a_{11})$, $\det A = |a_{11}| = a_{11}$.
2. Если $n = 2$, то $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
3. Если $n = 3$, то $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Пример 32. Найдите определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Указанная квадратная матрица является квадратной матрицей третьего порядка, поэтому для вычисления ее определителя воспользуемся последней формулой:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 4 + 0\cdot 1\cdot 2 - 4\cdot(-2)\cdot 2 - 0\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 =$$

$$= -4 + 12 + 0 + 16 - 0 - 1 = 23.$$

Свойства определителей:

- при транспонировании матрицы ее определитель не изменяется,
- при перестановке двух строк (двух столбцов) определитель меняет знак,

- определитель, имеющий две одинаковые строки (два одинаковых столбца), равен нулю,
- при умножении любой строки (любого столбца) определителя на любое число определитель умножается на это число,
- если определитель имеет нулевую строку (нулевой столбец), то равен нулю,
- если элементы какой-либо строки (столбца) определителя представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей,
- если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на некоторое число, то определитель не изменится. Аналогичное свойство справедливо и для столбцов.

Минором элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Обозначение: M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $(i+j)$ — четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначение: A_{ij}.

$A_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot M_{ij}$.

Пример 33. Для элемента a_{23} определителя $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ найдем минор и алгебраическое дополнение:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 3 - 1 \cdot 3) = -3.$$

- Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения, т. е., например, разложение определителя по i-й строке имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

- Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.
- Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

- Определитель матрицы треугольного вида равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали этой матрицы.
- Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. Следствие: определитель единичной матрицы равен единице.

Квадратная матрица A называется **невырожденной (неособенной)**, если определитель матрицы A не равен нулю, т. е. $\det A \neq 0$.

Если матрица A невырожденная, то существует и притом единственная матрица A^{-1}, такая, что

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Матрица A^{-1} называется **обратной** матрицей. Введение обратной матрицы позволяет построить операцию, обратную умножению, т. е. аналог деления матриц. В классических курсах математики обратные матрицы строятся только в классе квадратных невырожденных матриц.

Свойства обратной матрицы:

- $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$,
- $\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$,
- $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$,
- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

2.5. Ранг матрицы

Для решения многих практических задач требуется использовать не только линейные и нелинейные операции, но и уметь анализировать связь между строками и столбцами. Рассмотрим далее новое понятие. Пусть имеется матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов ($k < \min(m, n)$). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется минором k-го порядка матрицы A.

Ранг матрицы — максимальный порядок отличных от нуля миноров матрицы A. Обозначение: r, или $r(A)$, или $\operatorname{rang} A$.

Любой минор порядка r (r — ранг матрицы), отличный от нуля, называется **базисным минором**. Существование такого минора гарантирует существование r линейно независимых строк или столбцов. В силу определения операции транспонирования можно считать, что строки и столбцы равноправны.

Свойства ранга:

- при транспонировании матрицы ее ранг не изменяется,
- если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится,
- при элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не изменяется.

Матрицы A и B называются **эквивалентными**, если $r(A) = r(B)$. Обозначается: $A \sim B$.

2.6. Преобразование систем координат (поворот)

Описание движения тел, распространение температуры в телах часто бывает удобно приводить в других системах координат. Простейшим преобразованием, позволяющим упростить геометрические особенности, является преобразование поворота. Для простоты рассмотрим двумерную систему координат (рис. 24):

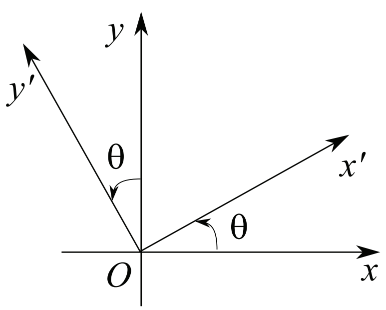


Рис. 24. Поворот системы координат

Используя операцию проецирования на ось, легко можно получить следующие соотношения:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Здесь координаты со штрихом обозначают координаты точки в «новой» системе координат, а без штриха — «старой» системы координат.

2.7. Системы линейных уравнений

При решении разнообразных задач их формализация часто сводится к системе, состоящей из нескольких уравнений. В подавляющем большинстве случаев уравнения, формирующие эту систему, являются линейными. Решение систем линейных уравнений, в которых содержатся два уравнения, отрабатывается в школе. Сейчас мы разберем алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений произвольного порядка.

Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Наша задача — определить значения неизвестных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$. При этом должны одновременно выполняться все m уравнений системы одновременно. Это эквивалентно выполнению одного векторно-матричного равенства. Чтобы получить это равенство, введем в рассмотрение два вектора-столбца:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

В этом случае имеющаяся система может быть записана в виде эквивалентного векторного равенства:

$$C = B.$$

Введем в рассмотрение также вектор неизвестных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно правилу умножения матриц, вектор-столбец C может быть представлен в виде произведения некоторой матрицы A на вектор неизвестных X. Эту матрицу легко определить:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, от системы линейных алгебраических уравнений перешли к матричному уравнению:

$$AX = B.$$

Предположим, что получившаяся матрица A является неособой, значит, существует обратная к ней матрица A^{-1}. Умножим слева на эту матрицу обе части последнего уравнения, равенство от этого не изменится:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Произведение первых двух матриц в левой части равенства есть единичная матрица (по определению обратной матрицы), значит:

$$EX = A^{-1}B.$$

Наконец, используя свойства единичной матрицы, находим искомые значения параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$X = A^{-1}B.$$

Достаточно простым методом отыскания решения систем линейных уравнений при небольшом количестве переменных (при небольшом размере матрицы A) является метод Гаусса. Он назван в честь немецкого математика Карла Фридриха Гаусса. Фактически это метод последовательного исключения переменных, основанный на элементарных преобразованиях системы уравнений (умножение уравнений на число, сложение/вычитание отдельных уравнений системы). Цель этих преобразований: привести изначальную систему линейных уравнений к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно (начиная с последних по номеру) находятся все переменные системы. Проиллюстрируем работу этого метода на следующем примере.

