Берклеевский
Курс
Физики

том IV

Э. ВИХМАН

КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

Берклеевский
Курс
Физики

ТОМ IV

Э. ВИХМАН

КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

Перевод с английского

под редакцией
А. И. ШАЛЬНИКОВА и А. О. ВАЙСЕНБЕРГА

[illegible]

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1968

ББК 22.3
В54
УДК 530.145

531
В-540

ВИХМАН Э. Квантовая физика: Учеб. руководство: Пер. с англ./Под ред. А. И. Шальникова и А. О. Вайсенберга.— 3-е изд., испр.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— (Берклеевский курс физики).— 392 с., ил.

Четвертый том общего курса физики, созданного в Калифорнийском университете для подготовки физиков и инженеров. Изложены основные квантово-механические идеи, тщательно обоснован принцип неопределенностей, рассмотрена теория Шредингера и проблема элементарных частиц и их взаимодействий. Приведено большое число примеров и задач. Обновлены терминология и наименования единиц физических величин.

Для физических, физико-технических специальностей вузов; может быть полезен преподавателям физики в высшей и средней школах.

Табл. 38. Ил. 187

Фундаментальная
БИБЛИОТЕКА СамГУ
3 экз.

В $\frac{1704010000-053}{053(02)-86}$ 124-86

© McGraw-Hill Book Co., 1967
© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы.
Перевод на русский язык.
1974, 1975, 1986

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие общего редактора русского перевода 5
Из предисловия редактора перевода IV тома 6
Из предисловия к Берклеевскому курсу физики 7
Из предисловия к IV тому 9
Указания для преподавателей и студентов 11

Глава 1. Введение 15
Обзор квантовой физики (15). Атомы и элементарные частицы (17). Пределы применимости классической теории (26). Открытие постоянной Планка (33). Фотоэлектрический эффект (39). Проблема стабильности и размера атомов (43). Задачи (48). Дополнительная литература (50).

Глава 2. Порядки физических величин в квантовой физике 51
Единицы и физические константы (51). Энергия (57). Порядки величин в атомной и молекулярной физике (61). Наиболее важные факты физики ядра (71). Гравитационные и электромагнитные силы (78). О численных оценках (81). Дополнительная тема: фундаментальные константы природы (82). Задачи (89). Дополнительная литература (92).

Глава 3. Уровни энергии 93
Схемы уровней (93). Конечная ширина уровней энергии (105). Продолжение обсуждения схем уровней (112). Расширение спектральных линий вследствие доплер-эффекта и столкновений (131). Дополнительная тема: к теории электромагнитных переходов (133). Задачи (139). Дополнительная литература (141).

Глава 4. Фотоны 143
Фотон как частица (143). Комптон-эффект, тормозное излучение, образование пар и аннигиляция (153). Можно ли вращаться фотон? (164). Задачи (175). Дополнительная литература (177).

Глава 5. Материальные частицы 178
Волны де Бройля (178). Теория дифракции на периодических структурах (189). Существует лишь одна фундаментальная Планка (193). Можно ли вращаться волны материи? (196). Волновое уравнение и принцип суперпозиции (202). Дополнительная тема: векторное пространство физических состояний (208). Задачи (212). Дополнительная литература (214).

Глава 6. Принцип неопределенностей и теория измерений 216
Принцип неопределенностей Гейзенберга (216). Измерения и статистические ансамбли (228). Амплитуды и интенсивности (244). Можно ли в принципе предсказать исход каждого измерения? (250). Поляризованный и неполяризованный свет (253). Задачи (256). Дополнительная литература (258).

DENOV TADBIRKORLIK
VA PEDAGOGIKA
INSTITUTI ARM
№ 13119

Глава 7. Волновая механика Шредингера 260
Нерелятивистское волновое уравнение Шредингера (260). Гипотеза простого «боровского» спектра (263). Теория метода-радиоспектрометр (281). Дополнительная тема: формулировка волновой механики (293). Задачи (296). Дополнительная литература (298).

Глава 8. Теория стационарных состояний 299
Квантование как проблема собственных значений (299). Гармонический осциллятор. Колебательные и вращательные возбуждения молекулы (316). Водородоподобные системы (325). Дополнительная тема: переменные постоянных и возмущения в теории Шредингера (340). Задачи (357). Дополнительная литература (360).

Глава 9. Элементарные частицы и их взаимодействия 361
Процессы столкновения и волновая теория (361). Что понимается под частицей? (356). Основные идеи квантовой теории поля (358). Поиски к ядерным силам (379). Космические излучения (396). Задачи (394). Дополнительная литература (398).

Приложения 399

ПРЕДИСЛОВИЕ ОБЩЕГО РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Мы являемся свидетелями возникновения новых отраслей физики и все более глубокого проникновения ее во все области современной науки и техники. Возникает вопрос: как при этом правильно поставить преподавание общей физики, являющейся основой мировоззрения и специальных знаний будущего ученого и инженера? Что действительно важно понять и знать и чем можно пренебречь?

Вопросы об улучшении преподавания общего курса физики часто обсуждаются, однако принимаемые решения обычно не идут дальше очередного изменения программ. Одной из попыток создания современного курса общей физики были «Фейнмановские лекции по физике», получившие у нас заслуженное признание. Другая попытка радикального решения этой проблемы была предпринята в университете г. Беркли (США, Калифорния), где в 1961 г. был создан специальный комитет, состоявший из ученых, поставивших своей целью создание учебника нового типа. Первые два тома этого учебника (механика, электричество и магнетизм) вышли в 1965 г., в последние годы закончено издание трех остальных томов (волны, квантовая физика, статистическая физика). Кроме того, три небольшие книги содержат описание тридцати шести работ Берклеевской физической лаборатории, идейно созданной с новым общим курсом.

Создатели Берклеевского курса стремились изложить в учебнике классическую физику, органически связав ее с основными идеями специальной теории относительности, квантовой физики и статистики,— именно в этом-то и заключены главные достоинства учебника.

Курс предназначен не только для физиков, но и для будущих инженеров, химиков и биологов. Объем его значительно превосходит претензии даже физиков и оставляет поэтому как преподавателю, так и студенту большую свободу в выборе материала.

Следует отметить прекрасную организацию курса. Превосходные рисунки, большое количество задач различной трудности (часто из смежных с физикой областей), описание физических опытов и выдержки из оригинальных работ увеличивают ценность и привлекательность курса.

Инициатива перевода на русский язык Берклеевского курса физики в значительной степени принадлежит С. П. Капице. Настоящий том отредактирован А. О. Вайсенбергом.

Мы уверены, что Берклеевский курс физики окажется интересным и полезным широкому кругу учащихся и преподавателей.

А. И. Шальников

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА IV ТОМА

Настоящий, четвертый, том Берклеевского курса физики написан профессором Калифорнийского университета в г. Беркли Э. Вихманом — специалистом по квантовой теории поля.

Автор в своем предисловии подробно изложил принципы построения книги. Нам остается лишь подчеркнуть, что основное внимание в ней уделено идеям, а факты иллюстрируют возникновение и развитие идей. Изучив книгу и предложенные задачи, студент приобретает первые навыки квантовомеханического мышления и практического применения квантовых законов к атомным и ядерным проблемам.

Автор снабдил книгу большим количеством тщательно отобранных ссылок на оригинальные классические работы и практически весь иллюстративный материал книги почерпнут из таких работ. Это обстоятельство должно облегчить студенту переход к чтению современных экспериментальных работ, опубликованных в научных журналах. Разумеется, не все указанные в книге источники могут быть доступны студентам, и мы старались учесть это обстоятельство, указав в списках дополнительной литературы к каждой главе подходящие обзоры, печатавшиеся в журнале «Успехи физических наук», в сборниках «Над чем думают физики» (М.: Наука, 1962—1977, вып. 1—11), а также в других доступных читателю источниках.

А. О. Вайсенберг

* * *

В настоящем, третьем, издании книги устранены замеченные опечатки и погрешности предыдущих изданий. Кроме того, терминология и единицы физических величин приведены в соответствие с ГОСТ 8.417—81 (СТ СЭВ 1052—78).

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К БЕРКЛЕЕВСКОМУ КУРСУ ФИЗИКИ

Предлагаемый общий курс физики для колледжей рассчитан на двухлетнее обучение студентов, специализирующихся в естественных и технических науках. Авторы стремились представить физику, насколько возможно, в том виде, в каком она используется самими физиками, активно работающими в этой науке. Мы пытались создать такой курс, в котором особое внимание было бы уделено основам физики и последовательно изложены основные идеи специальной теории относительности, квантовой и статистической физики.

Наш курс доступен любому студенту, который знает физику в объеме средней школы. Курс математики, состоящий из дифференциального и интегрального исчисления, должен изучаться параллельно.

В настоящее время в США подготавливается к печати несколько новых курсов физики для колледжей. Идея их создания занимала многих физиков; она явилась следствием прогресса в естественных и технических науках и возрастающих требований к преподаванию естественных наук в средней и высшей школах. Наш курс был задуман в обсуждениях, проходивших в 1961 г. с Ф. Моррисоном из Корнеллского университета и Ч. Киттелем. Мы получили поддержку Дж. Мэйса и его коллег из Национального научного фонда и У. Миллера, который был тогда председателем комиссии по преподаванию физики в колледжах. Для руководства курсом на его начальных стадиях был организован неофициальный комитет. Вначале он состоял из Л. Альвареца, У. Френтера, Ч. Киттеля, У. Найтя, Ф. Моррисона, Э. Парселла, М. Рудермана и Дж. Захариаса. Комитет собрался впервые в мае 1962 г. в Беркли и наметил предварительные основы содержания нового курса физики. Из-за большой занятости некоторых членов комитета состав его был частично изменен, и с января 1964 г. этот комитет включал нижеподписавшихся лиц. Участие других авторов указано в предисловиях к отдельным томам.

Предварительные обсуждения оказали существенное влияние на окончательный результат нашей работы. В этих обсуждениях были детально рассмотрены проблемы, которые, как мы считали, следует излагать начинающим студентам колледжа естественных и технических наук. Мы не задавались целью создать курс специально для особо выдающихся студентов, но старались объяснить основы физики со свежих и уже установившихся точек зрения. Поэтому

некоторые части курса могут оказаться для преподавателей такими же новыми, как для студентов.

Курс состоит из пяти томов: I. Механика (Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман). II. Электричество и магнетизм (Э. Парселл). III. Волны (Ф. Крауфорд). IV. Квантовая физика (Э. Виккман). V. Статистическая физика (Ф. Рейф). Авторы каждого тома могли по своему усмотрению выбирать стиль и метод изложения, наиболее соответствующие предмету.

Работа над курсом побудила А. Портиса создать новую лабораторию общей физики, известную теперь под названием Берклеевской физической лаборатории. Может показаться, что в нашем курсе, излагающем основы физики, эксперименту уделено недостаточное внимание. Дело, однако, в том, что важнейшие эксперименты выполняются в лаборатории, которая создана специально для того, чтобы дополнить курс лекций.

Ю. Кокмонс, У. Найт, А. Портис,
Ф. Рейф, Э. Виккман, Ф. Крауфорд,
Ф. Моррисон, Э. Парселл, М. Рудерман,
Ч. Киттель, председатель

Беркли, Калифорния

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К IV ТОМУ

Настоящий том Берклеевского курса физики посвящен квантовой физике. Эта книга носит вводный характер и предназначена для студентов, обладающих знаниями, приблизительно соответствующими основному содержанию предшествующих томов курса. Основным читателем книги, я предполагаю, будет студент-второкурсник физической или технической специальности. Переносить изучение основных квантовых явлений на более поздние курсы мне кажется неправильным и нежелательным, особенно принимая во внимание бурное развитие квантовой физики за последние 50 лет. Правильно сбалансированный вводный курс должен непременно отразить этот процесс.

Не следует думать, что квантовая физика принципиально труднее других областей физики. В любой области физики, наряду с явлениями простыми и ясными, мы встречаем и такие, которые воспринять очень трудно. Правда, было время, когда и квантовые явления казались весьма таинственными и сложными. В тот период, когда «колыбель» этой науки только начали осваивать, физики испытывали реальные психологические трудности, возникавшие частично вследствие укоренившихся предрассудков, связанных с привычной классической картиной мира, а частично за счет неполного и отрывочного характера имевшихся экспериментальных данных. Однако современный студент не должен испытывать те же трудности. Теперь хорошо известно, что классическое описание лишь приблизительно верно и что имеется огромное множество экспериментальных данных, подтверждающих и освещающих различные аспекты современных теорий. Автор уверен, что в море известных фактов можно найти такие, которые достаточно ясны и прозрачны для обсуждения и в то же время пригодны для выяснения основных идей и принципов. Автор надеется, что студенты, привыкшие размышлять о простых, но значительных физических явлениях, не сочтут эти факты более таинственными, чем, например, явление всемирного тяготения.

В этой книге автор стремился отобрать характерные квантовые явления, с помощью которых читатель смог бы познакомиться с типичными порядками физических величин в микрофизике и приучиться мыслить квантовомеханически. Автор старался включить в рассмотрение явления, имеющие особо важное значение для понимания квантовых идей, и в то же время упростить все рассуждения. Приведенные примеры отобраны из различных областей макро-

физики без попытки при этом дать их детальное и систематическое описание. Автору кажется, что такое описание не подходит для данного курса.

Для пользования книгой требуются умеренные знания математики. Предполагается, что студент уже владеет математическим анализом, включая решение простых дифференциальных уравнений, и основами векторного анализа. Чтобы избежать смещения внимания с физики к математике, в книгу не включены темы, которые на данном уровне могли бы показаться математически трудными. Так, например, совсем не рассматриваются вопросы, требующие знания специальных функций или методов разделения переменных в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Автор должен с сожалением заметить, что он не предполагал также знакомства студентов с теорией матриц. Поэтому пришлось не без сожаления отказаться от рассмотрения вопросов, для которых теория матриц представляется наиболее подходящим математическим методом.

Разумеется, в аудитории невозможно изучить весь изложенный в книге материал, да в этом и нет необходимости. Наоборот, преподаватель имеет широкую возможность выбрать вопросы, подходящие для обсуждения. Чтобы облегчить этот выбор и вообще планирование курса, в следующих ниже указаниях для преподавателей и студентов подробно рассмотрен план каждой главы и очерчен некий программа-минимум. Нет беды в том, что материал этой книги превосходит объем, подходящий для изложения в аудитории. Книга, вероятно, будет полезна студентам, которые пожелают использовать ее как дополнение к лекциям.

Э. Вихман

Октябрь 1957 г.
Беркли, Калифорния

УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ И СТУДЕНТОВ

Книга состоит из девяти глав, каждая из которых разделена на большое число пронумерованных пунктов. Отдельный пункт соответствует определенной идее или определенному шагу в рассуждении. Уравнения, рисунки и таблицы текста обозначаются номером пункта, в котором они содержатся или к которому относятся. Библиографические ссылки к тексту даны в списках. Общая библиография указана в конце каждой главы. Таблицы физических величин приведены в приложении. Задачи для индивидуальной работы студента даются в конце глав. Наиболее подготовленные студенты решат большую часть этих задач.

Приведенная библиография относится к оригинальным работам, другим учебникам и популярным обзорам типа тех, которые помещаются в журнале «Scientific American» *). Студент должен иметь в виду, что, ограничившись одними учебниками, он получит неадекватную картину состояния физики. Учебник способствует систематическому изучению предмета, но не может в достаточной мере отразить богатство и разнообразие интеллектуальных достижений современной физики. Так, в книге весьма скудно описана экспериментальная часть дела. Чтобы облегчить читателю знакомство с литературой, в текст включены ссылки на оригинальные исследования. Я не надеюсь на то, что студент прочтет большое число этих работ, но если он заинтересуется определенной проблемой, то ему следует пойти в библиотеку и обратиться к оригинальным работам. Он, вероятно, натолкнется и на другие работы, которые тоже привлекут его, и, возможно, такое чтение станет для него привычным. Нет смысла, конечно, читать статьи, для понимания которых заведомо нет нужной подготовки. Существует много работ, особенно экспериментальных, которые вполне доступны студенту, и он должен делать свой выбор именно среди таких работ. Нужные советы можно получить у преподавателя. На этой стадии большую пользу студенту принесут популярные обзоры, которые познакомят его с современными работами в наиболее интересных областях.

Вопросу о единицах в этой книге уделено мало внимания. Преподаватели могут по собственному выбору пользоваться либо системой СИ, либо системой СГС. (Единственным пунктом, где это существенно, является постоянная тонкой структуры.) Константы

*) У нас, например, в сборниках «Над чем думают физики» (М.: Наука, 1965—1977, вып. 1—11). — *Прим. ред.*

приведены в обеих системах единиц, а экспериментальные результаты — в системе СИ. При изложении теории уравнение часто пишется в безразмерном виде, где макроскопические единицы вообще не появляются.

Теперь перейдем к содержанию каждой главы, чтобы объяснить ее цель и указать, что в случае необходимости можно сокращать. Часть материала в тексте обозначена как «дополнительные темы». Они не требуют от студента больших усилий для усвоения, чем основной текст, но несколько отходят от главной линии книги и поэтому могут быть опущены, причем понимание основного текста не пострадает.

Глава 1 носит вводный характер. В ней дан обзор квантовой физики и рассмотрены некоторые вопросы истории науки. Наиболее важным в этой главе является идея о том, что квантовая физика касается всей физики, а не только «микроскопических» явлений. В программе-минимум большая часть этой главы может быть оставлена для самостоятельного чтения и преподаватель может ограничить свои лекции содержанием п. 27—52, где обсуждается значение постоянной Планка для всей физики. Задачи в конце главы не требуют специальной подготовки и могут быть рассмотрены в пределах программы-минимум.

В главе 2 рассмотрен порядок физических величин в микрофизике. Ее цели — познакомить студента с этими величинами, установить «естественные» комбинации физических констант и получить на основании простых моделей элементарные оценки. Эти цели нам представляются очень важными, и вся глава (вместе с задачами) требует большого внимания. В программе-минимум п. 47—57 могут быть опущены.

Глава 3 посвящена вопросу об уровнях энергии. Однако теоретическое объяснение их существования дано позже, в главе 8. Столь необычный порядок изложения объясняется желанием перенести в конец книги все, что требует некоторого знакомства с дифференциальными уравнениями. В зависимости от степени математической подготовки студента этот порядок можно изменить. В главе 3 даны реальные примеры систем уровней и рассмотрены следствия из факта существования дискретных уровней энергии. Часть этой главы может быть оставлена для самостоятельного чтения. Важным вопросом, который следует подробно обсудить, является связь между временем жизни и шириной уровня (п. 14—26).

В главе 4 рассмотрены волновые и корпускулярные свойства фотона. Представлены наиболее важные экспериментальные факты, и читатель должен научиться рассматривать их с квантовомеханической точки зрения. Эту главу, по-видимому, не следует сокращать.

Глава 5 посвящена волновой природе всех материальных частиц. Студент, прочитавший главы 4 и 5, поймет, что волновые свойства присущи всем частицам, встречающимся в природе, и получит несколько примеров проявления этих свойств. Он поймет также, почему волновые свойства частиц не противоречат макроскопической

физике. Содержание главы 5, таким образом, в большой степени связано с экспериментом. Вывод уравнения Клейна — Гордона (п. 30—40) не следует опускать. Интерпретация решений волнового уравнения как векторов в векторном пространстве (п. 47—51) может быть оставлена для самостоятельного чтения или вовсе опущена. В программе-минимум в крайнем случае можно опустить дифракцию волн на периодической структуре (п. 16—22), хотя не совсем правильно опускать теорию, которая имеет столь великолепные и важные экспериментальные применения.

В первой части главы 6 (п. 1—19) обсуждается принцип неопределенностей. Этот материал имеет решающее значение и не может быть опущен. Основная цель главы 6 — сформулировать и обсудить некоторые общие законы квантовомеханического мышления, в частности теории измерений и идеи статистического ансамбля к когерентной и некогерентной суперпозиции. При изложении этого вопроса я старался остаться на возможно более конкретном и физическом уровне. Все же нельзя отрицать, что обсуждение в этой главе заходит значительно дальше, чем обычно принято в книгах вводного типа, и многим читателям может показаться, что материал дан преждевременно. С другой стороны, я считаю, что некоторые основные идеи этой главы при соответствующем изложении не столь трудны и есть смысл попытаться изложить эти идеи поранее.

Главы 7 и 8 представляют собой введение в теорию Шредингера. Я хотел целью показать подробнее, как реально работает квантовомеханическая теория. В программе-минимум п. 49—51 главы 7 и п. 49—58 главы 8 можно опустить. Описание проникновения частиц через потенциальный барьер в случае α-распада (п. 37—46 главы 7), по-видимому, опускать не следует.

В главе 9 рассмотрены взаимодействия между элементарными частицами. В п. 1—18 рассмотрены процессы соударения, а в п. 19—31 — некоторые экспериментальные факты и теоретические идеи о частицах. За этим следует качественное рассмотрение основных идей квантовой теории поля. Непосредственным результатом такого рассмотрения является упрощенный вывод потенциала Юкавы в п. 47—55. В программе-минимум можно вообще отказаться от главы 9, но где-то в курсе, по-видимому, все же должны быть сделаны некоторые замечания о проблеме взаимодействия частиц. Мне кажется, что она должна заинтересовать студентов; кроме того, это центральная проблема современной физики.

Задачи в конце глав предназначены иллюстрировать обсуждавшиеся проблемы. Они сильно различаются по степени трудности. Задач, которые требуют лишь подстановки численных значений в формулы, сравнительно немного. Смысл таких задач в том, чтобы дать студенту представление о порядке встречающихся величин. При выборе автор руководствовался желанием подчеркнуть задачи, с помощью которых студент мог бы проверить свое понимание текста, не хотелось, чтобы они потонули в большом числе тривиальных задач. Если преподаватель решит пропустить часть текста, то,

конечно, он сможет сделать то же самое и с задачами или заменить их другими.

Кроме отмеченных нами частей книги, которые без ущерба можно опустить, преподаватель может отказаться еще от тех или иных параграфов по своему усмотрению, а также упростить или укоротить обсуждения, не меняя характера книги. Таким образом, лекции по программе-минимум могут покрывать от половины до двух третей содержания курса. Это составит около 20 лекционных часов — минимальное время, которое можно уделить квантовой физике.

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

Обзор квантовой физики

1. В этой части курса мы будем изучать физику атомов, ядер и элементарных частиц. При этом мы познакомимся с неизвестными ранее свойствами природы, а именно с *квантовыми явлениями*. Поэтому настоящий том назван *квантовой физикой*. Современная математическая теория квантовых явлений носит название *квантовой механики*.

«Квантовую физику» не следует считать изолированной частью физики, не связанной с макроскопическим миром. В действительности она охватывает всю физику, и ее законы в том виде, как они известны теперь, являются наиболее общими законами природы.

2. В предыдущих томах Берклеевского курса мы изучали физические явления макромира. Законы природы, с которыми мы там познакомились, относятся к *классической физике*. В общем, можно сказать, что классическая физика имеет дело с явлениями, где вопрос о микростроении вещества не играет большой роли. В этом томе мы специально займемся изучением элементарных частиц и рассмотрим законы, объясняющие их свойства. Наше внимание мы, естественно, обратим к тем явлениям, в которых действие этих законов выявлено наиболее ясно. Это означает, что мы будем рассматривать лишь ситуации, в которых участвует небольшое число частиц. Таким образом, бо́льшая часть рассматриваемых в этой книге явлений относится к *микрофизике*.

Зная законы, управляющие поведением элементарных частиц, мы можем в принципе предсказать поведение макроскопических систем, которые состоят из очень большого числа таких частиц. Это означает, что законы классической физики следуют из законов микрофизики, и поэтому квантовая механика является основой для понимания как микромира, так и макромира.

3. Когда мы применяем законы классической физики к макроскопическим системам, то пытаемся описать лишь глобальные свойства таких систем. Нас интересует, например, движение твердого тела как целого, но мы отвлекаемся от движения элементарных частиц, из которых оно состоит. Такова характерная особенность классических теорий: применяя их к макросистемам, мы игнорируем тонкие детали поведения последних и не делаем попыток рассмотреть все аспекты ситуации.

Таким образом, законы классической физики имеют приближенный характер. Они являются предельным случаем более мощных и общих законов квантовой физики.

Иными словами, классические теории являются *феноменологическими теориями*. Такая теория описывает и обобщает экспериментальные данные в определенных областях физики. Феноменологические теории не претендуют на объяснение всех явлений в физике, но хорошая феноменологическая теория должна очень точно объяснить все явления в своей ограниченной области применения. Философски настроенный читатель, возможно, скажет, что, в сущности, *любая* физическая теория является «феноменологической» и различие между «фундаментальной» и «феноменологической» теориями есть всего лишь вопрос подхода. Как физики, мы ясно слышим, однако, различие между обоими типами теорий. *Фундаментальные* законы природы отличаются большой общностью, их применимость не знает исключений. Мы рассматриваем их как универсальные и точные, пока эксперимент не докажет нам противного. Что касается законов, полученных из феноменологической теории, то мы с самого начала не считаем их универсальными; мы знаем, что они годятся (т. е. достаточно точны) лишь для ограниченной области явлений и за ее пределами могут полностью потерять свое значение.

4. Не следует, конечно, умалять значение феноменологических теорий. Они служат очень полезной цели — обобщают наш опыт в различных областях физики. Во многих случаях мы считаем, что располагаем теорией, основанной на фундаментальных законах, но явление настолько сложно, что точные предсказания с помощью такой теории оказываются весьма затруднительными. В подобных случаях мы обращаемся к упрощенной феноменологической теории, основанной частично на прямых экспериментальных фактах, частично на основных принципах фундаментальной теории. Иными словами, мы даем возможность самой физической системе выполнить часть теоретической работы. Кроме того, в физике возможна и такая ситуация, когда нам неизвестны фундаментальные законы. В этом случае любая феноменологическая теория (основанная на простой модели), которую мы способны построить, может оказаться путеводной нитью в поисках более мощной теории.

Когда мы пытаемся понять непривычное физическое явление, то весьма полезно сначала прибегнуть к наиболее простому — к теории или модели, которые уже себя оправдали в аналогичной ситуации. Если наша модель окажется подходящей, то мы чему-то научимся, если же она не годится, то и в этом случае мы чему-то научились.

Важно помнить, что модели — это только модели и что вся физика не описывается единственной моделью.

5. Часто говорят, что открытие квантовой механики привело к «революции» в физике. Это драматическое выражение, обладающее странной притягательной силой, предполагает решительный и полный переворот во взглядах. Необходимо, однако, иметь в виду, что законы классической физики остались непоколебленными, если ограничить их область применения явлениями, для которых классическая физика была создана. Движение маятника, например, и сегодня описывается так же, как оно описывалось в XIX веке.

Более того, классические концепции зачастую оказываются хорошим приближением для рассмотрения *некоторых* особенностей микрофизических явлений. Очень важно, что мы понимаем пределы применимости классических концепций. В этой главе мы дадим читателю лишь общее представление об этих пределах. По мере расширения знаний он познакомится в последующих главах с квантовыми явлениями и приобретет более точное понимание этой важной проблемы.

Классические теории, как было с определенностью установлено огромным числом опытов, выполненных в нашем столетии, не имеют универсальной применимости. Мы познакомим читателя с некоторыми экспериментальными доказательствами, и он убедится в том, что действительно таковы свойства нашего мира.

6. Размышляя об изменениях, происшедших в физике в течение этого столетия, мы должны иметь в виду, что классическая физика не дала нам *исчерпывающей* теории строения вещества. Законы классической физики являются хорошими феноменологическими законами, но они не говорят нам всего о макроскопических телах. С помощью этих законов мы можем описать поведение (движение) механизмов, состоящих из пружин, рычагов, маховых колес и т. д., если мы располагаем такими «физическими константами», как плотность, модуль упругости и т. д., характеризующими вещество, из которого эти механизмы сделаны. Но классическая теория не может ответить, *почему* плотность или модуль упругости имеют именно такие значения, *почему* стержень ломается, когда напряжение становится больше определенного предела, и т. д. Она не объясняет, почему медь плавится при 1083 °С, почему пары натрия испускают желтый свет, почему водород обладает присущими ему химическими свойствами, почему светит Солнце, почему ядро урана спонтанно делится, почему серебро — проводник, а сера — изолятор и почему постоянные магниты можно делать только из стали. Можно без конца перечислять обычные экспериментальные факты, о которых классическая теория может сказать мало или совсем ничего не говорит.

7. Читатель спросит, обладаем ли мы *сейчас* исчерпывающей теорией строения вещества? Ответ будет отрицательным: у нас нет детальной теории, которая могла бы объяснить *все* явления в нашем мире. Но за последнее столетие наше понимание природы вещей чрезвычайно расширилось. Мы узнали о новых свойствах природы, о которых не имели ни малейшего представления, и успешно решили множество старых проблем. С удовлетворением можно сказать, что теперь мы понимаем химические явления и макроскопические свойства вещества. В этих областях физики мы уже можем ответить на те вопросы, которые не могла разрешить классическая теория.

Атомы и элементарные частицы

8. Перейдем к миру элементарных частиц. Греческим философам принадлежит заслуга введения в теорию вещества идеи об атомах. (Не исключено, что аналогичные соображения развивались древними

Фундаментальная библиотека ГГУ им. Ф. Скорины
DEVLET TABİİ PEDAGOJİK VA PEDAGOGIKA INSTITUTU ARM № 1715

народами гораздо раньше.) Следует сразу же отметить, что атомы древних сильно отличаются от атомов, с которыми имеем дело мы. Нелегко точно понять, что подразумевали греческие философы под этим термином, но основной проблемой, интересовавшей их, был вопрос о том, бесконечна ли делимость вещества. Если вещество нельзя дробить бесконечно, то в конце концов мы придем к идее об элементарной частице вещества, т. е. об атоме. Взявшись некоторое вещество и будем делить его на всё более мелкие части. В конце концов настанет предел, когда дальнейшее деление невозможно. «Слово атом» как раз означает «неделимый».

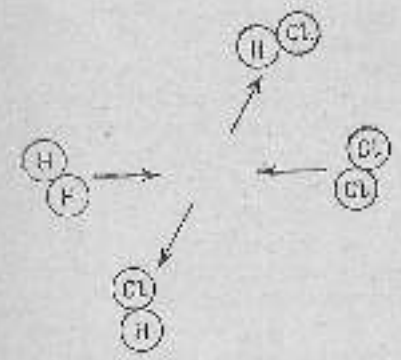


Рис. 9А. Схематическое изображение химической реакции $H_2 + Cl_2 \rightarrow 2HCl$, осуществляющейся при взаимодействии сталкивающихся молекул водорода и хлора. Действительность гораздо сложнее, происходящие при столкновении молекул водорода и хлора химические превращения могут быть весьма разнообразными. Иногда молекулы H_2 и Cl_2 распадаются на атомы, которые, перегруппировавшись, образуют молекулы HCl. Иногда молекулы H_2 и Cl_2 реагируют, не распадаясь на атомы, которые соединяются в молекулу HCl. Играют роль и другие процессы, которые заключаются в возбуждении молекул — молекулы снова или иным способом

Греческие атомисты верили, что любое вещество построено из «атомов», и, вероятно, чувствовали, что бесконечное многообразие свойств вещества должно быть объяснено конфигурацией (и движением) «атомов». Эти идеи довольно близки к современным, но существует огромное различие между нашими количественными теориями, основанными на опыте, и умными размышлениями древних.

9. В этой книге мы не будем заниматься ранней историей атомной теории, но читатель должен вспомнить, что в XIX веке атомная гипотеза привела к замечательным успехам в понимании ряда явлений. Она объяснила основной факт, известный химикам: данное сложное химическое вещество состоит из определенных химических элементов, причем пропорции, в которых входят эти элементы, определяют вещество. Рассмотрим, в частности, тот замечательный факт, что химически сложные вещества можно представить такими простыми формулами, как H_2O, H_2SO_4, Na_2SO_4 или NaOH. Замечательным в этих формулах является появление небольших целых чисел, показывающих, например, что *две единицы* водорода, объединяясь с *одной единицей* кислорода, образуют *одну молекулу* воды, и т. п. Этот опытный факт легко объяснить, предположив, что вещество состоит из атомов; химические соединения состоят из молекул, которые в свою очередь являются сложными системами, состоящими из небольшого числа атомов. Два атома водорода совместно с одним атомом кислорода образуют молекулу воды. Ясно и просто.

Дальнейшие подтверждения атомной гипотезы связаны с успехами *кинетической теории газов*, развитой в работах Максвелла и

Больцмана. Эта теория смогла объяснить многие свойства газов, исходя из предположения, что газ в сосуде представляет собой рой молекул, беспорядочно движущихся и непрерывно сталкивающихся со стенками и друг с другом. Кинетическая теория позволила оценить постоянную Авогадро: $N_0 = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, представляющую собой число молекул в моле любого газа. (*Молем* любого химического соединения мы называем такое его количество, масса которого, выраженная в граммах, равна молекулярной массе соединения *).) Первая грубая оценка значения N_0 была сделана Лошмидтом в 1866 г.

Имея такие указания о существовании атомов, трудно поверить, что вплоть до конца прошлого века некоторые ученые отрицали атомную гипотезу на основании *отсутствия прямых* (!) доказательств атомного строения вещества.

10. «Атомы» греческих философов не идентичны атомам нашего времени. Прежде всего, наши атомы нельзя считать неделимыми; они построены из протонов, нейтронов и электронов. Роль «атомов» в понимании греков в какой-то степени играют именно протоны, нейтроны, электроны и множество других элементарных частиц. Что мы понимаем под «элементарной частицей»? Точный смысл этого понятия в настоящее время спорен, но для наших целей практически достаточно простого ответа на поставленный вопрос: частицу можно считать элементарной, если ее нельзя описать как сложную систему, состоящую из других, более элементарных объектов. Мы не в состоянии указать на «части» элементарной частицы, она не «построена» из чего-то более простого. На ней наши попытки мысленного деления заканчились. При таком определении элементарны протон, нейтрон и электрон, но не атом водорода и не ядро урана.

Итак, вот в чем суть идеи, что вещество не может быть бесконечно делимо: невозможно делать строение вещества, исходя из принципа, что сколь угодно малая часть по своим свойствам подобна целому. В конце концов такое деление теряет смысл; мы приходим к неделимым объектам, и они являются нашими элементарными частицами.

11. Как доказать, что электрон *действительно* элементарен? Окажется ли объект, представляющийся сегодня элементарным, завтра сложным? В конце концов, то, что мы сегодня считаем атомами, в прошлом столетии были элементарными частицами. Не может ли история повториться?

Существует большое число экспериментальных фактов, показывающих, что история не повторится: частицы, подобные электрону, протону или нейтрону, никогда не окажутся сложными в том же смысле, в каком сложен атом водорода. Попытаемся понять смысл этих фактов.

Если два куска мрамора, направленные навстречу с большой скоростью, столкнутся, то они разлетятся на более мелкие осколки.

*) В настоящее время моль определяется как количество вещества системы, содержащей столько структурных элементов, сколько содержится атомов в нуклиде ^{12}C массой 0,012 кг.— *Прим. ред.*

Аналогично, две молекулы водорода, если их энергия достаточно велика, сталкиваясь, образуют осколки. Если энергия не была слишком велика, то среди осколков мы обнаружим атомы водорода, протоны, электроны, — иными словами, объекты, из которых построены молекулы водорода. То, что произошло в этих случаях, может быть описано следующим образом. При столкновении действовали

Рис. 11А. Схематическое представление ядерной реакции, при которой α-частица сталкивается с ядром азота, а возникают ядро кислорода и протон. Именно эта реакция, открытая Резерфордом в 1919 г., была первым наблюдением превращения одних стабильных ядер в другие (*Rutherford E.* — Phil. Mag., 1919, v. 37). В опыте Резерфорда азот бомбардировался частицами радиоактивного источника, а реакция идентифицировалась по наблюдению вылетевших протонов. Этот рисунок, аналогичен рис. 9А и показывает, что ядра состоят из протонов и нейтронов, а простая реакция заключается при малых энергиях, в перераспределении этих частиц между ядрами. Такой рисунок не следует понимать буквально: ядра не похожи на то, что показано на рисунке

Рис. 12А. Схема, иллюстрирующая рождение двух пионов при столкновении двух протонов большой энергии. Заряд каждой частицы равен +e, второго — e (e — элементарный заряд). Полный заряд в рассматриваемой реакции, конечно, сохраняется. После столкновения оба протона продолжают существовать и рождаются две новые частицы. Отметим, что частицы подобные показанным на рис. 9А и 11А, здесь тоже должны являться только рассматривать квазиперегруппировку ядер, из которых состоят протоны

силы, превосходящие силы сцепления, удерживающие отдельные части как мрамора, так и молекулы водорода, и эти объекты разваливались. Аналогичным образом можно интерпретировать множество ядерных реакций. Ядра состоят из протонов и нейтронов, и если протон, обладающий большой энергией, попадает в ядро, он может выбить из него несколько протонов и нейтронов.

12. Однако если мы изучаем столкновения двух элементарных частиц, например двух протонов, при достаточно большой энергии, то обнаружим явления, *качественно отличные* от рассмотренных выше. Например, если протон очень большой энергии сталкивается с другим протоном, то после столкновения оба протона останутся протонами, но мы обнаружим также среди продуктов реакции одну или несколько новых элементарных частиц, например π-мезоны. Мы говорим, что в такой реакции *родились* π-мезоны (их называют также пионами). Но этим не исчерпываются явления, вызванные столкновением протона с протоном: протоны могут исчезнуть, вместо них могут возникнуть новые частицы, называемые *K*-мезонами и гиперонами.

Аналогично, при столкновениях двух быстрых электронов конечными продуктами распада могут оказаться пары электрон и один позитрон (позитрон отличается от электрона только знаком своего

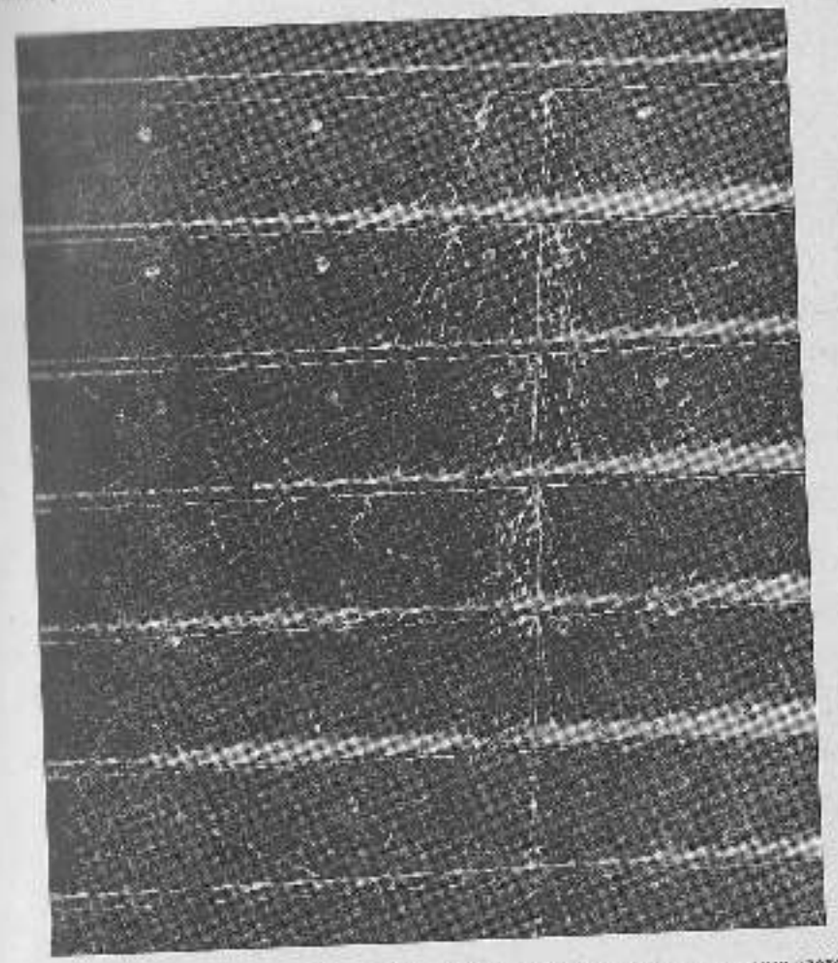


Рис. 13А. Фотография камеры Вильсона. Видны два ряда капель, образующих следы частиц, прошедших сквозь камеру. Частица и античастица приходят снизу, сталкиваются с электроном, покоящимся в камере, и рождают еще по электрону и позитрону. Дальнейшему движению частиц препятствует свинцовая пластинка, помещенная в камеру, проходя через которую, частицы теряют энергию. Подробнее см. в тексте

электрического заряда). Но, с другой стороны, столкновение электрона с позитроном может привести и к исчезновению обеих частиц (это явление носит название *аннигиляции*), сопровождающемуся возникновением электромагнитного излучения в виде γ-квантов.

13. Интересным примером процесса рождения является появление электронно-позитронных пар при прохождении γ-квантов в электрическом поле атома. Процесс заключается в рождении материаль-

ных частиц из электромагнитного излучения. На рис. 13А, представляющем собой фотографию так называемого каскадного ливня в камере Вильсона, «видны» многие примеры такого явления. Объяснение тому, что видно на рисунках (см. также рис. 13В и 13С), заключается в следующем. Если заряженная частица большой энергии (электрон или позитрон) проходит через одну из горизонтальных свинцовых пластин, видных на снимке, то она может слегка отклониться в поле одного из атомов. При таком отклонении скорость частицы уменьшится и соответственно возникает электромагнитное излучение в виде γ-квантов. (Частица в пластинке может, конечно, испытать последовательные отклонения в поле нескольких атомов. В этом

Рис. 13В. Заряженная частица большой энергии (электрон, позитрон или электрон) отклоняется электрическим полем атома. В результате торможения и ускорения она испускает γ-квант. Это явление носит название тормозного излучения. Заштрихованная часть рисунка иллюстрирует процесс, например свинцовую пластинку в камере Вильсона.

Рис. 13С. γ-квант большой энергии в электрическом поле ядра может образовать электронно-позитронную пару. Это явление называется образованием пар. Термины излучение и образование пар отмечены на рисунке каскадного ливня, показанного на рис. 13А.

случае будет испущено несколько γ-квантов.) Возникающие в этом процессе γ-кванты могут рождать электронно-позитронные пары в полях других атомов, с которыми они встречаются при прохождении через пластину. Эти заряженные частицы, сталкиваясь с атомами, в свою очередь образуют новые γ-кванты, а последние образуют новые частицы и т. д.

Таким образом, единичная заряженная частица или единичный γ-квант может дать начало каскаду, состоящему из γ-квантов, электронов и позитронов. Заряженные частицы оставляют в камере видимые следы. Они и образуют наблюдаемую на рис. 13А картину ливня. γ-кванты не оставляют следа на фотографии.

Показанный на правой части снимка каскадный ливень возник от γ-кванта, попавшего сверху в первую пластину. Энергия этого γ-кванта близка к 20 ГэВ. Слева от этого ливня виден второй ливень. Он был создан заряженной частицей заметно меньшей энергии. По-видимому, происхождение обоих ливней связано с каким-то событием, происшедшим где-то в стенке камеры, вне поля зрения. Большинство заметных на снимке частиц движется сверху вниз. Характерная особенность рассматриваемых процессов заключается в том, что чем больше энергия частицы в ливне, тем ближе направление ее движения к направлению движения первичной частицы; частицы меньшей энергии могут отойти далеко от оси ливня. При внимательном рассмотрении снимка можно заметить, что вторичные ливни, связанные с частицами, ушедшими от основного направления, быстро «вымирают». Каскадный ливень исчезает, когда первичная энергия оказывается раздробленной между столь большим числом вторичных заряженных частиц и γ-квантов, что они уже не способны к дальнейшему рождению пар. В конце концов частицы малых энергий поглощаются в свинцовых пластинах.

Энергию частицы, создавшей ливень, можно оценить по числу созданных ею вторичных заряженных частиц.

14. Описанные процессы рождения и аннигиляции частиц являются важной особенностью природы. Очевидно, что эти явления не имеют аналогов ни в раздроблении куска вещества, ни в химических реакциях. Мы в состоянии описать химическую реакцию, сказав, что новые молекулы образуются из элементов, входивших в состав других молекул. При таком описании атомы можно считать составными частями молекулы. Рассмотрим в противоположность этому случай, когда две сталкивающиеся частицы сохраняются и после столкновения, в котором рождаются также и новые частицы. Очевидно, что такой процесс нельзя описать как перераспределение некоторых элементов, из которых состоят исходные частицы, в новые сложные системы. В равной степени подобное описание не годится для явлений, связанных с исчезновением исходных частиц. Характерным примером такого явления можно считать аннигиляцию электронно-позитронной пары: две материальные частицы, существовавшие вначале, полностью исчезают, и вместо них образуются γ-кванты.

15. Чтобы выяснить экспериментально, является ли частица элементарной или сложной, мы создаем условия для столкновения двух частиц и исследуем продукты реакции. Действуя этим методом, нам удается расщепить молекулу на отдельные атомы, а атомы — на электроны и ядра. Именно поэтому можно утверждать, что молекулы состоят из атомов, которые в свою очередь построены из электронов и ядер. Физики XIX столетия ошибались, полагая, что атомы неразрушимы и неделимы. Оказалось, что атом можно разрушить. То же следует сказать и о ядре. Его разрушение требует, однако, затраты гораздо большей энергии, чем разрушение атома. В этом смысле ядро несравненно более устойчиво, чем атом.

Современные ускорители дают пучки частиц, обладающих огромной энергией. Таким образом, мы располагаем подходящими средствами, чтобы попытаться разрушить электроны, протоны или нейтроны. Оказывается, однако, что, в отличие от атомов или ядер, эти частицы разрушить невозможно. Происходит нечто совсем иное. Приходим к выводу, что при изучении электронов, протонов и нейтронов мы достигли некоторого предела: такие частицы трудно считать построенными из каких-то других, более элементарных частиц.

16. В наше время никто не станет пытаться создать теорию вещества, основанную на предположении о его бесконечной делимости. Такая теория не может быть верной. Допустим, однако, что такая теория существует, и рассмотрим одну ее характерную особенность. Возьмем кусок меди и будем делить его на всё меньшие и меньшие кусочки. Как бы малы эти кусочки ни были, они все же остаются медью. Что это значит? Лишь то, что физические законы, определяющие свойства *большого* куска меди, не отличаются от законов, управляющих поведением *малых* кусков меди; наша физическая система беспредельно уменьшается, но при этом остается подобной себе. Следует заметить, что классические теории не обязательно обладают этим свойством, но оно будет весьма естественным для теории, описывающей вещество, делящееся бесконечно.

Заметим, что классические теории физики во многих отношениях обладают таким свойством подобия. Законы физики, с помощью которых мы описываем машины массой в тонну, количественно не отличаются от законов, объясняющих действие ручных часов. Размеры макроскопических физических систем могут меняться в огромном интервале значений.

«Сохранение формы физических законов» при изменении масштаба представляет собой естественное свойство бесконечно делимого вещества. Но оно отсутствует, если вещество построено из элементарных частиц. Атом меди ни в каком отношении не похож на макроскопический кусок меди. Это нечто совершенно другое, и нет никаких оснований предполагать, что физические законы, описывающие поведение макроскопических систем, будут пригодны для описания атомов и элементарных частиц.

17. Нетрудно принять в качестве абстрактного принципа, что классические идеи могут оказаться неприменимыми к атому и что электрон *действительно* есть элементарная частица. Однако гораздо труднее совместить в сознании классические и новые идеи. Обычно мы с большим трудом расстаемся с привычными идеями. Наша научение физики с явлений в макроскопических системах, мы приобрели ряд классических предрассудков, которые придется преодолеть, чтобы понять квантовую физику. Смысл этих замечаний станет яснее, если мы рассмотрим две тесно связанные проблемы, бывшие в этом столетии предметом многих дискуссий.

18. Зададим следующий вопрос: какие силы связывают электрон в единое целое? Какая часть массы электрона связана с его *электрическими* свойствами и какая с энергией его собственного электростатического поля? Чтобы иметь возможность рассуждать об этих вопросах, начнем с отправной, не бессмысленной простой модели, согласно которой электрон является равномерно заряженной сферой радиуса r. Различные части такой сферы испытывают силы электростатического отталкивания, и поэтому должны существовать силы иного типа, удерживающие электрон от развала. Какова их природа?

В томе II этого курса [*]) было показано, как вычислять энергию,

[*]) *Парселл Э.* Электричество и магнетизм.— 3-е изд.— М.: Наука, 1968, гл. 2.

связанную с электрическим полем. Она равна интегралу величины $E^2/8\pi$ по всему пространству. Здесь E — напряженность электрического поля в данной точке. Следуя этому правилу, мы найдем, что электростатическая энергия электрона в нашей модели равна

$$W = \frac{3}{5}\frac{e^2}{r},$$

где e — заряд электрона [*]). (Коэффициент 3/5 связан с конкретным выбором модели, которая представляет электрон равномерно заряженной сферой. Существенно лишь то, что энергия W пропорциональна e^2/r. Такую зависимость W от e и r легко получить также из соображений размерности.) Теперь можно записать, что масса электрона $m = m_e + m_i$, где $m_e = W/c^2$ — электромагнитная масса, m_i — «внутренняя» масса. Пробуем в том, как велика масса m_i. Может быть, $m = m_e$ и вся масса электрона имеет электромагнитное происхождение? Приняв эту гипотезу, мы можем вычислить радиус электрона r, который оказывается равным $1{,}7 \cdot 10^{-13}$ см. Существует большое число экспериментальных фактов, показывающих, что размеры электрона чрезвычайно малы, и весьма утешительно, что мы действительно получили столь малое значение r. Заметим, что его нельзя уменьшить, не предположив, что масса m_i может быть отрицательной.

Поскольку считается электрон элементарной частицей, то может показаться особенно привлекательным исследовать модель, в которой его радиус $r = 0$. В такой модели электрон является «точечной частицей», не имеющей ни протяженности, ни структуры. При этом, однако, собственная электромагнитная энергия электрона W становится бесконечно большой, а его внутренняя масса m_i — отрицательной и также бесконечно большой. Трудно понять, какой в этом смысл. (Модель точечного электрона *математически* проста и привлекательна, но мы видим, что в ней имеются непреодолимые препятствия, которые в литературе получили название «трудностей, связанных с бесконечно большой собственной энергией электрона».)

