ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

Р . Мустафоқулов

КУРСИ ЛЕКСИЯҲО АЗ ФАННИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ОДДӢ

Душанбе
2010

ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

КАФЕДРАИ ТАҲЛИЛИ ФУНКСИОНАЛӢ ВА
МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ

Р . Мустафоқулов

КУРСИ ЛЕКСИЯҲО АЗ ФАННИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ОДДӢ

Шӯрои илмию методии
Донишгоҳи миллии Тоҷикистон
ба чоп тавсия кардааст

Душанбе
2010

УДК 517.9

Мустафоқулов Раҳмонқул
Курси лексияҳо аз фанни муодилаҳои дифференсиалии оддӣ. Дастури таълимӣ –Душанбе: 2010. -216с.

Дар дастури таълимӣ асосҳои назарияи муодилаҳои дифференсиалии оддӣ баён карда шудаанд. Дар он методҳои интегронидани намудҳои асосии муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум, тартиби олӣ, муодилаҳои дифференсиалии хаттӣ, системаҳои муодилаҳои дифференсиалӣ, муодилаҳои дифференсиалии автономӣ, назарияи устувории ҳалҳо, инчунин муодилаҳои дифференсиалӣ дар ҳосилаҳои хусусии тартиби якум оварда шудаанд. Мавзӯъҳои назарявӣ бо мисолҳои конкретӣ шарҳ дода шудаанд.

Барои донишҷӯёни равияҳои дақиқи муассисаҳои таълимии таҳсилоти олии касбӣ пешниҳод карда мешавад.

САРСУХАН

Ба шарофати ба истиқлолияти сиёсӣ ноил гаштани кишварамон ва мақоми давлатӣ гирифтани забони тоҷикӣ, дар тамоми муассисаҳои таҳсилоти олии Ҷумҳурии Тоҷикистон таълим ба забони тоҷикӣ ба роҳ монда шуд. Аммо таъмини таълими хушсифат ба забони тоҷикӣ ба омилҳои муҳиме вобаста аст, ки таҳия ва нашри китобҳои дарсӣ ба забони тоҷикӣ аз муҳимтарини онҳост. Хушбахтона, дар ин самт тайи солҳои охир корҳои зиёде ба анҷом расонида шуда истодааст ва дар ин замина китобу дастурҳои гуногун ба забони тоҷикӣ таҳия ва нашр гардида истодаанд. Дар баробари ин, то ҳол фанҳое мавҷуданд, ки масъалаи таҳия, нашр ва таъмини донишҷӯёну устодон бо китобҳои дарсӣ аз ин фанҳо ба талаботи замона ҷавобгӯ нестанд. Чунин ҳолат, махсусан, бо фанҳои илмҳои дақиқ бештар ба мушоҳида мерасад. Бо назардошти он ки пешрафти ҷомеа бевосита ба кадрҳои соҳибтаҷрибаи соҳаи илмҳои дақиқ ва техника алоқаманд аст, метавон гуфт, ки масъалаи таҳия ва нашри китобҳои дарсӣ ва дастурҳои таълимӣ аз чунин фанҳо ба забони тоҷикӣ аз муҳимтарин проблемаҳои рӯз ба шумор меравад.

Ба гурӯҳи ин гуна фанҳо *Курси муодилаҳои дифференсиалиро* дохил кардан мумкин аст. Он яке аз предметҳои асосии барнома ва нақшаи таълимии ихтисосҳои механикаю математика ва физикаю техника ба ҳисоб рафта, аз ду қисм иборат аст. Дар қисми аввал муодилаҳои дифференсиалие омӯхта мешаванд, ки дар онҳо функсияи номаълум танҳо аз як тағйирёбанда вобаста мебошад ва чунин муодилаҳоро *муодилаҳои дифференсиалии оддӣ* меноманд. Дар ќисми дуввум муодилаҳои дифференсиалие омӯхта мешаванд, ки дар онҳо функсияи номаълум аз ду ва ё зиёда аз он тағйирёбандаҳо вобаста аст. Ин навъи муодилаҳо *муодилаҳои дифференсиалӣ дар ҳосилаҳои хусусӣ*, ё худ *муодилаҳои физикаи математикӣ* ном гирифтаанд.

Ҳар яки ин қисмҳои курси муодилаҳои дифференсиалӣ дар нақшаҳои таълимии ҳамаи ихтисосҳои механикаю математикӣ, физикӣ ва техникӣ ҳамчун фанни алоҳида дохил гаштаанд. Дастури таълимии мазкур ба курси муодилаҳои дифференсиалии оддӣ бахшида шудааст.

Доир ба фанни муодилаҳои дифференсиалии оддӣ, умуман, адабиёти зиёди илмиву таълимӣ мавҷуд аст, вале дар маҷмӯъ, китоб ё дастуре, ки бо забони тоҷикӣ таҳия шуда ва ҳамаи қисмҳо ва бобҳои асосии ин курсро дар алоқамандӣ дарбар гирифта бошад, то ҳол мавҷуд нест. Гузашта аз ин, адабиёте, ки ба забони русӣ солҳои пеш нашр гардида буданд, ҳоло танҳо ба миқдори хеле кам дар китобхонаҳо боқӣ мондаанд. Тайи солҳои охир роҷеъ ба ин фан дар Россия китобу дастурҳои нав таҳия ва нашр шуда бошанд ҳам, онҳо дастраси устодону донишҷӯёни мо нестанд. Чунин вазъи ногувор ба баланд бардоштани сифати таълим ва тайёр намудани мутахассисони соҳибтаҷриба монеа ба вуҷуд овардааст. Имрӯз донишҷӯёни мо ба китобҳои дарсӣ ва дигар маводҳои таълимӣ аз ин фан, махсусан, ба забони тоҷикӣ ниёз доранд.

Бо назардошти мулоҳизаҳои боло мо кӯшиш намудем, ки доир ба курси муодилаҳои дифференсиалии оддӣ дастури таълимӣ таҳия намуда, онро дастраси устодону донишҷӯёни макотиби олии ҷумҳурӣ қарор диҳем. Ин маводи таълимӣ дар асоси лексияҳо, ки доир ба ин курс дар ихтисосҳои механикаю математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон хонда мешаванд, мураттаб гардидааст ва ба барномаҳои таълимии ин ихтисосҳо пурра мувофиқат мекунад. Дар ҷараёни таҳияи лексияҳо мо на танҳо аз адабиёти пешини муаллифони дохилию хориҷӣ, балки аз осори илмиву таълимие, ки солҳои охир дар Федератсияи Россия ба табъ расидаанд, истифода намудаем, ки рӯйхати онҳо дар охир оварда шудааст. Ҳангоми таҳияи дастури таълимии мазкур мо кӯшиш намудем, ки мӯҳтавои он ҳам аз ҷиҳати усули баён ва ҳам аз лиҳози истифодаи методҳои таълим қобили фаҳму дарки донишҷӯён бошад ва онҳо тавонанд дониши хуби назариявӣ гирифта, таҷрибаи ҳал намудани мисолу масъалаҳоро доир ба ин курс пайдо намоянд. Бо ин мақсад кӯшиш ба харҷ дода шудааст, ки ҳамаи мавзӯъҳо ва бобҳо тибқи талаботи Стандарти давлатии таҳсилоти олӣ ва барномаи таълим дар алоқамандии мантиқӣ ва то ҳадди имкон пурраву комил шарҳу тавзеҳ ёбанд. Истифода аз маводи таълимӣ ба устодон имкон медиҳад, ки дар заминаи он машқҳои амалии мустақилона таҳия намоянд ва корҳои гурӯҳиву инфиродӣ гузаронанд, ки он барои беҳтар шудани сифати таълиму омӯзиш ва малакаву маҳорати касбии донишҷӯён мусоидат менамояд.

Дар ҷараёни таҳияи дастур муҳаррири расмии он Хосабеков О. – номзади илмҳои физикаю математика, дотсенти кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсионалии ДМТ, муқарризон – Қурбонов И. – доктори илмҳои физикаю математика, узви вобастаи Академияи илмҳои ҶТ, мудири кафедраи математикаи олӣ ва фанҳои табиатшиносии Донишгоҳи славянии Тоҷикистону Россия ва Исматӣ М. – доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи математикаи олии Донишкадаи соҳибкорӣ ва хизмати Тоҷикистон бо маслиҳату пешниҳодҳои муфиди худ ба муаллиф кӯмаки беғаразона ва амалӣ расониданд, ки бешубҳа, барои беҳтар намудани сифати ин маводи таълимӣ мусоидат намуданд. Муаллиф ба ҳамаи онҳо сипосгузории самимии хешро изҳор медорад.

Таъкид кардан бамаврид аст, ки маводи таълимӣ аз фанни муодилаҳои дифференсиалии оддӣ бо чунин мундариҷа ва ҳаҷм бо забони тоҷикӣ бори аввал таҳия ва нашр мешавад. Аз ин рӯ табиист, ки он метавонад дорои норасоиҳо бошад. Умедворем, ки фикру андешаҳо ва пешниҳодҳои мутахассисон, устодон, донишҷӯён ва ҳамаи алоқамандони ин соҳа барои дар оянда беҳтар намудани сифату мундариҷаи дастури таълимӣ кӯмак хоҳад кард. Аз ҳамаи ихлосмандон эҳтиромона хоҳиш мешавад, ки фикру ақидаҳои худро доир ба мӯҳтавои дастур ба кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ирсол намоянд.

Муаллиф

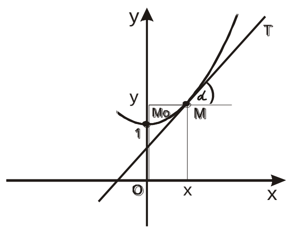
Муқаддима

§ 1. Баъзе масъалаҳо, ки ба мафҳуми муодилаи дифференсиалӣ меоранд

Пеш аз он, ки таърифи муодилаи дифференсиалӣ дода шавад ва мафҳумҳои асосии бо он алоқаманд ҷорӣ карда шаванд, ду масъаларо (яке аз геометрия, дигаре аз механика) дида мебароем , ки онҳо ба мафҳуми муодилаи дифференсиалӣ меоранд.

Масъалаи 1. *Хати каҷеро ёбед, ки он аз нуқтаи додашуда* $M_0(0;1)$ *гузашта, дар ҳар як нуқтааш коэффисиенти кунҷии расанда аз абтсиссаи нуқтаи расиш ду маротиба калон бошад*.

Ҳал. Бигузор $y = y(x)$ муодилаи хати каҷе бошад, ки аз нуқтаи $M_0(0;1)$ гузашта, дар ҳар як нуқтааш $M(x;y)$ шарти дар масъала гузошташударо қаноат кунонад. Ба воситаи α кунҷи байни расанда MT ва равиши мусбати тири Ox-ро ишора мекунем (нақш. 1). Маълум, ки коэффисиенти кунҷии расандаи MT $tg\alpha$ аст ва он, дар асоси маънои геометрии ҳосила, ба ҳосилаи функсияи $y(x)$ дар нуқтаи x баробар аст, яъне



Нақшаи 1

$$tg\alpha = y'.$$

Аз тарафи дигар, мувофиқи шарти масъала

$$tg\alpha = 2x$$

мебошад. Бинобар ин ҳосил мекунем

$$y' = 2x. \qquad (0.1)$$

Дар муодилаи (0.1) функсияи номаълум $y = y(x)$ дар таҳти аломати ҳосила ҷойгир аст, ё ин ки, бо ибораи дигар , муодилаи (0.1) ҳосилаи функсияи номаълумро дарбар мегирад. Чунин муодилаҳо, ки дар таркибашон ҳосилаи функсияи номаълум дохил гардидааст, *муодилаҳои дифференсиалӣ* номида мешаванд.

Ҳамин тавр, масъалаи мо ба муайян намудани функсияи $y = y(x)$, ки муодилаи дифференсиалии (0.1)-ро қаноат мекунонад, яъне ҳангоми гузоштан ба муодила онро ба айният табдил медиҳад, оварда шуд. Чунин функсия *ҳалли муодилаи дифференсиалӣ* номида мешавад ва протсесси ёфтани ҳалро *интегронии* ин муодила меноманд.

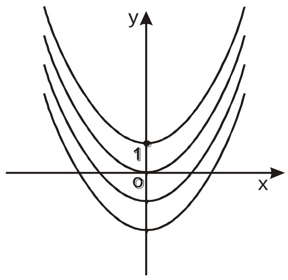
Аз курси ҳисоби интегралӣ бармеояд, ки ҳалли муодилаи (0.1)-ҳар гуна функсияи ибтидоӣ барои $2x$ мебошад, яъне

$$y = x^2 + c \qquad (0.2)$$

(c- доимии дилхоҳ) ҳалли муодилаи (0.1)-ро ифода мекунад.

Ҳамин тавр, вобаста аз қиматҳои доимии дилхоҳ c маҷмӯи беохири ҳалҳои муодилаи дифференсиалии (0.1)- ро ҳосил намудем, ки он бо формулаи (0.2) дода шудааст ва онро *ҳалли умумии* муодилаи (0.1) меноманд. Барои ҳар як қимати мушахаси адади c, аз (0.2) ҳалли мувофиқро ҳосил мекунем, ки онро *ҳалли хусусии* муодилаи (0.1) меноманд.

Хати каҷи $y = y(x)$, ки ёфтани онро масъала талаб менамояд, графики ҳалли муодилаи дифференсиалии (0.1) мебошад, ки онро *хати каҷи интегралии* ин муодила меноманд.



Накшаи 2

Ҳамин тавр, хатҳои каҷи интегралии муодилаи (0.1) - маҷмӯи параболаҳои (0.2) мебошад, ки ҳар яки онҳо аз параболаи $y = x^2$ дар натиҷаи аз рӯи тири Oy ба c воҳид параллел кучонидан ҳосил мегардад (нақшаи 2). Ҳамаи ин параболаҳо дорои як хосияти умумӣ мебошанд, ки онро муодилаи дифференсиалии (0.1) муайян менамояд: коэффисиенти кунҷии расанда дар ҳар як нуқтаи ҳар як параболаи маҷмӯи (0.2) аз абтсиссаи нуқтаи расиш ду маротиба калон мебошад.

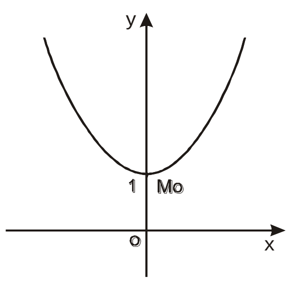
Мувофиқи шарти масъала, хати каҷи интегралӣ бояд боз як шарти иловагиро қаноат кунонад: он бояд аз нуқтаи додашуда $M_0(0;1)$ гузарад. Барои аз маҷмӯи хатҳои каҷи интегралии (0.2) ҷудо намудани чунин хати каҷ кифоя аст, ки дар муодилаи (0.2) тағйирёбандаҳо x, y - ро мувофиқан бо координатаҳои нуқтаи $M_0(0;1)$ иваз намуда, аз муодилаи ҳосилшуда қимати доимии дилхоҳ c-ро ёбем ва онро ба муодилаи (0.2) гузорем. Ин амалҳоро иҷро намуда, ҳосил мекунем:

$$1 = 0^2 + c; \quad c = 1; \quad y = x^2 + 1.$$

Ҳамин тавр, хати каҷе, ки шартҳои масъаларо қаноат мекунанд ин параболаи

$$y = x^2 + 1$$

мебошад (нақшаи 3).



Дар протсесси ҳали масъалаи

1 мо ба муодилаи дифференсиалии (0.1) омадем, ки ҳалли умумии он -функсияҳои (0.2) - ҳоло ҳалли масъаларо муайян намекунад. Нақшаи 3

Барои ёфтани ҳалли масъала боз як шарти иловагӣ - шарти аз нуқтаи додашуда гузоштани хати каҷ – лозим гардид, ки ин шартро бо тарзи математикӣ ин тавр баён кардан мумкин аст: аз байни функсияҳои (0.2) ҳамонашро ҷудо намудан лозим аст, ки қимати додашудаи $y=1$ -ро ҳангоми аргумент $x=0$ будан қабул менамояд. Чунин шартро *шарти ибтидоӣ* барои муодилаи дифференсиалӣ меноманд. Муодилаи дифференсиалиро бо шарти ибтидоӣ дар якҷоягӣ - *масъалаи ибтидоӣ* ё *масъалаи Коши* меноманд.

Ҳамин тавр, масъалаи 1 - масъалаи ибтидоӣ барои муодилаи (0.1) бо шарти ибтидоии $y(0)=1$ мебошад.

Масъалаи 2. *Нуқтаи материалӣ аз рӯи хати рости вертикалӣ дар зери таъсири қувваи вазнинӣ ҳаракат мекунад. Қонуни ҳаракати нуқта муайян карда шавад, агар мавқеъ ва суръати он дар ягон моменти вақт t_0 маълум бошад.*

Ҳал. Системаи координатаҳои росткунҷаи otx - ро чунин интихоб менамоем, ки ибтидои он дар сатҳи Замин ҷойгир шуда, тири Ox ба боло равон карда шуда бошад. Ба сифати хати рост, ки аз рӯи он нуқта ҳаракат мекунад, тири Ox-ро мегирем. Мавқеи нуқта ва суръати онро дар моменти вақти t_0 ба воситаи x_0 ва, мувофиқан, y_0 ишора мекунем.

Дар асоси маънои механикии ҳосилаи тартиби дуюм мо ба муодилаи дифференсиалии зерин меоем:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g\,, \qquad (0.3)$$

дар куҷо g- шитоби қувваи вазнинӣ мебошад. Масъалаи мо ба масъалаи ёфтани чунин ҳалли $x=x(t)$ муодилаи (0.3) оварда шуд, ки он шартҳои заринро қаноат мекунонад:

$$x=x_0\,,\quad \frac{dx}{dt}=y_0 \;\text{ ҳангоми }\; t=t_0 \text{ будан.} \qquad (0.4)$$

Ададҳои t_0, x_0, y_0- *қиматҳои ибтидоӣ* ва шартҳои (0.4) - *шартҳои ибтидоии* ҳал (ҳаракат) номида мешаванд. *Масъалаи ибтидоӣ* ё *масъалаи Коши* барои муодила (0.3) чунин гузошта мешавад: ҳалли муодилаи (0.3) ёфта шавад, ки шартҳои (0.4)-ро қаноат кунонад.

Баробарии (0.3) -ро пайдарпай ду маротиба интегронида ҳосил мекунем

$$\frac{dx}{dt} = -gt + c_1; \qquad (0.5)$$

$$x = -\frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2. \qquad (0.6)$$

Формулаи (0.6), ки дар он ҷо c_1 ва c_2- доимиҳои дилхоҳ мебошанд, ҳамаи халҳои муодилаи (0.3)- ро дарбар мегирад, яъне ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии (0.3)-ро ифода мекунад. Аз ин ҳалли умумӣ ҳамон ҳалро ҷудо менамоем, ки шартҳои ибтидоии (0.4)- ро қаноат кунонад, яъне ҳалли масъалаи ибтидоии (0.3), (0.4)-ро меёбем. Барои ин дар баробариҳои (0.5) ва (0.6) ба ҷои бузургиҳо t, x ва $\frac{dx}{dt}$ қиматҳои онҳо t_0, x_0, ва , мувофиқан, y_0- ро мегузорем. Бо мақсади осон намудани ҳисоб $t_0 = 0$ қабул намуда, ҳосил мекунем: $c_1 = y_0$, $c_2 = x_0$. Ин қиматҳои доимиҳоро ба (0.6) гузошта, қонуни матлуби ҳаракатро меёбем

$$x = -\frac{gt^2}{2} + y_0 t + x_0,$$

ки он чун ҳалли масъалаи ибтидоии (0.3), (0.4) муайян карда шуд.

Дар масъалаи дидабаромадаамон қонуни ҳаракат дар асоси шартҳои (0.4) муайян карда шуд, ки ин шартҳо дар як нуқтаи $t = t_0$ дода шуда буданд. Аксар вақт муодилаи дифференсиалӣ дар порчаи охирноки $[a,b]$ дода мешавад ва шартҳои иловагӣ на дар як нуқта, балки дар ду нуқтаҳои канорӣ гузошта мешаванд, ки онҳоро *шартҳои канорӣ* меноманд. Муодилаи дифференсиалӣ бо шартҳои канорӣ дар якҷоягӣ - *масъалаи канорӣ* номида мешавад.

§ 2. Таърифи муодилаи дифференсиалӣ ва мафҳумҳои асосии бо он вобаста

Пас аз он, ки баъзе масъалаҳои амалии ба мафҳуми муодилаи дифференсиалӣ орандаро дида баромадем, акнун метавонем таърифи муодилаи дифференсиалӣ ва мафҳумҳои бо он вобастаро дар ҳолатҳои умумӣ, аз нуқтаи назари математикӣ, ҷорӣ намоем.

Таърифи 1. *Муодилаи дифференсиалӣ* гуфта чунин муодиларо меноманд, ки он ҳосилаҳои функсияи номаълумро дарбар гирифта, инчунин метавонад худи функсияи номаълум ва тағйирёбандаи мустақил (новобастаро) низ дарбар гирифта бошад.

Фарз карда мешавад, ки тағйирёбандаи мустақил ҳама вақт аз соҳаи ададҳои ҳақиқӣ қимат қабул менамояд.

Дар назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ инчунин муодилаҳое омӯхта мешаванд, ки онҳо якчанд тағйирёбандаҳои мустақил, функсияи номаълум ва ҳосилаҳои хусусии онро дарбар мегиранд, масъалан

$$x\frac{dz}{dy}-y\frac{dz}{dx}=0,\quad z=z(x,y).$$

Чунин муодилаҳоро *муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусӣ* меноманд. Барои фарқ намудан, муодилаҳоеро, ки дар онҳо функсияи номаълум фақат аз як тағйирёбанда вобаста аст, *муодилаҳои дифференсиалии оддӣ* меноманд. Дар курси мазкур мо асосан муодилаҳои дифференсиалии оддиро меомӯзем.

Таърифи 2. *Тартиби муодилаи дифференсиалӣ* гуфта , тартиби калонтарини ҳосиларо меноманд, ки онро муодила дарбар гирифтааст.

Муодилае, ки дар масъалаи 1 ҳосил шуда буд, муодилаи тартиби як ва муодилаи ҳангоми ҳалли масъалаи 2 ҳосил шуда бошад, муодилаи тартиби ду мебошанд. Муодилаҳои

$$y^{(4)}+2yy'+xy=0,\quad y^{(5)}=\sin x$$

муодилаҳои тартиби чор ва, мувофиқан, панҷ мебошанд.

Аз таърифҳои дар боло овардашуда бармеояд, ки муодилаи дифференсиалии оддии тартиби n-ум чунин намуд дорад:

$$F\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0, \tag{0.7}$$

ки дар ин ҷо x- тағйирёбандаи мустақил, y- функсияи номаълум, $y',\cdots,y^{(n)}$- ҳосилаҳои ин функсия ва F- функсияи маълуми аз (n+2) – тағйирёбанда вобаста мебошад.

Агар муодилаи (0.7) нисбат ба ҳосилаи тартиби калонтарин $y^{(n)}$ ҳалшаванда бошад, он гоҳ онро ба намуди

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}\right) \tag{0.8}$$

навиштан мумкин аст, ки ин намудро *шакли нормалии* муодилаи тартиби n-ум меноманд. Масъалан, шакли нормалии муодилаи

$$\left(1+x^2\right)y^n-y'^2+1=0$$

чунин аст:

$$y''=\frac{y'^2}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}.$$

Агар тарафи рости муодилаи (0.8) нисбат ба $y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ хаттӣ вобаста бошад, онро ба намуди

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

навиштан мумкин аст, ки инро намуди умумии *муодилаи хаттии тартиби n-ум* меноманд.

Муодилаҳои хаттӣ дорои як қатор хосиятҳои ҷолиби диққат мебошанд ва чунин муодилаҳо дар бисёр соҳаҳо татбиқ карда мешаванд. Назарияи муодилаҳои хаттӣ дар боби IV муфассал омӯхта мешавад.

Таърифи 3. Ҳар гуна функсияи $y = y(x)$, ки дар интервали $(a, в)$ дорои ҳосилаҳои бефосилаи то тартиби n буда, дар ин интервал муодилаи дифференсиалии (0.7) -ро ба айният табдил медиҳад, яъне

$$F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) \equiv 0 \qquad (a < x < в),$$

ҳалли муодилаи (0.7) дар ин интервал номида мешавад.

Графики ҳалли муодилаи дифференсиалиро *хати каҷи интегралии* ин муодила меноманд.

Ҳалли муодилаи дифференсиалӣ баъзан дар намуди ноошкор

$$\phi(x, y) = 0$$

ва ё дар намуди параметрӣ

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (t\text{- параметр})$$

муайян карда мешавад.

Якчанд мисолҳои муодилаҳои диффренсиалӣ ва ҳалҳои (хатҳои каҷи интегралии) онҳоро дида мебароем.

Мисоли 1. Функсияи $y = \sin x$ дар интервали $(-\infty, +\infty)$ ҳалли муодилаи

$$y'' + y = 0 \qquad (0.9)$$

мебошад, чунки он дар ин интервал дилхоҳ маротиба бефосила дифференсирондашаванда буда, муодиларо ба айният табдил медиҳад:

$$(\sin x)'' + \sin x \equiv 0 \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Бинобар ин, синусоида - хати каҷи интегралии муодилаи (0.9) мебошад.

Дар ин ҷо ҳалли муодилаи (0.9) ба намуди ошкор $y = \sin x$ муайян карда шудааст.

Мисоли 2. Бигзор муодилаи

$$y' = \frac{1}{x} \qquad (0.10)$$

дода шуда бошад. Нишон медиҳем, ки баробарии

$$x - e^y = 0 \qquad (0.11)$$
ҳалли муодилаи (0.10)- ро ба намуди ноошкор муайян менамояд.

Дар ҳақиқат, баробарии (0.11)-ро дифференсиронида ҳосил мекунем: $1 - e^y \cdot y' = 0$. Дар ин ҷо қимати y'-ро аз баробарии (0.10) мегузорем:
$$1 - e^y \cdot \frac{1}{x} = \frac{x - e^y}{x} = 0.$$
Ин баробарӣ аз (0.11) ҳосил мегардад.

Хати каҷи интегралии муодилаи (0.10) - графики функсияи $y = \ln|x|$ мебошад.

Мисоли 3. Муодилаҳои
$$x = a\cos t, \quad y = в\sin t \qquad (0.12)$$
ҳалли муодилаи дифференсиалии
$$y' = -\frac{в^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \qquad (0.13)$$
-ро дар интервали $(0, \pi)$ муайян менамоянд, чунки дар ин интервал айнияти зерин ҷой дорад:
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{в\cos t}{-a\sin t} = -\frac{в^2}{a^2}\frac{a\cos t}{в\sin t} = -\frac{в^2}{a^2}\,\frac{x}{y}.$$
Функсияҳои (0.12) ҳалли муодилаи (0.13)-ро ба намуди параметрӣ муайян менамоянд.

Хати каҷи интегралии муодилаи (0.13) - эллипс бо нимтираҳои a ва $в$ мебошад.

§ 3. Вазифаи асосии назарияи муодилаҳои дифференсиалии оддӣ

Мисолҳои дар § 1 дида баромадаамон нишон медиҳанд, ки муодилаҳои дифференсиалии оддӣ, асосан, аз масъалаҳои физикӣ ва ё геометрӣ пайдо мегарданд. Ин муодилаҳоро интегронида ба саволҳои он масъалаҳо, ки моро ба чунин муодилаҳо меоранд, ҷавоб ёфта метавонем. Бинобар ин *вазифаи асосии назарияи муодилаҳои дифференсиалии оддӣ* аз ёфтани ҳамаи ҳалҳои чунин муодилаҳо ва омӯхтани хосиятҳои ин ҳалҳо иборат мебошанд.

Барои назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва татбиқоти он дар соҳаҳои гуногун, масъалаи ёфтан ва ё ақалан исботи мавҷудияти ҳал, ки шартҳои додашударо қаноат мекунонад, муҳимтарин ба ҳисоб меравад.

Қайд менамоем, ки масъалаи интегронии муодилаҳои дифференсиалиро бо тарзҳои гуногун маънидод кардан мумкин аст. Масъалан, агар мақсад гузошта шавад, ки функсияи номаълум ҳатман ба воситаи функсияҳои элементарӣ ифода карда шавад, он гоҳ чунин масъала ҳатто барои ифодаи соддатарин $y' = f(x)$ ҳам ҳалнашаванда аст. Зеро, чи хеле ки маълум аст, функсияи ибтидоӣ барои функсияи элементарӣ на ҳама вақт функсияи элементарӣ мебошад.

Масъалаи интегронии муодилаи дифференсиалӣ ба маънои васеътараш – ин ифода намудани функсияи номаълум ба воситаи интеграли номуайян аз функсияҳои дар муодила дохилбуда мебошад.

Ба сифати мисол муодилаи

$$y' = \frac{\sin x}{x} \qquad (0.14)$$

-ро дида мебароем. Формулаи

$$y = \int \frac{\sin x}{x} dx + c \qquad (c\text{-доимии дилхоҳ})$$

ҳамаи ҳалҳои муодиларо дарбар мегирад. Ин ҳалҳо ба воситаи функсияҳои элементарӣ ифода нашудаанд, лекин онҳо ба воситаи интеграли номуайян аз функсияи дар муодила дохилбуда $\frac{\sin x}{x}$ ифода ёфтаанд. Бинобар ин муодилаи (0.14) ба маънои васеъаш ҳалшаванда мебошад.

Агар муодилаи дифференсиалӣ ба маънои васеъаш ҳалшаванда бошад, он гоҳ мегӯянд, ки он *дар квадратураҳо интегронидашаванда* аст. (квадратура – амали гирифтани интеграли номуайян).

Минбаъд *муодилаи дифференсиалии дар намуди охирнок интегронидашаванда* гуфта, муодилае дар назар дошта мешавад, ки он дар функсияҳои элементарӣ ва дар квадратураҳо интегронидашаванда мебошад.

Дар курси лексияҳои мазкур нишон дода мешавад, ки миқдори зиёди муодилаҳо дар намуди охирнок интегронида мешаванд. Лекин ин миқдори муодилаҳо қисми ночизи ҳамаи муодилаҳои дифференсиалиро ташкил медиҳанд. Масъалан, муодилаи Бессел

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0,$$

ки дар бисёр масъалаҳо муҳим мебошад, дар ҳолати умумӣ дар квадратураҳо интегронида намешавад. Дар чунин ҳолатҳо *методҳои тақрибии ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ* истифода бурда мешаванд.

Аҳамияти татбиқи ин методҳо, махсусан ҳангоми истифода бурдани техникаю технологияҳои компютерии ҳозиразамон меафзояд.

Ҳамин тавр, вазифаи асосии назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ - ин, пеш аз ҳама, ёфтани ҳамаи ҳалҳои муодилаҳои дифференсиалӣ мебошад, ки шартҳои иловагии додашударо қаноат мекунонанд. Илова бар ин, дар назарияи умумии муодилаҳои дифференсиалӣ инчунин хосиятҳои функсияҳое омӯхта мешаванд, ки онҳоро муодилаҳои дифференсиалӣ, новобаста аз дар квадратураҳо интегронидашаванда будан ё нобуданашон, муайян менамоянд.

Дар курси лексияҳои мазкур методҳои асосии интегронидани типҳои гуногуни муодилаҳои дифференсиалии оддӣ оварда шудаанд. Теоремаҳои асосӣ дар бораи мавҷудият ва ягонагии ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ, инчунин теоремаҳои дар бораи вобастагии ҳалҳо аз худи муодила ва қиматҳои ибтидоӣ исбот кард шудаанд. Мафҳумҳо дар бораи масъалаҳои асосии назарияи умумии муодилаҳои дифференсиалӣ оварда шудаанд ва методҳои соддатарин тадқиқи функсияҳо, ки муодилаҳои дифференсиалӣ муайян менамоянд, ба монанди тадқиқи нуқтаҳои махсус, устувории ҳал ва ҳ.к., баён карда шудаанд.

Дар хотима қайд менамоем, ки муодилаҳои дифференсиалии оддӣ, ки худи онҳо дорои аҳамияти бузурги назариявӣ ва амалӣ мебошанд, барои бисёр дигар фанҳо, ба монанди муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусӣ, муодилаҳои физикаи математикӣ, ҳисобкуниҳои вариатсионӣ, механика, физика ва дигар илмҳои табиӣ, ҳамчун асос хизмат мекунад.

Боби I
Муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум

§1. Мафҳумҳо ва таърифҳои асосӣ

Мафҳумҳои асосӣ, ки ба муодилаҳои дифференсиалии тартиби якуми намуди умумӣ мансубанд, дида мебароем. Мувофиқи таърифҳои 1 ва 2-и дар муқаддима овардашуда, *муодилаи дифференсиалии тартиби якум* дар ҳолати умумӣ чунин намуд дорад:

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1.1)$$

дар кучо x - тағйирёбандаи мустақил, y - функсияи номаълум, y' - ҳосилаи он ва F - функсияи маълуми аз се тағйирёбанда вобастабуда мебошад.

Функсияи $y = y(x)$, ки дар интервали $(a,в)$ муайян ва бефосила дифференсиронидашаванда буда, муодилаи (1.1)- ро дар ин интервал ба айният табдил медиҳад

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0 \qquad (a < x < в),$$

ҳалли муодилаи (1.1) дар ин интервал номида мешавад.

Графики ҳал $y = y(x)$ *хати каҷи интегралии муодилаи* (1.1) номида мешавад.

Агар муодилаи (1.1) нисбат ба y' ҳалшаванда бошад, ин гоҳ вайро ба намуди

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1.2)$$

навиштан мумкин аст, ки дар ин ҷо f - функсияи маълуми аз ду тағйирёбанда вобастабуда мебошад. Ин намуди муодиларо *шакли нормалии* муодилаи дифференсиалии тартиби якум меноманд.

Агар муодилаи (1.2)-ро ба намуди

$$dy - f(x, y)dx = 0$$

нависем, муодилаи ҳосилгардида таносуби байни дифференсиалҳо dy ва dx -ро ифода менамояд. Дар назарияи муодилаҳои дифференсиалии оддӣ аксар вақт намуди умумии чунин муодила

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

дида баромада мешавад, ки дар ин ҷо $M(x,y)$ ва $N(x,y)$- функсияҳои маълуми дутағйирёбанда мебошанд. Азбаски дар ин муодила тағйирёбандаҳо x ва y симметрӣ дохил шудаанд, ин намуди муодиларо *шакли симметрии* муодилаи дифференсиалӣ меноманд. Дида баромадани муодилаҳои симметрӣ дар масъалаҳое, ки дар онҳо кадоме аз тағйирёбандаҳо (x ё y) мустақил ва кадоме аз онҳо вобаста буданаш муҳим ва ё маълум нест қулай мебошад.

Дар ҳолатҳои умумӣ муодилаи дифференсиалӣ на якто, балки бисёр ҳалҳо дорад. Масъалан, муодилаи

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{1.3}$$

ки ҳолати хусусии муодилаи (1.2) ҳангоми аз тағйирёбандаи y нововобаста будани тарафи рости он мебошад, аз курси таҳлили математикӣ ба мо маълум аст. Дар ин ҳолат функсияҳои

$$y = \int f(x)dx + c \quad (c\text{- доимии дилхоҳ}) \tag{1.4}$$

ҳалҳои муодилаи дифференсиалии додашуда мебошанд.

Формула (ё ин ки якчанд формулаҳо), ки ҳамаи ҳалҳои муодиларо муайян менамояд, *ҳалли умумии* муодила номида мешавад. Одатан дар формулаи ҳалли умумӣ, ғайр аз x, инчунин як ё якчанд параметрҳо дохил мегарданд, ки метавонанд қиматҳои дилхоҳро қабул намоянд. Барои ҳар як қимати параметр ҳалли мушахаси муодила ҳосил мегардад, ки онро *ҳалли хусусӣ* меноманд. Масъалан, агар барои муодилаи (1.3) шарти ибтидоӣ $y(x_0) = y_0$ дода шуда бошад, он гоҳ аз (1.4) ҳосил мекунем

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt,$$

ки ин ҳалли хусусии муодилаи (1.3) мебошад.