Пример 34. Пусть имеется система линейных уравнений, записанная в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения ее решения выпишем расширенную матрицу системы, присоединив к основной матрице столбец — свободный член:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right).$$

Далее проведем ряд элементарных (эквивалентных) преобразований полученной матрицы. Сначала умножим ее вторую строку на 2 и сложим с первой:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2+2\cdot(-1) & -1+2\cdot 1 & 0+2\cdot 4 & 0+2\cdot 13 \\ -1 & 1 & 4 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 8 & 26 \\ -1 & 1 & 4 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right).$$

Теперь добавим ко второй строке расширенной матрицы ее третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 8 & 26 \\ -1+1 & 1+2 & 4+3 & 13+14 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 8 & 26 \\ 0 & 3 & 7 & 27 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right).$$

Далее умножим первую строку на 3 и вычтем из нее вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3\cdot 0-0 & 3\cdot 1-3 & 3\cdot 8-7 & 3\cdot 26-27 \\ 0 & 3 & 7 & 27 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 17 & 51 \\ 0 & 3 & 7 & 27 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right).$$

Теперь на основе получившейся расширенной матрицы исходную систему уравнений можно записать в виде:

$$\begin{cases} 17x_3 = 51, \\ 3x_2 + 7x_3 = 27, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим:

$$x_3 = \frac{51}{17} = 3.$$

Подставляя это значение во второе уравнение, находим, что

$$x_2 = \frac{27 - 7x_3}{3} = \frac{27 - 7\cdot 3}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Наконец, из последнего уравнения определяем значение x_1:

$$x_1 = 14 - 2x_2 - 3x_3 = 14 - 2\cdot 2 - 3\cdot 3 = 1.$$

Отметим, что то же самое решение можно получить путем выполнения матричного умножения. Введем для удобства осуществления этой операции обозначения для основной матрицы системы и вектор-столбца свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Как было показано выше, искомое решение определяется произведением $X = A^{-1}B$. Сначала убедимся, что матрица A^{-1} существует:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\cdot 1\cdot 3 + (-1)\cdot 4\cdot 1 + (-1)\cdot 2\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 0 - (-1)\cdot(-1)\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 4 =$$

$$= 6 - 4 + 0 - 0 - 3 - 16 = -17 \neq 0.$$

Далее для построения матрицы, обратной к матрице A, мы должны определить матрицу алгебраических дополнений к каждому элементу матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot 4 = -5,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Получившаяся матрица алгебраических дополнений имеет вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -5 & 7 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее необходимо эту матрицу транспонировать и поделить на определитель матрицы A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A_1\right)^T = -\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 7 & 6 & -8 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -7 & -6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверим верность построения обратной матрицы:

$$A^{-1}A = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -7 & -6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получилась единичная матрица, значит, обратная матрица найдена верно. Осталось выполнить матричное умножение:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -7 & -6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5\cdot 0 + (-3)\cdot 13 + 4\cdot 14 \\ (-7)\cdot 0 + (-6)\cdot 13 + 8\cdot 14 \\ 3\cdot 0 + 5\cdot 13 + (-1)\cdot 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -39+56 \\ -78+112 \\ 65-14 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 17 \\ 34 \\ 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Получили тот же ответ, что и при использовании метода Гаусса.

2.8. Собственные числа матрицы. Собственные векторы матрицы

Собственным числом матрицы A называется такое число λ, которое обращает в ноль определитель: $|A-\lambda E|$, где E — единичная матрица.

Собственным вектором матрицы A называется такой ненулевой вектор x, что выполняется:

$$Ax = \lambda x.$$

Собственные векторы образуют базис (базис главных осей), в котором матрица A имеет диагональный вид.

Представим последнее уравнение в виде

$$(A-\lambda E)x = 0.$$

Так как по определению собственный вектор не является нулевым, то последнее матричное уравнение равносильно однородной системе уравнений, причем эта система должна иметь ненулевое решение. Последнее возможно только при выполнении условия

$$\det|A-\lambda E| = 0.$$

Указанное уравнение называется **характеристическим**. Решение этого уравнения есть суть метода определения собственных чисел.

Исторически собственные значения возникли при исследовании квадратичных форм и дифференциальных уравнений. Еще в XVIII в. Эйлер при исследовании вращательных движений абсолютно твердого тела обнаружил важность системы главных осей. Чуть позднее Лагранж показал, что главные оси соответствуют собственным векторам матрицы инерции.

Рассмотрим алгоритм нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы на примере матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\det\left|A-\lambda E\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель по первой строке и придем к уравнению:

$$(1-\lambda)\left((5-\lambda)^2-9\right)=0.$$

Его корни легко находятся:

$$\lambda_1=1, \quad \lambda_2=2, \quad \lambda_3=8.$$

Шаг 2. Предположим, что собственному значению $\lambda_1=1$ отвечает собственный вектор $h_1=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)^T$. Координаты этого вектора необходимо определить. Подставим эти данные в уравнение $(A-\lambda E)x=0$:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 5-1 & 3 \\ 0 & 3 & 5-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}=0.$$

Выполнив матричное умножение, результат представим в виде эквивалентной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0=0, \\ 4\beta_1+3\gamma_1=0, \\ 3\beta_1+4\gamma_1=0. \end{cases}$$

Обратим внимание на тот факт, что первое уравнение удовлетворяется тождественно, и на то обстоятельство, что остальные уравнения системы не содержат неизвестный параметр α_1. Последнее означает, что координата α_1 собственного вектора $h_1=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)^T$ может принимать произвольное значение.

Решая остальные два уравнения приведенной алгебраической системы, находим:

$$\beta_1=\gamma_1=0.$$

Это означает, что в качестве собственного вектора h_1 можно взять, например, единичный вектор $h_1=(1,0,0)^T$.

Определим теперь собственный вектор $h_2 = (\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)^T$, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 2$. Проводя аналогичные преобразования, придем к системе уравнений:

$$\begin{cases} -\alpha_2 = 0, \\ 3\beta_2 + 3\gamma_2 = 0, \\ 3\beta_2 + 3\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы легко находим связь между координатами собственного вектора h_2:

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0, \\ \beta_2 = -\gamma_2. \end{cases}$$

Возьмем $\gamma_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ с той целью, чтобы собственный вектор $h_2 = \left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ был единичным.