19. Теперь подвергнем критике приведенные выше рассуждения. Имеют ли они реальный смысл? В поставленных вопросах заключены некоторые идеи, не высказанные предположения, в которых сказались наши «классические предрассудки». Мы предполагали, что электрон представляет собой малую заряженную сферу, и допускали, что закон Кулона применим к отдельным «частям» этой сферы. Откуда нам известно, что закон Кулона справедлив в этом случае? Имеет ли также смысл представление о том, что существует сила, удерживающая отдельные «части» электрона и действующая против электростатических сил отталкивания? Ведь раньше мы говорили, что электрон — это не составная, а *элементарная частица*. Задавая вопрос о том, что удерживает электрон от развала, мы предполагаем,

[*]) Это формула записана в системе СГС. В системе СИ мы имеем

$$W = \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}.$$

что такой развал возможен, а это весьма сомнительная идея. Заметим, что собственная электростатическая энергия частицы равна работе, которая будет совершена при разделении этой частицы на составные части. Пользуясь этим определением, мы и получаем, что электростатическая энергия любой системы зарядов равна интегралу от квадрата напряженности электрического поля, взятому по всему пространству. Но если частица *не может быть* разделена, представление о собственной электростатической энергии становится сомнительной идеей. Это в еще большей степени относится к бесконечно большой собственной энергии «точечного электрона».

В настоящее время большинство физиков уже понимает, что попытки создать какую-либо классическую модель электрона не имеют смысла. Электрон не ведет себя подобно заряженной сфере, и поэтому все рассуждения о том, что удерживает его в объеме этой сферы или чему равна его классическая собственная энергия, не относятся к делу. Наши «классические предрассудки» заставляют нас ставить вопросы, на которые нельзя найти разумных ответов. Следует, однако, заметить, что, как это ни удивительно, дух бесконечно большой собственной энергии не полностью покинул физику, остатки этой путаницы еще существуют в квантовой механике.

Пределы применимости классической теории

20. В специальной теории относительности скорость света, равная $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с, имеет первостепенное значение. Это верхний предел для скорости любой материальной частицы и для скорости распространения энергии или любой информации в физическом пространстве. Скорость света c дает нам простой и естественный критерий, с помощью которого можно решить, какое физическое явление — «нерелятивистское» или «релятивистское». Грубо говоря, нерелятивистский подход справедлив, т. е. дает достаточно точные результаты, в тех случаях, когда все относящиеся к задаче скорости малы по сравнению со скоростью света.

Можно спросить, существует ли аналогичный критерий, показывающий, в каких случаях надо использовать квантовую механику и когда можно ограничиться классическими теориями, т. е. существует ли другая мировая постоянная, «аналогичная» скорости света, с помощью которой можно сформулировать этот критерий? Такая постоянная существует и называется *постоянной Планка*. Значение постоянной Планка (ее обозначают буквой h) равно

$$h = 6{,}626 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с} = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

Физическая размерность постоянной Планка равна
(время) × *(энергия)* —
— *(длина)* × *(импульс)* = *(момент импульса)*.

Величина с такой размерностью называется *действием*, и постоянную Планка называют также элементарным *квантом действия*.

Интересующий нас грубый критерий заключается в следующем. Если в данной физической системе числовое значение некоторой «естественной» динамической переменной [*]) с размерностью действия сравнимо с постоянной Планка h, то поведение этой системы описывается в рамках квантовой механики. С другой стороны, если все переменные, имеющие размерность действия, очень велики по сравнению с h, то систему с достаточной точностью описывают законы классической физики.

Подчеркивая *приближенный* характер высказанного критерия, который лишь указывает, когда следует проявлять осторожность. Малость переменной действия не всегда свидетельствует о *полной* неприменимости классической теории. Во многих случаях она может дать нам некоторое качественное представление о поведении системы, которое можно уточнить с помощью квантовомеханического рассмотрения.

21. Отметим сразу же, что постоянная Планка «мала», а это значит, что в единицах, установленных для описания макроскопических явлений, например в единицах СИ или СГС, она выражается малым числом. Таким образом, величины макромира, имеющие размерность действия, в единицах h выражаются *огромными* числами.

Рассмотрим, например, маятник часов. Чтобы найти величину с размерностью действия, образуем произведение периода маятника на максимальное значение его полной энергии. Период маятника близок к 1 с, а кинетическая энергия во всяком случае больше 1 эрг. Таким образом, произведение обеих величин $> 10^{27}\ h$, т. е. гораздо больше h. Согласно нашим критериям классическое описание движения маятника должно быть полностью справедливым.

Рассмотрим таким же образом вращающееся тело. Пусть его момент инерции равен 1 г·см², а угловая скорость равна 1 рад/с. Тогда момент импульса будет равен 1 г·см²/с = 1 эрг·с ≈ $10^{27}\ h$. Таким образом, момент импульса по сравнению с h очень велик. Даже если тело — песчинка с периодом вращения, исчисляющимся часами, ее момент импульса, измеренный в единицах h, все же будет выражаться огромным числом.

Рассмотрим, наконец, небольшой, но макроскопический гармонический осциллятор. Пусть его масса равна 1 г, максимальная скорость 1 см/с и максимальная амплитуда $x = 1$ см. Тогда его максимальный импульс $p = 1$ г·см/с. Величина $x \cdot p = 1$ эрг·с есть переменная с размерностью действия, и ее значение опять порядка $10^{27}\ h$.

Таким образом, применение указанного критерия к макроскопическим системам подтверждает нашу уверенность в том, что подобные системы могут быть описаны классически.

22. Теперь постараемся получить более глубокое представление о значении приведенного критерия.

*) Динамической переменной называется любая переменная, характеризующая состояние системы, например координата, составляющая импульса или момента импульса, составляющая скорости, полная энергия и т. п.

В классической физике считается, что каждая динамическая переменная системы может быть измерена в принципе сколь угодно точно. Это не означает, что практически имеется подобная возможность. Важно, что *в принципе* возможная точность измерений ничем не ограничена. В классической физике динамическими переменными являются координаты, составляющие импульса, моменты импульса и т. д., а также такие переменные, как составляющие векторов электрического и магнитного полей в данной точке пространства в определенный момент времени.

Тщательный анализ реального поведения микроскопических систем показывает, однако, что существует *принципиальный предел* точности, с которой подобные переменные могут быть указаны и измерены. В 1927 г. В. Гейзенберг привлек глубокий анализ причин существования этого предела, который называется *принципом неопределенности*. Количественное соотношение, выражающее этот принцип для данного частного случая, называется *соотношением неопределенностей*.

Рассмотрим соотношение неопределенностей для пары переменных (q, p), где q — координата положения частицы, а p — ее импульс. В этом случае

$$\Delta q \cdot \Delta p \geqslant \hbar/4\pi. \qquad (22a)$$

Здесь Δq и Δp — средние квадратичные погрешности измерения q и p. Написанное неравенство означает, что обе переменные нельзя измерить более точно, чем в том случае, когда произведение их неопределенностей имеет порядок постоянной Планка.

Сразу же заметим, что вследствие малости постоянной Планка соотношение неопределенностей не будет играть никакой роли в макрофизике. Другие погрешности для q и p будут в этом случае гораздо больше. Таким образом, соотношение (22а) никак не противоречит нашему *эмпирическому знанию* явлений макромира, хотя, конечно, оно находится в противоречии с классическими теориями, разработанными для макроскопических систем.

23. Принцип неопределенностей иногда «объясняют» следующим образом. Такие динамические переменные, как, например, положение, импульс, момент импульса и т. п., будут определены, если мы укажем экспериментальный способ их измерения. Если мы подвергнем анализу реальные методы измерения в микрофизике, то обнаружим, что любое измерение *возмущает* систему. Это возмущение принципиально неустранимо, так как происходит от взаимодействия системы и измерительной аппаратуры. Если мы попытаемся точно измерить положение частицы, то измерения ее состояния таких образом, что импульс окажется весьма неопределенным. Наоборот, выполняя точные измерения импульса, мы делаем очень неопределенным ее положение. Если же мы попытаемся *одновременно* измерить и положение и импульс частицы, то оба измерения будут влиять друг на друга, и погрешности окончательного результата измерений будут связаны неравенством (22а). Дальнейшие рассуждения имеют целью объяснить предположенное указанных влияний в некоторых конкретных случаях.

Такое объяснение принципа неопределенностей можно прочесть во многих учебниках. Автор не настаивает на том, что оно совершенно ошибочно, но ему кажется, что оно может привести к большим недоразумениям. Это объяснение обходит существенную особенность, которая заключается в следующем: *соотношение неопределенностей устанавливает предел, за которым понятия классической физики становятся неприменимыми*. «Классическая физическая система», описываемая классическими динамическими переменными, которые определенным образом зависят от времени и могут быть известны нам с произвольной точностью, является плодом абстракции и существует лишь в нашем воображении. В реальном мире таких систем нет. Это подтверждают многочисленные эксперименты. Описывая реальную систему классическими понятиями, мы допускаем приближение, а соотношение неопределенностей показывает степень его справедливости.

24. Чтобы разъяснить эти идеи, рассмотрим одномерное движение частицы. В классической динамике мгновенное положение частицы может быть задано координатой $q = q(t)$. Если масса частицы равна m и частица движется достаточно медленно, ее импульс $p = p(t) = m\,dq(t)/dt$. Мы могли бы сказать, что принцип неопределенностей выражает неспособность наших измерительных приборов определить $q(0)$ и $p(0)$ с произвольной точностью, но что у нас остается возможность рассуждать о точных значениях этих величин и о последовательном движении частицы от точки к точке. Иными словами, мы могли бы думать, что следует продолжать пользоваться понятием классической траектории, по которой движется каждая частица, но что существует неопределенность о том, *по какой именно* траектории следует частица, вытекающая из соотношения неопределенностей, применимого к начальным условиям.

Это не так. Опыт показывает, что наши идеи нуждаются в более радикальном изменении. *Необходимо отказаться от самого понятия классической траектории*. Вопрос об одновременных значениях $q(t)$ и $p(t)$ не менее бессмыслен, нежели вопрос о цвете волос короля Соединенных Штатов.

25. Может показаться, что в наших рассуждениях имеется логическое противоречие. Сперва мы устанавливаем соотношение неопределенностей, а затем утверждаем, что входящие в него переменные p и q лишены смысла. Если это так, то какой смысл в самом соотношении? Ответ заключается в следующем. При квантовомеханическом описании поведения частицы можно ввести некоторые математические объекты q и p, которые во многих отношениях *соответствуют* классическим переменным — координате и импульсу. Эти объекты, однако, не идентичны классическим переменным. Соотношение (22а) показывает нам, что если мы будем пытаться интерпретировать квантовомеханические объекты q и p как «координату» и «импульс» и рассматривать движение классически, то существует принципиальное ограничение точности, с которой могут быть известны «координата»

к «импульсе». Другими словами, соотношение неопределенностей показывает, что, *пытаясь* описать движение частицы с помощью классических переменных q и p, мы имеем дело с принципиальным ограничением точности такого описания.

26. Следует ясно понимать, что соотношение неопределенностей не является выводом из анализа процесса измерения, рассматриваемого в классических понятиях. Это соотношение отражает экспериментально обнаруженные свойства природы. Реальные частицы не ведут себя подобно точечным частицам классической физики или подобно малым бильярдным шарам. У них иные свойства, и именно поэтому некоторые измерения не могут быть выполнены даже мысленно.

В последующих главах мы изучим свойства частиц реального мира и увидим, что соотношение неопределенностей, кажущиеся странными, естественно вписываются в общую схему явлений.

Открытие постоянной Планка

27. Обратимся теперь к истории открытия постоянной Планка. Интересно проследить появление и триумфальный путь этой константы в физике. Нам следует вернуться к началу нашего века и рассмотреть некоторые не решенные в то время проблемы. Вот важнейшие из них:

1) проблема получения черного тела;

2) проблема фотоэлектрического эффекта;

3) проблема стабильности и размера атомов.

Это далеко не единственные проблемы, занимавшие физиков той эпохи, но в них наиболее отчетливо проявились противоречия классической физики.

С исторической точки зрения наш обзор более чем схематичен. Вопрос о развитии квантовой механики невозможно уложить в несколько страниц. Рассматривая ситуацию начала века из сегодняшнего дня, мы понимаем, что три перечисленные задачи были ключевыми. Однако если просмотреть статьи, опубликованные в 1900 г. в «Annalen der Physik» (один из ведущих журналов того времени), то мы обнаружим, что большую часть физиков привлекали совсем другие задачи. Во все времена способность отличать значительные проблемы от незначительных была редкостью. Тем больше у нас оснований признать замечательную интуицию и силу воображения тех, кто положил начало квантовой физике.

28. Чтобы подчеркнуть ситуацию, покажем, что три перечисленные проблемы являются различными аспектами фундаментальной «тайны потерянной константы». Конечно, трудности, стоявшие перед физиками в 1900 г., не были сформулированы таким образом, но для нас такая точка зрения удобна и поучительна.

Под «потерянной константой» мы подразумеваем, конечно, постоянную Планка h. В чисто классической теории такой константы не существует. Рассмотрим поэтому некоторые основные физические константы, играющие важную роль при классическом описании явлений.

1) Скорость света $c=3\cdot10^{10}$ см/с. К 1900 г. эта константа была известна с большой точностью.

2) Постоянная Авогадро $N_0=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$, представляющая собой число молекул в моле любого газа. В 1900 г. было известно *грубое* значение этой величины, полученное из кинетической теории газов.

3) Масса атома водорода $M_H=1{,}67\cdot10^{-24}$ г. С погрешностью до 1/2000 эта величина равна массе протона M_p. Поскольку масса моля водорода (H_2) очень близка к 2 г, то

$$N_0 M_H \approx N_0 M_p \approx 1 \text{ г/моль}. \tag{28a}$$

Таким образом, зная постоянную Авогадро, мы знаем и величину M_p.

4) Элементарный заряд $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл $=4{,}8\cdot10^{-10}$ СГСЭ$_q$. Заряд электрона равен $-e$, а заряд протона равен $+e$. Заряд, переносимый молем однократно заряженных ионов (каждый ион переносит заряд e), носит название *постоянной Фарадея*. Таким образом,

$$F=N_0 e=96\,487 \text{ Кл/моль}. \tag{28b}$$

Постоянная Фарадея F легко измеряется в опытах по электролизу. Она равна, например, заряду, который должен пройти через электролит, чтобы на электроде выделился моль серебра (т. е. 107,88 г серебра, так как относительная атомная масса серебра равна 107,88). и то же отношение для протона $e/M_p=9{,}6\cdot10^4$ Кл/г. Эти постоянные можно измерить в опытах по отклонению электронных и протонных пучков в электрических и магнитных полях. Таким методом Томсон получил в 1897 г. значение e/m [*]). Заметим, что

$$\frac{e}{M_p}=\frac{F}{N_0 M_p}, \tag{28c}$$

и эта константа зависит от констант, рассмотренных выше.

Следует также отметить, что, имея точные значения e/m и e/M_p, мы получаем точное значение величины

$$\frac{M_p}{m}=\frac{e/m}{e/M_p}, \tag{28d}$$

даже не имея точного значения элементарного заряда e. При этом мы предполагали, разумеется, что заряд протона равен по модулю заряду электрона.

6) Масса электрона $m\sim9{,}11\cdot10^{-28}$ г. Эта константа может быть получена из e и e/m.

29. Постоянная Авогадро N_0 служит мостом, соединяющим макро- и микрофизику. Огромная величина этой постоянной показывает, насколь в действительности малы атомы и молекулы и почему вернисколь

[*]) *Thomson J. J.* Cathode Rays. — Phil. Mag., 1897, v. 44, p. 293.

стая структура вещества не проявляет себя в макроскопическом мире. Как мы уже упоминали, в конце прошлого века постоянная Авогадро была известна с малой точностью. Постоянные F, e/m и m/M_n были измерены намного точнее. Независимые и точные измерения N_0 или e должны были бы дать точные значения таких важных констант, как e, m и M_n. Важной особенностью планковской теории излучения абсолютно черного тела как раз и является, как мы увидим дальше, возможность независимого и точного определения N_0.

Примерно через 10 лет Милликен в своих знаменитых опытах с каплями масла, помещенными между обкладками конденсатора,

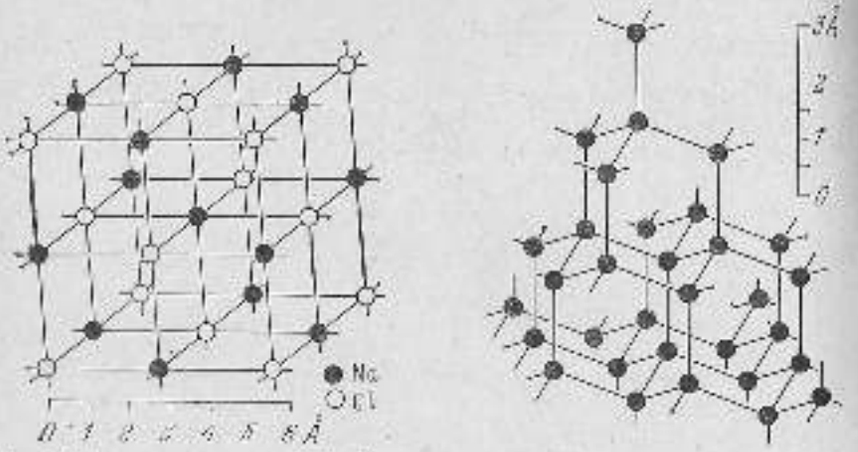


Рис. 30А. Строение кристаллов NaCl. Решетка кристалла кубическая: в вершинах куба попеременно помещены атомы Na и Cl. Центры малых сфер, изображенных на рисунке, соответствуют средним положениям атомов. Размеры сфер даны условно, не в масштабе, т. к. наши весомые судят о размерах атомов или ядер

Рис. 30Б. Строение кристаллов цинка. Каждый атом окружен шестью ближайшими соседями, расположенными в вершинах правильного шестиугольника (черточки)

измерил заряд электрона e непосредственно. Идея этого года заключалась в наблюдении за падением в воздухе наэлектризованных капель масла, находящихся под действием сил тяжести и электрического поля [*]. Этот опыт не мог дать очень точного значения заряда e, но играл, однако, большую роль как независимый и идейно очень простой метод измерения элементарного заряда.

30. Продолжим наш исторический обзор и заметим, что существует прямой метод измерения постоянной Авогадро N_0. Он заключается в подсчете числа атомов в кристалле. Атомы кристалла образуют регулярную решетку, которая в некоторых случаях имеет, например, кубическую форму. Если мы сможем определить так называемую *постоянную решетки*, т. е. расстояние между соседними атомами, то легко найдем N_0. Постоянная решетки может быть измерена по дифракции рентгеновских лучей при условии, что их длина волны нам известна из независимых опытов, например по их дифракции на механически сделанной «макроскопической» решетке. Величина N_0 действительно была определена этим методом.

Великолепная идея, что сама природа снабдила нас готовыми дифракционными решетками в форме кристаллов, принадлежит

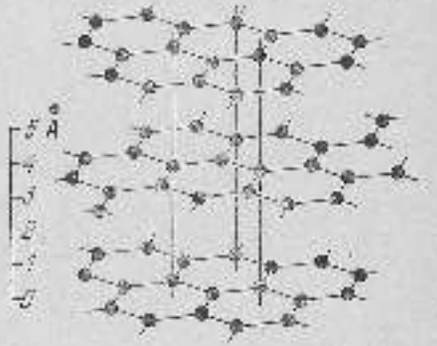


Рис. 30В. Строение кристалла графита. Алмаз и графит построены из одних атомов углерода. Огромное различие свойств этих двух веществ объясняется различным строением кристаллической решетки. Решетка графита сложена из параллельных плоскостей. Расстояние между соседними плоскостями одно и то же, и в каждой плоскости атомы углерода расположены в вершинах шестиугольников. Сравните эту решетку с показанной на рис. 30Б сеткой цинка

М. Лауэ. По его предложению В. Фридрих и П. Книппинг [*]) в 1912 г. впервые получили картину дифракционного рассеяния рентгеновских лучей на кристаллах и тем подтвердили волновую природу рентгеновского излучения.

31. Чтобы понять идеи, связанные с излучением абсолютно черного тела, следует рассмотреть понятия тепла и температуры [**]), необходимые для описания поведения вещества в целом, при тепловом равновесии. Эти понятия ничего не говорят о строении и свойствах *изолированных* атомов, молекул или ядер, но тем не менее позволяют обнаружить некоторые проявления квантовой природы вещества. Дело в том, что, хотя мы, естественно, не производим измерений над отдельными атомами, молекулами или ядрами, мы все же наблюдаем эти частицы «закрепленными» в веществе.

Тепловой энергией называется энергия, связанная с беспорядочным движением частиц макроскопического тела. Тепло — это переданная (от одного тела другому) тепловая энергия. Что такое температура?

32. Дать краткое, но точное определение температуры не так-то просто. Казалось бы, мы «знаем», что такое температура, и даже можем ее измерить с помощью термометра. Термометром может служить любое тело или система тел, для которых данному изменению температуры отвечает измеримое изменение длины, или объема, или электрического сопротивления, или других параметров. Рассмотрим в качестве примера ртутный термометр. Чтобы определить по нему

[*]) *Millikan R. A.* The Isolation of an Ion. A Precision Measurement of Its Charge and the Correction of Stokes's Law.— Phys. Rev., 1913, v. 32, p. 349.

[*]) *Friedrich W., Knipping P., Laue M.* Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen.— Ann. d. Phys., 1913, v. 41, s. 971.

[**]) Более полное обсуждение этих проблем читатель найдет в томе V этого курса: *Ландау Л., Лифшиц Е.* Статистическая физика.— 3-е изд.— М.: Наука, 1969.

температуру, необходимо заметить уровень ртути в капиллярной трубке постоянного сечения. Чтобы установить температурную шкалу, за 0° можно принять температуру тающего льда, а за 100° — температуру кипящей воды, промежуточные же значения температуры можно определить, разделив расстояние между этими реперными уровнями ртути в капилляре на 100 равных частей. Хотя таким способом мы действительно можем измерять температуру, однако он имеет существенный дефект (с точки зрения физической теории), ибо

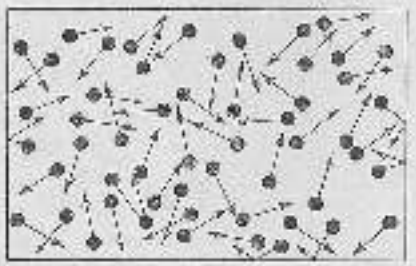


Рис. 33а. Эйлеченное уравнение $PV=(2/3)N_aE_k$. Поток в сосуд объемом V имеет N_a молекул. Предполагается, что все молекулы имеют скорость v и импульс mv. Число молекул, ударяющихся о единичной поверхности стенки в единицу времени, равно в этом случае $(1/6)(N_a/V)v$. Каждая молекула передает при ударе импульс $2mv$. Давление P равно произведению $2mv$, переданному за единицу времени единице поверхности стенки, на $(1/6)(N_a/V)v$, т. е. $P=2mv(1/6)(N_a/V)v=(1/3)(N_a/V)mv^2$. В действительности не все направления скорости равновероятны и истинное давление $P=(1/3)(N_a/V)mv^2$, что приводит к уравнению (33a), если учесть правильное распределение $1/3$, предполагая, что молекулы существуют в плоскостях определенных направлений, взаимно перпендикулярных и отрицательных и положительных координатных осей. Тогда только $1/6$ часть молекул движется в направлении к стенке сосуда

Наша шкала температуры зависит от свойств произвольно выбранного вещества, в данном случае ртути. Если бы в качестве термометрической жидкости мы выбрали спирт, то обнаружили бы, что, например, 30° по спиртовой шкале не совпадают с 30° по ртутной.

Для целей физики важно иметь температурную шкалу, которая не зависела бы от свойств любого данного вещества. В томе V этого курса, который посвящен физике тепла, подробно рассмотрено, как этого достичь. Полученная шкала называется *термодинамической шкалой* температуры. В этой шкале температура измеряется в кельвинах и обозначается К. Нуль термодинамической шкалы (0 К) представляет собой самую низкую из возможных температур. Она соответствует приблизительно −273 °С. Для удобства размер кельвина выбран так, чтобы данная разность температур в обеих этих шкалах выражалась одинаковым числом. Таким образом, по определению

$$\text{(температура в К)} = \text{(температура в °С)} + 273{,}15.$$

33. Постараемся понять, хотя бы качественно, что значит «температура» с точки зрения микрофизики. Основная идея заключается в следующем. По мере роста температуры увеличивается средняя энергия, связанная с хаотическим движением элементарных со-

ставных частей макроскопического тела. При температуре 0 К цепное хаотическое движение прекращается, и физически это значит, что достигнута наинизшая возможная температура. (Подчеркиваем слово *хаотическое*.)

В статистической физике вместо реального газа часто рассматривают в качестве хотя и идеальный газ. Мы предполагаем, что молекулы идеального газа движутся хаотически и практически не взаимодействуют друг с другом. Такая модель может быть хорошим описанием *разреженного* реального газа. Если наш газ состоит из атомов, мы говорим об идеальном одноатомном газе. Легко показать, что для 1 моль идеального газа справедливо уравнение

$$PV=(2/3)\,N_aE_k. \tag{33a}$$

где P — давление, V — объем сосуда, E_k — среднее значение кинетической энергии атома.

В рамках этой модели термодинамическая температура связана со средней кинетической энергией E_k простым соотношением

$$E_k=(3/2)\,kT.$$

Коэффициент пропорциональности k носит название *постоянной Больцмана*. Мы можем теперь записать (33a) в виде

$$PV=N_akT=RT, \tag{33b}$$

Постоянная $R=N_ak$ называется *универсальной газовой постоянной*. Этот закон, как показывает опыт, приближенно справедлив для всех достаточно разреженных газов. Любой реальный газ тем лучше удовлетворяет уравнению (33b), чем больше он разрежен. Мы можем воспользоваться этим экспериментальным фактом, чтобы построить газовый термометр, показывающий термодинамическую температуру.

34. Универсальная газовая постоянная равна

$$R=N_ak=8{,}314\cdot10^7\ \text{эрг/(моль·К)}=1{,}986\ \text{кал/(моль·К)}. \tag{34a}$$

Эту макроскопическую константу легко измерить, зная уравнение (33b).

Постоянная Больцмана $k=R/N_a$ представляет собой газовую постоянную, приходящуюся на одну молекулу. Не легко вычислить, если N_a известно:

$$k=1{,}38\cdot10^{-16}\ \text{эрг/К}. \tag{34b}$$

Постоянная Больцмана является множителем перехода от температуры к энергии. Простая связь $E_k=(3/2)\,kT$ не означает, однако, что температура и энергия — это одно и то же.

35. После этого краткого обзора основных констант можно рассмотреть проблему излучения абсолютно черного тела. Теория должна основываться на экспериментальных фактах. Поверхность любого тела, находящегося при высокой температуре, испускает излучение в огромном интервале частот или длин волн. Построив график, где по оси ординат отложено количество излучаемой энергии (за единицу

времени с единицы поверхности тела и в единичном интервале длин волн), а по оси абсцисс — длина волны. Мы получим кривую, которая уходит в нуль как для малых, так и для больших длин волн. Эта кривая имеет максимум при определенном значении длины волны λ_{max}. Величина λ_{max} зависит от температуры тела, но при данной температуре величина λ_{max} и полное количество испущенного излучения *приблизительно постоянны* для любой поверхности. Вместо того чтобы исследовать излучение *с поверхности*, можно изучать излучение *из тела* в некоторой замкнутой поверхности данного вещества, находящегося при фиксированной температуре. Иными словами, мы имеем дело с оболочкой, или ящиком, из подходящего материала, в который сделана небольшая щель (ее линейные размеры малы по сравнению с линейными размерами полости). Мы направляем наш прибор на щель и измеряем излучение, исходящее из полости. В такого рода измерениях получены следующие результаты.

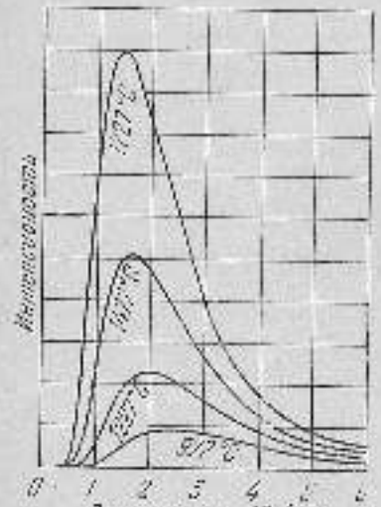


Рис. 35А. Зависимости интенсивности излучения черного тела от длины волны для четырех различных температур. Полная интенсивность излучения, пропорциональная четвертой степени термодинамической температуры, определяется площадью под кривыми. Заметьте, что с повышением температуры максимум кривых смещается в сторону меньших длин волн; точная зависимость положения максимума от температуры выражается законом Вина.

1) Зависимость интенсивности излучения из щели от длины волны изображается непрерывной кривой (рис. 35Д), обращающейся в нуль при малых и больших длинах волн и проходящей через максимум при значении λ_{max}, которое зависит от температуры стенок следующим образом:

$$\lambda_{max} T = C_1 = 0{,}2898 \text{ см} \cdot \text{К}. \qquad (35a)$$

Эта связь между λ_{max} и T называется *законом смещения Вина*.

2) Спектральное распределение испущенного излучения (т. е. форма кривой на рис. 35А) не зависит ни от формы полости, ни от материала стенок. Постоянная C_1 в законе Вина (35а) является, таким образом, универсальной постоянной, описывающей это замечательное *общее* свойство полостей.

3) Для заданной длины волны интенсивность излучения из щели всегда больше интенсивности излучения с поверхности данного материала, находящейся при температуре стенок полости. Порядок величины интенсивности в обоих случаях одинаков.

36. Поверхность, поглощающем все падающее на нее излучение, называется *черной поверхностью*. Для *внешнего* наблюдателя небольшая щель в стенках полости представляется почти черной поверхностью, особенно если внутренние стенки полости не полированы и зачернены. Объясняется это тем, что любое излучение, попавшее внутрь в полость, полностью поглощается при многократных отражениях внутри полости, даже если ее внутренние поверхности не будут полностью поглощающими.

Благодаря этому можно считать излучение, исходящее из щели в полости, *излучением черного тела*. Г. Кирхгоф, исходя из весьма общих термодинамических законов, показал, что для любой длины волны и данной температуры отношение энергии, испущенной данной поверхностью, к энергии, испущенной поверхностью черного

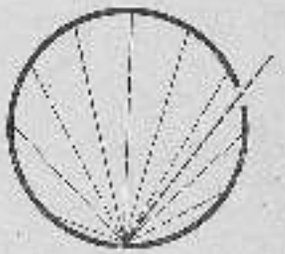


Рис. 35Б. Для внешнего наблюдателя небольшая щель в стенке полости с (частично) отражающими стенками ведет себя как поверхность почти абсолютно черного тела: луч света, попадающий в полость через щель, частично поглощается, а частично отражается стенкой. Только очень малая часть попавшего в полость извне излучения выйдет обратно через щель. Этим методом легко получить черное тело. Например, имея простой цилиндрический картонный коробок и покрыв его внутри сажей, рассматривая его снаружи, вы обнаружите, что он является очень хорошим образцом черного тела.

тела, равно коэффициенту поглощения материала стенок. Таким образом, поверхность черного тела является стандартным излучателем, и мы можем ограничить наше рассмотрение излучением абсолютно черного тела, т. е. излучением из щели в стенках полости.

37. В конце XIX века излучение черного тела было тщательно измерено, и одним из результатов этих измерений явился закон Вина [см. равенство (35в)]. Возникла теоретическая проблема получения закона излучения на основании некоторых общих принципов термодинамики. Тот факт, что щель в полости представляет собой источник излучения, понять нетрудно. Мы знаем, что вещество стенок состоит из заряженных частиц и их тепловое движение, естественно, приводит к излучению энергии в полость. Это излучение может также поглощаться стенками, и, если их температура фиксирована, в конце концов устанавливается некоторое равновесие между энергией в полости и стенками, иначе говоря, равновесная энергия, поглощенная стенками из полости, будет равна энергии, испущенной ими в полость. Таким образом, задача состоит в том, чтобы получить выражение для плотности энергии в полости как функции длины волны и температуры.

Обратим внимание на одну сторону этой проблемы, выражаемую равенством (35а). Чтобы понять его смысл, перепишем (35а) в виде

$$\frac{\lambda_{max}}{c} kT = X_1 = \frac{C_2 k}{c}; \qquad (37a)$$

здесь c — скорость света; k — постоянная Больцмана; X_1 — новая постоянная. Левая часть (37а) имеет размерность

$$(\text{время}) \times (\text{энергия}) = (\text{действие}),$$

и такова же размерность постоянной X_1. Как получить теоретиче-

ское выражение для X_1? Можно ли из известных нам констант образовать величину, имеющую размерность действия? Это, по-видимому, трудная задача, поскольку нам совершенно не ясно, каким образом константы n, M_H и e должны входить в выражение для X_1. Физическая ситуация кажется чрезвычайно ясной; излучение в полости находится в тепловом равновесии со стенками. Исходящее из полости излучение, однако, совершенно *не зависит от размеров и формы полости и от вещества стенок*. Какие при этом могут иметь значение такие константы, как n и e, имеющие отношение к свойствам стенки? Мы начинаем подозревать, что константа X_1 не может быть получена из известных констант. Более того, выражение (37a) невозможно понять в рамках классической физики. В 1900 г., до открытия, сделанного Планком, ситуация казалась весьма обескураживающей. Статистическая механика, основанная на законах классической физики, давала абсурдные выражения для закона излучения черного тела. Из этого закона следовало, например, что интенсивность излучения монотонно растет с частотой, так что полное излучение становилось бесконечно большим, а это означало, что при любой температуре тепловое равновесие между излучением и веществом невозможно!

38. 14 декабря 1900 г. на съезде Немецкого физического общества в Берлине Макс Планк сообщил, что ему удалось вывести закон излучения черного тела. Этот день может считаться днем рождения квантовой теории [*]). Для получения теоретического выражения зависимости интенсивности излучения от длины волны и температуры Планк должен был отказаться от классических представлений и сделать специальное предположение, смысл которого в следующем. Осциллятор, совершающий свободные колебания с частотой ν, может получать или отдавать энергию порциями, величина которых равна $E=h\nu$. В этом равенстве постоянная h представляет собой новую фундаментальную константу природы. Тогда Планк оказался в состоянии получить выражение для константы X_1:

$$\frac{\lambda_{max}}{c}kT-\frac{c_1 h}{c}=X_1=0{,}2014\,h. \qquad (38a)$$

Такова история появления постоянной Планка.

Сам Планк с большим трудом примирился с таким отказом от классических представлений и, совершив свое великое открытие, ряд лет посвятил тому, чтобы понять излучение черного тела на базе чисто классических представлений. Об этих безуспешных попытках он впоследствии говорил, что они не были для него бесполезными; повторные неудачи привели его к окончательному выводу, что в рамках классической физики излучение черного тела понять невозможно.

39. В полном виде закон излучения Планка выглядит так:

$$E(\lambda,\ T)=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(hc/\lambda kT\right)-1}, \qquad (39a)$$

[*]) Planck M. Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum.— Ann. d. Phys., 1901, v. 4, s. 553.

где $E(\lambda,\ T)$ — плотность энергии в полости на единичный интервал длин волн для данных значений длины волны λ и температуры T; k — постоянная Больцмана; c — скорость света.

Интенсивность излучения, выходящего из малой щели в стенках полости, пропорциональна плотности энергии внутри полости. Таким образом, выражение (39a) дает математическую зависимость, показанную графически на рис. 35А.

Чтобы найти положение максимума функции $E(\lambda, T)$ при данном T, возьмем производную E по λ, приравняем ее нулю и решим полученное уравнение относительно λ_{max}. Таким способом мы получаем уравнение (38a) или эквивалентное ему:

$$\lambda_{max}T-C_1=0{,}2014\,hc/k. \qquad (39b)$$

Величины λ_{max} и T могут быть измерены, скорость света c известна, и, таким образом, уравнение (39b) позволяет экспериментально определить отношение hc/k. Кроме того, непосредственное сравнение измеренного распределения $E(\lambda, T)$ с его теоретическим значением (39a) может быть определена постоянная h. После этого можно вычислить значение постоянной Больцмана k, воспользовавшись соотношением $N_2=R/k$, величину N_2. Планк получил этим методом значение величины k, которое оказалось всего на 2,5% меньше лучшего современного значения.

40. Подробная история открытия закона излучения Планка весьма поучительна. Планк догадался о правильной зависимости $E(\lambda, T)$ от λ и T еще до того, как ему удалось вывести формулу (39a) на основании «микроскопического» рассмотрения. Эта догадка была основана частью на точных измерениях Рубенса и Курлбаума, частью на некоторых общих теоретических соображениях. [Выражение (39a) слишком сложно, чтобы его можно было получить эмпирически.] Свои предварительные результаты Планк доложил Немецкому физическому обществу 19 октября 1900 г. В этой версии в формуле были две константы, не имевшие физической интерпретации. В наших современных обозначениях это константы $2\pi hc^2$ и hc/k. Полученная формула была проверена на опыте с измерениями Рубенса, а также Рунмера и Пренгсгейма. Согласие теории и опыта было замечательно точным [*]), и перед Планком встала необходимость дать теоретическое объяснение этой формулы. За восемь недель напряженного труда он достиг успеха.

Фотоэлектрический эффект

41. В конце прошлого века было экспериментально обнаружено, что при падении света из видимой области или из ультрафиолетовой части спектра на поверхность металла из последней испускаются электроны. Сам по себе этот эффект не удивителен, поскольку известно, что свет представляет собой электромагнитные колебания. Та-

[*]) О дальнейшей проверке закона Планка см. в работе: *Rubens H., Michel G.* Prüfung der Planckschen Strahlungsformel.— Phys. Zs., 1921, v. 22, p. 569.

ким образом, мы вправе ожидать, что электрическое поле световой волны вызывает силу, действующую на электроны металла. При этом некоторые из электронов могут покинуть поверхность. Неожиданно здесь то, что кинетическая энергия выброшенных из поверхности электронов, как оказалось, не зависит от *интенсивности* света, а зависит только от его *частоты*, причем очень простым образом: кинетическая энергия электронов линейно растет с частотой света. Увеличение интенсивности света вызывает лишь возрастание числа испущенных в единицу времени электронов, но не влияет на их энергию. Это очень трудно понять с классической точки зрения, согласно которой увеличение интенсивности означает возрастание амплитуды электромагнитной волны и, следовательно, ускорение электронов до бо́льших скоростей.

Рассмотренные факты были установлены Ленардом и другими физиками еще до 1905 г. Особенно *точные* измерения связи между частотой света и энергией испущенных электронов были выполнены Милликеном в 1916 г.

42. В 1905 г. Эйнштейну удалось объяснить явление фотоэффекта *). Он предположил, что энергия в пучке монохроматического света состоит из порций, величина которых равна $h\nu$, где ν — частота. Эти *кванты* энергии могут быть полностью поглощены электроном. Иными словами, электрон, еще находящийся в металле, поглотив такую порцию энергии, приобретает энергию $E=h\nu$. Предположим, что для вырывания электрона из металла нужно затратить работу W. Тогда кинетическая энергия такого электрона будет равна $E_k=E-W$, или

$$E_k=h\nu-W, \qquad (42a)$$

Величина W, называемая *работой выхода* данного вещества, представляет собой константу, не зависящую от частоты ν.

Выражение (42а) — это знаменитое эйнштейновское уравнение фотоэффекта. Энергия электрона линейно растет с частотой света и не зависит от его интенсивности. Разумеется, число испущенных электронов должно быть пропорционально числу световых квантов, т. е. интенсивности падающего света. Таким образом, Эйнштейну удалось объяснить известные в то время качественные закономерности фотоэффекта.

43. Эйнштейн пришел к этой идее, заметив, что некоторые особенности планковского закона излучения черного тела легко объяснить. Для этого следует предположить, что электромагнитное излучение в полости имеет корпускулярный характер, т. е. состоит из квантов, энергия которых равна $h\nu$. Следует заметить, что в то время истинный смысл планковских идей для многих был сокрыт и новая точка зрения, с которой Эйнштейн рассмотрел излучение черного тела, была большим шагом вперед. Эйнштейн сумел связать свое понимание явления излучения черного тела с *новой* физической ситуацией и глубоко проникнуть в существо фотоэффекта.

*) *Einstein A.* Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. — Ann. d. Phys., 1905, v. 17, p. 132.

44. Уравнение (42а) является ясным предсказанием, которое дает теория, и его можно с большой точностью проверить на опыте. Более того, если идеи Эйнштейна верны, то это уравнение открывает возможность нового измерения постоянной Планка. Как мы упоминали выше, эти крайне важные проблемы были исследованы Милликеном в ряде прекрасных и тщательно выполненных опытов, которые полностью подтвердили уравнение Эйнштейна (42а).

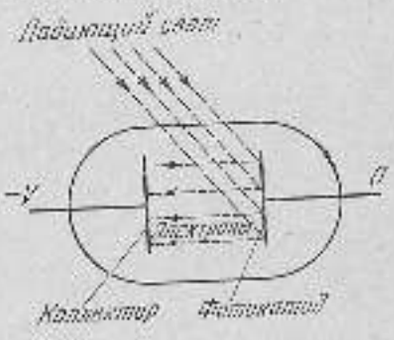


Рис. 44А. Схема, иллюстрирующая принцип опыта Милликена. Электроны, испущенные фотокатодом, имеют энергию $h\nu-W$, где W — работа выхода, характеризующая данное вещество катода. Тем электронам из коллектор достигнет, если задерживающий потенциал $V>h\nu-W/e$. Измерение критического значения задерживающего потенциала $V_0=h\nu-W/e$ для различных значений ν дает отношение h/e (см. рис. 44В)

Метод Милликена схематически показан на рис. 44А. Монохроматический свет падает на поверхность металла (обычно в этих опытах использовали щелочные металлы) и вырывает из нее фотоэлектроны. Собирающий электрод (коллектор) может находиться при определенном потенциале $-V$ по отношению к фотокатоду, в непосредственной близости от которого он расположен. В опыте измеряется ток фотоэлектронов. Допустим, что все электроны покидают поверхность металла, имея одну и ту же кинетическую энергию E_k, определенную уравнением (42а). Тогда ясно, что ни один электрон не сможет достичь коллектора, если $eV>E_k$. Если измерять ток, меняя задерживающий потенциал V, то при некотором значении $V=V_0$ ток прекратится. Значение V_0 равно

$$V_0=\frac{h}{e}\nu-\frac{W}{e}. \qquad (44a)$$

График, изображающий зависимость задерживающего потенциала от частоты ν, будет прямой линией, как это видно из рис. 44В, заимствованного из статьи Милликена. По наклону этой прямой находится отношение h/e, а точка пересечения с осью V_0 дает величину W/e, характеризующую работу выхода для металла.

Этот опыт ясен и прост по своей идее, но для получения точных и повторяющихся результатов потребовалось большое искусство и многочисленные меры предосторожности.

45. Оценим величины, входящие в уравнение (44а). Постоянная Планка $h=6{,}625\cdot10^{-27}$ эрг·с$=6{,}626\cdot10^{-34}$ Дж·с, заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл и $h/e=4{,}14\cdot10^{-15}$ В·с. Длины волн видимого света лежат в пределах 4000—7000 Å, что отвечает интервалу частот $(4{,}3—7{,}5)\cdot10^{14}$ Гц. Синему свету отвечает частота $\nu\approx7\cdot10^{14}$ Гц, и в этом случае мы получаем $(h/e)\,\nu\approx2{,}8$ В. В видимой области или

в ближнем ультрафиолете ядерачивается потенциал оказывается порядка 1 В, так как типичные значения работы выхода W имеют такой же порядок величины. Они особенно малы для щелочных металлов. Именно поэтому у фотоэлементов, предназначенных для работы с видимым светом, фотокатод сделан из подобных материалов. Такой элемент не реагирует на свет, для которого $W>h\nu$.

46. Замечательные свойства фотоэффекта были в общих чертах известны еще до 1905 г., но понадобился гений Эйнштейна, чтобы

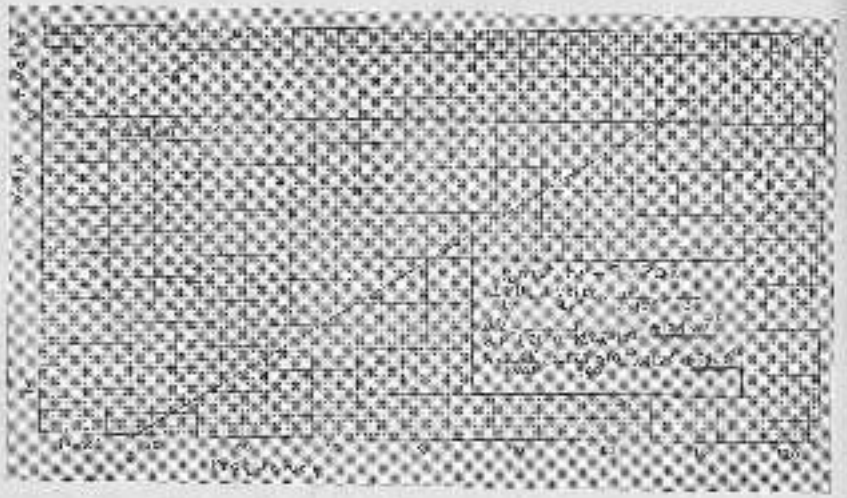


Рис. 44 б. График из работы Милликена [Millikan R. A. — Phys. Rev., 1916, v. 7, p. 355], показывающий линейную зависимость кинетической энергии вылетающих электронов от частоты света для фотоэлектрической поверхности натрия. [Кинетическая энергия измерялась с помощью задерживающего потенциала, который ...] Как видно из этого графика, ...

извлечь из известных качественных закономерностей ясные физические концепции.

Ключом ко всей проблеме является странное равенство

$$E/\nu=X_2, \tag{46а}$$

где E — энергия, которая может быть передана электрону пучком монохроматического света с частотой ν; X_2 — постоянная, не зависящая ни от интенсивности света, ни от его частоты, ни от свойств вещества, содержащего электроны. (В 1905 г. тот факт, что кинетическая энергия электрона меньше E, не выглядел бы более таинственным, нежели в наше время; работа выхода W просто имеет смысл энергии связи электрона в веществе.) В рамках классической физики невозможно ни понять формулу (46а), ни выразить постоянную X_2 через основные физические константы; эта постоянная X_2 имеет размерность действия, величину с такой размерностью можно образовать из констант e и c, а именно: e^2/c (см. § 30). Теперь известно, что $X_2=h$, следовательно, величина e^2/c отличается от h приблизительно на три порядка. Таким образом, соображения размерности не дают обнадеживающего результата, не говоря о том, что невозможно придумать классический механизм, который дал бы формулу (46а). Это никому не удалось сделать, и законы фотоэффекта являются сильнейшим доводом в поддержку идеи Эйнштейна о *квантовой* энергии [*].

В дальнейшем нам станет ясно, что в формуле (46а) выражен фундаментальный принцип квантовой физики, а именно имеющий *универсальный* характер связь между энергией и частотой:

$$E=h\nu.$$

Эта связь полностью чужда классической физике, и классическая константа $X_2(=h)$ в (46а) есть проявление непостигнутых в то время тайн природы.

Проблема стабильности и размера атомов

47. Обратимся теперь к третьей проблеме, а именно к вопросам о стабильности и размерах атомов. Остановимся в особенности на последнем вопросе. Мы можем определить «размер» атома как расстояние между двумя соседними атомами твердого тела или жидкости. Из опыта известно, что эта величина имеет порядок 1 Å $=10^{-8}$ см. Очевидно, что порядок этой величины определяется постоянной Авогадро N_0. Действительно, масса 1 см^3 жидкости или твердого тела имеет порядок 1 г. Весьма правдоподобно можно считать, что в этом объеме содержится N_0 атомов, и тогда линейные размеры атомов имеют порядок $(1/N_0)^{1/3}$ см$\approx$1 Å. Мы отмечали уже, что *точные* измерения межатомных расстояний в кристаллах дают значение постоянной Авогадро.

Вопрос теперь в том, можно ли в рамках классической физики объяснить размеры атомов, иными словами, можно ли вычислить радиус атома, опираясь на основные константы классической физики.

48. В 1910 г. Гейгер и Марсден выполнили опыт по рассеянию α-частиц. Анализ этих опытов привел Резерфорда [**]) к выводу, что атом состоит из очень малого центрального ядра, окруженного электронами, и что бо́льшая часть массы атома заключена в его ядре. Из этих опытов следовало также, что размеры ядра и электронов очень малы по сравнению с размером всего атома, они меньше 10^{-11} см. После работ по рассеянию α-частиц ядрами естественно было представлять себе атом как нечто подобное Солнечной системе, где ядро играет роль Солнца, а электроны — роль планет. Эти частицы движутся под действием электростатических сил, и большая часть атома представляет собой «пустое пространство». Размер атома определяется радиусом орбит внешних электронов.

[*]) Заметим, что в этой работе Эйнштейн не использовал термина «фотон» для кванта электромагнитной энергии. Это название появилось много позже.

[**]) *Rutherford E.* The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom. — Phil. Mag., 1911, v. 21, p. 669; см. также том I этого курса: *Китайгородский А. И.* Физика для всех. Кн. 1. Мир молекул. — 3-е изд. — М.: Наука, 1983.

Пригодится временно такую модель атома и допустим также, что скорость частиц в атоме столь мала, что позволяет ограничиться нерелятивистской механикой. Теперь мы должны ответить на следующий вопрос: чем определяется размер орбиты одного электрона? Заметим, что в нашей модели нет места для скорости света. Но в этом случае из наших основных классических констант e, m и M_N нам не удастся получить величину с физической размерностью длины, и возникает подозрение, что наша задача не может быть решена в рамках классической физики. Из дальнейшего это станет яснее.

49. Рассмотрим атом, состоящий из Z электронов (заряд каждого электрона равен $-e$) и ядра (с зарядом $+Ze$). Мы можем считать, что центр масс всей системы этих частиц покоится. Такое предположение не уменьшает общности наших рассуждений. Каждая частица движется по определенной орбите, описываемой функцией $\boldsymbol{r}_k(t)$. Эта функция задает радиус-вектор частицы в момент t (за начало координат примем центр масс системы).

Совокупность функций $\boldsymbol{r}_k(t)$ ($k=1, 2, \ldots, Z+1$) образует *одно* решение уравнений движения системы. Из этого единственного решения можно построить целое семейство *новых* решений простым *изменением масштаба*. Пусть q — любая не равная нулю постоянная; тогда функция

$$\boldsymbol{r}_k'(t) = q^{\gamma}\boldsymbol{r}_k(tq^{\delta}) \tag{49a}$$

тоже удовлетворяет уравнениям движения. Другими словами, функция $\boldsymbol{r}_k'(t)$ описывает траекторию k-й частицы в новом состоянии движения системы. Это легко показать следующим образом. Сила F_{ij}, с которой j-я частица действует на i-ю, равна

$$F_{ij} = Q_iQ_j\frac{r_i - r_j}{|r_i - r_j|^{\alpha+1}}. \tag{49b}$$

Здесь Q_i и Q_j — заряды частиц i и j. Новое решение получается из старого умножением всех расстояний на множитель q^{β}. Это значит, что силы в новом состоянии движения получаются умножением сил в старом состоянии движения на множитель $q^{-\alpha}$, и, следовательно, в том же масштабе должно измениться и ускорение. Поскольку линейные масштабы умножаются на q^{β}, все скорости умножаются на $q^{\gamma-\delta}$, а все времена — на q^{δ}. Именно это и выражает уравнение (49a), которое определяет новое решение.