Дар баъзе ҳолатҳо муодила метавонад чунин ҳал дошта бошад, ки он аз формулаи ҳалли умумӣ барои ягон қимати параметр ҳосил намегардад. Чунин ҳалро *ҳалли махсус* меноманд. Дар чунин ҳолатҳо ҳалли умумии муодила аз формулаи ҳалҳои аз параметр вобаста буда ва ҳамаи ҳалҳои махсус иборат мебошад.

§2. Майдони равишҳо. Изоклина

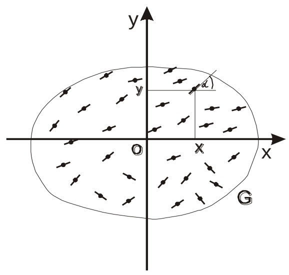
Муодилаи дифференсиалии (1.2) вобастагии байни координатҳои нуқтаро дар ҳамворӣ ва коэффисиенти кунҷии расандаро ба хати каҷи интегралӣ дар ин нуқта ифода менамояд.

Бигзор $y = y(x)$ - хати каҷи интегралии муодилаи (1.2) -ро муайян намоед. Аз нуқтаи $M(x, y)$-и ин хати каҷ ба он расанда мегузаронем. Бигзор $tg\alpha$ - коэффисиенти кунҷии расанда бошад. Он гоҳ $tg\alpha = y'(x)$ ва дар асоси (1.2) ҳосил мекунем

$$tg\alpha = f(x, y).$$

Аз ин баробарӣ дида мешавад, ки коэффисиенти кунҷии расандаро ба хати каҷи интегралӣ бе ёфтани худи ин хат муайян намудан мумкин аст.

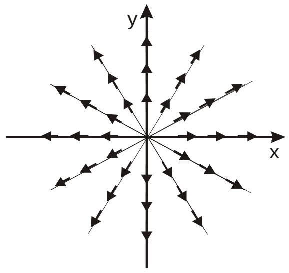
Бигзор G – соҳаи ҳамвории R^2 бошад, ки дар он тарафи рости муодилаи (1.2) муайян ва бефосила мебошад. Дар ҳар як нуқтаи $M(x, y)$ аз ин соҳа порчаи хати ростро (бо дарозии воҳидӣ) мегузаронем, ки коэффисиенти кунҷии он аз баробари $tg\alpha = f(x, y)$ муайян карда шудааст (нақш. 1). Ҳамин тавр, *майдони равишҳо* ҳосил мегардад, ки онро муодилаи (1.2) муайян намудааст. Ҳар як хати каҷи интегралии ин муодила дорои чунин хосият мебошад: *равиши расанда дар ҳар як нуқтаи он ба равиши майдон, ки ин муодила муайян намудааст, ҳамҷоя мегардад*.



Нақшаи 1

Мисоли 1. Муодилаи зеринро дида мебароем $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

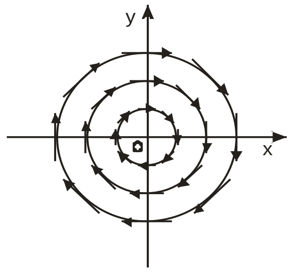
Дар ин ҳолат коэффисиенти кунҷии расанда ба хати каҷи интегралӣ дар ҳар як нуқтаи $M(x, y)$ (ғайр аз нуқтаи $O(0,0)$) ба $\frac{y}{x}$ баробар аст, яъне ба коэффисиенти кунҷии хати рост, ки аз ибтидои координатаҳо ба ин нуқта равон карда шудааст, баробар мебошад (нақш. 2). Маълум, ки хатҳои каҷи интегралӣ дар ин ҳолат хатҳои $y = cx$ мебошанд, чунки равиши онҳо бо равиши майдон ҳамҷоя мегардад.



Нақшаи 2

Мисоли 2. Акнун муодилаи зеринро дида мебароем: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Қайд менамоем, ки майдони равишҳои ин муодила дар тамоми ҳамворӣ (ғайр аз ибтидои координатаҳо) дода шудааст ва он ба майдони равишҳои мисоли 1 ортогонал мебошад, чунки ҳосили зарби тарафҳои рости ин муодилаҳо $\frac{x}{y}\left(-\frac{x}{y}\right)=-1$ мебошад.Бинобар ин хатҳои каҷи интегралии муодилаи додашуда давраҳое мебошанд, ки марказашон дар ибтидои координатаҳо ҷойгир шудаанд: $x^2+y^2=c^2$ (накш.3).



Нақшаи 3

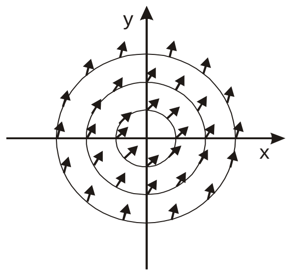
Таъриф. Ҷои геометрии нуқтаҳои ҳамворӣ, ки дар онҳо расандаҳо ба хати каҷи интегралии муодилаи дифференсиалӣ равиши доимиро нигоҳ медоранд, *изоклина* номида мешавад.

Аз таъриф бармеояд, ки $f(x,y)=k$ (k- доимӣ) муодилаи изоклина мебошад.

Дар мисоли зерин нишон медиҳем, ки барои муайян намудани майдони равишҳо изоклинаҳо чӣ тавр истифода бурда мешавад.

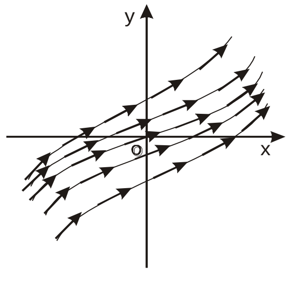
Мисоли 3. Муодилаи зеринро дида мебароем: $\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+y^2}$.

Муодилаи изоклина $\frac{dy}{dx}=k$ (k – доимӣ) мебошад. Бинобар ин барои муодилаи додашуда изоклинаҳоро аз баробарии $\sqrt{x^2+y^2}=k$ меёбем. Аз ин ҷо $x^2+y^2=k^2$, яъне давраҳои марказашон дар ибтидои координатаҳо ҷойгиршуда изоклинаҳо мебошанд. Ғайр аз ин , коэффисиенти кунҷии расанда ба хати каҷи интегралӣ ба радиуси давраи мувофиқ баробар мебошад (накш. 4).



Нақшаи 4

Ҳангоми $k=1$ будан хатҳои каҷи интегралӣ дар ҳар як нуқтаи давраи $x^2+y^2=1$ ба тири Ox дар зери кунҷи $\frac{\pi}{4}$ моил мебошад. Ҳангоми афзудани k моилии хатҳои каҷи интегралӣ низ меафзояд ва ин хатҳои каҷро ба тариқи схематикӣ чун дар нақшаи 5 тасвир намудан мумкин аст.



Нақшаи 5

Ҳангоми ба тарзи схематикӣ сохтани хатҳои каҷи интегралии муодилаи $y' = f(x, y)$, ғайр аз изоклина боз нуқтаҳои экстремум ва хамии хатҳои каҷи интегралиро истифода бурдан мумкин аст.

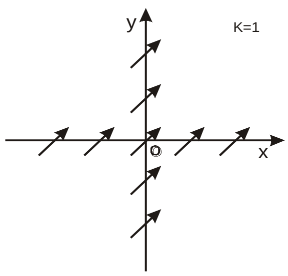
Дар ҳолати бефосила дифференсиронидашаванда будани $f(x, y)$ хатҳое, ки дар ҳар як нуқтаи онҳо y' ва y'' баробари нул мегарданд, мувофиқан, ба хатҳои экстремум ва нуқтаҳои хамии хатҳои каҷи интегралӣ шубаҳанок шуморида мешаванд ва ин хатҳо аз муодилаҳои $f(x, y) = 0$ ва, мувофиқан, $f'_x + f'_y \; f(x, y) = 0$ муайян карда мешаванд.

Мисоли 4. Муодилаи зеринро дида мебароем: $y' = 1 + xy$.

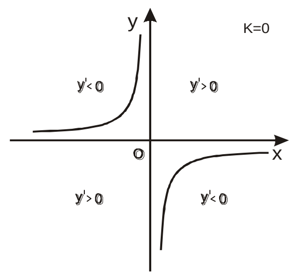
Гиперболаҳои $xy + 1 = k$ (k – доимӣ) барои муодилаи додашуда изоклинаҳо мебошанд.

Ҳангоми $k = 1$ будан гипербола ба ду хатҳои рости $x = 0$ ва $y = 0$ мубаддал мегардад. Майдони равишҳо дар ин ҳолат $(tg\alpha = 1)$ дар нақшаи 6 тасвир карда шудааст.

Ҳангоми $k = 0$ будан гиперболаи $xy + 1 = 0$ - ро ҳосил мекунем, ки он ҳамвориро ба қисмҳое тақсим менамояд, ки дар ҳар кадоми ин қисмҳо аломати y' доимӣ нигоҳ дошта мешавад (нақш.7). Хати каҷи интегралӣ $y = y(x)$ ҳангоми буридани ин гипербола аз соҳаи афзуншавӣ ба камшавӣ ва ё бараъкс, аз соҳаи камшавӣ ба афзуншавӣ мегузарад. Бинобар ин, дар шохаҳои ин гипербола нуқтаҳои экстремуми хати каҷи интегралӣ $y = y(x)$ ҷойгир гаштаанд.



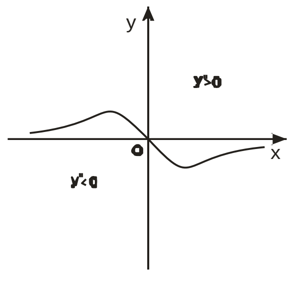
Нақшаи 6



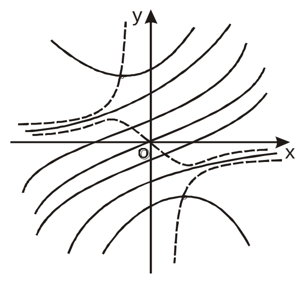
Нақшаи 7

Аломати y'' - ро муайян менамоем:

$$y'' = xy' + y = x(1 + xy) + y =$$
$$= x + x^2 y + y = x + (x^2 + 1)y.$$



Нақшаи 8



Нақшаи 9

Хати каҷи $x + (x^2 + 1)y = 0$, ё ин ки $y = -\dfrac{x}{1 + x^2}$ (нақш. 8) ҳамвориро ба қисмҳое ҷудо менамояд, ки дар ҳар кадоми онҳо аломати y'' доимӣ нигоҳ дошта мешавад. Бинобар ин дар ин қисмҳои ҳамворӣ хатҳои каҷи интегралӣ барҷаста ва ё, мувофиқан, фурӯхамида мебошанд. Дар худи нуқтаҳои ин хати кац бошад, нуқтаҳои хамии хати кaҷи интегралӣ ҷойгиранд.

Ҳамин тавр, соҳаи афзуншавӣ ва камшавии хатҳои каҷи интегралӣ, ҷойгиршавии нуқтаҳои экстремум, соҳаҳои барҷастагӣ, фурӯхамидагӣ ва нуқтаҳои хамии онҳо маълум гаштанд. Илова бар ин, изоклинаҳо $x=0,\ y=0\ (k=1)$ низ маълуманд. Ҳамаи ин маълумотҳо кифоя мебошанд, ки хатҳои каҷи интегралиро схематикӣ тасвир намоем (нақш. 9).

Дар бисёр масъалаҳо, махсусан, дар масъалаҳои геометрӣ, тағйирёбандаҳои x ва y баробарқувва мебошанд. Бинобар ин, барои чунин масъалаҳо дар қатори муодилаи

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

инчунин муодилаи

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}$$

- ро низ дида баромадан мумкин аст. Агар ҳар ду ин муодилаҳо маъно дошта бошанд, он гоҳ онҳо баробарқувва (эквивалент) мебошанд, яъне агар $y=y(x)$ - ҳалли муодилаи якум бошад, функсияи бараъкс $x=x(y)$ - ҳалли муодилаи дуюм мегардад, бинобар ин онҳо дорои хатҳои каҷи интегралии умумӣ мебошанд.

Агар дар баъзе нуқтаҳо яке аз муодилаҳо маъно надошта бошад, он гоҳ дар чунин нуқтаҳо онро бо муодилаи дуюм иваз менамоянд. Масалан, муодилаи $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ дар тири $x=0$ маъно надорад. Онро бо муодилаи $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}$ иваз менамоем, ки он дар тири $x=0$ маънои худро гум намекунад. Ба ҳалҳои муодилаи аввала $y=cx$ (ниг. мисоли 1) боз як хати каҷи интегралии муодилаи дуюм - $x=0$ - ро илова намудан лозим аст.

§3. Масъалаи Коши

Дар бисёр масъалаҳо, ки ба муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум оварда мешаванд, ёфтани ҳалле, ки ҳангоми қимати муайянро қабул намудани тағйирёбандаи новобаста низ қимати додашударо қабул менамояд, талаб карда мешавад. Чунин масъала *масъалаи ибтидоӣ* ё ин ки *масъалаи Коши* номида мешавад.

Барои муодилаи дифференсиалии (1.2) масъалаи Коши чунин гузошта мешавад: ҳалли $y = y(x)$ муодилаи дифференсиалии (1.2) - ро, ки *шарти ибтидоии (шарти Коши)* $y = y_0$, ҳангоми $x = x_0$ буданро, яъне

$$y(x_0) = y_0 \qquad (1.4)$$

-ро қаноат мекунонад, ёфта шавад. Ададҳои x_0, y_0 - қиматҳои ибтидоии масъалаи Коши номида мешаванд.

Дар ин ҷо фарз карда мешавад, ки тарафи рости муодилаи (1.2) дар нуқтаи (x_0, y_0) муайян шудааст.

Баъзан барои қайд кардани он, ки $y = y(x)$ - ҳалли муодила ва x_0, y_0- қиматҳои ибтидоӣ мебошанд, онро чунин менависанд:

$$y = y(x; x_0, y_0) \qquad (1.5)$$

Маънои геометрии масъалаи Коши - ин ёфтани хати каҷи интегралие мебошад, ки он аз нуқтаи додашуда $M_0(x_0, y_0)$ мегузарад.

Дар назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва татбиқоти он масъалаи ниҳоят муҳим – ин ёфтани шартҳои мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи Коши мебошад.

Мегӯянд, ки масъалаи Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

ҳалли ягона дорад, агар чунин атрофи $|x - x_0| < \delta$ нуқтаи x_0- ро нишон додан мумкин бошад, ки дар он ҳалли (1.5) муайян шудааст ва дигар ҳал $y = y_1(x; x_0, y_0)$, ки он низ дар ин атроф муайян шудаасту қимати он ақалан дар як нуқтаи аз x_0 фарққунанда бо (1.5) ҳамҷоя намешавад, вуҷуд надошта бошад. Дар акси ҳол мегӯянд, ки ягонагии ҳалли масъалаи Коши ҷой надорад.

Ягонагии ҳалли масъалаи Коши аз функсияи $f(x, y)$ ва аз қиматҳои ибтидоӣ вобаста мебошад.

Агар тарафи рости муодилаи (1.2) дар худи нуқтаи (x_0, y_0) муайян нашуда бошад, вале дар ягон атрофи он муайян гашта бошад, он гоҳ чунин нуқтаро *нуқтаи махсуси* муодилаи дифференсиалӣ меноманд. Масъалаи мавҷудияти хатҳои каҷи интегралӣ, ки ба нуқтаҳои махсус (x_0, y_0) наздик мешаванд, низ ба миён меояд.

Масалан, дар муодилаҳои дар мисолҳои 1 ва 2 – и параграфи гузашта дида баромадаамон нуқтаи $(0,0)$- нуқтаи махсус мебошад. Дар муодилаи мисоли 1 ҳамаи ҳалҳо ба ин нуқтаи махсус наздик мешаванд, вале дар муодилаи мисоли 2 бошад, ягон ҳал ба ин нуқта наздик намешавад.

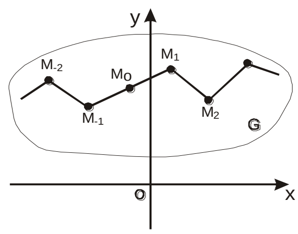
§3. Теоремаи мавҷудият ва ягонагии ҳалли муодилаи $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Синфи муодилаҳои дифференсиалии дар квадратура интегронидашаванда ниҳоят маҳдуд мебошад. Бинобар ин методҳои ҳали тақрибӣ дар назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ аҳамияти калон доранд. Аммо барои он, ки методҳои интегронии тақрибӣ барои ҳали муодилаҳои дифференсиалӣ татбиқ карда шаванд, бояд боварӣ дошт, ки ҳалли муодила вуҷуд дорад ва он ягона аст. Дар акси ҳол маълум нест, ки кадом ҳалли муодиларо бояд тақрибӣ муайян намуд.

Оё бе интегронии муодила, аз намуди аналитикии тарафи рости он ва қиматҳои ибтидоӣ x_0, y_0 дар бораи мавҷудият ва ягонагии ҳалли муодила хулоса баровардан мумкин аст? Теоремаҳои зерин, ки дар ин параграф оварда мешаванд, ба ин савол ҷавоб мегӯянд.

Фарз мекунем, ки тарафи рости муодилаи (1.2) дар ягон соҳаи $G \subset R^2$
муайян ва нисбат ба x, y бефосила мебошад. Он гоҳ ин муодила дар G майдони равишҳоро муайян мекунад, ки он дар асоси бефосилагии тарафи рости муодила низ бефосила мебошад, яъне равишҳо дар ду нуқтаҳои байни ҳам наздик аз ҳамдигар бо бузургии беохир хурд фарқ мекунанд. Ҳар як хати каҷи интегралӣ чунин хосият дорад, ки дар ҳар як нуқтаи он равиши расанда ба равиши майдон , ки муодилаи дифференсиалӣ ба вуҷуд меорад, ҳамҷоя мегардад. Ин хосияти хати каҷи интегралиро истифода бурда мавҷудияти ҳалли масъалаи Коширо барои муодилаи (1.2) бо қиматҳои ибтидоии $(x_0, y_0) \in G$ исбот кардан мумкин аст.

Дар соҳаи G нуқтаи $M_0(x_0 y_0)$ - ро мегирем. Самти майдон дар ин нуқта бо бузургии $f(x_0, y_0)$ муайян карда мешавад. Аз нуқтаи M_0 хати рост бо коэффисиенти кунҷии $f(x_0, y_0)$ мегузаронем. Дар ин хати рост нуқтаи $M_1(x, y_1)$ - ро мегирем,



Нақшаи 10

ки он аз соҳаи G бошад ва аз он хати рост бо коэффисиенти кунҷи, ки ададан ба бузургии самти майдонро дар ин нуқта муайянкунанда, яъне ба $f(x_1, y_1)$ баробар аст, мегузаронем. Дар ин хати рост нуқтаи

$M_2(x_2 y_2)$- ро $(M_2(x_0, y_0) \in G)$ гирифта, аз он хати рост бо коэффисиенти кунҷӣ $f(x_2, y_2)$ мегузаронем ва ҳ.к.

Чунин амалиётро ба тарафи чапи нуқтаи $x = x_0$ низ гузаронидан мумкин аст (ниг. нақш. 10).

Хати шикастаи ҳосилшударо *хати шикастаи Эйлер* меноманд.

Маълум, ки миқдори беохири хатҳои шикастаи Эйлерро, ки аз нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ мегузаранд, сохтан мумкин аст, ки онҳо аз ҳамдигар бо дарозии қитъаҳои худ фарқ мекунанд. Ҳар як чунин хати шикастаи Эйлер бо қитъаҳои кифоя хурд, дар бораи хати каҷи интегралӣ, ки аз ин нуқта мегузарад, маълумот дода метавонад, (агар чунин хати каҷи интегралӣ вуҷуд дошта бошад).

Ҳамин тавр, мо метавонем пайдарпаии беохири хатҳои шикастаи Эйлерро тартиб диҳем, ки ҳудуди он, ҳангоми дарозии қитъаҳои онҳо ба нул майл намудан, хати каҷи интегралии аз нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ гузаранда бошад. Чунин ҳолат ҳангоми иҷро гардидани шартҳои нисбат ба тарафи рости муодилаи (1.2) гузоштаамон ҷой дошта метавонад. Яъне теоремаи зерин ҷой дорад:

Теоремаи Пеано. *Барои мавҷудияти ҳалли бефосила дифференсиронидашавандаи масъалаи Кошӣ*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

кифоя аст, ки $f(x, y)$ *дар атрофи нуқтаи* $M_0(x_0, y_0)$ *бефосила бошад.*

Қайд менамоем, ки якчанд пайдарпаиҳои хатҳои шикастаи Эйлер, ки аз нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ мегузаранд, вуҷуд дошта метавонанд ва ҳар кадоми онҳо ба хати каҷи интегралии худ майл менамояд. Яъне дар ҳолати умумӣ, ягонагии хати каҷи интегралии аз нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ гузаранда таъмин карда намешавад.

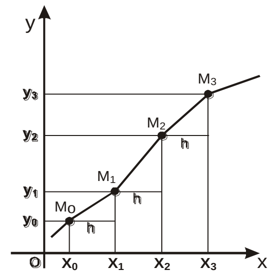
Ҳамин тавр, теоремаи Пеано фақат мавҷудияти ҳалли масъалаи Коширо таъмин намуда, ягонагии онро кафолат намедиҳад.

Аксар вақт исботи теоремаи мавҷудияти ҳал дар як вақт методи ёфтани ҳалли тақрибии муодиларо муайян мекунад. Масалан, теоремае, ки мо онро дар боло баён намудем, *методи Эйлер дар бораи интегронии тақрибии муодилаи дифференсиалиро* асоснок мекунад. Мазмуни ин метод чунин аст: хати каҷи интегралии аз нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ гузарандаи муодилаи

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.6}$$

бо хати шикаста, ки ҳар як қитъаи он расанда ба хати каҷи интегралӣ дар яке аз нуқтаҳои сарҳадӣ мебошад, иваз карда мешавад (нақш. 11).

Барои татбиқи ин метод порчаи $x_0 \le x \le b$ бо нуқтаҳои $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, $x_n = b$ ба n қисмҳои баробар тақсим карда мешавад. Дарозии ҳар як қисми он $x_{i+1} - x_i = h$ - *қадами ҳисобкунӣ* номида мешавад. Қимати тақрибии ҳалро дар нуқтаи x_i ба воситаи y_i ишора мекунем.



Нақшаи 11

Барои ҳисоб кардани y_1 хати каҷи интегралиро дар порчаи $x_0 \le x \le x_1$ ба расандаи он дар нуқтаи (x_0, y_0) иваз менамоем: $y = y_0 + y_0'(x - x_0)$, дар куҷо $y_0' = f(x_0, y_0)$. Дар ин муодила $x = x_1$ гузошта, меёбем:

$$y_1 = y_0 + hy_0' \qquad (y_0' = f(x_0, y_0))$$

Айнан хамин тавр ҳисоб мекунем:

$$y_2 = y_1 + hy_1', \ \text{дар куҷо} \ \ y_1' = f(x_1, y_1);$$

$$y_3 = y_2 + hy_2', \ \text{дар куҷо} \ \ y_2' = f(x_2, y_2);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n = y_{n-1} + hy_{n-1}', \ \text{дар куҷо} \ \ y_{n-1}' = f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Нуқтаҳои $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1), \cdots, M_n(x_n, y_n)$ - ро бо порчаҳои хати рост ба ҳам пайваст карда хати шикастаи Эйлерро ҳосил мекунем, ки онро ҳамчун ҳалли тақрибии муодилаи дифференсиалӣ қабул намудан мумкин аст.

Дар асоси теоремаи Пеано, ҳангоми $h \to 0$, хатҳои шикастаи Эйлер ба хати каҷи интегралӣ наздик мешаванд. Бинобар ин, бо камшавии қадами ҳисобкунӣ h методи Эйлер қимати аниқтари ҳалли матлубро муайян менамояд.

Камбудии асосии методи Эйлер аз он иборат мебошад, ки барои баланд кардани дараҷаи саҳеҳӣ, қадами ҳисобкунӣ h-ро кифоя хурд гирифтан лозим аст, ки ин ба ҳисобкуниҳои дуру дароз меорад. Бинобар ин методи Эйлер дар ҳисобкуниҳои тақрибӣ кам истифода бурда мешавад. Дигар методҳои ҳалли тақрибии муодилаҳои дифференсиалӣ мавҷуданд, ки истифодаи онҳо дар амалияи ҳисобкуниҳои тақрибӣ самараноктар мебошанд. Чунин методҳо дар курси “Методҳои ададӣ” омӯхта мешаванд.

Чӣ тавре, ки дар боло қайд карда шуд, теоремаи Пеано фақат мавҷудияти ҳалли масъалаи Коширо барои муодилаи (1.6) бо шарти ибтидоии

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.7}$$

таъмин намуда, ягонагии онро кафолат намедиҳад. Ҳоло мо ба тарафи рости муодилаи (1.6) баъзе шартҳои иловагиро гузошта, мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи Кошӣ (1.6) - (1.7) -ро исбот менамоем. Теоремае, ки дар ин ҷо оварда мешавад, теоремаи локалии мавҷудият ва ягонагии ҳал номида мешавад ва он бо номи олимони француз Коши Луи (1789-1857) ва Пикар Шарл (1856-1941) алоқаманд мебошад.

Теоремаи Коши - Пикар ***(дар бораи мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи Коши барои муодилаи*** (1.6)***).***

Бигзор функсияи $f(x,y)$ *нисбат ба тағйирёбандаҳояш* x, y *дар соҳаи* $D: x_0 - a \le x \le x_0 + a,\ y_0 - b \le y \le y_0 + b$ *бефосила буда, дар он нисбат ба тағйирёбандаи дуюм* y *шарти зеринро қаноат кунонад:*

$$|f(x,y) - f(x,z)| \le L|y - z| \quad (0 < L < \infty). \tag{1.8}$$

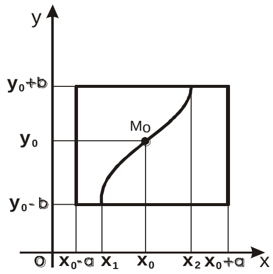
Он гоҳ ҳалли ягонаи $y = \bar{y}(x)$ *муодилаи* (1.6), *ки шарти* (1.7)*- ро қаноат мекунонад, вуҷуд дорад ва он дар порчаи* $x_0 - H \le x \le x_0 + H$ *муайян ва бефосила дифференсиронидашаванда мебошад, ки дар ин ҷо*

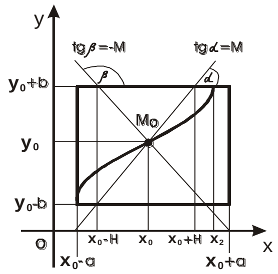
$$H = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \tag{1.9}$$

ва $M = \max\limits_{D}|f(x,y)|$ *мебошад.*

Қайд менамоем, ки шарти (1.8) -ро бори аввал математики олмонӣ Липшитс Рудолф (1832-1903) нишон додааст ва он дар адабиёт ҳамчун *шарти Липшитс* маълум аст.

Инчунин қайд кардан ҷоиз аст, ки мавҷудияти ҳалли $y = \bar{y}(x)$, ки шарти (1.7)- ро қаноат мекунонад, дар тамоми порчаи $x_0 - a \le x \le x_0 + a$ таъмин намудан мумкин нест, чунки хати каҷи интегралӣ $y = \bar{y}(x)$ метавонад тарафҳои горизонталии соҳаи D-ро $y = y_0 \pm b$ бурида аз он берун шавад ва, ниг. нақш.12, ҳал метавонад дар порчаҳои $x_0 - a \le x \le x_1,\ x_2 \le x \le x_0 + a$ вуҷуд надошта бошад.





Нақшаи 12 Нақшаи 13

Агар $x_0 - H \le x \le x_0 + H$ бошад, дар куҷо H нобаробарии (1.9) - ро қаноат мекунонад, он гоҳ хати каҷи интегралӣ $y = \overline{y}(x)$ аз соҳаи D берун намебароянд, чунки дар ин ҳолат коэффисиенти кунҷии расанда ба хати каҷи интегралӣ $y = \overline{y}(x)$ дар байни коэффисиентҳои кунҷии M ва –M хатҳои рости дар нақшаи 13 тасвиршуда ҷойгир мебошад. Агар ин хатҳои рост, ки дар байни онҳо хати каҷи интегралӣ $y = \overline{y}(x)$ ҷойгир аст, аз соҳаи D ба воситаи тарафҳои горизонталии он $y = y_0 \pm b$ берун шаванд, он гоҳ абтсиссаи нуқтаҳои буриши ин хатҳои рост бо ин тарафҳо $x_0 \pm \frac{b}{M}$ мебошад. Бинобар ин, абтсиссаи нуқтаи буриши хати каҷи интегралӣ бо тарафҳои $y = y_0 \pm b$ метавонад аз $x_0 + \frac{b}{M}$ хурд ё баробар ва аз $x_0 - \frac{b}{M}$ калон ё баробар бошад.

Исботи теоремаи Коши - Пикар. Муодилаи дифференсиалии (1.6) бо шартҳои ибтидоии (1.7) ба муодилаи интегралии

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \qquad (1.10)$$

эквивалент мебошад.

Дар ҳақиқат, агар функсияи $y = \overline{y}(x)$ муодилаи (1.6)-ро ба айният табдил диҳад ва шарти (1.7)- ро қаноат кунонад, он гоҳ айнияти (1.6)-ро интегронида, шарти (1.7)- ро ба инобат гирифта, ҳосил мекунем, ки $y = \overline{y}(x)$ муодилаи (1.10)- ро низ ба айният табдил медиҳад. Баръакс, агар функсияи $y = \overline{y}(x)$ муодилаи (1.10)- ро ба айният табдил диҳад, вай шарти (1.7)- ро қаноат мекунонад. Айнияти (1.10)- ро дифференсиронида ҳосил мекунем, ки $y = \overline{y}(x)$ муодилаи (1.6)-ро низ ба айният табдил медиҳад.

Муодилаи интегралии (1.10) -ро бо методи пайдарпай наздикшавӣ ҳал менамоем. Ба сифати наздикшавии ибтидоӣ адади y_0 -ро мегирем ва наздикшавии якӯмро чунин интихоб менамоем:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds \qquad (x \in [x_0 - H; x_0 + H]).$$

Дидан душвор нест, ки $y_1(x_0) = y_0$, яъне наздикшавии якӯм шарти ибтидоии (1.7)-ро қаноат мекунонад. Ғайр аз ин,

$$|y_1(x)-y_0| \le \int_{x_0}^{x} |f(s,y_0)|\,ds \le M|x-x_0| \le MH \le M\,\frac{b}{M} = b,$$

яъне $y_1(x)$ дар соҳаи D ҷойгир аст.

Наздикшавии дуюмро тартиб медиҳем

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds \qquad (x \in [x_0 - H, x_0 + H]).$$

Аз ин ҷо $y_2(x_0) = y_0$ ва $|y_2(x) - y_0| \le b$. Яъне $y_2(x)$ низ шарти ибтидоии (1.7) -ро қаноат мекунонад ва дар соҳаи D ҷойгир аст.

Ва ҳоказо, наздикшавии n-ӯмро аз рӯи формулаи

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds \qquad (x \in [x_0 - H, x_0 + H]) \tag{1.11}$$

тартиб дода ҳосил мекунем, ки пайдарпаии наздикшавиҳо $y_n(x)$ барои ҳамаи қиматҳои $n = 1,2,\cdots$ шарти ибтидоӣ $y_n(x_0) = y_0$ -ро қаноат мекунонанд ва дар соҳаи D ҷойгиранд.

Нишон медиҳем, ки ҳудуди пайдарпаии $\{y_n(x)\}$ вуҷуд дорад:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \bar{y}(x) \tag{1.12}$$

ва функсияи ҳудудӣ $\bar{y}(x)$ - ҳалли муодилаи интегралии (1.10) мебошад.

Мавҷуд будани ҳудуди пайдарпаии $\{y_n(x)\}$ ба наздикшавии қатори

$$y_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} [y_{n+1}(x) - y_n(x)] \tag{1.13}$$

баробарқувва мебошад (суммаи қисмии $S_n(x)$ қатор ба $y_n(x)$ баробар аст). Бинобар ин, агар нишон дода шавад, ки қатори (1.13) наздикшаванда аст ва суммаи он $\bar{y}(x)$ мебошад, пас баробарии (1.12) исбот мегардад.

Наздикшавандагии қатори функсионалии (1.13) -ро бо истифода аз аломати Вейерштрасс (агар барои қатори (1.13) қатори мажорантии ададии наздикшаванда вуҷуд дошта бошад, он гоҳ қатори (1.13) мутлақ ва мунтазам наздикшаванда мебошад) исбот менамоем.

Қимати мутлақи аъзои қатори (1.13) -ро баҳо медиҳем.

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds \right| \le M|x - x_0|,$$

$$|y_2 - y_1| = \left| \int_{x_0}^{x} \{ f(s, y_1) - f(s, y_0)\} ds \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} | f(s,y_1) - f(s, y_0)| ds \right|.$$

Дар асоси шарти Липшитс ҳосил мекунем:

$$\left|y_2-y_1\right|\le L\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_1-y_0\right|ds\right|\le LM\left|x-x_0\right|\left|\int_{x_0}^{x}ds\right|=\frac{ML}{1\cdot 2}\left|x-x_0\right|^2.$$

Айнан ҳамин тавр

$$\left|y_3-y_2\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|f\left(s,y_2\right)-f\left(s,y_1\right)\right|ds\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}L\left|y_2-y_1\right|ds\right|\le\frac{ML^2}{1\cdot 2\cdot 3}\left|x-x_0\right|^3.$$

Аз се нобаробариҳо, ки мувофиқан барои $\left|y_1-y_0\right|$, $\left|y_2-y_1\right|$ ва $\left|y_3-y_2\right|$ ҳосил намудем, дар асоси методи индуксияи математикӣ исбот карда мешавад, ки барои ҳамаи қиматҳои $n=0,1,2,\cdots$ нобаробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\left|y_{n+1}-y_n\right|\le\frac{ML^n}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}.$$

Аз ин ҷо, агар $\left|x-x_0\right|\le H$ буданашро ба инобат гирем, ҳосил мекунем, ки қимати мутлақи ҳар як аъзои қатори функсионалии (1.13) аз аъзои мувофиқи қатори ададии мусбати зерин

$$MH+M\frac{LH^2}{2!}+M\frac{LH^3}{3!}+\cdots+M\frac{L^nH^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots \qquad (1.14)$$

зиёд намебошад, яъне қатори (1.14) барои қатори функсионалии (1.13) - қатори мажорантӣ мебошад.

Ба қатори ададии мусбати (1.14) аломати наздикшавандагии Даламберро татбиқ намуда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{ML^nH^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{ML^{n-1}H^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{LH}{n+1}=0<1$$

ҳосил мекунем, ки он наздикшаванда мебошад. Бинобар ин, дар асоси аломати Вейерштрасс қатори (1.13) барои ҳамаи қиматҳои $x\in\left[x_0-H,x_0+H\right]$ мунтазам наздикшаванда мебошад.

Ҳар як аъзои қатори (1.13) функсияи бефосила мебошад, чунки интеграл бо ҳудуди болоии тағйирёбанда аз ҳудуди болоӣ бефосила вобаста мебошад. Бинобар ин суммаи қатори (1.13) $\bar{y}(x)$ вуҷуд дорад ва он ҳамчун ҳудуди мунтазами пайдарпаии функсияҳои бефосила - функсияи бефосила мебошад.

Ҳамин тавр, нишон дода шуд, ки пайдарпаии $\left\{y_n(x)\right\}$ мунтазам наздикшаванда мебошад: $\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)=\bar{y}(x)$.

Акнун нишон медиҳем, ки $\bar{y}(x)$ - ҳалли муодилаи интегралии (1.10) мебошад. Барои ин дар баробарии (1.11) ба ҳудуд мегузарем. Азбаски $y_n(x)$ ба $\bar{y}(x)$ мунтазам наздик мешавад ва $f(x,y)$ нисбат ба ҳар ду тағйирёбандаҳояш бефосила мебошад, пас $f\left(x,y_n(x)\right)$ ҳангоми $n\to\infty$

ба $f\left(x,\bar{y}(x)\right)$ мунтазам наздик мешавад. Бинобар ин, дар баробарии (1.11) ба ҳудуд гузаштан мумкин аст ва баъди иҷроии ин амал ҳосил мекунем

$$\bar{y}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\left(s,\bar{y}(s)\right)ds,$$

яъне $\bar{y}(x)$ - ҳалли муодилаи интегралии (1.10) мебошад. Азбаски муодилаи (1.10) ба масъалаи Коши (1.6) - (1.7) эквивалент аст, пас мавҷудияти ҳалли муодилаи (1.6), ки шарти ибтидоии (1.7)-ро қаноат мекунонад, исбот карда шуд.