Наконец, решая рассматриваемое матричное уравнение для собстенного значения $\lambda_3 = 8$, определяем связь между координатами отвечающего ему собственного вектора $h_3 = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)^T$:

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0, \\ \beta_3 = \gamma_3. \end{cases}$$

Аналогично предыдущему случаю возьмем $\gamma_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, чтобы собственный вектор h_3 оказался единичным:

$$h_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \quad |h_3| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.$$

Заметим, что единичные собственные векторы h_1, h_2, h_3 оказались попарно ортогональны. Это означает, что тройка векторов h_1, h_2, h_3 образует ортогональный базис. Причем матрица A в этом базисе имеет диагональный вид:

$$A_{new} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Свойство диагональности матрицы в базисе собственных векторов активно используется, например, в механике деформируемого тела при анализе напряженного состояния тела. Состояние тела в любой момент времени характеризуется специфической матрицей, называемой тензором напряжений. В этом разделе механики собственные значения тензора напряжений традиционно называются главными напряжениями, а единичные векторы, совпадающие с собственными векторами матрицы, называются главными направлениями.

В системе главных осей тензор напряжений приобретает диагональный вид. С точки зрения физики процесса диагональные элементы характеризуют величины растягивающих (или сжимающих — все зависит от знака главного значения) напряжений. Отсутствие внедиагональных элементов говорит об отсутствии напряжений сдвига.

Задание 20. Дана матрица: $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & -5 & -9 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

- Докажите, что число $\lambda = 7$ является собственным для матрицы A.
- Найдите все остальные собственные числа матрицы A.
- Найдите отвечающий собственному числу $\lambda = 7$ собственный вектор вида $(x_1, -4, x_3)$.

2.9. Равновесие конструкций под действием плоской системы сил

Использование методов решения систем линейных алгебраических уравнений проиллюстрируем задачей статики.

Пример 35. Рассмотрим конструкцию (рис. 25), состоящую из стойки *1*, балки *2*, соединенных шарниром в точке C, и невесомого прямолинейного стержня *3* с шарнирами на концах. На балку *2* действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q =1 кН/м, а к стойке *1* приложена сила P = 5 кН. Определите реакции связей в точках C и D, а также усилие в стержне, если BC = 3 м, CD = 4 м, $DK = KC$. Весом конструкции пренебрегите [4].

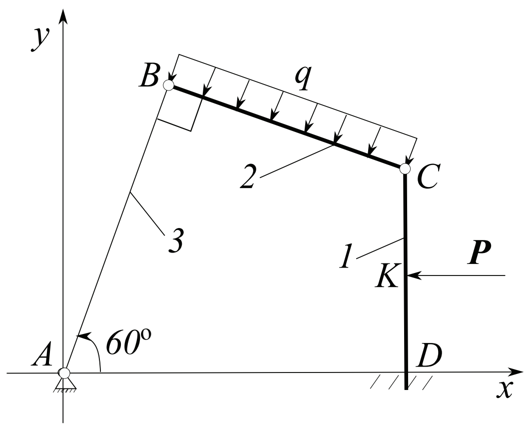


Рис. 25. Конструкция под действием сосредоточенной и распределенной нагрузки

Решение. Отбросим связи (заделку в точке D и стержень *3*), заменив их действие (в силу аксиомы освобождаемости от связей) соответствующими реакциями (рис. 26).

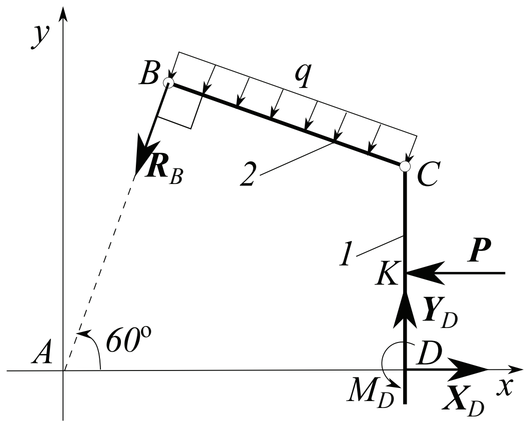


Рис. 26. Расчетная схема

Необходимо найти три силы реакции (R_B, X_D и Y_D) и реактивный момент M_D. Количество неизвестных реакций равно четырем. При этом, поскольку рассматривается нагрузка конструктивных элементов в одной плоскости, имеется только три независимых уравнения. Таким образом, система линейных уравнений является недоопределенной (число уравнений меньше числа неизвестных). Для устранения этого недостатка в теоретической механике поступают следующим образом: конструкцию разрезают по шарниру, вводят усилия (силы реакций) X_C и Y_C в шарнире и записывают уравнения равновесия для каждой части. С учетом данного правила получается шесть уравнений статики (по три уравнения для каждой части) для определения шести неизвестных силовых факторов.

Для определения внутренних реакций связей (реакций связей в точке *C*) рассмотрим по отдельности равновесие каждой из частей рассматриваемой конструкции — стойки *1* и балки *2* (рис. 27).

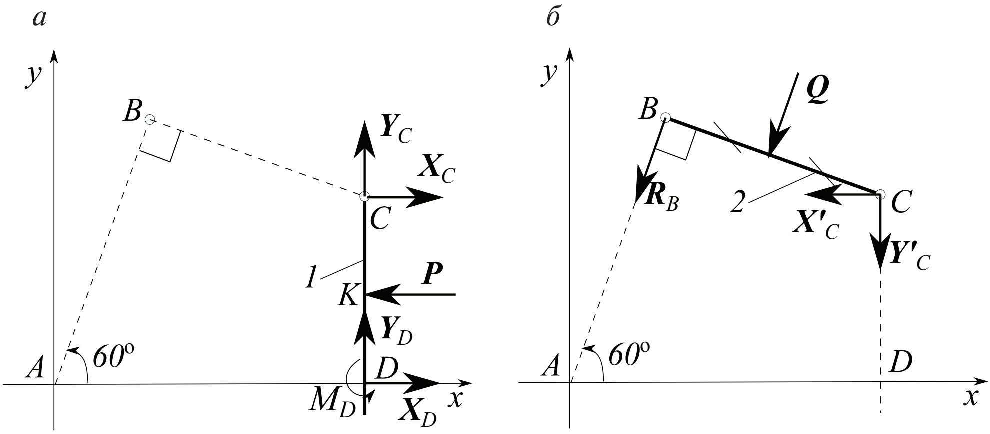


Рис. 27. Расчетная схема:
а — правая часть, полученная разрезанием по шарниру С; *б* — левая часть