Заметим теперь, что все моменты импульса умножаются на q, а потенциальная и кинетическая энергии, а следовательно и полная энергия,— на $q^{-\delta}$.

Тот факт, что описанным изменением масштаба можно из данного решения получить новое, есть обобщение третьего закона Кеплера. В приложении к частному случаю одиночного электрона, движущегося вокруг неподвижного ядра, из наших рассуждений следует, что для двух эллиптических орбит с одним и тем же эксцентриситетом отношение квадратов периодов пропорционально отношению кубов полуосей.

Поскольку величине q можно придать любое значение, то мы имеем семейство решений, и нет оснований отдать предпочтение какому-либо из них. Это значит, что мы не располагаем принципом, который позволил бы нам выбрать «размер» атома. Остается допустить, что осуществленный природой выбор размера «случайный», но в это трудно поверить. Каким образом такой «случайный» выбор всегда приводит к тому, что атомы данного сорта имеют одинаковые размеры? Почему, например, для атомов водорода не осуществляется непрерывное распределение возможных размеров?

50. Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо понять, почему мы решили рассматривать нашу проблему в нерелятивистском приближении. Заметим, что если в числе классических констант включить и скорость света, то из них можно образовать выражение, имеющее размерность длины:

$$e^2/mc^2 = 2{,}8\cdot10^{-13}\ \text{см}. \tag{50a}$$

Эта величина носит название «классического радиуса электрона», и мы говорили о ней в п. 18. Итак, если релятивизм в атоме действительно играет существенную роль, т. е. если электроны движутся со скоростью, близкой к скорости света, то размер атома должен быть порядка e^2/mc^2. В действительности эта величина на четыре порядка (10^4) меньше размеров атома, и поэтому кажется, что релятивистский подход не может дать нужного результата. Конечно, наши простые масштабные соображения из п. 49 не могут быть непосредственно перенесены на релятивистский случай. Но все же очевидно, что у нас нет принципа, который помог бы понять, почему реализуются лишь определенные орбиты, соответствующие наблюдаемым размерам атома.

51. Мы можем назвать нашу проблему «тайной потерянной константы». Предположим, что эта тайна связана с рассмотренной выше и что в описании строения атома должна играть какую-то роль постоянная Планка. Она имеет размерность момента импульса, и мы можем сделать специальное предположение, что в природе осуществляются лишь такие решения уравнений движения, для которых полный момент импульса атома является целым кратным $\hbar$. Приняв этот принцип, мы освобождаемся от масштабных соображений, заключенных в формуле (49a). Теперь момент импульса определен и его нельзя умножать на коэффициент q. Это означает, что у нас имеются отдельные решения, и, таким образом, мы обладаем принципом, который позволяет определить размеры атома.

В 1913 г. Нильс Бор предложил теорию атома водорода, основанную на следующих соображениях *). В своей простейшей форме теория считает, что движение электрона в атоме водорода происходит по круговой орбите радиуса a_0 вокруг протона. Эта орбита определяется уравнением движения

$$ma_0\omega^2 = e^2/a_0^2 \tag{51a}$$

*) Bohr N. On the Constitution of Atoms and Molecules.— Phil. Mag., 1913, v. 26, p. 1.

и *квантовые условия Бора*

$$J = mvr_0 = k\frac{h}{2\pi}, \qquad (61b)$$

Здесь v — скорость электрона, а J — его момент импульса. Квантовое условие означает, что момент импульса должен быть равен $k\frac{h}{2\pi}$. Устранив v из написанных уравнений, получаем

$$r_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 me^2} k^2 = 5{,}29 \cdot 10^{-9} k^2 \text{ см}, \qquad (61c)$$

это имеет верный порядок величины. Следует заметить, что размер атома имеет непосредственное отношение к вопросу о его энергии связи. Если расстояние от электрона до ядра известно, то можно оценить работу, необходимую для разделения атома на составные части.

32. Читатель, вероятно, знает, что теория атома Бора привела продвинуться гораздо дальше. Она дала количественное объяснение спектра атома водорода, и это было большим успехом новых идей. Квантовые условия этой теории совершенно чужды классической физике. Кроме того, Бор предположил, что электрон, находясь в основном состоянии атома водорода, не излучает электромагнитной энергии. В противном случае, согласно классической электромагнитной теории, электрон должен был бы падать на ядро, двигаясь по спирали, и такое падение произошло бы за очень малое время (порядка 10^{-8} с).

Эту планетарную теорию атома нельзя считать серьезной теорией. Она просто ошибка. Тот факт, что она приводит к очень хорошим результатам в случае атома водорода, к счастью (или к несчастью), случаен. Этот успех явился для Бора и других теоретиков мощным толчком к развитию квантовой теории атома, но сам Бор никогда не обманывался, он не считал, что атом подобен планетной системе. Он рассматривал свою теорию как промежуточный этап в поисках более верной теории. И такая теория теперь существует.

33. Три рассмотренные проблемы — это три аспекта существования постоянной Планка. Последняя проблема с особенной ясностью показывает, что появление этой постоянной в ряду известных фундаментальных констант должно иметь далеко идущие последствия. Теперь можно надеяться, что мы способны понять не только такие проблемы, как размеры атома и его энергия связи, но и свойства молекул, и нам будет открыт путь к количественной атомной теории вещества в целом.

Следует подчеркнуть, что во всех трех проблемах *существенным* было то, что для разрешения трудностей необходимо было отказаться от классических законов макроскопической физики. Таким образом, *рассмотренные нами проблемы приводят к большому, можно сказать открытию новой концепции, — к открытию новых законов природы.*

После этих открытий развитие физики пошло быстрыми темпами. Стало ясно, что найден ключ к объяснению многих явлений микрофизики. Кульминацией теоретических исканий было появление двух равноправных математических теорий квантовой физики: *матричной механики* (созданной Нейманом Гейзенбергом в 1925 г.) и

волновой механики (созданной Эрвином Шредингером в 1926 г.). Обе эти теории оказались полностью эквивалентными и представляют собой лишь различные формы теории, которую мы теперь называем *квантовой механикой* — общепринятой в настоящее время фундаментальной теорией микрофизики.

34. Вероятно, у читателя возникли тревожные вопросы: можем ли мы считать, что квантовая механика есть окончательная теория? Что же тогда остается открыть в физике?

Автор рад еще раз заверить читателя, что его опасения напрасны. Мы никогда не можем быть уверены в том, что данная теория представляет собой окончательное решение проблемы. И мы не знаем, что еще осталось открыть. По-видимому, весьма многое, ибо мы все еще далеки от того, чтобы иметь единую теорию всех явлений природы. Мы многое узнали, но еще больше осталось познать. В этом одна из причин того интереса, который вызывает физика. Так что читатель может не беспокоиться, что родился слишком поздно, чтобы совершить открытия в физике.

Попытаемся ответить более точно на эти вопросы. Общие принципы квантовой механики «истинны» в том смысле, что нет экспериментальных данных, которые бы им противоречили, и существует огромное число успешных предсказаний, основанных на этих принципах.

Такая ситуация особенно характерна для квантовой электродинамики, которая является теоретической основой понимания свойств атомов, молекул, электромагнитного излучения и вещества в целом, по крайней мере на Земле. Мы уже говорили, что в классической физике никогда не было создано столь общей теории. Теперь такая теория имеется, и весьма плодотворная. Это означает, в частности, что мы имеем основные принципы, в рамках которых можно объяснить, например, такие явления, как сверхпроводимость и сверхтекучесть. Однако до сих пор не удалось объяснить эти два явления количественно на базе основных принципов. Знание основных принципов — это одно дело, а объяснение сложных явлений, в которых участвует много частиц,— совсем другое. Мы верим в наши основные принципы потому, что, опираясь на них, можно описать поведение простых систем, состоящих из сравнительно небольшого числа частиц (например, отдельные атомы или простые молекулы). Существуют, однако, математические трудности, и по мере того, как увеличивается сложность физической ситуации, эти трудности быстро растут, и вместо количественных предсказаний мы оказываемся в состоянии лишь достичь общего качественного понимания явления. Мы не ошибемся, сказав, что в физике всегда будут существовать трудности такого рода и для их преодоления всегда будут нужны свежие идеи. Возможно, что квантовая электродинамика является почти «закрытой» проблемой с фундаментальной точки зрения, но она совершенно не завершена в том смысле, что до сих пор еще не получены все возможные следствия.

35. С точки зрения физики начала века «истинными и неделимыми» атомы являлись элементарными частицами мира. Сегодня атомы по-

терпя это исключительное положение; их свойства объяснила квантовая электродинамика с помощью более элементарных объектов. То же самое можно сказать и о ядрах. Невозможно объяснить свойства ядер на основании некоторых простых принципов, но тем не менее мы твердо уверены, что ядра — сложные системы, образованные из протонов и нейтронов.

После того как стал ясен сложный характер атомов и ядер, число частиц, которые можно считать элементарными, резко уменьшилось. Но затем их числа начало неуклонно возрастать, и сейчас их не меньше, чем было в начале века. Место атомов заняли электроны, мюоны, нейтрино, протоны, нейтроны, гипероны, пионы, каоны и многие другие частицы. Мы уже объяснили, в каком смысле эти частицы являются элементарными.

Сейчас еще не существует фундаментальной теории элементарных частиц, и мы не знаем, какую форму примет будущая теория. Эта область широко открыта для новых идей.

Задачи

1. *а)* Рассмотрите и кратко опишите идеи и опыты, на основании которых можно определить атомные и молекулярные массы.

б) В 1815 г. В. Праут предположил, что все элементы «построены» из водорода, который является, таким образом, первичной материей, из которой сделано все в мире. Что привело его к этой гипотезе и почему в XIX веке она была отвергнута?

2. *Многие атомы* (точнее, *ядра* атомов) испытывают спонтанный распад, при котором обычно происходит испускание электрона или α-частицы (ядра атома гелия). *В этом заключается явление радиоактивности*, открытое Беккерелем в 1896 г. Скорость распада определяется статистическим законом, который предсказывает, что из N_0 атомов, существовавших в начальный момент времени ($t=0$), к моменту времени t останется $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$ атомов. Постоянная λ, определяющая скорость распада, является характеристикой данного ядра. Время T, по истечении которого остается половина первоначально имевшихся ядер, называется периодом полураспада. Легко показать, что $T=\lambda^{-1}\ln 2$.

а) Покажите, что приведенный выше закон радиоактивного распада можно вывести из предположения, что каждое ядро распадается независимо от остальных, а вероятность того, что атом, выживший до момента времени t, распадется в интервале времени $(t, t+dt)$, не зависит от t.

б) При распаде ядра радия испускается α-частица. При ее падении на экран из сернистого цинка возникает световая вспышка (*сцинтилляция*), что позволяет непосредственно подсчитать число α-частиц, испущенных 1 г радия за 1 с. Это число, впервые определенное Гейгером и Резерфордом, равно $3.72\cdot10^{10}$. Атомная масса радия равна 226. Воспользовавшись этими цифрами, определите период полураспада радия. (Измерения с радиоактивными веществами были использованы для независимого определения постоянной Авогадро. В принципе задача обратная — зная постоянную Авогадро, мы определяем период полураспада радия.)

3. Движущиеся элементы ручных часов весьма «малы». Сделав разумные оценки физических параметров для «типичных» ручных часов, основанные на основании общего критерия, данного в п. 20, что квантовая механика не имеет отношения к принципу изготовления часов.

4. Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из конденсатора емкостью 100 пФ и индуктивности 0,1 мГн. Допустим, что в цепи существуют колебания и максимальная разность потенциалов на емкости равна 1 кВ. Найдите «естественную» физическую переменную с размерностью действия и сравните ее значение с постоянной Планка h.

5. Антенна радиостанции излучает радиоволны на частоте 1 МГц при мощности 1 кВт. Чему равно число фотонов, испускаемых за 1 с? Это число объясняет, почему квантовая природа электромагнитного излучения антенны непосредственно не обнаруживается. Данная задача, а также две предыдущие (3 и 4) кажутся целыми, если огрубить соответствующее число фотонов. В дальнейшем мы не будем пытаться применять квантовую механику к очевидно макроскопическим задачам. Все же полезно хоть один раз решить подобную задачу и слушать несоизмеримость макро- и микромасштабов.

6. Утверждение, что электромагнитное излучение распространяется пакетами с энергией $h\nu$, где ν — частота, не находится в противоречии со «здравым смыслом» (т. е. с тем, чег. мы обладаем на основании опыта, приобретенного в макроскопических явлениях). Чтобы показать это, вычислите число фотонов, испущенных за 1 с источником с силой света 1 кд. Допустим для простоты, что испускается желтый свет с длиной волны 5890 Å. Мощность источника с силой света 1 кд близка к 0,01 Вт.

Допустим, что источник света контролен, а наблюдатель удален на расстояние 100 м. Вычислите число фотонов, попадающих в глаз наблюдателя за 1 с, если диаметр входного зрачка глаза равен 4 мм. Число фотонов столь велико, что мы не заметим никакого «мерцания», даже если энергия светового потока, падающего на глаз, мала в макроскопическом смысле.

7. Мы знаем, что звезды «мерцают». Чтобы выяснить, может ли это мерцание быть проявлением квантовой природы света, оцените число фотонов видимого света, попадающих в глаз наблюдателя, когда он смотрит на звезду первой величины (в видимом свете). Поток энергии, создаваемый такой звездой на поверхности Земли, близок к 10^{-6} эрг/см^2. Один фотон при длине волны максимальной «видимости», равной 5560 Å, соответствует мощности 1,6 мВт. Звезды первой величины кажутся весьма яркими, ясно видимыми невооруженным глазом, хотя они и не принадлежат к очень ярким звездам. Примером является звезда Альдебаран.

Предположим, что за 1 с в глаз наблюдателя попадает N фотонов. Какова средняя флуктуация этой величины? Определите значение N и подумайте, как объяснить мерцание звезды. Почему мерцание должно слабее или вовсе отсутствует?

8. *а)* Обратимся к закону смещения Вина. Допустим, что излучатель является абсолютно черным телом при температуре 2000 К. Вычислите (в сантиметрах) длину волны λ_{max}, определяемую законом Вина. Находится ли она в видимой части спектра?

б) Получите закон смещения Вина из формулы Планка (39в).

в) Покажите на основании закона излучения Планка (39а), что полная мощность излучения абсолютно черного тела (просуммированная по всем частотам) пропорциональна четвертой степени температуры T.

9. Делая обзор истории открытия закона Планка, мы отмечали, что, по Планку, термический осциллятор, колеблющийся с частотой ν, может приобретать энергию лишь порциями, равными $h\nu$. Интересно увидеть связь между гипотезой Планка и теорией Бора, выдвинутой им для объяснения строения атома водорода, во многом общий характер.

Рассмотрим гармонический осциллятор, состоящий из массы m и упругой жесткости K, который ведет себя в соответствии с гипотезой Планка. Это значит, что его энергия может меняться лишь на целые кратные величины $h\nu$, где ν — частота осциллятора. Введем сокращенную запись

$$J=m\dot{q}_0\bar{r}_0,$$

где $\dot{q}_0$ — максимальное смещение точечной массы осциллятора, а $\bar{r}_0$ — ее максимальный импульс.

а) Напишите квантовое условие Бора для этого осциллятора.

б) Выразите полную энергию осциллятора через его текущую координату $q(t)$ и импульс $p(t)$ и постройте график зависимости p от q при заданной энергии.

в) Что каким условием на квантовое условие Бора следует гипотеза Планка? Это условие называется «правилом отбора» для гармонического осциллятора.

Дополнительная литература *)

Чтобы получить представление об эксперименте в области элементарных частиц, рекомендуем книгу:

Гарасимов Дж. П., Лэнгсдорф Дж. Экспериментальная ядерная физика.— М.: ОНТИ, 1956.

Для ознакомления с историей современной физики рекомендуем следующие книги:

Гамов Дж. Великие эксперименты в современной физике.— М.: Мир, 1974.

Jammer M. The Conceptual Development of Quantum Mechanics.— N. Y., 1966. Эта книга очень интересна, но требует знания квантовой механики. В ней имеются ценные библиографические ссылки на оригинальные работы.

Whittaker E. A History of the Theories of Aether and Electricity.— N. Y., 1960. Второй том посвящен квантовой механике.

Планк М. Единство физической картины мира: Сборник статей.— М.: Наука, 1966.

Эйнштейн А., Инфельд Л. Эволюция физики.— М.: Наука, 1965.

Борн М. Атомная физика.— М.: Мир, 1965.

В тексте книги ссылки на многие оригинальные работы, знакомство с которыми интересно, поучительно и не требует специальных знаний. Они рассеяны по старым журналам, на которые указать не можем, так такие работы избегаем.

Great Experiments in Physics / Ed. by M. H. Shamos.— N. Y., 1962. Работы иногда сокращены и снабжены комментариями редактора.

The World of Atom/Ed. by H. A. Boorse and L. Motz. Vol. I and II, N. Y., 1966. Это очень полное собрание работ. Приложения редактора дают исторический фон и библиографические указания.

Многие экспериментальные и теоретические работы, рассмотренные в этом томе, удостоены Нобелевской премии. Популярное описание лауреатских лекций, прочитанное в Стокгольме, представляет большой интерес. Они собраны в книге:

Nobelstiftelsen K. H. de V. Nobel Prize Winners in Physics 1901—1950.— N. Y., 1966.

*) Ко всем главам книги можно дополнительного материала можно найти в сборниках «Над чем думают физики» (М.: Наука, 1963—1977, вып. 1—11). В этих сборниках помещены переводы статей из журнала «Scientific American». Рекомендуем также популярные статьи из журнала «Успехи физических наук». Постепенно читатель сможет перейти к чтению более специальных обзоров из этого журнала и оригинальных экспериментальных работ из физических журналов.— *Прим. ред.*

ГЛАВА 2

ПОРЯДКИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ

Единицы и физические константы

1. Одна из задач этой главы — дать последовательное представление о численных значениях наиболее важных физических величин квантовой физики. Многие из них, например заряд электрона, его масса, постоянная Планка и т. п., выраженные в знакомых нам макроскопических единицах, настолько малы, что имеют весьма неудобный и необычный вид. Нелегко ясно представить себе значение того факта, что постоянная Планка $h=6{,}626\cdot10^{-27}$ эрг·с. Поэтому мы подробно рассмотрим как происхождение этих физических величин, так и реальный смысл их численных значений *).

Физические величины, с которыми мы имеем дело в данной области физики, удобно измерять в некоторой естественной системе единиц, характерной для этой области.

Выраженные в естественных единицах физические величины имеют разумные окончательные значения. Они могут лежать, например, в пределах от 10^{-3} до 10^{3}, но, используя естественные единицы, мы вряд ли будем иметь дело с числами, подобными 10^{-27}. Знакомые нам макроскопические единицы (например, в системе СИ) предназначены для обычных физических явлений и основаны на легко доступных макроскопических стандартах. Такие единицы, как метр, килограмм и секунда, связаны с повседневным обиходом человека. Так называемая «научная», или система СГС, удобна для несколько меньших объектов. Нам следует освободиться от этих произвольных единиц и ввести единицы, которые будут естественными для различных областей квантовой физики.

2. Начнем с нескольких физических констант, помещенных в табл. 2А.

Эти константы часто называют «фундаментальными константами». В числах, приведенных в табл. 2А, мы не заключаем, однако, ничего «фундаментального». Это объясняется тем, что выбранные нами единицы системы произвольны и случайны. Но, поскольку мы их однажды выбрали, ничего не остается, как выразить через них основные физические константы, и это сделано в таблице.

Мы приводим также возможные погрешности измерения этих констант, чтобы показать, с какой точностью сейчас известны эти числа.

*) Более подробно эти вопросы будут рассмотрены позже. Некоторые рассуждения данной главы могут казаться преждевременно детальными. Читатели придется несколько раз на протяжении курса возвратиться к гл. 2.

В этой книге читатель, пожалуй, ни разу не столкнется с необходимостью производить вычисления, выполняемые с меньшей погрешностью, чем погрешность счетной линейки (около 0,2% при

Таблица 2А. Некоторые физические константы

Постоянная Планка

$$h = 2\pi\hbar = (6{,}62559 \pm 0{,}00015)\cdot 10^{-27}\ \text{эрг}\cdot\text{с}$$
$$\hbar = h/2\pi = (1{,}05419 \pm 0{,}00008)\cdot 10^{-27}\ \text{эрг}\cdot\text{с}$$

Скорость света

$$c = (2{,}997925 \pm 0{,}000001)\cdot 10^{10}\ \text{см/с}$$

Заряд электрона

$$e = (4{,}80298 \pm 0{,}00010)\cdot 10^{-10}\ \text{СГСЭ}_q = (1{,}60210 \pm 0{,}00002)\cdot 10^{-19}\ \text{Кл}$$

Масса электрона

$$m = (9{,}10908 \pm 0{,}00013)\cdot 10^{-28}\ \text{г}$$

Масса протона

$$M_p = (1{,}67252 \pm 0{,}00003)\cdot 10^{-24}\ \text{г}$$

Постоянная Авогадро

$$N_L = (6{,}02252 \pm 0{,}00009)\cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}$$

Постоянная Больцмана

$$k = (1{,}38054 \pm 0{,}00036)\cdot 10^{-16}\ \text{эрг/К}$$

умножении и делении). Читатель должен уметь делать также элементарные расчеты, точность которых лежит в пределах от 10% до простой оценки порядка величины.

В конце книги в приложении дана подробная таблица физических констант (табл. А). Приближенные значения наиболее важных констант читатель найдет в табл. В приложения; их рекомендуется запомнить.

3. Определение постоянной Авогадро требует обсуждения. Когда в прошлом химики определяли атомные массы, они работали со шкалой, в которой атомная масса природного кислорода была по определению точно равна 16. При этом, например,

$$(\text{атомная масса водорода}) = 15 \times \frac{(\text{масса «атома» водорода})}{(\text{масса «атома» кислорода})}. \quad (3а)$$

Слово «атом» взято в кавычки, чтобы показать, что мы имеем дело с тем элементом, который встречается в природе. Атомные массы, определяемые равенством, подобным (3а), были получены химиками в результате тщательных *измерений масс*. Они определяли, например, число граммов природного водорода, которое необходимо для того, чтобы в соединении с 16 г природного кислорода образовать воду, не дав никакого остатка. Половина этого значения и есть атомная масса водорода.

Атомная масса, определенная таким методом химиками, называется *атомной массой в химической шкале*. Атомные массы большинства элементов близки к целым числам, но существуют и исключения. Например, атомная масса хлора равна 35,5 (табл. 3А).

Таблица 3А. Атомные массы наиболее легких элементов

Элемент	Z	Атомная масса	Элемент	Z	Атомная масса
H	1	1,00797	Ne	10	20,183
He	2	4,0026	Na	11	22,9898
Li	3	6,939	Mg	12	24,312
Be	4	9,0122	Al	13	26,9815
B	5	10,811	Si	14	28,086
C	6	12,01116	P	15	30,9738
N	7	14,0067	S	16	32,064
O	8	15,9994	Cl	17	35,453
F	9	18,9984	Ar	18	39,948

4. Читателю известно, что почти вся масса атома сосредоточена в его ядре. Ядра построены из протонов и нейтронов. Сумма числа протонов и нейтронов называется *массовым числом* ядра. Это целое число обычно обозначается буквой A.

Число протонов называется атомным номером ядра. Его обозначают буквой Z, и заряд ядра равен Ze, где e — элементарный заряд. Химические свойства атома определяются почти исключительно зарядом ядра, и число Z является характеристикой *химического элемента*.

Было обнаружено существование семейств ядер с *одинаковым* зарядом, но различными массовыми числами. Такие ядра получили

Таблица 4А. Природные изотопы некоторых легких элементов

Элемент	Z	Массовое число A	Атомная масса	Относительная распространенность, %	Элемент	Z	Массовое число A	Атомная масса	Относительная распространенность, %
H	1	1	1,007825	99,985	O	8	16	15,99491	99,759
		2	2,0410	0,015			17	16,99914	0,037
							18	17,99916	0,204
He	2	3	3,01603	0,00013					
		4	4,00260	100	F	9	19	18,99840	100
Li	3	6	6,01513	7,42	...	...	...	...	...
		7	7,01601	92,58					
					S	16	32	31,97207	95,0
Be	4	9	9,01219	100			33	32,97146	0,78
							34	33,96786	4,22
B	5	10	10,01294	19,6			36	35,96709	0,014
		11	11,00931	80,4					
					Cl	17	35	34,96885	75,53
C	6	12	12,000000	98,90			37	36,96590	24,47
		13	13,00335	1,11					
N	7	14	14,00307	99,63	...	...	...	...	...
		15	15,00011	0,37					

наличие различных *изотопов* данного элемента. Изотопы содержат определенное число протонов и различаются числом нейтронов. Масса протона очень близка к массе нейтрона, и поэтому масса всех ядер очень мало отличается от целого массового числа. Существование целых атомных масс объясняется тем, что многие природные химические элементы представляют собой смесь двух или нескольких изотопов (табл. 4А). В этом случае измеряемая химиками «атомная масса» элемента является средним значением атомных масс соответствующих изотопов [*]).

Относительная распространенность различных изотопов данного элемента одна и та же в любом месте земной поверхности. Это экспериментально установленный факт. С практической точки зрения различные изотопы данного элемента имеют одни и те же химические свойства, поэтому разделить изотопы химическими методами невозможно.

5. Записывая уравнение химической реакции, химик использует символы, например: H — водород, Li — литий, Fe — железо и т. д. для обозначения существующих в природе химических элементов, которые могут быть, а могут и не быть смесью изотопов. Однако с точки зрения ядерной физики изотопы кислорода с массовыми числами 16 и 18 являются совершенно различными объектами, и когда мы пишем их обозначения в ядерных реакциях, то должны иметь возможность различать эти изотопы. Для этого служат верхние и нижние индексы, с помощью которых изотоп обычно изображают так:

$$_{\text{Z}}{}^{\text{A}}(\text{химический символ}) \quad \text{или} \quad {}^{\text{A}}_{\text{Z}}(\text{химический символ}).$$

Природный кислород есть смесь трех стабильных изотопов, а именно ^{16}O, ^{17}O и ^{18}O. Из них основной компонентой является изотоп ^{16}O. Его относительная распространенность равна 99,759 %.

6. Физики и химики давно пришли к соглашению о новой шкале атомных масс, основанной на массе изотопа углерода ^{12}C. *Атому* (не ядру!) этого изотопа приписана масса, *точно равная* 12 *атомным единицам массы* (сокращенно 12 а. е. м.). Таким образом,

$$1 \text{ а. е. м.} = \frac{1}{12}(\text{масса атома } {}^{12}\text{C}) = 1{,}66 \cdot 10^{-24} \text{ г}. \qquad (6a)$$

Постоянная Авогадро N_0 определяется как число атомов в 12 г изотопически чистого ^{12}C. Это число и приведено в табл. 2А.

В новой шкале атомная масса природного кислорода равна 15,9994, что очень близко к числу 16, т. е. к атомной массе кислорода в старой химической шкале. Для многих практических целей различием атомных масс в новой и старой шкалах можно пренебречь.

*) Существование различных изотопов химических элементов было впервые установлено Дж. Дж. Томсоном (Thomson J. J. Rays of Positive Electricity.— Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1913, v. 89, p. 1).

7. Постоянная Авогадро N_0 является звеном, которое связывает микро- и макрофизику. Рассмотрим несколько важных физических величин, включающих N_0, и на их примере продемонстрируем эту связь.

1) Масса протона равна 1,0073 а. е. м., а масса нейтрального атома водорода (изотоп ^{1}H) равна 1,0078 а. е. м. Произведение постоянной Авогадро N_0 на массу протона M_p равно, таким образом,

$$N_0 M_p = 1{,}0073 \text{ г/моль}. \qquad (7a)$$

При грубых вычислениях мы можем считать, что

$$(\text{масса протона}) \approx (\text{масса атома водорода}) \approx (1/N_0) \text{ г}. \qquad (7b)$$

2) Произведение N_0 на постоянную Больцмана дает *универсальную газовую постоянную* R:

$$N_0 k = R = 8{,}314 \cdot 10^7 \text{ эрг/(моль} \cdot \text{К)} = 1{,}986 \text{ кал/(моль} \cdot \text{К)}. \qquad (7c)$$

Таким образом, постоянная Больцмана является газовой постоянной, приходящейся на *одну молекулу*.

3) Произведение N_0 на заряд электрона дает *постоянную Фарадея* F:

$$N_0 e = F = 96\,487 \text{ Кл/моль}. \qquad (7d)$$

Эта величина равна полному заряду, который переносится одним молем однократно заряженных ионов.

8. Обратимся теперь к постоянной Планка. Ее можно встретить в двух обозначениях, а именно h и $\hbar$ (табл. 2А). (Символ $\hbar$ читается: «h перечеркнутое».) Обе постоянные называются постоянными Планка и встречаются одинаково часто. Впрочем, нам больше нравится $\hbar$: с этой константой удобнее работать. Причина появления двух постоянных Планка в том, что писать $\hbar$ проще, чем выписывать множитель 2π, возникающий во многих формулах. По той же причине существуют две «частоты» — круговая частота и циклическая частота (или просто частота).

В этой книге мы обозначаем через ν частоту, равную числу повторений периодического явления за единицу времени. Эта частота измеряется *числом циклов за единицу времени* и выражается в герцах (Гц). Угловую скорость мы обозначаем буквой ω и измеряем ее *числом радиан за единицу времени* (рад/с).

Частота и угловая скорость связаны соотношением

$$\omega = 2\pi\nu, \qquad (8a)$$

откуда следует, что

$$\hbar\omega = h\nu. \qquad (8b)$$

Оба выражения определяют энергию фотона с частотой ν. Заметим, что величину ω обычно тоже называют частотой или *круговой частотой* и выражают в секундах в минус первой степени ($с^{-1}$).

Для длины волны используются соответствующие обозначения. Истинная *длина волны* представляет собой период периодического явления в пространстве и обозначается буквой λ. Из длины волны λ можно образовать величину $\lambdabar$:

$$\lambdabar = \frac{\lambda}{2\pi}, \tag{8c}$$

Для монохроматической волны, распространяющейся со скоростью c,

$$\lambda\nu = \lambdabar\omega = c. \tag{8d}$$

[1]Читатель должен запомнить эти повсюду принятые обозначения.

9. Длина волны часто выражается в обратных величинах,

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda},$$

называемых *волновыми числами*. Волновые числа широко используются в оптической спектроскопии. Единицей их измерения является сантиметр в минус первой степени ($см^{-1}$). Для света в вакууме

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}, \tag{9a}$$

где ν — частота. Волновое число пропорционально частоте, но его не следует путать с частотой.

Заметим, что в оптической области длины волн и волновые числа могут быть измерены очень точно, гораздо точнее скорости света. Поэтому в оптической области нам гораздо точнее известны волновые числа, нежели соответствующие частоты. С другой стороны, в микроволновой области частоты измеряют с большей точностью, и здесь они известны точнее соответствующих волновых чисел или длин волн.

10. В гл. 1 мы упоминали о некоторых методах измерения фундаментальных констант. Хронологически это первые методы. Лучшие современные значения основных констант получены, однако, не в этих простых измерениях. Мы привели их лишь для знакомства с принципиальными возможностями. В действительности лучшие значения фундаментальных констант получены при измерениях ряда связанных величин, которые *выражаются* через эти (и другие) константы с помощью теоретических формул, в справедливости которых мы уверены. Из этих величин можно получить значения соответствующих констант. Число таких измеримых величин больше числа фундаментальных констант, и уравнения оказываются переопределенными. Это обстоятельство позволяет проверить внутреннее согласие измеренных величин, которые принимаются во внимание при определении констант.

Энергия

11. Рассмотрим теперь единицы, используемые в микрофизике для измерения энергии. Одной из наиболее употребительных единиц является *электрон-вольт* (эВ). Она определяется как энергия, приобретаемая элементарным зарядом e при прохождении разности потенциалов один вольт. Воспользовавшись значением e из табл. 2А, можно выразить электрон-вольт в эргах:

$$1\text{эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \text{эрг}. \tag{11a}$$

Кроме электрон-вольта, используют и производные единицы:

$$1\ \text{кэВ} = 1000\ \text{эВ}, \quad 1\ \text{МэВ} = 10^6\ \text{эВ},$$
$$1\ \text{ГэВ} = 10^3\ \text{МэВ} = 10^9\ \text{эВ};$$

кэВ — сокращение *килоэлектрон-вольт*, МэВ — *мегаэлектрон-вольт*, ГэВ — *гигаэлектрон-вольт*. Электрон-вольт является единицей, особенно удобной в атомной физике, так как энергия связи внешних электронов у атомов имеет порядок 1 эВ. В ядерной физике, где энергии связи частиц в ядре порядка 1 МэВ, удобнее эта единица. И наконец, единица гигаэлектрон-вольт используется при рассмотрении взаимодействия элементарных частиц при очень высоких энергиях.

12. В гл. 1 мы говорили о важном значении констант c и $\hbar$. Особенно часто они встречаются в релятивистской квантовой физике, где по этой причине удобно работать с системой единиц, в которой константы c и $\hbar$ безразмерны и равны единице: $c = \hbar = 1$.

Читатель чувствует, что эти определения нарушают наши представления о физической размерности. Следует, однако, помнить, что определенные размерности, которые мы приписываем различным физическим величинам, основаны на произвольном соглашении. Строгое утверждение заключается в том, что *физические величины, которые можно непосредственно сравнивать*, имеют одинаковую «физическую размерность». Во всех остальных случаях приписывание размерности основано на некоторых соотношениях, в фундаментальный характер которых мы верим. Например, имея в виду фундаментальный характер такой постоянной, как скорость света, можно связать расстояние x и время t выражением $x = ct$, что дает нам возможность измерять расстояние и время в одних и тех же единицах. Так поступают астрономы, измеряя расстояние в световых годах.

Если положить $\hbar = c = 1$, то многие формулы приобретают более простой, ясный и привлекательный вид, и нам хотелось бы воспользоваться такой возможностью в этой книге. Но постоянное использование таких единиц создало бы ненужные трудности при чтении других книг по квантовой физике, большинство которых основано на системах единиц СИ или СГС. По этой причине мы будем пользоваться главным образом системой СГС.

13. Напишем теперь некоторые соотношения между различными физическими величинами, которые возникают благодаря существо-

Таблица 14. Множители для переходов между различными единицами энергии

	Эрг		Миллиметр Hg, M^3		Температура	Масса		Частота	Волновое число	Длина волны
	эрг	эВ	эрг/см³	атмосфера	E/k, K	E/c^2, г	E/c^2, а.е.м.	E/h, Гц	E/hc, $см^{-1}$	hc/E, Å
1 эрг	1	$1.0217 \cdot 10^{-12}$	$9.8587 \cdot 10^{-7}$	39503	1.1605	$1.0736 \cdot 10^{-21}$	$6.4657 \cdot 10^{3}$	$2.4180 \cdot 10^{14}$	8065.8	12396
1 эВ	$0.2418 \cdot 10^{12}$	1	$6.3529 \cdot 10^{5}$	$1.439 \cdot 10^{4}$	$7.211 \cdot 10^{3}$	$6.7071 \cdot 10^{-14}$	$4.0388 \cdot 10^{13}$	$1.5183 \cdot 10^{26}$	$5.0345 \cdot 10^{5}$	$1.9768 \cdot 10^{-5}$
1 эрг/моль	$1.0361 \cdot 10^{-24}$	$1.6604 \cdot 10^{-36}$	1	$2.369 \cdot 10^{-2}$	$1.203 \cdot 10^{-27}$	$1.1128 \cdot 10^{-45}$	$6.701 \cdot 10^{-11}$	$2.504 \cdot 10^{9}$	$8.3594 \cdot 10^{-3}$	$1.1965 \cdot 10^{4}$
1 кал/моль	$4.336 \cdot 10^{-17}$	$6.891 \cdot 10^{-29}$	$4.186 \cdot 10^{7}$	1	0.503	$4.663 \cdot 10^{-38}$	$2.807 \cdot 10^{-4}$	$1.049 \cdot 10^{7}$	0.3499	$2.856 \cdot 10^{4}$
1 K	$8.617 \cdot 10^{-17}$	$1.381 \cdot 10^{-29}$	$8.311 \cdot 10^{7}$	1.986	1	$9.251 \cdot 10^{-38}$	$5.570 \cdot 10^{-4}$	$2.081 \cdot 10^{7}$	0.6950	$1.439 \cdot 10^{4}$
1 л. а. м.	$931.48 \cdot 10^{8}$	$1.4923 \cdot 10^{-3}$	$9.0876 \cdot 10^{12}$	$2.167 \cdot 10^{11}$	$1.081 \cdot 10^{13}$	1	$6.0234 \cdot 10^{23}$	$2.2504 \cdot 10^{36}$	$7.5131 \cdot 10^{15}$	$1.3313 \cdot 10^{-9}$
1 Da	$1.5455 \cdot 10^{-13}$	$0.9930 \cdot 10^{-15}$	$3.0902 \cdot 10^{-6}$	$9.802 \cdot 10^{-11}$	$1.790 \cdot 10^{-14}$	$1.4866 \cdot 10^{-24}$	1	$3.7356 \cdot 10^{23}$	$1.2470 \cdot 10^{13}$	$2.2079 \cdot 10^{-4}$
1 $см^{-1}$	$1.2398 \cdot 10^{-16}$	$1.9863 \cdot 10^{-28}$	$1.2093 \cdot 10^{8}$	2.858	1.439	$1.3310 \cdot 10^{-37}$	$8.0178 \cdot 10^{-14}$	$2.9979 \cdot 10^{10}$	1	10⁸
1 Å	$1.2398 \cdot 10^{-8}$	$1.9863 \cdot 10^{-20}$	$1.2093 \cdot 10^{16}$	$2.858 \cdot 10^{5}$	$1.439 \cdot 10^{8}$	$1.3310 \cdot 10^{-29}$	$8.0178 \cdot 10^{-6}$	$2.9979 \cdot 10^{18}$	10^{8}	1
Масса электрона m_e	$8.1006 \cdot 10^{-28}$	$8.1966 \cdot 10^{-7}$	$4.6906 \cdot 10^{5}$	$1.176 \cdot 10^{4}$	$5.930 \cdot 10^{9}$	$5.4858 \cdot 10^{-4}$	$3.3030 \cdot 10^{20}$	$1.2356 \cdot 10^{33}$	$4.1247 \cdot 10^{12}$	$2.4262 \cdot 10^{-3}$
Радиус Бора R_∞	$13.605 \cdot 10^{-11}$	$2.1797 \cdot 10^{-11}$	$1.2473 \cdot 10^{13}$	$3.127 \cdot 10^{11}$	$1.577 \cdot 10^{16}$	$1.4600 \cdot 10^{-13}$	$8.7885 \cdot 10^{10}$	$3.2869 \cdot 10^{15}$	109737	911.27

вание константе c и $\hbar$. Начнем с массы m, связях с ней рад других физических констант, составленных из m, $\hbar$ и c, и укажем общую физическую размерность этих величин:

$$\begin{aligned} m &= (\text{масса}), & mc^2/\hbar &= (\text{время})^{-1}, \\ mc &= (\text{импульс}), & \hbar/mc^2 &= (\text{время}), \\ mc^2 &= (\text{энергия}), & \hbar/mc &= (\text{длина}). \end{aligned} \tag{13a}$$

Читатель должен проверить правильность указанных размерностей. Все эти величины связаны вместе постоянной $\hbar$ и c. Основываясь на приведенных соотношениях, можно отождествлять *энергию* с массой, или с частотой, или с обратной длиной; энергия может быть выражена через значения связанных величин.

14. Таким образом, мы связываем с энергией E частоту E/h, волновое число E/hc и массу E/c^2. Соответствующие переходные коэффициенты имеют следующие значения:

$$\frac{(\text{энергия})}{(\text{масса})} = (8{,}31475 \pm 0{,}00005) \cdot 10^{7} \text{ эВ/а. е. м.}, \tag{14a}$$

$$\frac{(\text{частота})}{(\text{энергия})} = (2{,}41804 \pm 0{,}00002) \cdot 10^{14} \text{ Гц/эВ}, \tag{14b}$$

$$\frac{(\text{волновое число})}{(\text{энергия})} = (8{,}06573 \pm 0{,}00008) \cdot 10^{3} \text{ см}^{-1} \cdot \text{эВ}^{-1}. \tag{14c}$$

Табл. 14А основана на этих переходных коэффициентах. В каждой горизонтальной строке таблицы приведен ряд величин, ассоциированных с величиной, стоящей в первом столбце. Второй и третий столбцы дают энергию E в электрон-вольтах и эргах. Седьмой столбец дает соответствующие значения E/c^2 в атомных единицах массы, восьмой столбец — соответствующую частоту E/h в герцах, девятый — волновое число E/hc в сантиметрах в минус первой степени, десятый — соответствующее значение длины волны hc/E в ангстремах. Это единственная величина в таблице, не пропорциональная энергии E.

15. В химии энергию обычно измеряют в калориях (сокращенно кал) и килокалориях (ккал). Иногда калорию называют «малой калорией», а килокалорию «большой калорией». Эти единицы определяют следующим образом:

$$1 \text{ кал} = 4{,}186 \text{ Дж} = 4{,}186 \cdot 10^{7} \text{ эрг}, \quad 1 \text{ ккал} = 1000 \text{ кал}. \tag{15a}$$

Интересно связать энергию E одного атома или молекулы с соответствующей энергией моля таких частиц (молярной энергией).

Имеем

$$E_{\text{моль}} = E \cdot N_0 = 23\,060 \text{ кал/эВ} = 9{,}6487 \cdot 10^{11} \text{ эрг/эВ}. \tag{15b}$$

В табл. 14А в четвертом и пятом столбцах приведены значения $E_{\text{моль}}$ в эргах на моль и калориях на моль.

16. В п. 31—34 гл. 1 мы кратко рассмотрели понятия теплоты и температуры и отметили, что постоянная Больцмана является переходным множителем от температуры к энергии. Обычно температура

туру выражают через соответствующую энергию, и наоборот, с помощью условного соотношения

$$(\text{эквивалентная энергия}) = k \times (\text{температура}). \qquad (16a)$$

Для такого перехода удобно иметь значение постоянной Больцмана, выраженное в электрон-вольтах на кельвин:

$$k = 8{,}617 \cdot 10^{-5}\ \text{эВ/К}, \quad 1/k = 11\,605\ \text{К/эВ}. \qquad (16b)$$

Соответственно *комнатная температура* (20 °С = 293 К) эквивалентна энергии

$$kT \approx 293\ \text{К} \approx (1/40)\ \text{эВ}. \qquad (16c)$$

В шестом столбце табл. 14А даны значения эквивалентной энергии в кельвинах.

17. Итак, энергия и температура могут быть выражены в одинаковых единицах. Однако не следует считать эти величины одним и тем же. *Было бы ошибкой* полагать, что тепловая энергия любого макроскопического тела при температуре T равна величине kT, умноженной на число атомов тела. Внутренняя энергия макроскопического тела зависит не только от температуры, но и от других (макроскопических) параметров, и, кроме того, соотношение между энергией и температурой зависит от природы тела. Это очень важное замечание, и формула (16a) не должна вводить нас в заблуждение.

Весьма полезно помнить, однако, что если макроскопическое тело имеет температуру T, то часто (хотя и не всегда) средняя энергия *беспорядочного* движения, приходящаяся на один атом (или молекулу), имеет *порядок* kT.

Это утверждение дает нам возможность *оценить* среднюю энергию беспорядочного теплового движения атома или молекулы, если мы знаем температуру. Для некоторых специальных систем можно высказать более точное утверждение. Важным примером может служить газ, состоящий из молекул, нагретый до температуры T. Средняя кинетическая энергия $E_{\text{кт}}$, связанная с *поступательным* движением молекулы, равна в этом случае

$$E_{\text{кт}} = (3/2)\,kT \qquad (17a)$$

независимо от того, имеем ли мы дело со сложной молекулой или с атомом. Вывод этой формулы — дело статистической механики, и мы отложим его до тома V этого курса *), но будем часто прибегать к формуле (17a).

18. Мы говорили уже, что понятия теплоты или температуры неприменимы к *изолированным* ядрам, атомам или молекулам. Эти понятия относятся к веществу в целом. Мы почти никогда не можем производить измерения над изолированными частицами. Они всегда погружены в некую среду, представляющую собой макроскопическое тело. Поэтому беспорядочное тепловое движение почти всегда является фактором, который следует учитывать, если мы хотим понять поведение квантовомеханических систем, особенно когда мы рассматриваем макроскопические следствия квантовых явлений.

Важной особенностью теплового движения в системе является его *беспорядочность*. Это вводит в поведение системы элемент случайности. Можно сказать, что беспорядочное тепловое движение является «шумом в чистой симфонии квантовой механики». И следует добавить, что часто шум настолько велик, что заглушает музыку. В принципе тепловое движение можно подавить, если поддерживать исследуемую систему и ее окружение при температуре, очень близкой к 0 К. Действительно, при абсолютном нуле тепловое движение исчезает. На практике полного подавления достичь нельзя. Тепловое движение является характерной особенностью мира, в котором мы живем.

*) Рейф Ф. Статистическая физика.— 3-е изд.— М.: Наука, 1986.

Порядки величин в атомной и молекулярной физике

19. Представим себе атом в виде некоторой динамической системы, состоящей из очень малого ядра, окруженного облаком электронов. Электроны притягиваются к ядру и взаимодействуют друг с другом с помощью электромагнитных сил. Наша вера в то, что электромагнитные силы являются единственными силами, которые надо учитывать для понимания свойств атомов и молекул, основана на постоянном сравнении предсказаний теории с опытом.

Квантовая теория, описывающая взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным полем, называется *квантовой электродинамикой*. Она включает в себя законы специальной теории относительности. В настоящее время это наиболее успешная теория фундаментальных процессов, происходящих с элементарными частицами. Она позволила описать строение атомов и молекул, а также испускание и поглощение этими объектами электромагнитного излучения.

20. Как показывает эксперимент, размер ядра порядка 10^{-12} см, а атома 10^{-8} см. Таким образом, объем ядра ничтожно мал по сравнению с объемом всего атома.

Масса ядра велика по сравнению с массой электрона, равной 0,0005486 а. е. м. Действительно, отношение масс электрона и протона равно

$$m/M_p = 1/1836. \qquad (20a)$$

Разумно ожидать, что по крайней мере в первом приближении *движение* ядра не играет существенной роли и ядро можно считать «бесконечно тяжелым» и фиксированным в пространстве. Так как ядро очень мало, то сделаем еще одно упрощение и будем считать его «точкой». В такой атомной модели роль ядра сводится к созданию электростатического поля, описываемого потенциалом

$$V(r) = eZ/r, \qquad (20b)$$

где e — элементарный заряд; Z — атомный номер.

Задачей теории атома, в первом приближении, является исследование движения электронов в этом электростатическом поле. Читатель должен понять, что, говоря о «движении», мы имеем в виду движение в квантовомеханическом смысле. Позже мы поясним, что это значит.

21. Квантовая электродинамика описывает взаимодействие электронов с электромагнитным полем. Рассмотрим физические величины, входящие в эту теорию, т. е. массу электрона m, заряд электрона e, скорость света c и постоянную Планка $\hbar$. С помощью констант m, c и $\hbar$ можно образовать так называемые *естественные единицы квантовой электродинамики*, о которых мы говорили в п. 13: mc^2 — единица массы, mc^2 — единица энергии, $\hbar/mc$ — единица длины, $\hbar/mc^2$ — единица времени.

До сих пор мы не говорили об элементарном заряде e. Эта величина играет роль *константы связи*; она показывает, как сильно электрон связан с электромагнитным полем *). Попытаемся получить безразмерную величину, характеризующую силу этой связи. Для этого вычислим в указанных выше единицах *электростатическую энергию отталкивания двух электронов, находящихся на расстоянии* $\hbar/mc$. Обозначая эту величину через α, имеем

$$\alpha = \frac{e^2/(\hbar/mc)}{mc^2} = \frac{e^2}{\hbar c} = (7{,}29720 \pm 0{,}00003) \cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{137}. \quad (21a)\ **)$$

Константа α играет фундаментальную роль в атомной физике и известна под названием *постоянной тонкой структуры*; она представляет собой квадрат элементарного заряда в естественных единицах. Постоянная α характеризует этот заряд таким способом, который не зависит от произвольных макроскопических физических стандартов. Численное значение величины α весьма мало, что отражает «слабость» электромагнитного взаимодействия: электростатическая энергия двух электронов, находящихся на расстоянии $\hbar/mc$, мала по сравнению с их энергией покоя. *Постоянная тонкой структуры является одной из важных фундаментальных констант природы.* В настоящее время это часто эмпирическая константа, так как у нас нет теоретического объяснения ее величины. Если бы она имела большее значение, мир выглядел бы совершенно по-другому, можно сказать, *невообразимо иначе*.

Заметим, что масса электрона не входит в формулу (21a) для величины α, поэтому α является константой связи с электромагнитным полем для *любой* элементарной частицы, заряд которой равен e.

В табл. 21А приведены некоторые величины, играющие важную роль в атомной физике, которые можно образовать из констант m, $\hbar$, c и e, и указаны наименования этих величин.

22. В п. 5) гл. 1 мы имели дело с полуклассической теорией атома водорода, предложенной Бором, и обсуждали, в частности, вопрос о размерах такого атома. Там было показано, что константа a_0, определяемая равенством (5.1c), дает этот размер. Нетрудно заметить, что эта константа a_0, называемая *первым боровским радиусом* (для атома водорода), совпадает с одной из констант табл. 21А. В гл. 1 постоянная a_0 имела смысл радиуса круговой орбиты в планетарной модели атома, и отсюда ее название. При квантовомеханическом рассмотрении атома водорода константа a_0 имеет другой смысл: $1/a_0$ равно среднему значению $1/r$ для основного состояния атома водорода (r — расстояние между электроном и протоном). В обоих случаях физический смысл величины a_0 одинаков: она дает представление о «типичном» расстоянии между электроном и протоном.