Акнун ягонагии ҳалли масъалаи Коши (1.6) - (1.7)-ро нишон медиҳем. Бигзор муодилаи (1.10) ду ҳалҳои ихтиёрии бо ҳам ҳамҷоя нашавандаи $y(x)$ ва $z(x)$ дошта бошад, яъне

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds,$$

$$z(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,z(s))ds.$$

Ин баробариҳоро аз ҳамдигар тарҳ намуда ва боз шарти *Липшитс*ро истифода бурда, ҳосил мекунем

$$|y(x)-z(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(s,y(s))-f(s,z(s))]ds\right|\le$$
$$\le\int_{x_0}^{x}|f(s,y(s))-f(s,z(s))|ds\le L\int_{x_0}^{x}|y(s)-z(s)|ds \tag{1.15}$$

Бигзор $K=\max|y(x)-z(x)|$ бошад. Он гоҳ аз нобаробарии (1.15) дар асоси индуксия формулаи зерин ҳосил мегардад:

$$|y(x)-z(x)|\le K\frac{L^n|x-x_0|^n}{n!}.$$

Дар ин формула ба ҳудуд гузашта ҳосил мекунем

$$|y(x)-z(x)|\le 0,$$

ки фақат дар ҳолати $y(x)\equiv z(x)$ будан ҷой дошта метавонад.

Ҳамин тавр, ду ҳалҳои ба тарзи ихтиёрӣ гирифташуда ҳамҷоя мегарданд, яъне дар асл ҳал ягона мебошад.

Теорема пурра исбот гардид.

Қайд. Шарти *Липшитс* барои функсияи $f(x,y)$ иҷро мегардад, агар $f(x,y)$ дар ҳар як нуқтаи соҳаи D нисбат ба y ҳосилаи хусусӣ $f'_y(x,y)$ дошта бошад ва он маҳдуд бошад

$$|f'_y(x,y)|\le N. \tag{1.16}$$

Дар ҳақиқат, дар асоси теоремаи Лагранж дар бораи афзоиши охирноки функсия баробарии зерин ҷой дорад:

$$f\left(x,\bar{y}\right)-f\left(x,\bar{\bar{y}}\right)=f'_y\left[x,\theta\left(\bar{\bar{y}}-\bar{y}\right)\right]\left(\bar{y}-\bar{\bar{y}}\right)\quad(0<\theta<1).$$

Аз ин ҷо, дар асоси (1.16) нобаробарии (1.8) ҳосил мегардад.

Шарти Липшитс инчунин метавонад дар ҳолате иҷро гардад, ки ҳосила $f'_y(x,y)$ на дар ҳамаи нуқтаҳои соҳа вуҷуд дорад. Масалан, функсияи $f(x,y)=|y|$ дар нуқтаи $y=0$ ҳосила надорад, вале нобаробарии

$$\left|\left|\bar{y}\right|-\left|\bar{\bar{y}}\right|\right|\le\left|\bar{y}-\bar{\bar{y}}\right|$$

ҳама вақт иҷро мегардад, яъне шарти (1.8), ки дар он $L=1$ аст, ҷой дорад.

Ҳамин тавр, талаботи шарти Липшитс нисбат ба дифференсиронидашавандагӣ сусттар мебошад ва синфи васеъи функсияҳоро дарбар мегирад.

§5. Теорема дар бораи вобастагии бефосилаи ҳал аз қиматҳои ибтидоӣ

Дар ин параграф масъалаи вобастагии ҳалли масъалаи Коширо аз қиматҳои ибтидоӣ дида мебароем. Агар қиматҳои ибтидоӣ камтар тағйир дода шаванд ҳалли масъала чӣ гуна тағйир меёбад? Оё тағйироти ӯ низ кам мебошад? Ин масъала аҳамияти ниҳоят калони амалӣ дорад: хатогии ҳисобкуниҳои қиматҳои ибтидоии масъалаи Коши ба худи ҳал чӣ гуна таъсир мерасонад? Дар ҳолати ба тағйироти дилхоҳ хурди қиматҳои ибтидоӣ мувофиқ омадани тағйироти дилхоҳ хурди ҳал мегӯянд, ки *ҳал аз қиматҳои ибтидоӣ бефосила вобаста* мебошад.

Нишон додан мумкин аст, ки ҳангоми иҷро гардидани шартҳои теоремаи Коши - Пикар вобастагии бефосилаи ҳал аз қиматҳои ибтидоӣ ҷой дорад.

Теорема (*дар бораи вобастагии бефосилаи ҳал аз қиматҳои ибтидоӣ*). *Бигзор функсияи $f(x,y)$ дар соҳаи D: $x_0-a\le x\le x_0+a$, $y_0-b\le y\le y_0+b$ шартҳои теоремаи Коши - Пикарро қаноат кунонад. Он гоҳ ҳалли $y=y\left(x;x^*,y^*\right)$ муодилаи (1.6), ки шарти ибтидоии $y\left(x^*\right)=y^*$ - ро қаноат мекунонад, дар соҳаи*

$$\left|x-x_0\right|<\frac{H}{2}-\delta,\ \left|x^*-x_0\right|\le\delta,\ \left|y^*-y_0\right|\le\frac{b}{2}$$

$$\left(H=\min\left(a,\frac{b}{M}\right),\ 0\le\delta<\frac{H}{2}\right)$$

функсияи бефосила нисбат ба x *ва қиматҳои ибтидоӣ* x^*, y^* *мебошад. Илова бар ин, функсияи* $y(x,x^*,y^*)$ *ҳамчун функсияи қиматҳои ибтидоӣ* x^*, y^*, *дар соҳаи*

$$|x-x_0|\le\frac{H}{2}-\delta,\ |y^*-y_0|\le\frac{b}{2}$$

нисбат ба x *аз порчаи* $|x-x_0|\le\frac{H}{2}-\delta$ *мунтазам бефосила мебошад.*

Исботи ин теорема аз рӯи схемаи исботи теоремаи Коши - Пикар гузаронида мешавад.

§6. Ҳалҳои умумӣ, хусусӣ ва махсус

Муодилаи

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.17}$$

-ро дида мебароем. Маълум, ки дар ҳолати гузоштани шартҳои муайян ба тарафи рости ин муодила, он метавонад миқдори беохири ҳалҳо дошта бошад. Маҷмӯи ҳалҳои муодилаи (1.17), ки аз як доимии дилхоҳ c вобаста мебошад

$$y=\varphi(x,c), \tag{1.18}$$

ҳалли умумии ин муодила номида мешавад.

Ҳар гуна ҳал, ки аз формулаи ҳалли умумӣ (1.18) ҳангоми қимати хусусӣ қабул намудани доимии дилхоҳ c ҳосил мегардад, *ҳалли хусусии* муодила номида мешавад.

Мисоли 5. Барои муодилаи

$$y'=2\sqrt{y},\quad y\ge 0 \tag{1.19}$$

ҳалли умумӣ $y=(x+c)^2$ (c - доимӣ) мебошад.

Ҳалли $y=(x+1)^2$, ки аз формулаи ҳалли умумӣ ҳангоми $c=1$ будан ҳосил мегардад, ҳалли хусусии ин муодила мебошад. Аммо $y=0$ низ ҳалли муодилаи додашуда мебошад, ки он аз формулаи ҳалли умумӣ барои ягон қимати хусусии доимӣ c ҳосил намегардад.

Ҳалле, ки он аз формулаи ҳалли умумӣ барои ягон қимати хусусии доимӣ c ҳосил намегардад, *ҳалли махсуси* муодила номида мешавад.

Формулаи (1.18) дар ҳолатҳои умумӣ имконият медиҳад, ки барои муодилаи (1.17) масъалаи Кошӣ ҳал карда шавад, яъне аз ҳисоби интихоби қимати мувофиқи доимӣ c ҳалле, ки шарти ибтидоии додашударо

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.20}$$

қаноат мекунонад, ёфта шавад. Барои ин ба формулаи (1.18) қиматҳои $x = x_0$, $y = y_0$- ро гузошта муодилаи $y_0 = \varphi(x_0, c)$-ро нисбат ба c ҳал менамоем ва қимати ёфташударо $c = c_0$ ба (1.18) мегузорем, ки дар натиҷа ҳалли матлуб дар намуди $y = \varphi(x, c_0)$ ҳосил мешавад.

Аммо дар ин ҷо, дар ҳолати умумӣ, на ҳалшавандагии муодилаи $y_0 = \varphi(x_0, c)$ нисбат ба c ва на ягонагии ҳалли ёфташудаи масъалаи Кошӣ кафолат дода намешавад. Барои иҷро гардидани ин шартҳо бояд ба функсияи $\varphi(x, c)$ баъзе маҳдудиятҳо гузошта шаванд, то ин ки барои ҳалли масъалаи Коши бо қиматҳои ибтидоии дилхоҳ x_0, y_0 аз ягон соҳаи D формулаи (1.18) истифода шавад ва ин ҳал ягона бошад.

Таърифи зерини ҳалли умумии муодилаи (1.17) ба Н.П.Еругин таллуқ дорад.

Бигузор D – соҳаи ҳамвории (x, y) бошад, ки аз ҳар нуқтаи он фақат ва фақат якто хати каҷи интегралии муодилаи (1.17) гузарад, яъне дар ҳар як нуқтаи ин соҳа шартҳои теоремаи мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи Коши барои муодилаи (1.17) иҷро гарданд.

Таърифи 1. Функсияии (1.18), ки нисбат ба x ҳосилаи хусусии бефосила дорад, *ҳалли умумии* муодилаи (1.17) дар соҳаи D номида мешавад, агар баробарии (1.18) нисбат ба c дар соҳаи D ҳалшаванда бошад

$$c = \psi(x, y) \tag{1.21}$$

ва агар он барои ҳамаи қиматҳои доимӣ c, ки аз баробарии (1.21) ҳангоми $(x, y) \in D$ муайян карда мешавад, ҳалли муодилаи (1.17) бошад.

Формулаи ҳалли умумӣ (1.18) имконият медиҳад, ки доимии дилхоҳ c-ро ба тарзи мувофиқ интихоб намуда, ҳар гуна масъалаи Коши барои муодилаи (1.17) бо шартҳои ибтидоии (1.20), ки ин ҷо (x_0, y_0)- нуқтаи ихтиёрии соҳаи D мебошад, ҳал карда шавад. Барои ин ба формулаи (1.18) қиматҳои $x = x_0$, $y = y_0$- ро гузошта $y_0 = \varphi(x_0, c)$, аз ин ҷо меёбем $c = \psi(x_0, y_0) \equiv c_0$ ва ин қимати c –ро ба формулаи (1.18) мегузорем $y = \varphi(x, c_0)$. Ин ҳалли матлуб мебошад ва дигар ҳалҳо бо қиматҳои ибтидоӣ x_0, y_0 вуҷуд надоранд.

Мисоли 6. Бигзор муодилаи

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \tag{1.22}$$

дода шуда бошад. Нишон медиҳем, ки

$$y = cx \qquad (x \neq 0) \tag{1.23}$$

ҳалли умумии ин муодила дар соҳаи $D: \; 0 < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty$ мебошад.

Дар ҳақиқат, азбаски тарафи рости муодилаи (1.22) нисбат ба x ва y дар соҳаи D бефосила мебошад ва дар атрофи ҳар як нуқта (x, y) аз ин соҳа ҳосилаи он нисбат ба y маҳдуд аст, пас дар ин соҳа шартҳои теоремаи Коши - Пикар иҷро мегарданд. Ғайр аз ин, муодилаи (1.23) нисбат ба c дар соҳаи D ҳалшаванда мебошад:

$$c = \frac{y}{x} \; . \tag{1.24}$$

Ниҳоят, функсияи (1.23) барои ҳар як қимати доимӣ c, ки аз формулаи (1.24) ҳангоми аз соҳаи D қимат қабул кардани (x, y) муайян карда мешавад, ҳалли муодилаи (1.22) мебошад.

Ҳалли муодилаи (1.22) - ро , ки шартҳои ибтидоии $y(x_0) = y_0 \quad (x_0 > 0)$-ро қаноат мекунонад, меёбем. Барои ин дар баробарии (1.23) $x = x_0, \; y = y_0$ гузошта ҳосил мекунем $y_0 = cx_0$, аз ин ҷо $c = \frac{y_0}{x_0} = c_0$. Ин қимати доимӣ c – ро ба ҳалли умумӣ (1.23) гузошта ҳосил мекунем

$$y = \frac{y_0}{x_0} x \, .$$

Ин ҳалли матлуб мебошад. Дигар ҳалҳои шартҳои ибтидоии гузошташударо қаноаткунонанда вуҷуд надоранд.

Дар аксар ҳолатҳо муодилаи (1.17) -ро интегронида ҳалли умумиро ба намуди ноошкор

$$\phi(x, y, c) = 0 \quad \text{ё} \quad \psi(x, y) = c \tag{1.25}$$

ҳосил мекунем. Чунин намуди ҳалли умумии муодилаи (1.17)-ро *интеграли умумии* ин муодила меноманд.

Ифодаи (1.25) *ҳалли умумӣ ба намуди ноошкор* ё ин ки *интеграли умумии* муодилаи (1.17) дар соҳаи D номида мешавад, агар он ҳалли умумии (1.18) муодилаи (1.17) -ро дар соҳаи D ифода намояд.

Аз ин таъриф бармеояд, ки (1.21) интеграли умумии муодилаи (1.17)-ро дар соҳаи D муайян менамояд.

Мисоли 7. Муодилаи

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{1.26}$$

-ро дида мебароем. Дар § 2 мисоли 2 нишон дода шуда буд, ки хатҳои каҷи интегралии ин муодила давраҳои

$$x^2 + y^2 = c \qquad (c = R^2) \tag{1.27}$$

мебошанд ва аз ҳар як нуқтаи (x, y) ҳаморӣ (ғайр аз ибтидои координатаҳо) фақат якто хати каҷи интегралии муодилаи (1.26) мегузарад. Баробарии (1.27) интеграли умумии муодилаи (1.26) -ро дар нимҳамвориҳои болоӣ $(y > 0)$ ва поёнӣ $(y < 0)$ ифода мекунад. Дар ҳақиқат, ифодаи (1.27) ҳалли умумиро дар ин нимҳамвориҳо ба намуди $y = \pm\sqrt{c + x^2}$ ифода мекунад.

Таърифи 2. Агар ҳалли муодилаи (1.17) фақат аз нуқтаҳои ягонагии ҳалли масъалаи Коши барои ин муодила иборат бошад, чунин ҳалро *ҳалли хусусӣ* меноманд.

Бо ёрии формулаи ҳалли умумӣ (1.18), барои қиматҳои ибтидоӣ аз соҳаи D масъалаи Коширо ҳал намуда, мо ҳама вақт ҳалли хусусиро ҳосил мекунем.

Мисоли 8. Бигзор муодилаи

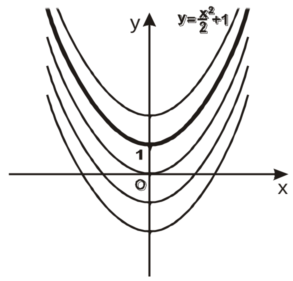
$$\frac{dy}{dx} = x$$

дода шуда бошад. Маълум, ки функсияи

$$y = \frac{x^2}{2} + c$$

ҳалли умумии ин муодила дар соҳаи

$$D: \ -\infty < x < +\infty, \ \ -\infty < y < +\infty$$



Нақшаи 14

мебошад (нақш. 14). Ҳалли ин муодиларо меёбем, ки он шарти ибтидоии $y(0) = 1$ -ро қаноат мекунонад. Барои ин ба формулаи ҳалли умумӣ $x = 0, \ \ y = 1$ гузошта, ҳосил мекунем: $c = 1$. Ин қимати доимӣ c–ро ба формулаи ҳалли умумӣ гузошта меёбем

$$y = \frac{x^2}{2} + 1$$

Ин ҳалли матлуб аст ва ҳалли хусусии муодилаи додашуда мебошад.

Таърифи 3. Ҳалли муодилаи (1.17), ки дар як нуқтааш ягонагии ҳалли масъалаи Коши барои ин муодила ҷой надорад, *ҳалли махсус* номида мешавад.

Аз нуқтаи назари геометрӣ ба ҳалли махсус хати каҷи интегралие мувофиқ меояд, ки он ба маҷмӯи хатҳои каҷи интегралии ҳалли умумиро ташкилдиҳанда дохил намегардад. Бинобар ин ҳалли махсус дар соҳаи мавҷудияти ҳалли умумӣ ҷойгир шуда наметавонад.

Қайд менамоем, ки ҳалҳое низ вуҷуд дошта метавонанд, ки онҳо на ҳалли хусусӣ ва на ҳалли махсус мебошанд. Дар ҳолати хусусӣ, агар муодила ҳалҳои хусусӣ ва махсус дошта бошад, он гоҳ чунин ҳалҳоро ба тарзи бо ҳам часпонидани қисмҳои ҳалҳои хусусӣ ва махсус ҳосил намудан мумкин аст.

Ба сифати мисол муодилаи дар мисоли 1 дида баромадаро

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}, \qquad y \ge 0$$

муоина мекунем. Дар ин ҷо қимати реша бо аломати мусбат гирифта мешавад.

Бигзор $y \ne 0$ бошад. Ҳар ду тарафи муодиларо ба $2\sqrt{y}$ тақсим намуда, ҳосил мекунем $\frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1,$ ё ин ки $\left(\sqrt{y}\right)' = 1$. Аз ин ҷо $\sqrt{y} = x + c$ ва $x > -c$, чунки $x + c > 0$. Бинобар ин, $y = (x+c)^2$, $x \ge -c$ маҷмӯи ҳалҳои муодилаи додашуда мебошад. Мо дар ин ҷо ба нобаробарии $x > -c$ аломати баробариро низ илова намудем, чунки $y = 0$ низ ҳалли муодила мебошад. Ҳалҳои ёфташуда шохаҳои тарафи рости параболаҳое мебошанд, ки тири симметрияашон ба тири Oy паралел буда, қуллаашон дар тири Ox ҷойгиранд (нақш. 15).

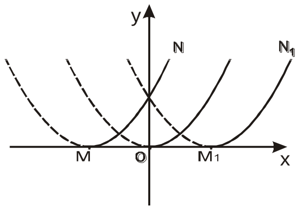
Нишон медиҳем, ки функсияи

$$y = (x+c)^2 \qquad (x > -c) \qquad (1.25)$$

дар нимҳамвории болоӣ

$$D: \qquad -\infty < x < +\infty; \qquad 0 < y < +\infty$$

ҳалли умумии муодилаи додашуда мебошанд.



Нақшаи 15

Дар ҳақиқат, пеш аз ҳама нишон медиҳем, ки дар соҳаи D шартҳои мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи Коши ҷой доранд. Бигзор (x_0, y_0) - нуқтаи ихтиёрӣ аз соҳаи D бошад. Барои ин нуқта чунин атрофи онро $R: |x - x_0| \le a, \quad |y - y_0| \le в$ дар нимҳамвории болоӣ сохтан мумкин аст, ки дар он тарафи рости муодила ҳар ду шартҳои теоремаи Пикарро қаноат кунонад. Дар ҳақиқат, функсияи $f(x, y) = 2\sqrt{y}$ бефосила ва $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ - маҳдуд мебошад. Бинобар ин аз нуқтаи (x_0, y_0) фақат ва фақат якто хати каҷи интегралии муодилаи додашуда мегузорад.

Акнун месанҷем, ки функсия (1.25) ҳар ду талаботи дар таърифи ҳалли умумӣ гузошташударо қонеъ мекунонад:

1. баробарии $y = (x+c)^2$ дар соҳаи D нисбат ба доимии дилхоҳ c ҳалшаванда аст: $c = \sqrt{y} - x$;

2. қимати y-ро ба муодилаи додашуда гузошта, айният ҳосил мекунем: $2\,(x+c)\equiv 2\sqrt{(x+c)^2}$ $(x+c>0)$, яъне ин функсия барои ҳамаи қиматҳои доимӣ c ҳалли муодилаи додашуда мебошад.

Ҳамин тавр, функсияи $y=(x+c)^2$ ҳалли умумии муодилаи додашуда дар соҳаи D мебошад.

Возеҳ аст, ки $y\equiv 0$ (тири Ox) низ ҳалли ин муодила мебошад. Ин ҳалли махсус аст, чунки дар ҳар як нуқтаи он шартҳои ягонагии ҳалли масъалаи Коши иҷро намегарданд.

Дар ҳақиқат, аз ҳар як нуқтаи $M(x_0,\,0)$, ки дар тири Ox ҷойгир аст худи ҳал $y\equiv 0$, инчунин нимпараболаи ба ин нуқта часпида

$$MN:\; y=(x-x_0)^2 \qquad (x\geq x_0),$$

мегузаранд (ниг. нақш. 15).

Ғайр аз ин, аз ин нуқта миқдори беохири ҳалҳои намуди MM_1N_1 низ мегузаранд. Ин намуди ҳалҳо аз порчаҳои MM_1- и ҳали махсус $y\equiv 0$ ва ҳалҳои хусусӣ - нимпараболаҳои

$$M_1N_1:\; y=(x-x_1)^2 \qquad (x>x_1)$$

ташкил ёфтаанд.

Қайд менамоем, ки ҳалҳои намуди MM_1N_1 на ҳалҳои махсус ва на ҳалҳои хусусӣ мебошанд.

Инчунин қайд менамоем, ки ҳалли махсус $y\equiv 0$ дар формулаи ҳалли умумӣ (1.25) дохил намегардад, яъне аз ин формула барои ягон қимати хусусии доимии дилхоҳ c ҳосил намегардад.

Боби II
Муодилаҳои дифференсиалии соддатарини тартиби якум, ки дар квадратура интегронида мешаванд

§1. Муодилаҳо, ки функсияи номаълумро дарбар намегиранд

Муодилаи зеринро дида мебароем

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \ . \qquad (2.1)$$

Агар тарафи рости ин муодила дар порчаи (a,b) бефосила бошад, он гоҳ ҳамаи функсияҳои ибтидоӣ барои $f(x)$ бо формулаи

$$y = \int f(x)dx + c \qquad (a < x < b) \qquad (2.2)$$

(c- доимии дилхоҳ) дода мешаванд. Ин функсияҳо ҳалли умумии муодилаи (2.1) дар соҳаи $D: \{a < x < b; \ |y| < +\infty \}$ мебошанд.

Агар ба сифати яке аз функсияҳои ибтидоӣ ифодаи

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

гирифта шавад, дар куҷо $x_0 \in (a,b)$, он гоҳ формулаи (2.2) намуди зеринро мегирад

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + c \, .$$

Аз ин ҷо, $c = y(x_0) = y_0$ ва ҳосил мекунем

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + y_0 \, .$$

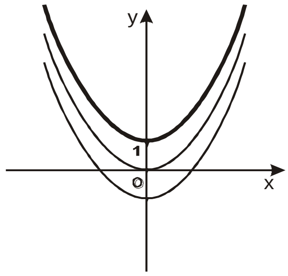
Ин ҳалли умумии муодилаи (2.1) дар намуди Коши мебошад ва он имконият медиҳад, ки ҳалли муодилаи (2.1) бо шарти ибтидоии $y(x_0) = y_0$ муайян карда шавад, ки дар ин ҷо $(x_0, y_0) \in D$.

Мисоли 1. Ҳалли умумии муодилаи зеринро ёбед

$$\frac{dy}{dx}=4x^3$$

ва ҳалле, ки шарти ибтидоии $y(0)=1$ -ро қаноат мекунонад, ҷудо намоед.

Ҳал. Тарафи рости муодила барои ҳамаи қиматҳои x бефосила аст. Бинобар ин муодиларо интегронида ҳалли умумии онро меёбем: $y=x^4+c$. Хатҳои каҷи интегралӣ параболаҳо мебошанд, ки тири симметрияашон - тири Oy буда, шохаҳояшон ба боло равона шудаанд (нақш. 1).



Нақшаи 1

Барои ҷудо намудани ҳалле, ки шарти ибтидоии додашударо қаноат мекунонад, аз формулаи ҳалли умумӣ меёбем: $1=0+c$. Аз ин ҷо $c=1$ ва $y=x^4+1$-ҳалли матлуб мебошад, ки он дар нақшаи 1 бо хати ғафстар тасвир карда шудааст.

Мисоли 2 . Ҳалли муодилаи $\frac{dy}{dx}=e^{-x^2}$, ки шарти ибтидоии $y(0)=0$ -ро қаноат мекунонад, ёфта шавад.

Ҳал. Ҳалли умумии муодилаи додашуда чун функсияи ибтидоӣ барои e^{-x^2} ба воситаи функсияҳои элементарӣ ифода карда намешавад, вале дар квадратураҳо интегронидашаванда аст: $y=\int e^{-x^2}+c$. Аз ин ифода муайян намудани қимати доимӣ c, ки ба ҳалли хусусии шарти ибтидоии додашударо қаноаткунонанда мувофиқ аст, ноқулай мебошад, чунки ҳисоб намудани қимати интегрфли тарафи рост ғайри имкон аст. Бинобар ин, ҳалли умумиро ба намуди Коши менависем: $y=\int_0^x e^{-t^2}dt+c$. Қиматҳои ибтидоиро ба ин баробарӣ гузошта меёбем: $c=0$. Бинобар ин, $y=\int_0^x e^{-t^2}dt$ - ҳалли матлуб мебошад.

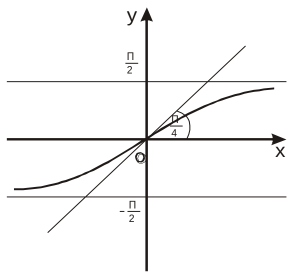
Гарчанде интеграли тарафи рости ин баробарӣ ба намуди охирнок гирифта нашавад ҳам, мо метавонем графики ин функсияро, яъне хати каҷи интегралии масъалаи додашударо, тартиб диҳем.

Азбаски тарафи рости муодилаи додашуда барои ҳамаи қиматҳои x функсияи мусбат мебошад , пас $y(x)$ дар тамоми тири ададӣ функсияи афзуншаванда мебошад. Ғайр аз ин, ҳангоми $x=0$ будан $y'=1$ мегардад, бинобар ин хати каҷи интегралӣ тири Oy-ро дар зери кунҷи $\alpha=\frac{\pi}{4}$ мебурад. Илова бар ин, аз формулаи $y=\int_0^x e^{-t^2}dt$ дида мешавад, ки $y(x)$ функсияи тоқ мебошад, яъне хати каҷи интегралӣ нисбат ба ибтидои координатаҳо симметрӣ ҷойгир шудааст.

Азбаски $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, пас $|y|<\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ва хатҳои рости $y=\pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ барои хати каҷи интегралӣ асимптотаҳои горизонталӣ мебошанд.

Аз муодилаи додашуда меёбем $y''=e^{-x^2}(-2x)$. Аз ин ҷо $y''(0)=0$ ва y'' ҳангоми гузаштан аз нуқтаи $x=0$ аломаташро тағйир медиҳад, яъне $x=0$ барои хати каҷи интегралӣ нуқтаи хамӣ мебошад.

Маълумоти дар бораи функсияи $y=\int_0^x e^{-t^2}dt$ ҳосилкардаамон кифоя аст, ки хати каҷи интегралии масъалаи додашуда дар ҳамворӣ тасвир карда шавад (нақш.2).



Нақшаи 2

Агар $x=c$ - нуқтаи каниши тарафи рости муодилаи (2.1) бошад, он гоҳ муодилаи чаппаро

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x)}$$

дида мебароем. Барои ин муодила $x=c$ ҳал мебошад $(f(c)=\infty)$. Бинобар ин ҳалли $x=c$ - ро ба ҳалҳои муодилаи (2.1) ҳамроҳ намудан зарур аст.

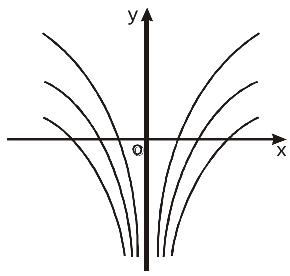
Мисоли 3. Муодилаи зеринро дида мебароем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}.$$

Барои муодилаи додашуда функсияҳои ибтидоӣ

$$y=\ln|x|+c \quad (x\neq 0) \qquad (2.3)$$

мебошанд.



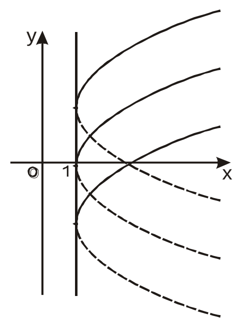
Нақшаи 3

Тарафи рости муодила дар нуқтаи $x=0$ каниш дорад. Бинобар ин муодилаи чаппаро дида мебароем $\frac{dx}{dy}=x$. Барои ин муодила $x=0$ ҳал мебошад, яъне тири Oy- хати каҷи интегралии муодилаи додашуда мебошад. Бинобар ин ба маҷмӯи ҳалҳои (2.3) ҳалли $x=0$-ро низ ҳамроҳ кардан лозим аст. Ин ҳалли хусусии муодила аст. Графики он , яъне тири Oy, барои хатҳои каҷи интегралии (2.3) асимптота мебошад (нақш.3).

Мисоли 4. Муодилаи зеринро дида мебароем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Дидан душвор нест, ки $y=\sqrt{x-1}+c$ - маҷмӯи хатҳои каҷи интегралии муодилаи додашуда мебошад. Азбаски $x>1$ аст, пас шохаҳои болоии параболаҳои $x=(y-c)^2+1$ маҷмӯи хатҳои каҷи интегралии муодилаи додашударо ташкил медиҳанд (нақш.4).



Нақшаи 4

Дар нуқтаи $x=1$ тарафи рости муодилаи додашуда муайян нашудааст. Муодилаи чаппа

$$\frac{dx}{dy}=2\sqrt{x-1}$$

ҳалли $x\equiv 1$ -ро дорад. Бинобар ин ба маҷмӯи ҳалҳои умумӣ $y=\sqrt{x-1}+c$ ҳалли $x\equiv 1$ -ро ҳамроҳ менамоем, ки ин ҳалли махсуси муодилаи додашуда мебошад, чунки шохаҳои параболаҳои $x=(y-c)^2+1$ ба хати рости $x=1$ мерасанд (нақш.4), яъне дар нуқтаҳои ин хати рост ягонагии ҳал ҷой надорад.

§2. Муодилаҳо, ки тағйирёбандаи новобастаро дарбар намегиранд

Намуди умумии ин муодилаҳо чунин аст:

$$\frac{dy}{dx}=f(y). \tag{2.4}$$

Бигзор $f(y)$ дар порчаи (c,d) бефосила ва $f(y)\neq 0$ бошад. Он гоҳ (2.4)-ро ба намуди $\frac{dy}{f(y)}=dx$ менависем. Аз ин ҷо $x=\int\frac{dy}{f(y)}+c$, ё ин ки $x=\int\limits_{y_0}^{y}\frac{dt}{f(t)}+c$, $y_0\in(c,d)$. Ин интеграли умумии муодилаи (2.4) мебошад.

Агар $f(m)=0 \quad (c<m<d)$ бошад, он гоҳ $y=m$ - ҳалли муодилаи (2.4) мебошад, чунки $\frac{dm}{dx}=0$ ва $f(m)=0$ аст.

Мисоли 5. Муодилаи зеринро дида мебароем:

$$\frac{dy}{dx}=1+y^2.$$

Ин муодиларо ба намуди $\frac{dy}{1+y^2}=dx$ навишта, пас аз интегронидани ҳар ду тарафҳои ин баробарӣ ҳосил мекунем: $x=arctg \quad y+c$. Ин баробарӣ интеграли умумии муодилаи додашударо ифода мекунад.

Қайд мекунем, ки $-\frac{\pi}{2}<x-c<\frac{\pi}{2}$ мебошад. Бинобар ин аз формулаи интеграли умумӣ ҳосил мекунем: $y=tg(x-c)$ $\left(c-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}+c\right)$. Ин ҳалли умумии муодилаи додашуда мебошад.

§3. Муодилаҳои тағийрёбандаҳояш ҷудошаванда

Аввал муодилаи намуди зеринро дида мебароем:

$$X(x)dx+Y(y)dy=0. \tag{2.5}$$

Бигзор функсияҳои $X(x)$ ва $Y(y)$ дар порчаҳои, мувофиқан, (a,b) ва (c,d) бефосила бошанд. Он гоҳ баробарии (2.5) -ро интегронида ҳосил мекунем

$$\int_{x_0}^{x}X(x)dx+\int_{y_0}^{y}Y(y)dy=c \qquad (a<x_0<b, c<y_0<d).$$

Ин баробарӣ интеграли умумии муодилаи (2.5) -ро ифода мекунад.

Муодилаи (2.5) - *муодилаи тағийрёбандаҳояш ҷудошуда* номида мешавад.

Мисоли 6. Бигзор муодилаи

$$(2x+1)dx+\left(3y^2+2y\right)dy=0$$

дода шуда бошад. Ин муодилаи тағийрёбандаҳояш ҷудошуда мебошад. Онро интегронида ҳосил мекунем

$$\int(2x+1)dx+\int\left(3y^2+2y\right)dy=c,$$

ё ин ки $x^2+x+y^3+y^2=c$ - интеграли умумии муодилаи додашуда мебошад.

Мисоли 7. Ҳалли муодилаи

$$(2x-2)\,dx+2ydy=0,$$

ки шарти ибтидоии $y(0)=0$ -ро қаноат мекунонад, ёфта шавад.

Ҳал. Муодиларо интегронида ҳосил мекунем: $x^2-2x+y^2=c$-интеграли умумӣ. Шарти ибтидоиро $(x=0, y=0)$ истифода бурда меёбем $c=0$. Бинобар ин $x^2-2x+y^2=0$ - ҳалли матлуб мебошад.

Акнун муодилаи зеринро дида мебароем

$$m(x)n(y)dx+m_1(x)n_1(y)dy=0. \qquad (2.6)$$

Бигзор $m(x)$, $n(y)$, $m_1(x)$, $n_1(y)$ - функсияҳои бефосила бошанд. Муодилаи додашударо ба ҳосили зарби $n(y)\cdot m_1(x)$ тақсим намуда, ба муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошуда меоем

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}dx+\frac{n_1(y)}{n(y)}dy=0.$$

Ин муодиларо интегронида, интеграли умумии муодилаи (2.6) -ро ҳосил мекунем: $\int\frac{m(x)}{m_1(x)}dx+\int\frac{n_1(y)}{n(y)}dy=c$.

Муодилаи (2.6) , ки ба муодилаи намуди (2.5) оварда шуд, *муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошаванда* номида мешавад.

Барои ҷудо намудани тағйирёбандаҳои муодилаи (2.6) мо онро ба ҳосили зарб $n(y)\cdot m_1(x)$ тақсим намудем, ки ин метавонад ба гум шудани ҳалҳои муодила, ки ин ҳосили зарбро ба нул табдил медиҳанд, орад. Бинобар ин ҳолатҳои $n(y)=0$ ва $m_1(x)=0$ - ро алоҳида дида баромадан зарур аст.

Бигзор $y=b$, $x=a$ решаҳои муодилаҳои $n(y)=0$ ва $m_1(x)=0$ бошанд. Онҳо дар алоҳидагӣ ҳалҳои муодилаи (2.6) мебошанд, лекин онҳо дар якҷоягӣ ҳалли ин муодила шуда наметавонанд, чунки ҳангоми дар як вақт $n(y)=0$ ва $m_1(x)=0$ будан муодилаи (2.6) маъно надорад.

Мисоли 8. Муодилаи $x(1+y^2)dx+y(1+x^2)dy=0$ ҳал карда шавад.

Ҳал. Ҳар ду тарафи муодиларо ба $(1+y^2)\cdot(1+x^2)$ тақсим намуда, ба муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошуда $\frac{x}{1+x^2}dx+\frac{y}{1+y^2}dy=0$ меоем.

Ин муодиларо интегронида ҳосил мекунем $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=c$.

Аз ин ҷо $(1+y^2)\cdot(1+x^2)=c^2$ - интеграли умумии муодилаи додашуда мебошад.