Заметим, что реакции X_C, Y_C, X_C', Y_C' связаны соотношениями:

$$X_C = -X_C', \quad Y_C = -Y_C'.$$

Эти соотношения вытекают из третьего закона (аксиомы) Ньютона. Выбор направления реакций X_C, Y_C означает, что стойка *1* действует на балку *2*. Соответственно, реакции X_C', Y_C' означают противоположное действие. Аналогичное замечание справедливо для точки *B*, где изображено направление реакции R_B, определяющей действие балки *2* на стержень *3*.

Кроме того, распределенная нагрузка интенсивности q, действующая на балке *2*, заменена эквивалентной сосредоточенной силой $Q = q \cdot BC = 3$ кН, приложенной в середине балки *2*.

Уравнения равновесия, спроецированные на оси, изображенной на рис. 27 прямоугольной системы координат, для стойки *1* имеют вид:

$$X_D - P + X_C = 0,$$

$$Y_D + Y_C = 0.$$

Получена система, которая состоит из двух уравнений для определения трех неизвестных сил реакции. Можно получить еще одно уравнение для определения сил реакций. В качестве такого уравнения вычислим момент всех сил относительно произвольной точки, который должен равняться нулю, поскольку система сил находится в равновесии. В данном случае удобнее брать момент относительно точки D, в результате получим следующее уравнение:

$$M_D + P \cdot KD - X_C \cdot CD = 0.$$

Уравнения равновесия для балки *2* имеют вид:

$$-X'_C - Q \cdot \sin 30^\circ - R_B \cdot \sin 30^\circ = 0,$$

$$-Y'_C - Q \cdot \cos 30^\circ - R_B \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$Q \cdot \frac{BC}{2} + R_B \cdot BC = 0.$$

В последнем уравнении (уравнении моментов) момент всех сил считается относительно точки C.

Перепишем последние три уравнения в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin 30^\circ \\ 0 & 1 & \cos 30^\circ \\ 0 & 0 & BC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_C \\ Y'_C \\ R_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q \cdot \sin 30^\circ \\ -Q \cdot \cos 30^\circ \\ -Q \cdot \dfrac{BC}{2} \end{pmatrix}.$$

Тогда решение легко находится с помощью матричного умножения:

$$\begin{pmatrix} X'_C \\ Y'_C \\ R_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin 30^\circ \\ 0 & 1 & \cos 30^\circ \\ 0 & 0 & BC \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -Q \cdot \sin 30^\circ \\ -Q \cdot \cos 30^\circ \\ -Q \cdot \dfrac{BC}{2} \end{pmatrix},$$

если указанная обратная матрица существует.

Введем для дальнейшего удобства обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin 30^\circ \\ 0 & 1 & \cos 30^\circ \\ 0 & 0 & BC \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -Q \cdot \sin 30^\circ \\ -Q \cdot \cos 30^\circ \\ -Q \cdot \dfrac{BC}{2} \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель этой матрицы:

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot BC + 0 \cdot 0 \cdot \cos 30^\circ + 0 \cdot 0 \cdot \sin 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot BC - 1 \cdot 0 \cdot \cos 30^\circ,$$

$$\det A = BC = 3.$$

Определитель отличен от нуля, значит, обратная матрица к матрице A существует. Найдем ее. Для этого вычислим алгебраические дополнения к каждому элементу матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & \cos 30^\circ \\ 0 & BC \end{vmatrix} = BC = 3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & \cos 30^\circ \\ 0 & BC \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & \sin 30^\circ \\ 0 & BC \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & \sin 30^\circ \\ 0 & BC \end{vmatrix} = BC = 3,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & \sin 30^\circ \\ 1 & \cos 30^\circ \end{vmatrix} = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & \sin 30^\circ \\ 0 & \cos 30^\circ \end{vmatrix} = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Получившаяся матрица алгебраических дополнений имеет вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее необходимо эту матрицу транспонировать и поделить на определитель матрицы A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A_1\right)^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Значит, можем определить реакции $\boldsymbol{X}'_C$, $\boldsymbol{Y}'_C$, $\boldsymbol{R}_B$:

$$\begin{pmatrix} X'_C \\ Y'_C \\ R_B \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -Q \cdot \sin 30^\circ \\ -Q \cdot \cos 30^\circ \\ -Q \cdot \frac{BC}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -Q \cdot \sin 30^\circ + Q \cdot \frac{BC}{12} \\ -Q \cdot \cos 30^\circ + Q \cdot \frac{BC\sqrt{3}}{12} \\ -Q \cdot \frac{BC}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{3}{12} \\ -3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{12} \\ -3 \cdot \frac{3}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,75 \\ -1,3 \\ -1,5 \end{pmatrix}.$$

Далее можем перейти к решению системы уравнений равновесия для стойки *1*, предварительно вычислив следующие реакции:

$$X_C = -X'_C = 0,75 \text{ кН}, \; Y_C = -Y'_C = 1,3 \text{ кН}.$$

Пользуясь этими равенствами, можем из системы уравнений равновесия стойки *1* определить последние неизвестные реакции:

$$X_D = P - X_C = 5 - 0,75 = 4,25 \text{ кН},$$

$$Y_D = -Y_C = -1,3 \text{ кН},$$

$$M_D = -P \cdot KD + X_C \cdot CD = -5 \cdot 2 + 0,75 \cdot 4 = 7 \text{кН·м}.$$

В заключение сделаем важное замечание об округлении при выполнении расчетов. При вычислении реакции

$$Y'_C = -Q \cdot \cos 30^\circ + Q \cdot \frac{BC\sqrt{3}}{12} = -3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{12}$$

используется иррациональное число. Нужно понимать, что от количества знаков, взятых после запятой, будет зависеть точность вычислений. Мы предлагаем читателям самостоятельно поэкспериментировать с точностью вычислений. Для этого можно использовать условие проверки: взять сумму моментов всех силовых факторов относительно любой точки, эта сумма должна быть равна нулю. Следует сначала осуществить проверку аналитически (подставить буквенные выражения), т. е получить равенство «0 = 0», а затем подставить числовые значения, вычисленные с различной точностью, и оценить влияние округления иррациональных чисел.