23. Продолжим полуклассическое рассмотрение, начатое в гл. 1, и постараемся оценить энергию связи электрона в атоме водорода. Если электрон движется со скоростью v (его импульс $p = mv$) и находится на расстоянии r от протона, то его полная энергия

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{r}. \quad (23a)$$

Для электрона на круговой орбите радиуса $r = a_0$ условие динамического равновесия имеет вид

$$\frac{mv^2}{a_0} = \frac{e^2}{a_0^2}. \quad (23b)$$

Из уравнений (23a) и (23b) следует

$$E = \frac{e^2}{2a_0} - \frac{e^2}{a_0} = -\frac{e^2}{2a_0} = -\frac{\alpha^2 mc^2}{2} = -R_\infty. \quad (23c)$$

Итак, энергия электрона на этой орбите равна $-R_\infty$, что близко к $-13{,}6$ эВ. Эту энергию нужно сравнивать с полной энергией электрона, удаленного от протона на бесконечность и покоящегося. Из равенства (23a) следует, что она равна нулю. Таким образом, что-

Таблица 21А. Физические константы

Энергия покоя электрона	$mc^2 = (0{,}511006 \pm 0{,}000002)$ МэВ
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_c = \hbar/mc = (3{,}86144 \pm 0{,}00003) \cdot 10^{-11}$ см
Первый боровский радиус	$a_0 = \hbar^2/me^2 = \alpha^{-1}\lambda_c = (5{,}29187 \pm 0{,}00002) \cdot 10^{-9}$ см
Ионизационный потенциал водорода при бесконечно большой массе протона	$R_\infty = \alpha^2 mc^2/2 = (13{,}6053 \pm 0{,}0013)$ эВ
Постоянная Ридберга при бесконечно большой массе протона	$\tilde{R}_\infty = \alpha/4\pi a_0 = R_\infty/hc = (109\,737{,}31 \pm 0{,}01)$ см$^{-1}$

*) Так принято говорить. Правильнее было бы сказать, что константа связи показывает, как сильно элементарная частица взаимодействует с любой подобной электромагнитной силе, введенной для объяснения взаимодействия между зарядами.

**) Выражение для α записано в системе СГС. В системе СИ

$$\alpha = e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c.$$

бы удалить электрон с рассматриваемой круговой орбиты, мы должны затратить энергию R_∞. Эта энергия называется *энергией ионизации*. Волновое число, эквивалентное энергии ионизации, носит название *постоянной Ридберга*. Мы обозначим ее через $\tilde{R}_\infty$ *).

Оказывается, что выполненная нами простая оценка, основанная на неверной планетарной модели атома, дает *точно* то же самое значение энергии ионизации R_∞, что и строгая квантовомеханическая теория. Таким образом, R_∞ является действительным значением энергии ионизации атома водорода, а $-R_\infty$ — *энергия основного состояния* этого атома.

Заметим, что энергия ионизации любых атомов, т. е. работа, которую нужно затратить для удаления одного внешнего электрона из атома, имеет порядок 10 эВ. Мы обсудим этот вопрос позднее.

24. Рассмотрим теперь, каким образом слабость электромагнитных сил, т. е. малость константы связи α, проявляется в строении атома водорода. При константе связи порядка единицы следовало бы ожидать, что размеры атома будут порядка естественной единицы длины в квантовой электродинамике. Эта единица равна, как мы знаем, комптоновской длине волны $\lambda_c=\hbar/mc$. В действительности константа связи гораздо меньше единицы ($\alpha=1/137$), и кулоновское поле ядра поэтому недостаточно сильно, чтобы удержать электрон на расстоянии порядка комптоновской длины волны. В естественных квантовомеханических единицах орбита электрона оказывается *большой*, радиус ее $a_1=\lambda_c/\alpha$.

Скорость электрона на орбите мы получим, решая уравнение (23b) относительно v:

$$v=\sqrt{e^2/ma_1}=\alpha c, \tag{24a}$$

что в 137 раз меньше нашей естественной единицы скорости, равной скорости света c. Такое значение скорости подтверждает сделанное нами выше предположение о нерелятивистском характере задачи.

Кинетическая E_k и потенциальная E_p энергии электрона в атоме равны соответственно

$$E_k=\frac{mv^2}{2}=\frac{m(\alpha c)^2}{2}=R_\infty, \tag{24b}$$

$$E_p=-e^2/a_1=E=E_k=-2R_\infty=-2E_k. \tag{24c}$$

Мы приходим к выводу, что атом водорода есть относительно слабо связанная протяженная система.

Читателю следует тщательно обдумать как этот результат, так и роль постоянной тонкой структуры в теории атома.

25. Полуклассическое рассмотрение привело нас к выводу, что скорость электрона в атоме мала. Поэтому можно надеяться, что для описания атома окажется достаточной нерелятивистская квантовая механика. В этой теории скорость света c не играет никакой

*) Индекс ∞ у R_∞ и $\tilde{R}_\infty$ означает, что мы имеем дело с моделью, в которой масса протона бесконечно велика. Действительное значение энергии ионизации немного меньше.

роли, а фундаментальными константами являются m, $\hbar$ и e. В частности, боровский радиус и энергия ионизации могут быть выражены лишь через эти константы:

$$a_1=\lambda_c/\alpha=\hbar^2/me^2, \tag{25a}$$

$$R_\infty=\alpha^2mc^2/2=e^2/2a_1=e^4m/2\hbar^2. \tag{25b}$$

В правой части этих формул скорость света отсутствует. Заметим также, что длина a_1 — это единственное значение длины, а энергия R_∞ — единственное значение энергии, которую можно образовать из констант $\hbar$, m и e. Эти величины возникают в нерелятивистской квантовой механике, которая пока читателю неизвестна. Мы можем ожидать, что любые значения длины и энергии, вычисляемые в такой теории, будут выражаться через некоторый численный множитель и константы a_1 или R_∞ соответственно. (Под выражением «численный множитель» мы понимаем здесь число, которое не зависит от трех констант m, $\hbar$ и e; можно ожидать, что в «разумной» теории эти числа будут «порядка единицы».)

26. По-видимому, все эти «выводы» и оценки вызывают у читателя чувство неудовлетворения. Действительно, какое значение могут иметь доводы, основанные на применении боровской модели, если мы сами объявили ее совершенно неверной? И насколько можно принимать всерьез выводы, полученные из соображений размерности? Чему все же равны численные множители «порядка единицы», которые должны давать правильные значения энергии в единицах R_∞? Может быть, они равны, скажем, 4π или $(2\pi)^{-1}$? Такое различие в численных множителях весьма существенно покажется на наших оценках.

Ответ заключается в том, что этот множитель в действительности равен единице. По поводу «простых выводов» такого типа скептик мог бы заметить, что они хороши в тех случаях, когда нам заранее известны результаты опыта или более полной теории.

Чтобы отстоять ход наших рассуждений, заметим следующее:

1) Наша цель заключается в определении порядка величин атомной и молекулярной физики. Вместо того чтобы просто сообщить читателю, что энергия ионизации водорода равна 13,6 эВ, мы пытались выразить эту величину через фундаментальные константы. Оказалось, что

$$13{,}6\ \text{эВ}=\alpha^2mc^2/2,\quad 0{,}53\ \text{Å}=(1/\alpha)(\hbar/mc).$$

Это очень красивые результаты. Обсуждение идей квантовой электродинамики в приложении к атому водорода дало нам некоторое понимание полученных зависимостей. Высказанные идеи находят свое подтверждение в полной теории. Наши выводы можно, таким образом, считать некоторым механическим правилом.

2) Теорию Бора нельзя считать верной. Читатель уже видел, что в некоторых случаях она дает правильные результаты и совершенно неправильные в других. По-видимому, такая теория содержит в себе какие-то элементы истины. Теория Бора вела в физику

постоянную Планка в виде соотношения $rp \sim h$, связывающего координату и импульс электрона. В классической физике эти величины независимы.

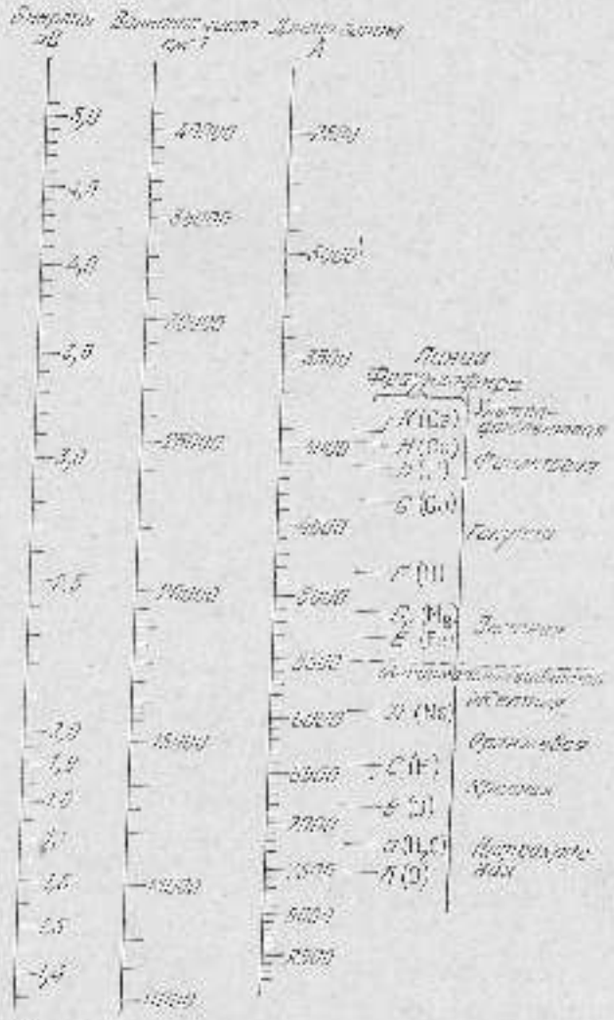


Рис. 26А. Видимый свет, ультра- и инфракрасные излучения. Они суть Фраунгоферовы линии в спектре солнца (или испускаемый (ранее) светом спектр). Длина волны (или энергия) этих линий, а также уровни энергии электрона в атоме водорода, вызывающие излучение. Цифры указывают (для каждого элемента) энергию, необходимую для ионизации атома. Элементы, имеющие наибольшее значение, являются наиболее распространенными. Энергия ионизации водорода 13,6 эВ, длина волны 912 Å.

Два вывода, сделанные нами из теории Бора, были следствием этого соотношения $rp \sim h$, являющегося частным случаем принципа неопределенности. К дальнейшему мы не один раз к нему обратимся.

б) Частоты, причем неопределенностей позволит нам оценить энергию ионизации атома водорода.

3) Рассмотрение в т. 25 соображения размерность вызывают большее доверие после серьезного изучения квантовомеханической теории атома водорода. Эта теория основана на так называемом уравнении Шредингера. Чтобы понять, почему числа, подобные

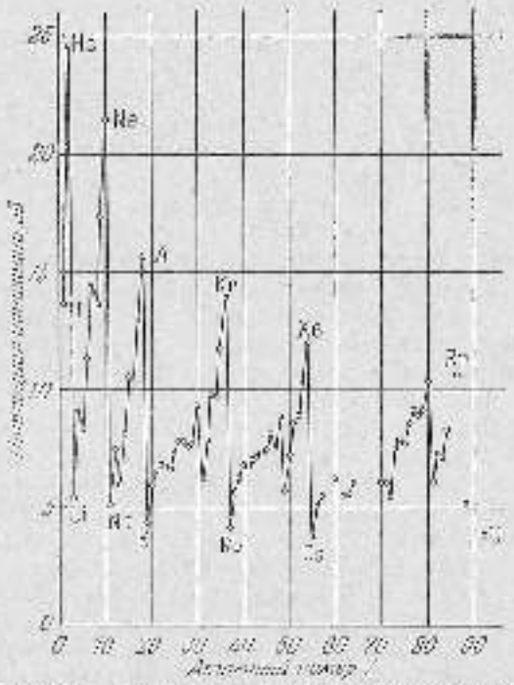


Рис. 27А. Энергия ионизации атомов по атомному номеру. Потенциалы ионизации отмечают энергии, необходимые для удаления электрона из данного атома. Для всех атомов первого ряда (от водорода Z=1 до неона Z=10) и т. д. Читатель должен знать, что периодическое повторение химических свойств элементов, которое мы видим в периодической системе элементов, отражает повторение через определенные интервалы атомного номера Z энергии ионизации. Наибольшее значение имеет наименьшее значение Z, равное 1, для водорода. Наименьшее значение имеет наибольшее значение Z, равное 86, для радона. Наименьшее значение имеет наибольшее значение Z, равное 86, для радона.

$4\pi(1)$ или $(2s)^{-1}$, помешаться не могут, нет необходимости решать это дифференциальное уравнение, нужно знать его свойства. Соображения размерности работают лучше, если они сопровождаются хорошим пониманием общих свойств теории.

Наши выводы, основанные на простых соображениях размерности, были введением в рассуждения такого рода. Читатель слышал, что существует «хорошая» теория. Чего же можно ожидать от нее? Позже мы ответим на этот вопрос.

27. Перейдем к изучению атомной физики и попытаемся получить общее представление о строении тяжелых атомов, т. е. атомов с большим значением атомного номера Z. Читатель, без сомнения, слышал, что электронное облако таких атомов имеет слоистую, или оболочечную, структуру, т. е. состоит из нескольких слоев, и их

кое-где, потому, почему это происходит. Вообразим, что мы строим атом. Начав с голого ядра, мы последовательно прибавляем один за другим всё новые электроны. Какова энергия связи первого электрона? В этом случае энергия системы

$$E=\frac{p^2}{2m}-\frac{e^2Z}{r}. \tag{27a}$$

Оправдано, что сказанное об атоме водорода сохранит свое значение и здесь, если только постоянную тонкой структуры α заменить на αZ. Таким образом, энергия связи первого электрона равна

$$E_1=-Z^2R_\infty=-Z^2\cdot 13{,}6\ \text{эВ}, \tag{27b}$$

а его нахождение от ядра

$$r_1=a_1/Z. \tag{27c}$$

Для больших Z это расстояние мало по сравнению с боровским радиусом a_1 атома водорода. Следующий прибавленный нами электрон будет, подобно первому, находиться на малом расстоянии, и его энергия связи также будет велика по сравнению с энергией связи электрона в атоме водорода. Заметим, что электростатическая сила отталкивания обоих электронов при этом примерно в Z раз меньше силы их притяжения к ядру. Рассмотрим свойства иона, образовавшегося после добавления нескольких электронов. Электроны удерживаются на малых расстояниях от ядра, и если их число равно n, то на больших расстояниях ион действует как «ядро» с зарядом $(Z-n)\,e$. Каждый следующий электрон будет сильно связан, если $(Z-n)$ не мало, но эта связь будет слабее, чем связь *первого* электрона. Легко понять, что последующие электроны окажутся все более и более слабо связанными. После прибавления $Z-1$ электронов электростатическое поле иона будет подобно полю облака с зарядом e. Размер этого облака будет сравним с боровским радиусом a_1. Поэтому энергия связи *последнего* прибавленного электрона будет порядка R_∞, т. е. около 10 эВ. Окончательный размер атома из Z электронов будет порядка боровского радиуса a_1.

28. Рассмотренная схема, конечно, слишком груба. Заметим, что мы не только не доказали, но и не сделали правдоподобным представление о сложном строении атома.

Чтобы понять строение атома, необходимо познакомиться с новым фундаментальным физическим законом, о котором мы до сих пор не упоминали и который совершенно чужд классической физике. Это закон носит название *принципа Паули*, или *принципа запрещения*. Принцип Паули гласит, что *в атоме не может быть двух электронов в одном и том же состоянии движения*. Электроны сильно отталкивают друг друга. (Это явление не имеет ничего общего с кулоновским отталкиванием двух одинаково заряженных частиц. Понимание действительного значения и смысла принципа Паули требует знания квантовой механики.) Принцип Паули является основой понимания атомной структуры. Его значение огромно, и, если бы природа не следовала этому принципу, мир выглядел бы невообразимо иначе.

Принцип запрещения был открыт Вольфгангом Паули в 1924 г. при исследовании эмпирических закономерностей в атомных спектрах [*]).

29. Итак, хотя наша модель атома весьма несовершенна, она все же дает некоторое представление о свойствах тяжелых атомов. Из нашей модели следует, например, что изменения состояния движения внешних (так называемых оптических) электронов связано с изменениями энергии, которые имеют порядок электрон-вольта. Эта энергия может быть излучена атомом в виде фотонов, принадлежащих к *видимой области* спектра. Энергии таких фотонов лежат в интервале 1,8—3,0 эВ, что отвечает длинам волн 7000—4000 Å. Переходы, совершающиеся *внутренними* электронами, отвечают значительно бо́льшим энергиям, доходящим до 70 кэВ, что соответствует длине волны 0,2 Å. Такие фотоны относятся к ультрафиолетовой или рентгеновской части спектра. Энергия, освобождающаяся при изменении состояния внутренних электронов, квадратично зависит от атомного номера Z, как видно из формулы (27a).

Мы отмечали уже, что атом, размеры которого близки к 1 Å, мал по сравнению с длиной волны оптических фотонов. Покажем, что это является непосредственным следствием малости константы связи α.

Энергия связи оптического электрона имеет порядок α^2mc^2. Таков же или меньше порядок энергии, освобождающейся при переходах, совершаемых оптическими электронами. При переходе такого электрона между двумя квазистационарными состояниями происходит поглощение или испускание фотона, энергия которого равна разности энергий обоих состояний. Соответствующая таким фотонам длина волны имеет порядок

$$\lambda_{\text{опт}}\approx 2\pi\hbar c/\alpha^2mc^2=2\pi a_1/\alpha\approx 1000\,a_1, \tag{29a}$$

что объясняет порядок величины отношения размеров атома к длине волны.

30. Мы теперь довольно хорошо познакомились с численными значениями различных физических величин, характеризующих атом. Нам остается сказать кое-что о молекулах. Здесь основной проблемой является природа молекулярной связи. Почему некоторые комбинации атомов образуют стабильные молекулы, а другие их не образуют? Чтобы ответить на подобные вопросы, необходимо глубокое понимание квантовой механики. Тем не менее мы попытаемся ответить на ваш вопрос хотя бы частично, то, что сперва займемся другим. Установив, что в некоторых случаях данные атомы образуют стабильную молекулу, зададимся вопросом: какова соответствующая энергия связи этих атомов в молекуле и какого порядка будет расстояние между атомами?

Обратимся к простейшему случаю, каким является молекула водорода, которая представляет собой связанное состояние двух про-

*) Pauli W. Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren. — Zs. f. Phys., 1925, v. 31, p. 765.

Таблица 30А. Свойства некоторых двухатомных молекул

Молекула	Расстояние между ядрами, Å	Энергия диссоциации, эВ	Молекула	Расстояние между ядрами, Å	Энергия диссоциации, эВ
AgH	1,62	2,3	HF	0,92	6,4
B_2O	1,31	4,7	HgH	1,74	0,36
Br_2	2,28	1,97	KCl	2,79	4,42
CaO	1,82	5,9	N_2	1,09	9,76
H_2	0,75	4,5	O_2	1,20	5,08
HCl	1,27	4,2			

тонов и двух электронов. Попытаемся подойти к вопросу об энергии связи и расстоянии между протонами, исходя из соображений размерности. Заметим, что мы рассматриваем те благоприятные случаи, когда связь заведомо существует, как в молекуле водорода.

Поскольку масса протонов много больше массы электронов, опять можно пренебречь *движением* протонов при определении энергии основного состояния молекулы водорода. В первом приближении можно считать, что оба протона находятся на фиксированном расстоянии d друг от друга и окружены «облаком» из двух электронов. Допустим, что мы нашли энергию основного состояния двух электронов и ее зависимость от расстояния d. Для определенного значения d, соответствующего стабильной молекуле, эта энергия будет минимальной. Наша задача является нерелятивистской, и поскольку мы считаем протоны бесконечно тяжелыми, то в нашем распоряжении остаются константы m, $\hbar$ и e. Единственной «естественной» энергией при этом будет R_∞, а единственной «естественной» длиной — боровский радиус a_0. Эти величины и характеризуют молекулу водорода. Более подробное рассмотрение подтверждает эту оценку, которая к тому же находится в согласии с опытом. Энергия связи молекулы водород равна 4,5 эВ, а среднее расстояние между протонами составляет 0,75 Å (табл. 30А). Эти значения вообще типичны для молекул: их энергии связи лежат в пределах 1—10 эВ, а межъядерное расстояние имеет порядок 1 Å (10^{-8} см).

В твердом теле действует тот же «механизм» связи, что и в молекуле, а расстояние между двумя соседними атомами твердого тела также имеет порядок 1 Å.

31. Приведенные оценки дают понятие об энергии, выделяемой или поглощаемой в *химических реакциях*. Элементарный процесс в случае химических реакций заключается в том, что две или несколько молекул сталкиваются, образуя одну или несколько других молекул. Связанная с этим элементарным процессом энергия должна быть порядка молекулярной энергии связи, т. е. лежит в пределах 1—10 эВ. *Полное изменение энергии, приходящееся на моль вещества*, будет порядка $(1—10)N_0$ эВ/моль, что составляет около 20—200 ккал/моль.

В качестве примера рассмотрим сгорание газообразного водорода в атмосфере хлора. Эта реакция имеет вид

$$H_2 + Cl_2 = 2HCl + 44 \text{ ккал}, \qquad (31а)$$

и количество выделяющейся теплоты находится в согласии с нашими оценками.

32. Среди макроскопических единиц существует одна, заслуживающая более подробного рассмотрения. Мы отмечали, что такие единицы, как *сантиметр*, *грамм* и *секунда*, взяты из повседневного человеческого опыта, поэтому неудивительно, что они оказываются малоудобными в мире атомных явлений. Существует, однако, одна макроскопическая единица, находящаяся в особом положении. Мы имеем в виду единицу потенциала *вольт*. После умножения вольта на заряд электрона получаем новую единицу — *электрон-вольт*, которая кажется специально созданной для атома. Случайно ли это?

Нет, не случайно. Первоначальный выбор вольта в качестве единицы разности потенциалов был связан с тем, что э. д. с. гальванических элементов как раз такого порядка. Например, э. д. с. кадмиево-ртутного элемента очень близка к 1 В. Мы знаем, что действие гальванических элементов основано на происходящих в них электрохимических реакциях и каждому электрону, покидающему катод батареи, соответствует некоторый элементарный химический процесс. В этом процессе освобождается некоторое количество энергии (равное, скажем, X), которая может перейти в работу или в некоторое количество теплоты, выделяемое за пределами батареи. Если э. д. с. батареи равна U, то $Ue = X$, и поскольку в качестве единицы э. д. с. мы принимаем вольт, то энергия, выделяемая в элементарном электрохимическом процессе, будет порядка электрон-вольта. Вот почему электрон-вольт оказывается единицей, как бы специально придуманной для мира атомов и молекул.

Наиболее важные факты физики ядра

33. Ядра построены из протонов и нейтронов. Эти частицы имеют очень близкие свойства, и их часто рассматривают как два различающихся *зарядовых состояния* одной частицы, называемой *нуклоном*. Таким образом, возможны два состояния нуклона: заряженное состояние (протон) и нейтральное состояние (нейтрон) [*]).

Число A нуклонов в ядре называется *массовым числом* или *нуклонным числом* ядра. Число Z протонов называется *зарядовым числом* ядра или *атомным номером*, если мы имеем в виду соответствующий атом.

Масса протона и нейтрона равны:

$$M_p = (1{,}00727633 \pm 0{,}00000008) \text{ а. е. м.} = (938{,}256 \pm 0{,}005)\ \text{МэВ}/c^2, \qquad (33а)$$

$$M_n = (1{,}00866544 \pm 0{,}00000046) \text{ а. е. м.} = (939{,}550 \pm 0{,}005)\ \text{МэВ}/c^2. \qquad (33б)$$

*) Нейтрон был открыт Чедвиком в 1932 г. (Chadwick J. The Existence of a Neutron.— Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1932, v. 136, p. 692).

Рассмотрим ядро с массовым числом A и зарядовым числом Z. Обозначим его массу через $M(A, Z)$. Величина

$$\Delta(A, Z) = (ZM_p + (A-Z)M_n) - M(A, Z) \qquad (33c)$$

называется *дефектом массы ядра*. Дефект массы всегда положителен. Действительно, величина $\Delta(A, Z)c^2$ равна *энергии связи* ядра, т. е. энергии, которую необходимо затратить, чтобы разделить ядро на

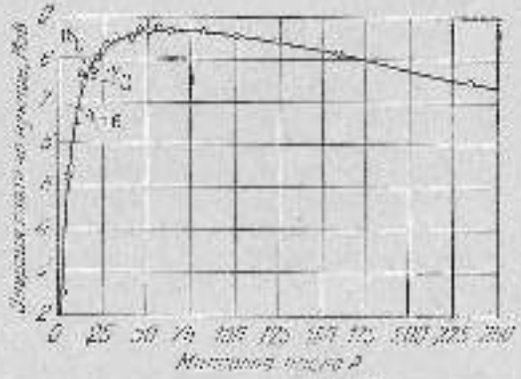


Рис. 33А. Зависимость энергии связи нуклонов $\Delta(A, Z)c^2/A$ от массового числа A. Точки отвечают стабильным ядрам, для которых указаны элементы. Обратите внимание, что существует непрерывность между $A=5$ и экспериментальные точки хорошо ложатся на плавную кривую. Энергия связи на нуклон составляет примерно 8 МэВ и лишь медленно возрастает с ростом A, пока не достигнет максимума при $A=56$. Затем наблюдается медленное уменьшение, обусловленное возрастанием кулоновской энергии отталкивания между протонами

протоны и нейтроны. Энергия связи, приходящаяся на один нуклон, *приблизительно постоянна* для всех стабильных ядер и близка к

$$\Delta(A, Z)c^2/A \sim 8 \text{ МэВ}. \qquad (33d)$$

Это надежно установленный *опытный* факт. Среди легких ядер есть несколько известных исключений из этого правила. Кроме того, имеет место систематическое уменьшение энергии связи на нуклон по мере возрастания A. Это хорошо показано на рис. 33А.

34. Следует помнить, что записанные в большинстве таблиц значения масс «ядер» в действительности относятся к нейтральным атомам.

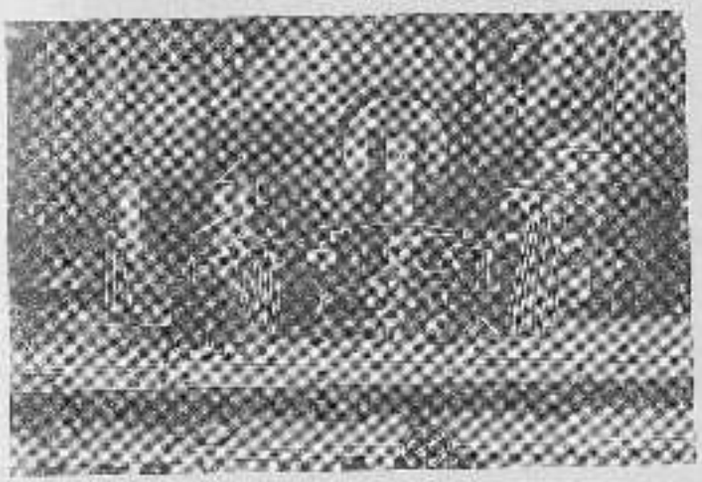
Пусть $M(A, Z)$ — масса ядра, а $\overline{M}(A, Z)$ — масса соответствующего атома, тогда

$$M(A, Z) = \overline{M}(A, Z) + Zm - B(Z). \qquad (34a)$$

Здесь m — масса электрона, а положительная величина $B(Z)$ есть энергия связи всех электронов в атоме.

При вычислении энергетического баланса некоторой ядерной реакции в большинстве случаев все равно, пользуемся ли мы значениями истинных масс ядер или значениями масс соответствующих атомов. Действительно, в последнем случае вклады от электронных масс компенсируются, а энергия связи $B(Z)$ очень мала по сравнению

с ядерной энергией связи, близкой к 8 МэВ на нуклон, и ею почти всегда можно пренебречь.



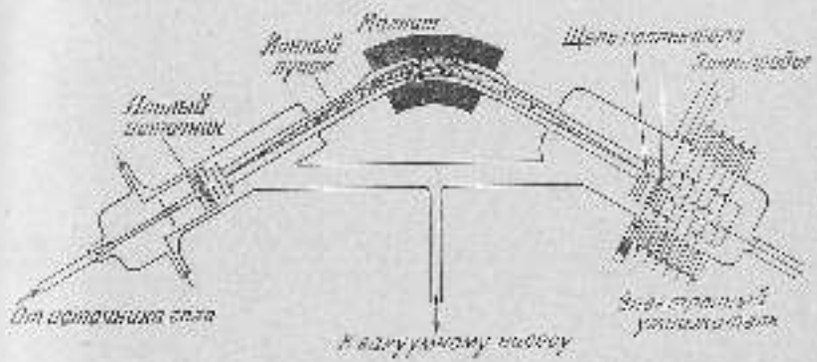


Рис. 33А. Масс-спектрометр для анализа малых количеств в химически чистом виде и элементов. Название прибора — не совсем точное название атомных масс, а определение относительной распространенности различных изотопов элемента. Полученные данные используются для определения возраста метеоритов, что очень важно для понимания происхождения и эволюции нашей солнечной системы (Edwards J. H. The Age of the Earth and the Solar System.— Scientific American. 1960, v. 203, p. 110). Вверху дана фотография масс-спектрометра, а внизу — его схема. Благородный газ, выделенный из исследуемого минерала, ионизуется электронами в специальном ионном источнике. Ускоренные электрическим полем ионы отклоняются магнитным полем. Разные частоты отклоняют ионы с разной массой в магнитном поле. Разные частоты отклоняют ионы с разной массой в магнитном поле. Разные частоты отклоняют ионы с разной массой в магнитном поле

ские исследования, начатые работами Дж. Дж. Томсона и Ф. Астона, дали нам точные значения атомных масс [*]).

Другим источником сведений о массах ядер является изучение кинематики ядерных реакций.

35. С увеличением массового числа A отношение Z/A обнаруживает систематическое уменьшение. Для не слишком тяжелых ядер,

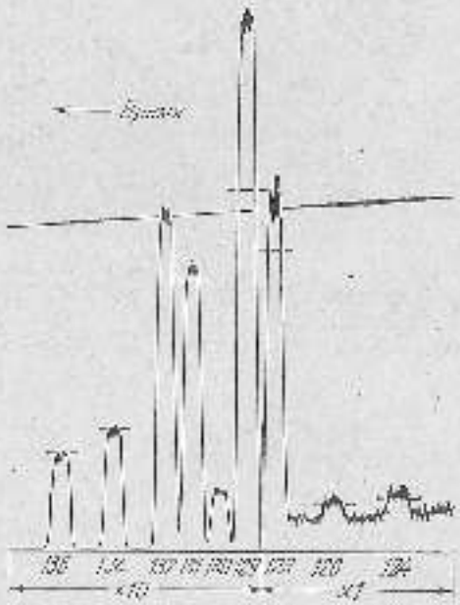


Рис. 34В. Спектр масс, полученный с помощью прибора, описанного на рис. 34А, для изотопов четырех атомов. Вертикальная пунктирная линия показывает распространенность каждого изотопа в земной атмосфере. Мы видим, что изотопный состав обычного ксенона ^{129}Xe. Заметим, что краевое распространенных изотопов в двух различных частях земной коры

когда A меньше 50, отношение Z/A близко к 0,5. С увеличением A отношение Z/A медленно уменьшается, и, например, для изотопа урана $^{238}_{92}U$ оно равно 0,39. Для очень малых A мы опять обнаруживаем нерегулярность: водород, например, имеет три изотопа — $^{1}_{1}H$, $^{2}_{1}H$ (дейтерий) и $^{3}_{1}H$ (тритий).

Некоторые ядра стабильны, тогда как другие нестабильны и испускают частицы или γ-излучение. Обычно встречающиеся в природе ядра либо абсолютно стабильны, либо имеют чрезвычайно большие времена жизни. Если бы этого не было, то они распались бы еще в ранней стадии истории Земли и не существовали бы в настоящее время. Ядра, образующиеся в ядерных реакциях, могут иметь весьма короткие времена жизни — порядка малых долей секунды. Если время жизни очень мало, мы часто говорим

[*]) *Aston F. W.* Isotopes and Atomic Weights. — Nature, 1928, v. 105, p. 617; см. также: *Астон Ф.* Масс-спектры и изотопы. — М.: И.Л. 1948.

о возбужденном состоянии ядра, особенно в тех случаях, когда оно испускает γ-излучение и, следовательно, A и Z ядра остаются неизменными.

В настоящее время известно около 900 ядер, из них 280 стабильных. Если мы изобразим эти ядра точками на плоскости (A, Z),

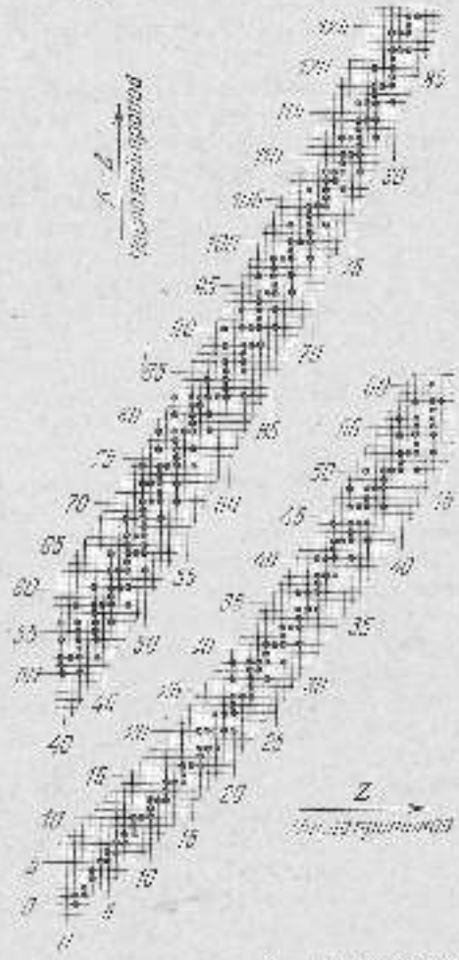


Рис. 35А. Стабильные и нестабильные ядра. Показаны только ядра, среднее время жизни которых больше 1 часа. Для значений Z менее или примерно равных 20, N и Z почти одинаковы, но при значениях Z более 20 N больше Z и с ростом Z это различие увеличивается. Большинство ядер, существующих в природе, расположено вдоль кривой, называемой долиной стабильности. Ядра, расположенные в стороне от этой кривой, нестабильны и испускают электроны или позитроны, стремясь попасть в долину стабильности. Ядра, расположенные выше долины стабильности, испускают электроны, ядра, расположенные ниже долины стабильности, испускают позитроны. Ядра, расположенные слишком далеко от долины стабильности, испускают нейтроны или протоны. Ядра, расположенные на краю области стабильности, испускают α-частицы. Ядра, расположенные в области, ограниченной пунктирной линией, испускают γ-излучение. Ядра, расположенные в области, ограниченной сплошной линией, испускают нейтроны. Ядра, расположенные в области, ограниченной штрихпунктирной линией, испускают протоны. Ядра, расположенные в области, ограниченной штрихпунктирной линией, испускают α-частицы. Ядра, расположенные в области, ограниченной штрихпунктирной линией, испускают γ-излучение. Ядра, расположенные в области, ограниченной штрихпунктир

то, в соответствии со сказанным выше, точки расположатся вдоль широкой полосы (рис. 35А). Чем дальше ядро отстоит от центральной области этой полосы, тем более оно нестабильно.

36. Эксперименты показали, что ядро в первом приближении можно считать сферой, радиус которой

$$r \approx r_0 A^{1/3}, \text{ где } r_0 \approx 1{,}2 \cdot 10^{-13} \text{ см} = 1{,}2 \text{ ферми} \qquad (36а)$$

(единица 10^{-13} см часто используется в ядерной физике в качестве единицы длины; она названа ферми в честь Энрико Ферми). Объем ядра пропорционален r^3, а следовательно (см. формулу (36а)), пропорционален массовому числу A. Отсюда мы делаем заключение, что плотность ядерного вещества приблизительно постоянна.

Многочисленные экспериментальные методы позволили определить размеры ядра. Наиболее прямой из них заключается в измерении эффективной поверхности поперечного сечения, которую образует ядро для пучка частиц высокой энергии в опытах по рассеянию.

37. Попытаемся дать характеристику тех главных свойств ядерных сил, которые удерживают протоны и нейтроны в пределах ядра. Эксперименты показали следующее.

1) Ядерные силы *невозможно* свести к силам электромагнитной природы. Они гораздо больше электромагнитных сил.

2) Радиус действия ядерных сил мал. Он не превышает 10^{-12} см. Поэтому их называют *короткодействующими* силами.

3) Ядерные силы между двумя протонами и двумя нейтронами равны. Кроме того, ядерные силы, действующие между двумя протонами, имеют ту же природу, что и силы, действующие между протоном и нейтроном. Можно было бы сказать, что они просто равны, но это утверждение требует пояснений.

Экспериментальные доказательства трех перечисленных утверждений следуют из опытов по рассеянию нуклонов, а также из систематического изучения энергетических уровней стабильных и радиоактивных ядер. Так, короткодействующий характер ядерных сил можно подтвердить следующим образом. Направим на ядра получённый на ускорителе пучок протонов большой энергии и будем изучать их рассеяние. Когда протоны находятся далеко от ядра (на расстояниях 10^{-11}–10^{-12} см), единственной силой, действующей на них, является кулоновское отталкивание. Это отталкивание не дает протонам приблизиться к зоне действия ядерных сил, если только энергия протонов не очень велика. Поэтому, если утверждение о малом радиусе действия ядерных сил справедливо, то протоны (или другие заряженные частицы, например α-частицы в опыте Резерфорда) не слишком большой энергии будут рассеиваться так, как если бы кулоновское отталкивание было единственной испытываемой ими силой. Таким образом, второе утверждение можно проверить с помощью опытов по рассеянию. Эти опыты подтверждают короткодействующий характер ядерных сил.

Поскольку протоны заряжены, то на них могут действовать также электромагнитные силы, а два протона в ядре, несомненно, испытывают кулоновское отталкивание. На расстояниях, много больших 10^{-13} см, остаются практически *одни* лишь электромагнитные силы, а на малых расстояниях преобладают ядерные силы. Электромагнитные силы играют некоторую роль в строении ядра, но роль эта второстепенная.

К сказанному необходимо добавить, что *электроны совершенно не испытывают действия ядерных сил*. На них действуют лишь электромагнитные силы.

38. Рассмотрим некоторые следствия из короткодействующего характера ядерных сил. Согласно современным представлениям о характере этих сил, эффективный потенциал взаимодействия между двумя нуклонами для расстояний r, больших 10^{-13} см, можно представить функцией *)

$$U(r) \approx C \frac{b}{r} \exp\left(-\frac{r}{b}\right). \qquad (38а)$$

Константа b задает порядок радиуса действия сил; ее значение $b = 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ см. Константа C определяет значение силы. Природа сил на расстояниях, меньших 10^{-13} см, оказывается более сложной. Ее нельзя выразить потенциалом (38а).

Следует иметь в виду, что функция $U(r)$ не дает *полного* описания взаимодействия между двумя нуклонами. Она передает, однако, наиболее существенное свойство этого взаимодействия, а именно *экспоненциальное падение потенциала с расстоянием*.

Посмотрим, что означает такое падение. На расстоянии $r = b$ мы имеем $U(b) = C/e$. (Эта величина порядка 10 МэВ.) Когда расстояние увеличивается до $r = 10b = 1{,}4 \cdot 10^{-12}$ см, потенциал принимает значение $U(10b) = 0{,}1 C \exp(-10) \approx 5 \cdot 10^{-6} C$, а на расстоянии $r = 100b = 1{,}4 \cdot 10^{-11}$ см потенциал равен

$$U(100b) = 0{,}01\, C \exp(-100) \approx 10^{-45} C.$$

Этот простой пример показывает, что ядерными силами можно практически полностью пренебречь, если расстояние между нуклонами превосходит 10^{-11} см. Читателю следует тщательно обдумать выражение (38а). На первый взгляд этот потенциал напоминает кулоновский; однако, как видно из нашего примера, экспоненциальный множитель коренным образом меняет ситуацию.

Благодаря такому свойству ядерных сил они не играют практически никакой роли в молекулах и твердых телах. Здесь все явления почти полностью определяются электромагнитными силами. На *малых* расстояниях ($r \sim 10^{-13}$ см) ядерные силы значительно превосходят электромагнитные и роль последних становится второстепенной. Справедливость этого утверждения непосредственно следует из самого факта существования ядер. Электростатические силы отталкивания стремятся разорвать протоны

*) В гл. 9 мы дадим теоретическое объяснение самой форме потенциала $U(r)$.

в ядре, тогда как ядерные силы действуют в противоположном направлении. Ядро существует, и, следовательно, ядерные силы преобладают.

39. Энергия связи ядер имеет порядок 8 МэВ на нуклон, поэтому можно ожидать, что различные превращения ядер требуют энергий порядка 1 МэВ. Действительно, энергии различных частиц и γ-квантов, испускаемых ядрами, лежат в пределах примерно от 100 кэВ до 10 МэВ. Эти величины на 5—7 порядков отличаются от энергий, характерных для химических реакций, и это объясняет нам, почему химические процессы не затрагивают ядер. С точки зрения химии и атомной физики ядро представляет собой очень малую, жесткую, тяжелую и неделимую заряженную сферу.

При рассмотрении атома мы показали, что длина волны оптического γ-кванта велика по сравнению с размерами атома. Аналогичная ситуация существует и в ядерной физике. Рассмотрим γ-квант с энергией 1 МэВ. Эта величина типична для ядерных переходов. Соответствующая длина волны ($\lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-10}$ см = = 1200 ферми) велика по сравнению с размерами ядер.

Гравитационные и электромагнитные силы

40. Теперь мы объясним, почему, рассматривая атомы, молекулы и ядра, можно пренебречь гравитационными силами. Для отношения гравитационной и электромагнитной сил, действующих между двумя протонами, мы имеем следующее выражение:

$$\frac{M_p^2 G/r^2}{e^2/r^2} = \frac{M_p^2 G}{e^2} = 8{,}1 \cdot 10^{-39}, \qquad (40a)$$

где $G = 6{,}6720 \cdot 10^{-8}$ дин·см²/г² — гравитационная постоянная.

Это отношение чрезвычайно мало, и при наличии электромагнитного взаимодействия силами гравитации можно полностью пренебречь. Они имеют значение только в том случае, если остальные известные нам взаимодействия не играют роли. Примером может служить гравитационное взаимодействие между двумя (большими) электрически центральными телами, расстояние между которыми велико по сравнению с характерными атомными размерами.

Общая теория относительности Эйнштейна является чисто *классической* теорией гравитации. Это великолепная теория, обладающая внутренней согласованностью. Но, несмотря на многие попытки Эйнштейна и других физиков, до сих пор не удалось охватить этой теорией другие силы природы. Таким образом, явление гравитации занимает особое положение и отделено от взаимодействий, определяющих строение вещества на микроскопическом уровне. Кажется, что к микрофизике гравитация не имеет никакого отношения, поэтому мы исключаем ее из этой книги.

Читатель, возможно, заметил, что отношение (40а) представляет собой отношение гравитационной постоянной в естественных микроскопических единицах к постоянной тонкой структуры. В со-

временной квантовой теории нет места для столь малых параметров, как это отношение. Можно, однако, надеяться, что когда-нибудь будет найдено связующее звено между казующимися в настоящее время разделенными явлениями гравитации и микрофизики. В настоящее же время у нас нет никаких догадок о том, как эта брешь может быть заполнена.

41. Оценим напряженность электростатического поля на расстоянии боровского радиуса a_0 от протона. Поскольку величина a_0 имеет порядок 10^{-8} см, а электростатическая потенциальная энергия электрона в атоме водорода близка к 10 эВ, то искомая напряженность поля получается порядка 10^{11} В/м. Точное вычисление дает

$$E_{\text{кулон}} = 5{,}14 \cdot 10^{11} \text{ В/м}. \qquad (41a)$$

По сравнению с электростатическими полями, которые можно создать в лаборатории (порядка 10^7 В/м), поле (41а) весьма сильное. Отсюда следует, что внешние электрические поля не могут иметь большого влияния на атомы и молекулы, а тем более на ядра. Тем не менее такое влияние можно наблюдать: электрическое поле расщепляет спектральные линии атома на несколько близких по частоте линий. Это явление известно под названием *эффекта Штарка*.

Легко понять, почему электростатическое поле, действующее на электрон в атоме, велико по сравнению с макроскопическими полями, которые удается получить в лаборатории. Из уравнений Максвелла следует важное свойство электростатического поля в вакууме: оно достигает своего максимального значения в некоторой точке у проводников. Но проводники состоят из атомов, и если напряженность поля у проводника достигает напряженности атомного поля, проводник начнет разрушаться. Оценка (41а) является, таким образом, верхним пределом достижимой напряженности макроскопического поля. На практике электрический пробой наступает задолго до достижения этого верхнего предела.

42. Аналогичные рассуждения применимы к макроскопическому магнитостатическому полю. Поля, которые мы в состоянии получить в лаборатории, ограничены сверху условием, что их влияние на атомы не должно быть разрушительным. Магнитное поле, подобно электрическому, расщепляет спектральную линию на несколько компонент. Это явление известно как *эффект Зеемана*.

Чтобы получить верхний предел достижимой индукции магнитного поля, можно положить, что при этом пределе плотность энергии должна быть той же, что и у электрического поля порядка 10^{11} В/м. Это соответствует индукции магнитного поля порядка 10^7 Гс. Не очень трудно получить в лаборатории постоянное поле с индукцией, близкой к $0{,}5 \cdot 10^6$ Гс. Импульсные поля, действующие в течение очень коротких интервалов времени, могут достигать 10^7 Гс. Рассмотрение напряжений, возникающих в проводниках с током, создающим поле, показывает, что постоянные поля, большие 10^7 Гс, недостижимы. Такие поля вызовут силы, превосходящие те силы, которые удерживают атомы в твердом теле.

43. Среди макроскопических полей с полями, определяемыми *естественными единицами квантовой электродинамики*. По сравнению с ними даже электрические поля в атомах оказываются малыми. В качестве естественной единицы поля (электрического или магнитного) можно взять поле, соответствующее плотности энергии, равной

$$\frac{\text{(энергия покоя электрона)}}{\text{(комптоновская длина волны электрона)}^3}.$$

Этой плотности отвечает единица электрического поля, равная $4\cdot10^{13}$ В/м, и магнитное $1{,}3\cdot10^{9}$ Гс. Квантовая электродинамика предсказывает заметные отклонения от уравнений Максвелла в вакууме для таких полей. В частности, в таких полях будет нарушен принцип суперпозиции и электромагнитное поле нельзя будет описать линейными уравнениями. Для слабых полей, доступных в лаборатории, квантовая электродинамика также предсказывает отклонения от линейности. Эти отклонения, однако, фантастически малы и в макроскопическом масштабе не имеют практического значения. До сих пор их не удалось наблюдать в макроскопических опытах. Макроскопические поля, измеренные в естественных единицах, чрезвычайно малы. Это связано с малостью постоянной тонкой структуры α. Благодаря такой малости линейные уравнения Максвелла оказываются чрезвычайно точными.

О численных оценках

44. Скажем несколько слов о численных оценках некоторых физических величин. Читателю может показаться, что говорить об этом незачем. Вычисления кажутся ему необходимым злом (особенно в домашних заданиях), и он не видит в них никакой физики. Однако это неверно. Существуют «плохие» и «хорошие» вычисления. Последние требуют некоторой *физической интуиции*. Чтобы показать разницу между «плохими» и «хорошими» расчетами, рассмотрим пример. При изучении тонких деталей спектра атома водорода было обнаружено, что спектральная линия, которая в спектрометре с плохим разрешением кажется одиночной, при переходе к прибору с лучшим разрешением разделяется на несколько близко расположенных линий. В этом случае говорят, что спектр имеет *тонкую структуру*. При теоретическом изучении тонкой структуры находится энергия E_f, характеризующая энергетическое расстояние между соседними линиями. Теория дает следующее выражение для E_f:

$$E_f = e^4\alpha^4 mc^2/32\hbar^4c^4. \tag{44a}$$

Можно взять численные константы из табл. 2А и подставить их в выражение (44а). Это было бы, однако, «плохим» способом вычисления. Во-первых, потому, что неприятно вычислять e^4 или $\hbar^4$; во-вторых, смысл формулы (44а) сильно затемнен; пока вычисления не окончены, мы не «знаем» порядка величины E_f и формула (44а) ничего не говорит нам о физической природе эффекта тонкой структуры. Теперь сгруппируем константы формулы (44а) в отдельные множители, имеющие определенный смысл:

$$E_f = \frac{1}{16}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^4\left(\frac{mc^2}{2}\right) = \frac{1}{16}\alpha^4\left(\frac{e^2/a_0}{2}\right) = \frac{\alpha^4}{16}R_\infty. \tag{44b}$$

Здесь правая часть дает весьма прозрачный смысл выражения E_f для расстояния между уровнями тонкой структуры. Это поправка порядка 10^{-4} от значения полных энергетических уровней. Очень просто получить значение этой поправки в электронвольтах: для этого нужно 13,6 эВ умножить на постоянную $\alpha^4/16$. Мы убедились, что простая перегруппировка множителей может сильно упростить вычисления и даже сделать больше — позволить проникнуть в физическую природу явления. В нерелятивистской теории атома водорода (если считать массу протона бесконечной, а электрон не имеющим внутреннего магнитного момента) нет места для эффекта тонкой структуры. Чтобы убедиться в этом, вспомним, что в такой теории фигурируют константы e, m и $\hbar$, но нет константы c. Действительно, энергия ионизации R_∞ не зависит от c. Скорость света c входит, однако, в знаменатель выражения для E_f, и если мы пользуемся нерелятивистским приближением, в котором $c\to\infty$, то получаем $E_f\to0$. Таким образом, величину E_f можно считать релятивистской поправкой к основной структуре энергетических уровней. Можно ожидать, что эта поправка будет иметь порядок $(v/c)^2R_\infty$, где v — скорость электрона. Выше мы производили оценку скорости электрона и нашли, что $v/c\sim\alpha$. Таким образом, мы получаем оценку, аналогичную (44b). Итак, тонкая структура спектральных линий водорода представляет собой релятивистский эффект.

45. «Постоянная тонкой структуры» — такое название величина α получила в связи с работой Зоммерфельда о тонкой структуре линий водорода. Важное значение этой постоянной было впервые осознано в связи с формулой (44b). Когда Бор создал свою теорию атома водорода, было не принято писать энергию ионизации атома водорода в виде

$$R_\infty = e^2mv^2/2, \tag{45a}$$

а писали так:

$$R_\infty = e^4m/2\hbar^2. \tag{45b}$$

Если бы кто-нибудь в то время догадался написать выражение для R_∞ в виде (45а), то постоянная α, возможно, была бы названа «постоянной основной структуры», и против этого нелепого было бы возразить. Выражение (45а) является «научной» формулой для R_∞: оно объясняет нам физический смысл этой величины. Как мы уже указывали, α является фундаментальной константой связи между электромагнитным полем и элементарным зарядом. Атом представляет собой «слабо связанную структуру» с «жестким» движущимся электроном, потому что α мала по сравнению с единицей. Именно по этой причине нерелятивистская теория атома является хорошим

приближениях. Релятивистские поправки к этой теории имеют порядок $(v/c)^2$, или α^2.

46. Мы надеемся, что рассмотренный пример дает некоторое представление о способе выполнения численных расчетов. В ваших выражениях следует пытаться выделить комбинации физических констант, которые имеют ясный физический смысл, и сгруппировать множители или члены до того, как подставлять в формулу числа. Такая операция не проста, и, до понимая физического смысла задачи, невозможно выполнить ее правильным образом.