Азбаски муодилаҳои $1+y^2=0$ ва $1-x^2=0$ ҳалҳои ҳақиқӣ надоранд, бинобар ин ҳангоми ҷудо намудани тағйирёбандаҳо ҳалҳои муодила гум нашуданд.

Мисоли 9. Муодилаи $(x+1)\sqrt{y}\,dx - xdy = 0$ ҳал карда шавад.

Ҳал. Ҳар ду тарафи муодиларо ба $x\sqrt{y}$ тақсим намуда, ҳосил мекунем $\frac{x+1}{x}dx - \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$. Аз ин ҷо, $x+\ln|x|-2\sqrt{y}=c$ -интеграли умумии муодилаи додашуда мебошад.

Муодилаҳои $\sqrt{y}=0$ ва $x=0$ - ро дида мебароем. Аз муодилаи якум меёбем: $y=0$, $(x\neq 0)$ ки ин ҳалли махсуси муодила мебошад. Аз муодилаи дуюм $x=0$, $(y\neq 0)$ ки ин ҳалли хусусии муодилаи додашуда мебошад *(чаро?)*.

§4. Муодилаҳо, ки ба муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошаванда оварда мешаванд

Бисёр муодилаҳои дифференсиалӣ бо роҳи иваз намудани тағйирёбандаҳо ба муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошаванда оварда мешаванд. Масалан, муодилаи намуди

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by), \quad (a, b \text{- доимиҳо}) \tag{2.7}$$

бо роҳи иваз намудани тағйирёбандаҳо $z = ax+by$ ба муодилаи зерин оварда мешавад

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + bf(z); \qquad \frac{dz}{a+bf(z)} = dx,$$

ки ин муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошуда мебошад. Онро интегронида, ҳосил мекунем

$$x = \int \frac{dz}{a+bf(z)} + c.$$

Мисоли 10. Муодила ҳал карда шавад: $\frac{dy}{dx} = 2x + y$.

Ҳал. $z = 2x+y$ гузошта, ҳосил мекунем:

$$\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx} = 2 + z; \qquad \frac{dz}{2+z} = dx,$$

ки ин муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошуда мебошад. Онро интегронида, меёбем

$$x = \ln|2+z| + \ln c, \qquad z = -2 + ce^x;$$

$$2x + y = -2 + ce^x; \qquad y = ce^x - 2x - 2.$$

Мисоли 11. Муодила ҳал карда шавад: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}+1$.

Ҳал. $x-y=z$ гузошта, меёбем $\frac{dz}{dx}=1-\frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{z}-1=-\frac{1}{z}$. Аз ин ҷо $zdz=-dx$. Ин баробариро интегронида меёбем $z^2=-2x+c$. Акнун ба тағйирёбандаи аввала баргашта, ҳосил мекунем $(x-y)^2=-2x+c$.

Ба муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошуда инчунин муодилаи намуди

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.8}$$

оварда мешавад, ки онро *муодилаи дифференсиалии якҷинсаи тартиби якум* меноманд.

Гузориши $z=\frac{y}{x}$ ё $y=xz$ ба чунин муодила меорад:

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z; \quad x\frac{dz}{dx}=f(z)-z.$$

Ин муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошаванда мебошад. Бинобар ин аз $\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x}$ меёбем: $\int\frac{dz}{f(z)-z}=\ln|x|+\ln c$. Аз ин ҷо $x=ce^{\int\frac{dz}{f(z)-z}}$.

Нишон медиҳем, ки муодилаи дифференсиалии намуди

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \tag{2.9}$$

дар куҷо $M(x,y)$ ва $N(x,y)$ - функсияҳои нисбат ба x ва y якҷинсаи тартиби якхела мебошанд, ба муодилаи якҷинсаи (2.8) оварда мешавад.

Дар ҳақиқат, агар функсияҳои $M(x,y)$ ва $N(x,y)$ нисбат ба аргументҳояш якҷинсаи тартиби m бошанд, он гоҳ аз (2.9) меёбем

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x\cdot y)}{N(x\cdot y)}=-\frac{\frac{1}{t^m}M(tx,ty)}{\frac{1}{t^m}N(tx,ty)}=\left|t=\frac{1}{x}\right|=-\frac{M\left(1,\frac{y}{x}\right)}{N\left(1,\frac{y}{x}\right)}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Бинобар ин муодилаи намуди (2.9)-ро низ муодилаи якҷинса меноманд.

Мисоли 12. Муодилаи зерин ҳал карда шавад: $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+tg\frac{y}{x}$.

Ҳал. Дар ин муодила $y=xz$ гузошта, ҳосил мекунем $\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$, аз куҷо $x\frac{dz}{dx}=-z+\frac{dy}{dx}=-z+z+tgz=tgz$. Дар ин муодила тағйирёбандаҳоро ҷудо намуда, ҳосил мекунем $\frac{dz}{tgz}=\frac{dx}{x}$. Ин муодиларо интегронида меёбем $\ln|\sin z|=\ln|x|+\ln c$. Аз ин ҷо $\sin z=cx$, ё ин ки ба тағйирёбандаҳои аввала баргашта, ҳосил мекунем $\sin\frac{y}{x}=cx$, $\frac{y}{x}=\arcsin cx$, $y=x\arcsin cx$.

Мисоли 13. Муодилаи зерин ҳал карда шавад: $(x+y)dx-(y-x)dy=0$.

Ҳал. Азбаски $M(x,y)=x+y$ ва $N(x,y)=-(y-x)$ функсияҳои якҷинсаи тартиби як мебошанд, пас ин муодилаи якҷинса мебошад. Бинобар ин $y=xz$ гузошта, аз $dy=xdz+zdx$ ва муодилаи додашуда ҳосил мекунем $(x+xz)dx-(xz-x)(xdz+zdx)=0$. Аз ин ҷо

$$x(1+z)dx+x(1-z)xdz+x(1-z)zdx=0;\quad (1+2z-z^2)dx+x(1-z)dz=0,$$

ки ин муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошаванда мебошад, яъне $\frac{1-z}{1+2z-z^2}dz+\frac{dx}{x}=0$. Аз ин ҷо $\frac{1}{2}\ln\left|1+2z-z^2\right|+\ln|x|=\frac{1}{2}\ln c$. $x^2(1+2z-z^2)=c$, $x^2+2xy-y^2=c$.

Муодилаи намуди

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

ба муодилаи якҷинса оварда мешавад, агар ибтидои координатаҳо ба нуқтаи буриши (x_1,y_1) хатҳои рости $a_1x+b_1y+c_1=0$ ва $a_2x+b_2y+c_2=0$ оварда шавад.

Дар ҳақиқат, бигзор (x_1,y_1) - нуқтаи буриши ин хатҳои рост бошад. Он гоҳ $X=x-x_1$, $Y=y-y_1$ гузошта, ҳосил мекунем

$$\frac{dY}{dX}=\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}\right)=\varphi\left(\frac{Y}{X}\right).$$

Ин метод дар ҳолати параллел будан хатҳои рости $a_1x+b_1y+c_1=0$ ва $a_2x+b_2y+c_2=0$ татбиқ карда намешавад, вале дар ин ҳолат

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k$$

мебошад. Бинобар ин

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right)=F(a_1x+b_1y)$$

ва мо ба муодилаи намуди (2.7) омадем.

Мисоли 14. Муодила ҳал карда шавад: $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$.

Ҳал. Нуқтаҳои буриши хатҳои рости $x-y+1=0$ ва $x+y-3=0$ -ро меёбем: $x_1=1$, $y_1=2$. Гузориши $x=X+1$, $y=Y+2$ моро ба муодилаи зерин меорад:

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}.$$

Азбаски ин муодилаи якҷинса мебошад, гузориши $z=\frac{Y}{X}$ ба муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошуда меорад: $z+X\frac{dz}{dX}=\frac{1-z}{1+z}$. Аз ин ҷо $\frac{1+z}{1-2z-z^2}dz=\frac{dX}{X}$. Ин муодиларо интегронида, меёбем $-\frac{1}{2}\ln\left|1-2z-z^2\right|=\ln|X|-\frac{1}{2}\ln c$, ё ин ки $\left(1-2z-z^2\right)X^2=c$, $X^2-2XY-Y^2=c$ ва аз ин ҷо $x^2-2xy-y^2+2x+6y=c_1$ интеграли умумии муодилаи додашуда мебошад.

§5. Муодилаҳои хаттии тартиби якум

Муодилаҳое, ки нисбат ба функсияи номаълум ва хосилаи он хаттӣ мебошанд, *муодилаҳои хаттии тартиби якум* номида мешаванд. Намуди умумии он

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x), \qquad (2.10)$$

мебошад, дар куҷо $p(x)$, $f(x)$ - функсияҳои бефосила.

Агар $f(x)\equiv 0$ бошад, муодилаи (2.10) - *муодилаи хаттии якҷинсаи мувофиқ* номида мешавад. Дар ин муодила тағйирёбандаҳо ҷудо мегарданд:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0, \quad \frac{dy}{y}=-p(x)dx,$$

$$\ln|y|=-\int p(x)dx+\ln c, \quad y=ce^{-\int p(x)dx} \quad (c\neq 0).$$

Барои интегронии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.10) *методи вариатсияи доимӣ* истифода бурда мешавад. Мазмуни ин методро баён менамоем. Дар функсияи

$$y=ce^{-\int p(x)dx},$$

ки ҳалли муодилаи якҷинса мебошанд, доимӣ c- ро ҳамчун функсияи тағйирёбандаи x қабул намуда, талаб менамоем, ки функсияи $y=c(x)e^{-\int p(x)dx}$ муодилаи (2.10) - ро қаноат кунонад. Аз ин ҷо

$\frac{dy}{dx}=\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$. Ба муодилаи (2.10) гузошта , ҳосил мекунем $\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}=f(x)$ ё ин ки, $\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx}=f(x)$. Аз ин ҷо $\frac{dc}{dx}=f(x)e^{\int p(x)dx}$ ва $c(x)=\int f(x)\,e^{\int p(x)dx}dx+c_1$. Бинобар ин,

$$y=c(x)e^{-\int p(x)dx}=c_1\,e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int f(x)\;e^{\int p(x)dx}dx \tag{2.11}$$

- ҳалли умумии муодилаи (2.10) мебошад. Дар ин ҷо ҷамъшавандаи якум ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи мувофиқ ва ҷамъшавандаи дуюм бошад, ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.10) мебошад.

Ҳамин тавр, мо ба натиҷаи зерин омадем: *ҳалли умумии муодилаи хаттии ғайриякҷинса ҳамчун суммаи ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи мувофиқ* $c_1e^{-\int p(x)dx}$ *ва ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинса* $e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$ *муайян карда мешавад.*

Мисоли 15. Муодилаи зерин ҳал карда шавад: $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x^2$**.**

Ҳал. Аввал муодилаи якҷинсаи мувофиқро ҳал менамоем. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0$; $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$; $\ln|y|=\ln|x|+\ln c$, $y=cx$. Акнун барои ҳал намудани муодилаи ғайриякҷинса методи вариатсияи доимиро истифода мебарем. Аз намуди ҳалли умумии муодилаи якҷинса истифода бурда, менависем $y=c(x)x$. Аз ин ҷо $\frac{dy}{dx}=\frac{dc}{dx}x+c(x)$. Ба муодилаи додашуда гузошта, ҳосил мекунем:

$\frac{dc}{dx}x+c(x)-\frac{c(x)x}{x}=x^2$, аз ин ҷо $\frac{dc}{dx}=x$, бинобар ин $c(x)=\frac{x^2}{2}+c_1$.

Ҳамин тавр, ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи додашуда чунин намуд дорад: $y=\left(\frac{x^2}{2}+c_1\right)x=\frac{x^3}{2}+c_1x$.

Мисоли 16. Муодилаи хаттии ғайриякҷинсаи зеринро ҳал намоед: $\frac{dy}{dx}-y\,ctgx=2x\sin x$**.**

Ҳал. Муодилаи якҷинсаи мувофиқ чунин намуд дорад: $\frac{dy}{dx}=y\,ctgx$. Аз ин ҷо $\frac{dy}{y}=ctgx\,dx$. Ин муодиларо интегронида, меёбем $\ln|y|=\ln|\sin x|+\ln c$, аз ин ҷо $y=c\sin x$.

Ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи додашударо дар намуди $y = c(x)\sin x$ навишта, аз $\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}\sin x + c(x)\cos x$ ва муодилаи додашуда меёбем $\frac{dc}{dx}\sin x + c(x)\cos x - c(x)\sin x\, ctgx = 2x\sin x$. Аз ин ҷо $\frac{dc}{dx} = 2x$ ва ин муодиларо интегронида, меёбем $c(x) = x^2 + c_1$. Бинобар ин, ҳалли умумии муодилаи додашуда $y = c_1 \sin x + x^2 \sin x$ мебошад.

§6. Муодилаҳои Бернулли ва Риккати

Бисёр муодилаҳо бо ёрии иваз намудани тағйирёбандаҳо ба муодилаи хаттӣ оварда мешаванд. Яке аз чунин муодилаҳо - *муодилаи Бернулли* мебошад, ки намуди умумии он чунин аст:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n, \quad (n \neq 1). \tag{2.12}$$

Ин муодиларо ба намуди зерин навишта

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = f(x),$$

гузориши $y^{1-n} = z$ - ро татбиқ менамоем:

$$(1-n)y^{-n}y' = z, \quad \frac{1}{1-n}z' + p(x)z = f(x),$$

ки ин муодилаи хаттӣ мебошад.

Мисоли 17. Муодилаи зерин ҳал карда шавад: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$.

Ҳал. Агар ин муодиларо бо муодилаи Бернулли (2.12) муқоиса намоем, дида мешавад, ки дар ҳолати мо $n = -1$ мебошад. Бинобар ин $y^2 = z$ гузошта, ҳосил мекунем: $z' = \frac{z}{x} + x^2$. Ин муодилаи хаттии ғайриякҷинса мебошад, ки он дар мисоли 15 дида баромада шуда буд.

Муодилаи

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = f(x) \tag{2.13}$$

муодилаи Риккати ном дорад. Дар ҳолати умумӣ ин муодила дар квадратураҳо интегронида намешавад, вале агар яке аз ҳалҳои хусусии ин муодила $y_1(x)$ маълум бошад, он гоҳ бо роҳи иваз намудани тағйирёбанда $y = y_1 + z$ он ба муодилаи Бернулли оварда мешавад.

Дар ҳақиқат, ба муодилаи (2.13) $y = y_1 + z$ гузошта, ҳосил мекунем

$$y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) + q(x)(y_1 + z)^2 = f(z).$$

$$y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 + z' + p(x)z + 2q(x)y_1 z + q(x)z^2 = f(x).$$

Аз ин ҷо, азбаски $y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 \equiv f(x)$ мебошад, ҳосил мекунем

$$z' + \left(p\ (x) + 2q(x)y_1\right)z + q(x)z^2 = 0,$$
яъне ба муодилаи Бернулли омадем.

Мисоли 18. Муодилаи Риккати ҳал карда шавад: $\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}$.

Барои ин муодила ҳалли хусусӣ $y_1 = \frac{1}{x}$ бо осонӣ муайян карда мешавад. Бинобар ин гузориши $y = z + \frac{1}{x}$ муодилаи додашударо ба муодилаи Бернулли меорад. Дар ҳақиқат, $y' = z' - \frac{1}{x^2}$ ва ба муодилаи додашуда гузошта ҳосил мекунем $z' - \frac{1}{x^2} = z^2 + 2\frac{z}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}$. Аз ин ҷо $z = z^2 + \frac{2z}{x}$, ки ин муодилаи Бернулли мебошад. Ҳар ду тарафи ин муодиларо ба z^2 тақсим намуда $(z \neq 0)$, ҳосил мекунем $\frac{z}{z^2} = \frac{2}{xz} + 1$. Гузориши $u = \frac{1}{z}$ ин муодиларо ба муодилаи хаттӣ меорад. Дар ҳақиқат, $u' = -\frac{z'}{z^2}$ ва ба муодила гузашта ҳосил мекунем $u' = -\frac{2u}{x} - 1$. Муодилаи якҷинсаи мувофиқ $u' + \frac{2}{x}u = 0$ ва ҳалли он $u = \frac{c}{x^2}$ мебошад.

Барои ёфтани ҳалли муодилаи хаттии ғайриякҷинса методи вариатсияи доимиро истифода мебарем: $u = \frac{c(x)}{x^2}$. Аз ин ҷо меёбем $u' = \frac{c'x^2 - c \cdot 2x}{x^4} = \frac{c'x - 2c}{x^3}$ ва ба муодилаи хаттии ғайриякҷинса гузошта ҳосил мекунем $\frac{c'x - 2c}{x^3} + \frac{2c}{x^3} = -1$. Аз ин ҷо $\frac{c'}{x^2} = -1$ ва $c(x) = -\frac{x^3}{3} + c_1$ ҳалли ин муодила мебошад. Бинобар ин $u = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3}$. Азбаски $u = \frac{1}{z}$ мебошад, пас $\frac{1}{z} = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3}$. Ин ифодаро ба $y = z + \frac{1}{x}$ гузошта, меёбем $\frac{1}{y - \frac{1}{x}} = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3} = \frac{3c_1 - x^3}{3x^2}$. Аз ин ҷо $y = \frac{3x^2}{3c_1 - x^3} + \frac{1}{x}$ - ҳалли умумии муодилаи додашуда мебошад.

§7. Муодилаҳо дар дифференсиали пурра

Муодилаи дифференсиалии зеринро дида мебароем:
$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.14}$$

Таъриф. Муодилаи (2.14) *муодила дар дифференсиали пурра* номида мешавад, агар чунин функсияи бефосила дифференсиронидашавандаи $u(x,y)$ мавҷуд бошад, ки

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \tag{2.15}$$

бошад, яъне тарафи чапи муодилаи (2.14) дифференсиали пурраи ин функсия бошад:

$$du\,(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy\,. \tag{2.16}$$

Аз ин таъриф бармеояд, ки агар (2.14) - муодила дар дифференсиали пурра бошад, он гоҳ муодила ба намуди $du(x,y)=0$ оварда мешавад ва аз ин ҷо $u(x,y)=c$ - интеграли умумии муодилаи (2.14) мебошад.

Бараъкс, агар $y(x)$ - ҳалли муодилаи (2.14) бошад, он гоҳ дар асоси (2.16) $du(x,y(x))\equiv 0$, бинобар ин $u(x,y(x))\equiv c$.

Агар шарти ибтидоӣ $y(x_0)=y_0$ дода шуда бошад, он гоҳ доимӣ c чунин ёфта мешавад: $c=u(x_0,y_0)$. Бинобар ин, $u(x,y)=u(x_0,y_0)$ - интеграли хусусии муодилаи (2.14) мебошад.

Ҳамин тавр, агар (2.14) - муодила дар дифференсиали пурра бошад, он гоҳ интеграли умумии он бе душворӣ муайян карда мешавад. Бинобар ин дар ин ҷо ду саволи асосӣ ба миён меоянд: якумчи тавр муайян карда мешавад, ки (2.14) - муодила дар дифференсиали пурра мебошад ва, дуюм, агар он муодила дар дифференсиали пурра бошад, чи тавр функсияи $u(x,y)$ муайян карда мешавад. Ба ин саволҳо теоремаи зерин ҷавоб медиҳад:

Теорема. *Бигзор функсияҳои* $M(x,y)$ *ва* $N(x,y)$ *дар соҳаи* $D: |x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b$ *муайян ва бефосила дифференсиронидашаванда бошанд. Барои он, ки муодилаи* (2.14) *- муодила дар дифференсиали пурра бошад, зарур ва кифоя аст, ки баробарии зерин ҷой дошта бошад:*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad ((x,y)\in D). \tag{A}$$

Исбот. Зарурӣ. Бигзор (2.14) - муодила дар дифференсиали пурра бошад. Он гоҳ чунин функсияи $u(x,y)$ вуҷуд дорад, ки баробарии (2.15) иҷро мегардад. Бефосила дифференсиронидашаванда будани M ва N - ро дар D истифода бурда, баробарии якӯми (2.15)-ро нисбат ба y ва дуюмашро нисбат ба x дифференсиронида, ҳосил мекунем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad ((x,y)\in D).$$

Аз ин ҷо, бо ҳам баробар будани ҳосилаҳои омехтаро ба инобат гирифта, шарти (A)-ро ҳосил мекунем.

Кифоягӣ. Бигзор шарти (A) иҷро шавад. Чунин функсияи $u(x, y)$ -ро меёбем, ки он баробариҳои (2.15)-ро қаноат кунонад. Баробарии якӯми (2.15)-ро функсияҳои намуди

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx+c(y) \quad (x_0 \leq x \leq x_0+a), \tag{2.17}$$

қаноат мекунонад, ки ин ҷо $c(y)$ - функсияи ихтиёрии дифференсиронидашаванда аст. Аз байни ин функсияҳо ҳамонашро ҷудо менамоем, ки баробарии дуюми (2.15)-ро қаноат кунонад. Барои ин (2.17) -ро нисбат ба y дифференсиронида, аз баробарии дуюми (2.15) истифода бурда, ҳосил мекунем

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx\right)+c'(y)=N(x, y).$$

Аз ин ҷо

$$c'(y)=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx\right)+N(x, y)=-\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}dx+N(x, y).$$

Дар ифодаи таҳтиинтегралӣ шарти (A)-ро истифода бурда ҳосил мекунем

$$c'(y)=-\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}dx+N(x, y)=N(x_0, y).$$

Яъне, барои муайян намудани $c(y)$ муодилаи дифференсиалӣ $c'(y)=N(x_0, y)$ ҳосил гардид. Яке аз ҳалҳои ин муодиларо ёфта $c(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy$, ба баробарии (2.17) мегузорем

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy.$$

Ҳамин тавр, функсияи $u(x, y)$ ёфт шуд, ки он баробариҳои (2.15)-ро қаноат мекунонад. Яъне, муодилаи (2.14) - муодила дар дифференсиали пурра мебошад.

Теорема пурра исбот гардид.

Қайд менамоем, ки алгоритми дар исботи теорема истифода бурда шуда, дар асл алгоритми ҳалли муодила дар дифференсиали пурра мебошад: агар шарти (A) иҷро гардад, баробарии якуми (2.15)-ро нисбат ба x интегронида, функсияи $u(x, y)$ -ро бо саҳеҳии то функсияи ихтиёрии $c(y)$ тағйирёбандаи y муайян мекунем. Ин функсияро ба баробарии дуюми (2.15) гузошта муодилаи дифференсиалӣ барои муайян кардани $c(y)$ ҳосил мекунем. Онро ҳал намуда, қимати $c(y)$-ро ба (2.17) мегузорем ва функсияи $u(x,y)$-ро ҳосил мекунем. Он гоҳ ҳалли муодила ба намуди $u(x,y)=c$ навишта мешавад.

Мисоли 19. Интеграли умумии муодилаи зерин ёфта шавад:

$$(x+y+1)dx+\left(x-y^2+3\right)dy=0.$$

Азбаски $\frac{\partial}{\partial y}(x+y+1)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x-y^2+3\right)$ мебошад, пас чунин функсияи $u(x,y)$ ёфт мешавад, ки тарафи чапи муодила дифференсиали пурраи ин функсияи мебошад. Бинобар ин $\frac{\partial u}{\partial x}=x+y+1$ ва $\frac{\partial u}{\partial y}=x-y^2+3$. Аз баробарии якум меёбем

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+x+c(y).$$

Аз ин ҷо, $\frac{\partial u}{\partial y}=x+c'(y)$ ва бо баробарии дуюм муқоиса намуда, меёбем $x+c'(y)=x-y^2+3$, яъне $c'(y)=3-y^2$. Бинобар ин, $c(y)=3y-\frac{y^3}{3}+c_1$.

Ҳамин тавр, $u(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+x+3y-\frac{y^3}{3}+c_1$ ва интеграли умумии муодилаи додашуда $3x^2+6xy+6x-2y^3-18y=c$ мебошад.

§8 Зарбшавандаи интегронӣ

Агар тарафи чапи муодилаи (2.14) ба дифференсиали пурраи ягон функсия баробар набошад, он гоҳ, дар баъзе ҳолатҳо, чунин функсияи $\mu(x,y)$ ёфт мешавад, ки ҳангоми зарб намудани ин функсия ба муодила, тарафи чапи он дифференсиали пурра мегардад, яъне $du=\mu Mdx+\mu Ndy$. Чунин функсия $\mu(x,y)$ - *зарбшавандаи интегронӣ* номида мешавад.

Мисоли 20. Муодилаи дифференсиалии зеринро дида мебароем:

$$xdx+ydy+\left(x^2+y^2\right)x^2dx=0.$$

Дидан душвор нест, ки дар ин ҷо шарти (А) иҷро намегардад. Яъне, ин муодила дар дифференсиали пурра намебошад. Агар муодилаи додашударо ба $\mu=\frac{1}{x^2+y^2}$ зарб намоем, ҳосил мешавад:

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+x^2dx=0,$$

ки онро ба намуди $d\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right)+d\left(\frac{x^3}{3}\right)=0$ навиштан мумкин аст.

Ин баробариро интегронида, ҳосил мекунем $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{x^3}{3}=\ln c$.

Аз ин ҷо, $\left(x^2+y^2\right)e^{\frac{2x^3}{3}}=c_1$ - интеграли умумии муодилаи додашуда мебошад.

Ҳамин тавр, барои ин муодила зарбшавандаи интегронӣ $\mu=\frac{1}{x^2+y^2}$ бе душворӣ ёфта шуд. Қайд менамоем, ки на ҳама вақт зарбшавандаи интегронӣ ба осонӣ муайян карда мешавад.

Дар ҳолати умумӣ, барои ёфтани зарбшавандаи интегронӣ ақаллан якто ҳалли хусусии ғайринулии муодила дар ҳосилаҳои хусусии зеринро ҷудо карда тавонистан лозим аст:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

ки он аз шарти муодила дар дифференсиали пурра будани $\mu Mdx+\mu Ndy=0$ ҳосил мешавад. Ин муодила ба муодилаи зерин баробарқувва аст:

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}M+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}N+\mu\frac{\partial N}{\partial x},$$

ки онро дар намуди дигар низ навиштан мумкин аст:

$\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}M-\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}N=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$, ё ин ки

$$\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}M-\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}N=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\ . \qquad (2.18)$$

Дар ҳолати умумӣ интегронидани ин муодила дар ҳосилаҳои хусусӣ аз интегронидани муодилаи аввалаи додашуда мумкин душвортар бошад, вале дар баъзе ҳолатҳо ҷудо намудани ҳалли хусусии муодилаи (2.18) бе душворӣ муяссар мегардад.

Қайд менамоем, ки агар зарбшавандаи интегронӣ функсияи фақат аз як аргумент (фақат аз $(x+y)$, ё $\left(x^2+y^2\right)$, ё фақат аз x, ё фақат аз y ва ғ.) вобаста бошад, муодилаи (2.18) бе душворӣ интегронида мешавад ва дар ин ҳолат шарти мавҷудияти чунин зарбшавандаи интегрониро ҳосил намудан мумкин аст.

Масалан, барои муодилаи (2.14) шарти мавҷудияти зарбшавандаи интегрониро, ки фақат аз x вобаста аст $\mu=\mu(x)$, нишон медиҳем.

Муодилаи (2.18) дар ин ҳолат намуди зеринро мегирад:

$$-\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Агар $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \varphi(x, y)$ гузошта шавад, он гоҳ муодиларо интегронида, ҳосил мекунем $\ln \mu = -\int \varphi(x, y) dx + \ln c$.
Аз ин ҷо

$$\mu = ce^{-\int \varphi(x,y)dx}. \qquad (2.19)$$

Агар $\varphi(x, y)$ функсияи фақат аз x вобаста бошад, яъне $\varphi(x, y) \equiv \varphi(x)$ бошад, он гоҳ зарбшавандаи интегронӣ $\mu = \mu(x)$ вуҷуд дорад ва он аз баробарии $\mu = ce^{-\int \varphi(x)dx}$ муайян карда мешавад. Дар акси ҳол зарбшавандаи интегронии намуди $\mu(x)$ вуҷуд надорад.

Чунин шарти мавҷудияти зарбшавандаи интегронӣ барои муодилаи хаттӣ иҷро мегардад. Дар ҳақиқат, муодилаи хаттро $\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$ ба намуди $[p(x)y - f(x)]dx + dy = 0$ навишта мебинем, ки $\varphi(x, y) = \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] : N = p(x)$ мебошад. Бинобар ин, дар асоси формулаи (2.19) меёбем: $\mu = ce^{-\int p(x)dx}$. Ба сифати зарбшавандаи интегронӣ ҳалли хусусиро ҳангоми $c = 1$ гирифтан кифоя мебошад.

Айнан ҳамин тавр шартҳои мавҷудияти зарбшавандаи интегронии намудҳои $\mu(y)$, $\mu(x \pm y)$, $\mu(x^2 \pm y^2)$, $\mu(x \cdot y)$, $\mu\left(\frac{y}{x}\right)$ ва ғ. ёфта мешаванд.

Мисоли 21. Оё муодилаи $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$ зарбшавандаи интегронии намуди $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ дорад?

Ҳал. Ишора мекунем: $x^2 + y^2 = z$. Муодилаи (2.18) ҳангоми $\mu = \mu(x^2 + y^2) = \mu(z)$ будан намуди зеринро мегирад. $2(My - Nx)\frac{\partial \ln \mu}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$. Аз ин ҷо $\ln(\mu) = \frac{1}{2}\int \varphi(z)dz + \ln c$, дар куҷо

$$\varphi(z) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx}$$

Ҳамин тавр,

$$\mu = ce^{\frac{1}{2}\int \varphi(z)dz}. \qquad (2.20)$$

Барои мавҷудияти зарбшавандаи интегронии намуди $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ зарур ва дар ҳолати бефосила будани $\varphi(z)$ кифоя аст, ки $\varphi(z)$ фақат аз $z = x^2 + y^2$ вобаста бошад. Дар ҳолати муодилаи додашуда

$\varphi(z) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) : (My - Nx) = -\frac{2}{x^2 + y^2} = -\frac{2}{z}$. Бинобар ин зарбшавии интегронии $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ вуҷуд дорад ва он аз баробарии (2.20) муайян карда мешавад. Аз ин баробарӣ ҳангоми $c = 1$ будан ҳосил мекунем

$$\mu = e^{-\int \frac{dz}{z}} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Муодилаи додашударо ба $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$ зарб намуда, ҳосил мекунем:

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0.$$

Аз ин ҷо, $\frac{\frac{1}{2} d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0$, ё ин ки $\frac{1}{2} d \ln(x^2 + y^2) + d(arctg \frac{y}{x}) = 0$.

Ин баробариро интегронида ҳосил мекунем

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = -arctg \frac{y}{x} + \ln c$$

Аз ин ҷо, $\sqrt{x^2 + y^2} = ce^{-arctg \frac{y}{x}}$- интеграли умумии муодилаи додашуда мебошад.

§9. Намудҳои соддатарини муодилаҳо , ки нисбат ба ҳосила ҳал нашудаанд

Муодилаи дифференсиалии тартиби якум, ки нисбат ба ҳосила ҳал нашудааст, чунин намуд дорад:

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (2.21)$$

Агар ин муодиларо нисбат ба y' ҳал намудан мумкин бошад, он гоҳ як ё якчанд муодилаҳоро ҳосил мекунем

$$y' = f_i(x, y) \qquad (i = 1,2,..) \qquad (2.22)$$

ва ин муодилаҳоро интегронида, ҳалли муодилаи (2.21)-ро ёфтан мумкин аст.

Мисоли 22. Муодилаи зеринро ҳал намоед:

$$y'^2 + (y^2 - 1)y' - y^2 = 0.$$

Ҳал. Муодилаи додашударо ҳамчун муодилаи квадратӣ нисбат ба y' ҳал намуда, ҳосил мекунем $y'_{1,2} = \frac{(1 - y^2) \pm \sqrt{(1 - y^2)^2 + 4y^2}}{2} = \frac{(1 - y^2) \pm (1 + y^2)}{2}$.

Аз ин ҷо $y_1' = 1$; $y_2' = -y^2$. Ҳар кадом муодилаҳои ҳосилшударо интегронида меёбем

$$y_1 = x + c, \qquad y_2 = \frac{1}{x+c} \tag{2.23}$$

Ин ҳалҳо дар якҷоягӣ интеграли умумии муодилаи додашударо ифода менамоянд, ки онро дар шакли

$$(y - x - c)\left(y - \frac{1}{x+c}\right) = 0$$

низ навиштан мумкин аст.

Ҳамин тавр, агар муодилаи (2.21) нисбат y' ҳалшаванда бошад, мо ба ҳолатҳои пештар омӯхтаамон меоем. Аммо на ҳама вақт муодилаи (2.21) нисбат ба y' ҳалшаванда мебошад ва дар ҳолати ҳалшаванда буданаш ҳам, на ҳама вақт муодилаҳои (2.22) бо осонӣ интегронида мешаванд. Бинобар ин зарур аст, ки тарзҳои дигари интегронидани муодилаҳои намуди (2.21)-ро омӯзем.

Дар аввал якчанд ҳолатҳои хусусиро, ки дар онҳо муодилаи (2.21) яке аз тағйирёбандаҳоро дарбар намегирад, дида мебарем.

Ҳолати 1^0. Бигзор муодилаи (2.21) намуди зерин дошта бошад:

$$F(y') = 0 \tag{2.24}$$

ва он ақаллан якто решаи $y' = k$ дошта бошад.

Азбаски муодилаи (2.24) аз x ва y бавосита нест, пас k-доимӣ мебошад. Аз $y' = k$ меёбем: $y = kx + c$, ё ин ки $k = \frac{y-c}{x}$. Азбаски k-решаи муодилаи (2.24) мебошад, пас $F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$ интеграли умумии муодилаи (2.24) -ро ифода мекунад.

Мисоли 23. Муодилаи зеринро дида мебароем:

$$y'^3 - 1 = 0.$$

Азбаски $y' = 1$ яке аз решаҳои муодилаи додашуда мебошад, пас $y = x + c$, ё ин ки $\frac{y-c}{x} = 1$. Бинобар ин $\left(\frac{y-c}{x}\right)^3 - 1 = 0$ - интеграли умумии муодилаи додашударо ифода мекунад.

Ҳолати 2^0. Бигзор муодилаи (2.21) намуди зерин дошта бошад:

$$F(x, y') = 0, \tag{2.25}$$

яъне аз y вобаста набошад. Он гоҳ, агар ин муодила нисбат ба y' ҳал гардад $y' = f_k(x)$ $(k = 1,2,...)$, пас $y = \int f_k(x)dx + c$ $(k = 1,2,...)$ - интеграли умумии муодилаи (2.25)-ро ифода мекунад.

Агар муодилаи (2.25) нисбат ба y' ҳалнашаванда бошад, он гоҳ дар баъзе мавридҳо параметр t дохил намуда, муодилаи (2.25) - ро ба ду муодилаҳо $x = \varphi(t)$ ва $y' = \psi(t)$ овардан мумкин аст. Азбаски $dy = y'dx$ мебошад, бинобар ин $dy = \psi(t)\varphi'(t)dt$ ва $y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c$.

Ҳамин тавр, хатҳои каҷи интегралии муодилаи (2.25) бо муодилаҳои дар шакли параметрӣ додашуда

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c. \end{cases}$$

ифода карда мешаванд.

Агар муодилаи (2.25) нисбат ба x ҳал шавад $x = \varphi(y')$, он гоҳ ба сифати параметр $y' = t$ қабул намудан ба мақсад мувофиқ мебошад. Чунки дар ин ҳолат $x = \varphi(t)$, $dy = y'dx = t\varphi'(t)dt$ ва $y = \int t\varphi'(t)dt + c$ мегардад.

Мисоли 24. Муодилаи зеринро дида мебароем: $x = (y')^3 - y' - 1$.

Азбаски ин муодила нисбат ба x ҳалгардида мебошад, бинобар ин
$y' = t$ гузошта, ҳосил мекунем: $x = t^3 - t - 1$, $dy = y'dx = t(3t^2 - 1)\,dt$, $y = 3\int t^3 dt - \int t dt + c = \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + c$. Муодилаҳои

$$\begin{cases} x = t^3 - t - 1, \\ y = \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + c \end{cases}$$

маҷмӯи хатҳои каҷи интегралии муодилаи додашударо ба намуди параметрӣ ифода менамоянд.