Вопросы для самоконтроля к главе 2

1. Дайте определение матрицы.
2. Какие линейные и нелинейные операции над матрицами вам известны? Сформулируйте правило сложения и умножения матриц.
3. Какие виды матриц вам известны? Какие матрицы называются симметричными и кососимметричными?
4. При каких условиях существует обратная матрица?
5. Какие способы (методы) решения систем линейных алгебраических уравнений вам известны?
6. Дайте определение ранга матрицы и назовите способы его вычисления.
7. Какие векторы называются собственными векторами матрицы?

Список библиографических ссылок к главе 2

1. Линейная алгебра : учеб. пособие / Н. В. Гредасова [и др.]. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2019. 88 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М. : Наука, 1973. 720 с.
3. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. М. : Мир, 1980. 459 с.
4. Теоретическая механика в примерах и задачах / З. В. Беляева [и др.] ; [под. ред. Е. А. Митюшова]. М. : Академия, 2012. 176 с.

Глава 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1. Дифференциальное исчисление

3.1.1. Понятие производной

Этот раздел посвящен, пожалуй, самому сложному и необходимому аппарату для решения задач механики и математики. Напомним, что второй закон Ньютона, представляющий собой векторное уравнение, в трехмерном случае при проецировании на оси выбранной системы координат задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Шестой порядок системы определяется тем, что вектор ускорения является первой производной от вектора скорости или второй производной от вектора перемещения.

Ниже показано, что дифференцирование и интегрирование являются с некоторыми оговорками взаимно обратными операциями [1; 2; 3]. Для решения дифференциальных уравнений необходимо уметь интегрировать. Однако интегрирование — операция намного более сложная, чем дифференцирование. Это объясняется тем, что для любой дифференцируемой функции существуют формулы, позволяющие получить выражение для производной в явной форме. Для интегралов таких формул не существует, а для их вычисления написаны многочисленные справочники, в которых содержатся тысячи интегралов от различных функций.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Придадим значению x_0 приращение Δx такое, что значение $x_0 + \Delta x$ также принадлежит области определения функции f. При этом сама функция получит приращение:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$ (если этот предел существует и конечен), т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Операцию нахождения производной функции называют **дифференцированием**. Обозначают обычно производную следующими символами: $y'(x_0)$, $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$, $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$. Видно, что для обозначения дифференцирования используется штрих, поэтому в обиходе взятие производной преподаватели и студенты жаргонно называют «штрихованием».

Аналогичным образом вводятся понятия односторонних производных:

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 **справа (слева)** называется предел

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \right),$$

если этот предел существует и конечен.

Используемые обозначения:

$y'_+(x_0)$, $f'_+(x_0)$ — производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 справа,

$y'_-(x_0)$, $f'_-(x_0)$ — производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 слева.

Справедливы две теоремы, определяющие необходимое и достаточное условия существования производной функции в точке.

Теорема 3. Функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существуют и равны между собой производные слева и справа. При этом значение производной определяется следующим значением:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Теорема 4. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то функция $f(x)$ является непрерывной в этой точке.

Не каждая непрерывная функция имеет производную в точке. Ниже приведен пример такой функции.

Пример 36. Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$. Согласно определению модуля

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}.$$

Вычисляя односторонние производные в точке $x = 0$ слева и справа, получим равенства:

$$f'_+(0) = 1 \text{ и } f'_-(0) = -1.$$

Поскольку односторонние производные не совпадают в рассматриваемой точке, производной в этой точке не существует.

3.1.2. Физический и геометрический смысл производной

Если функция $y = f(x)$ и ее аргумент x являются физическими величинами, то производная $f'(x)$ есть скорость изменения величины y относительно величины x.

Например, если t — время, а зависимость $s = f(t)$ описывает пройденный материальной точкой за это время путь, то производная $v = f'(t) = s'(t)$ характеризует изменение скорости рассматриваемой точки со временем.

Если рассмотреть производную $a = v'(t)$, то она будет характеризовать быстроту изменения скорости движения точки, т. е. ее ускорение.

Теперь определим геометрический смысл производной функции в точке. Для этого введем дополнительные определения.

Пусть l — некоторая кривая, M_0 — точка на кривой l. Любая прямая, пересекающая l не менее чем в двух точках, называется секущей.

Касательной к кривой l в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M_1, если точка M_1 стремится к M_0, двигаясь по кривой (рис. 28).

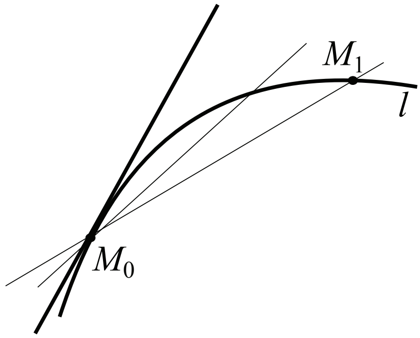


Рис. 28. Касательная и секущая

Если касательная к кривой в точке существует, то она единственная.

Рассмотрим произвольную кривую $y = f(x)$. И пусть в точке $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ она имеет невертикальную касательную M_0N (рис. 29).