Помещенные задания, помещенные в этой книге,— *не* упражнения в арифметике. Их цель — познакомить читателя с порядками величин в квантовой физике и научить применению идей, рассмотренных в тексте, к конкретной физической ситуации.

Дополнительная тема: фундаментальные константы природы *)

47. Подумаем над следующим интересным вопросом: сколько в природе независимых фундаментальных констант?

За этим вопросом кроется следующая идея. Современные физические теории дают определенные соотношения между параметрами, характеризующими физическую систему. Например, энергия ионизации водорода может быть выражена через постоянные m, e, $\hbar$ или, если хотите, через m, c и α. Если значения констант m, e и $\hbar$ нам известны, то можно предсказать значение ионизационного потенциала и проверить нашу теорию, сравнив это предсказание с экспериментом. Таким же образом может быть «теоретически понято» атома большое число других физических параметров: их можно выразить через несколько *фундаментальных констант*.

Мы должны объяснить выражение «теоретически понято». Мы рассматриваем некий параметр как «теоретически понятый», если можем указать на определенное уравнение, которое в принципе его определяет, независимо от того, достаточно ли наших ограниченных математических возможностей для получения численного значения параметра.

Разделение физических констант на фундаментальные константы и производные параметры в принципе весьма произвольно. Практически мы считаем фундаментальными такие константы, которые входят в наши уравнения наиболее «простым» путем и имеют наиболее ясный физический смысл. Очевидно, что разумнее считать постоянную тонкой структуры α фундаментальной константой, а энергию ионизации водорода — производным параметром, нежели наоборот.

Набор независимых фундаментальных констант представляет собой ряд физических параметров, не связанных друг с другом теоретически. Мы не можем вывести их численное значение. Каждая из них должна быть определена из опыта. Нас интересует вопрос о достаточном числе независимых констант, т. е. о числе констант, которые нужно знать, чтобы иметь возможность теоретически вычислить все другие физические параметры.

Очевидно, что такой вопрос имеет смысл лишь в рамках современных физических теорий. Величина, которую мы сегодня считаем чисто эмпирической, завтра, может быть, будет «объяснена» с помощью новой теории.

48. Чтобы понять современное состояние рассматриваемой проблемы, перечислим ряд фундаментальных констант.

1) Постоянная тонкой структуры:

$$\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137.$$

2) Отношение масс электрона к протону:

$$\beta = m/M_p \approx 1/1836.$$

3) Гравитационная постоянная в естественных атомных единицах:

$$\gamma = \frac{(M_p^2 G)/(\hbar c)}{M_p c^2} = 5{,}902 \cdot 10^{-39}.$$

4) Константа, характеризующая силу так называемого *слабого взаимодействия*, ответственного за распад многих ядер. В настоящее время мы считаем, что слабые взаимодействия не имеют ничего общего с ядерными силами, электромагнетизмом и гравитацией. Все явления, связанные со слабыми взаимодействиями, можно считать следствием некоторого универсального взаимодействия, характеризуемого *одной безразмерной* константой связи. Это фундаментальное взаимодействие примерно в 10^{14} раз меньше ядерного взаимодействия.

5) Отношение масс электрона к μ-мезона:

$$m/m_\mu \sim 1/200.$$

Мюон (или μ-мезон) представляет собой элементарную частицу, которая ничем, кроме массы, не отличается от электрона. В настоящее время совершенно не ясно, какова роль μ-мезонов в строении вещества.

6) Наконец, существует несколько констант, описывающих *сильные взаимодействия*. Частным случаем этих взаимодействий являются ядерные силы. Теоретическая ситуация весьма нечетка, и чем неизвестно, сколько нужно иметь независимых констант, чтобы описать ядерные силы. Рассмотрим две такие константы:

$$S_1 = \frac{(\text{масса } \pi\text{-мезона})}{(\text{масса протона})} \approx 0{,}15, \quad S_2 = \frac{B_D}{M_p c^2} \approx 2{,}35 \cdot 10^{-3},$$

Здесь $B_D = 2{,}23$ МэВ — энергия связи дейтрона.

Выбор константы S_1 произволен. Мы остановились на ней, так как ее физический смысл хорошо понятен. Это одна из возможных констант, пригодных для описания ядерных сил. В ней нет ничего особенно «фундаментального», но она является мерой ядерных

*) Тем первом чтении можно пропустить.

сил. Другими словами, мы считаем, что энергии связи всех остальных ядер могут быть в принципе выражены через константы S_1 и S_2. В этом случае мы обнаруживаем весьма большую пропасть взгляда на «теоретическое толкование проблемы». Ведь нам неизвестны «правильные уравнения» и наша оптимистическая надежда, что такие уравнения, включающие S_1 и S_2, существуют, может оказаться совершенно необоснованной.

Действительно, в настоящее время мы не можем вычислить массы таких частиц, как K-мезоны, нуклоны, Λ-частицы и т. п. Мы не можем соответствующей теории, и отношения всех этих масс следовало бы внести в наш перечень фундаментальных констант. С другой стороны, в один прекрасный день может появиться теория, которая позволит вычислить массы некоторых, а может быть и всех, сильно взаимодействующих частиц. Предельно оптимистическая точка зрения заключается в том, что «конечная» теория сильных взаимодействий не будет содержать эмпирических констант. Все, включая и константы S_1 и S_2, можно будет вычислить. Однако в настоящее время вопрос о числе констант, описывающих сильные взаимодействия, остается совершенно открытым.

49. Мы не включили в перечень констант весьма замечательную *электрическую* константу — отношение заряда электрона к заряду протона. Опыты Кинга, выполненные в 1960 г., показали, что это отношение равно -1 с погрешностью $1/10^{21}$, т. е. $e_e/e_p = (-1 \pm 10^{-21})$.

Кинг измерил также отношение заряда ядра гелия к заряду протона и показал с той же фантастической точностью, что это отношение равно 2 *). Эти результаты в сильнейшей степени поддерживают идею, согласно которой заряд любой частицы кратен заряду электрона. Существует много доводов в ее пользу, но ни один из них не обладает точностью опыта Кинга. Физики уже давно верят в «квантование заряда». Однако они не могут объяснить с высот теории, *почему* все заряды кратны заряду электрона.

Почему же мы тогда не включим в наш перечень константу (-1 ± 10^{-21})? Потому, что все наши теории оказались бы опрокинутыми, если бы выяснилось, что эта величина не равна в точности -1. Мы можем спокойно допустить, что эмпирические константы, приведенные в нашем перечне, будут несколько иными; в этом смысле они и эмпирические. Например, квантовая электродинамика вполне устояла бы, если бы более точные измерения показали, что постоянная тонкой структуры оказалась на 1% больше. Это не изменило бы известных нам законов природы. Иначе обстоит дело с квантованием заряда: на этом принципе основана *структура* нашей теории.

50. Квантовая электродинамика, как теория атомов, молекул и вещества в целом, содержит, в сущности, лишь две фундаменталь-

*) Это вывод, следующий из опытов Кинга. В действительности Кинг показал, что молекулы водорода и дейтерия *квантованы* с указанной точностью (*King J. G.* Search for a Small Charge Carried by Molecules.— Phys. Rev. Lett., 1960, v. 5, p. 562).

ные эмпирические константы: α и $\beta = \alpha/M_p$. Это означает, что все физические величины в этой области физики зависят от двух указанных констант и теории, по крайней мере в принципе, может дать эту зависимость. В такой теории свойства различных атомных ядер проявляют себя через целые числа Z и A, а другие физические характеристики ядер влияют на атомы, молекулы и вещество в целом лишь в виде очень «слабых» эффектов.

Наше утверждение, таким образом, упрощает довольно ситуацию, но интересно продолжить обсуждение этой идеи. С первого взгляда она может показаться неверной, так как число «фундаментальных констант» в табл. 2А превышает две. Следует, однако, заметить, что перечисленные там константы выражены в совершенно произвольных (макроскопических) единицах и поэтому значения констант не имеют никому абсолютного значения.

Существенным обстоятельством является то, что мы различаем фундаментальные физические величины и величины, зависящие от наших произвольных единиц. Рассмотрим для примера скорость звука в кристалле. Число, выражающее эту скорость в сантиметрах в секунду, не будет фундаментальной константой, так как число зависит от произвольно выбранных единиц сантиметр и секунда. Большой смысл с точки зрения теории имеет, например, отношение этой скорости к скорости света; это величина не зависит от макроскопических единиц, и мы верим, что квантовая электродинамика в принципе может ее вычислить.

51. Чтобы понять истинный смысл приведенных в табл. 2А констант, рассмотрим, как определяется макроскопическая система единиц.

Килограмм определен международным соглашением как масса определенного куска металла, хранящегося в Париже. Чтобы отметить, что мы имеем в виду именно этот кусок металла, обозначим эту единицу как $(\text{кг})_p$ — «парижский килограмм». Этот кусок металла содержит определенное число, скажем n_1, нуклонов. Точное значение n_1 неизвестно, но в принципе может быть подсчитано. Теперь предположим, что теория сильных взаимодействий и теория ядра дают нам возможность вычислить постоянную c_1, равную отношению массы нуклона (средней для данного ядра) к массе протона. Эта постоянная близка к единице. Мы запишем массу парижского килограмма в виде

$$(\text{кг})_p = n_1 c_1 M_p = n_1 c_1 \beta^{-1} m. \qquad (51a)$$

Строго говоря, постоянная n_1 будет зависеть от α и β, но слабо. Точное значение числа n_1 неизвестно, но это численная константа, выбранная международным соглашением. Она равна числу нуклонов в парижском килограмме.

52. Для *метра* существуют (или, скорее, существовали) два эталона. Старый эталон метра был определен как расстояние между двумя метками, нанесенными на определенном металлическом стержне, хранящемся в Париже. Мы назовем этот метр «парижским» и обозначим $(\text{м})_p$. Новый эталон является «атомным». Соот-

вестствующей атомной длины, который мы обозначим $(\lambda)_a$, определяется как длина, равная некоторому числу длин волн определенной оранжевой линии в спектре криптона. Это число по международному соглашению принято равным $n_2 = 1\,650\,763{,}73$.

Длина волны выбранной линии криптона может быть в принципе вычислена, и ее можно записать в виде

$$\lambda = c_2 \alpha^{-2} (\hbar/mc), \tag{52a}$$

Здесь c_2 — постоянная, слабо зависящая от α и β. В первом приближении это просто численная константа, и, изучив математические методы атомной физики, можно было бы ее вычислить. Атомный метр можно теперь записать в виде

$$(m)_a = n_2 c_2 \alpha^{-2} (\hbar/mc). \tag{52b}$$

53. Введение «атомного эталона» времени не может вызвать затруднений, но в настоящее время *секунда* определяется астрономически. Предположим, однако, что атомный эталон принят и что секунда выражена через частоту какого-нибудь определенного перехода в атоме цезия, которая лежит в области радиочастот. Эту частоту можно интерпретировать как частоту прецессии спина ядра цезия в магнитном поле орбитальных электронов. Она может быть измерена чрезвычайно точно. Ее значение равно

$$1/T_1 = \nu_1 = 9\,192\,631\,770 \pm 10 \text{ Гц}. \tag{53a}$$

Точность измерения этой величины определяется точностью, которая может быть достигнута в радиочастотных измерениях. Квантовая электродинамика дает теоретическое выражение для этой частоты:

$$\nu_1 = c_3 \alpha^4 \beta \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right); \tag{53b}$$

здесь c_3 — постоянная, почти не зависящая от α и β. В принципе, но не на практике, ее можно определить, если знать некоторые характеристики ядра цезия. Предположим теперь, что мы *определяем* секунду [назовем ее «атомной секундой» и обозначим $(s)_a$] следующим образом:

$$(s)_a = 9\,192\,631\,770\ T_a = n_3 c_1^{-1} \alpha^{-2} \beta^{-1} (\hbar/mc^2), \tag{53c}$$

где $T_a = 1/\nu$ — период атомных колебаний, а число $n_3 = 9\,192\,631\,770$ определяется по международному соглашению.

54. Рассмотрим, наконец, старый эталон длины — парижский метр $(m)_p$. Он определен как расстояние между двумя метками на металлическом стержне и равен поэтому длине определенной цепочки атомов. Число n_4 атомов этой цепочки определено международным соглашением, хотя оно известно не слишком точно. Расстояние между двумя соседними атомами в металлическом стержне может быть (в принципе, разумеется) вычислено. Оно будет иметь вид $c_4 a_0$, где a_0 — боровский радиус, а c_4 — постоянная, почти слабо зависящая от α и β. Поэтому мы можем написать следующее

выражение для парижского метра:

$$(m)_p = n_4 c_4 \alpha^{-1} (\hbar/mc). \tag{54a}$$

Этот эталон длины неудовлетворителен по очевидной причине: расстояние между двумя метками не может быть измерено очень точно. С гораздо большей точностью, например, может быть выполнено сравнение двух длин волн в оптической части спектра, и нет никаких причин, по каким мы должны были бы выражать эти длины через длину металлического стержня.

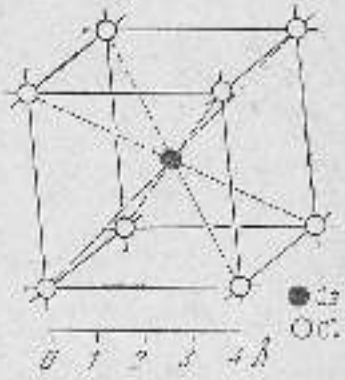


Рис. 14А. Гранецентрированная кубическая решетка. Cs Cl. Расстояние между атомами твердого тела имеет порядок боровского радиуса a_0. Такой решетки может быть получено объемно-центрированной кубической решетки: атомы хлора расположены в вершинах куба, а в центре каждого куба расположен атом цезия. Заметим, что ион цезия отличается от предыдущего кристалла NaCl, показанного на рис. 13А, гл. I. В соответствии с формулой Cs Cl кристалл содержит равное число атомов Cs и Cl, если же рассматривать изолированную ячейку, показанную на рисунке, может показаться, что число атомов хлора больше, чем атомов цезия.

55. Наши рассуждения объясняют истинную природу макроскопических эталонов. Они могут быть определены через произвольным образом выбранные атомные параметры и числа n_1, n_2, n_3, устанавливаемые некоторым соглашением (мы указывали, что в действительности число n_1 известно недостаточно точно; оно было задано недавно).

Отметим следующее.

1) Измерение длины волны заключается в сравнении ее с длиной волны оранжевой линии криптона. Такое сравнение можно выполнить очень точно, поэтому длины волн видимой части спектра известны с хорошей точностью. В сущности, постоянная Ридберга является волновым числом, вот почему она известна с большей точностью. Наиболее точные измерения длины заключаются в измерении отношений длин волн в видимой области спектра. Эти измерения имеют потенциально большое значение для теории. Если она сможет с такой же степенью точности предсказать отношения длин волн, то мы сможем с большой точностью сравнить теорию и опыт. Наши вычислительные возможности, однако, сейчас ограничены, и это уменьшает значение указанных измерений для теории.

2) В радиочастотной области спектра наиболее точно можно измерить отношение двух частот. Измеряя частоту перехода в атоме или молекуле, мы в действительности сравниваем ее с цезиевым эталоном.

3) Измерение скорости света сводится к сравнению *частоты*, соответствующей оранжевой линии криптона, с видимой частотой. Такое измерение, в сущности, не является определением «фундаментальной физической константы». Скорее его можно считать выражением нашего произвольного стандарта длины через произвольный стандарт времени.

56. Рассмотрим формулы (51a), (52b), (53г) и (54a). Они дают теоретические выражения макроскопических эталонов: а) через числа n_1, n_2, n_3 и n_4, определенные международным соглашением; б) через фундаментальные константы α, $\hbar/mc$ и $\hbar/mc^2$ квантовой электродинамики; в) через величины c_1, c_2, c_3, c_4, которые *в принципе* могут быть вычислены.

Даже если практически мы не в состоянии точно вычислить c_1, c_2, c_3 и c_4, то известно, что в первом приближении это числовые параметры, не зависящие от α и β. Если бы мы могли *вычислить* эти величины, то это означало бы, что можно вычислить скорость света в единицах $(\kappa)_e/(\kappa)_a$.

Наши теоретические выражения для макроскопических эталонов позволяют нам поставить следующий вопрос: как изменился бы мир, если бы даны постоянные *слегка* изменились? Иными словами: как изменился бы мир, если бы константы α и β были *немного* другими? Это интересный вопрос. Он позволяет выяснить даже понимание роли констант α и β в строении нашего мира.

57. Поставим другой вопрос: почему размеры атома близки к 10^{-10} м? Почему атомы столь малы? Вопрос кажется метафизическим, но на самом деле это не так. Поставив вопрос иначе: почему линейные размеры человеческих существ имеют порядок 10^{10} a_0?

Мы ответим на этот вопрос, если сможем объяснить число атомов в человеке, а эта проблема в принципе может быть решена. Было бы абсурдным пытаться получить точное значение этого числа, но, возможно, мы будем в состоянии получить его, скажем, с погрешностью до 10^6 (разумеется, если мы будем получше знать биологию и близкие науки). Ибо эти грубые рассуждения, которые могут казаться весьма шаткими, имеют целью лишь подчеркнуть, что все свойства макроскопического мира, о котором мы живем, тесно связаны со свойствами элементарных частиц и их взаимодействиями.

Задачи

1. В 1903 г. Пьер Кюри и Лаборд измерили количество тепла, выделяемое 1 г радия. Поместив его в калориметр (в котором большинство α-частиц поглощалось в самом источнике или в калориметре, а их кинетическая энергия превращалась в теплоту), они нашли, что 1 г чистого радия (теперь мы знаем, что это всех около $^{226}_{88}Ra$) выделяет около 100 кал/ч. Зная период полураспада радия T, вычислите энергию (в мегаэлектронвольтах) α-частицы, испускаемой при распаде радия. Период полураспада радия $T = 622$ года.

2. а) Ядро радия (как ядром в виде частиц $^{A}_{88}Ra$) имеет положительный дефект массы, тем не менее оно неустойчиво и распадается. Как это объяснить? Является ли положительный знак дефекта массы необходимым и достаточным условием стабильности? Рассмотрите эту проблему сначала.

б) Период радия $^{226}_{88}Ra$ был измерен Дюпре и Марией Кюри. Распад этого ядра сопровождается испусканием α-частицы, представляющей собой ядро атома гелия $^{4}_{2}He$. В свете вышесказанного, что существующие в природе элементы могут быть либо стабильными, либо очень долгоживущими, так как изотопы с малым временем жизни за геологические времена распались бы. В указанном выше периоде полураспада $T = 1622$ года — срок крайне малый. Как можно объяснить существование в природе радия?

3. Отметим замечательную особенность распада радиоактивных ядер, подобных $^{226}_{88}Ra$: времена жизни на чрезвычайно велики. Попытайтесь, исходя из фундаментальной константы теории связи и электродинамики, найти составляющую единицу времени и вычислить ее в секундах. Какую бы комбинацию констант вы ни взяли, очевидно, что $^{226}_{88}Ra$ живет слишком долго. Здесь мы сталкиваемся с проблемой, решение которой приведено в гл. 7. Дело в очень интересном и важном квантово-механическом эффекте (так называемом туннельном эффекте), который объясняет долгое время жизни α-излучателей, подобных $^{226}_{88}Ra$.

4. Мощность излучения с поверхности Солнца равна $3,98 \cdot 10^{33}$ Вт. Предположение ядерной физики было бы лишь, в чем источник такого огромного количества энергии.

Сделаем несколько грубых оценок. Возраст Солнца составляет не менее 4 миллиардов лет. Его масса равна $1,98 \cdot 10^{30}$ кг.

а) Какая часть массы Солнца будет израсходована в виде энергии излучения в течение этого времени? (Ответ на этот вопрос согласуется с предположением, что за время существования Солнца его масса не уменьшилась сколько-нибудь заметно.)

б) Почему источником энергии Солнца не могут быть химические реакции?

в) Можете ли вы указать ядерные процессы, которые могли бы быть источником солнечной энергии? Посмотрите карты по астрофизике или сделайте собственные оценки разумности таких гипотез.

5. Мы указывали, что плотность вещества внутри ядра (плотность ядерной материи) приблизительно постоянна для всех ядер. Оцените эту плотность в макроскопических единицах (например, в граммах на кубический сантиметр).

6. а) На основании рассуждений гл. 17 оцените среднюю энергию в простом газе при комнатной температуре (в электронвольтах).

б) При атмосферном давлении и комнатной температуре 1 моль любого газа занимает объем, равный 22,4 л. Оцените число столкновений, испытываемых молекулой азота в секунду, полагаясь, что она имеет атомный молекулярный размер. Сравните частоту столкновений с оптической частотой для видимого света.

7. Для одной из линий спектра водорода длина волны равна 4861,320 Å. В 1932 г. Ури обнаружил в спектре водорода близкую линию 4859,975 Å (Phys. Rev., 1932, v. 39, p. 164; 1932, v. 40, p. 1). Объяснение заключается в том, что обычный водород представляет собой смесь изотопов $^{1}_{1}H$ и $^{2}_{1}H$—D. Поскольку более тяжелого изотопа D (дейтерия) составляет 0,015 %, а сильно более легкие ядра являются изотопом второго типа.

При изучении спектра этого водорода в первом приближении движением ядра можно пренебречь. Попытайтесь, однако, понять его во втором. Теперь будет появляться не ядро, а центр масс системы ядро — электрон. Теория, учитывающая движение ядра, предсказывает небольшое смещение спектральных линий относительно положений, предсказываемого теорией для неподвижного (бесконечно тяжелого) ядра. Это смещение зависит от массы ядра (в нашем случае водорода или дейтерия).

Попытайтесь получить простую теорию, которая объясняла бы отношение двух приведенных длин волн. Воспользуйтесь их значениями, чтобы получить массовое число нейтрона и протона в единицах полученное значение с тем, какое следует из таблицы ядерных масс.

8. Отправляясь от позитрония, самый простой атом, это такой атом, за которого ушел один электрон. Такая система аналогична атому водорода, так как вместо ядра электрона можно сказать, что спектральные линии одноэлектронного позитрония будут подобны спектральным линиям атома водорода. Разумеется, обе системы не тождественны: ядро содержит два элементарных заряда, а ядро в случае протона — лишь один. Различие в спектрах состоит в знаке, а ядро в случае протона — лишь один. Различие в спектрах состоит в знаке,

равенством в заряду ядер лития и эрбия. На основании рассуждений п. 27 этой главы легко найти соответствие между спектральными линиями водорода и однократно ионизованного гелия. Другими словами, по входу в сутаки второго атома, можно найти длинноволновое соответствующих трех волн.

Одна из водородных линий видимой области спектра имеет длину волны 6532,89 Å. Какова длина волны соответствующей линии иона гелия? Принадлежит ли эта линия видимой области спектра? Оба ядра будем считать бесконечно тяжелыми.

9. Предположим, что α-частица испускает любое отрицательное с ядром, имеющим зарядовое число Z и массовое число A. Получите выражение для зависимости энергии (в мегаэлектрон-вольтах), которой должна обладать α-частица, чтобы достичь поверхности ядра, от массового числа A. Для простоты положим, что ядро остается неподвижным, $A-2Z$ и α-частица представляет собой тяжелый заряд. Мы считаем, что α-частица не участвует взаимодействии ядра, на нее не действуют ядерные силы. Вычисленная таким энергия является некоторой характеристикой данного ядра параметром: при больших энергиях на результатах опытов по рассеянию является действие ядерных сил, а при малых энергиях рассеяние будет определяться электростатическими силами отталкивания.

10. В этой задаче мы рассмотрим электрическую энергию отталкивания. Плотность ядерного вещества постоянна, поэтому будем считать ядро равномерно заряженной сферой. Это грубая модель для не слишком легких ядер.

а) Покажите, что электростатическая энергия U_e ядра с массовым числом A и зарядовым числом Z равна

$$U_e \approx 0{,}7\ A^{5/3}(Z/A)^2\ \text{МэВ}. \qquad (1)$$

Предположим, что число нейтронов равно числу протонов, т. е. $A \approx 2Z$. Тогда из (1) получаем выражение для электростатической энергии, приходящейся на один нуклон:

$$U_e/A \approx 0{,}17\ A^{2/3}\ \text{МэВ}. \qquad (2)$$

Сравнивая эту энергию со средней энергией связи B нуклона, которая близка к 8 МэВ, видим, что для не слишком больших A электростатическая энергия, приходящаяся на один нуклон, невелика мала. Она возрастает с увеличением A, и этим объясняется медленное систематическое уменьшение энергии связи B, о которой мы говорили в п. 35. Свобода ядерных сил такова, что если бы действовали только они, то наиболее стабильными оказались бы ядра с равным числом протонов и нейтронов. Если же добавить сюда электростатические силы, то полученный результат является одним стабильным состоянием и ядрам с избытком нейтронов. Эта тенденция к возрастанию числа нейтронов становится сильнее с ростом массового числа A.

б) Чтобы проверить эти представления, рассмотрим такой пример. Разность масс изотопов (нестабильного) фтора $^{17}_{9}F$ и изотопа кислорода $^{17}_{8}O$ равна

$$M(17,9) - M(17,8) = 3{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{а. е. м.}$$

Первое ядро содержит 9 протонов и 8 нейтронов, второе — 8 протонов и 9 нейтронов. Одно ядро может быть получено из другого заменой протонов на нейтроны. В таких случаях говорят о паре *зеркальных ядер*.

Мы говорили, что физически нейтрон и протон почти ничем, кроме заряда, не различаются. Если это верно, *радиусы* ядер обоих ядер должны быть равны. Следует, однако, помнить по-видимому, что нейтрон и протон отличаются зарядом и в этом же заключается различие между парой зеркальных ядер. Предполагая, что во всем остальном такие ядра тождественны, можно объяснить различие в их дефектах масс электрической энергией отталкивания. Проверьте эти идеи численно.

11. Некоторые из наиболее тяжелых ядер могут спонтанно делиться. Процесс деления заключается в расщеплении ядра на две приблизительно равные части. При этом освобождается энергия, близкая к 200 МэВ на акт деления. Деление может быть также вызвано бомбардировкой нейтронами. Ядро поглощает нейтрон и переходит в возбужденное состояние, из которого происходит деление. Происходящее ядро, делящееся после поглощения нейтрона, является ядро ^{92}U. Тяжелые ядра имеют избыток нейтронов по сравнению с ядрами средних масс, поэтому делению сопровождается испусканием некоторого числа «лишних» нейтронов. Именно они делают возможной цепную реакцию: нейтроны, испущенные при делении, вызывают деление новых ядер, что влечет появление новых нейтронов, и т. д. На этом принципе основаны ядерные реакторы и атомная бомба (деление).

а) Определите энергию (в киловатт-часах), которая освобождается при полном делении 1 г ^{235}U. Сравните ее с типичной энергией, освобождающейся в химической реакции, в которой участвует 1 г вещества.

б) Небольшой кусок металлического урана ^{92}U стабилен, тогда как большой кусок может самопроизвольно взорваться. Как это объяснить?

в) Постарайтесь понять происхождение энергии, освобождающейся при делении. Воспользовавшись выражением (1) задачи 10, вычислите электростатическую энергию ядра (например, ^{238}U) до деления и полную электростатическую энергию осколков. Очевидно, часть электростатической энергии ядра ^{238}U освобождается при делении. Оцените эту энергию и сравните с энергией 200 МэВ, характерной для деления ядра ^{238}U.

12. Масса двух ядер дейтерия больше массы α-частицы (ядра $^{4}_{2}He$) (см. на стр. 53 табл. 4Å, в которой приведены атомные массы).

а) Вычислите энергию, освобождающуюся при слиянии 1 г дейтерия, образующего гелий. Сравните ее с энергией, освобождающейся при делении.

б) Почему не происходит самопроизвольной вспышки взрыва, заключенного дейтерия?

13. Допустим, что электрон является классической точечной частицей и что в атоме он движется по орбите, плоскость которой перпендикулярна к оси z. Пусть далее, его момент импульса постоянен и равен $\hbar$.

а) Чему равен эффективный магнитный момент электрона? Эта величина носит название *магнетона Бора*.

б) Какова разность энергий (в электрон-вольтах) двух состояний, отличающихся направлением магнитного момента, равного 1 магнетону Бора? В первом состоянии магнитный момент направлен вдоль магнитного поля с индукцией 1000 Гс, во втором состоянии — против поля.

в) Допустим, что в кристалле ферромагнетика каждый атом имеет магнитный момент, равный 1 магнетону Бора, и что все эти моменты параллельны друг другу. Сравните результирующую намагниченность с намагниченностью ферромагнетика в состоянии насыщения.

Мы привели оценку магнитного момента атома на основании классических представлений. К такой наивной классической модели не следует относиться слишком серьезно, хотя магнитные моменты атомов действительно имеют порядок магнетона Бора. В квантовомеханической теории атомного магнетизма различают два типа магнитных моментов. Один из них происходит вследствие орбитального движения электрона и аналогичен классическому магнитному моменту. Другой связан со спином электрона. Электрон обладает внутренним моментом импульса, в известной степени аналогичным моменту импульса вращающегося электрона. Спиновый момент равен $\frac{1}{2}\hbar$, а соответствующий магнитный момент почти в точности равен 1 магнетону Бора.

Оценка в тексте почти заменить, можно ли объяснить ферромагнетизм магнитным моментом атома. Результат оказывается обнадеживающим. Следует, однако, заметить, что ферромагнетизм — сложное явление, которое не исчерпывается такими простыми оценками.

14 *). В п. 51—56 мы обсуждали сложную природу некоторых электрохимических эталонов напряжений. Допустим, что сравнение пяти эталонов показало, что в данный момент $(\mathcal{E})_P - (\mathcal{E})_Q$, а основные атомные константы e, m, M_P, c и h таковы, как они приведены в табл. 2А и выражены через эталоны. Допустим, далее, что 20 янв. 1989 г. в 13 ч 00 мин константы α и β приняли значения, так что

$$\alpha' = \alpha\,(1 + \omega), \quad \beta' = \beta\,(1 + \omega),$$

и в дальнейшем сохранят свои новые численные значения. Предположим, что числа

*) Задача к дополнительной теме.

в 10 Кэв, квантовое число порядка 1%, а постоянная тонкой структуры, проявляющаяся в 50 кэв, не будут катастрофическими. Заметим некоторые качества, какими должна обладать система единиц, которые мы обозначили штрихами.

а) Найдите $(a)'/(a)$.

б) Чему равно новое значение: массы электрона в массе протона в $(b)'$, скорости света в $(c)'/(c)$, постоянной Планка h'; заряда электрона в единицах СГС и СИ, величины ноль в $(d)'/(d)$?

Дополнительная литература

Таблицы физических констант:

Handbook of Chemistry and Physics. — Ohio: Chemical Rubber Publishing Company. Ежегодное издание.

American Institute of Physics Handbook. — N. Y., 1957.

Кей Дж., Лэби Т. Таблицы физических и химических постоянных. — М.: Физматгиз, 1962.

Сандерс Дж. Основные атомные константы. — М.: Госатомиздат, 1960.

Тейлор Б., Лангенберг Д., Паркер У. Фундаментальные физические константы. — УФН, 1972, т. 05, с. 756.

Критический обзор фундаментальных констант:

Cohen E. R., DuMond J. Our Knowledge of the Fundamental Constants of Physics and Chemistry in 1965. — Rev. Mod. Phys., 1965, v. 37, p. 537.

ГЛАВА 3

УРОВНИ ЭНЕРГИИ

Схемы уровней

1. Каждый химический элемент обладает характерическим спектром. Эта замечательная особенность не ограничена областью атомных спектров, а распространяется на молекулы и ядра. Все эти системы испускают и поглощают электромагнитное излучение совершенно определенных частот, которые заключены в пределах от радиочастот (для молекул) до рентгеновского излучения с очень короткой длиной волны или γ-излучения (для ядер). Оптические спектры элементов были открыты Г. Кирхгофом и Р. Бунзеном в середине XIX столетия, тогда как радиочастотные спектры молекул и спектры ядерного γ-излучения обнаружены лишь в этом столетии.

Объяснение наблюдаемых спектров заключается в существовании у атомов, молекул и ядер *уровней энергии*. Изучение спектров позволило установить фундаментально важное свойство любой сложной системы: в такой системе существует характерная для нее последовательность уровней энергии, или *стационарных состояний*. Эти уровни обнаруживаются в «малых» системах, какими являются атомы, молекулы или ядра. В этом случае существование дискретных уровней энергии проявляется в наблюдаемых нами спектрах. Но и в «больших» системах, например в газе, твердом теле, жидкости, мы также находим уровни энергии. С первого взгляда трудно обнаружить родство между такими явлениями, как испускание или поглощение γ-излучения ядром и колебание кристалла кварца в каких-нибудь электронном устройстве, но оно существует.

2. В этой главе мы будем изучать уровни энергии в «малых» системах. Мы рассмотрим некоторые из основных экспериментальных фактов и попытаемся их понять с помощью простых теоретических идей. Мы не будем объяснять здесь, *почему* существуют уровни энергии, а примем это свойство природы как основной экспериментальный факт. В гл. 5 перед нами будет стоять задача объяснения этих уровней, и мы увидим, как их можно понять, основываясь на законах квантовой механики.

Наш способ рассмотрения в некоторой степени близок историческому развитию физики. В самом деле, многие свойства *атомных* спектров, рассматриваемые в этой главе, стали известны задолго до появления правильной теории атома (т. е. квантовой механики). Однако наше изложение не следует хронологии. Мы рассматриваем богатую совокупность данных, связанных с существованием

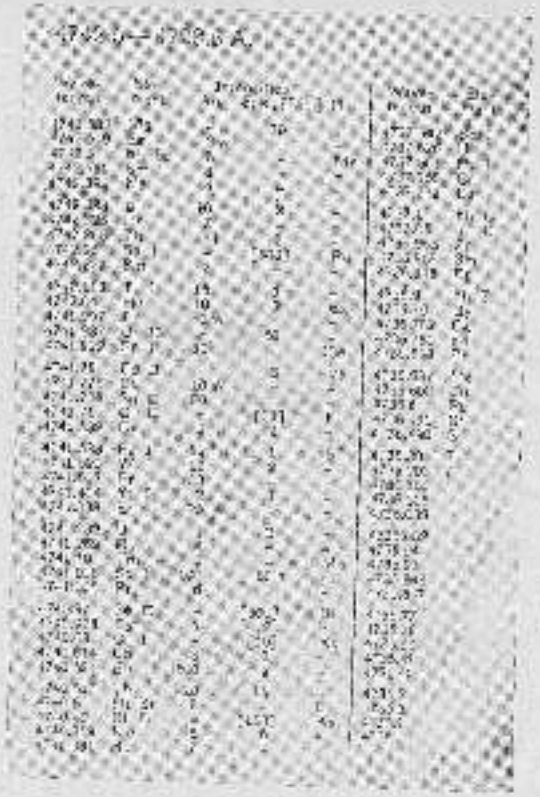


Рис. 14. Небольшая часть таблицы спектральных линий железа из книги Массачусетского технологического института (Massachusetts Institute of Technology, Wavelength Tables, compiled under the direction of C. C. Kiess.— Cambridge, Mass., MIT Press, 1939). Эта таблица содержит 4379 строк и охватывает более 100 000 спектральных линий между 10 000 и 2000 Å. Линии помещены в порядке уменьшения длины волны. Для каждой линии указан качественный момент — напряжение и примерно некоторое число, характеризующее ее яркость. Обратите внимание на длины волн в верхней части списка: измерения для воздуха, когда как у ультрафиолетовых они приведены к вакууму. Для получения общего спектра мы должны использовать $\lambda_{\text{вак}} = 1{,}0003\,\lambda_{\text{возд}}$.

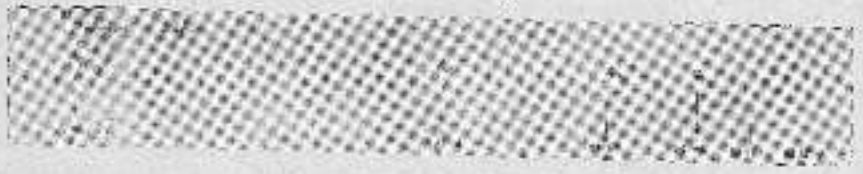


Рис. 15. Спектр водорода. Длины волн даны в ангстремах. Хотя внутренняя структура линий и не видна, но общий характер распределения линий хорошо передан. Все интенсивности постепенно от спектрографа распределены линии и каждый конец спектра — простая. Напротив, в середине спектра, где много больших и достаточно широких линий, линии перекрываются, и линейчатая структура исчезает. Спектр водорода на звезде такой же, как и на Земле.

уровней энергии, например ядерные явления, хотя свойства ядер стали известны гораздо позже.

3. Еще задолго известны некоторые замечательные особенности атомных спектров. В качестве примера рассмотрим *комбинационный принцип Ритца*. Он заключается в том, что волновые числа многих спектральных линий данного элемента равны *разностям* или *суммам* волновых чисел других пар линий. Например, мы наблюдаем у атомов некоторого элемента[1]) следующие линии: $\tilde{\nu}_1 = 82258{,}27$ см$^{-1}$, $\tilde{\nu}_2 = 97491{,}28$ см$^{-1}$ и $\tilde{\nu}_3 = 15232{,}97$ см$^{-1}$. Имеем $\tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_1 = 15233{,}01$ см$^{-1}$. Это значение очень близко к $\tilde{\nu}_3$, и трудно допустить, чтобы такое совпадение было случайным, тем более что аналогичные зависимости наблюдаются и для других спектральных линий того же элемента и для линий многих других элементов.

Позже был открыт более общий принцип. Волновое число $\tilde{\nu}$ для *любой* линии атомного спектра может быть представлено в виде разности $\tilde{\nu} = T' - T''$ двух *спектральных термов* T' и T''. Каждый атом характеризуется определенным набором таких термов (выраженных в волновых числах), известных под названием *системы термов* данного атома.

В этом принципе содержится комбинационный принцип Ритца. Допустим, что с тремя термами связаны три спектральные линии

$$\tilde{\nu}_{12} = T_1 - T_2, \quad \tilde{\nu}_{13} = T_1 - T_3 \quad \text{и} \quad \tilde{\nu}_{23} = T_2 - T_3. \tag{3a}$$

В этом случае

$$\tilde{\nu}_{23} = (T_1 - T_3) - (T_1 - T_2) = \tilde{\nu}_{13} - \tilde{\nu}_{12}, \tag{3b}$$

что является примером комбинационного принципа Ритца.

4. В современном понимании спектральные термы соответствуют уровням энергии атома и система термов соответствует набору уровней энергии, характеризующих данный атом. Эта идея была впервые сформулирована Нильсом Бором в его работе об атоме водорода [**]).

Рассмотрим ситуацию в свете того, что нам уже известно о квантовой природе электромагнитного излучения. Квант света, или фотон, с частотой ν и волновым числом $\tilde{\nu} = \nu/c$ несет энергию $E = h\nu = (hc)\tilde{\nu}$. Эта энергия представляет собой разность двух энергий: $E' = (hc)T'$ и $E'' = (hc)T''$, если волновое число есть разность двух термов T' и T''. Таким образом, термы могут быть выражены через энергию, волновое число, частоту, так как все эти величины линейно связаны через константы h и c. Имея это в виду, можно сказать, что таблица спектральных термов одновременно является и таблицей уровней энергии. Мы увидим, что этот способ выражения имеет реальный физический смысл, а не просто замена терминов.

---

[1]) Мы не знаем, о каком элементе идет речь, так как в каждой части задачи [1] в конце этой главы.

[**]) *Bohr N.*— Phil. Mag., 1913, v. 26, p. 1.

5. В некоторых популярных книгах основные свойства атомных спектров и строения атома излагаются в форме двух теоретических постулатов:

I. «Атом может существовать лишь в определенных состояниях внутреннего движения. Эти состояния образуют дискретный набор, и каждое из них характеризуется определенным запасом полной энергии».

II. «Когда атом поглощает или излучает электромагнитное излучение, он перескакивает из одного состояния в другое. При перескоке из состояния с большей энергией E_2 в состояние с меньшей E_1 (в этом случае $E_2 > E_1$) испускается фотон, частота которого определяется равенством [*])

$$h\nu = \hbar\omega = E_2 - E_1. \qquad (6a)$$

Процесс, обратный испусканию, заключается в поглощении фотона с частотой ν; в этом случае атом перескакивает из состояния с меньшей энергией в состояние с большей энергией».

Сразу же заметим, что если эти постулаты понимать буквально, то первый из них противоречит второму. «Состояние с большей энергией» не может быть абсолютно стабильным, поскольку в конце концов происходит спонтанный распад этого состояния. В *макроскопической* шкале времен этот распад происходит крайне быстро: типичное время жизни возбужденных состояний атомов и молекул имеет порядок 10^{-8} с. Заметим, однако, что в *атомной* шкале времени эти времена жизни крайне велики. Оптическим фотонам соответствует частота порядка 10^{15} Гц, и период колебаний оказывается на много порядков меньше типичных значений времени жизни возбужденных состояний.

Относительно второго постулата мы должны сказать, что в нем заметен недостаток информации: мы остаемся в полном неведении относительно того, что означает «перескок» атома из одного состояния в другое. Многие вместо термина «перескок» пишут, что «атом совершает *переход* из одного состояния в другое». Это звучит солиднее, но вряд ли здесь содержится больше. Что в действительности происходит при таком переходе?

Несмотря на сделанные замечания, читатель не должен считать эти два постулата бессмысленными: они дали описание весьма сложных явлений в первом приближении, их применение было весьма плодотворным.

6. Чтобы объединить все наблюдаемые спектральные линии атома (молекулы или ядра), попытаемся построить систему термов, или уровней энергии. Под этим мы понимаем уровни, которым приписаны значения E_0, E_1, E_2, ..., так что каждой наблюдаемой спектральной линии отвечает переход между двумя уровнями энергии нашей *системы термов*.

*) В п. 8 гл. 2 мы отмечали, что «частотой» называют как ν, так и $2\pi\nu = \omega$. Аналогично, «постоянной Планка» называют как h, так и $\hbar = h/2\pi$. В дальнейшем мы чаще всего будем пользоваться величиной ω и $\hbar$; лишь предпочитаем их ν и h.

Систему уровней, которую мы хотим построить, часто изображают графически в виде схемы *уровней*, пример которой показан на рис. 6А. Горизонтальные линии соответствуют четырем уровням энергии системы. Вертикальные линии, соединяющие разные уровни, указывают на возможные переходы, направление которых (поглощение или испускание) отмечено стрелкой. Частота шести возможных переходов перечислена в подписи под рисунком. Обычно расстояния между уровнями энергии откладываются в линейном масштабе и частоты переходов при этом прямо пропорциональны длине линий (стрелок), соединяющих соответствующие уровни.

Рис. 6А. Схема уровней. Показаны четыре уровня энергии и шесть возможных линий. Возможные частоты переходов:

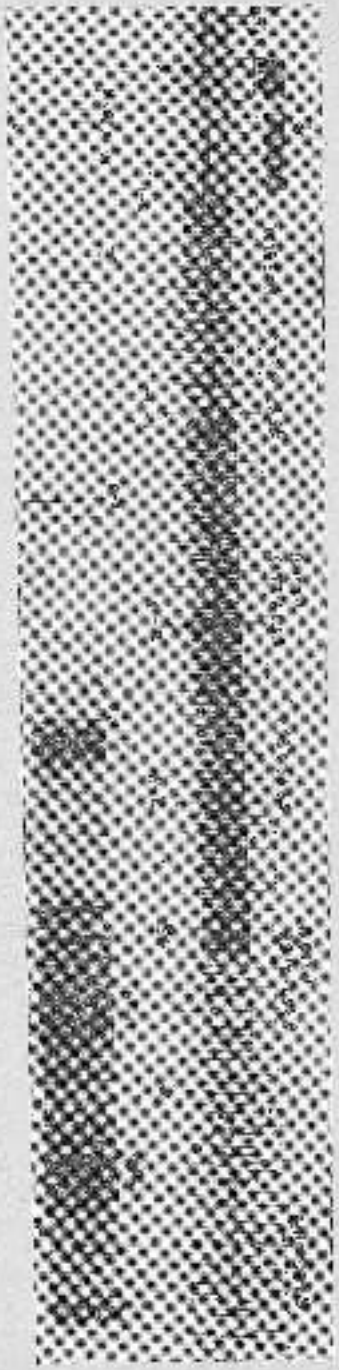
$\omega_{32}=(E_3-E_2)/\hbar$, $\omega_{31}=(E_3-E_1)/\hbar$,
$\omega_{21}=(E_2-E_1)/\hbar$, $\omega_{30}=(E_3-E_0)/\hbar$,
$\omega_{20}=(E_2-E_0)/\hbar$, $\omega_{10}=(E_1-E_0)/\hbar$.

Как видно из рисунка, относительно небольшому числу уровней отвечает значительное число линий. Действительно, число пар уровней, которое можно образовать из n уровней, равно $n(n-1)/2$. Заметим, однако, что в общем случае мы не будем наблюдать спектральных линий, отвечающих всем возможным парам уровней, и в этом смысле рис. 6А ошибочен. Позже мы вернемся к этому обстоятельству, имеющему большое значение.

Создание схемы уровней позволяет упорядочить кажущийся хаос наблюдаемых спектральных линий. Рассмотрим некоторые атомные, а еще лучше молекулярные спектры типа изображенного на рис. 6В. На этом рисунке, изображающем спектр молекулы углерода, виден ряд полос. Изучая этот спектр с помощью прибора, обладающего большим разрешением, мы обнаружим, что полосы в действительности состоят из огромного числа близко расположенных спектральных линий. На первый взгляд молекулярный спектр кажется безнадежно сложным. Тем не менее эту сложность можно упорядочить! В большинстве случаев удается построить схему термов и объяснить с ее помощью каждую из наблюдаемых спектральных линий.

7. Вернемся к рис. 6А и предположим, что на нем показана схема уровней для атома. В этом случае типичное расположение между уровнями будет иметь порядок электрон-вольта.

Предположим, что мы изучаем *спектр поглощения* атома с помощью источника света с непрерывным спектральным распределением. В этом случае в свете, проходящем через поглощающий слой изучаемого нами монатомного газа, появятся спектральные линии. Допустим, далее, что газ достаточно холодный, т. е. находится, например, при комнатной температуре. В этом случае мы будем наблю-



дать спектральные линии ω_{30}, ω_{20} и ω_{10}, но остальные три линии не будут видны. Объяснение здесь весьма простое: подавляющее большинство газовых молекул находится в основном состоянии, и мы можем наблюдать лишь переходы из основного в одно из более высоких состояний.

При увеличении температуры быстро возрастает вероятность обнаружить атом в одном из возбужденных состояний. В томе V этого курса *) сказано, что если газ находится при температуре T, то отношение числа атомов в n-м возбужденном состоянии к числу атомов в основном состоянии равно

$$\frac{N_n}{N_1} = \exp\left(-\frac{E_n - E_0}{kT}\right) \qquad (7a)$$

При комнатной температуре, для которой $kT \approx (1/40)$ эВ, это отношение *пренебрежимо мало*. Поэтому холодный газ не испускает (видимого) света, если его атомы не возбуждены каким-то другим способом.

8. При изучении *спектра испускания* атомарного газа, возбужденного внешним воздействием, например электрическим разрядом, можно наблюдать все указанные на схеме термов спектральные линии. Если атом, первоначально находившийся в основном состоянии, сталкивается с электроном, имеющим большую энергию, последний может передать атому часть своей энергии. Это заставляет атом перескочить в одно из более высоких состояний. Оттуда атом может перейти на более низкие уровни. При этом будет испускаться свет. Само собой разумеется, чтобы такой процесс происходил, электрон должен иметь энергию, достаточную для перевода атома в одно из возбужденных состояний. Если энергия электрона меньше $E_1 - E_0$, то он может испытывать лишь *упругие* столкновения с атомами. При большей энергии становятся возможными *неупругие* столкновения, приводящие к испусканию света.

Эти каноны, а также постулаты, рассмотренные в п. 5, могут быть проверены экспериментально. Для этого просто нужно менять энергию возбуждающих атом электронов. По мере ее увеличения будет наблюдаться появление новых спектральных линий. На рис. 8А показаны результаты такого опыта для газообразной ртути. Мы видим, что при увеличении энергии электронов появляются новые спектральные линии и эти изменения спектра находятся в соответствии со схемой уровней, показанной на рис. 8В.

9. На рис. 9А показан результат аналогичного опыта. Пары ртути при низком давлении возбуждаются электронной бомбардировкой. Возбужденные атомы возвращаются в основное состояние, испуская фотоны, и их присутствие (в частности, «ультрафиолетовых» фотонов) можно наблюдать по току фотоэлектронов, который они вызывают, попадая на железный электрод. По мере увеличения энергии бомбардирующих электронов возбуждаются новые уровни,

*) *Рейф Ф.* Статистическая физика.— 3-е изд.— М.: Наука, 1993.

и поэтому возникают новые переходы. С возбуждением нового уровня внезапно увеличивается скорость испускания фотонов, и кривая на рис. 9А при соответствующей энергии обнаруживает резкий излом. Положение этих изломов можно сравнить со схемой уровней, показанной на рис. 8В.

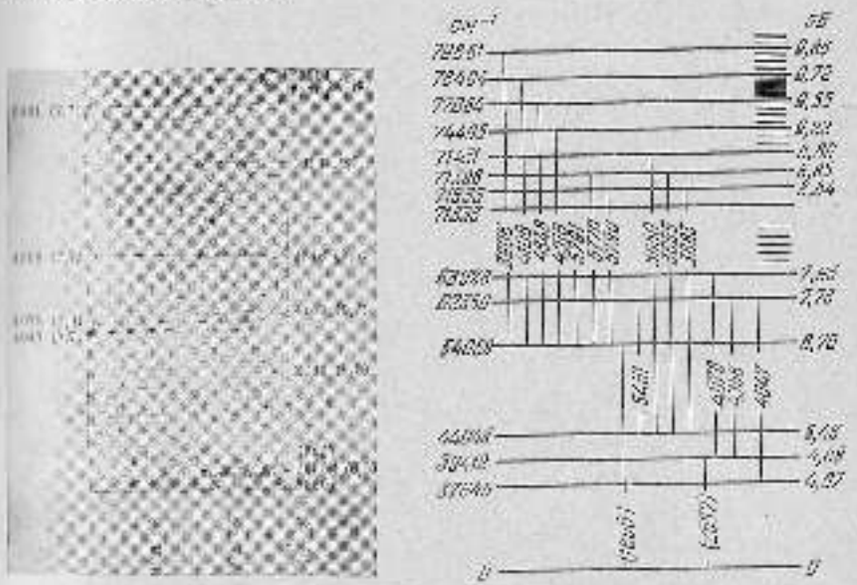


Рис. 9А. Спектр атомов ртути, возбужденных столкновениями с электронами, имеющими различные энергии. Электроны ускорялись разностью потенциалов U. (Franck J., Hertz G. Über die Anregung von Spektrallinien durch Elektronenstoss.— Ztschr. f. Physik, 1924, v. 22, p. 191. Когда энергия электронов возрастает от 5,0 эВ (отвечает 9,2 эВ (в опыте)), появляются новые линии; каждая из них появляется только при энергии электронов, при которой возможно появление данной линии. Цифры около линий — длины волн в ангстремах)

Рис. 9В. Сильно упрощенная схема уровней электронного атома ртути. Показаны уровни, участвующие в переходах, показанных на рис. 9А. Цифры слева — энергии в $см^{-1}$, справа — энергии, выраженные в электрон-вольтах. Масштаб по оси энергий не соблюден. Пунктирными стрелками показаны уровни, энергии которых точно известны. Цифры около соединяющих уровни прямых линий — длины волн в ангстремах. Все переходы на основной уровень относятся к ультрафиолетовой части спектра. Показаны два таких перехода (цифры в скобках). Эти линии не видны в спектре. Начало энергетического отсчета находится при 84 184 $см^{-1}$ (последний после самого уровня 10,4 эВ)

Трудно очень точно определить энергию бомбардирующих электронов, тем не менее такого рода опыты широко используются для изучения системы уровней атома. Кривая на рис. 9А позволяет установить приблизительное положение многих уровней. Эти опыты могут сопровождаться точным измерением длины волны испускаемого света. При этом можно установить, с какой энергией электронов впервые появляется данная линия, и таким образом мы получим информацию об уровнях, участвующих в данном переходе. Дополнительные данные можно получить, изучая спектр поглощения. В этом случае нам известно, что нижним уровнем является основное состояние.