Мисоли 25. Бигзор муодилаи $x\sqrt{1 + y'^2} = y'$ дода шуда бошад.

Дар ин ҷо $y' = tgt$ $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ гузошта, ҳосил мекунем:

$$x = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{tgt}{\sqrt{1 + tg^2 t}} = \sin t, \quad dy = y'dx = tgt \cdot \cos t\, dt = \sin t\, dt, \quad y = -\cos t + c.$$

Аз муодилаҳои $x = \sin t$ ва $y = -\cos t + c$ параметр t-ро хориҷ намуда ҳосил мекунем: $y = -\cos(\arcsin x) + c = -\sqrt{1 - x^2} + c$, яъне $x^2 + (y - c)^2 = 1$.

Ҳамин тавр, маҷмӯи хатҳои каҷи интегралии муодилаи додашуда – маҷмӯи давраҳои $x^2 + (y - c)^2 = 1$ мебошад.

Ҳолати 3^0. Бигзор муодилаи (2.21) намуди зерин дошта бошад:

$$F(y, y') = 0, \qquad (2.26)$$

яъне тағйирёбандаи новобаста x – ро дарбар нагирифта бошад.

Агар ин муодиларо нисбат ба y' ҳал намудан мумкин бошад: $y' = f_k(y) \quad (k = 1,2,...)$, он гоҳ $\int \frac{dy}{f_k(y)} = x + c \quad (k = 1,2,...)$- интеграли умумии муодилаи додашуда мебошад. Дар ин ҳолат хатҳои рости $y = b$, ки $f_k(b) = 0$ ё $F(b,0) = 0$ мебошад, метавонанд ҳалҳои махсуси муодила бошанд.

Агар муодилаи (2.26) нисбат ба y' ҳал нашавад параметр t - ро дохил намуда, муодилаи (2.26) - ро бо ду муодилаҳои

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t)$$

иваз намудан ба мақсад мувофиқ мебошад.

Дар ҳақиқат, азбаски $dy = y'dx$ мебошад, пас $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$ ва аз ин ҷо $x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + c$. Бинобар ин хатҳои каҷи интегралии муодилаи додашуда ба намуди параметрӣ бо муодилаҳои

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + c \quad \text{ва} \quad y = \varphi(t)$$

ифода меёбанд.

Дар ҳолати хусусӣ, агар (2.26) нисбти y ҳал шавад, он гоҳ ба сифати параметр $y' = t$ қабул намудан қулай мебошад. Дар ҳақиқат, агар $y = \varphi(y')$, бошад, он гоҳ $y' = t$ гузошта, ҳосил мекунем: $y = \varphi(t)$, $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)dt}{t}$, $x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{t} + c$.

Мисоли 26. Муодилаи зеринро дида мебароем:

$$y = (y')^5 + (y')^3 + y' + 5.$$

Азбаски муодила нисбат ба y ҳалшуда мебошад, пас $y' = t$ мегузорем. Он гоҳ $y = t^5 + t^3 + t + 5$ ва $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{5t^4 + 3t^2 + 1}{t}dt$. Аз ин ҷо $x = \frac{5}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + \ln|t| + c$. Муодилаҳои $x = \frac{5t^4}{4} + \frac{3t^2}{2} + \ln|t| + c$ ва $y = t^5 + t^3 + t + 5$ - - маҷмӯи хатҳои каҷи интегралии муодилаи додашударо ба намуди параметрӣ ифода мекунанд.

§10. Методи умумии дохил намудани параметр

Акнун ҳолати умумиро дида мебароем

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.27}$$

ки дар муодила ҳамаи тағйирёбандаҳо x, y ва y' – ро дарбар мегирад.

Агар x, y ва y' ҳамчун координатаҳои декартӣ дар фазои R^3 дида баромада шаванд, он гоҳ муодилаи (2.27) дар фазо сатҳеро ифода мекунад. Маълум, ки координатҳои нуқтаҳои сатҳро ҳамчун функсияҳои аз ду параметрҳо u ва ϑ вобаста ифода намудан мумкин аст. Бигзор чунин тарзи ифодаи параметрии сатҳи (2.27) дода шуда бошад:

$$x = \varphi(u, \vartheta), \quad y = \psi(u, \vartheta), \quad y' = \chi(u, \vartheta). \tag{2.28}$$

Азбаски $dy = y'dx$, пас $\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} d\vartheta = \chi(u, \vartheta)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} d\vartheta\right]$ мебошад.

Аз ин ҷо

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{\chi(u, \vartheta)\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} - \chi(u, \vartheta)\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}}. \tag{2.29}$$

Яъне ба муодилаи тартиби якуми нисбат ба ҳосила ҳалшуда омадем, ки онро дар параграфҳои гузашта омӯхта будем. Агар $\vartheta = \omega(u, c)$ ҳалли умумии муодилаи (2.29) бошад, он гоҳ аз ду муодилаҳои аввали (2.28) ҳосил мекунем:

$$x = \varphi(u, \omega(u, c)), \quad y = \psi(u, \omega(u, c)),$$

ки ин ҳалли умумии муодилаи (2.27) -ро ба намуди параметрӣ (u-параметр, c-доимии дилхоҳ) ифода менамояд.

Қайд намоем, ки муодилаи (2.29) на ҳама вақт ба намуди охирнок интегронидашаванда мебошад. Ин муодила дар ҳолатҳои хусусӣ- ҳангоми нисбат ба x ё y ҳалшаванда будани муодилаи (2.27)-намуди соддатарро мегирад. Аз ин сабаб, табдилдиҳиҳои (2.28) одатан дар ин ҳолатҳои хусусӣ амалӣ карда мешаванд.

Аввал ҳолати нисбат ба y ҳалшаванда будани муодилаи (2.27)-ро дида мебароем:

$$y = f(x, y') \tag{2.30}$$

Дар ин ҳолат ба сифати параметрҳо x ва $y' = p$-ро қабул намуда, ҳосил мекунем: $y = f(x, p)$, $dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp$, ё ин ки $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$

ва аз ин ҷо

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}.$$

Ин муодилаи дифференсиалии нисбат ба ҳосила $\frac{dp}{dx}$ ҳалшаванда мебошад. Бигзор $p=\varphi(x,c)$ - ҳалли умумии он бошад. Ин ифодаро ба муодилаи (2.30) гузошта, ҳалли умумии муодиларо дар намуди $y=f(x,\varphi(x,c))$ ҳосил мекунем.

Мисоли 27. Муодилаи $y=x+y'-\ln y'$ ҳал карда шавад.

Ҳал. Ин муодила нисбат ба y ҳалшуда мебошад. Параметр $y'=p$ дохил намуда , ҳосил мекунем:

$$y=x+p-\ln p. \tag{2.31}$$

Дифференсиали пурраи ҳарду тарафи ин баробариро ҳисоб мекунем. Аз як тараф $dy=pdx$, аз тарафи дигар $dy=dx+dp-\frac{dp}{p}$. Бинобар ин,

$$pdx=dx+dp-\frac{dp}{p}, \quad \text{ё ин ки} \quad (p-1)dx=\left(1-\frac{1}{p}\right)dp.$$

1). Бигзор $p\neq 1$ бошад. Он гоҳ $dx=\frac{dp}{p}$ ва $x=\ln p+c$. Ин қимати x-ро ба (2.31) гузошта, ҳалли муодилаи додашударо ба намуди параметрӣ меёбем:

$$x=\ln p+c, \quad y=p+c.$$

Аз ин муодилаҳо параметр p - ро хориҷ намуда, ҳалли муодилаи додашударо ба намуди ошкор низ ифода кардан мумкин аст. Аз муодила якум $p=e^{x-c}$ ва ба муодилаи дуюм гузошта ҳосил мекунем:

$$y=e^{x-c}+c.$$

2). Бигзор $p=1$ бошад. Он гоҳ аз (2.31) ҳосил мекунем: $y=x+1$. Ин ҳалли махсуси муодилаи додашуда мебошад.

Акнун ҳолати нисбат ба x ҳалшаванда будани муодилаи (2.27)-ро дида мебароем:

$$x=f(y,y') \tag{2.32}$$

Дар ин ҳолат ба сифати параметрҳо y ва $y'=p$ -ро қабул намуда, аз $dy=y'dx$ ҳосил мекунем:

$$dy=p\left[\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial p}dp\right],$$

ё ин ки

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}.$$

Ин муодилаи дифференсиалии тартиби якуми нисбат ба $\frac{dp}{dy}$ ҳалшаванда мебошад. Бигзор $p=\psi(y,c)$- ҳалли умумии он бошад. Инро ба (2.32) гузашта, ҳалли умумии ин муодиларо дар намуди $x=f(y,\psi(y,c))$ ҳосил мекунем.

Мисоли 28. Муодилаи $yy'^3+x=1$ ҳал карда шавад.

Ҳал. Муодиларо нисбат ба x ҳал намуда, ҳосил мекунем $x=1-yy'^3$. Параметр $y'=p$-ро дохил менамоем: $x=1-yp^3$. Аз ин ҷо $dx=-p^3dy-3p^2ydp$. Аз $dy=pdx$ меёбем: $dy=p\left(-p^3dy-3p^2ydp\right)$ ё ин ки $\left(1+p^4\right)dy=-3p^3ydp$. Аз ин ҷо, $-\frac{3p^3dp}{p^4+1}=\frac{dy}{y}$; $-\frac{3}{4}\ln\left(p^4+1\right)=\ln|y|+\ln c$, ё ин ки $\left(p^4+1\right)^{-3/4}=c\,y$.

Ҳалли муодилаи додашуда ба намуди параметрӣ чунин аст:

$$c\,y=\left(p^4+1\right)^{-3/4},\quad x=1-\frac{p^3}{c}\left(p^4+1\right)^{-3/4}.$$

Аз ин ҷо $p-$ро хориҷ намуда, ҳалли муодилаи додашударо ба намуди ошкор ёфтан мумкин аст. Аз муодилаи $x=1-yp^3$ меёбем: $p=\left(\frac{1-x}{y}\right)^{1/3}$.

Ба муодилаи $c\,y=\left(p^4+1\right)^{-3/4}$ гузошта ҳосил мекунем: $c\,y=\left[\left(\frac{1-x}{y}\right)^{4/3}+1\right]^{-3/4}$.

Аз ин ҷо, $(1-x)^{4/3}+y^{4/3}=c$ - интеграли умумии муодилаи додашуда мебошад.

§11. Муодилаҳои Лагранж ва Клеро

Табдилдиҳиҳои (2.28) муодилаи (2.27)-ро, ки нисбат ба ҳосила y' ҳалнашуда мебошад, ба муодилаи дигар - (2.29) меорад, ки он нисбат ба ҳосила ҳалшуда мебошад. Аммо ин муодилаи нав на ҳама вақт дар квадратураҳо интегронидашаванда мебошад. Ҳоло мо типи муодилаҳоро дида мебароем, ки онҳо нисбат ба ҳосила ҳалнашуда буда, бо роҳи дифференсиронӣ ҳама вақт ба муодилаи дар квадратураҳо интегронидашаванда оварда мешаванд. Яке аз чунин муодилаҳо – *муодилаи Лагранж* мебошад.

Муодилае, ки дар он y функсияи хаттӣ нисбат ба x буда, коэффисиентҳояш функсияи y' мебошанд, яъне муодилаи намуди

$$y=x\varphi(y')+\psi(y'), \tag{2.33}$$

муодилаи Лагранж номида мешавад.

Муодилаи (2.33)-ро нисбат ба x дифференсиронида ва $y' = p$ гузошта, ҳосил мекунем

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}. \quad (2.34)$$

Агар дар ин муодила $x-$ро ҳамчун функсияи номаълум ва $p-$ро ҳамчун тағйирёбандаи новобаста қабул намоем, он гоҳ муодилаи хаттии зеринро ҳосил мекунем:

$$[p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p). \quad (2.35)$$

Ин муодила ҳамчун муодилаи хаттӣ дар квадратураҳо интегронида мешавад. Бигзор $\Phi(x, p, c) = 0$ - интеграли умумии муодилаи (2.35) бошад. Ба он боз ифодаи $y = x\varphi(p) + \psi(p)$-ро ҳамроҳ намуда, муодилаи параметрии хатҳои каҷи интегралии муодилаи (2.33)-ро ҳосил мекунем.

Мисоли 29. Муодилаи *Лагранж* $y = x(y')^2 - 2(y')^3$ ҳал карда шавад.

Ҳал. Муодилаи додашударо нисбат ба x дифференсиронида, $y' = p$ гузошта, пас аз ба p ихтисор намудан (ҳангоми $p \neq 0$ будан) ҳосил мекунем: $1 - p = (2x - 6p)p'$, ки ин муодилаи хаттӣ нисбат ба x' ва x мебошад: $\frac{dx}{dp} = \frac{2}{1-p}x - \frac{6p}{1-p}$ $(p \neq 1)$. Ҳалли умумии ин муодиларо меёбем: $x = 2p + 1 + c(1-p)^{-2}$. Ин ифодаро ба муодилаи додашуда гузошта, бо назардошти $y' = p$, ҳосил мекунем: $y = p^2 + cp^2(1-p)^{-2}$.

Ҳамин тавр, системаи баробариҳо

$$\begin{cases} x = 2p + 1 + c(1-p)^{-2}, \\ y = p^2 + cp^2(1-p)^{-2} \end{cases}$$

ҳалли умумии муодилаи додашударо ба намуди параметрӣ ифода мекунад.

Дар протсесси ҳалли муодидаи додашуда, мо ба фарзияҳои $p \neq 0$ ва $p \neq 1$ роҳ дода будем.

Бигзор акнун $p = 0$ бошад. Он гоҳ $y' = 0$, аз ин ҷо $y = c$ ва аз худи муодила ҳосил мекунем, ки $c = 0$. Яъне $y = 0$ - ҳалли хусусии муодила мебошад.

Агар $p = 1$ бошад, он гоҳ $y' = 1$ ва $y = x + c$ мегардад. Ин ифодаро ба муодила гузашта ҳосил мекунем: $c = -2$. Пас, $y = x - 2$ низ ҳалли хусусии муодилаи додашуда мебошад.

Ба муодилаи Лагранж (2.33) бармегардем. Ҳангоми гузариш аз муодилаи (2.34) ба (2.35) ҳар ду тарафи муодилаи (2.34) ба ифодаи $\frac{d\text{p}}{dx}$ тақсим карда шуд. Бинобар ин, дар ин ҳолат ҳалҳое, ки барои онҳо p-доимӣ аст (агар онҳо вуҷуд дошта бошанд) гум шуданд. Ин ҳолатро алоҳида дида мебароем. Бигзор $\frac{dp}{dx} \equiv 0$ ва p - доимӣ бошад. Он гоҳ аз (2.34) меёбем, ки p ҳалли муодилаи $\varphi(p) = p$ мебошад.

Ҳамин тавр, агар муодилаи $\varphi(p) = p$ решаҳои ҳақиқӣ $p = p_i$ дошта бошад, он гоҳ ба ҳалҳои дар боло ёфташудаи муодилаи Лагранж боз $p = p_i$ ҳамроҳ намудан лозим аст:

$$y = x\varphi(\text{p}) + \psi(p), \quad p = p_i,$$

ё ин ки аз ин ҷо p - ро хориҷ намуда хатҳои ростро $y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)$ ҳосил мекунем.

Ҳолати $p - \varphi(p) \equiv 0$ буданро алоҳида дида мебароем. Дар ин ҳолат $\varphi(y') \equiv y'$ ва муодилаи Лагранж намуди зеринро мегирад:

$$y = xy' + \psi(y'), \tag{2.36}$$

ки инро *муодилаи Клеро* меноманд.

Дар ин муодила $y' = p$ гузошта ҳосил мекунем

$$y = xp + \psi(p). \tag{2.37}$$

Ин баробариро нисбат ба x дифференсиронида ва $y' = p$ гузошта, меёбем

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

ё ин ки

$$(x + \psi'(p))\frac{dp}{dx} = 0.$$

Ҳолатҳои $\frac{dp}{dx} = 0$ ва $x + \psi'(p) = 0$ буданро дар алоҳидагӣ дида мебароем.

Дар ҳолати якум, аз $\frac{dp}{dx} = 0$ меёбем: $p = c$ (с-доимӣ) ва ба (2.37) гузошта ҳалли умумии муодилаи Клеро (2.36)-ро меёбем

$$y = cx + \psi(c), \tag{2.38}$$

ки он маҷмӯи хатҳои ростро ифода мекунад.

Ҳамин тавр, барои ёфтани ҳалли умумии муодилаи Клеро дар муодилаи (2.37) p – ро бо доимии дилхоҳ c иваз намудан кифоя аст.

Дар ҳолати дуюм, аз баробарии $x + \psi'(p) = 0$ параметр p-ро ҳамчун функсияи x муайян намуда $p = \omega(x)$, баъд онро ба муодилаи (2.37) гузошта, ҳосил мекунем:

$$y = x\omega(x) + \psi(\omega(x)). \qquad (2.39)$$

Инчунин $x = -\psi'(p)$-ро ба (2.37) гузошта , муодилаи параметрии ҳамин хати каҷро низ ҳосил намудан мумкин аст:

$$x = -\psi'(p), \; y = -p\psi'(p) + \psi(p). \qquad (2.40)$$

Ҳалли (2.39) ё (2.40) доимии дилхоҳро дарбар намегирад ва аз ҳалли умуми (2.38) барои ягон қимати доимӣ c ҳамчун ҳолати хусусӣ ҳосил намегардад. Бинобар ин он ҳалли махсуси муодилаи Клеро мебошад. Дар масъалаҳои амалӣ одатан ба ҳалли махсуси муодилаи Клеро аҳамият дода мешавад.

Маънои геометрии ҳалли (2.39) -ро муайян менамоем. Ин муодила бо роҳи хориҷ намудани параметр p аз ду муодилаҳо

$$y = px + \psi(p), \quad x + \psi'(p) = 0$$

ҳосил гардидааст. Илова бар ин , муодилаи дуюм дар натиҷаи дифференсиронидани муодилаи якум нисбат ба p ҳосил гардидааст. Аз курси геометрияи дифференсиалӣ маълум аст, ки бо ин тарз *хати хамгашти маҷмӯи* (2.37), ки ҳалли умумии муодилаи (2.36) мебошад, муайян карда мешавад. Бинобар ин хати хамгашт (2.39) - ин ҳалли махсуси муодилаи Клеро мебошад.

Ҳамин тавр, *ҳалли умумии муодилаи Клеро - маҷмӯи хатҳои ростро, ҳалли махсуси он бошад, хати хамгашти ин маҷмӯро ифода мекунанд.*

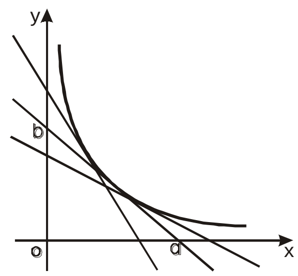
Қайд менамоем, ки ҳар гуна маҷмӯи хатҳои рост, ки аз як параметр вобаста аст (ба ғайр аз маҷмӯи хатҳои рости байни ҳам параллел), бо роҳи хориҷ намудани параметр ба муодилаи Клеро оварда мешавад. Дар ҳақиқат, бигзор маҷмӯи хатҳои рост $y = a(t)x + b(t)$ дода шуда бошад. Азбаски $\dfrac{da}{dt} \neq 0$ (дар акси ҳол ин маҷмӯи хатҳои рост байни ҳам параллел мебошанд), пас муодилаи $a(t) = c$ нисбат ба t ҳалшаванда мебошанд: $t = \omega(c)$. Бинобар ин муодилаи маҷмӯъ чунин намуд мегирад:

$$y = cx + b[\omega(c)] \equiv cx + \psi(c),$$

ки ин ҳалли умумии (ниг. (2.38)) муодилаи Клеро мебошад.

Азбаски ҳалли умумии муодилаи Клеро маҷмӯи хатҳои рост ва ҳалли махсуси он хати хамгашти ин маҷмӯъро ифода мекунад, бинобар ин ба муодилаи Клеро низ масъалаҳои геометрӣ, ки дар онҳо муайян намудани хати каҷ аз рӯи баъзе хосиятҳои расандааш талаб карда мешавад, оварда мешаванд.

Мисоли 30. Хати каҷе ёфта шавад, ки расандаи ихтиёриаш бо тирҳои системаи координатаҳои росткунҷа секунҷаи масоҳаташ доимӣ ва баробари 2 воҳидро ташкил диҳад.



Ҳал. Муодилаи расандаро ба хати каҷ ҳамчун муодилаи хати рост дар порчаҳо менависем: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (нақш. 5).

Мувофиқи шарти масъала $ab=4$, яъне $b=\frac{4}{a}$ Нақшаи 5

ва мо маҷмӯи хатҳои рости $\frac{x}{a}+\frac{ay}{4}=1$ -ро ҳосил менамоем. Муодилаи дифференсиалии ин маҷмӯъро тартиб медиҳем. Барои ин муодилаи ҳосилшударо нисбат ба x дифференсиронида, параметр $a-$ро хориҷ менамоем: $\frac{1}{a}+\frac{ay'}{4}=0$. Аз ин ҷо $a^2=-\frac{4}{y'}$ ва $a=2\sqrt{-\frac{1}{y'}}$. Ин ифодаро ба муодилаи маҷмӯи хатҳои рост гузошта ҳосил мекунем: $\frac{x\sqrt{-y'}}{2}+\frac{y}{2\sqrt{-y'}}=1$, ё ин ки $y=xy'+2\sqrt{-y'}$. Ин муодилаи Клеро мебошад. Ҳалли умумии он $y=cx+2\sqrt{-c}$ мебошад.

Вале ба мо ҳалли махсуси ин муодиларо ёфтан лозим аст, ки он хати каҷи матлубро муайян менамояд. Ҳалли махсуси муодиларо ҳамчун хати хамгашти маҷмӯи хатҳои рости $y=cx+2\sqrt{-c}$ муайян менамоем. Барои ин ҳалли умумиро нисбат ба c дифференсиронида, баъд c-ро хориҷ менамоем: $0=x-\frac{1}{\sqrt{-c}}$, $c=-\frac{1}{x^2}$. Бинобар ин $y=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{1}{x}$ ва $xy=1$- гиперболаи баробарпаҳлу – ҳалли масъаларо ифода мекунад, ки он аз нуқтаи назари геометрӣ хати хамгашти маҷмӯи хатҳои рости $y=cx+2\sqrt{-c}$ -ро ифода менамояд (ниг. нақш.5).

§12. Теоремаи мавҷудият ва ягонагии ҳал барои муодилаҳои дифференсиалии нисбат ба ҳосила ҳалнашуда

Муодилаи дифференсиалии нисбат ба ҳосила ҳалнашударо

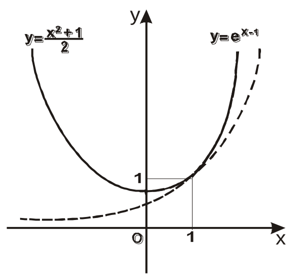
$$F(x,y,y')=0 \qquad (2.41)$$

дида мебароем. Аз нуқтаи додашудаи (x_0,y_0), умуман, на якто, балки метавонанд якчандто хатҳои каҷи интегралии муодилаи (2.41) гузаранд, чунки агар ин муодила нисбат ба ҳосила y' ҳалшаванда бошад ва онро нисбат ба y' ҳал намоем, одатан якчанд муодилаҳо $y' = f_i(x, y)$ $(i = 1,2,...)$ ҳосил мегарданд. Агар дар атрофи нуқтаи (x_0, y_0) ҳар яки ин муодилаҳо шартҳои теоремаи мавҷудият ва ягонагиро (Боби 1. §3.) қаноат кунонад, он гоҳ барои ҳар кадоми ин муодилаҳо чунин ҳалли $y = y_i(x)$, ки шарти $y_i(x_0) = y_0$ - ро қаноат мекунонад, ёфт мешавад. Бинобар ин, ягонагии ҳалли муодилаи (2.41), ки шарти $y(x_0) = y_0$ - ро қаноат мекунонад, ба он маъно фаҳмида мешавад, ки аз нуқтаи (x_0, y_0), бо самти додашуда $(y(x_0) = y')$, фақат якто хати каҷи интегралии муодила мегузарад.

Масалан , барои ҳалли муодилаи $(y')^2 - 1 = 0$ хосияти ягонагӣ дар тамоми нуқтаҳо ҳамворӣ ичро мегардад, чунки аз ҳар як нуқтаи (x_0, y_0) ҳамворӣ ду хатҳои каҷи интегралӣ бо самтҳои гуногун мегузаранд. Дар ҳақиқат, $y' = \pm 1$ ва аз ин ҷо $y = x + c$, $y = -x + c$.

Барои муодилаи $y'^2 - (x + y)y' + xy = 0$ бошад, дар нуқтаҳои хати рости $y = x$ хосияти ягонагии ҳал ҷой надорад, чунки аз ҳар як нуқтаи ин хати рост хатҳои каҷи интегралии муодилаҳои $y' = x$ ва $y' = y$ бо як самти умумӣ мегузаранд. Дар ҳақиқат, муодилаи додашударо нисбат ба y' ҳал намуда, ҳосил мекунем $y' = x$ ва $y' = y$. Ҳар кадоми ин муодилаҳоро интегронида хатҳои каҷи интегралии муодилаи додашударо меёбем: $y = \frac{x^2}{2} + c$ ва $y = ce^x$.

Дар нақшаи 6 хатҳои каҷи интегралии муодилаи $y' = x$ барои $c = \frac{1}{2}$ $\left(y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$ ва муодилаи $y' = y$ барои $c = e^{-1}$ $\left(y = e^{x-1}\right)$ тасвир шудаанд, ки онҳо аз нуқтаи $(1,1)$ мегузорад ва дар ин нуқта ҳар ду хатҳои каҷи интегралӣ расандаи умумӣ доранд. Айнан чунин ҳолат дар тамоми нуқтаҳои хати рости $y = x$ ҷой дорад.



Нақшаи 6.

Теорема. *Бигзор функсияи $F(x, y, y')$ дар ҳар гуна атрофи сарбасти нуқтаи (x_0, y_0, y'_0) шартҳои зеринро қаноат кунонад:*

1) *$F(x, y, y')$ нисбат ба ҳамаи тағйирёбандаҳояш бефосила мебошад;*
2) *ҳосилаи хусусӣ $\frac{\partial F}{\partial y'}$ вуҷуд дорад ва он нобаробари нул аст: $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$;*

3) ҳосилаи хусусӣ $\frac{\partial F}{\partial y}$ *вуҷуд дорад ва он маҳдуд аст:* $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \le N_1$.

Он гоҳ ҳалли ягонаи муодилаи (2.41) $y = y(x)$, $x_0 - h_0 \le x \le x_0 + h_0$, ($h-$ *адади дилхоҳ хурд), ки шартҳои* $y(x_0) = y_0$ *ва* $y'(x_0) = y'_0$*-ро қаноат мекунонад, вуҷуд дорад, дар куҷо* y'_0 *- яке аз решаҳои ҳақиқии муодилаи* $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ *мебошад.*

Исбот. Дар асоси теоремаи маълум дар бораи мавҷудияти функсияи ноошкор, шартҳои 1) ва 2)-и теорема кафолати мавҷудияти функсияи бефосила ва ягонаи $y' = f(x, y)$ -ро дар атрофи нуқтаи (x_0, y_0) медиҳад, ки он аз муодилаи (2.41) муайян карда шуда, шарти $y'_0 = f(x_0, y_0)$ -ро қаноат мекунонад. Агар нишон диҳем, ки функсияи $f(x, y)$ дар атрофи нуқтаи (x_0, y_0) шарти

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le N \tag{2.42}$$

-ро қаноат мекунонад, он гоҳ барои муодилаи

$$y' = f(x, y) \tag{2.43}$$

шартҳои теоремаи маҷудият ва ягонагии ҳал (Боби 1. §4.) иҷро мегарданд ва бинобар ин ҳалли ягонаи ин муодилаи вуҷуд дорад, ки он шарти $y(x_0) = y_0$ -ро қаноат мекунонад. Аз ин ҷо ҳосил мегардад, ки хати каҷи интегралии муодилаи (2.41), ки аз нуқтаи (x_0, y_0) мегузарад ва дар ин нуқта коэффисиенти кунҷии расандааш ба y'_0 баробар аст, мавҷуд ва ягона мебошад.

Ҳамин тавр, барои исботи теорема нобаробарии (2.42)-ро нишон додан кифоя мебошад.

Боз дар асоси теоремаи маълум дар бораи функсияи ноошкор, аз шартҳои 1), 2) ва 3)-и теорема бармеояд, ки ҳосила $\frac{\partial f}{\partial y}$ вуҷуд дорад ва он аз рӯи қойидаи ҳисоб намудани ҳосилаи функсияи ноошкор ёфта мешавад.

Айнияти $F(x, y, y') = 0$ -ро нисбат ба y дифференсиронида ва баробарии (2.43)-ро ба инобат гирифта, ҳосил мекунем.

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \text{ё ин ки} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial y'}.$$

Аз ин ҷо, дар асоси шартҳои 2) ва 3)-и теорема иҷро гардидани нобаробарии (2.42) дар атрофи нуқтаи (x_0, y_0) ҷорӣ мегардад.

Теорема исбот гардид.

§13. Ҳалҳои махсус

Маҷмӯи нуқтаҳои ҳамворӣ (x, y), ки дар онҳо ягонагии ҳалли муодилаи (2.41) иҷро намегардад, *маҷмӯи махсус* номида мешавад.

Дар нуқтаҳои маҷмӯи махсус ақаллан яке аз шартҳои теоремаи дар боло исботкардашуда иҷро намегардад. Дар муодилаҳои дифференсиалӣ, ки дар аксар масъалаҳои амалӣ дучор мешаванд, одатан шартҳои 1) ва 3) иҷро мегарданд, вале шарти 2) ҷой надорад.

Агар шартҳои 1) ва 3) иҷро гарданд, он гоҳ нуқтаҳои маҷмӯи махсус бояд системаи муодилаҳоро

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0 \end{cases}$$

қаноат кунонанд. Аз ин система y'-ро хориҷ намуда, муодилаи

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{2.44}$$

-ро ҳосил мекунем, ки онро нуқтаҳои маҷмӯи махсус қаноат мекунонанд. Аммо на дар ҳар як нуқтае, ки муодилаи (2.44)-ро қаноат мекунонад, ягонагии ҳалли муодилаи (2.41) иҷро мегардад, чунки шартҳои теоремаи дар боло овардашуда барои ягонагии ҳал шартҳои кифоягӣ буда, шартҳои зарурӣ намебошанд, яъне аз иҷро нагардидани яке аз шартҳои ин теорема ҳоло ҷой надоштани ягонагии ҳалли муодила бар намеояд.

Ҳамин тавр, нуқтаҳои маҷмӯи махсус фақат дар байни нуқтаҳои хати каҷи (2.44) ҷой дошта метавонанд.

Агар ягон шохаи $y = \varphi(x)$ хати каҷи (2.44) ба маҷмӯи махсус тааллуқ дошта бошад ва дар як вақт хати каҷи интегралӣ бошад, онро *хати каҷи интегралии махсус* ва функсияи $y = \varphi(x)$-ро *ҳалли махсус* меноманд. Ҳамин тавр, барои ёфтани ҳалли махсуси муодилаи (2.41) хати каҷеро, ки аз системаи муодилаҳо

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \tag{2.45}$$

муайян карда мешавад ёфта, онро ба муодилаи (2.41) гузошта санҷидан лозим аст, ки дар байни шохаҳои ин хати каҷ хати каҷи интегралӣ мавҷуд аст ё не ва агар мавҷуд бошад, боз санҷидан лозим аст, ки дар нуқтаҳои ин хатҳои каҷ хосияти ягонагии ҳал ҷой дорад ё не. Агар ягонагӣ ҷой надошта бошад, ин шохаи хати каҷ - хати каҷи интегралии махсуси муодилаи (2.41) мебошад.

Мисоли 31. Ҳалли махсуси муодилаи Лагранж

$$x-y=\frac{4}{9}y'^2-\frac{8}{27}y'^3$$

ёфта шавад.

Ҳал. Барои муодилаи додашуда шартҳои 1) ва 3) –и теоремаи дар боло исботкардашуда иҷро мешаванд. Системаи (2.45) барои ин муодила чунин намуд дорад:

$$\begin{cases} x-y=\frac{4}{9}p^2-\frac{8}{27}p^3, \\ \frac{8}{9}\left(p-p^2\right)=0. \end{cases}$$

Аз муодилаи дуюм меёбем: $p=0$ ва $p=1$. Ба муодилаи якум гузашта ҳосил мекунем:

$$y=x \quad \text{ва} \quad y=x-\frac{4}{27}.$$

Дидан душвор нест, ки функсияи дуюм ҳалли муодилаи додашуда мебошад. Акнун месанҷем, ки дар нуқтаҳои хати каҷи $y=x-\frac{4}{27}$ шартҳои ягонагии ҳал ҷой доранд ё не. Бо ин мақсад аввал ҳалҳои дигари муодилаи додашударо меёбем. Барои ин дар муодилаи додашуда $y'=p$ гузошта ва баробарии ҳосилшударо нисбат ба x дифференсиронида, меёбем: $p=1-\frac{8}{9}pp'+\frac{8}{9}p^2p'$. Аз ин ҷо, $\frac{8}{9}p(1-p)p'=1-p$ ё ин ки $\frac{8}{9}pp'=1$ ва $\frac{dx}{dp}=\frac{8}{9}p$. Ин муодиларо интегронида, меёбем: $x=\frac{4}{9}p^2+c$ ё ин ки $x-c=\frac{4}{9}p^2$. Ин ифодаро ба муодилаи додашуда гузошта ҳосил мекунем: $y=\frac{8}{27}p^3+c$ ё ин ки $y-c=\frac{8}{27}p^3$.

Ҳамин тавр, $x-c=\frac{4}{9}p^2$, $y-c=\frac{8}{27}p^3$ - ҳалли муодилаи додашударо ба намуди параметрӣ ифода менамояд. Аз ин ҷо параметр $p-$ро хориҷ намуда, ҳосил мекунем:

$$(y-c)^2=(x-c)^3.$$

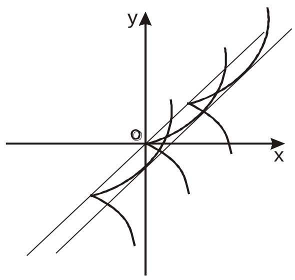
Ин маҷмӯи параболаҳои нимкубӣ мебошад (нақш.7).

Нишон медиҳем, ки хати рости $y=x-\frac{4}{27}$ барои параболаҳои нимкубӣ $(y-c)^2=(x-c)^3$ дар ҳар як нуқтааш расанда мебошад.

Шартҳои дар нуқтаи абтсиссааш x_0 буда расандаи умумӣ доштани хатҳои каҷи $y_1 = c + (x-c)^{3/2}$ ва $y_2 = x - \frac{4}{27}$ чунинанд: $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ ва $y_1'(x_0) = y_2'(x_0)$, яъне

$$\begin{cases} c + (x_0 - c)^{3/2} = x_0 - \dfrac{4}{27}, \\ \dfrac{3}{2}(x_0 - c)^{1/2} = 1. \end{cases}$$

Аз баробарии дуюм меёбем $x_0 - c = \frac{4}{9}$. Агар ин ифодаро ба баробарии якум гузорем, айният ҳосил мегардад. Ин чунин маъно дорад, ки дар ҳар як нуқтаи абтсиссааш x_0 буда хати рости $y = x - \frac{4}{27}$ барои параболаи нимкубӣ $(y-c)^2 = (x-c)^3$, ки дар он доимӣ c аз баробарии $c = x_0 - \frac{4}{9}$ муайян карда мешавад, расанда мебошад, яъне дар ҳар як нуқтаи ин хати рост аз рӯи як самт ду хатҳои каҷи интегралӣ мегузаранд; яке хати рости $y = x - \frac{4}{27}$ ва дигаре параболаҳои нимкубӣ $(y-c)^2 = (x-c)^3$, ки дар нуқтаи дида баромада истодаамон ба ин хати рост мерасанд (нақшаи 7). Бинобар ин $y = x - \frac{4}{27}$ - Ҳалли махсуси муодилаи додашуда мебошад.



Нақшаи 7

Қайд менамоем, ки агар маҷмӯи хатҳои каҷи $\Phi(x, y, c) = 0$, ки ҳалҳои муодилаи (2.41) мебошанд, хати хамгашт $y = \varphi(x)$ дошта бошад, он гоҳ $y = \varphi(x)$ - ҳалли махсуси муодилаи (2.41) мебошад.