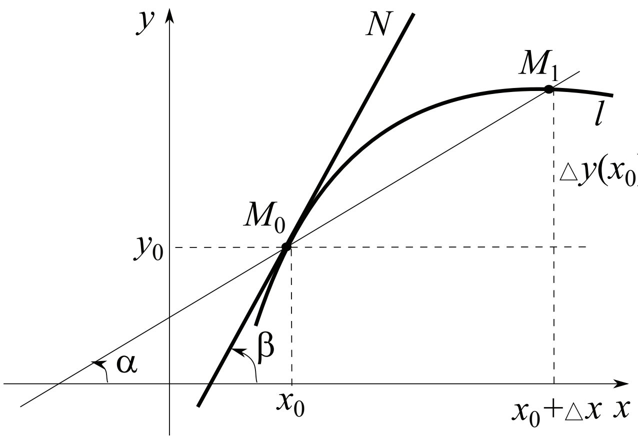


Рис. 29. Геометрический смысл производной

Таким образом, получили геометрический смысл производной: величина $f'\left(x_0\right)$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$.

Прямая, перпендикулярная к касательной и проходящая через рассматриваемую точку M_0, называется нормалью. Орт касательной и орт нормали входят в тройку базисных векторов системы естественных осей, используемых при описании движения материальной точки по заранее известной криволинейной траектории.

На основе свойства $k_1 k_2 - 1 = 0$, связывающего угловые коэффициенты k_1, k_2 двух перпендикулярных прямых, легко выписывается уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \text{ если } f'(x_0) \neq 0.$$

Если значение производной $f'(x_0) = 0$, то касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ является горизонтальная линия $y = f(x_0)$. В этом случае нормаль в рассматриваемой точке будет вертикальной прямой, определяемой соотношением $x = x_0$.

3.1.3. Правила дифференцирования

Для дифференцируемых на рассматриваемом интервале функций справедливы следующие правила.

1. Производная постоянной функции $y = \text{const}$ равна нулю:

$$y' = 0.$$

2. Константа выносится из-под знака производной:

$$(Cf(x))' = Cf'(x).$$

3. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) этих функций:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

4. Производная произведения двух функций находится по правилу:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

5. Производная частного двух функций находится по правилу:

$$\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

6. Правило дифференцирования сложной функции: если функция $\varphi(x)$ имеет производную в точке x, а функция $f(u)$ имеет производную в точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную в точке x, причем

$$y' = f'(u)u'.$$

Теорема 5 (о производной обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ имеет ненулевую производную в точке x_0. Если существует обратная функция $x = \varphi(y)$, то она имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$:

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Производная любой функции может быть найдена с помощью указанных правил дифференцирования и таблицы производных элементарных функций (прил. 1).

Указанные в п. 3.1.3 и прил. 1 формулы позволяют вычислить производную достаточно сложных функций.

Пример 37. Рассмотрим функцию $f(x) = x^x$ и попытаемся найти ее производную. Отметим, что у этой функции неизвестны и основание, и показатель степени. Для дифференцирования этой функции удобно ее представить через основное логарифмическое тождество:

$$f(x) = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}.$$

Производная этой функции находится по правилу дифференцирования сложной функции и производной от произведения функций:

$$f'(x) = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = e^{x\ln x}\left(x'\ln x + x(\ln x)'\right) =$$

$$= e^{x\ln x}\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

Разобранный в примере прием взятия производной называется логарифмическим дифференцированием. Приведем формулу в общем виде для логарифмического дифференцирования для функции $y(x)=f(x)^{g(x)}$:

$$y'(x)=y(x)\left(g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

3.2. Интегральное исчисление

3.2.1. Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$ [4; 2; 3].

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется множество всех первообразных вида $F(x)+C$.

Обозначается: $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Значения некоторых основных интегралов приведены в прил. 2.

Основные правила интегрирования:

1) $\int kf(x)dx = kF(x)+C$, где k, C — постоянные величины,
2) $\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$,
3) если $\int f(x)dx = F(x)+C$ и $u=\varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u)+C$,
4) $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$,
5) $\int f'(x)dx = f(x)$.

Одним из методов вычисления неопределенного интеграла является **метод интегрирования по частям**.

Если $u=u(x)$ и $v=v(x)$ — дифференцируемые функции, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Указанная формула оказывается крайне полезной в случаях, когда подынтегральное выражение можно представить в виде произведения двух множителей вида u и dv, причем функция v легко восстанавливается по виду функции dv и вычисление интеграла $\int vdu$ представляется более простой задачей, нежели непосредственное вычисление изначального интеграла $\int udv$.

В некоторых случаях приходится неоднократно применить формулу интегрирования по частям, чтобы свести данный (изначальный) интеграл к табличному.

Пример 38. Найдите интеграл $\int (x^2+3)\ln xdx$.

Решение. В данном случае в качестве функции $u(x)$ возьмем более сложную функцию $u=\ln x$. Тогда $dv=(x^2+3)dx$. Найдем недостающие элементы формулы: $du=\frac{dx}{x}$, $v=\frac{1}{3}x^3+3x$. Таким образом,

$$\int (x^2+3)\ln xdx = \ln x\left(\frac{1}{3}x^3+3x\right)-\int\left(\frac{1}{3}x^3+3x\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=\ln x\left(\frac{1}{3}x^3+3x\right)-\int\left(\frac{1}{3}x^2+3\right)dx=\ln x\left(\frac{1}{3}x^3+3x\right)-\frac{1}{9}x^3-3x+C.$$

Еще один метод, облегчающий интегрирование, — **метод замены переменной** (метод подстановки).

Пусть функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема на некотором промежутке и имеет непрерывную производную и обратную функцию $t=\psi(x)$. Тогда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Вид функции $x=\varphi(t)$ выбирается с целью приведения правой части к наиболее удобному для интегрирования виду. После вычисления этого интеграла необходимо сделать обратную замену $t=\psi(x)$.

3.2.2. Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a<x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.

Определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел суммы:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_j.$$

При условии, что число разбиений n стремится к бесконечности и наибольшая из разностей функция $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ $(j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ стремится к нулю (рис. 30).