Эти методы и множество других были использованы и используются сейчас, чтобы собрать огромное количество данных об атомных спектрах и энергетических уровнях атомов.

10. С помощью схемы уровней на рис. 6А легко понять явление *флуоресценции*. Фотон с энергией $E_2 - E_0$ поглощается находящимся в основном состоянии атомом, который переходит в состояние,

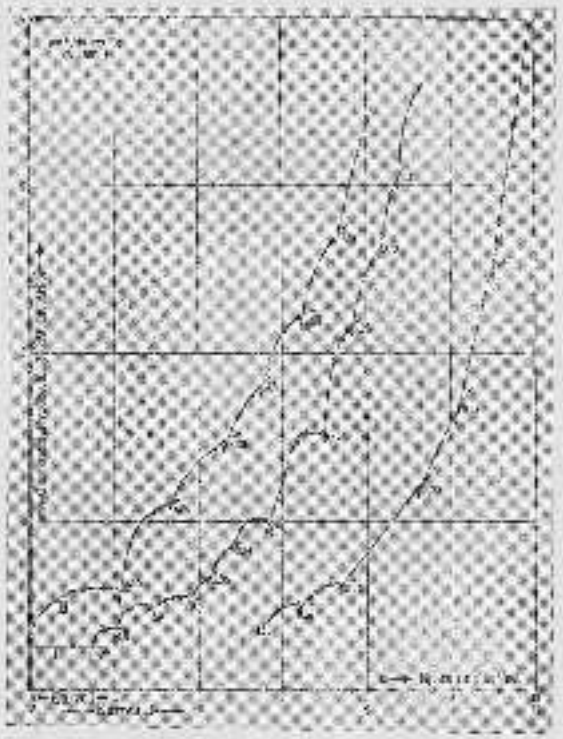


Рис. 8А. Возбуждение спектра ртути (по [1]). Ускоряющий потенциал 9,0 в (по оси ординат) и температура (по оси абсцисс) сосуда [сравн. *J. Franck* u. *G. Hertz*: Über die Anregungspotentiale der einfachen Gase. — Ztschr. f. Phys., 1920, v. 1, p. 107]. Горизонтальные линии отмечают энергии электронов, при которых возникают новые группы линий. Вертикальные линии — те же, но для энергии фотонов. Цифры около линий — их интенсивность, по оси ординат — в логарифмическом масштабе, по оси абсцисс — в произвольных единицах. Цифры у линий — их длины волн в ангстремах. Линии, отмеченные звездочкой, принадлежат второму порядку. Цифры у кривых — потенциал возбуждения в вольтах. Пунктирная кривая — ионизационный ток. Ионизация начинается при 10,4 в, что соответствует энергии E_0 основного состояния атома ртути. Пунктирная кривая — ионизационный ток. Ионизация начинается при 10,4 в, что соответствует энергии E_0 основного состояния атома ртути. При увеличении энергии электронов возбуждаются новые уровни, с появлением которых линейно возрастает наклон кривой, так как новый уровень открывает возможность новых переходов с дополнительным числом фотонов

отвечающее уровню энергии E_2. С этого уровня возможны переходы на уровни меньшей энергии, и мы можем наблюдать фотоны всех перечисленных в подписи к рис. 6А частот.

Такая картина объясняет правило Стокса: частота испущенного при флуоресценции света не может быть больше частоты возбуждающего света. Это правило имеет общий характер, но возможны некоторые исключения, если атомы, поглощающие свет, не находились в основном состоянии.

В работе Эйнштейна *) о фотоэффекте обсуждалось также правило Стокса с точки зрения фотонных представлений. В то время идея об энергетических уровнях еще не родилась, но это правило можно понять, исходя из идеи, что энергия испущенного фотона возникает за поглощенной энергии.

11. При определенной энергии возбуждения происходит ионизация атома. Это минимальная энергия, которую нужно сообщить атому для того, чтобы могли возникнуть электрон и однократно ионизованный атом, полностью изолированные друг от друга. При такой энергии и при еще более высокой «атом» перестает существовать как атом, но мы все еще можем рассматривать систему как состоящую из однократно ионизованного атома и электрона. Такая система может иметь любую энергию, большую E_I (рис. 11А). Таким образом, набор возможных энергий атома состоит из ряда дискретных уровней при энергии, меньшей энергии ионизации, и из непрерывных значений при *больших* энергиях. Эта ситуация показана на рис. 11А. Заштрихованная область над энергией ионизации E_I отвечает области непрерывных значений энергии.

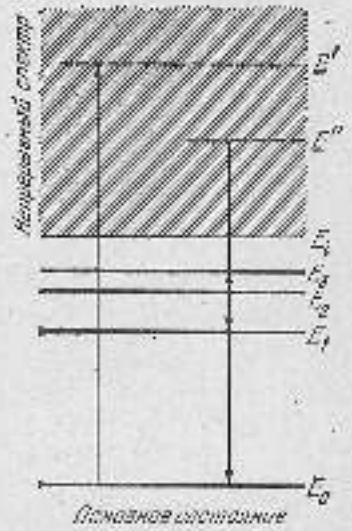


Рис. 11А. Схема уровней, на которой показаны дискретные уровни энергии и область непрерывного спектра (заштрихована). Стрелками на ней (вверх и вниз) показаны переходы между дискретными уровнями и между ними и областью непрерывного спектра. Вертикальные пунктирные линии в этой области соответствуют не определенным уровням, а лишь двум из множества возможных значений энергии системы «электрон + ион»

Вертикальная линия слева соответствует переходу атома из основного состояния в состояние с энергией E' в непрерывном спектре при поглощении фотона с энергией $E' - E_0$. Этот процесс является фотоэффектом для отдельного атома. Вырванный из атома электрон будет иметь *кинетическую* энергию $E' - E_I$.

Процессом, обратным фотоионизации (фотоэлектрическому эффекту), является *радиационная рекомбинация* электрона и однократно ионизованного атома. Такой процесс показан вертикальной линией справа на рис. 11А. Электрон с кинетической энергией $E'' - E_I$ сталкивается с ионом (в покое), и система «перескакивает» на уровень E_2, испуская фотон с энергией $E'' - E_2$. С уровня E_2 атом продолжает переход на основной уровень, задерживаясь на некоторое время в первом возбужденном состоянии, как это показано стрелками. Во всех этих переходах испускается *каскад* фотонов соответствующих энергий.

*) *Einstein A.* — Ann. d. Phys., 1905, v. 17, p. 132.

В атомной физике уровню, отвечающему ионизации, часто приписывают нулевое значение энергии. Тогда энергия связанных состояний оказывается отрицательной. В зависимости от обстоятельств может быть выбрана и другая точка нулевой энергии. В ядерной физике нулевую энергию обычно приписывают основному состоянию ядра. Заметим, что выбор нулевой точки условный.

12. До сих пор мы рассматривали в свете двух приведенных постулатов лишь атомы. Идея об уровнях энергии и о переходах между ними носит, однако, весьма общий характер, и ее с разным успехом можно применять к молекулам или ядрам. Рассмотрим произвольную систему частиц любого типа и в любом числе. Уровень ионизации (или диссоциации) такой системы — это значение энергии, сверх которой возможные уровни образуют непрерывный спектр. Это наименьшая энергия, при которой система может существовать в виде двух разделенных частей, находящихся на большом расстоянии друг от друга. Ниже этой энергии мы имеем ряд дискретных уровней энергии, соответствующих связанному состоянию системы. (Это описание в духе двух постулатов нуждается в уточнении.)

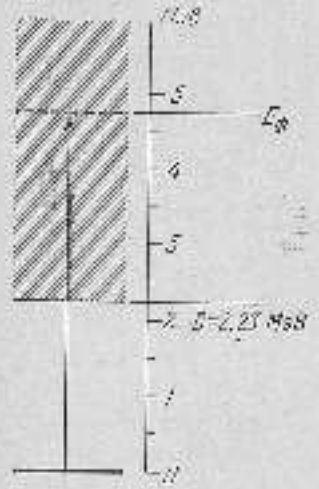


Рис. 12А. Схема уровней энергии дейтрона и нейтрон. Показано основное состояние дейтрона и направлена область, где кинетическая энергия движущихся дейтрона и нейтрона больше нуля. Энергия связанного состояния $B=2{,}23$ МэВ. Стрелка обозначает фоторасщепление дейтрона.

В качестве примера схемы термов в ядерной физике рассмотрим схему дейтрона, показанную на рис. 12А. Дейтрон не имеет возбужденных состояний. Его энергия связи равна $B=2{,}23$ МэВ. Это означает, что область непрерывных значений энергии начинается при энергии B над энергией основного состояния. При больших энергиях дейтрона уже не дейтрон, а система из нейтрона и протона, отделенных одно от другого.

Вертикальная стрелка на рисунке соответствует фоторасщеплению дейтрона. Фотон с энергией $E_\phi > B$ производит диссоциацию дейтрона, в результате которой общая кинетическая энергия протона и нейтрона оказывается равной $E_\phi - B$. Этот процесс тщательно экспериментально весьма подробно. Он полностью аналогичен фотоионизации атома, рассмотренной в предыдущем пункте. Обратным процессом является радиационный захват нейтрона протоном.

13. Автор надеется, что эти вводные замечания о схемах уровней энергии (термов) показали читателю, что два постулата находят широкое применение при изучении строения атомов, молекул и ядер. С помощью термов удается классифицировать и упорядочить экспериментальные данные о спектрах. Важной частью второго постулата является соотношение (6а). Утверждение об атоме, «перескакивающем» в другое состояние, не претендует на подробное описание процессов испускания и поглощения. Это лишь наглядный и не слишком удачный способ выражения того, что происходит.

Постепенно слово «скачок» стало в квантовой физике обычным термином, который, однако, не кажется автору слишком удачным. Можно думать, что при изучении физики этот термин причиняет много лишних затруднений. Выражение «система совершила скачок из одного состояния в другое» опасно тем, что создает впечатление внезапности и мгновенности процесса. Создаваемая таких выражением наглядная картина иногда может привести к серьезным заблуждениям.

Конечная ширина уровней энергии

14. До сих пор мы не испытывали затруднений, связанных с представлением о «скачках». Дело в том, что мы нигде не имели с ними дела и лишь использовали соотношение (6а). Рассмотрим теперь ситуацию, в которой мы столкнемся с трудностями, если слишком буквально будем понимать термин «скачок».

Пусть фотон с частотой ω_1 поглощается атомом, первоначально находившимся в основном состоянии. Пусть частота ω_0 точно соответствует энергии перехода атома из основного состояния в одно из возбужденных и атом поглощает фотон и возбуждается. Затем он возвращается в основное состояние и испускает фотон с частотой ω_0. Этот фотон может быть испущен в любых направлениях, и это означает, что атом рассеивает свет частоты ω_0. Допустим теперь, что падающее на атом излучение имеет частоту, немного отличную от частоты ω_0. Будет ли при этом атом рассеивать свет? На этот вопрос следует дать положительный ответ. Опыт показывает, что если частота ω меняется вблизи ω_0, то эффективность атома как рассеивателя меняется: сначала она возрастает до резкого максимума при $\omega = \omega_0$ и быстро падает при увеличении частоты. Иногда фотон при «неправильной» частоте также может вызвать «скачок»; мы наблюдаем это на опыте. Возникает еще один вопрос: какова частота рассеянного излучения, если частота падающего на атом $\omega \neq \omega_0$? Из картины «скачков», по-видимому, следует, что эта частота должна иметь «правильное» значение ω_0, такое, которое опытом не подтверждается: испущенное атомом излучение имеет частоту ω, как этого и следовало бы ожидать на основании закона сохранения энергии (и представлений о фотонах).

Это явление известно под названием *резонансной флюоресценции*. Его трудно понять, пользуясь представлением о скачках.

15. Для понимания этих фактов нужна другая модель. Представим себе атом в виде некой механической системы, в которой электроны связаны с ядром упругими силами. Такая система будет иметь ряд резонансных частот, одна из которых равна ω_0. В основном состоянии атома вся эта система находится в покое, но падающая электромагнитная волна возбуждает ее колебания. В результате колеблющиеся электроны испускают электромагнитное излучение той же

атом резонирует. Такой *абсолютной* частоты не существует: атом откликается на небольшой *интервал* частот. Можно, конечно, сказать, что правильная частота, определяющая энергию уровня,— это частота ω_0, отвечающая максимуму резонансной кривой. Остается, однако, фактом, что атом откликается на все частоты вблизи ω_0, и линия в спектре поглощения атома не может быть абсолютно узкой: она имеет *конечную ширину*. Это является экспериментальным фактом.

Возникает вопрос: как обстоит дело со спектральными линиями испускания атома? Имеют ли и они конечную ширину? На это следует положительный ответ. Линия испускания имеет ту же ширину, что и линия поглощения. (Следует заметить, что экспериментально наблюдаемая ширина линий в оптических спектрах больше предсказываемой по несколькими причинам. Мы имели дело с шириной линий изолированного атома, находящегося в покое относительно наблюдателя. Эта ширина является внутренним свойством атома. Забудем на время о других причинах расширения линий; мы рассмотрим их позже и этой же главе.)

Что означает конечная ширина линии испускания? Она означает буквально то, что сказано этим определением. Если мы будем фотографировать линию с помощью спектрографа с *очень* высокой разрешающей, то обнаружим, что ее ширина конечна. Частота испущенного света не равна точно ω_0, но мы обнаруживаем все частоты в непосредственной близости от ω_0.

18. Поскольку положение уровней энергии определяется по наблюдению линий поглощения и испускания и эти линии всегда имеют конечную ширину, то энергия возбужденного состояния не может быть совершенно точно определимой величиной. Если мы верим в существование фотонов и в закон сохранения энергии, то приходим к такому выводу. Таким образом, первый из наших постулатов, изложенный в т. 6, нельзя понимать буквально. *Уровни энергии, расположенные под основным, имеют конечную ширину.*

Предположим, что мы определяем энергию данного возбужденного состояния атома (молекулы или ядра), наблюдая линию поглощения, соединяющую основное состояние с возбужденным. Если сечение атома максимально при частоте ω_0, то можно приписать возбужденному состоянию *среднюю энергию* $E=E_0+\hbar\omega_0$, где E_0 — энергия основного состояния. Пусть ширина спектральной линии (измеренная некоторым методом, который здесь нас не интересует) равна $\Delta\omega$. Мы считаем, что ширина возбужденного уровня равна $\Delta E=\hbar\Delta\omega$. Если мы понимаем, что уровень энергии имеет конечную ширину, то не нуждаемся больше в термине «средняя энергия»; можно просто говорить об «энергии уровня», помня, что этот термин относится к соответствующим образом определенной средней энергии.

19. Смысл упрощений, лежащих в основе первого постулата, поучительно показать на примере из классической механики. Рассмотрим маятник, который мы толкнули и заставили колебаться. Допустим, что одна треть силы (наиболее существенная из них —

частоты, что и частота падающей волны. Амплитуда колебаний будет тем больше, чем ближе частота волны к резонансной частоте ω_0, и эффективность атома как рассеивателя, очевидно, будет самой большой в том случае, когда частота приходящей волны совпадет с частотой ω_0. Далее, и это весьма важно, существует определенное соотношение между фазами приходящей и испущенной волн, и между ними возникает интерференция, которую невозможно объяснить в рамках модели «скачков». Наиболее серьезным дефектом модели

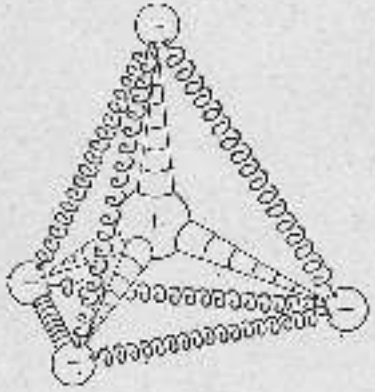


Рис. 15А. Механическая модель атома, используемая для объяснения резонансной флуоресценции. (Как это сделать в общем случае, неясно.) При этом, помимо с электронами, это пружины, и, поскольку электроны взаимодействуют, будет излучаться электромагнитная энергия на резонансных частотах системы. Система будет терять энергию на излучение, и поэтому колебания будут затухать. Под действием падающей электромагнитной волны энергия также будет сохранять колебания, которые будут иметь частоту падающей волны и оставаться всегда такими. Это является механической физической флуоресценции

«скачков» в этом случае является разделение процесса рассеяния на этапы, которым не соответствует никакая реальность. Процесс рассеяния следует рассматривать как единый когерентный процесс, а не как два «скачка», в которых атом, оказавшийся во втором скачке, не находится в определенном фазовом отношении к фотону, поглощенному в первом скачке.

Вопрос о том, когерентны ли рассеянная и поглощенная волны, может быть исследован экспериментально. Результат свидетельствует в пользу осцилляторной модели, которая предсказывает когерентность.

16. Рассмотрение резонансной флуоресценции приводит нас к новой интерпретации уровней энергии в атомах, молекулах и ядрах: разности энергий уровней соответствуют частотам, на которых система резонирует. *Разности энергий уровней являются резонансами.*

Разумеется, механическую модель с упругими силами и пружинами нельзя принимать серьезно. Почему же такая модель, заведомо наивная, оказывается такой удобной при объяснении флуоресценции? Причина в том, что многие аспекты резонансных явлений не зависят от деталей модели: все, что имеет значение, заключается в существовании резонансов (с соответствующим коэффициентом затухания) и в природе связи различных резонансных мод с внешним источником возбуждения.

17. Предположим теперь, что мы пытаемся определить энергию уровней (отсчитанную от основного уровня) атома, измеряя частоту фотонов, вызывающих переход из основного в возбужденное состояние. Мы пытаемся, иными словами, определить частоту, на которой

сила сопротивления воздуха), но не равны нулю, так что маятник может совершить несколько сот колебаний, прежде чем их энергия уменьшится в e раз по сравнению с начальной (время этих колебаний называется «средним временем жизни» колебательного состояния). Пусть интервал времени между двумя последовательными отклонениями маятника вправо равен 1 с.

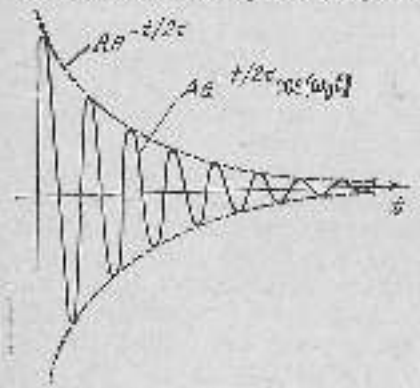


Рис. 19А. Экспоненциально затухающие колебания (зависимость смещения от времени). Процесс не строго периодический, поэтому говорят, что он имеет дело с колебаниями частоты, которая равна ω_0. Если затухание не слишком велико, можно считать, что частота близка к ω_0. Неизвестно лишь, что частота определена тем точнее, чем слабее затухание

Предположим, что нас интересует частота колебаний маятника. Недолго думая мы скажем, что частота равна 1 $с^{-1}$. Это, несомненно, разумный ответ, но, строго говоря, он неверен: под «частотой» мы понимаем частоту повторения *периодических* явлений. Движение нашего маятника лишь приближенно можно считать периодическим, поскольку амплитуда колебаний уменьшается со временем. Частота *затухающих* гармонических колебаний точно не определена, хотя для практических целей мы вполне можем ее определить.

Атом, испускающий излучение, в некоторых отношениях похож на затухающий маятник. Процесс излучения не длится вечно, а это означает, что «колебания внутри атома» являются затухающими. У них нет *точно* определенной частоты, поскольку затухающее колебание не строго периодическое. Электромагнитное излучение, возникающее оттого, что «что-то в атоме колеблется», не будет монохроматическим. Линия испускания имеет конечную ширину.

20. Рассматривая рис. 19А, мы начинаем понимать, что чем меньше затухание, тем точнее определена частота. Действительно, неопределенность $\Delta\omega$ в частоте обратно пропорциональна среднему времени жизни τ.

Чтобы показать это, рассмотрим испускание и рассеяние света атомом в духе «осцилляторной модели» из п. 15. Допустим, что мы имеем дело лишь с двумя состояниями: основным и возбужденным, отстоящим от него по энергии на $\hbar\omega_0$.

Рассмотрим сначала атом непосредственно после того, как он был возбужден. Внутри него «что-то колеблется», и мы обозначим амплитуду этих колебаний через $A(t)$. Допустим, что эти колебания следующим образом зависят от времени:

$$A(t)=A\exp(-i\omega_0 t-t/2\tau), \qquad (20a)$$

где A — постоянная. Так в комплексном представлении зависит от времени амплитуда колебаний затухающего гармонического осциллятора со средней частотой ω_0.

Поскольку эти колебания совершаются заряженными частицами, то можно ожидать, что при этом будет испущено электромагнитное излучение (со средней частотой ω_0) и амплитуда этого излучения будет зависеть от времени согласно (20a). *Интенсивность* $I(t)$ испущенного излучения пропорциональна квадрату модуля амплитуды:

$$I(t)=C|A(t)|^2=C|A|^2\exp(-t/\tau); \qquad (20b)$$

здесь C — некоторая постоянная. Таким образом, можно написать

$$I(t)=I(0)\exp(-t/\tau). \qquad (20c)$$

Мы записали экспоненциальный распадный множитель в (20a) в виде $\exp(-t/2\tau)$, чтобы в выражении для интенсивности получить коэффициент $\exp(-t/\tau)$. Вопрос о том, как написать этот множитель,

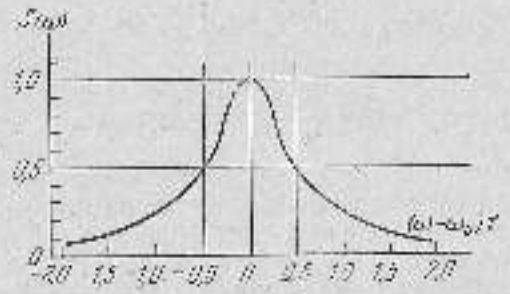


Рис. 21А. Излучение как резонансная кривая. Она описывает и как в слабой линейной (или другой симметричной линейной), системе на гармоническую внешнюю силу является сравнительно частое приближение, что по отношению к ω_0 все другие сравнимые частоты, фигуры играют особенно важную роль для нужных «селективных» систем. Сравнимых приема в качестве кривых. Но если в взгляд эти кривые различаются одна от другой, то нужно помнить, что ширина кривой очень быстро изменяется и нужно определить центральную область, чтобы ясно у резонансной кривой имелся данный «хвост»

т. е. как определить величину τ, является делом условия. При каком определении за время τ *интенсивность* излучения уменьшается в e раз. Величина τ измеряет продолжительность процесса, и можно интерпретировать τ как *среднее время* жизни возбужденного состояния. «Большая часть распадов происходит за время порядка τ».

21. Амплитуда колебаний $A(t)$, выражаемая формулой (20a), удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$dA(t)/dt+(i\omega_0-1/2\tau)A(t)=0. \qquad (21a)$$

Оно описывает осциллятор в отсутствие внешних сил. Предположим, что на осциллятор действует монохроматическая световая волна, имеющая частоту ω. Уравнение (21a) следует заменить, добавив член, описывающий гармоническую внешнюю силу. В результате неоднородное дифференциальное уравнение, описывающее поведение осциллятора, примет вид

$$dA(t)/dt+(i\omega_0+1/2\tau)A(t)=F\exp(-i\omega t); \qquad (21b)$$

здесь F — постоянная, характеризующая вынуждающую силу.

Решение дифференциального уравнения (21b) для установившегося режима (мы не рассматриваем процесс установления) имеет вид

$$A(t)=\frac{U_0 \exp(-i\omega t)}{(\omega-\omega_1)-i/2\tau}. \qquad (21c)$$

Этому решению отвечают колебания постоянной амплитуды с частотой приложенной силы ω.

Интенсивность излучения, испущенного осциллятором, пропорциональна квадрату модуля $A(t)$. Излучение осциллятора под действием возбуждающей силы является рассеянным излучением, и количество рассеянной энергии пропорционально интенсивности. Обозначив через $S(\omega)$ интенсивность излучения на единичную амплитуду. Имея в виду (21c), можно написать

$$S(\omega) \text{ пропорционально } \left|\frac{1}{(\omega-\omega_0)+i/2\tau}\right|^2,$$

или

$$S(\omega)=S(\omega_1)\frac{(1/2\tau)^2}{(\omega-\omega_0)^2+(1/2\tau)^2}, \qquad (21d)$$

где $S(\omega_1)$ характеризует рассеяние на резонансе, т. е. при $\omega=\omega_1$. На рис. 21A приведен график зависимости $S(\omega)$ от ω.

22. Функция $S(\omega)$ выражает интенсивность «отклика» системы на внешнее возмущение с частотой ω. *Такой тип резонансного отклика весьма характерен для квантовой физики, он не ограничен взаимодействием света с атомом.* Мы имеем дело с той же резонансной формулой и при рассеянии материальных частиц, например протонов определенной энергии ядрами или π-мезонов протонами. Можно сказать, что квазистабильный уровень энергии квантовомеханической системы «существует» именно в том смысле, что система имеет резонансный отклик, описываемый выражением (21d).

В ядерной физике резонансная формула (21d) известна после работ Г. Брейта и Е. Вигнера как *резонансная формула Брейта — Вигнера для одного уровня.*

23. Отметим важное свойство резонансной формулы (21d). Если обозначить через ω частоту, при которой отклик системы равен половине отклика в максимуме, то легко показать, что

$$\omega=\omega_0\pm 1/2\tau. \qquad (23a)$$

Ширина резонансной кривой (рис. 21A) на половине максимального значения равна соответственно

$$\Delta\omega=1/\tau, \qquad (23b)$$

Это находится в согласии с высказанной в п. 20 догадкой о связи между неопределенностью в частоте и средним временем жизни возбужденного состояния.

Ширина возбужденного уровня энергии равна $\Delta E=\hbar\Delta\omega$, поэтому из (23b) следует имеющая большое значение формула

$$\Delta E=\hbar/\tau, \qquad (23c)$$

которая связывает неопределенность ΔE в энергии уровня со средним временем жизни состояния. Чем дольше существует состояние, тем лучше определена его энергия.

24. У читателя могут возникнуть сомнения в применимости простого дифференциального уравнения (21b) к столь сложному явлению, как взаимодействие между светом и атомом. Такое сомнение обосновано, но мы не отвлекаем все аспекты этого взаимодействия, а лишь «ставим» атома на почти монохроматическое излучение, частота которого лежит в непосредственной близости к резонансной частоте ω_0, соответствующей переходу из основного в возбужденное состояние. Формула (21d) описывает одиночный резонанс, и если их несколько, как всегда бывает в атоме, молекуле или ядре, то теория должна быть модифицирована. Можно ожидать, что формула (21d) сохранит свою применимость *непосредственно вблизи* резонанса, когда расстояние до других резонансов велико.

Изложение более полной теории радиационных переходов завело бы нас слишком далеко, и мы должны ограничиться сказанным. Суть дела в том, что *ничто* осциллирует и *ничто* заряжено и что колебания амплитуды на внешнее возмущение малы.

25. Рассмотрим теперь ширину линии испускания для перехода *между* двумя *возбужденными* состояниями. Эта ситуация схематически показана на рис. 25A. Ширина уровней отвечает (в сильно искаженном масштабе) ширине горизонтальных линий. Рассмотрим каскад из двух переходов: пусть за переходом из второго состояния в первое следует переход из первого в основное. Ширина линии (с частотой ω_{21}), появляющейся при втором переходе, равна $\Delta\omega_{21}=\Delta E_2/\hbar$.

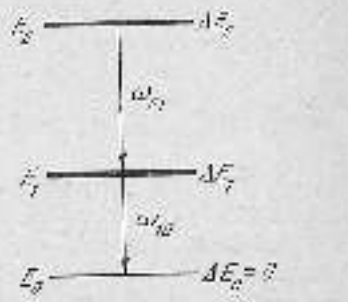


Рис. 25A. Грубая схема уровней для испускания каскадной линии. E_2 — энергия возбужденного состояния, ΔE_2 — ширина этого уровня, ω_{21} — частота испускаемой при переходе из верхнего в первое возбужденное состояние линии с шириной $\Delta\omega_{21}=(\Delta E_2+\Delta E_1)/\hbar$

Нас интересует неопределенность в сумме двух частот, испущенных в каскадном переходе *данного* атома. Обозначим эту сумму $\omega_{21}+\omega_{10}$. Тогда мы имеем $\Delta(\omega_{21}+\omega_{10})=\Delta E_2/\hbar$. Этот результат следует из закона сохранения энергии: неопределенность полной выделившейся при переходе энергии, очевидно, должна быть той же, что и неопределенность второго возбужденного состояния.

Теперь можно догадаться, что ширина линии (с частотой ω_{21}) в первом переходе равна $\Delta\omega_{21}=(\Delta E_2+\Delta E_1)/\hbar$, и если первое возбужденное состояние имеет большую ширину, то велика будет и ширина линии испускания, даже если ширина второго возбужденного состояния очень мала (и время жизни соответственно очень велико). Ширина первого возбужденного уровня вносит неопределенность в способ разделения всей доступной энергии между двумя испущенными фотонами.

Изложенные здесь результаты, основанные на законе сохранения энергии и на идее о конечной ширине уровней энергии, кажутся

весьма правдоподобными. Наши рассуждения хотя и не были строгими, их достаточно для качественного понимания проблемы. Существенно здесь то, что ширина линии испускания зависит от ширины обоих уровней.

26. Вернемся к соотношению $\Delta\omega \sim 1/\tau$. Так как частота обратно пропорциональна длине волны, то относительная неопределенность в длине волны равна относительной неопределенности в частоте, и мы имеем

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{\omega\tau}. \qquad (26.1)$$

Для оптических переходов в атомах величина $\omega\tau$ всегда очень велика. Частота $\nu = \omega/2\pi$ имеет порядок $5 \cdot 10^{14}$ Гц, а порядок величины τ равен 10^{-7}—10^{-8} с. Таких образом, относительная неопределенность длины волны (или частоты) будет порядка $\Delta\lambda/\lambda \sim 10^{-7}$, что представляет собой весьма малую величину. Результирующая ширина спектральной линии называется *естественной шириной линии*; она является внутренним свойством атома (точнее, тех уровней атома, которые участвуют в переходе).

Продолжение обсуждения схем уровней

27. Рассмотрим теперь ряд типичных схем уровней. Они получены из эксперимента, интерпретированного в рамках квантовой механики, и к ним следует отнестись с большим вниманием. Каждая диаграмма или таблица длин волн является результатом огромной последовательской работы.

Мы даем схемы уровней в том виде, в котором читатель встретит их в научной литературе. Их вид и система обозначений различных уровней определяются давно установленными соглашениями. Мы будем их придерживаться, даже если нам не всегда хватит времени для объяснения различных деталей. Читатель может возразить, что нам не следовало бы включать в диаграммы ничего, что не было бы предварительно объяснено теоретически. Такая точка зрения, доведенная до логического конца, вообще не позволила бы нам рассматривать схему термов до того, как мы, исходя из теории, не показали бы существования дискретных уровней энергии. Целью этой главы является, однако, обсуждение некоторых свойств физических систем, основанное на эмпирическом факте существования уровней энергии. Не следует забывать, что схемы уровней, одна из которых показана на рис. 28А, возникли на базе спектроскопических измерений еще *до того*, как было достигнуто полное понимание деталей, т. е. *до* открытия квантовой механики.

28. Каждому уровню энергии квантовомеханической системы соответствует ряд *квантовых чисел*. Они дают значения некоторых важных физических параметров, возникающих при квантовомеханическом описании системы. Мы обсудим физический смысл некоторых квантовых чисел при рассмотрении самих диаграмм. Читатель,

конечно, не будет в состоянии понять и запомнить в подробностях все обозначения, показанные для уровней.

На рис. 28А приведена схема уровней нейтрального атома лития. Слева дана шкала энергии, выраженной либо в электрон-вольтах, либо в волновых числах. Горизонтальные линии соответствуют уровням энергии. Линии, соединяющие различные уровни, отвечают наблюдаемым электромагнитным переходам между ними, а числа на

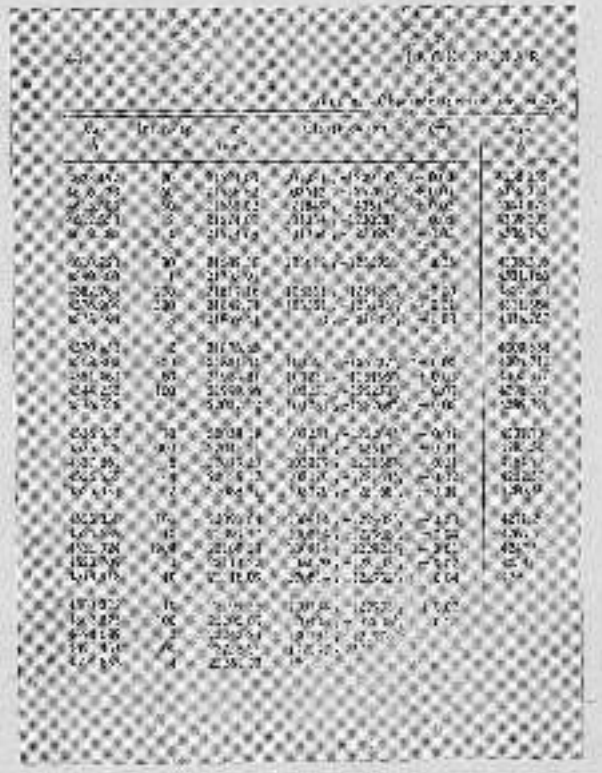


Рис. 27А. Часть таблицы из работы: *Bacher J.* Description and Analysis of the Thin Spectrum of Cerium (Ce I II). — PRSA, 1926, v. 50, p. 30. В первом столбце приведены длины волн в ангстремах для наблюдаемых линий дважды ионизованных атомов церия, во втором — относительная интенсивность линий, в третьем — энергия фотонов в волновых числах, и четвертом — соответствующие уровни энергии, выраженные в волновых числах.

этих линиях — длина волны в ангстремах. Особенно важным линиям спектра соответствуют более толстые линии.

Уровни энергии на рис. 28А собраны в отдельные колонки. На схеме показаны четыре такие колонки, обозначенные буквами *s*, *p*, *d* и *f*. Атом лития имеет много уровней, которые расположены справа от колонки *f*, но они лежат близко к уровню ионизации и не дают вклада в видимый спектр лития.

Заметим, что показанные на рис. 28А спектральные линии обладают замечательным свойством: они возникают в результате перехо-

лов между уровнями двух соседних колонок. Показанные на рис. 28А линии не исчерпывают всех возможных переходов. Квантовая механика предсказывает, например, переходы на уровень $3p$ из s-колонки и d-колонки, на уровень $3d$ из p-колонки или f-колонки и т. д. Многие из этих переходов действительно удалось наблюдать, но они не показаны, чтобы не перегружать рисунка. Указанные переходы принадлежат инфракрасной области спектра и подчиняются

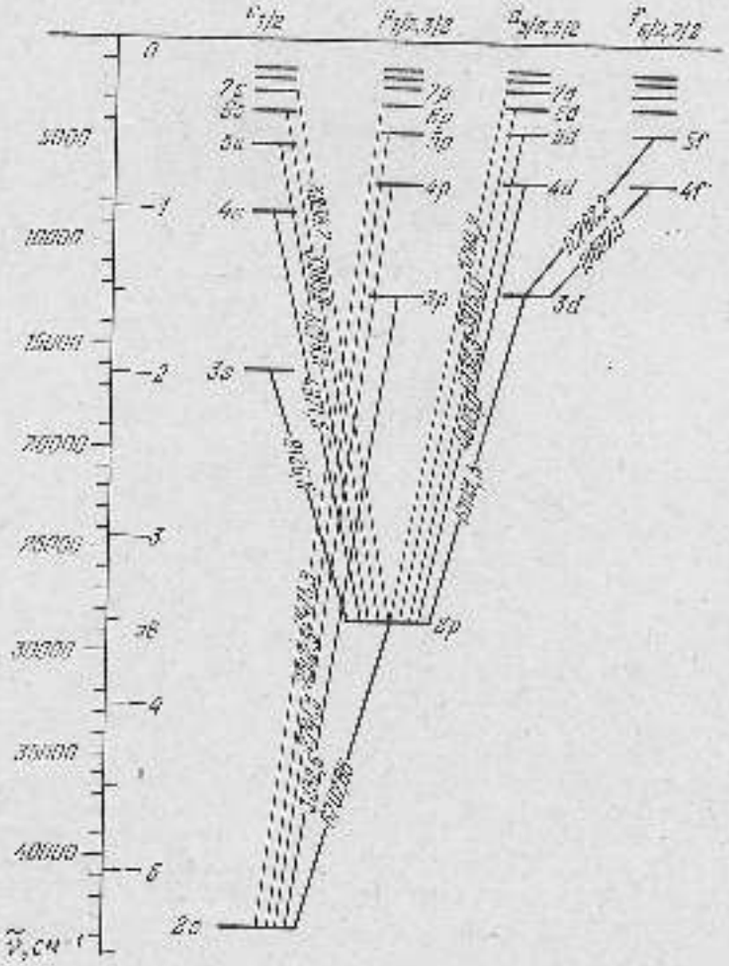


Рис. 28А. Схема уровней нейтрального атома лития. Изображенные линии соответствуют электрическим дипольным переходам. Длины волн даны в ангстремах. Подробнее об работе, из которой взята эта схема, см. в тексте (Grotrian W. Graphische Darstellung der Spektren von Atomen. — Berlin, 1928. Bd 1).

отмеченному правилу, согласно которому переходы происходят лишь между уровнями соседних колонок. Это правило является интересным примером *правил отбора*, из которых следует, что переходами могут быть связаны только определенные пары уровней.

Эмпирические основания этих правил становятся ясными из внимательного рассмотрения линий, показанных на рис. 28А. Мы заметим, в частности, отсутствие переходов между уровнями $3s$ и $2s$, между уровнями $3p$ и $2p$ и т. д. Эти правила отбора определяют характер спектра атомов лития, и поэтому разделение уровней на колонки рис. 28А весьма естественно.

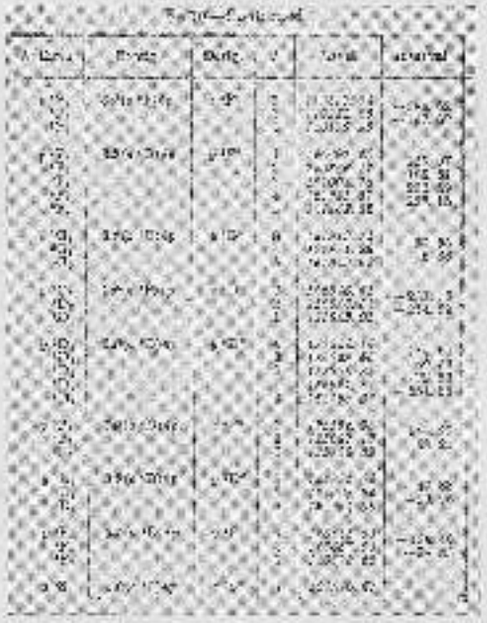


Рис. 28Б. Часть таблицы уровней энергии для дважды ионизованного цезия. Схема уровней хорошо дает общей ориентировки, но точные и обширные данные о спектрах удобнее иметь в виде таблиц. Энергии измерены от основного уровня и выражены в волновых числах (вторая строка). В четвертом столбце приведены значения квантовых чисел. В первых трех столбцах даны краткие обозначения уровней (Meggers C.C. Atomic Energy Levels.—Washington, 1932. p. 11, p. 8-1).

29. Рассмотренное правило отбора является удивительным свойством спектра атомов лития. Есть ли для него теоретическое объяснение? Да, теория полностью объясняет это явление. Объяснение основано на двух фактах: на изотропии физического пространства и на малости постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c \sim 1/137$. Мы не сможем дать полного объяснения правил отбора, так как математическая подготовка читателя может оказаться недостаточной, но мы попытаемся дать представление об основных идеях, объясняющих правила отбора.

Малость постоянной тонкой структуры приводит к тому, что в электромагнитных переходах атомной физики доминирующую роль играют такие переходы, при которых испущенная электромагнитная волна имеет те же свойства симметрии, что и волна, испущенная электрическим дипольным осциллятором. Мы покажем это позже.

Такую волну (или фотон) мы будем называть *электрической дипольной волной* (или *электрическим дипольным фотоном*). С помощью квантовой механики можно показать, что такая волна несет момент импульса, равный $\hbar$.

Изотропия физического пространства означает, что в мире нет выделенного направления: свойства изолированной системы не зависят от того, каким образом она *ориентирована* в пространстве. Из этой изотропии, при весьма общих условиях, следует (в квантовой, а также и в классической физике), что вектор момента импульса изолированной системы сохраняется; он не меняется со временем. Поэтому, если атом испускает электрический дипольный фотон, то момент импульса атома до излучения должен быть равен его моменту импульса после испускания плюс момент импульса, уносимый дипольным фотоном. Этот закон сохранения создает правило отбора, так как каждое стационарное состояние атома обладает определенным моментом импульса.

30. Согласно квантовой механике, квадрат момента импульса атома (если пренебречь моментом импульса, которым может обладать ядро) равен

$$J^2 = j(j+1)\hbar^2, \tag{30a}$$

где j — *квантовое число момента импульса*. Возможные значения j ограничены правилом, что $2j$ должно быть целым и неотрицательным числом: $2j = 0, 1, 2, \ldots$; при этом $2j$ четно, если в атоме четное число электронов, и нечетно при нечетном их числе. Обычно принято говорить, что состояние, характеризуемое квантовым числом j, имеет момент импульса $j\hbar$.

В квантовой механике доказывается, что при электрическом дипольном переходе из начального состояния с моментом импульса j_i в конечное состояние с моментом импульса j_f разрешенное изменение квантового числа j определяется правилом

$$\Delta j = j_f - j_i = -1,\ 0 \quad \text{или} \quad +1. \tag{30b}$$

Это — строгое правило, которое выполняется для всех изолированных квантовомеханических систем, например для атомов, молекул и ядер. Оно следует из законов сохранения, рассмотренных выше. В этой книге мы не знакомим с теорией момента импульса и не даем поэтому вывода формул (30a) и (30b).

31. Приведенной теорией (30b) не исчерпываются правила отбора, действующие в атоме лития. В атомной физике существует еще одно, на этот раз не столь строгое, но *приближенное* правило отбора, управляющее электрическими дипольными переходами. Оно гласит: при электрическом дипольном переходе *орбитальный момент импульса* электронов может изменяться лишь на единицу:

$$\Delta l = l_f - l_i = -1 \quad \text{или} \quad +1, \tag{31a}$$

где l — *квантовое число орбитального момента импульса* электрона в атоме. Каков смысл этого числа l? Он имеет «классическую» интерпретацию: если мы описываем атом в терминах классической

механики, то l характеризует момент импульса, связанный с орбитальным движением электронов. В действительности у каждого электрона есть также *внутренний* момент количества движения, или

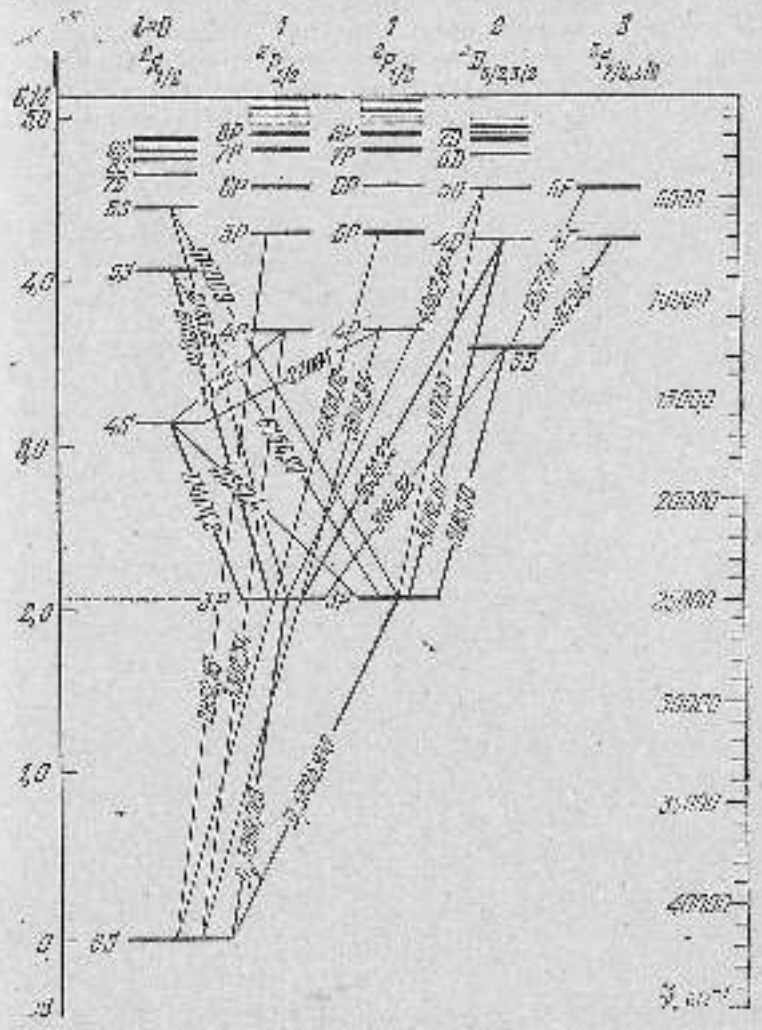


Рис. 32А. Схема уровней нейтрального атома натрия (по Пашену и Гротриану, см. стр. 205).

слоя. Для электрона квантовое число спинового момента импульса имеет значение $j_{спин} = 1/2$, и мы говорим, что электрон имеет спин 1/2ħ. Полный момент импульса электрона в атоме состоит из двух частей. Он является векторной суммой орбитального момента импульса и спина.

Теоретически возможными значениями l являются все неотрицательные целые числа: $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Буквы s, p, d, f, ..., кото-

рами обозначены колонки термов на рис. 28А, представляют собой код для значений l: s означает $l=0$, p означает $l=1$, d означает $l=2$, а f означает $l=3$. Правило отбора, о котором мы говорили в п. 28, эквивалентно, таким образом, правилу отбора (31а).

Не всегда возможно с определенностью приписать данному уровню энергии в атоме некоторое квантовое число орбитального момента импульса, хотя для атомов лития и вообще для атомов щелочных металлов это может быть сделано однозначно. Причина возможных затруднений в том, что, хотя полный момент импульса является интегралом движения, ни орбитальный момент импульса, ни спин

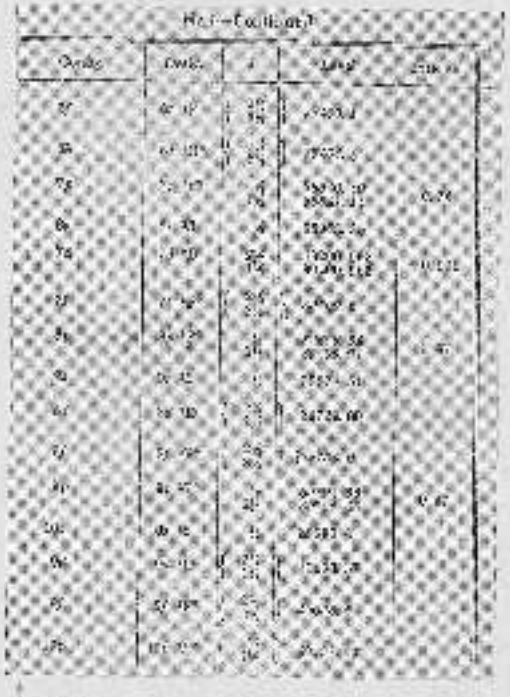


Рис. 31В. Часть таблицы уровней энергии нейтрального атома натрия. Энергии измерены от основного уровня и напечатаны в волновых числах (четвертый столбец). В третьем столбце приведен момент импульса для каждого состояния. (Из книги Мура, см. рис. 28В1.)

такими интегралами не являются. Иными словами, уровни энергии в общем случае не имеют определенного значения l. В этом смысле правило (31а) является лишь приближенным правилом. Как мы сказали, оно является хорошим правилом лишь для атомов щелочных металлов (и водорода).