Чи хеле, ки аз курси геометрияи дифференсиалӣ маълум аст, агар функсияи $\Phi(x, y, c)$ ҳосилаи бефосилаи тартиби якум нисбат ба c дошта бошад, он гоҳ барои ёфтани хати хамгашт доимӣ c - ро аз муодилаҳои

$$\Phi(x, y, c) = 0, \; \frac{\partial \Phi(x, y, c)}{\partial c} = 0 \tag{2.46}$$

хориҷ намуда, санҷидан лозим аст, ки дар ҳар як нуқта хати каҷи ҳосилшуда ва хатҳои каҷи маҷмӯи $\Phi(x, y, c) = 0$ расандаи умумӣ доранд ё не. Ин санҷишро дар асоси шарти расандаи умумӣ доштани хатҳои каҷи $y = \varphi_1(x)$ ва $y = \varphi_2(x)$ дар нуқтае, ки абтсиссааш x_0 мебошад:

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0), \qquad \varphi_1'(x_0) = \varphi_2'(x_0)$$

гузаронидан мумкин аст.

Барои мисоли дар боло овардашуда хати рости $y = x - \frac{4}{27}$ барои маҷмӯи параболаҳои нимкубӣ $(y-c)^2 = (x-c)^3$ хати ҳамгашт мебошад. Дар ҳақиқат, аз $\Phi(x, y, c) = (y-c)^2 - (x-c)^3 = 0$ меёбем $\frac{\partial \Phi}{\partial c} = -2(y-c) + 3(x-c)^2$. Бинобар ин системаи (2.46) барои мисоли мо чунин намуд дорад:

$$\begin{cases} (y-c)^2 - (x-c)^3 = 0, \\ -2(y-c) + 3(x-c)^2 = 0. \end{cases}$$

Аз ин система доимӣ c – ро хориҷ намуда, ҳосил мекунем: $y = x - \frac{4}{27}$.

Чи хеле ки дар боло нишон дода будем, ин хати рост барои маҷмӯи параболаи нимкубӣ $(y-c)^2 = (x-c)^3$ расанда мебошад, яъне хати рости $y = x - \frac{4}{27}$ барои параболаҳои нимкубӣ $(y-c)^2 = (x-c)^3$ хати ҳамгашт мебошад. Бинобар ин $y = x - \frac{4}{27}$ - ҳалли махсуси муодилаи додашуда мебошад.

Боби III
Муодилаҳои дифференсиалии тартиби олӣ

§1. Мафҳумҳо ва таърифҳои асосӣ

Намуди умумии муодилаи дифференсиалии тартиби n-ӯм чунин аст:

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, \tag{3.1}$$

ё ин ки, агар нисбат ба ҳосилаи тартиби калонтарин ҳалгардида бошад

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \tag{3.2}$$

Ҳар гуна функсияи $y = y(x)$, ки дар интервали (a,b) муайян буда, n- маротиба бефосила дифференсиронидашаванда мебошад, *ҳалли муодилаи* (3.1) дар ин интервал номида мешавад, агар он муодилаи (3.1)-ро ба айният табдил диҳад:

$$F\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)\right) \equiv 0 \qquad (x \in (a,b)).$$

Ба ҳар як ҳалли муодилаи тартиби n-ӯм дар ҳамвории (x, y) хати каҷе мувофиқ меояд, ки он, чун дар мавриди муодилаи тартиби якум, *хати каҷи интегралӣ* номида мешавад.

Чӣ тавре, ки ба мо маълум аст, аз нуқтаи назари мазмуни геометрӣ, муодилаи тартиби якум баъзе хосиятҳои умумии маҷмӯи расандаҳои ҳамаи хатҳои каҷи интегалиро муайян менамояд. Айнан ҳамин тавр, ҳар як муодилаи тартиби n-ӯм низ баъзе хосиятҳои хати каҷи интегралиашро ифода менамояд. Масалан, муодилаи тартиби дуюмро

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

дида мебароем. Онро ба намуди

$$F\left(x, y, y', (1+y'^2)^{3/2} \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \right) = 0 \qquad (3.3)$$

навишта, ба хулосаи зерин меоем: азбаски $\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ коэффисиенти хамии хати каҷи $y = y(x)$-ро дар нуқтаи (x, y) ифода мекунад, пас муодилаи (3.3) алоқаи байни координатаҳо, ҳолати расанда ва коэффисиенти хамии хати каҷи интегралиро дар ҳар як нуқта (x, y) ифода менамояд.

Мисоли 1. Хатҳои каҷи интегралии муодилаи

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = a \quad (a > 0) \qquad (3.4)$$

дорои хосияти умумии зерин мебошанд: дар ҳар як нуқтаи хати каҷи интегралӣ коэффисиенти хамӣ доимӣ буда, баробари a мебошад.

Маълум, ки ба чунин хосият давраҳои радиуси $\frac{1}{a}$ доро мебошанд. Бинобар ин ҳар як давра аз маҷмӯи давраҳои

$$(y - c_1)^2 + (x - c_2)^2 = \frac{1}{a^2}$$

($c_1, c_2 -$ доимиҳои дилхоҳ) - хати каҷи интегралии муодилаи (3.4) мебошад.

§2. Гузориши масъалаи Коши барои муодилаи тартиби n-ӯм

Барои муодилаи (3.1) масъалаи Коши ин тавр гузошта мешавад: *ҳалли* $y = y(x)$ *муодилаи* (3.1) *ёфта шавад, ки он ҳангоми* $x = x_0$ *будан шартҳои зеринро*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (3.5)$$

қаноат кунонад. Дар ин ҷо $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ *ададҳои додашуда буда, онҳоро қиматҳои ибтидоии ҳал ва* x_0*-ро қимати ибтидоии тағйирёбандаи новобаста меноманд.*

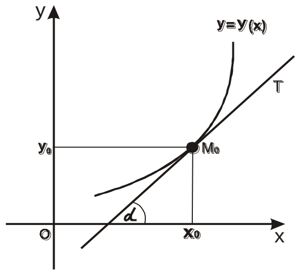
Баробариҳои (3.5) *шартҳои ибтидоӣ*, ё ин ки *шартҳои Коши* номида мешаванд.

Дар ин ҷо тафовут аз муодилаи тартиби якум дар он аст, ки барои қимати додашудаи тағйирёбандаи новобаста на фақат қимати худи функсия, балки қиматҳои ҳосилаҳои он то тартиби аз тартиби муодила ба як воҳид камбуда дода мешаванд.

Масалан, барои муодилаи тартиби дуюм

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

шартҳои ибтидоӣ ба намуди зерин дода мешаванд: $y = y_0$ ва $y' = y'_0$ ҳангоми $x = x_0$ будан. Аз нуқтаи назари *мазмуни геометрӣ* дар ин ҷо сухан дар бораи муайян намудани хати каҷи интегралӣ $y = y(x)$ меравад, ки он аз нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ мегузарад (нақш.1) ва дар ин нуқта расидаи он M_0T бо равиши мусбати тири Ox кунҷи α–ро ташкил медиҳад, ки $tg\alpha = y_0'$ мебошад.



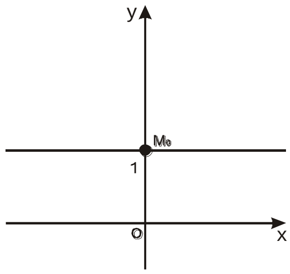
Нақшаи 1

Мисоли 2. Ҳалли муодилаи

$$y'' = 2x, \tag{3.6}$$

ки шартҳои ибтидоии $y = 1$, $y' = 0$ -ро ҳангоми $x = 0$ будан қаноат мекунонад, ёфта шавад.

Ҳал. Хати каҷи интегралӣ, ки ёфтани он талаб карда мешавад, тири Oy-ро дар нуқтаи $M_0(0;1)$ мебурад ва расанда ба ӯ дар ин нуқта ба тири Ox параллел мебошад (нақш.2).



Нақшаи 2

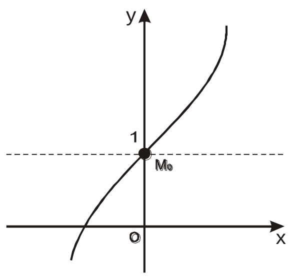
Азбаски $y'' = (y')'$ мебошад, аз муодилаи додашуда меёбем

$$y' = x^2 + c_1. \tag{3.7}$$

Ин муодилаи дифференсиалиро интегронида, меёбем

$$y = \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2. \tag{3.8}$$

Ин маҷмӯи параболаҳои кубӣ мебошад, ки он ҳамаи ҳалҳои муодилаи додашударо дарбар мегирад. Бинобар ин, агар ҳалли масъалаи гузошташудаи Коши мавҷуд бошад, он аз ин маҷмӯи ҳалҳо, ҳангоми интихоби қиматҳои мувофиқи доимиҳо



Нақшаи 3

c_1 ва c_2, ҳосил мешавад. Барои муайян намудани ин қиматҳои доимиҳо дар баробариҳои (3.7) ва (3.8) қиматҳои тағйирёбандаҳо x, y ва y' – ро бо қиматҳои ибтидоии онҳо, мувофиқан, $0, 1$ ва 0 иваз менамоем: $0 = c_1$, $1 = c_2$. Ин қиматҳои доимиҳоро ба маҷмӯи ҳалҳо (3.8) гузошта, ҳосил мекунем:

$$y = \frac{x^3}{3} + 1,$$

ки графики ин функсия дар нақшаи 3 тасвир карда шудааст.
Ин ҳалли масъалаи гузошташудаи Коши мебошад.

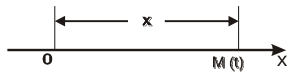
Қайд мекунем, ки маҷмӯи беохири хатҳои каҷи интегралӣ

$$y = \frac{x^3}{3} + c_1 x + 1,$$

ки аз нуқтаи $M_0(0;1)$ мегузаранд, вуҷуд доранд, вале танҳо яке аз онҳо дар ин нуқта расандаи ба тири Ox параллел бударо дорост, ки ин хати каҷи $y = \frac{x^3}{3} + 1$ мебошад.

Акнун *маънои механикии масъалаи Коширо* барои муодилаи (3.1) муайян менамоем.

Ҳаракати ростхаттаи нуқтаи материалӣ M – ро аз рӯи тири Ox дида мебароем (нақш.4).



Нақшаи 4

Он гоҳ x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, мувофиқан, мавқеи ҷойгиршавӣ, суръат ва шитоби ҳаракати нуқтаи M – ро дар моменти вақти t муайян менамоянд. Агар қувваи ба нуқта таъсиркунандаро ҳамчун функсияи $f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ вобаста аз вақт, мавқеи ҷойгиршавӣ ва суръати нуқта ҳисоб намоем ва массаи нуқтаро чун воҳид қабул намоем, ин гоҳ дар асоси қонуни дуюми Нютон муодилаи дифференсиалии тартиби дуюмро ҳосил мекунем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{3.9}$$

ки он *қонуни ҳаракати нуқтаро* аз рӯи тири Ox муайян менамояд.

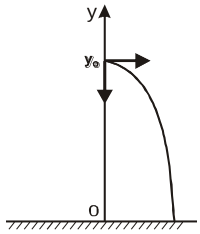
Масъалаи Кошӣ барои муодилаи (3.9) чунин гузошта мешавад: ҳаракати $x = x(t)$, ки шартҳои ибтидоии зеринро

$$x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = x'_0$$

ҳангоми $t = t_0$ будан қаноат мекунонад, ёфта шавад. Яъне қонуни ҳаракат, ки дар моменти вақти $t = t_0$ аз ҷойи муайян x_0 бо суръати додашуда x_0' ҳаракат мекунад, ёфта шавад.

Мисоли 3. Бигзор нуқтаи материалӣ аз рӯи хати рости вертикалӣ дар зери таъсири қувваи вазнинӣ ҳаракат мекунад. Қонуни ҳаракат ёфта шавад, агар дар моменти ибтидоии вақт нуқта мавқеи муайянро ишғол намуда, суръати додашударо доро бошад.

Ҳал. Ба сифати хати рости вертикалӣ, ки аз рӯи он нуқта ҳаракат кунад тири Oy-ро мегирем ва ибтидои координатаҳоро дар сатҳи Замин ҷой медиҳем (нақш. 5)



Нақшаи 5

Он гоҳ

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g, \qquad (3.10)$$

дар куҷо g - шитоби ҳаракат дар зери қувваи вазнинӣ мебошад.

Моменти ибтидоии вақт, мавқеи ибтидоӣ ва суръати ибтидоии ҳаракати нуқтаро мувофиқан ба t_0, y_0 ва y_0' ишора мекунем. Бигзор $t_0 = 0$ бошад, он гоҳ қонуни ҳаракат $y = y(t)$, ки муайян намудани он талаб карда мешавад, шартҳои ибтидоии зеринро қаноат мекунонад:

$$y = y_0,\ y' = y_0' \text{ ҳангоми } t = 0 \text{ будан.} \qquad (3.11)$$

Аз муодилаи (3.10), чун мисоли 1, меёбем

$$\frac{dy}{dt} = -gt + c_1, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2.$$

Шартҳои ибтидоии (3.11)-ро қаноат кунонида, меёбем: $y_0' = c_1$, $y_0 = c_2$.

Ҳамин тавр, ҳалли масъалаи Коши $y = -\frac{gt^2}{2} + y_0' t + y_0$ мебошад.

Мӯҳлати вақт T-ро , ки пас аз гузаштани он нуқта ба Замин меафтад, ҳангоми суръати ибтидоии ҳаракат баробари нул будан меёбем (нақш.5). Қонуни ҳаракатро дар ин ҳолат муодилаи

$$y = -\frac{gt^2}{2} + y_0 \quad (t \geq 0)$$

муайян менамояд. Дар ин ҷо $y = 0$ гузашта ва муодилаи ҳосилгаштаро нисбат ба t ҳал намуда, меёбем

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = T.$$

§3. Шартҳои кифоягии мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи Коши барои муодилаи тартиби n-ӯм

Ҳангоми муоинаи масъалаи Коши барои муодилаи тартиби n-ӯм, чун ҳолати муодилаи тартиби якум, саволҳо оиди мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи Коши, инчунин саволҳо дар бораи хосиятҳои ҳалли масъалаи Коши - чун функсияи тағйирёбандаи новобаста ва қиматҳои ибтидоӣ - ба миён меоянд.

Қайд менамоем, ки ягонагии ҳалли масъалаи Коши барои муодилаи тартиби n- ум ин, чи тавре ки барои муодилаи тартиби якум буд, маънои онро надорад, ки аз нуқтаи додашудаи $M_0(x_0, y_0)$ фақат якто хати каҷи интегралӣ мегузарад. Масалан, барои муодилаи тартиби дуюм, чи тавре ки дар боло қайд карда будем, ягонагии ҳалли масъалаи Коши ба он маъно фаҳмида мешавад, ки аз нуқтаи додашуда хати каҷи интегралии ягона мегузарад, ки расанда ба он дар ин нуқта бо равиши мусбати тири Ox кунҷи $\alpha -$ро ташкил медиҳад, ки $tg\alpha$ ба қимати додашудаи ҳосила y_0' баробар аст.

Теоремаҳои мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи Коши, ки барои муодилаи тартиби якум исбот карда шуда буданд (Боби I, §4), барои муодилаи тартиби n-ӯм низ ҷой доранд. Мо дар боби V нишон медиҳем, ки ҳар гуна муодилаи дифференсиалии тартиби n-ӯм ба системаи муодилаҳои каноникии тартиби якум эквивалент мебошад ва дар он ҷо барои чунин система теоремаи мавҷудият ва ягонагии ҳал исбот карда мешавад, ки он дар як вақт шартҳои мавҷудият ва ягонагии ҳалли муодилаи дифференсиалии тартиби n-ӯмро муайян мекунад. Бинобар ин мо дар ин ҷо теоремаи мавҷудият ва ягонагии ҳалро барои муодилаи дифференсиалии тартиби n-ӯм бе исбот, дар шакли соддакардашуда меорем.

Муодилаи (3.2)-ро бо шартҳои ибтидоии (3.5) дида мебароем.

Теоремаи Пикар ***(дар бораи мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи Кошӣ барои муодилаи** (3.2)**)***

Бигзор функсияи $f(x, y_1, \cdots, y_n)$ дар соҳаи

$$D: \left\{ |x - x_0| \le a, \left| y_k - y_k^0 \right| \le b \quad (k = 1, \cdots, n) \right\}$$

нисбат ба ҳамаи тағйирёбандаҳояш бефосила бошад ва дар он нисбат ба аргументҳо $y_1, \cdots, y_n$ шарти Липшитсро қаноат кунонад:

$$\left| f\left(x, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n\right) - f\left(x, \bar{\bar{y}}_1, \cdots, \bar{\bar{y}}_n\right) \right| \le L \left(\left| \bar{y}_1 - \bar{\bar{y}}_1 \right| + \cdots + \left| \bar{y}_n - \bar{\bar{y}}_n \right| \right) \quad (L > 0).$$

Он гоҳ ҳалли ягонаи $y = y(x)$ *муодилаи* (3.2), *ки шартҳои ибтидоии* (3.5)*-ро қаноат мекунонад, вуҷуд дорад ва он дар порчаи* $(x_0 - H,\ x_0 + H)$ *муайян буда, дар он бо якҷоягии ҳосилаҳои то тартиби* n*-ўм бефосила мебошад, ки дар ин ҷо*

$$H = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \quad \text{ва} \quad M = \max_D |f(x, y_1, \cdots, y_n)|.$$

мебошад.

Қайд менамоем, ки агар функсияи $f(x, y_1, \cdots, y_n)$ дар соҳаи D нисбат ба тағйирёбандаҳо $y_1, \cdots, y_n$ ҳосилаҳои хусусии бефосила $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ дошта бошад, он гоҳ барои $f(x, y_1, \cdots, y_n)$ шарти Липшитс иҷро мегардад.

§4. Мафҳуми масъалаи канорӣ

Дар назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ёфтани ҳалле, ки баъзе шартҳои иловагиро қаноат мекунонад, масъалаи муҳимтарин мебошад. Масъалаи Коши, ки дар параграфи гузошта шарҳ дода будем, яке аз чунин масъалаҳо ба ҳисоб меравад. Масъалаи дигари муҳими ин назария – *масъалаи канорӣ* ном дорад, ки дар он муодила дар интервали $[a, b]$ дида баромада шуда, шартҳои иловагӣ ба ҳал на дар як нуқта (чи хеле ки барои масъалаи Коши буд), балки дар ду нуқтаҳои канории порча a ва b гузошта мешаванд. Чунин шартҳо – *шартҳои канорӣ* номида мешаванд.

Ҳамин тавр, *масъалаи канорӣ* -муодилаи дифференсиалӣ дар дохили интервали (a, b) дар якҷоягӣ бо шартҳои канорӣ дар нуқтаҳои сарҳадӣ $x = a$ ва $x = b$ мебошад. Аён аст, ки масъалаҳои канорӣ фақат барои муодилаҳои тартибашон на камтар аз 2 буда гузошта мешаванд, чунки барои муодилаи тартиби якум, барои яккимата муайян намудани хати каҷи интегралӣ, додашавии қимати ҳал фақат дар як нуқта кифоя мебошад.

Қайд менамоем, ки масъалаи канорӣ на ҳама вақт ҳал дорад ва агар ҳал дошта бошад ҳам, он на ҳама вақт ягона мебошад.

Мисоли 4. Ҳалли муодилаи $y'' = 6x$, ки шартҳои канории зеринро қаноат мекунонад, ёфта шавад:

$$y'(0)=0, \quad y(1)=1.$$

Ҳал. Муодилаи додашударо пай дар пай интегронида ҳосил мекунем

$$y'=3x^2+c_1, \quad y=x^3+c_1x+c_2.$$

Дар ин ҷо шартҳои канориро гузошта, меёбем:

$$0=3\cdot 0+c_1, \quad 1=1^3+c_1\cdot 1+c_2$$

Яъне, $c_1=0$, $c_2=0$. Бинобар ин, ҳалли масъала $y=x^3$ мебошад.

Мисоли 5. Нишон медиҳем, ки барои муодилаи $y''+y=0$ ҳалҳои шартҳои канории $y(0)=1$, $y(\pi)=2$-ро қаноат кунонанда вуҷуд надорад.

Дар ҳақиқат, нишон додан мумкин аст, ки ҳамаи ҳалҳои муодилаи додашуда бо формулаи $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ ифода мешаванд, дар куҷо c_1 ва c_2 - доимиҳои дилхоҳ. Шартҳои канориро ба ин формула гузошта ҳосил мекунем: $1=c_1$, $2=-c_1$. Ин система ҳамҷоя нест. Бинобар ин муодилаи додашуда ҳалҳои шартҳои канории додашударо қаноат кунонанда надорад.

§5. Ҳалҳои умумӣ, хусусӣ ва махсус

Системаи ҳалҳои муодилаи (3.2), ки аз n доимиҳои дилхоҳ вобаста мебошад

$$y=\varphi(x,c_1,\cdots,c_n) \tag{3.12}$$

дида мебароем.

Бигзор D- соҳаи фазои тағйирёбандаҳои $\left(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}\right)$ бошад, ки дар ҳар як нуқтаи он шартҳои теоремаи мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи Коши барои муодилаи (3.2) иҷро мешаванд. Функсияи (3.12), ки нисбат ба x ҳосилаҳои хусусии бефосилаи то тартиби n-ро дорад, *ҳалли умумии* муодилаи (3.2) номида мешавад, агар системаи муодилаҳо

$$\begin{cases} y=\varphi\,(x,c_1,\cdots,c_n), \\ y'=\varphi^1(x,c_1,\cdots,c_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x,c_1,\cdots,c_n) \end{cases}$$

нисбат ба доимиҳо $c_1,\cdots,c_n$ дар соҳаи D ҳалшаванда бошад:

$$\begin{cases} c_1 = \psi_1\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right), \\ c_2 = \psi_2\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n = \psi_n\left(y, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right) \end{cases} \tag{3.13}$$

ва агар функсияи (3.12) барои ҳар гуна қиматҳои доимиҳо $c_1,\cdots,c_n$, ки аз системаи (3.13) дар соҳаи D муайян карда мешаванд, ҳалли муодилаи (3.2) бошад.

Формулаи ҳалли умумӣ (3.12) имконият медиҳад, ки қиматҳои мувофиқи доимиҳо $c_1,c_2,\cdots,c_n$-ро интихоб намуда ҳар гуна масъалаи Коширо барои муодилаи (3.12) дар соҳаи D ҳал намоем.

Дар аксар ҳолатҳо муодилаи (3.2)-ро интегронида, ҳалли умумиро ба намуди ноошкор

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0 \tag{3.14}$$

(нисбат ба y ҳалнашуда) ёфтан муяссар мегардад. Ифодаи (3.14)- *ҳалли умумӣ ба намуди ноошкор* ё ин ки *интеграли умумии* муодилаи (3.2) дар соҳаи D номида мешавад.

Дар баъзе ҳолатҳо, ки ёфтани ҳалли умумии муодилаи (3.2) ба намуди ошкор ё ноошкор ғайриимкон мебошад, ин муодиларо интегронида, маҷмӯи хатҳои каҷи интегралиро, ки аз n доимиҳои дилхоҳ $c_1,\cdots,c_n$ вобаста мебошад, ба *намуди параметрӣ*

$$\begin{cases} x = \varphi(t, c_1, \cdots, c_n), \\ y = \psi(t, c_1, \cdots, c_n) \end{cases}$$

муайян кардан мумкин аст. Ин маҷмӯи хатҳои каҷи интегралиро *ҳалли умумии муодилаи* (3.2) *дар намуди параметрӣ* меноманд.

Агар ҳалли муодилаи (3.2) фақат аз нуқтаҳои ягонагии ҳалли масъалаи Коши барои ин муодила иборат бошад, чунин ҳалро –*ҳалли хусусӣ* меноманд. Ҳалле, ки аз формулаи ҳалли умумӣ барои қиматҳои хусусии доимиҳо $c_1,\cdots,c_n$ ҳосил мегардад, ҳалли хусусӣ мебошад. Ҳар гуна масъалаи Коширо аз формулаи ҳалли умумӣ ҳал намуда, ҳама вақт ҳалли хусусиро ҳосил мекунем.

Ҳалле, ки дар ҳар нуқтааш ягонагии ҳалли масъалаи Коши ҷой надорад, *ҳалли махсус* номида мешавад.

Мисоли 6. Муодилаи $y'' = \sqrt{y'}$-ро ҳал менамоем. $y' = z$ гузошта, ҳосил мекунем

$$z' = 2\sqrt{z}\,. \tag{3.15}$$

Ҳалли умумии ин муодила $z=(x+c_1)^2$ $(x>-c_1)$ мебошад. Бинобар ин, аз муодилаи

$$y'=(x+c_1)^2 \quad (x>-c_1)$$

ҳосил мекунем: $y=\frac{1}{3}(x+c_1)^3+c_2 \quad (x>-c_1)$, ки ин ҳалли умумии муодилаи додашуда мебошад.

Муодилаи (3.15) ҳалли махсус $z=0$ дорад (ниг. Боби 1, §5). Аз ин ҷо $y'=0$ ва онро интегронида, ҳосил мекунем $y=c$. Ин маҷмӯи ҳалҳои муодилаи додашуда – ҳалҳои махсус мебошанд.

§6. Муодилаҳои тартибашон пастшаванда

Дар баъзе ҳолатҳо тартиби муодилаҳои дифференсиалиро паст кардан мумкин аст, ки бо ин роҳ интегронидани онҳо осонтар мегардад. Дар ин ҷо мо якчанд синфҳои чунин муодилаҳоро, ки онҳо дар амалия зиёдтар дучор мегарданд, дида мебароем.

1°. Муодилаҳо, ки функсияи номаълум ва ҳосилаҳои онро то тартиби $(k-1)$ дарбар намегиранд:

$$F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\cdots,y^{(n)}\right)=0.$$

Дар ин ҳолат гузариши $y^{(k)}=p$ тартиби муодиларо то $(n-k)$ паст мегардонад:

$$F\left(x,p,p',\cdots,p^{(n-k)}\right)=0.$$

Аз ин муодила меёбем $p=p(x,c_1,\cdots,c_{n-k})$. Пас, баробарии

$$y^{(k)}=p(x,c_1,\cdots,c_{n-k})$$

-ро k – маротиба интегронида, функсияи y – ро меёбем.

Мисоли 7. Муодилаи зерин ҳал карда шавад: $y^{(5)}-\frac{1}{x}y^{(4)}=0$.

Гузориши $y^{(4)}=p$ ба муодилаи $p'-\frac{1}{x}p=0$ меорад. Аз ин ҷо, $\ln|p|=\ln|x|+\ln c$, ё ин ки $p=cx$. Бинобар ин, $y^{(4)}=cx$.

Ин муодиларо 4 маротиба пай дар пай интегронида меёбем

$$y=c_1x^5+c_2x^3+c_3x^2+c_4x+c_5.$$

2°. Муодилаҳо, ки тағйирёбандаи новобастаро дарбар намегиранд:

$$F\left(y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0.$$

Дар ин ҳолат гузориши $y' = p(y)$ тартиби муодиларо ба як воҳид паст мекунад. Дар ҳақиқат,

$y' = p(y)$,

$y'' = p'(y)\cdot y' = p'(y)\cdot p(y)$.

$y''' = p''(y)\cdot y'\cdot p(y) + p'(y)\cdot p'(y)\cdot y' = p''\cdot p^2 + p'^2\cdot p$, ва ҳоказо. Аз ин ҷо дида мешавад, ки ҳосилаи тартиби k-уми функсияи y нисбат ба x ба воситаи ҳосилаҳои то тартиби $(k-1)$-и функсияи p нисбат ба y ифода карда мешаванд. Бинобар ин, пас аз ба муодилаи додашуда гузоштан, тартиби он ба як воҳид паст мегардад.

Дар ҳолати хусусӣ, агар муодилаи тартиби ду дода шуда бошад ва он тағйирёбандаи новобастаро дарбар нагирад, он бо гузориши дар боло нишондодашуда ба муодилаи тартиби як оварда мешавад.

Мисоли 8. Муодиларо ҳал намоед: $y\dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$.

Аз $\dfrac{dy}{dx} = p$ меёбем: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$. Бинобар ин, муодилаи додашуда ба муодилаи зерин оварда мешавад:

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0.$$

Аз ин ҷо, $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{dy}{y}$, $p = c_1 y$ ва $\dfrac{dy}{dx} = c_1 y$. Ҳалли ин муодила $\ln|y| = c_1 x + \ln c_2$, ё ин ки $y = c_2 e^{c_1 x}$.

3°. Тарафи чапи муодилаи $F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$ ҳосилаи ифодаи дифференсиалии тартиби $(n-1)$-ӯм $\Phi\left(x, y, y' \cdots, y^{(n-1)}\right)$ мебошад.

Дар ин ҳолат интеграли якум бо осонӣ ёфта мешавад. *Интеграл якум* – ин муодилаи дифференсиалии тартиби $(n-1)$-ӯм, ки як доимии дилхоҳро дарбар мегирад ва ба муодилаи додашудаи тартиби n–ӯм эквивалент мебошад. Яъне , дар ин ҳолат тартиби муодила ба як воҳид паст карда мешавад.

Дар ҳақиқат, муодилаи додашударо ба намуди

$$\frac{d}{dx}\Phi\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right) = 0$$

навишта, аз ин ҷо ҳосил мекунем $\Phi\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right) = c$, яъне интеграли якум ҳосил гардид.

Мисоли 9. Муодила ҳал карда шавад: $yy'' + y'^2 = 0$.

Ин муодиларо ба намуди $d(yy')=0$ навиштан мумкин аст. Аз ин ҷо, $yy'=c_1$, ки ин интеграли якуми муодилаи додашуда мебошад. Онро ба намуди $ydy=c_1dx$ навишта, ҳосил мекунем. $\frac{y^2}{2}=c_1x+c_2$, ки ин интеграли умумии муодилаи додашуда мебошад.

Дар баъзе ҳолатҳо, агар муодилаи $F\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0$ ба ифодаи $\mu\left(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}\right)$ (зарбшавандаи интегронӣ) зарб карда шавад, он гоҳ тарафи чапи он ҳосилаи ифодаи дифференсиалии тартиби $(n-1)$-ӯм $\Phi\left(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}\right)$ мегардад.

Мисоли 10. Муодилаи зеринро $yy''-y'^2=0$ ба ифодаи $\mu=\frac{1}{y^2}$ зарб намуда, ҳосил мекунем: $\frac{yy''-y'^2}{y^2}=0$. Аз ин ҷо, $\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right)=0$. Бинобар ин $\frac{y'}{y}=c_1$. Аз ин ҷо $\frac{d}{dx}\ln|y|=c_1$ ва боз як маротиба интегронида ҳосил мекунем $\ln|y|=c_1x+\ln c_2(c_2>0)$. Бинобар ин, $y=c_2e^{c_1x}$ - ҳалли умумии муодилаи додашуда мебошад.

Қайд. Ҳангоми зарб намудан ба ифодаи $\mu\left(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}\right)$ ҳалли бегона, ки ин зарбшавандаро ба нул табдил медиҳад, пайдо шуданаш мумкин аст. Агар μ канишҳо дошта бошад, ҳали муодила гум шуданаш низ мумкин аст. Дар мисоли 10 муодиларо ба $\mu=\frac{1}{y^2}$ зарб намуда, ҳалли $y=0$-ро гум кардем. Бинобар ин, барои он, ки ҳалли умумӣ $y=c_2e^{c_1x}$ ин ҳалро низ дарбар гирад, доимӣ c_2 метавонад инчунин қимати нулро қабул намояд.

4°. Муодилаи $F\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0$ нисбат ба аргументҳо $y,y',\cdots,y^{(n)}$ якҷинса мебошад.

Дар ин ҳолат тартиби муодила ба як воҳид паст карда мешавад.

Бигзор $F\left(x,ky,ky',\cdots,ky^{(n)}\right)=k^pF\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)$ бошад. Он гоҳ $y=e^{\int zdx}$ гузошта ($z-$ функсияи номаълуми нав), ҳосил мекунем:

$$y'=e^{\int zdx}z,\quad y''=e^{\int zdz}\left(z^2+z^1\right),\quad y'''=e^{\int zdz}\left(z^3+3zz'+z''\right),\ \ldots,\ y^{(k)}=e^{\int zdz}\Phi\left(z,z',z'',\cdots,z^{(k-1)}\right),$$

ки дар ин ҷо $\Phi\left(z,z',z'',\cdots,z^{(k-1)}\right)$- ифодаи дифференсиалии тартиби $k-1$ мебошад. Барои исботи баробарии охирин методи индуксияи математикиро низ истифода бурдан мумкин аст.

Ин ифодаҳоро ба муодила гузошта ва якҷинса будани $F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right)$– ро ба инобат гирифта, ҳосил мекунем:

$$e^{p\int zdx} F_1\left(x, z, z', \cdots, z^{(n-1)}\right) = 0 .$$

Аз ин ҷо, ба $e^{p\int zdx}$ тақсим намуда, ҳосил мекунем:

$$F_1\left(x, z, z', \cdots, z^{(n-1)}\right) = 0 ,$$

ки ин муодилаи тартиби $n-1$ мебошад. Яъне тартиби муодила ба як воҳид паст гардид.

Мисоли 11. Муодила ҳал карда шавад: $yy'' - y'^2 = 6xy^2$.

Ҳал. Азбаски $F(x, y, y', y'') = yy'' - y'^2 - 6xy^2$ нисбат ба y, y', y'' ифодаи якҷинсаи тартиби ду мебошад, пас гузориши $y = e^{\int zdx}$ тартиби муодиларо ба як воҳид паст мекунад.

Дар ҳақиқат, аз $y' = ze^{\int zdx}$, $y'' = \left(z^2 + z'\right)e^{\int zdx}$ ва муодилаи дода шуда ҳосил мекунем: $\left(z^2 + z'\right)e^{2\int zdx} - z^2 e^{2\int zdz} = 6xe^{2\int zdz}$. Аз ин ҷо, $z' = 6x$ ва $z = 3x^2 + c_1$. Бинобар ин, $y = e^{\int\left(3x^2 + c_1\right)dx} = c_2 e^{\left(x^3 + c_1 x\right)}$ - ҳалли умумии муодилаи додашуда мебошад.

Боби IV
Муодилаҳои дифференсиалии хаттии тартиби n-ӯм

§1. Мафҳумҳо ва баъзе хосиятҳои асосӣ

Муодилаҳои дифференсиалӣ, ки нисбат ба функсияи номаълум ва ҳосилаҳои он хаттӣ вобаста мебошанд, *муодилаҳои дифференсиалии хаттӣ* номида мешаванд. Намуди умумии онҳо чунин аст:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = \varphi(x) .$$

Дар ин ҷо фарз карда мешавад, ки $a_0(x)\neq 0$. Бинобар ин ҳар ду тарафи муодиларо ба $a_0(x)$ тақсим намуда, ба муодилаи зерин меоем:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \tag{4.1}$$

дар куҷо $p_i(x)=\dfrac{a_i(x)}{a_0(x)} \quad (i=1,2,\cdots,n), \quad f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{a_0(x)}$.

Агар тарафи рости ин муодила айнан баробари нул бошад $(f(x)\equiv 0)$, чунин муодиларо – *муодилаи дифференсиалии хаттии якҷинса* меноманд:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0.$$

Муодилаҳои дифференсиалии хаттӣ қисми нисбатан хубтар омӯхташудаи назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ба ҳисоб меравад. Сабаби асосӣ дар он мебошад, ки аз як тараф, чунин муодилаҳо дорои як қатор хосиятҳои ҷолиби диққат мебошанд, аз тарафи дигар, татбиқи онҳо дар бисёр соҳаҳои илмҳои табиатшиносӣ хеле васеъ мебошад.

Дар ин боб мо хосиятҳои умумӣ, сохтор (структура) ва методҳои ёфтани ҳалҳои чунин муодилаҳоро меомӯзем.

Агар коэффисиентҳо $p_i(x)$ дар порчаи (a,b) бефосила бошанд, он гоҳ дар атрофи ҳар гуна қиматҳои ибтидоӣ

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \qquad (a < x_0 < b)$$

шартҳои теоремаи мавҷудият ва ягонагӣ иҷро мегарданд.