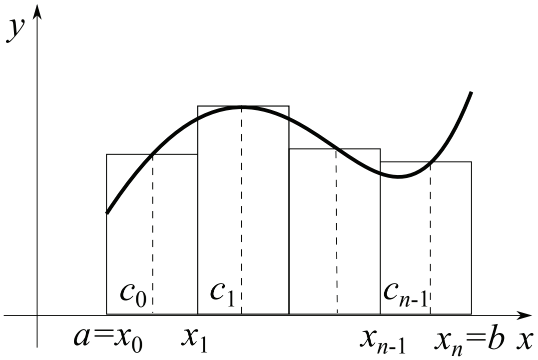


Рис. 30. Геометрическая интерпретация определенного интеграла

Числа a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования.

Значение определенного интеграла от функции $f(x)$ легко вычисляется через значения ее первообразной $F(x)$ (**формула Ньютона — Лейбница**):

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Некоторые свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$,

2) $\int_a^a f(x)dx = 0$,

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$,

4) $\int_a^b \left[\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\right]dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)dx$,

5) если $f_1(x) \le f_2(x)$ на интервале $[a,b]$, то $\int_a^b f_1(x)dx \le \int_a^b f_2(x)dx$.

Указанные выше для неопределенного интеграла правила интегрирования по частям и метод замены переменной справедливы и для определенного интеграла.

3.3. Применение интегрального и дифференциального исчисления к описанию свободных прямолинейных колебаний

3.3.1. Колебания в среде без сопротивления

Рассмотрим прямолинейные колебания материальной точки около неподвижного центра [5]. Ось *Ox* совместим с линией движения (рис. 31). Начало координат поместим в неподвижный центр. Пусть на точку *M* действует только восстанавливающая сила, проекция которой на ось *Ox* равна

$$F(x) = -cx.$$

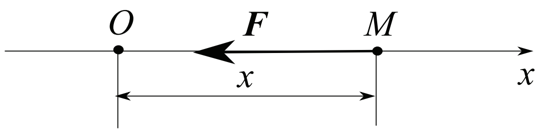


Рис. 31. Схема колебательного движения точки

Восстанавливающая сила направлена к неподвижному центру *O* и пропорциональна расстоянию от этого центра. Запишем основное уравнение динамики в проекции на ось *Ox*:

$$m\ddot{x} = -cx.$$

Приведем уравнение к виду:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

здесь $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

Полученное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение свободных колебаний в среде без сопротивления. Оно является линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$r^2 + k^2 r = 0.$$

Корни этого алгебраического уравнения легко находятся:

$$r_{1,2} = \pm ki.$$

Так как корни мнимые, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$x = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt),$$

здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные интегрирования.

Дифференцируя найденное решение по времени, получим второе уравнение для определения постоянных интегрирования:

$$\dot{x} = -kC_1 \sin(kt) + kC_2 \cos(kt).$$

С учетом начальных условий

$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$$

имеем:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}.$$

Кинематическое уравнение движения точки имеет вид:

$$x = x_0 \cos(kt) + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin(kt).$$

Отметим, что дифференцируя один раз полученное решение, найдем скорость колебаний как функцию времени, а производная от скорости определяет ускорение точки в любой момент времени.

В завершении этого раздела продемонстрируем алгоритм получения общего решения уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$ без применения метода характеристических уравнений. Основная сложность интегрирования этого уравнения в текущем виде заключается в том, что производная в уравнении берется по времени *t*. Соответственно, при интегрировании придется брать интеграл по переменной *t*, но зависимости функций $\ddot{x}$ и x от времени заранее неизвестны. Нахождение этих зависимостей и есть суть рассматриваемой задачи.

Чтобы обойти указанную трудность, представим далее производную $\ddot{x}$ в следующем виде:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}.$$

Подставим это разложение в дифференциальное уравнение движения, слегка его переписав:

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -k^2 x.$$

Получившееся уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. В нашем примере это означает, что неизвестные одного типа можно собрать в одной части уравнения, а неизвестные второго типа — в другой:

$$\dot{x}d\dot{x} = -k^2 x dx.$$

Обе части получившегося уравнения легко интегрируются:

$$\frac{(\dot{x})^2}{2} = -k^2\frac{x^2}{2} + C.$$

Представим это уравнение в виде:

$$m\frac{(\dot{x})^2}{2} + c\frac{x^2}{2} = C.$$

В левой части стоит сумма кинетической энергии материальной точки и потенциальной энергии, порождаемой восстанавливающей силой. В этих терминах получаем вывод о том, что механическая энергия рассматриваемой колеблющейся системы сохраняется. Соотношения такого типа, позволяющие облегчить интегрирование сложных по структуре дифференциальных уравнений, называются первыми интегралами.

Значение постоянной C определяется из начальных условий:

$$C = \frac{(\dot{x}_0)^2}{2} + k^2\frac{{x_0}^2}{2}.$$

Вернемся к уравнению $\frac{(\dot{x})^2}{2} = -k^2\frac{x^2}{2} + C$ и представим его в виде:

$$(\dot{x})^2 = -k^2 x^2 + 2C,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -k^2x^2 + 2C,$$

$$\frac{dx}{\sqrt{-k^2x^2 + 2C}} = dt.$$

Для того чтобы воспользоваться таблицей первообразных (прил. 2), представим последнее уравнение в виде:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2C}{k^2} - x^2}} = kdt.$$

Интегрируя обе части данного уравнения, получим:

$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{2C}{k^2}}}\right) = kt + \alpha,$$

где α — еще одна постоянная интегрирования, также определяемая из начальных условий. Путем несложных преобразований придем к решению:

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{2C}{k^2}}} = \sin(kt + \alpha),$$

$$x = \sqrt{\frac{k^2}{2C}}\sin(kt + \alpha).$$

Таким образом, получена эквивалентная форма записи закона движения. Колебания, совершаемые точкой по закону вида $x = A\sin(kt + \alpha)$, называются гармоническими колебаниями [5].

3.3.2. Колебания в среде с сопротивлением

Рассмотрим, как поменяется форма решения дифференциального уравнения движения, если в среде появится сопротивление.