32. Обратимся снова к рис. 28А. Что можно сказать о квантовом числе j и правиле отбора (30b)? Это правило не проявляет себя на рис. 28А, так как мы воспользовались там упрощенной схемой термов. В действительности термы в колонках p, d и f должны быть двойными. Индексы 1/2, 3/2, 5/2 и 7/2 у букв, обозначающих колонки,

являются обозначением полного момента импульса j. Для атомов щелочных металлов (и водорода) выполняется следующее правило: если $l=0$, то $j=1/2$ (полный момент импульса образован спином электронов). Для всех других значений l полный момент импульса j может принимать значения $j=l+1/2$ и $j=l-1/2$. Для других атомов

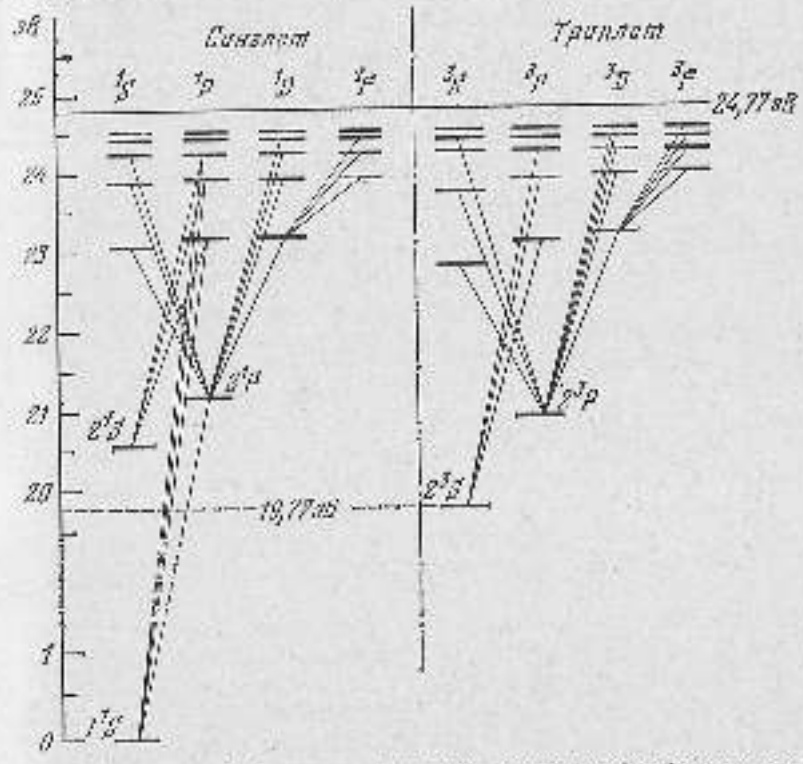


Рис. 31А. Схема уровней нейтрального атома гелия. Замечательной особенностью схемы является разделение уровней на синглетные и триплетные. В триплетных состояниях спины обоих электронов параллельны, в синглетных — антипараллельны. Между синглетными и триплетными уровнями существует соответствие, за тем исключением, что синглетный основной уровень не имеет аналога среди триплетных состояний. Это особенность является следствием принципа Паули: состояние с самой низкой энергией не может быть занято двумя электронами с параллельными спинами. Если спины антипараллельны, такого ограничения нет.

существуют другие правила. Таким образом, уровень $2p$ в действительности является двойным, но различие в энергии между двумя уровнями *дублета* $l+1/2$ и $l-1/2$ очень мало, и в пределах точности чертежа они совпадают.

На рис. 32А показана схема уровней атомов натрия, который также является щелочным металлом. Его схема термов в главных чертах аналогична схеме термов лития. На этой схеме мы показали p-уровни двойными, но для экономии места (и работы) оставили и d- и f-колонки одиночные уровни. Все переходы, показанные на рис. 32А, являются электрическими дипольными переходами.

Переходами, ответственными за характерный желтый цвет натриевой лампы, являются переходы с уровней $3P_{1/2}$ и $3P_{3/2}$ в основное состояние $3S_{1/2}$. В действительности «желтая линия натрия» является дублетом.

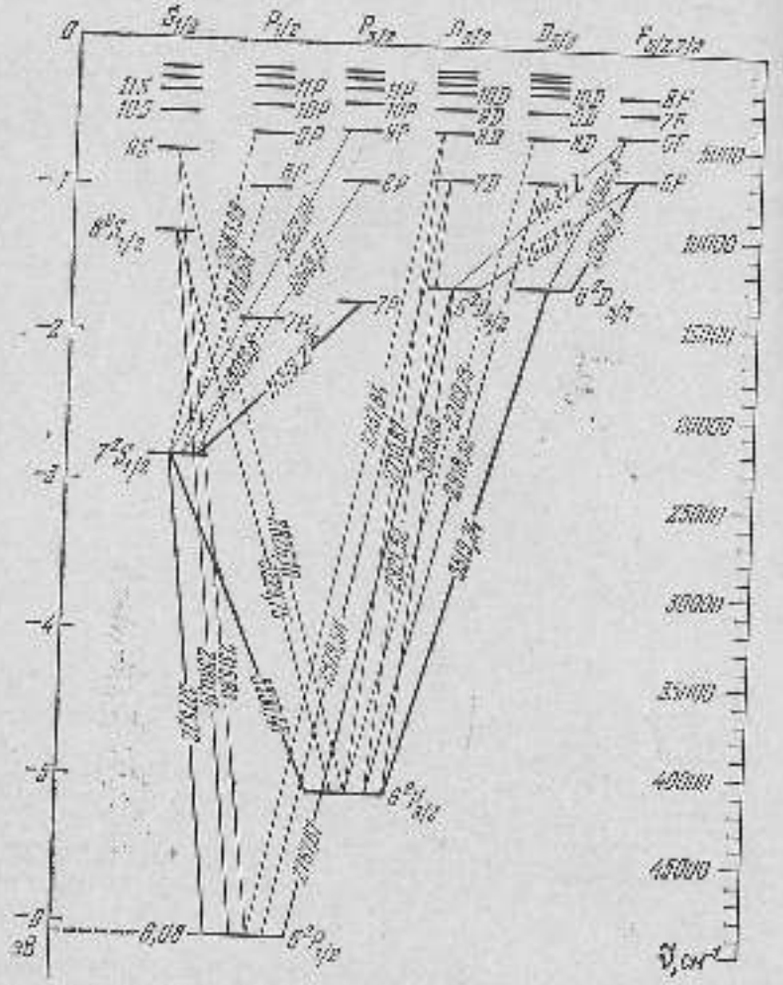


Рис. 34А. Схема уровней нейтрального атома таллия (из книги Гротриана, см. рис. 20А)

Читатель может самостоятельно исследовать схему термов на рис. 32А и убедиться в том, что указанные переходы согласуются с правилами отбора (30b) и (31a) для j и l.

33. Показанные на рис. 33А уровни энергии атома гелия обладают замечательной особенностью: они образуют две почти совершенно независимые системы термов — синглетную и триплетную. Наблюдаемые спектральные линии возникают от переходов внутри

каждой из систем — от синглетных уровней к синглетным и от триплетных к триплетным же.

Атом гелия имеет два электрона. В синглетных уровнях оба электронных спина антипараллельны, а в триплетных уровнях они параллельны.

Буквами S, P, D, F, ... обозначены полные орбитальные моменты импульса электронов. Расположенные слева сверху числа 1 или 3 обозначают *мультиплетность* уровня (синглет или триплет). Для синглетных уровней полный момент импульса равен орбитальному. Для триплетных уровней полный момент импульса j может принимать значения $j=l-1$, l и $l+1$, с тем условием, что всегда $j\geqslant 0$. В триплетной системе термов S-уровни одиночные, остальные уровни тройные. Синглетная система термов состоит из одиночных уровней.

34. Обратим внимание на интересную особенность схемы термов таллия, показанной на рис. 34А. Атом в состоянии $7^2S_{1/2}$ может перейти *либо* в состояние $6^2P_{1/2}$, *либо* в состояние $6^2P_{3/2}$. Таким образом, атом имеет выбор для своего «скачка». В схеме уровней таллия и в других схемах, показанных в этой главе, можно найти другие примеры такого выбора (читатель может их поискать). Если данный возбужденный уровень распадается различными возможными способами, то каждому из них соответствует своя определенная вероятность. Эти вероятности известны под названием *относительных вероятностей* *). Опыт показывает, что относительные вероятности являются внутренним свойством возбужденного состояния, т. е. не зависят от того, *каким способом* образовано данное возбужденное состояние.

35. Весьма похожие схемы уровней двух щелочных металлов натрия и калия сильно отличаются от схем для гелия и таллия. Исследование большого числа схем обнаружило замечательный факт: химически аналогичные элементы имеют аналогичные схемы уровней. Примером является рис. 35А. Причина в том, что оптические спектры и химические свойства элементов определяются строением электронной оболочки атома, в частности расположением самых внешних электронов.

Понимание периодической системы элементов, приведенной на рис. 35В, основано на идее об оболочечной структуре атомов. В этой таблице элементы расположены в порядке возрастания атомного номера Z, элементы с близкими химическими свойствами объединены в общие колонки. Число электронов в атоме равно Z, и по мере продвижения по таблице в сторону возрастающих Z происходит заполнение «оболочек» электронами, повторяющееся периодически. Химические свойства элемента определяются тем, насколько заполнена последняя оболочка. Например, благородные газы возникают в таблице при полном заполнении соответствующей оболочки. Число электронов, которые может поглотить данная оболочка, определяется принципом Паули, и этот принцип имеет, таким образом,

*) Этим термином мы переводим «the branching ratios».— *Прим. ред.*

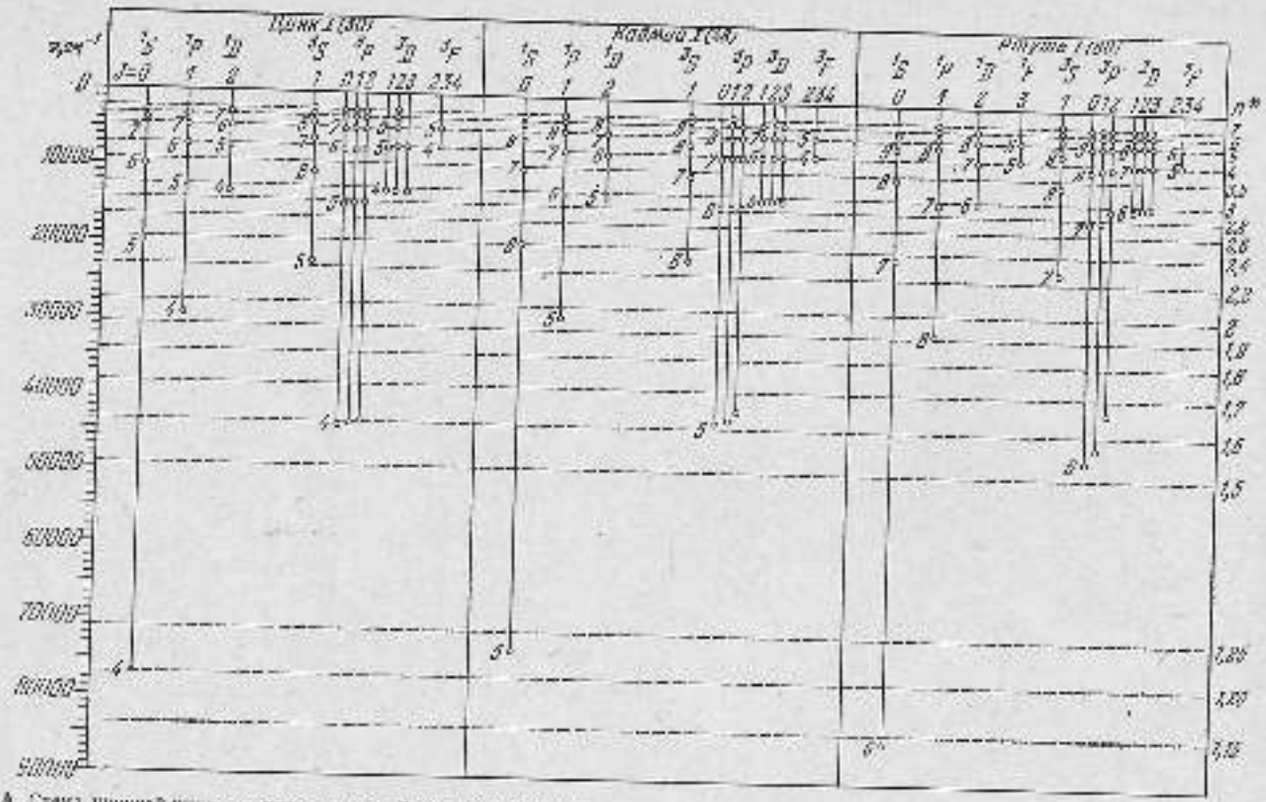


Рис. 38А. Схема уровней цинка, кадмия и ртути. Приведенным ниже, они показывают, что химически весьма близкие элементы имеют аналогичные схемы уровней (из книги Гротриана, см. рис. 98А)

1 H 1,0080																	2 He 4,003
3 Li 6,940	4 Be 9,013											5 B 10,82	6 C 12,01	7 N 14,008	8 O 16,000	9 F 19,00	10 Ne 20,183
11 Na 22,997	12 Mg 24,32											13 Al 26,98	14 Si 28,09	15 P 30,975	16 S 32,066	17 Cl 35,457	18 Ar 39,944
19 K 39,100	20 Ca 40,08	21 Sc 44,96	22 Ti 47,90	23 V 50,95	24 Cr 52,01	25 Mn 54,94	26 Fe 55,85	27 Co 58,94	28 Ni 58,71	29 Cu 63,54	30 Zn 65,38	31 Ga 69,72	32 Ge 72,60	33 As 74,91	34 Se 78,96	35 Br 79,916	36 Kr 83,80
37 Rb 85,48	38 Sr 87,63	39 Y 88,92	40 Zr 91,22	41 Nb 92,91	42 Mo 95,95	43 Tc	44 Ru 101,1	45 Rh 102,91	46 Pd 106,4	47 Ag 107,880	48 Cd 112,41	49 In 114,82	50 Sn 118,70	51 Sb 121,76	52 Te 127,61	53 J 126,91	54 Xe 131,30
55 Cs 132,91	56 Ba 137,36	57-71 La Ряд	72 Hf 178,50	73 Ta 180,95	74 W 183,86	75 Re 186,22	76 Os 190,2	77 Ir 192,2	78 Pt 195,09	79 Au 197,0	80 Hg 200,61	81 Tl 204,39	82 Pb 207,21	83 Bi 208,98	84 Po	85 At	86 Rn
87 Fr	88 Ra 226,05	89-103 Ac Ряд	(104)	(105)	(106)	(107)	(108)										

Ряд лантанидов	57 La 138,92	58 Ce 140,13	59 Pr 140,92	60 Nd 144,27	61 Pm	62 Sm 150,35	63 Eu 152,0	64 Gd 157,26	65 Tb 158,87	66 Dy 162,51	67 Ho 164,94	68 Er 167,27	69 Tm 168,94	70 Yb 173,04	71 Lu 174,99
Ряд актинидов	89 Ac 227,04	90 Th 232,05	91 Pa 231,05	92 U 238,04	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lw

Рис. 38Б. Периодическая система элементов. Над химическим символом элемента показан его атомный номер Z, а ниже — атомная масса (для стабильных изотопов). Заметим, что ряд лантанидов (редкоземельные элементы) содержит 15 химически очень близких элементов. Энергия электронов внешней оболочки всех этих атомов почти одинакова. Ряд обрывается потому, что по мере увеличения числа протонов от одного члена ряда к последующему последняя внутренняя оболочка, в нарушение периодичности, не достраивается. На основе таких представлений Бор предсказал, что элемент с атомным номером 72 (гафний, в то время неизвестный), по своим химическим свойствам должен быть гомологом циркония, а не лантанидом. Действительно, впоследствии гафний был обнаружен в минералах циркония, что было крупным успехом теории. Так называемые актиниды образуют аналогичный ряд.

Таблица 35А. Оболочечная структура легких атомов

Элемент	Атомный номер	Оболочки: K	L	M		N			
		Подоболочки: 1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4f
H	1	1								
He	2	2								
Li	3	2	1							
Be	4	2	2							
B	5	2	2	1						
C	6	2	2	2						
N	7	2	2	3						
O	8	2	2	4						
F	9	2	2	5						
Ne	10	2	2	6						
Na	11	2	2	6	1					
Mg	12	2	2	6	2					
Al	13	2	2	6	2	1				
Si	14	2	2	6	2	2				
P	15	2	2	6	2	3				
S	16	2	2	6	2	4				
Cl	17	2	2	6	2	5				
Ar	18	2	2	6	2	6				
K	19	2	2	6	2	6		1		
Ca	20	2	2	6	2	6		2		
Sc	21	2	2	6	2	6	1	2		
Ti	22	2	2	6	2	6	2	2		

Основные оболочки, обозначенные буквами K, L, M, N, ..., делятся на подоболочки. Группы различных периодов отмечены толстыми горизонтальными линиями. Конфигурации электронов, соответствующие благородным газам, выделены пунктиром. В первых трех периодах происходит правильное последовательное заполнение оболочек, не начиная новую, пока электроны заполнили до внешней оболочки, хотя внутренняя еще не заполнена. Дальше в периодической таблице это правило нарушается. Оно верно для оболочек трех типов. В s-оболочке можно поместить 2 электрона, в p-оболочке — 6, а в d-оболочке — 10.

решающее значение для химии. До великого открытия Паули все эти обстоятельства были совершенно неизвестны.

Объяснение деталей строения периодической таблицы на основе изложенных здесь идей дает большое удовлетворение. Однако в этой книге мы не будем заниматься этим. Лучше всего связать объяснение свойств периодической таблицы с систематическим изучением

атомных спектров и уровней энергии, а это слишком сложная задача для вводного курса.

Чтобы возбудить интерес читателя, мы приводим в табл. 35А часть таблицы, показывающей слоистое строение электронной оболочки атомов.

36. В 1869 г., когда Менделеев впервые сообщил о периодической таблице элементов, не были известны ни электроны, ни ядра. Поэтому Менделеев не мог расположить элементы в порядке возрастания заряда Z, а располагал их по возрастающим значениям атомной массы. Это также дало правильный порядок расположения, за некоторым, однако, исключением: атомная масса аргона больше атомной массы калия, хотя химические свойства этих элементов однозначно указывают на то, что аргон должен стоять в периодической таблице перед калием (аргон — благородный газ, а калий — щелочной металл). С точки зрения химии порядок элементов в таблице почти очевиден, и поэтому каждому элементу можно приписать свой атомный номер Z.

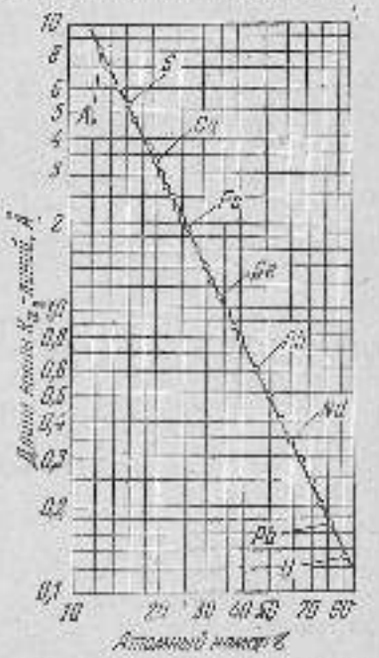


Рис. 37А. Графики зависимости $\sqrt{\nu}$ от Z. Z — атомный номер элемента, K_{α_2} — линии рентгеновского спектра элемента с атомным номером Z. В пределах точности чертежа все экспериментальные точки ложатся на прямую. На графике приведены линии только двух из исследованных элементов, но в действительности аналогичные измерения выполнены почти для всех элементов. Подтверждение теории, объясняющей показанную зависимость, читайте в тексте.

Замечая, что Менделеев проявил замечательную научную проницательность, оставив в таблице пустые места, в которые должны были, по его мнению, попасть еще не открытые в его время элементы *).

37. Понимание того, что атомный номер элемента измеряет заряд ядра (или равное ему число электронов), было большим шагом вперед в теории атома. В решении этой проблемы особенно большую роль сыграли работы Г. Мозли, выполненные в 1913 г. Он занимался систематическим измерением длин волн рентгеновского излучения многих элементов и сумел показать, что длины волн аналогичных линий (у различных элементов) весьма простым способом зависят от атомного номера **).

*) *Менделеев Д. И.* Периодический закон.— М.: ГИЗ, 1925. В этой книге собраны работы Д. И. Менделеева, посвященные открытию периодической системы элементов.— *Прим. ред.*

**) *Moseley H. G. J.* The High-Frequency Spectra of the Elements.— Phil. Mag., 1913, v. 26, p. 1024; 1914, v. 27, p. 703.

Рассмотрим эту проблему вкратце. При бомбардировке атомов электронами большой энергии (десятки и сотни килоэлектрон-вольт) возникает коротковолновое электромагнитное излучение. Оно получило название излучения Рентгена. Спектр рентгеновского излучения состоит из непрерывного спектра, на фоне которого видны резкие спектральные линии, характерные для данного элемента (см. экспериментальный спектр на рис. 23А гл. 4). Из рассуждений, приведенных в п. 27 гл. 2, следует, что за испускание характеристических линий рентгеновского спектра ответственны внутренние электроны атома. Электрон большой энергии выбивает электрон из внутренней электронной оболочки атома (так называемой K-оболочки), и один из электронов из более далеких от ядра оболочек падает в образовавшуюся «дырку». Разность энергий связи уносится в виде кванта рентгеновского излучения.

В п. 27 гл. 2 мы показали, что энергия связи внутреннего электрона может быть приближенно записана в виде [7]

$$B_K = Z^2 R_\infty, \qquad (37a)$$

где $R_\infty = \alpha^2 mc^2/2$ — постоянная Ридберга. Мы не занимались вопросом о том, чему равна энергия связи электрона в более далеких оболочках, но читатель может поверить, что она *пропорциональна* B_K, но имеет меньшее значение. Таким образом, если электрон «падает» во внутреннюю оболочку из одной из более далеких оболочек, то длина волны характеристического рентгеновского излучения равна

$$\lambda = C/Z^2 R_\infty, \qquad (37b)$$

где C — постоянная, очень слабо зависящая от Z. Таким образом, график зависимости $\ln \lambda$ от $\ln Z$ должен быть, если все это верно, прямой линией. Из рис. 37А видно, что экспериментальные значения длин волн с хорошей точностью лежат на прямой. В согласии с предсказанием теории Бора, C оказывается близкой к 4/3.

Поскольку электрон, заполняющий дырку, может попасть в все из различных оболочек и сама дырка может возникнуть в различных оболочках, то следует ожидать существования большого числа характеристических линий. Опыт показывает, что так оно и есть. На рис. 37А мы показали только одну из этих линий, соответствующую переходу между одними и теми же оболочками различных атомов. Легко понять, что из таких измерений длины волны характеристических линий можно получить заряд ядра. Работы Мозли привели поэтому к новому пониманию смысла периодической таблицы.

38. Рассмотрим теперь некоторые свойства ядер. На рис. 38А показана схема уровней ядер изотопа бора $^{11}_{5}$B, определенная экспериментально.

На этой схеме основному уровню приписана нулевая энергия. Полный момент импульса этого состояния равен $J=3/2$. Особенно широкие уровни пересечены наклонными линиями, и длина этих линий приблизительно пропорциональна ширине уровня.

Для диссоциации ядра $^{11}_{5}$B достаточна энергия 8,667 МэВ; при больших энергиях возбуждения ядро распадается на α-частицу и изотоп лития $^{7}_{3}$Li. Этот способ диссоциации показан справа от главной системы термов. При энергии возбуждения, большей 11 МэВ, ядро бора имеет две возможности для диссоциации: оно может распасться на нейтрон и изотоп $^{10}_{5}$B либо на протон и изотоп $^{10}_{4}$Be. Эти моды диссоциации также показаны на правой части схемы.

Заметим, что изотоп $^{11}_{5}$B имеет систему уровней энергии, расположенных *над* энергией диссоциации, равной 8,667 МэВ. При меньших энергиях возбуждения ядро испускает только γ-излучение, а при большей — также и материальные частицы (наблюдаемые в $^{11}_{5}$B γ-переходы показаны вертикальными стрелками).

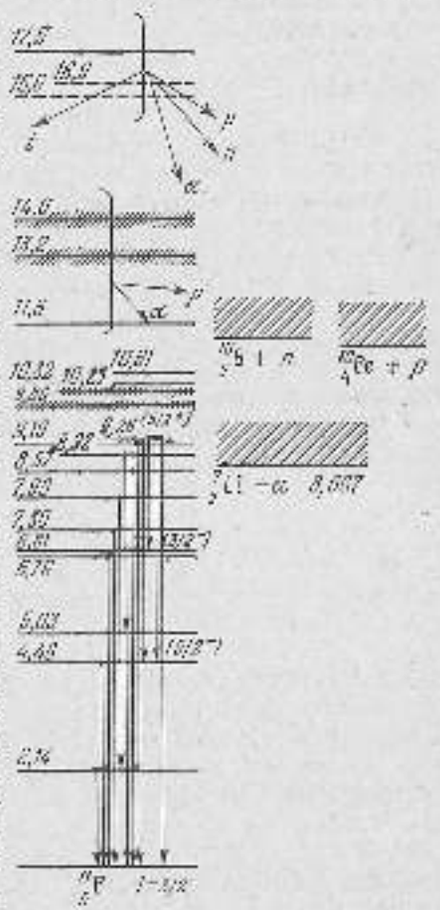


Рис. 38А. Схема уровней энергии для ядра бора $^{11}_{5}$B. (С любезного разрешения авторов: A. Zucker, J. Tunnicliffe, T. Lauritsen, T. Bonner. Levels of ^{11}B. Rudolf Nuclei. — Rev. Mod. Phys., 1955, v. 27, p. 77. Позиции читателю обратиться к оригиналу.)

Этот пример показывает, что мы должны соблюдать осторожность в интерпретации непрерывного спектра. Даже выше энергии диссоциации возможны уровни энергии. Если энергия возбуждения превышает энергию диссоциации, система может распасться на две *материальные* частицы. Ниже энергии диссоциации система может «распасться» лишь на одну материальную частицу и γ-квант. Будем считать γ-квант материальной частицей; тогда можно считать, что уровни, лежащие выше энергии диссоциации (их часто называют «виртуальными уровнями»), в принципе не отличаются от расположенных ниже уровней — все возбужденные уровни нестабильны. Заметим, что нестабильным может быть и основное состояние; вспомним основные состояния радиоактивных ядер. В нашем примере основное состояние ядра $^{11}_{5}$B стабильно — изотоп $^{11}_{5}$B найден в природном боре.

39. Мы отмечали, что два ядра образуют пару *зеркальных ядер*, если одно может быть получено из другого заменой всех нейтронов

на протоны и протонов на нейтроны. Как было сказано в п. 37 гл. 2, *сильное взаимодействие* (а именно они играют основную роль в строении ядра) инвариантны относительно такой замены. Если это верно и нет других взаимодействий, кроме сильных, то у двух зеркальных ядер должны быть идентичны системы уровней. На рис. 38А и 39В показаны экспериментально найденные системы уровней двух пар

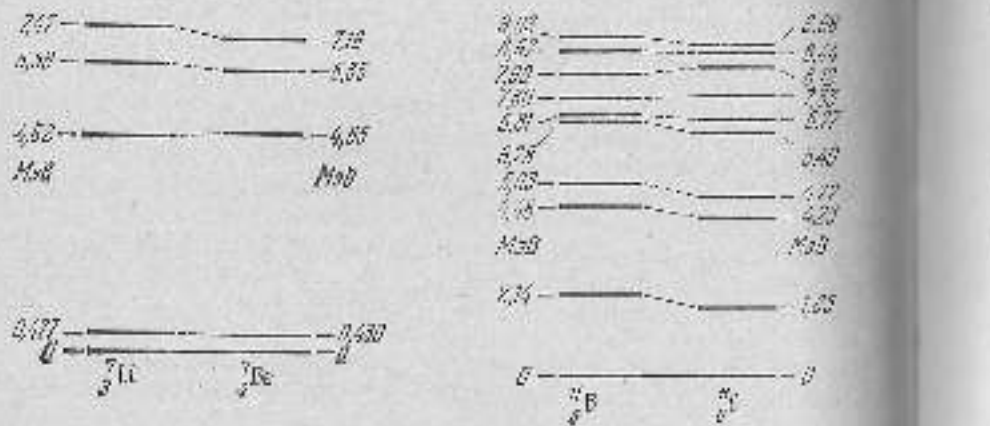


Рис. 39А. Пустоты атома с большим числом Z образуют пару зеркальных ядер. Если в ядре лития все нейтроны превратить в протоны, а протоны — в нейтроны, то мы получим ядро бериллия. У зеркальных ядер очень близкие, но не идентичные схемы уровней. Различие уровней является следствием электростатических взаимодействий.

Рис. 39В. Другой пример зеркальных ядер: ядра углерода-11 и изотопа бора-11

зеркальных ядер. Мы видим, что, действительно, между уровнями пар имеется соответствие, хотя из тех же рисунков следует, что энергии соответствующих уровней не идентичны. Причина небольшого различия в энергии уровней заключается в существовании электростатических сил, которые не инвариантны относительно замены нейтрона протоном.

40. Схема уровней на рис. 40А объясняет, почему α-частицы, испущенные радиоактивными ядрами, не всегда имеют одну и ту же энергию. На рисунке показано превращение радиоактивного изотопа висмута $^{215}_{83}$Bi в изотоп таллия $^{211}_{81}$Tl. Распад происходит из *основного состояния материнского ядра* $^{215}_{83}$Bi в одно из нескольких возбужденных или в основное состояние *дочернего ядра* $^{211}_{81}$Tl. На схеме основное состояние материнского ядра расположено на 6,2 МэВ выше основного состояния дочернего; таким образом, 6,2 МэВ — это максимальная энергия, которая может быть унесена α-частицей. Очевидно, что если распад происходит на одно из возбужденных состояний $^{211}_{81}$Tl, то α-частица будет иметь меньшую энергию. При показанной на рис. 40А системе уровней α-частицы будут испущены с любым из пяти возможных значений энергии. Соответствующие распады показаны наклонными линиями. Цифры в скобках обозначают вероятность различным мод распада.

Если после α-распада дочернее ядро остается в одном из возбужденных состояний, оно испускает γ-кванты и, таким образом, достигает основного состояния.

У многих других α-активных ядер распад всегда происходит в основное состояние дочернего ядра ввиду отсутствия доступных возбужденных состояний. В этом случае все α-частицы имеют одно-единственное значение энергии, и γ-лучи, связанные с α-распадом, отсутствуют.

41. Под *β-распадом* понимают процесс, в котором ядро испускает электрон или позитрон. Простейшим процессом такого рода является β-распад нейтрона, который хорошо изучен экспериментально. Среднее время жизни свободного нейтрона равно 16 мин. Разность масс протона и нейтрона $M_n - M_p = 1{,}3$ МэВ, и схема уровней будет иметь вид, показанный на рис. 41А. Наклонной линией показан переход. Если бы при таком распаде испускался только электрон, он всегда имел бы одну и ту же энергию (равную 1,3 МэВ), подобно

Рис. 40А. При α-распаде изотопа висмута $^{215}_{83}$Bi и дочернее ядро может оказаться либо в основном, либо в одном из четырех возбужденных состояний. Соответственно α-частицы имеют пять различных значений энергии. Дочернее ядро переходит в основное состояние путем γ-распада

Рис. 41А. Схема уровней, необходимая в случае нейтрона. Масса нейтрона равна 939,66 МэВ, а масса протона — 938,80 МэВ. Разность масс нейтрона и протона равна 1,3 МэВ. Часть этой величины, а именно 0,8 МэВ, связана с массой электрона, а остаток переходит в кинетическую энергию электрона, антинейтрино и протона, возникающих при распаде нейтрона. Кинетическая энергия протона очень мала, и почти вся освобождающаяся при распаде энергия делится между электроном и антинейтрино.

тому как это происходит в α-распаде. Опыт показывает, однако, что электрон может быть испущен с любой энергией в пределах от 0,5 МэВ до полной энергии 1,3 МэВ, доступной при распаде.

Дело в том, что при распаде одновременно с электроном появляется другая частица, в данном случае антинейтрино. Эта частица не имеет массы покоя. Энергия распада, равная 1,3 МэВ, распределяется между этими двумя частицами — электроном и антинейтрино.

Реакции β-распада записываются следующим образом:

$$ {}^{A}_{Z}X \to {}^{A}_{Z+1}X + e^- + \bar{\nu} \quad \text{(электронный распад)}, $$

$$ {}^{A}_{Z}X \to {}^{A}_{Z-1}X + e^+ + \nu \quad \text{(позитронный распад)}. $$

Здесь X — химический символ радиоактивного изотопа; e — электрон или позитрон; ν — нейтрино, появляющееся всегда в паре с позитроном; $\bar{\nu}$ — антинейтрино, парное электрону.

42. Схема уровней на рис. 42А изображает β — γ-каскад, источником которого является изотоп кобальта $^{57}_{27}$Co. Этот изотоп вначале испытывает β-распад на возбужденный уровень изотопа никеля $^{57}_{28}$Ni, который на 2,4 МэВ выше основного состояния. Максимальная кинетическая энергия электронов равна 0,3 МэВ, но электрон может быть испущен с любой кинетической энергией, лежащей между нулем и этим пределом. Реакция для этой части процесса имеет вид

$$ {}^{57}_{27}\mathrm{Co} \to {}^{57}_{28}\mathrm{Ni}^{*} + e^- + \bar{\nu}. $$

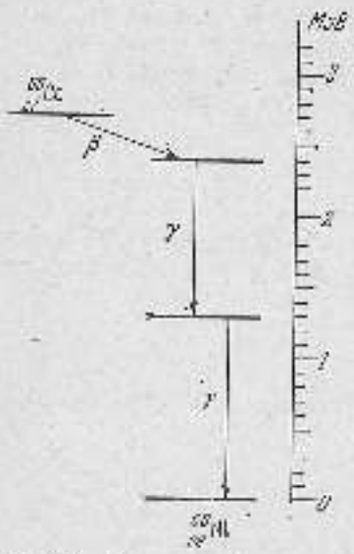


Рис. 42А. Схема уровней, изображающая β — γ-каскад, испускаемый ядрами изотопа кобальта $^{57}_{27}$Co. Этот изотоп в ходе β-распада переходит в возбужденное состояние изотопа никеля $^{57}_{28}$Ni, которое выше основного на 2,4 МэВ. Максимальная кинетическая энергия электронов равна 0,3 МэВ. Возбужденное состояние никеля снимается испусканием последовательных квантов из двух γ-каскадов

Звездочка означает, что изотоп никеля возникает в возбужденном состоянии. Из этого состояния происходит (практически немедленно) два последовательных перехода — в другое возбужденное состояние, отстоящее на 1,3 МэВ от основного, и из последнего в основное состояние. Таким образом, β-распад $^{57}_{27}$Co всегда сопровождается появлением двух γ-квантов с энергиями 1,1 и 1,3 МэВ.

Период полураспада ядра кобальта равен 0,3 года. Следующий за β-распадом каскадный процесс делает ^{57}Co удобным долгоживущим источником γ-квантов.

β-активные ядра, подобно α-активным, часто имеют очень большие периоды полураспада. В случае β-распада причиной является чрезвычайная слабость взаимодействия, ответственного за распад. Соответствующее взаимодействие так и называется *слабым взаимодействием*. По грубой оценке, оно в 10^{14} раз слабее сильных взаимодействий и значительно слабее электромагнитного. Слабое взаимодействие служит причиной (относительно медленного) распада многих элементарных частиц. В качестве примеров таких распадов назовем распад заряженных пионов, нейтрона, мюона, K-мезонов и лямбда-гиперона.

Расширение спектральных линий вследствие доплер-эффекта и столкновений

43. В начале этой главы мы рассмотрели связь между естественной шириной $\Delta\omega$ спектральной линии атома и средним временем жизни τ состояний, участвующих в переходе. В частном случае, когда нижним уровнем энергии является основное состояние, мы нашли, что

$$ \Delta\omega = 1/\tau, \qquad (43a) $$

где τ — среднее время жизни возбужденного состояния.

В п. 26 мы привели типичные значения τ для атомов и получили оценку относительной ширины линии: $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-7}$. Разумеется, это лишь грубая оценка порядка величины.

Наблюдаемые на опыте ширины спектральных линий, как правило, значительно больше приведенной оценки. Теория, изложенная в гл. 14—26, относилась к *изолированному* и первоначально покоившемуся атому. Реальные атомы не изолированы и не находятся в покое. Чтобы понять причину дополнительного расширения, рассмотрим испускание света атомным газом, находящимся при температуре T и давлении p. Обозначим через A относительную атомную массу атомов. Атомы газа движутся случайным образом и сталкиваются друг с другом.

44. Тепловое движение приводит к тому, что у части атомов возникает составляющая скорости, направленная к наблюдателю, а у другой части составляющая имеет противоположное направление. В результате спектральная линия, являющаяся суперпозицией линий, испускаемых многими атомами, расширяется вследствие доплер-эффекта. Если атом движется к наблюдателю со скоростью v, то доплеровский сдвиг частоты равен $(\Delta\omega/\omega)_D = v/c$. Чтобы оценить доплеровское расширение $(\Delta\omega/\omega)_D$, нужно знать среднюю скорость v_1 атомов газа и подставить ее в выражение для доплеровского сдвига. Разумеется, v_1 — это средняя скорость в направлении наблюдения, которым можно считать направление одной из трех координатных осей. В гл. 17 гл. 2 мы показали, что средняя кинетическая энергия атома и термодинамическая температура газа T связаны соотношением

$$ E_k = M\left(v_{1}^{2} + v_{2}^{2} + v_{3}^{2}\right)/2 = 3kT/2, \qquad (44a) $$

где $M \approx AM_p$ — масса атома (M_p — масса протона). Средние скорости в направлении осей 1, 2 и 3 равны, и мы имеем

$$ v_{1} = v_{2} = v_{3} = \sqrt{kT/AM_p}. \qquad (44b) $$

Доплеровское расширение поэтому равно

$$ \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_D \sim \frac{v_1}{c}\sqrt{\frac{kT}{AM_p}} = 0{,}52\cdot 10^{-6}\sqrt{\frac{1}{A}\frac{T}{293\ \mathrm{K}}}. \qquad (44c) $$

45. Столкновения между атомами также приводят к расширению спектральных линий. Чтобы оценить этот эффект, допустим, что

интервал времени между двумя последовательными столкновениями данного атома равен τ_c. Величина $1/\tau_c$ представляет собой число столкновений в единицу времени. Предположим, далее, что каждое столкновение приводит к прекращению процесса испускания. Тогда величина τ_c есть эффективное время жизни атома, и по аналогии с выражением (43а) можно считать, что соответствующее расширение спектральной линии равно

$$(\Delta\omega)_c \sim 1/\tau_c. \tag{45a}$$

Оценим теперь число столкновений $1/\tau_c$ в единицу времени. Будем считать атом сферой радиусом r и обратим внимание на некоторый определенный атом немедленно после столкновения. Его скорость равна v. Мы хотим оценить среднее время жизни τ_c до следующего столкновения. Для этой оценки можно допустить, что все остальные атомы газа покоятся. *Точный* расчет τ_c требует, разумеется, учета движения всех атомов. За время dt наш атом пройдет расстояние $v\,dt$. Рассмотрим цилиндр радиусом $2r$, ось которого совпадает с траекторией атома. Высота цилиндра равна $v\,dt$. Если в этом цилиндре нет атомов, то за время dt наш атом не испытает столкновений, и вероятность столкновения равна вероятности обнаружить в объеме цилиндра другой атом. Объем цилиндра равен $4\pi r^2 v\,dt$, и если n — среднее число атомов в единице объема газа, то среднее число атомов в цилиндре равно $4\pi r^2 nv\,dt$. Если это число мало по сравнению с единицей, то оно дает вероятность нахождения одного атома в объеме цилиндра, а тем самым и вероятность столкновения за время τ_c. Для оценки τ_c имеем

$$4\pi r^2 n v \tau_c \sim 1, \text{ или } 1/\tau_c \sim 4\pi r^2 n v. \tag{45b}$$

Это соотношение означает, что среднее число атомов в цилиндре радиусом $2r$ и высотой $v\tau_c$ должно быть порядка единицы.

Один моль любого газа содержит $N_0 = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ молекул (или атомов, если газ одноатомный) и занимает при нормальных условиях (температура 273 К, давление 1 атм) объем, равный 22,4 л. Таким образом, число атомов в единице объема равно

$$n_0 = \frac{N_0}{22{,}4\ л/моль} \approx 2{,}7 \cdot 10^{19}\ см^{-3}. \tag{45c}$$

Число n_0 при любых других давлениях P и температуре T равно

$$n = n_0 \frac{P}{1\ атм} \left(\frac{T}{273\ К}\right)^{-1}. \tag{45d}$$

(Этот результат следует из уравнения состояния идеального газа.) В качестве разумной оценки радиуса r возьмем боровский радиус $r \approx 0{,}5 \cdot 10^{-8}$ см, а скорость v получим из равенства

$$Mv^2/2 = 3kT/2, \tag{45e}$$

здесь $M \approx AM_p$ — масса атома. С помощью выражений (45) получаем

$$(\Delta\omega)_c \sim \frac{1}{\tau_c} \sim 2 \cdot 10^9\ с^{-1} \frac{P}{1\ атм} \sqrt{\frac{1}{A}\frac{273\ К}{T}}. \tag{45f}$$

46. Если теперь сравнить расширение вследствие столкновений [формула (45f)] и допплер-эффекта [формула (44c)] с расширением вследствие конечного времени возбуждения *изолированного* атома, то мы заметим, что последнее в общем случае очень мало по сравнению с первыми. Расширение за счет столкновений уменьшается с уменьшением давления, и при малых давлениях доминирует допплеровское расширение, которое и является основной причиной конечной ширины спектральных линий газа. Естественную ширину линии можно наблюдать лишь в специальных условиях.

Мы не будем больше останавливаться на расширении вследствие столкновений и допплер-эффекта. Практическое значение этих явлений велико, но к основной проблеме испускания и поглощения света атомом они не имеют непосредственного отношения. Мы сочли необходимым рассмотреть их лишь для того, чтобы у читателя не возникло впечатления, что наблюдаемая на опыте ширина спектральных линий всегда совпадает с естественной шириной.

Дополнительная тема: к теории электромагнитных переходов *)

47. Рассмотрим два важных вопроса. Почему среднее время жизни возбужденного состояния (атома, ядра), нестабильного относительно испускания *фотонов* (но стабильного относительно испускания *частиц*), так велико по сравнению с величиной, обратной частоте испускаемых фотонов? Почему в атомной физике электрическое дипольное излучение доминирует над остальными модами излучения?

Попытаемся обсудить эти вопросы с помощью «полуклассической» электромагнитной теории. Это значит, что наши доводы будут частью классическими, частью квантовомеханическими. Законность такого подхода оправдывается его успехом: мы получим разумный ответ на оба вопроса.

48. Ответ на первый вопрос: потому что постоянная тонкой структуры α очень мала. Рассмотрим, что это значит.

Прежде всего вспомним (см. п. 29 и 39 гл. 2), что почти всегда длина волны испущенного электромагнитного излучения велика по сравнению с размерами излучающего атома или ядра. Это условие не только имеет важные физические следствия, но и упрощает математический анализ моделей излучения. Допустим сначала, что атом или ядро в своем возбужденном состоянии подобны осциллирующему электрическому диполю. Пусть ω — частота колебаний, она совпадает с частотой испущенного излучения. Обозначим через a размер излучателя. Заряд излучающего объекта равен одному или не-

*) При первом чтении можно пропустить.

сколькими элементарными зарядами, поэтому порядок величины электрического дипольного момента равен ea. Малость излучающего объекта по сравнению с длиной волны можно записать в виде неравенства

$$\alpha a/c \ll 1. \tag{48a}$$

В томе II этого курса *) было показано, что такой электрический диполь за единицу времени испускает следующее количество энергии:

$$W = \omega^4 |ea|^2/3c^3. \tag{48b}$$

Эта формула дает *мощность* излучения. Поскольку известно, что наш атом (или ядро) испускает одиночные фотоны, то нас интересует время τ, за которое будет испущен один фотон с энергией $\hbar\omega$. Это время равно

$$\frac{1}{\tau} = \frac{W}{\hbar\omega} = \frac{\omega}{\hbar} \frac{e^2}{c} \left(\frac{a\omega}{c}\right)^2, \tag{48c}$$

т. е. имеет следующий порядок величины:

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega\alpha \left(\frac{a\omega}{c}\right)^2. \tag{48d}$$

Мы интерпретируем τ как среднее время жизни возбужденного состояния: это время, необходимое возбужденному состоянию, чтобы «высветиться», испустив фотон. Рассмотрим безразмерную величину

$$\omega\tau \sim \frac{1}{\alpha} \left(\frac{ac}{a}\right)^{-2}. \tag{48e}$$

Она определяет число колебаний, которое система совершает за время «высвечивания». Очевидно, что чем стабильнее возбужденное состояние, тем больше величина $\omega\tau$. Мы видим, что $\omega\tau$ велико по двум причинам: а) $\omega\tau$ пропорционально «большой» величине $1/\alpha \sim 137$; б) $\omega\tau$ пропорционально квадрату отношения $c/a\omega$, а эта величина также весьма велика.

49. В случае атома можно положить a равным боровскому радиусу $a_0 = \alpha^{-1}\hbar/mc$. Частота оптических переходов имеет порядок $\omega \sim \alpha^2 mc^2/\hbar$, и мы получаем следующую зависимость от α и τ от постоянной тонкой структуры:

$$\omega\tau \sim \alpha^{-6}, \quad \tau \sim \alpha^{-5}\hbar/mc^2. \tag{49a}$$

Чтобы получить *грубую* оценку времени жизни возбужденного состояния ядра, «высвечивающегося» благодаря электрическому дипольному переходу, положим $a = 10^{-13}$ см, γ-кванты с энергией 200 кэВ имеют длину волны, близкую к $6 \cdot 10^{-11}$ см, и мы получаем $\tau \sim 10^{-12}$ с. Подчеркиваем, это весьма грубая оценка, но по порядку величины она совпадает с экспериментально наблюдаемой. Заметим, что, согласно (48e), время жизни обратно пропорциональное кубу испущенной частоты.

Мы ответили на первый из двух поставленных в п. 47 вопросов, и теперь нам ясно, почему время жизни возбужденного состояния, «высвечивающегося» благодаря электромагнитным процессам, велико по сравнению с величиной, обратной частоте испущенного света.

50. Обратимся ко второму вопросу, который касается доминирующей роли электрических дипольных переходов при «высвечивании» атома. Для понимания этой проблемы рассмотрим излучение системой движущихся зарядов, которая не имеет дипольного момента.

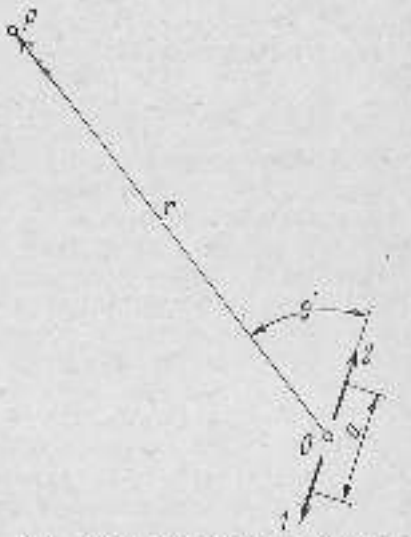


Рис. 50А. Схематическое изображение «электрического квадруполя». Стрелки 1 и 2 соответствуют двум одинаковым электрическим диполям, колеблющимся с одинаковой частотой ω и направленным в противоположные стороны. У такой системы нет электрического дипольного, но зато имеется дипольный момент, по смыслу электрический квадрупольный момент. Если расстояние a мало по сравнению с длиной волны λ, то мощность излучения такого источника имеет мощность излучения диполя со множителем порядка $(a/\lambda)^2$

На рис. 50А показан источник электрического *квадрупольного излучения*. Стрелки 1 и 2 соответствуют двум электрическим диполям, колеблющимся с частотой ω. Они имеют одинаковую длину, но противоположное направление. Расстояние между диполями равно a, и они расположены симметрично по отношению к точке O — центру «атома». Мы наблюдаем излучение в точке P, на расстоянии r от атома.

Электрический дипольный момент такого источника, очевидно, равен нулю. То же следует сказать и о дипольном магнитном моменте, так как в источнике нет замкнутых токов.

Рассмотрим электрическое поле в точке P на большом расстоянии r от источника. Оно лежит в плоскости чертежа и перпендикулярно к радиус-вектору OP. Напряженность электрического поля E_1, которую мы обнаружили бы в точке P, если бы в точке O находился один электрический диполь, равна

$$E_1 = -\frac{C(\theta)}{r} \exp\left[i\left(\frac{r}{v} - t\right)\omega\right], \tag{50a}$$

где функция $C(\theta)$ зависит от угла θ и пропорциональна электрическому дипольному моменту. Ее точный вид не имеет для нас значения.

Если имеются два диполя, как показано на чертеже, то электрическое поле обоих диполей в точке P уничтожается, но не полностью, так как расстояние от точки P до первого диполя равно $\approx r - (a/2)\cos\theta$, а до второго диполя $\approx r + (a/2)\cos\theta$. Соответственно

*) *Кронфорд Ф.* Волны. — 3-е изд. — М.: Наука, 1986. т. 7.

поля обоих диполей в точке P отличаются по фазе. Напряженность электрического поля E_2 квадруполя в точке P равна

$$E_2 = \left\{\frac{C(\theta)}{r}\exp\left[i\left(\frac{r}{a}-t\right)\omega\right]\right\}\times\left[\exp\frac{i\omega a\cos\theta}{2c}-\exp\left(-\frac{i\omega a\cos\theta}{2c}\right)\right]. \tag{50b}$$

51. Теперь используем предположение (48a), что $a\omega/c \ll 1$. Очевидно, оно справедливо для оптических переходов в атоме, если a имеет порядок типичных атомных размеров. Можно поэтому воспользоваться разложением стоящих в скобках (50b) экспонент и ограничиться первыми двумя членами ряда. Получаем

$$E_2 \approx i\left(\frac{a\omega}{c}\cos\theta\right)E_1, \tag{51a}$$

где E_1 дано формулой (50a). Таким образом, напряженность электрического поля показанного на рис. 50A квадруполя меньше по порядку величины на множитель $a\omega/c$ напряженности электрического поля каждого из диполей, «образующих данный квадруполь». Излучаемая мощность пропорциональна квадрату электрического поля. Отсюда следует, что типичные мощности квадрупольного излучения меньше соответствующих мощностей электрического дипольного излучения на множитель $(a\omega/c)^2$. Соответствующие времена жизни связаны соотношением

Рис. 51A. Система колеблющихся электрических диполей, излучение результирующее: дипольный и квадрупольный моменты равны нулю, но момент количества движения системы отличен от нуля.

$$\tau_{E2} \sim (a\omega/c)^{-2}\tau_{E1}, \tag{51b}$$

где τ_{E1} и τ_{E2} — среднее время жизни электрических дипольных и квадрупольных переходов соответственно. Мы показали, что для атома $a\omega/c$ имеет порядок α, поэтому отношение τ_{E2}/τ_{E1} лежит в пределах 10^{-4}—10^{-3}.

Аналогичные соображения можно применить и к ядру. Пусть a — его характерные размеры, а ω — частота излучения. В этом случае величина $a\omega/c$ также мала и имеет порядок 10^{-1} или меньше.

52. На рис. 52A показан источник с пренебрежимо малым *электрическим* дипольным моментом. У него имеется, однако, *магнитный* дипольный момент. Стрелки на рисунке снова соответствуют осциллирующим электрическим диполям, и можно представить себе, что они образованы зарядами, осциллирующими вдоль направления стрелок. Это движение зарядов соответствует перемещению тока, обтекающему стороны квадрата. Магнитный дипольный момент такой системы пропорционален силе тока и площади обтекаемого им квадрата.