Пеш аз ҳама қайд менамоем, ки муодилаҳои хаттӣ нисбат ба ҳаргуна табдилдиҳии тағйирёбандаи новобаста $x=\varphi(t)$, ки дар ин ҷо $\varphi(t)$ - функсияи ихтиёрии n-маротиба дифференсиронидашаванда ва $\varphi'(t)\neq 0$ аст, инвариантнок мебошанд.

Дар ҳақиқат $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{1}{\varphi'(t)}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{1}{[\varphi'(t)]^2}-\dfrac{dy}{dt}\dfrac{\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}$, ва ҳ.к.

Ҳамин тавр, ҳосилаи тартиби дилхоҳ $\dfrac{d^ky}{dx^k}$ нисбат ба ҳосилаҳо $\dfrac{dy}{dt},\dfrac{d^2y}{dt^2},\cdots,\dfrac{d^ky}{dt^k}$ функсияи хаттӣ мебошад. Бинобар ин ҳангоми гузориш ба муодилаи (4.1) хаттӣ будани он нигоҳ дошта мешавад.

Хаттӣ будани муодила инчунин ҳангоми табдилдиҳии хаттии функсияи номаълум $y_0(x)=\varphi(x)z(x)$ нигоҳ дошта мешавад. Дар ҳақиқат, дар асоси формулаи *Лейбнитс* ҳосил мекунем:

$$y^{(k)}=[\varphi(x)z(x)]^{(k)}=\varphi(x)z^{(k)}+k\varphi(x)z^{(k-1)}+\frac{k(k-1)}{2}\varphi''(x)z^{(k-2)}+\cdots+\varphi^{(k)}(x)z,$$

яъне $y^{(k)}$ нисбат ба $z, z', \cdots, z^{(k)}$ хаттӣ вобаста мебошад. Бинобар ин ҳангоми гузориш ба муодилаи (4.1) боз муодилаи хаттӣ нисбат ба $z, z', \cdots, z^{(n)}$ ҳосил мегардад.

Қайд менамоем, ки хосияти инвариантнокӣ нисбат ба табдилдиҳии тағйирёбандаи новобаста ва табдилдиҳии хаттии функсияи номаълум барои муодилаҳои хаттии якҷинса низ нигоҳ дошта мешавад.

§2. Муодилаҳои хаттии якҷинса

Дар ин параграф муодилаи хаттии якҷинса

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (4.2)$$

ва хосиятҳои асосии ҳалҳои ин муодила омӯхта мешаванд.

Ишораи зеринро ҷорӣ менамоем:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n)} + \cdots + p_n(x)y\,.$$

$L-$ *оператори дифференсиалии хаттӣ* номида мешавад. Бо ёрии ин оператор муодилаи (4.2) ба намуди мухтасар

$$L[y] = 0$$

навишта мешавад.

Оператори L дорои ду хосиятҳои асосии зерин мебошад:

1). $L[cy] \equiv cL[y]$, дар куҷо c – доимӣ.

Дар ҳақиқат, $L[cy] = (cy)^{(n)} + p_1(x)(cy)^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\,(cy) \equiv$
$\equiv c\left[y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y\right] = cL[y].$

2). $L[y_1 \pm y_2] \equiv L[y_1] \pm L[y_2]$.

Дар ҳақиқат, $L[y_1 \pm y_2] = (y_1 \pm y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 \pm y_2)^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)(y_1 \pm y_2) \equiv$
$\equiv \left[y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y_1\right] \pm \left[y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y_2\right] = L[y_1] \pm L[y_2].$

Аз хосиятҳои 1) ва 2) чунин натиҷа ҳосил мегардад:

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} c_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{m} c_1 L[y_i] \quad (c_i - \text{доимиҳо}).$$

Ин хосиятҳои оператори L-ро истифода бурда, якчанд теоремаҳоро дар бораи ҳалҳои муодилаи хаттии якҷинса исбот менамоем.

Теоремаи 1. *Агар* y_1- *ҳалли муодилаи хаттии якҷинсаи* (4.2) *бошад, он гоҳ* cy_1 ($c-$ *доимӣ) низ ҳалли ин муодила мегардад.*

Исбот. Бигзор $L[y_1] \equiv 0$ бошад, он гоҳ дар асоси хосияти 1)-и оператори L ҳосил мекунем $L[cy_1] = cL[y_1] \equiv 0$, яъне cy_1- ҳалли муодила (4.2) мебошад.

Теоремаи 2. *Агар* y_1, y_2 *–ҳалҳои муодилаи хаттии якҷинсаи* (4.2) *бошанд, он гоҳ сумма (фарқи) онҳо низ ҳалли ин муодила мегардад.*

Исбот. Бигзор $L[y_1] = L[y_2] \equiv 0$ бошад. Он гоҳ дар асоси хосияти 2)-и оператори L ҳосил мекунем: $L[y_1 \pm y_2] = L[y_1] \pm L[y_2] \equiv 0 + 0 = 0$.

Натиҷа аз теоремаҳои 1 ва 2. *Агар* $y_1, y_2, \cdots, y_n$ *– ҳалҳои муодилаи хаттиии якҷинсаи* (4.2) *бошанд, он гоҳ комбинатсияи хаттии ин ҳалҳо бо коэффисиентҳои доимӣ -* $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ *низ ҳалли ин муодила мегардад.*

Теоремаи 3. *Агар муодилаи* (4.2) *ҳалли комплексӣ* $y(x) = u(x) + iv(x)$ *дошта бошад, он гоҳ* $u(x)$ *ва* $v(x)$ *дар алоҳидагӣ ҳалли ин муодила мегарданд.*

Исбот. Дар асоси натиҷа аз теоремаҳои 1 ва 2 ҳосил мекунем: $0 \equiv L[u + iv] = L[u] + iL[v]$. Аз ин ҷо $L[u] \equiv 0$, $L[v] \equiv 0$.

§3. Функсияҳои хаттӣ вобаста ва новобаста

Пеш аз он ки хосиятҳои минбаъдаи ҳалҳои муодилаҳои хаттии якҷинсаро номбар намоем, мафҳуми функсияҳои хаттӣ вобаста ва новобастаро ҷорӣ менамоем ва якчанд мисолҳои функсияҳои хаттӣ новобастаро меорем, ки онҳо дар оянда истифода бурда мешаванд.

Таърифи 1. Бигзор дар порчаи $[a,b]$ функсияҳои $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ дода шуда бошанд. Агар чунин ададҳои доимӣ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ вуҷуд дошта бошанд, ки айнияти зерин иҷро гардад

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n \equiv 0 \qquad (4.3)$$

ва ақаллани яке аз $\alpha_i \neq 0$ бошад, он гоҳ системаи функсияҳо $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ дар порчаи $[a,b]$ *хаттӣ вобаста* номида мешавад.

Агар баробарии (4.3) фақат барои $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ иҷро гардад, он гоҳ системаи функсияҳо $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ дар порчаи $[a,b]$ *хаттӣ новобаста* номида мешавад.

Мисоли 1. Функсияҳои $1, x, x^2, \cdots, x^n$ дар порчаи дилхоҳи $[a,b]$ хаттӣ новобаста мебошанд.

Дар ҳақиқат, айнияти

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n \equiv 0 \qquad (4.4)$$

ҳангоми ҳамаи $\alpha_i = 0$ будан иҷро мегардад. Чунки, агар яке аз $\alpha_i \neq 0$ бошад, ин маънои онро дорад, ки дар тарафи чапи айнияти (4.4) бисёраъзогии дараҷаи аз n зиёд набуда ҷойгир аст. Чунин бисёраъзогӣ метавонад дар порчаи $[a,b]$ на зиёда аз n решаҳои гуногун дошта бошад. Аммо айнияти (4.4) барои ҳамаи қиматҳои x аз порчаи $[a,b]$

иҷро мегардад. Бинобар ин дар баробарии (4.4) ҳамаи $\alpha_i = 0 \quad (i = 0,1,2,\cdots,n)$, мебошанд.

Мисоли 2. Функсияҳои $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \cdots, e^{k_n x}$, дар куҷо $k_i \neq k_j$ барои $i \neq j$, дар порчаи дилхоҳи $[a,b]$ хаттӣ новобаста мебошанд.

Исбот. Аксашро фарз мекунем, яъне $\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + \cdots + \alpha_n e^{k_n x} \equiv 0$, дар куҷо ақалан яке аз $\alpha_i \neq 0$ аст. Бигзор $\alpha_n \neq 0$ бошад. Ин айниятро ба $e^{k_1 x}$ тақсим ва натиҷаро дифференсиронида, ҳосил мекунем

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) e^{(k_2 - k_1)x} + \cdots + \alpha_n (k_n - k_1) e^{(k_n - k_1)x} \equiv 0.$$

Ин ифода хаттӣ вобаста будани $(n-1)$ функсияҳои нишондиҳандагии намуди e^{px} доштаро нишон медиҳад. Онро ба $e^{(k_2 - k_1)x}$ тақсим ва натиҷаро диффересиронида, хаттӣ вобаста будани $(n-2)$ функсияҳои нишондиҳандагиро ба нишондиҳандаҳои гуногун ҳосил мекунем. Чунин протсессро $(n-1)$ маротиба такрор намуда, дар натиҷа ҳосил мекунем

$$\alpha_n (k_n - k_1)(k_n - k_2) \cdot \cdots \cdot (k_n - k_{n-1}) e^{(k_n - k_{n-1})x} \equiv 0.$$

Чунин айният ҷой дошта наметавонад, чунки $\alpha_n \neq 0$ ва $k_i \neq k_j$ барои $i \neq j$ мебошад. Зиддияти ҳосилшуда нишон медиҳад, ки системаи функсияҳои $e^{k_i x} (i = 1,2,\cdots,n)$ барои $k_i \neq k_j \quad (i \neq j)$ дар порчаи дилхоҳи $[a,b]$ хаттӣ новобаста мебошад.

Мисоли 3. Системаи функсияҳо

$$\left.\begin{array}{l} e^{k_1 x}, xe^{k_1 x}, \cdots, x^{n_1} e^{k_1 x}, \\ e^{k_2 x}, xe^{k_2 x}, \cdots, x^{n_2} e^{k_2 x}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{k_p x}, xe^{k_p x}, \cdots, x^{n_p} e^{k_p x} \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

ҳангоми $k_i \neq k_j \quad (i \neq j)$ будан, дар порчаи дилхоҳи $[a,b]$ хаттӣ новобаста мебошад.

Исбот. Аксашро фарз мекунем. Он гоҳ $P_1(x) e^{k_1 x} + P_2(x) e^{k_2 x} + \cdots + P_p(x) e^{k_p x} \equiv 0$ дар куҷо $P_i(x) \quad (i = 1,2,\cdots,p)$ - бисёраъзогиҳои дараҷаи n_i ва ақалан яке аз онҳо, масалан, $P_p(x)$ айнан баробари нул намебошад. Ин айниятро ба $e^{k_1 x}$ тақсим ва натиҷаро $(n_1 + 1)$ маротиба дифференсиронида, вобастагии хаттии миқдори камтари функсияҳоро ҳосил мекунем:

$$Q_2(x) e^{(k_2 - k_1)x} + \cdots + Q_p(x) e^{(k_p - k_1)x} \equiv 0.$$

Дар ин ҷо дараҷаи бисёраъзогиҳои Q_i ва P_i $(i = 2,3,\cdots, p)$ якхелаанд, чунки ҳангоми дифференсиронидани ҳосили зарб $P_i(x)\ e^{px}$ $(p \neq 0)$ ҳосил мекунем: $[P_i(x)p + P_i'(x)]e^{px}$, яъне коэффисиенти назди аъзои дараҷаи калонтарини бисёраъзогии $P_i(x)$ ба адади ғайринулӣ p зарб мешавад. Бинобар ин дараҷаи бисёраъзогиҳои $P_p(x)$ ва $Q_p(x)$ якхелаанд, пас $Q_p(x)$ низ айнан нобаробари нул мебошад.

Айнияти ҳосилшударо ба $e^{(k_2-k_1)x}$ тақсим ва натиҷаро (n_2+1) маротиба дифференсиронида ҳосил мекунем, ки миқдори боз камтари функсияҳои нишондиҳандагӣ хаттӣ вобаста мебошанд. Ин протсессро $(p-1)$ маротиба такрор намуда, ҳосил мекунем

$$R_p(x)e^{(k_p-k_{p-1})\,x} \equiv 0,$$

вале чунин баробарӣ ғайриимкон аст, чунки дараҷаи бисёраъзогии $R_p(x)$ ба дараҷаи $P_p(x)$ баробар аст, бинобар ин $R_p(x) \neq 0$. Зиддияти ҳосилшуда хаттӣ новобаста будани системаи функсияҳои (4.5)-ро исбот мекунад.

Қайд менамоем, ки системаи функсияҳо, ки дар мисолҳои 2 ва 3 оварда шудаанд, ҳангоми комплексӣ будани ададҳои k_i низ хаттӣ новобаста мебошанд.

§4. Муайянкунандаи Вронский ва хосиятҳои он

Тафтиши бевоситаи хаттӣ новобаста будани системаи функсияҳо бо баъзе мушкилиҳо алоқаманд мебошад. Дар ҳолати дифференсиронидашавандаи будани системаи функсияҳо бошад, чунин тафтиш хеле осон мегардад. Барои инро нишон додан, аввал мафҳуми зеринро дохил менамоем.

Таърифи 2. Бигзор дар порчаи $[a,b]$ системаи функсияҳои $(n-1)$-маротиба бефосила дифференсиронидашаванда $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ дода шуда бошад. Ифодаи

$$W(x) = W[y_1, y_2, \cdots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

муайянкунандаи Вронский , ё ин ки *вронскиани* системаи функсияҳои $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ номида мешавад.

Теоремаҳои зерин хосиятҳои асосии муайянкунандаи Вронскийро муайян менамоянд.

Теоремаи 4. *Агар функсияҳои* $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ *дар порчаи* $[a,b]$ *хаттӣ вобаста бошанд, он гоҳ дар ин порча* $W(x) \equiv 0$ *мебошад.*

Исбот. Бигзор дар порчаи $[a,b]$ айнияти зерин ҷой дошта бошад: $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n \equiv 0$ ва на ҳамаи $\alpha_i = 0$ бошад. Ин айниятро $(n-1)$ маротиба дифференсиронида, ҳосил мекунем

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n = 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \cdots + \alpha_n y_n' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0. \end{array}\right\}$$

Ин системаи хаттии якҷинсаи тартиби n нисбат ба доимиҳо $\alpha_i \; (i = 1,2,\cdots,n)$ мебошад. Азбаски на ҳамаи $\alpha_i = 0$ мебошанд, пас он ҳалли ғайринулӣ дорад. Бинобар ин муайянкунандаи он, ки муайянкунандаи Вронский мебошад, барои ҳар як қимати $x \in [a,b]$ баробари нул мебошад, яъне $W(x) \equiv 0 \; (x \in [a,b])$.

Теорема 5. *Агар функсияҳои хаттӣ новобастаи* $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ *ҳалҳои муодилаи хаттии якҷинсаи* (4.2) *бо коэффисиентҳои дар порчаи* $[a,b]$ *бефосилаи* $p_i(x)$ *бошанд, он гоҳ* $W(x) \neq 0$ *барои ҳамаи қиматҳои* $x \in [a,b]$.

Исбот. Дар акси ҳол чунин нуқтаи $x_0 \in [a,b]$ вуҷуд дорад, ки $W(x_0) = 0$ мебошад. Бинобар ин системаи муодилаҳои якҷинса

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 0,1,\cdots,n-1). \tag{4.6}$$

ҳалли ғайринулӣ дорад (ақалан яке аз $\alpha_i \neq 0$ аст). Барои чунин коэффисиентҳо α_i комбинатсияи хаттӣ $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$ ҳалли муодилаи хаттии якҷинсаи (4.2) мегардад, ки шартҳои ибтидоии нулиро қаноат мекунонад: $y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$

Чунин шартҳои ибтидоиро ҳалли нулӣ $y(x) \equiv 0$ низ қаноат мекунонад ва дар асоси теоремаи мавҷудият ва ягонагӣ $y(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x) \equiv 0$, дар куҷо ақалан яке аз $\alpha_i \neq 0$ мебошад, яъне функсияҳои $y_1(x), \cdots, y_n(x)$- хаттӣ вобастаанд. Зиддияти ҳосилшуда нишон медиҳад, ки $W(x) \neq 0$ барои ҳамаи қиматҳои $x \in [a,b]$.

Теорема исбот гардид.

§5. Системаи фундаменталии ҳалҳо

Хосиятҳои муайянкунандаи Вронскийро истифода бурда, теоремаи зеринро *дар бораи ҳалли умумии муодилаи хаттии якҷинса* исбот менамоем.

Теоремаи 6. *Бигзор муодилаи хаттии якҷинсаи* (4.2) *бо коэффисиентҳои дар порчаи* $[a,b]$ *бефосилаи* $p_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ *дода шуда бошад ва* $y_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ *ҳалҳои хусусии дар ин порча хаттӣ новобастаи он бошанд. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи* (4.2) *ҳамчун комбинатсия хаттии* $y_i(x)$ *бо коэффисиентҳои доимӣ* $y(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$ *муайян карда мешавад.*

Исбот. Муодилаи (4.2) дар порчаи $[a,b]$ шартҳои теоремаи мавҷудият ва ягонагиро қаноат мекунонад. Бинобар ин $y(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$ дар порчаи $[a,b]$ ҳалли умумӣ мегардад, агар чунин қиматҳои доимиҳои дилхоҳи c_i-ро $(i=1,2,\cdots,n)$ интихоб кардан мумкин бошад, ки $y(x)$ шартҳои ибтидоии ихтиёрӣ додашударо $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0',\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ $(x_0\in(a,b))$ қаноат кунонад.

Аз ин шартҳои ибтидоӣ системаи зерин ҳосил мешавад:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k)}(x_0)=y_0^{(k)} \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1). \qquad (4.7)$$

Муайянкунандаи ин система, дар асоси теоремаи 5, нобаробари нул аст. Бинобар ин системаи ғайриякҷинсаи (4.7) нисбат ба c_i барои ҳар гуна $x_0\in(a,b)$ ҳалли ягона дорад. Теорема исбот гардид.

Натиҷа. *Миқдори максималии ҳалҳои хаттӣ новобастаи муодилаи дифференсиалии хаттии якҷинса ба тартиби он баробар аст.*

Таърифи 3. Ҳар гуна n ҳалҳои хусусии хаттӣ новобастаи муодилаи хаттии якҷинсаи тартиби n *системаи фундаменталии ҳалҳои* он номида мешавад.

Ҳар гуна муодилаи хаттии якҷинсаи (4.2) бо коэффисиентҳои бефосила дорои системаи фундаменталии ҳалҳо мебошад. Барои сохтани системаи фундаменталии ҳалҳо, ба тарзи ихтиёри n^2 ададҳоро

$$y_i^{(k)}(x_0) \quad (i=1,2,\cdots,n;\quad k=0,1,2,\cdots,n-1; x_0\in(a,b))$$

мегирем, ки онҳо шарти зеринро қаноат кунонанд:

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (a \le x_0 \le b).$$

Он гоҳ ҳалҳои $y_i(x)$, ки қиматҳои ибтидоии $y_i^{(k)}(x_0)$ $(i=1,2,\cdots,n;\ k=0,1,2,\cdots,n-1)$ муайян мекунонанд, системаи фундаменталии ҳалҳоро ташкил медиҳанд, чунки қимати муайянкунандаи Вронский дар ин нуқта $W(x_0)\neq 0$ мебошад. Бинобар ин, дар асоси теоремаҳои 5 ва 6, ҳалҳои $y_1(x),\cdots,y_n(x)$- хаттӣ новобаста мебошанд.

Теоремаи 6 сохтори ҳалли умумии муодилаи хаттии якҷинсаи (4.2)-ро муайян менамояд: *ҳалли умумии муодилаи хаттии якҷинсаи* (4.2) *- ин комбинатсияи хаттии системаи фундаменталии ҳалҳои он бо коэффисисентҳои доимии дилхоҳ мебошад.*

Мисоли 4. Муодилаи $y''-y=0$ ҳалҳои хаттӣ новобастаи $y_1=e^x$ ва $y_2=e^{-x}$-ро дорад (ниг. мисоли 2). Бинобар ин ҳалли умумии он $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ мебошад.

§6. Барқарор намудани муодила аз рӯи системаи фундаменталии ҳалҳо

Дар ин параграф як формулаи ҷолиби диққат оварда мешавад, ки он бо муайянкунандаи Вронский алоқаманд мебошад. Бо ёрии ин формула аз рӯи системаи фундаменталии ҳалҳои додашуда муодиларо барқарор намудан мумкин аст.

Дар аввал леммаи зеринро исбот менамоем:

Леммаи 1. *Агар муодилаҳои хаттии якҷинса*

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=0, \tag{4.8}$$

$$y^{(n)}+q_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+q_n(x)y=0 \tag{4.9}$$

бо коэффисиентҳои $p_i(x)$ ва $q_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$-и дар порчаи $[a,b]$ бефосила, системаи фундаменталии ҳалҳои $y_1(x), y_2(x),\cdots, y_n(x)$ умумӣ дошта бошанд, он гоҳ онҳо ҳамҷоя мегарданд, яъне $p_i(x)\equiv q_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n;\ x\in[a,b])$.

Исбот. Баробарии (4.8)-ро аз (4.9) аъзо ба аъзо тарҳ намуда, муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$$[p_1(x)-q_1(x)]y^{(n-1)}+[p_2(x)-q_2(x)]y^{(n-1)}+\cdots+[p_n(x)-q_n(x)]y=0,$$

ки он низ мисли муодилаҳои (4.10) ва (4.11) ҳалҳои $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$-ро дорад. Агар ақалан яке аз коэффисиентҳо $[p_i(x) - q_i(x)]$ дар ягон нуқтаи $x_0 \in [a,b]$ аз нул фарқ кунад, он гоҳ дар асоси бефосилагӣ, ин коэффисиент дар ягон атрои ин нуқтаи низ аз нул фарқ мекунад. Бинобар ин ҳосил мекунем, ки дар ин атроф функсияҳои $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ ҳалҳои хаттӣ новобастаи муодилаи хаттии якҷинсаи тартибашон аз n хурд буда мебошанд, ки ин ба натиҷа аз теоремаи 6 мухолиф мебошад. Пас, $p_i(x) - q_i(x) \equiv 0$ барои $i = 1, 2, \cdots, n$ ва $a \le x \le b$. Лемма исбот гардид.

Ҳамин тавр, системаи фундаменталии ҳалҳо $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ муодилаи хаттии якҷинсаро пурра муайян менамояд. Бинобар ин, масъалаи муайян намудани муодиларо

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0 \qquad (4.10)$$

аз рӯи системаи фундаменталии ҳалҳои додашудаи он $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ ба миён гузоштан мумкин аст.

Азбаски ҳар як ҳалли y муодилаи ҳоло номаълуми (4.10) бояд аз ҳалҳои $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ хаттӣ вобаста бошад, пас $W[y_1, y_2, \cdots, y_n, y] = 0$ мебошад. Ин баробарӣ дар шакли кушод чунин намуд дорад:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' & y'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 .$$

Муайянкунандаи тарафи чапро ба элементҳои сутуни охирин кушода, ҳосил мекунем:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \cdot y = 0$$

Ин муодилаи хаттии якҷинса мебошад, ки системаи фундаменталии ҳалҳои додашударо $y_1, y_2, \cdots, y_n$ дорад (чунки ҳангоми $y = y_i$ будан $W[y_1, y_2, \cdots, y_n, y] \equiv 0$ аст).

Ҳар ду тарафи ин муодиларо ба коэффисиент

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}\neq 0$$

тақсим намуда, онро ба намуди (4.10) овардан мумкин аст, ки коэффисиентҳо $p_1(x),\cdots,p_n(x)$ чунин муайян карда шудаанд:

$$p_1(x)=-\frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix},\ \cdots,\ p_n=\frac{(-1)^n}{W(x)}\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}. \qquad (4.11)$$

§7. Формулаи Остроградский – Лиувилл

Дар асоси қоидаи дифференсиронидани муайянкунандаи функсионалӣ ҳосил мекунем

$$\frac{dW(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Бинобар ин, баробарии якуми ифодаҳои (4.11) -ро дар чунин намуд навиштан мумкин аст: $p_1(x)=-\dfrac{W'(x)}{W(x)}$. Аз ин ҷо ҳосил мекунем $\ln|W(x)|=-\int p_1(x)dx+\ln c$, ё ин ки $W(x)=ce^{-\int p_1(t)dt}$. Формулаи охирро ин тавр низ навиштан мумкин аст: $W(x)=ce^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$. Аз ин ҷо ҳангоми $x=x_0$ будан меёбем: $c=W(x_0)$. Бинобар ин,

$$W(x)=W(x_0)\ e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt}.$$

Ин формула бо номи *формулаи Остроградский - Лиувилл* маълум аст. Он муайянкунандаи Вронский $W(x)$-ро ба воситаи коэффисиенти назди ҳосилаи тартиби $(n-1)$-ӯм дар муодилаи (4.10) ва қимати $W(x_0)$ дар нуқтаи ихтиёрӣ $x_0 \in (a,b)$ ифода менамояд. Аз ин формула чунин хосияти муайянкунандаи Вронский $W(x)$ ҳосил мегардад: *агар* $W(x)$ *ақалан дар як нуқтаи порчаи* $[a,b]$ *нобаробари нул бошад, он гоҳ вай дар ҳамаи нуқтаҳои ин порча нобаробари нул мебошад.*

Формулаи Остроградский - Луивиллро инчунин барои интегронидани муодилаи хаттии якҷинсаи тартиби дуюм

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{4.11}$$

ҳангоми маълум будани яке аз ҳалҳои ғайринулии он y_1 истифода бурдан мумкин аст. Дар асоси формулаи Остроградский- Лиувилл ҳар як ҳалли муодилаи (4.10) инчунин ҳалли муодилаи

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = c_1 e^{-\int p_1(x)dx}$$

низ мебошад. Аз ин ҷо, $y_1 y' - y y_1' = c_1 e^{-\int p_1(x)dx}$. Барои интеронидани ин муодилаи хаттии тартиби якум методи зарбшавандаи интегрониро истифода мебарем. Ба $\mu = \dfrac{1}{y_1^2}$ зарб намуда, ҳосил мекунем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{c_1}{y_1^{\,2}} e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Аз ин ҷо, $\dfrac{y}{y_1} = \displaystyle\int \frac{c_1 e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^{\,2}} dx + c_2$, ё ин ки $y = c_2 y_1 + c_1 y_1 \displaystyle\int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^{\,2}} dx$.

Мисоли 5. Муодила ҳал карда шавад: $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Дидан душвор нест, ки $y_1 = x$ *ҳалли хусусии ин муодила* мебошад. Бинобар ин дар асоси формулаи Остроградский - *Лиувилл* $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = c_1 e^{-\int\left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)dx}$, ё ин ки $xy' - y = c_1(x^2+1)$. Ҳар ду тарафи ин муодиларо ба x^2 тақсим намуда, ҳосил мекунем: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{c_1(x^2+1)}{x^2}$. Аз ин ҷо $\dfrac{y}{x} = \displaystyle\int\left(c_1 + \frac{c_1}{x^2}\right)dx = c_1\left(x - \frac{1}{x}\right) + c_2$. Бинобар ин $y = c_2 x + c_1 x^2 - c_1 = c_1(x^2-1) + c_2 x$ - ҳалли умумии муодилаи додашуда мебошад.

§8. Паст кардани тартиби муодилаи хаттии якҷинса

Нишон медиҳем, ки *агар як ҳалли хусусии ғайринулии* y_1 *муодилаи хаттии якҷинсаи* (4.2) *маълум бошад, он гоҳ гузориши* $y = y_1\int udx$ *тартиби муодиларо бо як воҳид паст мекунад ва хаттию якҷинсагии онро нигоҳ медорад.*

Дар ҳақиқат, гузориши $y = y_1\int udx$-ро бо ду гузоришҳо $y = y_1 z$ ва $z' = u$ иваз намудан мумкин аст. Табдилдиҳии хаттӣ ва якҷинсаи $y = y_1 z$ хаттӣ ва якҷинсагии муодилаҳоро нигоҳ медорад. Бинобар ин, муодилаи (4.2) ба муодилаи

$$a_0(x)z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)z = 0 \qquad (4.12)$$

табдил меёбад ва ба ҳалли $y = y_1$ муодилаи (4.2) дар асоси $y = y_1 z$, ҳалли $z = 1$ муодилаи (4.12) мувофиқ меояд. Ба муодилаи (4.12) $z = 1$ гузошта ҳосил мекунем: $a_n(x) \equiv 0$. Бинобар ин муодилаи (4.12) чунин намуд мегирад:

$$a_0(x)z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)z' = 0.$$

Дар ин муодила $z' = u$ гузорем, тартиби он ба як воҳид паст мегардад:

$$a_0(x)u^{(n-1)} + a_1(x)u^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)u = 0. \qquad (4.13)$$

Қайд менамоем, ки гузориши $y = y_1\int udx$, дар куҷо y_1- ҳалли муодилаи $L[y] = 0$ мебошад, тартиби муодилаи хаттии ғайриякҷинсаро $L[y] = f$ низ ба як воҳид паст мекунад, чунки ин гузориш ба тарафи рости муодила дахл надорад.

Айнан ҳамин тавр нишон додан мумкин аст, ки *агар* k *ҳалҳои* $y_1, y_2, \cdots, y_k$ *дар порчаи* $[a,b]$ *хаттӣ новобастаи муодилаи хаттии якҷинса маълум бошанд, он гоҳ тартиби ин муодиларо ба* k *воҳид паст намудан мумкин аст.*

Дар ҳақиқат, бо ёрии гузориши $y = y_k\int udx$ тартиби муодилаи $L[y] = 0$-ро ба як воҳид паст намуда, муодилаи (4.13)-ро ҳосил мекунем, ки $(k-1)$ ҳалҳои хаттӣ новобастаи он ба мо маълуманд: $u_i = \left(\dfrac{y_i}{y_k}\right)'$ $(i = 1,2,\cdots,k-1)$. Ин ҳалҳо ҳангоми гузориши $y = y_i$ $(i = 1,2,\cdots,k-1)$ ба $y = y_k\int udx$ ё $u = \left(\dfrac{y}{y_k}\right)'$ ҳосил мегарданд. (Қайд менамоем, ки ба ҳалли $y = y_k$ муодилаи (4.2) ҳалли тривиалии $u \equiv 0$ муодилаи (4.13) мувофиқ меояд).

Айнан ҳамин тавр, боз як ҳалро истифода бурда, тартиби муодилаи (4.13)-ро ба як воҳид паст намудан мумкин аст. Ин протсессро k маротиба такрор намоем, муодилаи хаттии тартиби $(n-k)$ ҳосил мегардад.

Мисоли 6. Муодилаи хаттии якҷинсаи зеринро дида мебароем:

$$xy'' - xy' + y = 0 .$$

Ин муодила ҳалли хусусии $y_1 = x$-ро дорост. Гузориши $y = x\int u dx$, $y' = xu + \int u dx$, $y'' = xu' + 2u$ муодиларо ба намуди $x^2 u' + (2-x)xu = 0$ меорад, ки ин муодилаи тартиби як мебошад. Аз ин ҷо, $\frac{du}{u} = \frac{x-2}{x}dx$, $u = c_1 \frac{e^x}{x^2}$, $y = x\int u dx = x\left[c_1 \int \frac{e^x}{x^2}dx + c_2\right]$.

§9. Муодилаҳои хаттии ғайриякҷинса

Намуди умумии муодилаи хаттии ғайриякҷинсаи тартиби n-ӯм чунин аст:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x) \qquad (4.14)$$

Ин муодиларо бо ёрии оператори дифференсиалӣ L, ки пештар муайян намуда будем, ба намуди мухтасар навиштан мумкин аст: $L[y] = f$

Агар дар порчаи $[a,b]$ коэффисиентҳо $p_i(x)$ $(i = 1,2,\cdots n)$ ва тарафи рост $f(x)$ бефосила бошанд, он гоҳ муодила ҳалли ягона дорад, ки он шартҳои ибтидоии зеринро

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0,1,\cdots, n-1) \qquad (4.15)$$

қаноат мекунонад ($y_0^{(k)}$ - ададҳои додашудаи дилхоҳ, $x_0 \in [a,b]$).

Дар асоси хосиятҳои 1) ва 2)-и оператори L (ниг. §2), ҳосил мегардад:

1⁰. Суммаи $\bar{y} + y_1$ *ҳалли* $\bar{y}$ *муодилаи ғайриякҷинсаи* $L[y] = f$ *ва ҳалли* y_1 *муодилаи якҷинсаи мувофиқ* $L[y] = 0$ *боз ҳалли муодилаи хаттии ғайриякҷинсаи* (4.14) *мегардад.*

Дар ҳақиқат, $L[\bar{y} + y_1] = L[\bar{y}] - L[y_1] \equiv f(x) + 0 = f(x)$.

2^0. Агар y_i - ҳалҳои муодилаҳои $L[y]=f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ бошанд, пас $y=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i$ (α_i-доимиҳо) - ҳалли муодилаи $L[y]=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)$ мегардад.

Дар ҳақиқат, $L\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i\right]\equiv\sum_{i=1}^{m}L[\alpha_i y_i]\equiv\sum_{i=1}^{m}\alpha_i L[y_i]=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)$.

3^0. Агар муодилаи $L[y]=U(x)+iV(x)$ дар куҷо $p_i(x)$ $U(x)$ ва $V(x)$ функсияҳои ҳақиқӣ мебошанд, ҳалли комплексӣ $y=u(x)+i\vartheta(x)$ дошта бошад, он гоҳ $u(x)$ - ҳалли муодилаи $L[y]=U(x)$ ва $\vartheta(x)$ - ҳалли муодила $L[y]=V(x)$ мегардад.

Дар ҳақиқат, $L[u+i\vartheta]\equiv U(x)+iV(x)$, вале $L[u+i\vartheta]=L[u]+iL[\vartheta]$. Бинобар ин $L[u]\equiv U(x)$, $L[\vartheta]\equiv V(x)$.

Теоремаи зерин *сохтори (структураи) ҳалли умумии муодилаи хаттии ғайриякҷинсаи* (4.14)-ро муайян менамояд.

Теоремаи 7. *Ҳалли умумии муодилаи хаттии ғайриякҷинсаи* (4.14) *бо коэффисиентҳои $p_i(x)\,(i=1,2,\cdots n)$ ва тарафи рости $f(x)$ дар порчаи $[a,b]$ бефосила ба суммаи ҳалли умумии $\sum_{i=1}^{n}c_i y_i$ муодилаи якҷинсаи мувофиқ ва ягон ҳалли хусусии $\bar{y}$ муодилаи ғайриякҷинса баробар аст.*

Исбот. Нишон медиҳем, ки $y=\sum_{i=1}^{n}c_i y_i+\bar{y}$, дар куҷо c_i-доимиҳои дилхоҳ, y_i $(i=1,2,\cdots,n)$ - системаи фундаменталии ҳалҳои хатти новобастаи муодилаи $L[y]=0$ ва $\bar{y}$-ҳалли хусусии муодилаи $L[y]=f$, ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (4.14) мебошад. Барои ин нишон додан кифоя аст, ки доимиҳо c_i-ро $(i=1,2,\cdots,n)$ чунин интихоб намудан мумкин аст, ки барои функсияи $y(x)$ шартҳои ибтидоии (4.15) иҷро мегарданд. Ин моро ба системаи зерин меорад:

$$\sum_{i=1}^{n}c_i y_i^{(k)}(x_0)+\bar{y}^{(k)}(x_0)=y_0^{(k)} \qquad (k=0,1,\cdots,n-1).$$

Ин системаи алгебравии ғайриякҷинсаи хаттӣ нисбат ба $c_1,c_2,\cdots,c_n$ мебошад. Азбаски муайянкунандаи он $W(x_0)\neq 0$ аст, пас ин система ҳалли ягона дорад.

Теорема исбот гардид.

Аз ин теорема чунин хулоса мебарояд: *барои интегронидани муодилаи хаттии ғайриякҷинса, ягон ҳалли хусусии онро ва системаи фундаменталии муодилаи хаттии якҷинсаи мувофиқро ёфтан кифоя мебошад.*

Мисоли 7. Муодилаи хаттии ғайриякҷинсаи зеринро дида мебароем: $y'' + y = x$.