Пусть, помимо восстанавливающей силы $F_x = -cx$, действует еще и сила сопротивления среды, пропорциональная скорости (рис. 32):

$$R_x = -\mu\dot{x}.$$

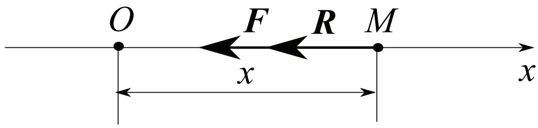


Рис. 32. Схема колебательного движения точки
с учетом сопротивления среды

Основное уравнение динамики в проекции на ось Ox тогда примет вид:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}.$$

Приведем это уравнение к виду:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + kx = 0,$$

где $n = \dfrac{\mu}{2m}$. Получившееся уравнение является линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение таких уравнений ищется с помощью характеристического уравнения:

$$r^2 + 2nr + k = 0.$$

Корни данного алгебраического квадратного уравнения имеют вид:

$$r = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Тип получившихся корней (комплексные или действительные) зависит от величины коэффициента сопротивления μ. Рассмотрим случай малого сопротивления, полагая далее $n < k$. Корни характеристического уравнения тогда будут комплексными, а значит, общее решение уравнения движения описывается функцией:

$$x = e^{-nt}\left(C_1 \cos\left(k_1 t\right) + C_2 \sin\left(k_1 t\right)\right),$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2 зададим начальные условия:

$$x\left(t_0\right) = x_0, \quad \dot{x}\left(t_0\right) = \dot{x}_0$$

и определим производную по правилу производной произведения и сложной функции:

$$x = -ne^{-nt}\left(C_1\cos(k_1t) + C_2\sin(k_1t)\right) + k_1e^{-nt}\left(-C_1\sin(k_1t) + C_2\cos(k_1t)\right).$$

Тогда

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1}.$$

В результате получаем, что кинематическое уравнение движения точки принимает вид:

$$x = e^{-nt}\left(x_0\cos(k_1t) + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1}\sin(k_1t)\right).$$

Это же решение, но в амплитудной форме записи выражается формулой:

$$x = Ae^{-nt}\sin(k_1t + \alpha),$$

где $A = \sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{C_1}{A}$, $\cos\alpha = \dfrac{C_2}{A}$.

Наличие множителя e^{-nt} указывает на то, что амплитуда колебаний со временем убывает. Колебания, происходящие по такому закону, называются затухающими.

Вопросы для самопроверки к главе 3

1. Сформулируйте определение функции в точке и дифференциала функции.
2. В чем заключаются геометрический и физический смысл производной функции?
3. Выведите формулу параметрического и логарифмического дифференцирования.
4. Сформулируйте определение первообразной функции.
5. Какие основные свойства дифференцирования и интегрирования вам известны?
6. Как производится интегрирование функции по частям? Приведите соответствующую формулу.
7. Какая из математических операций (дифференцирование или интегрирование) осуществляется проще?

Список библиографических ссылок к главе 3

1. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М. : Астрель, 2005. 558 с.
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 1. М. : Наука, 1985. 416 с.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 2. М. : Физматлит, 2003. 864 с.
4. Высшая математика : учеб. пособие / Белоусова В. И [и др.]. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. Ч. 2. 300 с.
5. Митюшов Е. А., Берестова С. А. Теоретическая механика. 2-е изд., перераб. М. : Академия, 2011. 320 с.

Приложение 1

Таблица производных

Простые		Сложные	
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = U^{\alpha}$	$y' = \alpha U^{\alpha-1}U'$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$	$y = \dfrac{1}{U}$	$y' = -\dfrac{U'}{U^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{U}$	$y' = \dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin U$	$y' = (\cos U)\cdot U'$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos U$	$y' = (-\sin U)\cdot U'$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{tg} U$	$y' = -\dfrac{U'}{\cos^2 U}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$y = \operatorname{ctg} U$	$y' = -\dfrac{U'}{\sin^2 U}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = a^U$	$y' = a^x \ln U \cdot U'$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^U$	$y' = e^U \cdot U'$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$y = \log_a U$	$y' = \dfrac{U'}{U\ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \ln U$	$y' = \dfrac{U'}{U}$
$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos U$	$y' = -\dfrac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin U$	$y' = \dfrac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg} U$	$y' = \dfrac{U'}{1+U^2}$
$y = shx$	$y' = chx$	$y = shU$	$y' = chU \cdot U'$
$y = chx$	$y' = shx$	$y = chU$	$y' = shU \cdot U'$
$y = thx$	$y' = \dfrac{1}{ch^2x}$	$y = thU$	$y' = \dfrac{U'}{ch^2U}$
$y = cthx$	$y' = -\dfrac{1}{sh^2x}$	$y = cthU$	$y' = -\dfrac{U'}{sh^2U}$

Приложение 2

Таблица неопределенных интегралов

Степенные функции

$\int dx = x + C$	$\int \sqrt{x}dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$
$\int kdx = kx + C$	$\int \sqrt[n]{x}dx = \frac{nx\sqrt[n]{x}}{n+1} + C$
$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ при $n \neq -1$	$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} == \frac{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}{n-1} + C$
$\int \frac{dx}{x^n} = \int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ при $n \neq 1$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$

Показательные и тригонометрические функции

$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \operatorname{tg}(x) + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\operatorname{ctg}(x) + C$
$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$	$\int ch(x) = sh(x) + C$
$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$	$\int sh(x) = ch(x) + C$
$\int \operatorname{tg}(x)dx = -\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$	$\int \frac{dx}{ch^2(x)} = th(x) + C$
$\int \operatorname{ctg}(x)dx = \ln\lvert\sin(x)\rvert + C$	$\int \frac{dx}{sh^2(x)} = cth(x) + C$

«Длинные» и «толстые» функции

$\int \frac{dx}{x-a} = \ln\lvert x-a\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = ar\,\mathrm{ctg}(x) + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} ar\,\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + C$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + C$

Учебное издание

Бурмашева Наталья Владимировна
Просвиряков Евгений Юрьевич
Берестова Светлана Александровна

ИНЖЕНЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Редактор О. В. Климова
Верстка О. П. Игнатьевой

Подписано в печать 30.09.2022. Формат 70×100/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 6,8.
Уч.-изд. л. 5,0. Тираж 30 экз. Заказ 177.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: +7 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
http://print.urfu.ru

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА
2020

9 785799 635299