Дидан душвор нест, ки $\overline{y} = x$ - ҳалли хусусии ин муодила ва $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$ - ҳалҳои хаттӣ новобастаи муодилаи якҷинсаи мувофиқ $y'' + y = 0$ мебошанд. Бинобар ин, дар асоси теоремаи 7, $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x$ - ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи додашуда мебошад.

§10. Методи вариатсияи доимиҳои дилхоҳ

Дар ҳолатҳое, ки ёфтани ҳалли хусусии $\overline{y}$ муодилаи ғайриякҷинса душвор мебошад, вале системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи якҷинса $y_1, y_2, \cdots, y_n$ маълум аст, муодилаи хаттии ғайриякҷинсаро бо *методи вариатсияи доимиҳои дилхоҳ* интегронидан мумкин аст.

Идеяи ин метод чунин аст: ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаро дар намуди $\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i$ ҷустуҷӯ менамоем, дар куҷо $c_i(x)$ - функсияҳои номаълум ва $y_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ -системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи якҷинса. Азбаски функсияи $\overline{y}(x)$ фақат як муодилаи (4.14) -ро қаноат мекунонад, пас барои яққимата муайян намудани n функсияҳои номаълум $c_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ боз $(n-1)$ шартҳои дигарро нишон додан лозим аст. Барои ин талаб менамоем, ки ҳосилаҳои функсияи $\overline{y}$ намуди чун ҳолати доимӣ будани c_i -ҳоро дошта бошад, яъне дар баробарии

$$\overline{y'} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x)$$

шарт мегузорем, ки ҷамъшавандаи дуюм баробари нул бошад:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i = 0.$$

Он гоҳ барои ҳосилаи якум формулаи $\overline{y'} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x)$ ҳосил мегардад. Айнан ҳамин тавр, барои y'' ҳосил мекунем: $\overline{y''} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''$. Ва $\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i' = 0$, ва ҳоказо, барои ҳосилаи тартиби $(n-1)$-ум: $\overline{y}^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y^{(n-1)}$ ва $\sum_{i=1}^{m} c_i'(x) y_i^{(n-2)} = 0$. Аз ин ҷо $\overline{y}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}$.

Ҳамин тавр, барои яққимата муайян намудани n функсияҳо $c_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ расо $(n-1)$ муодилаҳоро ҳосил менамоем:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(k)} = 0 \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-2).$$

(4.16)

Илова бар ин, боз як муодилаи дигар аз он ҳосил мегардад, ки функсияи $\overline{y}$ бояд муодилаи (4.14)-ро низ қаноат кунонад, яъне

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n)} + p_1(x) \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n-1)} + p_2(x) \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n-2)} + \cdots + p_n(x) \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i \equiv f(x)$$

.

Аз ин ҷо, $\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \left[y_i^{(n)} + p_1(x) y_i^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y_i \right] = f(x)$, ё ин ки

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x).$$

(4.17)

Ҳамин тавр, функсияҳои $c_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ аз системаи $(n-1)$ баробариҳои (4.16) ва баробарии (4.17) муайян карда мешаванд, ки муайянкунандаи он $W(x)$ – муайянкунандаи Вронский барои функсияҳои $y_i, \cdots, y_n$ мебошад. Азбаски $W(x) \neq 0$, пас ин системаро якқимата ҳал намуда, меёбем $c_i'(x) = \varphi_i(x)$ ва аз ин ҷо, $c_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + \overline{c_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Функсияи $\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \int \varphi_i(x) dx$ - ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаи (4.14) мебошад.

Мисоли 8. Муодилаи ғайриякҷинсаи зеринро дида мебароем:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи мувофиқ $y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ мебошад (ниг. мисоли 7). Бинобар ин, $\overline{y} = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$ гузошта, меёбем $\overline{y'} = c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x - c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x$. Дар ин ҷо $c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0$ мегузорем. Пас $\overline{y'} = -c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x$ ва аз ин ҷо

$$\overline{y''} = -c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x - c_1(x) \cos x - c_2(x) \sin x.$$

Ба муодилаи додашуда гузошта, ҳосил мекунем $-c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x - c_1(x) \cos x - c_2(x) \sin x + c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x = \frac{1}{\cos x}$, ё ин ки $-c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x}$.

Ҳамин тавр, барои муайян намудани функсияҳои номаълум $c_1(x)$, $c_2(x)$ системаи муодилаҳоро ҳосил намудем:

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0, \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}\right\}.$$

Муайянкунандаи ин система $W(x)=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1$ мебошад.

Бинобар ин

$$c_1'(x)=\begin{vmatrix}0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x\end{vmatrix}=-\frac{\sin x}{\cos x}, \quad c_2'(x)=\begin{vmatrix}\cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x}\end{vmatrix}=1.$$

Аз ин ҷо $c_1(x)=\ln|\cos x|+\overline{c}_1$, $c_2(x)=x+\overline{c}_2$ ва ҳалли умумии муодилаи додашуда $y=\overline{c}_1\cos x+\overline{c}_2\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x$ мебошад, ки он аз суммаи ҳалли умумии $y_0=\overline{c}_1\cos x+\overline{c}_2\sin x$ муодилаи якҷинса ва ҳалли хусусии $\overline{y}(x)=\cos x\ \ln|\cos x|+x\sin x$ муодилаи ғайриякҷинса иборат мебошад.

Ҳамин тавр, агар n ҳалҳои хусусии байни ҳам хаттӣ новобастаи муодилаи якҷинсаи мувофиқ маълум бошад, муодилаи ғайриякҷинсаи хаттиро бо методи вариатсияи доимиҳо интегронидан мумкин аст.

Агар танҳо k $(k<n)$ ҳалҳои хаттӣ новобастаи муодилаи якҷинса маълум бошанд, он гоҳ, чӣ хеле ки дар боло қайд карда будем (ниг.§8), тартиби муодилаи ғайриякҷинсаро ба k воҳид паст намуда, баъд методи дар боло нишондодашударо барои муодилаи тартиби $n-k$ татбиқ намудан мумкин аст.

Айнан ҳамин тавр, k ҳалҳои хусусии додашудаи муодилаи ғайриякҷинса $\overline{y_1},\cdots,\overline{y_k}$ -ро низ истифода бурдан мумкин аст. Чунки фарқи онҳо – ҳалли муодилаи якҷинса мегардад: $L\left[\overline{y_j}-\overline{y_p}\right]=L\left[\overline{y_j}\right]-L\left[\overline{y_p}\right]\equiv f-f=0$. Агар ҳалҳои хусусии муодилаи якҷинса $\left(\overline{y}_1-\overline{y}_k\right)$, $\left(\overline{y}_2-\overline{y}_k\right)$, ... , $\left(\overline{y}_{k-1}-\overline{y}_k\right)$ хаттӣ новобаста бошанд, он гоҳ тартиби муодилаи ғайриякҷинса то $(n-k+1)$ паст карда мешавад. Маълум, ки дигар фарқҳо $\left(\overline{y_j}-\overline{y_p}\right)$ комбинатсияи хаттии ҳалҳои дар боло нишондодашуда мебошанд: $\overline{y_j}-\overline{y_p}=\left(\overline{y_j}-\overline{y_k}\right)+\left(\overline{y_k}-\overline{y_p}\right)$. Бинобар ин бо ёрии онҳо минбаъд паст намудани тартиби муодила номумкин аст.

§11. Муодилаҳои хаттии якҷинса бо коэффисиентҳои доимӣ

Дар параграфҳои гузашта мо дидем, ки барои ёфтани ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии хаттии ғайриякҷинса ёфтани системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи якҷинсаи мувофиқ кифоя мебошад. Бояд қайд намоем, ки ёфтани системаи фундаменталии ҳалҳо, умуман, масъалаи мураккаб мебошад ва ягон методи универсалӣ барои ёфтани он вуҷуд надорад. Аммо агар коэффисиентҳои муодила ададҳои доимӣ бошанд, он гоҳ ёфтани системаи фундаменталии ҳалҳо осон мегардад ва, илова бар ин, алгоритми сохтани чунин ҳалҳоро нишон додан мумкин аст.

Муодилаҳои дифференсиалии хаттии тартиби n-ӯм бо коэффисиентҳои доимӣ чунин намуд доранд:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \qquad (4.18)$$

дар куҷо a_i $(i=1,2,\cdots,n)$ - ададҳои ҳақиқӣ ва $f(x)$ - функсияи дар порчаи $[a,b]$ муайяншуда мебошанд.

Азбаски интегронидани муодилаи дифференсиалии ғайриякҷинса ба интегронидани муодилаи якҷинсаи мувофиқ меорад, мо дар ин параграф аввал муодилаи хаттии якҷинсаро бо коэффисиентҳои доимӣ

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

(4.19)

дида мебароем ва методи интегронидани онро меомӯзем.

Дар асоси теоремаи 6 аз §5 дар бораи сохтори ҳалли муодилаи хаттии якҷинса, барои ёфтани ҳалли умумии муодилаи (4.19) ақалан як системаи фундаменталии ҳалҳои ин муодиларо ёфта тавонистан лозим аст.

Чун дар ҳолати муодилаи хаттии тартиби якум, ҳалли муодилаи (4.19)-ро дар намуди $y=e^{\lambda x}$ ҷустуҷӯ менамоем (λ- адади доимӣ). Ин ифодаро ба муодилаи (4.19) гузошта, ҳосил мекунем

$$\lambda^ne^{\lambda x}+a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x}+a_2\lambda^{n-2}e^{\lambda x}+\cdots+a_{n-1}\lambda e^{\lambda x}+a_ne^{\lambda x}=$$
$$=\left(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n\right)e^{\lambda x}=P(\lambda)\,e^{\lambda x}=0.$$

Бисёраъзогии $P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ *бисёраъзогии характеристикӣ,* муодилаи $P(\lambda)=0$- *муодилаи характеристикӣ* ва решаҳои он - *ададҳои характеристикии муодилаи хаттии якҷинсаи* (4.19) номида мешаванд.

Ҳамин тавр, мо ба натиҷаи зерин омадем:

Леммаи 2. *Барои он ки функсияи $y=e^{\lambda x}$ ҳалли муодилаи дифференсиалии* (4.19) *бошад, зарур ва кифоя аст, ки λ- адади характеристикии муодилаи* (4.19) *бошад.*

Чӣ тавре, ки маълум аст, бисёраъзогии дараҷаи n расо n – то решаҳо дорад, ки онҳо метавонанд:

1) ҳақиқӣ ва гуногун бошанд;

2) гуногун, вале дар байни онҳо решаҳои комплексӣ мавҷуд бошанд;

3) решаҳо каратӣ вуҷуд дошта бошанд.

Ҳар ин се ҳолатҳоро дар алоҳидагӣ дида мебароем.

Ҳолати 1°. *Ҳамаи решаҳои муодилаи характеристикӣ ҳақиқӣ ва гуногун мебошанд.*

Дар ин ҳолат теоремаи зерин ҷой дорад:

Теоремаи 8. *Бигзор муодилаи характеристикӣ $P(\lambda)=0$ расо n–то решаҳои ҳақиқии гуногун $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ дошта бошад. Он гоҳ функсияҳои $y_i=e^{\lambda_i x}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи* (4.19) *-ро ташкил медиҳанд ва ҳалли умумии ин муодила чунин муайян карда мешавад:*

$$y(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}+\cdots+c_ne^{\lambda_n x}, \tag{4.20}$$

дар куҷо c_i - доимиҳои дилхоҳ.

Исбот. Аз леммаи 2 бармеояд, ки функсияҳои $y_i=e^{\lambda_i x}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ ҳалҳои муодилаи (4.19) мебошанд. Хаттӣ новобаста будани онҳо дар §3, мисоли 2, нишон дода шуда буд. Бинобар ин онҳо системаи фундаменталии ҳалҳоро ташкил медиҳанд ва дар асоси теоремаи 6, ҳалли умумӣ намуди (4.20) -ро дорад.

Теорема исбот гардид.

Мисоли 9. Муодилаи $y'''-3y''+2y'=0$ -ро дида мебароем.

Муодилаи характеристикӣ $\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda=0$ решаҳои ҳақиқӣ ва гуногун $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2$ дорад. Бинобар ин функсияҳои $1,\ e^x,\ e^{2x}$ системаи фундаменталии ҳалҳоро ташкил медиҳанд. Ҳалли умумии муодила бошад, намуди $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}$ дорад, дар куҷо c_1,c_2,c_3- доимиҳои дилхоҳ.

Ҳолати 2°. *Решаҳои муодилаи характеристикии гуногун, вале дар байни онҳо решаҳои комплексӣ вуҷуд доранд.*

Дар ин ҳолат теоремаи зерин ҷой дорад:

Теоремаи 9. *Бигзор муодилаи характеристикӣ* $P(\lambda)=0$ p- *то решаҳои ҳақиқӣ* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ *ва* $2q$-*то решаҳои комплексӣ* $a_1 \pm ib_1,\ a_2 \pm ib_2, \cdots, a_q \pm ib_q$ $(p+2q=n)$ *дошта бошад. Он гоҳ функсияҳои*

$$e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_p x},$$

$$e^{a_1 x}\cos b_1 x,\ e^{a_1 x}\sin b_1 x,\ e^{a_2 x}\cos b_2 x, e^{a_2 x}\sin b_2 x, \cdots, e^{a_q x}\cos b_q x, e^{a_q x}\sin b_q x$$

системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи (4.19)-*ро ташкил медиҳанд ва ҳалли умумии ин муодила чун комбинатсияи хаттии ин ҳалҳо бо коэффисиентҳои доимии дилхоҳи ҳақиқӣ муайян карда мешавад.*

Исбот. Бигзор ададй комплексии $a+ib$ - решаи муодилаи характеристикӣ бошад. Он гоҳ ин муодила решаи комплексии ҳамроҳшуда $a-ib$ низ дорад. Ба решаи $a+ib$ ҳалли $y=e^{(a+ib)\,x}$ мувофиқ меояд. Ин ҳалли комплексӣ мебошад ва дар асоси формулаи Эйлер он намуди $e^{(a+ib)x}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$ дорад. Дар асоси теоремаи 3 аз §2 қисмҳои ҳақиқӣ ва мавҳуми ин ҳал низ ҳалҳои муодилаи (4.19) мегарданд, яъне функсияҳои $e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx$ ҳалҳои муодилаи (4.19) мебошанд. Ин ҳалҳо байни ҳам хаттӣ новобастаанд.

Айнан ҳамин тавр, ба решаи $a-ib$ низ ду ҳалҳои $e^{ax}\cos ax, -e^{ax}\sin bx$ муодилаи (4.19) мувофиқ меоянд. Дида мешавад, ки решаи $a-ib$ ҳалҳои нави хаттӣ новобастаи муодилаи (4.19) -ро ҳосил намекунад.

Ҳамин тавр, дар ин ҳолат ба ҳар як решаи ҳақиқии λ_i муодилаи характеристикӣ, ҳали $e^{\lambda_i x}$ муодилаи (4.19) ва ба ҳар як ҷуфти решаҳои комплексӣ - ҳамроҳшудаи $a_j \pm ib_j$ ду ҳалҳои ҳақиқии хусусии хаттӣ новобастаи намуди $e^{a_j x}\cos b_j x, e^{a_j x}\sin b_j x$ доштаи муодилаи (4.19) мувофиқ меоянд. Ҳамагӣ n-то ҳалҳои ҳақиқии намуди $e^{\lambda_i x}\ (i=1,2,\cdots,p),\ e^{a_j x}\cos b_j x,\ e^{a_j x}\sin b_j x\ (i=1,2,\cdots,q)$, дар куҷо $k+2q=n$ ҳосил мегарданд, ки онҳо системаи фундаменталии ҳалҳоро ташкил медиҳанд.

Ҳалли умумии муодилаи (4.19) бошад, дар асоси теоремаи 6 аз §5, аз суммаи ҳалҳои намуди $c_i e^{\lambda_i x}$ ва $e^{a_j x}\left(c_j{}^1\cos b_j x+c_j{}^2\sin b_j x\right)$ иборат мебошанд.

Теорема исбот гардид.

Мисоли 10. Муодилаи $y'''-3y''+9y'+13y=0$ -ро дида мебароем.

Муодилаи характеристикӣ $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$ як решаи ҳақиқӣ $\lambda_1 = -1$ ва ду решаҳои комплексӣ-ҳамроҳшудаи $\lambda_2 = 2 + i3$, $\lambda_3 = 2 - i3$ дорад. Бинобар ин, функсияҳои

$$e^{-x}, \quad e^{2x}\cos 3x, e^{2x}\sin 3x$$

системаи фундаменталии ҳалҳоро ташкил медиҳанд ва ҳалли умумии муодилаи додашуда $y = c_1 e^{-x} + e^{2x}(c_2\cos 3x + c_3 \sin 3x)$ мебошад.

Мисоли 11. Бигзор муодилаи $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ дода шуда бошад. Муодилаи характеристикӣ $\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$ як ҳалли ҳақиқӣ $\lambda_1 = 1$ ва ду ҳалҳои комплексӣ-ҳамроҳшуда $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = -2i$ дорад. Бинобар ин ба сифати системаи фундаменталии ҳалҳо функсияҳои e^x, $\cos 2x$, $\sin 2x$ гирифта мешаванд. Ҳалли умумӣ $y = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$ мебошад.

Ҳолати 3°. *Муодилаи характеристикӣ решаҳои каратӣ дорад.*

Бигзор λ_1-решаи k – каратаи ҳақиқӣ ё комплексии муодилаи характеристикӣ бошад. Он гоҳ

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \cdots = P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \quad \text{вале} \quad P^{(k)}(\lambda_1) \neq 0. \tag{4.20}$$

Барои ёфтани ҳалли муодилаи (4.19), ки онро адади характеристикӣ λ_1 муайян менамояд, чунин амал менамоем.

Аз баробарии $L(e^{\lambda x}) = P(\lambda)e^{\lambda x}$ m маротиба нисбат ба λ ҳосила мегирем. Барои диффересиронидани тарафи чапи ин баробарӣ аз формулаи

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L(u) = L\left(\frac{\partial^m u}{\partial \lambda^m}\right) \quad \left(u = e^{\lambda x}\right)$$

ва барои дифференсиронидани тарафи рост бошад, аз формулаи Лейбнитс

$$(u\vartheta)^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} c_m^i u^{(i)} \vartheta^{(m-i)} \qquad \left(c_m^0 = 1\right)$$

$\left(u(\lambda) = P(\lambda),\ \vartheta(\lambda) = e^{\lambda x}\right)$ истифода мебарем. Дар натиҷа ҳосил мегардад:

$$L\left(x^m e^{\lambda x}\right) = \sum_{i=0}^{m} c_m^i P^{(i)}(\lambda) x^{m-i} e^{\lambda x}.$$

Аз ин ҷо, дар асоси (4.20), ҳосил мешавад: $L\left(x^m e^{\lambda_1 x}\right) \equiv 0$ барои қиматҳои $m = 0,1,2,\cdots,k-1$. Яъне функсияҳои

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda_1 x} \tag{4.21}$$

-ҳалҳои муодилаи (4.19) мебошанд. Ин ҳалҳо хаттӣ новобаста мебошанд (§3, мисоли 3). Агар λ_1 - решаи ҳақиқӣ бошад, ҳалҳои (4.21) низ ҳақиқӣ мебошанд.

Ҳамин тавр, ба ҳар як решаи λ_i ҳақиқии k – каратаи муодилаи характеристикӣ расо k-то ҳалҳои ҳақиқии хаттӣ новобаста намуди (4.21) доштаи муодилаи (4.19) мувофиқ меоянд.

Агар $\lambda_1 = a + ib$, яъне комплексӣ бошад, он гоҳ адади $\overline{\lambda}_1 = a - ib$ низ решаи k – каратаи муодилаи характеристикӣ мегардад. Дар асоси (4.21), ба решаи $(a+ib)$ ҳалҳои $e^{(a+ib)\,x}$, $xe^{(a+ib)\,x}, \cdots, x^{k-1}e^{(a+ib)\,x}$ муодилаи (4.19) мувофиқ меоянд. Ин ҳалҳо комплексӣ мебошад. Қисмҳои ҳақиқӣ ва мавҳуми онҳоро ҷудо намуда, 2к ҳалҳои ҳақиқии

$$\left.\begin{array}{l} e^{ax}\cos bx, xe^{ax}\cos bx, \cdots, x^{k-1}e^{ax}\cos bx, \\ e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\sin bx, \cdots, \ x^{k-1}e^{ax}\sin bx \end{array}\right\} \qquad (4.22)$$

муодилаи (4.19)-ро ҳосил мекунем, ки онҳо хаттӣ новобаста мебошанд.

Нишон додан мумкин аст, ки (чун дар ҳолати решаи содда) решаи комплексӣ - ҳамроҳшудаи $\overline{\lambda}_1 = a - ib$ ҳалҳои ҳақиқии нави хаттӣ новобастаи муодилаи (4.19)-ро ба вуҷуд намеорад.

Ҳамин тавр, ба ҳар як ҷуфти решаҳои комплексӣ - ҳамроҳшудаи $(a \pm ib)$ каратнокиашон k, расо 2k ҳалҳои ҳақиқии хаттӣ новобастаи намуди (4.22) доштаи муодилаи (4.19) мувофиқ меоянд.

Ҳамин тавр, дар ҳолати 3°, мо ба натиҷаи зерин омадем:

Теоремаи 10. *Бигзор муодилаи характеристикӣ $P(\lambda)=0$ p- то решаҳои ҳақиқии $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ каратнокиашон мувофиқан $k_1, k_2, \cdots, k_p$ ва $2q$ - то решаҳои комплексии $a_1 \pm ib_1,\, a_2 \pm ib_2, \cdots, a_q \pm ib_q$ каратнокиашон мувофиқан $l_1, l_2, \cdots, l_q$ дошта бошад, дар куҷо*

$$\sum_{i=1}^{p} k_1 + 2\sum_{j=1}^{q} l_j = n\,.$$

Он гоҳ функсияҳои

$$e^{a_i x}, xe^{a_ш x}, \cdots, x^{a_ш x}e^{a_ш x}, \ (i = 1,2,\cdots, p),$$
$$e^{a_j x}\cos b_j x, \ xe^{a_j x}\cos b_j x, \ \cdots, \ x^{l_j}e^{a_j x}\cos b_j x\,,$$
$$e^{a_j x}\sin b_j x, \ xe^{a_j x}\sin b_j x, \cdots, \ x^{l_j}e^{a_j x}\sin b_j x \quad (j = 1,2,\cdots q)$$

системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи (4.19) -ро ташкил медиҳанд ва ҳалли умумии ин муодила чун комбинатсияи хаттии ин ҳалҳо бо коэффисиентҳои доимии дилхоҳи ҳақиқӣ муайян карда мешавад.

Дар ҳолати умумӣ, дар асоси теоремаҳои 8-10, ҳалҳои мувофиқи муодилаи (4.19)-ро барои ҳар як решаи ҳақиқии содда , решаҳои соддаи комплексӣ-ҳамроҳшуда, решаҳои каратии ҳақиқӣ ва решаҳои каратии комплексӣ-ҳамроҳшуда сохта, мо ҳамагӣ n-то ҳалҳои хаттӣ новобастаи ҳақиқии муодилаи (4.19)-ро ҳосил мекунем. Комбинатсияи хаттии ин ҳалҳо бо коэффисиентҳои доимии дилхоҳ - ҳалли умумии муодилаи (4.19) дар соҳаи $|x| < \infty, \left|y^{(i)}\right| < \infty \ (i = 0, 1, \cdots, n-1)$ мегардад. Дар ин ҳолат ба решаи ҳақиқии k - каратаи λ_1 дар ҳалли умумӣ ҷамъшавандаи $P_{k-1}(x)e^{\lambda_1 x}$ ва ба решаҳои k- каратаи комплексӣ-ҳамроҳшудаи $(a \pm ib)$ - ҷамъшавандаи $e^{ax}\left(P_{k-1}(x)\cos bx + Q_{k-1}(x)\sin bx\right)$ мувофиқ меоянд, ки дар ин ҷо $P_{k-1}(x)$ ва $Q_{k-1}(x)$ - бисёраъзогиҳои дараҷаи $k-1$ бо коэффисиентҳои дилхоҳ мебошанд.

Мисоли 12. Муодилаи $y''' - 7y'' + 16y' - 12 = 0$ -ро дида мебароем.

Муодилаи характеристикӣ $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$ як решаи содда $\lambda_1 = 3$ ва як решаи 2- карата $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ дорад. Ба ин решаҳо ҳалҳои хусусии e^{3x}, e^{2x} ва xe^{2x} муодилаи додашуда мувофиқ меоянд. Бинобар ин $y = c_1 e^{3x} + e^{2x}(c_2 + c_3 x)$ - ҳалли умумии муодилаи додашуда мебошад.

Мисоли 13. Бигзор муодилаи $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$ дода шуда бошад. Муодилаи характеристикӣ $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$ решаҳои дукаратаи $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 + i$ ва $\lambda_3 = \lambda_4 = 1 - i$ дорад. Бинобар ин функсияҳои

$$\left.\begin{matrix} e^x \cos x, & xe^x \cos x \\ e^x \sin x, & xe^x \sin x \end{matrix}\right\}$$

системаи фундаменталии ҳалҳоро ташкил медиҳанд. Пас, ҳалли умумии муодилаи додашуда

$$y = e^x\left[(c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x\right]$$

мебошад.

§12 Муодилаҳои хаттии ғайриякҷинса бо коэффисиентҳои доимӣ

Акнун муодилаи дифференсиалии хаттии ғайриякҷинсаи тартиби n-ӯмро бо коэффисиентҳои доимӣ

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{4.23}$$

дида мебароем, ки дар ин ҷо $a_1, \cdots, a_n$ - ададҳои доимии ҳақиқӣ ва $f(x)$ функсияи дар порчаи (a, b) муайян ва бефосила мебошанд.

Дар параграфи гузашта мо тарзи сохтани системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи якҷинсаи хаттиро бо коэффисиентҳои доимӣ омӯхта будем. Бинобар ин ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинса (4.23)-ро бо ёрии методи вариатсияи доимиҳо дар квадратураҳо ёфтан мумкин аст (ниг. §10). Аммо татбиқи ин метод дар ҳолати умумӣ, аксар вақт ба ҳисобкуниҳои мураккаб меорад. Бинобар ин дар ҳолатҳое, ки ҳалли хусусии муодилаи (4.23) бе душворӣ ёфта мешавад, ин методро истифода намебаранд. Масалан, дар баъзе ҳолатҳои хусусӣ, ки тарафи рости муодила намуди муайян дорад, ҳалли хусусии онро бо *методи коэффисиентҳои номуайян* ёфтан мумкин аст.

Ёфтани ҳалли хусусии муодилаи* (4.23) *бо методи коэффисиентҳои номуайян.

Бигзор

$$f(x)=[P_m(x)\cos bx+Q_n(x)\sin bx]e^{ax} \qquad (4.24)$$

бошад, дар куҷо $P_m(x)$ ва $Q_n(x)$ - бисёраъзогҳои дараҷаҳои m ва мувофиқан n буда, $m \geq n$ мебошад. Он гоҳ

1) агар $\lambda = a+ib$ решаи муодилаи характеристикӣ $P(\lambda)=0$ набошад, ҳалли хусусии муодилаи (4.23) дар намуди

$$y_1=\left[\overline{P_m}(x)\cos bx+\overline{Q_m}(x)\sin bx\right]\mathrm{e}^{\mathrm{ax}}$$

муайян карда мешавад;

2) агар $\lambda = a+ib$ решаи k- каратаи муодилаи характеристикӣ $P(\lambda)=0$ бошад,

$$y_1=\left[x^k\,\overline{P_m}(x)\,\cos bx+x^k\,\overline{Q_m}(x)\,\sin bx\right]e^{ax}$$

гузоштан лозим аст. Дар ин ҷо $\overline{P}_m(x)$ ва $\overline{Q}_m(x)$ - бисёраъзогиҳои дараҷаи m бо коэффисиентҳои номуайян мебошанд.

Дар ин ҳолатҳо коэффисиентҳои номуайяни полиномҳо $\overline{P}_m(x)$ ва $\overline{Q}_m(x)$ чунин муайян карда мешаванд: ифодаи y_1 -ро ба муодилаи (4.23) гузошта, коэффисиентҳои назди дараҷаҳои якхелаи x ва $\cos bx, \sin bx$ -ро дар ҳар ду тарафҳои баробарии ҳосилшуда бо ҳам баробар намуда, системаи алгебравии ҳосилшударо ҳал намудан лозим аст.

Дар ҳолати хусусӣ, агар

$$f(x)=P_m(x)$$

(2.25)

бошад, яъне агар $a=b=0$ бошад ва $\lambda=0$ решаи муодилаи характеристикӣ $P(\lambda)=0$ набошад, он гоҳ $y_1=\overline{P_m}(x)$ қабул менамоем. Агар $\lambda=0$- решаи k- каратаи муодилаи $P(\lambda)=0$ бошад, $y_1=x^k\,\overline{P}_m(x)$ гузоштан лозим аст.

Дар ҳолати

$$f(x)=P_m(x)\,e^{ax}$$

(4.26)

будан, яъне агар $b=0$ бошад ва агар $\lambda=a$- решаи муодилаи $P(\lambda)=0$ набошад, он гоҳ $y=\overline{P}_m(x)e^{ax}$ гирифтан лозим аст. Агар a- решаи k-каратаи муодилаи $P(\lambda)=0$ бошад, $y=x^k\,\overline{P}_m(x)\,e^{ax}$ гузоштан лозим аст.

Агар

$$f(x)=P_m(x)\cos bx+Q_n(x)\sin bx \qquad (m\geq n)$$

(4.27)

бошад, яъне агар $a=0$ бошад ва $\lambda=ib$ решаи муодилаи характеристикӣ $P(\lambda)=0$ набошад, он гоҳ $y_1=\overline{P}_m(x)\cos bx+\overline{Q}_m(x)\sin bx$ гирифтан лозим аст. Агар $\lambda=ib$ - решаи k- каратаи муодилаи $P(\lambda)=0$ бошад, он гоҳ $y_1=x^k\left[\overline{P}_m(x)\cos bx+\overline{Q}_m(x)\sin bx\right]$ гузоштан лозим аст.

Мисоли 14. Ҳалли умумии муодилаи $y''-5y'=-5x^2+2x$ ёфта шавад.

Муодилаи якҷинсаи мувофиқро $y''-5y'=0$ ҳал менамоем. Муодилаи характеристикӣ $\lambda^2-5\lambda=0$ решаҳои ҳақиқии гуногун $\lambda_1=0,\ \lambda_2=5$ дорад. Бинобар ин $y_0(x)=c_1+c_2e^{5x}$ - ҳалли умумии муодилаи якҷинса мебошад. Акнун ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаи додашударо меёбем.

Тарафи рости муодила намуди (4.25) -ро дорад, яъне $a=b=0$ мебошад. Ғайр аз ин $\lambda=0$ решаи соддаи муодилаи характеристикӣ мебошад. Бинобар ин ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаро ба намуди

$$y_1=x\left(Ax^2+Bx+C\right)$$

навишта, онро ба муодилаи додашуда гузошта, коэффисиентҳо A,B ва C-ро муайян менамоем.

Меёбем

$$y_1'=Ax^2+Bx+C+x(2Ax+B)=3Ax^2+2Bx+C;\quad y_1''=6Ax+2B.$$

Ба муодилаи додашуда гузошта, ҳосил мекунем:

$$(6Ax+2B)-5\left(3Ax^2+2Bx+C\right)=-5x^2+2x.$$

Аз ин ҷо, $-15Ax^2+(6A-10B)x+(2B-5C)=-5x^2+2x$. Коэффисиентҳои назди дараҷаҳои якхелаи x–ро дар ҳар ду тарафи баробарии ҳосилгардида бо ҳам баробар намуда, системаи зеринро ҳосил менамоем:

$$\left.\begin{array}{l} -15A=-5, \\ 6A-10B=2, \\ 2B-5C=0. \end{array}\right\}$$

Аз ин ҷо, $A=\frac{1}{3}$, $B=C=0$.

Ҳамин тавр, $y_1=\frac{1}{3}x^3$ - ҳалли хусусии муодилаи додашуда мебошад. Ҳалли умумии он бошад, $y=y_0+y_1=\frac{1}{3}x^3+c_1+c_2e^{5x}$ аст.

Мисоли 15. Барои муодилаи

$$y''-y=6e^{2x}$$

бошад, тарафи рости он намуди (2.26)-ро дорад, ки дар ин ҷо $m=0,\ a=2$ мебошад. Ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи мувофиқ

$$y''-y=0$$

$y_0(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}$ мебошад, чунки муодилаи характеристикӣ $\lambda^2-1=0$ решаҳои ҳақиқии гуногун $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,$ дорад. Азбаски адади $a=2$ решаи муодилаи характеристикӣ намебошад, пас ҳалли хусусиро дар намуди $y_1(x)=Ae^{2x}$ ҷустан лозим аст. Аз ин ҷо, $y_1'=2Ae^{2x}$, $y_1''=4Ae^{2x}$. Ба муодила гузошта ҳосил мекунем: $4Ae^{2x}-Ae^{2x}=6e^{2x}$, $Ae^{2x}=2e^{2x}$. Аз ин ҷо $A=2$ ва $y_1(x)=2e^{2x}$. Бинобар ин $y=2e^{2x}+c_1e^x+c_2e^{-x}$ - ҳалли умумии муодилаи додашуда мебошад.

Мисоли 16. Барои муодилаи

$$y''+y=2\sin x$$

тарафи рости он намуди (4.27) -ро дорад, ки дар ин ҷо $P_m(x)\equiv 0, Q_n(x)\equiv 2$ ва $b=1$ мебошад. Муодилаи характеристикӣ $\lambda^2+1=0$ решаҳои комплексӣ-ҳамроҳшуда $\lambda_{1,2}=\pm i$ дорад. Бинобар ин ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи мувофиқ $y_0(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$ мебошад. Азбаски $\lambda=i$ решаи соддаи муодилаи характеристикӣ мебошад, пас ҳалли хусусиро дар намуди $y=x(A\cos x+B\sin x)$ ҷустан лозим аст. Ин ифодаро ба муодилаи додашуда гузошта меёбем: $A=-1$, $B=0$. Бинобар ин $y_1=-x\cos x$ ва ҳалли умумӣ $y=-x\cos x+c_1\cos x+c_2\sin x$ мебошад.

Мисоли 17. Бигзор муодилаи

$$y''-6y'+5y=-3e^x+5x^2$$

дода шуда бошад. Муодилаи якҷинсаи мувофиқ $y''-6y'+5y=0$-ро ҳал менамоем. Муодилаи характеристикӣ $\lambda^2-6\lambda+5=0$ решаҳои ҳақиқии гуногун $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ дорад. Бинобар ин, $y_0(x) = c_1e^x + c_2e^{5x}$ - ҳалли умумии муодилаи якҷинса мебошад.

Тарафи рости муодилаи ғайриякҷинса намуди (4.24)-ро надорад, лекин он аз ду ҷамъшавандаҳо иборат мебошад, ки ҷамъшавандаи якум ба ҳолати хусусии (2.26), ҷамъшавандаи дуюм бошад, ба ҳолати хусусии (4.25) мувофиқат мекунанд. Бинобар ин барои ёфтани ҳалли хусусии муодилаи додашуда кифоя аст, ки ҳалҳои хусусии муодилаҳои зеринро

$$y'' - 6y' + 5y = -3e^x,$$
$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2$$

ёфта, суммаи онҳо гирифта шавад.

Барои муодилаи якум ҳалли дар намуди $y_1 = Axe^x$, барои муодилаи дуюм бошад, дар намуди $y_2 = Bx^2 + Cx + D$ гирифтан лозим аст. Ин ифодаҳоро ба муодилаҳои мувофиқ гузошта, меёбем $A = \frac{3}{4}$, $B = 1$, $C = \frac{12}{5}$, $D = \frac{62}{25}$. Бинобар ин, $y_1 = \frac{3}{4}xe^x$, $y_2 = x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25}$ ва $\bar{y} = y_1 + y_2 = \frac{3}{4}xe^x + x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25}$ - ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаи додашуда мебошад. Ҳалли умумии он бошад, $y = \frac{3}{4}xe^x + x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25} + c_1e^x + c_2e^{5x}$ мебошад.