Легко показать, что соображения, аналогичные приведенным в п. 50 и 51, приводят к следующей оценке среднего времени жизни для магнитного дипольного перехода:

$$\tau_{M1} \sim (a\omega/c)^{-2}\tau_{E1}. \tag{52a}$$

53. Классификация испущенного излучения по электрическим диполям, магнитным диполям, электрическим квадруполям и магнитным квадруполям, электрическим октуполям и т. д. означает классификацию по свойствам симметрии этого излучения. Излучение каждого из указанных типов характеризуется определенным распределением интенсивности по направлению испускания и определенными поляризационными свойствами. Симметрия излучения однозначно определяется свойствами симметрии источника, и можно классифицировать типы излучения в соответствии со свойствами источника. Электрический диполь испускает электрическое дипольное излучение (обозначаемое $E1$), магнитный диполь — магнитное дипольное излучение ($M1$), электрический квадруполь — электрическое квадрупольное излучение ($E2$) и т. д. На схеме уровней, где показаны электромагнитные переходы в ядрах, часто можно видеть символы $E1$, $M3$, $E4$ и т. д., указывающие природу излучения.

Наше рассмотрение излучения электрического квадруполя и магнитного диполя можно обобщить на мультиполи более высокого порядка. Чтобы образовать электрический октуполь, нужно расположить рядом два одинаковых, но противоположно ориентированных электрических квадруполя, так что результирующий квадрупольный момент исчезнет. Легко сообразить, что мощность, излучаемая такой системой, меньше мощности излучения одиночного квадруполя на множитель $(a\omega/c)^2$. Каждый раз, когда мы поднимаемся на одну ступень в иерархии электрических мультиполей, интенсивность излучения уменьшается приблизительно в $(a\omega/c)^2$ раз, где a — характерный линейный размер системы. То же справедливо и для магнитных мультиполей.

Теперь нам становится ясным, почему в атоме преобладают электрические дипольные переходы. Если возбужденное состояние может «высветиться» через разные пути-переходы, один из которых является переходом $E1$, то именно он будет иметь преобладающую вероятность. Другие типы излучений также возможны, но интенсивность соответствующих спектральных линий будет намного меньше интенсивности $E1$-линий.

54. При обсуждении правил отбора для электрических дипольных переходов (*см.* п. 29—31) мы отмечали, что эти правила следуют из закона сохранения момента импульса. Мы упоминали также, что этот закон есть следствие изотропии физического пространства. Поэтому можно утверждать, что *правила отбора зависят от изотропии физического пространства*. Этому вопросу стоит уделить некоторое внимание.

M_J отмечали, что квантовое число момента импульса j является мерой момента импульса системы, например атома. В рамках квантовой механики возможна иная интерпретация числа j: оно указывает *тип симметрии*, которым данное состояние обладает *относительно вращения*. Можно сказать, что число j показывает нам, как выглядит атом, если рассматривать его с различных направлений. Например, если атом находится в состоянии с $j=0$, то он выглядит одинаково со всех направлений; нулевое значение j означает сферическую

ческую симметрию системы. При $j=1$ состояние имеет свойства симметрии вектора. Такое же состояние *фотона* образуется при электрическом дипольном переходе: возникающее поле имеет те же свойства симметрии относительно вращения, что и источник в виде электрического диполя. Мы говорим, что электрический дипольный фотон уносит единицу момента импульса, и это пример общей связи между характером симметрии и моментом импульса. Пространственная симметрия электрического квадруполя характеризуется квантовым числом $j=2$. Соответственно электрическое квадрупольное излучение уносит два единицы момента импульса; в квадрупольном переходе момент импульса атома меняется на две единицы.

55. Из сказанного следует, что все правила отбора, управляющие электромагнитными переходами, могут быть получены из общего принципа сохранения свойств пространственной симметрии системы. Для иллюстрации этой глубокой идеи рассмотрим пример одного правила отбора, т. е. покажем, что для любого (однофотонного) электромагнитного излучения переход от ($j_i=0$) к ($j_f=0$) запрещен. Иными словами, атом, испустив фотон, не может перейти из одного сферически симметричного ($j_i=0$) состояния в другое, также симметричное ($j_f=0$) состояние.

Мы рассуждаем следующим образом. Несомненно, что *до испускания* фотона атом был в сферически симметричном состоянии, свойства которого не зависели от направления. *После испускания* фотона система состоит из атома в конечном состоянии *плюс* испущенная электромагнитная волна. Эта составная система также должна быть в сферически симметричном состоянии. Вначале, до испускания фотона, в пространстве не было выделенного направления, и, если пространство изотропно, это направление не может возникнуть и после испускания фотона. Эти выводы следуют из сохранения свойств пространственной симметрии. Теперь рассмотрим положение, существующее *после испускания* фотона. Если конечное состояние *атома* сферически симметрично ($j_f=0$), то и испущенная электромагнитная волна также должна быть сферически симметричной: ее свойства не могут зависеть от пространственного угла. *Но таких электромагнитных волн не существует, откуда следует, что предполагаемый переход невозможен.* Очевидно, что электромагнитная волна от электрического (или магнитного) дипольного перехода не может быть сферически симметричной: ведь сам электрический или магнитный диполь задает определенное направление. Невозможны и любые другие сферически симметричные мультипольные волны. Действительно, в данный момент времени в данной точке пространства электрическое поле определяет направление, перпендикулярное радиус-вектору. Электрическое поле в этой точке в этот момент времени не может остаться неизменным, если вся конфигурация поля будет повернута вокруг радиус-вектора. Таков характер, поле не может обладать свойством сферической симметрии.

56. Переход, запрещенный правилом отбора для дипольного излучения, может быть разрешен для квадрупольного перехода или для переходов более высокой мультипольности. Рассматривая

схемы уровней атомов, помещенные в этой главе, мы видим, что почти у всех возбужденных состояний атомов возможен электрический дипольный переход в состояния с меньшей энергией. Структура ядерных уровней не обладает таким свойством, и мы часто видим, что первый возбужденный уровень отличается по значению j от основного уровня на несколько единиц. Такое возбужденное состояние не может «освободиться» дипольным переходом и, соответственно, существует долго. Если различие в значениях j велико, а разность энергий мала, время жизни может оказаться порядка минут, так как испускаемый фотон должен иметь высокую мультипольность. Такие состояния называют *изомерными*.

Задачи

1. Ниже приведены измеренные в начале века волновые числа (в $см^{-1}$) спектральных линий некоторого атома:

$\tilde{\nu}_1=82\,258{,}27$; $\tilde{\nu}_2=97\,491{,}28$; $\tilde{\nu}_3=102\,822{,}84$;
$\tilde{\nu}_4=103\,200{,}58$; $\tilde{\nu}_5=15\,232{,}97$; $\tilde{\nu}_6=20\,564{,}57$;
$\tilde{\nu}_7=23\,012{,}31$; $\tilde{\nu}_8=5\,331{,}02$; $\tilde{\nu}_9=7790{,}20$; $\tilde{\nu}_{10}=2459$.

а) Найдите несколько больших чисел случая, комбинационный принцип Ритца, т. е. случаев, когда волновое число равно разности двух других измеренных чисел.

б) Покажите, что все линии получаются из комбинаций пяти термов. Найдите их (с точностью до общей для всех термов произвольной постоянной) и изобразите схему термов и переходов, отвечающих измеренным линиям.

в) Можете ли вы найти простую формулу для термов? Встречались ли где-либо в книге такие схемы термов? (Заключите анализ приведенных данных, но можете обратиться к таблице лишь после того, чтобы узнать, о каком атоме идет речь.)

2. Для изучения резонансной флуоресценции содержимое кварцевого сосуда C было облучено ультрафиолетовым светом с длиной волны 2537 Å, испускаемым ртутной лампой. (В этой лампе происходит электрический разряд в парах ртути, заключенных в кварцевый сосуд.) При этом наблюдались следующие явления:

а) Если сосуд C содержал только пары ртути, то эти очень сильно рассеивали падающие на них излучения: атомы паров резонировали. Длина волны рассеянного излучения также равна 2537 Å.

б) Если в сосуде C были только пары таллия, он оказывался прозрачным для излучения и рассеяние было весьма мало.

в) Если в сосуде C были пары таллия и ртути, то он являлся источником испускания линии ртути 2537 Å, а также ряда линий таллия с длинами волн 2768, 3230, 3529, 3776 и 5350 Å. Если между сосудом C и источником света поместить свинцовую пластину, то ни одна из этих линий не возбуждается.

г) В условиях в) было найдено, что линия таллия 3776 Å гораздо шире линии 2768 Å и, кроме того, ее ширина больше доплеровского расширения, соответствующего температуре сосуда, и более энергична той же линии, когда ее испускает разрядная трубка, наполненная парами таллия.

Попытайтесь объяснить все эти явления. Вам поможет схема термов атома таллия (рис. 34А этой главы). Интересно отметить, что в описанном опыте наблюдались лишь некоторые линии таллия. Линии 3826 и 5384 Å, например, отсутствовали.

3. Время жизни $3p_{\frac{1}{2}}$-состояния атома натрия (рис. 32А) больше $\tau=10^{-8}$ с. Рассмотрим сосуд, наполненный газообразным натрием при давлении 10 мм рт. ст. и температуре около 200 °C. В сосуде находятся небольшие частицы натрия, после нагревания которой сосуд наполняется небольшим количеством паров натрия. Мы наблюдаем поглощение линии 5896 Å из излучения натриевой вольфрамо-

вой пути, проходящей через опыт. (Излучение некогерентной всенаправленной волны может непрерывное спектральное распределение.)

Оцените

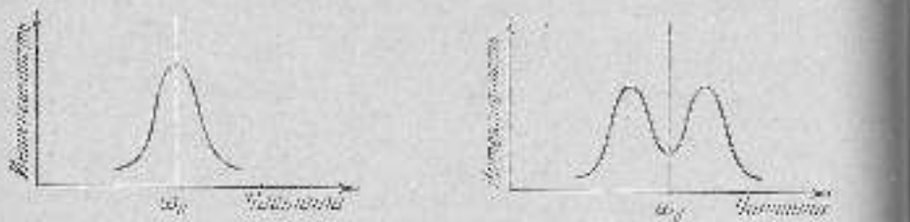
а) естественную ширину линии;

б) доплеровское расширение линии;

в) расстояние между соседними спектрограммами.

Выразите полученные результаты в подходящих единицах. Сравните эти ширины с расстоянием между желтыми линиями D_1 и D_2 натрия (расщепление тонкой структуры).

г) В схеме уровней на рис. 39А показан переход, которому отвечает линия 5888,22 Å. Укажите, как эта линия в спектре выше ведет себя по сравнению с атомом, находящимся в опыте, служит ли она для оценки давления и средней температуры. Его присутствие необходимо принять во внимание при оценке интенсивности на спектрограмме; так как атомов натрия в опыте гораздо меньше, чем атомов аргона, то атомы натрия сталкиваются газовым образом с атомами аргона.



К задаче 4. Слева под спектральной линией (или без нее) дано распределение яркости, например, для излучения в виде тонкой расходящейся трубки. В некоторых условиях наблюдается излучение, изображенное справа. Какие механизмы могут вызвать такое излучение?

4. Рассмотрим форму спектральной линии испускания для атома. Допустим, что атомы в излучающее пространство паров натрия, и мы измеряем с помощью спектрометра с очень хорошим разрешением интенсивность излучения как функцию частоты. Для некоторых источников света форма линии похожа на ту, которая изображена на рис. 40А. Для других источников линия будет иметь форму, показанную справа. Заметим, что, как правило, показанную справа форму имеют линии излучения, возникающие при переходе в основное состояние. Можете ли вы объяснить это явление? Какими свойствами должен обладать источник, чтобы форма линии соответствовала левой части рисунка?

5. Оцените для экспериментальных условий задачи 3 на основании формулы (7а) этой главы долю атомов натрия, находящихся в первом возбужденном состоянии. (Предполагается, что $T=200$ °C.)

6. а) На основании экспериментальных данных, представленных на рис. 37А, вычислите постоянную C в уравнении (37к).

б) При изучении рентгеновского излучения найдено, что для появления одной из характеристических линий (частота ω) энергия E бомбардирующих электронов должна быть немного больше $\hbar\omega$. Для K_α-линий, к которым относится рис. 37А, приближенное условие появления линий имеет вид $E>(4/3)\hbar\omega$. Почему линии не появляются, если только $E>\hbar\omega$?

7. Автор не может отвечать за последствия, которые могут произойти, если читатель слишком серьезно воспримет боровскую планетарную модель атома, но и не хочет заходить так далеко, чтобы запретить студенту рассматривать эту модель. Бор предполагал, что электрон в атоме водорода движется по круговым орбитам вокруг ядра, что момент импульса равен целому кратному числу $\hbar$. Эта модель дает значения энергетических уровней атома, которые с большой точностью совпадают с экспериментальными. Боровская модель атома бывает полезна, и иногда она помогает в спектроскопии, и читателю будет полезно понять по крайней мере то, что такое теория Бора и получить свое мнение о ценности переходов для задач, показанных на рис. 10 этой главы. (Планковские постоянные h для спектральных линий равны 6651,3, 4358,5, 4101,7, 3972,1, 3889,1 и 3835,4 Å.)

8. Радиоактивное ядро $^{218}_{84}Po$ (другое его обозначение ThC') испускает α-частицы нескольких различных энергий. В одном случае объяснение, изложенное на рис. 40А этой главы, не подходит. Найдите правильное объяснение. Изобразите соответствующую этому уровней и опишите уровни, принадлежащие различным ядрам.

9. На рис. 36А показана упрощенная версия диаграммы, взятой из обзора *Mayer-Kuckuk T., Goudsmit T.* — Rev. Mod. Phys., 1955, v. 27, p. 107, Fig. 16. Рекомендуем прочитать и изучить обзор. Над уровнем, обозначенным ^7Li+n, на диаграмме нет уровня экситонов. Они находятся на несколько мэв ниже ^7B. Эта кривая изображает результаты реального эксперимента. Объясните смысл кривой и обсудите измерения, на основании которых она получена.

В правой части кривой (в опыте) вы увидите горизонтальную черту, обозначенную $^{10}B+p\to C^*$, а под ней косую горизонтальную черту, на которой стоит цифра 12,6. Этот последний уровень имеется в некоторых уровнях ^{11}B, описанных в предыдущем. Эта часть диаграммы также связана с некоторыми опытами. Обсудите эту и объясните значение стрелок.

10. Рассмотрим опыт, в котором сутки атомы движутся параллельно оси x с некоторой скоростью. Цель простого расчета, что все атомы сутки имеют одну и ту же скорость v. На определенном расстоянии x до щели некоторые атомы приходятся в возбужденное состояние. При переходе из возбужденного состояния в основное атом испускает фотон частоты ω. Пусть τ — среднее время жизни возбужденного атома. Мы изучаем свет, проходящий через щель.

а) Как зависит интенсивность проходящего через щель света от расстояния x?

б) Предположим, что свет от щели попадает на спектрометр и мы спроектируем изображение щели, покрывающей работу фотоэлемента. Будет ли этот ток зависеть от расстояния x?

11 *). Интересно получить угловое распределение интенсивности излучения электрического квадруполя (описанного на рис. 32А) и сравнить его с соответствующим условием распределением излучения электрического диполя. Интенсивность пропорциональна квадрату модуля напряженности электрического поля. Покажите, что зависимость интенсивности от направления наблюдения определяется выражениями

$$I_{\text{ди}}(\theta)=A\sin^2\theta \text{ (для электрического диполя)},$$
$$I_{\text{кв}}(\theta)=B\sin^2 2\theta \text{ (для электрического квадруполя)}.$$

Здесь A и B — постоянные. Интересно не забыть об азимутальном угле. Этот пример показывает, как можно различить тип мультипольного излучения по угловой зависимости излучения.

Дополнительная литература

Схемам уровней атома, молекул и вкр освещены в ряде книг, среди которых указаны следующие:

Гершберг Г. Спектры и строение двухатомных молекул. — М.: ИЛ, 1949.

White H. Introduction to Atomic Spectra. — N. Y., 1934.

Герцберг Г. Спектры и строение двухатомных молекул. — М.: ИЛ, 1949.

Herzberg G. Molecular Spectra and Molecular Structure. — Vol. I. Spectra of Diatomic Molecules. — N. Y., 1950.

Halliday D. Introductory Nuclear Physics. — N. Y., 1950.

Segrè E. Nuclei and Particles. — N. Y., 1964.

Вонсовский М. В. Строение молекул. — М.: Наука, 1967.

Кондратьев В. Н. Строение атомов и молекул. — М.: Физматгиз, 1960.

Схемы уровней многих атомов можно найти в книге:

Grotrian W. Graphische Darstellung der Spektren von Atomen und Ionen mit Ein-, Zwei und Drei Valenzelektronen. Bd II. — Berlin, 1928.

*) Эта задача относится к дополнительной теме (с. 30).

Схемы уровней ядер см. в справочниках:
Alaga G., Lauritsen T. Energy Levels of Light Nuclei.—Rev. Mod. Phys., 1955, v. 27, p. 77.
Джелепов Б. С., Пекер Л. К. Схемы распада радиактивных ядер. *A* <210.— М.: Наука, 1966.

Статьи из журнала «Scientific American» в сборниках «Под ред. думают физики» (М.: Наука):
Бете А. Ядерные накалки.— 1967, вып. 5, с. 31.
Ледерман Л. Атомные часы.— 1957, вып. 5, с. 28.
Пейс Д. Магнитный резонанс.— 1972, вып. 8, с. 91.
Шавлов А. Успехи и создания оптических лазеров.— 1967, вып. 5, с. 17.
Де Бенедетти С. Эффект Мёссбауэра.— 1967, вып. 5, с. 6.

ГЛАВА 4

ФОТОНЫ

Фотон как частица

1. В этой и в следующей главах мы рассмотрим корпускулярные и волновые свойства фотона, электрона, нейтрона и других элементарных объектов. Начнем с основных экспериментальных фактов и попытаемся составить себе предварительную, но согласованную картину явлений. Во многих случаях результаты рассмотренных опытов могут потребовать новых экспериментов. Тогда мы попытаемся сделать определенные предсказания, а затем узнать, что же наблюдается в действительности. Наш подход заключается в экспериментировании с идеями, и нам не следует слишком отягощать себя какой-либо определенной моделью, пытаясь сохранить непредвзятый взгляд на вещи.

2. Начнем с фотонов. Фотоны — это «частицы» электромагнитного поля; мы знаем, что почти монохроматическое излучение частоты ω приходит в виде порций, несущих энергию $E=\hbar\omega$. Наиболее прямым доказательством таких свойств поля является фотоэлектрический эффект, но, как мы убедимся, к этому же выводу приводят и другие наблюдения. Совокупность этих опытов приводит к заключению, что связь $E=\hbar\omega$ остается верной для очень широкой области частот, и мы хотели бы обобщить, допустив, что такая связь между энергией пакета и частотой является законом, *общим для любых* фотонов.

3. Предположим, что имеется пакет электромагнитного излучения с частотой ω, распространяющийся в некотором направлении со скоростью света c. Нас интересует, обладает ли такой пакет импульсом, и если да, то чему этот импульс равен? Если такой пакет, который мы называем фотоном, обладает некоторыми свойствами частицы, то можно ожидать, что он имеет импульс. В этом случае не мешало бы обдумать, в каких опытах импульс фотона можно непосредственно измерить.

В томе III нашего курса [1]) мы узнали, что монохроматическая электромагнитная волна, переносящая в определенном направлении энергию E, переносит в том же направлении и импульс $p=E/c$. Таково предсказание классической электромагнитной теории, и разумно ожидать, что оно сохранится для электромагнитных квантов.

4. Попытаемся понять связь между энергией и импульсом с другой точки зрения. Допустим поэтому, что соотношение $p=E/c$

[1]) *Крауфорд Ф.* Волны.— 3-е изд.— М.: Наука, 1984, гл. 7.

Нам неизвестно, но мы верим в универсальную справедливость связи $E=\hbar\omega$. Это означает, в частности, что такая связь справедлива в *любой* инерциальной системе. Принцип специальной теории относительности требует, чтобы общие соотношения между энергией, импульсом, частотой и направлением распространения, справедливые для *всех* фотонов в *данной* инерциальной системе, были справедливы и в *любой* инерциальной системе. Таким образом, требование релятивистской инвариантности налагает определенные ограничения на возможные связи между указанными физическими величинами. Идея заключается в том, чтобы использовать эти ограничения и получить выражение для импульса p фотона.

Предположим, что в данной инерциальной системе фотон распространяется в положительном направлении оси x. Будем считать его частицей с энергией $E=\hbar\omega$ и неизвестным импульсом p. Из соображений симметрии следует, что импульс также направлен по оси x. Рассмотрим ту же ситуацию в другой инерциальной системе, которую назовем «штрихованной». Пусть эта система движется с постоянной скоростью v по отношению к первой, «нештрихованной» системе, и пусть скорость v направлена по оси x. Наблюдатель в штрихованной системе зарегистрирует фотон с частотой ω', несущий энергию $E'=\hbar\omega'$ и импульс p'. Так как $c>v$, то и в штрихованной системе фотон будет распространяться вдоль положительного направления оси x'. Мы приходим к выводу (из соображений симметрии), что в *обеих* системах импульс должен совпадать с направлением движения фотона. Поэтому можно отказаться от векторного обозначения импульса и писать p и p' для x- и x'-компонент импульса, имея в виду, что другие компоненты равны нулю.

3. Вспомним два следствия из преобразований Лоренца, рассмотренные в томе I этого курса *). Первым из них является формула для продольного доплеровского сдвига частоты, связывающая частоты ω и ω':

$$\omega'=\omega\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}. \tag{5a}$$

Второе следствие — это закон преобразования энергии и импульса частицы:

$$E'=\frac{E-vp}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{5b}$$

Используем теперь наши предположения

$$E=\hbar\omega,\quad E'=\hbar\omega', \tag{5c}$$

чтобы исключить E и E' из выражения (5b). Исключая из полученного равенства ω' с помощью (5a), получаем

$$\hbar\omega\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}=\frac{\hbar\omega-vp}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

*) *Кикоин К., Кикоин А.*, Физика 9, Учебник для 9 класса средней школы. Изд. 11, гл. II, параграф «Формулы для продольного доплеровского сдвига частоты» и гл. III, параграф «Преобразования энергии и импульса». — М., Просвещение, 1978.

Решая это уравнение относительно p, находим

$$p=\frac{\hbar\omega}{c}, \tag{5d}$$

или

$$p=\frac{E}{c}. \tag{5e}$$

Это соотношение, разумеется, справедливо *в любой* инерциальной системе, так как наша нештрихованная система не имела никаких особенностей. В частности, оно справедливо и для штрихованной системы. Мы отмечали уже, что соотношение (5e) может быть выведено также из классической электромагнитной теории, тогда как соотношение (5c) — чисто квантовомеханическое: из него следует, что квант света с частотой ω всегда переносит импульс $\hbar\omega/c$. Эта связь, разумеется, следует немедленно из (5c) и (5e). И наоборот, (5c) легко получить из (5d) и (5e).

4. Масса покоя m_0 фотона равна нулю. В гл. 1 мы получили общую связь между массой покоя, энергией и импульсом, которая для случая фотона имеет вид

$$(m_0c^2)^2=E^2-p^2c^2. \tag{5f}$$

В соответствии с формулой (5e) правая часть этого равенства обращается в нуль, и мы получаем $m_0=0$. Этот результат с первого взгляда может показаться несколько странным: если фотон имеет некоторые свойства частицы, то в своей системе покоя он должен был бы иметь массу. Следует, однако, иметь в виду, что *для фотона не может быть инерциальной системы, в которой бы он покоился*; электромагнитное излучение распространяется со скоростью c *в любой* инерциальной системе. Таким образом, фотон в состоянии покоя — понятие, лишенное смысла.

Можно было бы сказать, что объект, который никогда не может быть в состоянии покоя, нельзя назвать «частицей». Однако имеется устоявшийся обычай говорить о «безмассовых» частицах, примером которых служат фотон и нейтрино, и мы следуем этому общепринятому. В конце концов, определение слова «частица» можно считать делом вкуса. Естественно, удобно фотон и нейтрино рассматривать с тех же позиций, что и частицы, обладающие массой. С другой стороны, следует особо подчеркнуть, что фотон «не похож на бильярдный шар», лишь *некоторые* свойства фотона напоминают свойства частицы.

7. Рассмотрим теперь несколько мысленных опытов, цель которых выяснить, в какой мере корпускулярные представления о фотоне согласуются с некоторыми результатами классической электромагнитной теории. Эти опыты позволят нам привыкнуть к идее, что кванты электромагнитного излучения — фотоны — имеют свойства частиц.

Здесь уместно привести разъяснение. Говоря о «свойствах частицы», мы имеем в виду те свойства, которые приписывает частице классическая физика. В современном понимании словом «частица» называют такие объекты, как фотоны, электроны, протоны, нейтроны и т. д. Строго говоря, «свойствами частицы» являются свойства

всех этих объектов. В частности, свойством реальной физической частицы является то, что она имеет волновые свойства. На этой стадии рассуждений мы не будем рассматривать свойства *реальных* физических частиц, а ограничимся изучением того, в какой мере эти частицы ведут себя подобно воображаемым «классическим частицам».

8. Рассмотрим стационарный источник света, испускающий фотоны с частотой ω. Направим этот свет перпендикулярно к поверхности идеального зеркала, покоящегося относительно источника света.

Классическая электромагнитная теория предсказывает, что отраженный от зеркала свет будет иметь ту же частоту ω и что поток

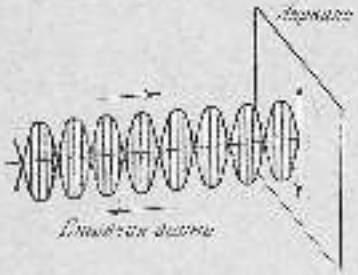


Рис. 8А. Отражение света от зеркала по волновым представлениям. Световая волна перед зеркалом индуцирует в его поверхности токи. Силы с полями этих токов действуют на зеркало, возникает от столкновения материальных частиц с этими токами. При нормальном падении давление излучения P равно плотности энергии W в пространстве у зеркала

энергии, падающий на зеркало, равен потоку отраженной от него энергии. Далее, из классической теории следует, что падающее излучение создает давление на зеркало (так называемое давление излучения). Если предположить, что интенсивность излучения равномерна по всей поверхности зеркала, то давление

$$P=W, \tag{8a}$$

где W — плотность энергии в поле излучения в непосредственной близости от отражающей поверхности.

Обозначим через Φ плотность потока энергии падающего излучения, т. е. количество энергии, падающей за единицу времени на единичную поверхность зеркала, перпендикулярную к направлению светового пучка, а через Φ' — плотность потока энергии отраженного излучения. Тогда получим $\Phi=\Phi'$. В единицу времени излучение распространяется на расстояние c, и плотность энергии

$$W=\frac{\Phi}{c}+\frac{\Phi'}{c}=\frac{2\Phi}{c}, \tag{8b}$$

где первое слагаемое дает плотность энергии, созданную падающим, а второе — отраженным излучением. Таким образом, плотность потока энергии и давление излучения связаны формулой

$$P=2\Phi/c, \tag{8c}$$

следующей из (8a) и (8b).

9. Рассмотрим теперь этот опыт с помощью представления о фотонах. Пусть, например, на единичную поверхность зеркала падает

N фотонов в единицу времени. Каждый фотон несет энергию $E=\hbar\omega$ и импульс $p=\hbar\omega/c$. После столкновения с зеркалом каждый фотон меняет знак импульса (мы считаем зеркало бесконечно тяжелым, так что оно остается в покое); таким образом, каждый фотон

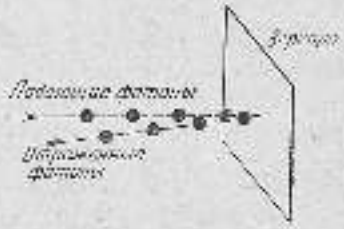


Рис. 9А. Отражение света от зеркала по корпускулярным представлениям. Давление излучения возникает в результате отражения фотонов от зеркала. При нормальном падении импульс фотона меняет на обратное. Соотношение между давлением излучения и плотностью энергии остается таким же, как и в волновой теории (рис. 8А)

передает зеркалу импульс, равный $2p$. В этом примере давление излучения объясняется бомбардировкой зеркала фотонами.

Давление излучения P равно импульсу, переданному единичной поверхности зеркала за единицу времени, и мы имеем

$$P=2Np=2N\hbar\omega/c. \tag{9a}$$

С другой стороны, плотность потока энергии

$$\Phi=N\hbar\omega, \tag{9b}$$

а плотность энергии (фотоны движутся со скоростью света)

$$W=2N\hbar\omega/c. \tag{9c}$$

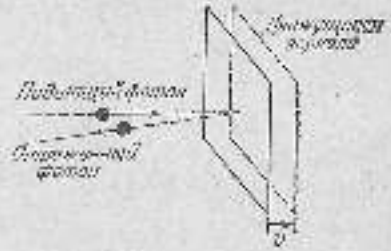


Рис. 10А. Из закона сохранения энергии: энергия E' отраженного фотона будет меньше энергии E падающего фотона, если зеркало движется от источника. Отсюда также видно, что для зеркала, бесконечно тяжелого, получается не равенство, а неравенство (рис. 12А)

Из формул (9a) — (9c) следуют соотношения (8a) — (8c), и это значит, что в рассмотренном опыте волновая и корпускулярная картины получили согласование.

10. Перейдем теперь к более сложному опыту. Пусть источник света покоится в лабораторной системе координат и испускает фотоны с частотой ω, которые падают перпендикулярно на поверхность зеркала, удаляющегося от источника с *небольшой* скоростью v. Предположим, что масса M зеркала очень велика. (Мы считаем скорость v малой и массу M большой, чтобы иметь дело с нерелятивистской задачей.)

Рассмотрим, что произойдет с точки зрения фотонных представлений при столкновении одиночного фотона с зеркалом. До столкновения фотон имел энергию $E=\hbar\omega$ и импульс $p=\hbar\omega/c$, после столкновения его энергия равна E' и импульс $p'=E'/c$. Законы сохранения энергии и импульса имеют вид

$$p+Mv=-p'+Mv' \quad \text{(импульс)}, \tag{10a}$$

$$E-\frac{Mv^2}{2}=E'+\frac{Mv'^2}{2} \quad \text{(энергия)}. \tag{10b}$$

Здесь мы пренебрегли тем обстоятельством, что скорость зеркала до столкновения отлична от скорости после столкновения; направление движения остается, однако, неизменным. Отраженный фотон движется в обратном направлении, поэтому в равенстве (10a) p' входит со знаком минус.

Частота отраженного фотона $\omega'=E'/\hbar$. Равенства (10a) и (10b) можно переписать в виде

$$\frac{\hbar\omega}{c}-Mv=-\frac{\hbar\omega'}{c}+Mv' \quad \text{(импульс)}, \tag{10c}$$

$$\hbar\omega+\frac{Mv^2}{2}=\hbar\omega'+\frac{Mv'^2}{2} \quad \text{(энергия)}. \tag{10d}$$

Исключая v' из обоих выражений, получаем для разности частот

$$\hbar(\omega-\omega')=\frac{2}{c}\hbar(\omega+\omega')+\frac{1}{2M}\left(\frac{\hbar}{c}\right)^2(\omega+\omega')^2. \tag{10e}$$

В предельном случае бесконечно тяжелого зеркала второе слагаемое в правой части (10c) исчезает и мы получаем

$$\omega'=\omega\frac{1-v/c}{1+v/c}. \tag{10f}$$

Так как v/c мало, то можно разложить (10f) в ряд по степеням v/c. Ограничиваясь членами, линейными по v/c, получаем следующее выражение для частоты отраженного света:

$$\omega'\approx\omega(1-2v/c). \tag{10g}$$

11. Рассмотрим также интенсивность отраженного излучения. Для этого вообразим, что наблюдатель находится в плоскости, фиксированной в лабораторной системе координат и параллельной зеркалу. Пусть число фотонов, падающих на единичную поверхность зеркала за единицу времени, равно N, а число отраженных фотонов равно N'. Допустим также, что размеры источника света настолько велики, что все фотоны падают на зеркало строго перпендикулярно к его поверхности. В этом случае

$$N'=N(1-2v/c). \tag{11a}$$

Чтобы убедиться в справедливости написанного выражения, представим себе, что падающие на зеркало фотоны проходят через плоскость наблюдателя, будучи равномерно распределенными во времени. Тогда интервал времени между двумя последовательными прохождениями фотонов через единичную поверхность будет $1/N$. Данный фотон вернется к плоскости через время t, следующий за ним должен будет пройти больше расстояние, так как зеркало сдвинется на расстояние v/N, и он вернется к плоскости в момент $t+\frac{1}{N}+\frac{2v}{c}\frac{1}{N}$. Таким образом, интервал времени между возвращающимися фотонами равен $\frac{1}{N'}=\frac{1}{N}\left(1+\frac{2v}{c}\right)$. При замене v/c мы получаем приближенное выражение (11a).

Теперь вычислим интенсивность пучка фотонов, т. е. поток энергии через единичную поверхность в единицу времени. Он равен $\Phi=\hbar\omega N$ для падающего пучка и $\Phi'=\hbar\omega'N'$ для отраженного; таким образом, обе интенсивности связаны (приближенно) выражением

$$\Phi'=\Phi(1-4v/c). \tag{11b}$$

Мы получили два интересных результата: частота отраженных фотонов меняется согласно (10g), а интенсивность отраженного пучка связана с интенсивностью падающего формулой (11b). Можно ли получить те же результаты с помощью классической электромагнитной теории? *)

12. С точки зрения волновой теории наблюдателю, покоящемуся в лабораторной системе координат, кажется, что отраженный свет

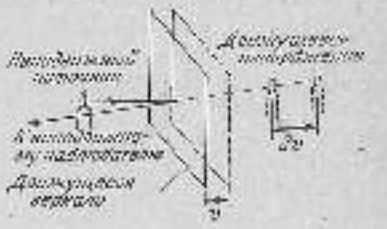


Рис. 13. Свет, испускаемый неподвижным источником, отражается движущимся зеркалом, имеющим скорость v. Изображение приближается со скоростью, превышающей вдвое скорость зеркала. Волновая теория утверждает, что частота отраженного света будет испытывать доплеровское смещение (вообразите для простоты, что свет состоит из одной монохроматической волны).

преходит от источника за зеркалом, который является зеркальным изображением источника света. Это зеркальное изображение движется со скоростью v по отношению к зеркалу, а само зеркало с такой же скоростью движется относительно покоящегося наблюдателя. При малых v можно использовать нерелятивистский закон сложения скоростей. Таким образом, получим, что изображение источника света удаляется от наблюдателя со скоростью $2v$. Поэтому возникает доплеровское смещение частоты и отраженный свет имеет частоту ω', которая (в нерелятивистском приближении) равна $\omega'=\omega(1-2v/c)$ в согласии с (10g).

13. Перейдем к вопросу об интенсивности. В томе II этого курса **) мы обсуждали законы преобразования электромагнитного поля при преобразованиях Лоренца. Обозначим через E и B амплитуды электрического и магнитного поля волны в системе координат, неподвижной относительно источника света. Те же величины в системе координат, удаляющейся от наблюдателя со скоростью v, обозначим через E' и B' соответственно. Для линейно поляризованной плоской волны имеем $E=B$ и $E'=B'$.

Из известных нам законов преобразования следует

$$E'=E\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}. \tag{13a}$$

*) Разумеется, можно. Предлагаем этот вывод (хотя бы первым) читателю. Один из способов рассмотрения таких задач заключается в переходе к системе зеркала и в обратном переходе в лабораторную систему координат.

**) Парселл Э. Электричество и магнетизм. — 3-е изд. — М.: Наука, 1983, гл. 5, п. 7.

Интенсивность (плотность потока энергии) в этом случае пропорциональна квадрату амплитуды, и мы получаем

$$\Phi' = \Phi \frac{c-v'}{c+v'}, \qquad (13b)$$

где Φ — интенсивность в системе источника света; Φ' — интенсивность в системе координат, в которой источник удаляется от наблюдателя со скоростью v. Если мы теперь положим $v'=2v$, разложим (13b) в ряд по v/c и ограничимся линейными членами, то получим формулу (11b).

Мы видим, что корпускулярные представления о свете приводят к тем же выводам, что и волновые представления, т. е. классическая электромагнитная теория.

14. Теперь рассмотрим результирующий конечный поток энергии через «плоскость наблюдателя», параллельную зеркалу. Так как отраженный свет обладает меньшей интенсивностью, чем падающий, то этот конечный поток не равен нулю. Откуда берется эта

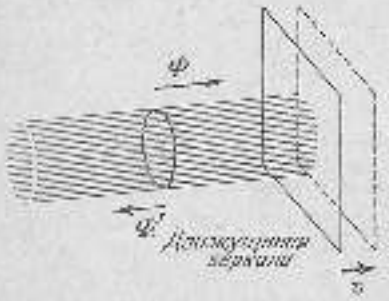


Рис. 14А. Интенсивность света, отраженного от зеркала, удаляющегося от источника и наблюдателя, меньше интенсивности падающего на зеркало света. Давление излучения совершает над зеркалом работу, а объем, занимаемый энергией излучения, возрастает. Баланс энергии правильно описывается как волновой, так и корпускулярной теорией

энергия? Зеркало движется, и давление излучения совершает над ним работу; эта работа поглощает *половину* результирующего потока. Другая половина отражается, образуя электромагнитное поле в пространстве между зеркалом и плоскостью наблюдения; объем этого пространства равномерно возрастает, но плотность энергии остается постоянной. Поэтому в этот объем энергия должна втекать с постоянной скоростью. Пользуясь фотонными представлениями, мы должны сказать, что число фотонов, летящих в пространстве от зеркала до плоскости наблюдения, должно равномерно увеличиваться по мере роста расстояния. Читатель может самостоятельно выполнить простые вычисления, идея которых описана в этом пункте, и убедиться в существовании баланса энергии.

15. Рассмотрим еще один пример, который покажет, что в наших рассуждениях нужна осторожность. Пусть источник предельно монохроматического света частоты ω_0 (им может быть *лазер*) освещает зеркало, которое колеблется с частотой ω_m в направлении пучка. Мы хотим найти частоту отраженного света.

Положив в основу наивную корпускулярную модель, можно рассуждать так: если фотон настигает зеркало, когда его скорость

равна v и направлена от источника, то частота отраженного фотона, в соответствии со сказанным ранее, равна $\omega = \omega_0(1-2v/c)$.

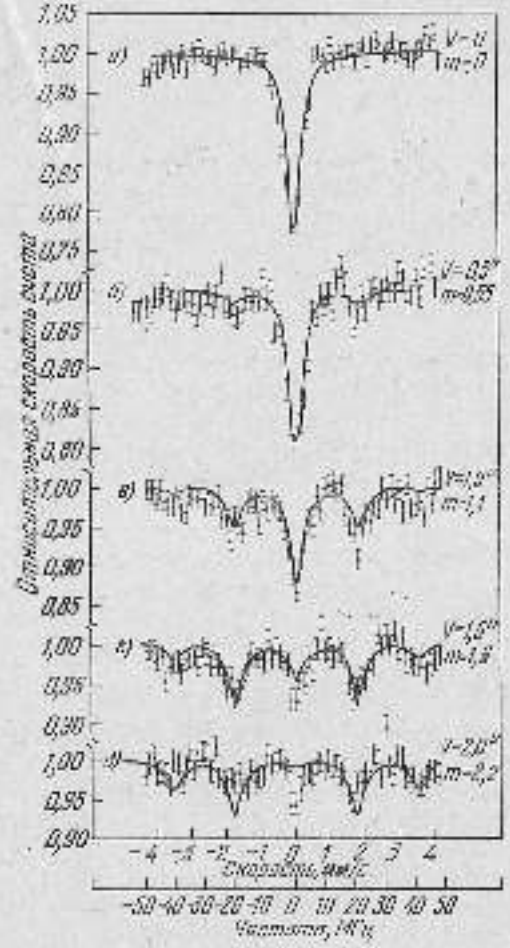


Рис. 14А. Частотный спектр γ-излучения, испущенного колеблющимся источником, содержащим возбужденные ядра ^{57}Fe. Кривые *а)* — *д)* соответствуют различным амплитудам колебаний приложенной к нему частотой 20 МГц. Спектральным линиям соответствуют максимумы кривых. Одна из линий расположена на нулевой частоте, остальные — на расстояниях ±20 и ±40 МГц от центральной частоты. В действительности эти кривые дают зависимость прозрачности поглотителя движущимся источником, содержащего ^{57}Fe в возбужденном состоянии, от скорости поглотителя. При скорости источника, равной нулю, происходит сильное поглощение γ-излучения. При колебаниях источника происходит сильное поглощение при тех скоростях, для которых вследствие доплеровского смещения испущенные линии совпадают с резонансной линией ^{57}Fe. (Ruby S., Bolt D. J. Acoustic-to-Accelerated γ-Rays from ^{57}Fe. — Phys. Rev. Lett., 1960, v. 6, p. 5)

Фотоны падают на зеркало случайным образом, так что в отраженном свете их должны иметь *непрерывный* набор частот в интервале от $\omega_0(1-2v_t/c)$ до $\omega_0(1+2v_t/c)$, где v_t — максимальная скорость зеркала. Вместо монохроматической линии мы будем иметь в отраженном свете линию конечной ширины.

16. Классическая волновая картина приводит нас к другим выводам. Отраженный свет есть результат двух периодических процессов, и поэтому можно ожидать появления в отраженном свете *комбинационных частот*, образованных из частот ω_0 и ω_m. Подробный анализ этой проблемы в рамках классической электромагнитной теории показывает, что в отраженном свете должен появиться дискретный ряд частот $\omega = \omega_0 + n\omega_m$, где n — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль). В физически реальном случае $v \ll c$, когда скорость зеркала мала по сравнению со скоростью света, *интенсивности*, с которыми представлены эти различные частоты, убывают с увеличением числа n.

Автор надеется, что этот результат будет понятен читателю. Мы не будем доказывать его в общем виде, а подтвердим его правдоподобность рассмотрением частного случая. Предположим, что ω_0 — целое кратное ω_m. В этом случае весь процесс возникновения отраженного пучка будет строго периодическим с периодом $2\pi/\omega_m$. Через время $2\pi/\omega_m$ все повторится снова. Это с необходимостью говорит о том, что электрическое поле, наблюдаемое в отраженном пучке, должно быть периодической функцией с периодом $2\pi/\omega_m$. Частоты, наблюдаемые в отраженном пучке, должны поэтому быть целыми кратными частоты ω_m. Это находится в согласии с утверждением, что частота света равна $\omega = \omega_0 + n\omega_m$. Очевидно также, что наибольшую интенсивность будут обладать частоты вблизи частоты ω_0. (Чтобы убедиться в этом, подумайте, что случится в пределе амплитуды, стремящейся к нулю.)

Ясно, что нельзя ожидать появления *непрерывного* спектра частот, как это предсказывает наивная корпускулярная картина.

Предсказания классической волновой теории согласуются с тем, что мы наблюдаем в действительности. Такого рода опыты были выполнены с колеблющимся источником света. В одном из них, выполненном Рубн и Болефом, «источником света» служили ядра ^{57}Fe, являющиеся излучателями γ-квантов. Эти ядра были нанесены на поверхность осциллирующего кристалла кварца. Как видно из рис. 16А, в этом опыте удалось наблюдать некоторые из предсказанных частот.

17. Резкое противоречие между предсказаниями корпускулярной и волновой теорий не должно нас удивлять, ибо использованные нами корпускулярные идеи чрезвычайно наивны. Мы допускали, что отражение происходит *мгновенно* и что фотон является *точечной частицей*, не имеющей протяженности. Эти предположения необоснованны. Волновой цуг имеет конечную длину, обратно пропорциональную погрешности, с которой задана частота. Чтобы оценить эту длину, можно воспользоваться рассмотренным в п. 23 гл. 3 соотношением между неопределенностью в частоте $\Delta\omega$ и продолжительностью τ процесса излучения. Мы видели, что

$$\tau \approx 1/\Delta\omega, \tag{17a}$$

Длина волнового цуга (в пространстве)

$$L = c\tau \approx c/\Delta\omega. \tag{17b}$$

и мы замечаем, что если частота задана с большой точностью, то безусловно неверно считать фотон точечной частицей.

Рассмотрим проблему с другой точки зрения. Допустим, что $\omega_m \gg \Delta\omega$. Время, которое фотон «проводит» на отражающем зеркале, в этом случае будет гораздо больше периода колебаний

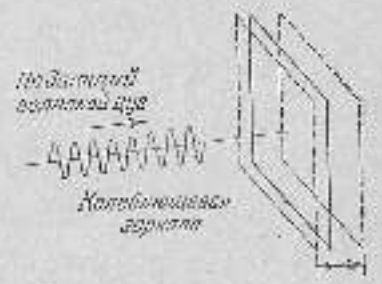


Рис. 17А. Наивное описание рассеяния фотона с помощью зеркала. Как сложение, производимое нами с точки зрения физики, не имеет точечной частицей. Более правильной является волновая теория. Длина волнового цуга, а следовательно, и продолжительность столкновения обратно пропорциональны неточности, с которой задана частота фотона. Совершенно монохроматический фотон имеет бесконечную протяженность. Пусть ω_m — частота колебаний зеркала, а ω_0 — частота падающего на него света. Тогда отраженный свет имеет скорость $\omega = \omega_0 + n\omega_m$, где n — любое целое число

зеркала. Поэтому ясно, что мы не можем представлять себе, что фотон отражается от зеркала в тот момент, когда скорость зеркала равна v. За время отражения зеркало успеет совершить несколько полных колебаний.

Комптон-эффект, тормозное излучение, образование пар и аннигиляция

18. Обратимся теперь к опыту, в котором можно наблюдать энергию и импульс фотона. Мы имеем в виду опыт А. Комптона, в котором изучалось столкновение фотона с электроном. Схематически идея опыта показана на рис. 18А.

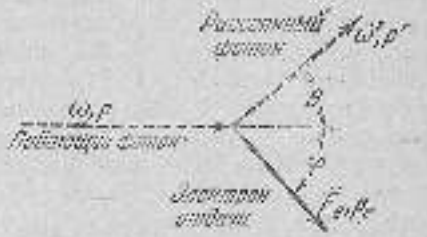


Рис. 18А. Кинематика комптон-эффекта. Фотон сталкивается с покоящимся вначале электроном. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что частота ω' и импульс p' фотона однозначно связаны с углом рассеяния θ фотона

Фотон с частотой ω сталкивается с покоящимся электроном, масса которого равна m. После столкновения возникает фотон с частотой ω', движущийся под углом θ к направлению движения первичного фотона, и электрон отдачи, обладающий энергией E_e и импульсом p_e и образующий угол φ с первичным направлением.

Для сохранения энергии и импульса необходимо, чтобы все явление происходило в одной плоскости (пусть это будет плоскость чертежа). Законы сохранения имеют вид

$$\hbar\omega + mc^2 - \hbar\omega' = E_e \quad \text{(энергия)}, \tag{18a}$$

$$p - p' = p_e \quad \text{(импульс)}. \tag{18b}$$

Вычитая квадрат второго выражения из квадрата первого (левого на c), получаем

$$\frac{1}{c^2}(\hbar\omega - mc^2 - \hbar\omega')^2 - (p - p')^2 - \frac{m^2c^2}{c^2} - p_1^2 = m^2c^2. \qquad (18c)$$

Поскольку

$$p = \frac{\hbar\omega}{c}, \quad p' = \frac{\hbar\omega'}{c}, \quad p \cdot p' = pp' \cos\vartheta, \qquad (18d)$$

то, решая (18c) относительно ω', имеем

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + (\hbar\omega/mc^2)(1 - \cos\vartheta)}. \qquad (18e)$$

19. Введя длины волн $\lambda = 2\pi c/\omega$ и $\lambda' = 2\pi c/\omega'$, можно переписать (18c) в виде

$$\lambda' = \lambda + 2\pi(\hbar/mc)(1 - \cos\vartheta). \qquad (19a)$$

Величина $2\pi(\hbar/mc) = \hbar/mc$ называется *комптоновской длиной волны* частицы с массой m. В нашем случае для электрона $\hbar/mc = 2{,}43 \cdot 10^{-11}$ см $= 0{,}0243$ Å.

Длина волны рассеянного излучения оказывается больше длины волны падающего, или, что то же самое, рассеянное излучение имеет меньшую частоту, чем падающее. Это значит, что часть энергии первичного фотона передается электрону. Из уравнения (18c) следует, что относительное изменение частоты очень мало, если величина $\hbar\omega/mc^2 \approx \hbar\omega/0{,}5$ МэВ мала. Поэтому, чтобы иметь возможность наблюдать заметный эффект, мы должны работать с жестким рентгеновским излучением. Тот же вывод следует, разумеется, и из уравнения (19a): относительное изменение длины волны мало, если комптоновская длина волны мала по сравнению с длиной волны первичного излучения.

20. Рассмотренное нами явление рассеяния впервые наблюдал А. Комптон в 1922 г.*). Возможно, что к этим опытам он был приведен предшествующими работами Баркла, который показал, что при рассеянии жесткого рентгеновского излучения твердым телом на большие углы рассеянное излучение состоит из двух компонент: одна компонента идентична по своим свойствам рассеиваемому излучению, а вторая имеет другие свойства. Это различие проявляется в том, что она иначе поглощается средой. Происхождение первой компоненты легко понять, исходя из волновых представлений. Первичное излучение заставляет электроны атома колебаться со своей собственной частотой ω, и осциллирующие электроны являются источником излучения той же частоты ω. В этих процессах происходит лишь временное изменение состояния атома, и электроны не испускаются. Можно ожидать, что такого рода рассеяние будут испытывать главным образом сильно связанные электроны атома.

*) *Compton A. H.* The Spectrum of Scattered X-Rays.— Phys. Rev., 1923, v. 22, p. 409. Теоретический анализ данной Комптоном, см. в работе: A Quantum Theory of the Scattering of X-Rays by Light Elements.— Phys. Rev., 1923, v. 21, p. 483.

Часть электронов атома связана с ним весьма слабо; их энергия связи лежит в пределах 10—100 эВ, и эти электроны могут быть выброшены из атома в процессе рассеяния. В опыте Комптона рентгеновское излучение, возникающее в трубке с молибденовым антикатодом при разности потенциалов около 50 кВ, рассеивалось в графите. Длина волны первичного излучения отвечала так называемой K_α-линии молибдена с длиной волны 0,71 Å, что соответствует энергии около 20 кэВ. Эта энергия весьма велика по сравнению с энергией связи внешних электронов атома углерода и даже по сравнению с энергией связи всех электронов этого атома. В таких условиях можно ожидать, что процесс рассеяния будет иметь характер рассеяния на свободных электронах и к нему будет применим анализ, выполненный в п. 18. Действительно, Комптон обнаружил, что рассеянное излучение имеет вторую компоненту, длина волны которой зависит от угла рассеяния в соответствии с формулой (19a).

В дальнейших опытах Комптона и других исследователей удалось зарегистрировать электроны отдачи и показать, что электрон отдачи и рассеянный фотон коррелированы друг с другом и что в этом процессе сохраняется энергия и импульс*).

21. Рассмотрим теперь, в чем значение комптон-эффекта. Заметим прежде всего, что классической волновой пакет электромагнитного излучения также должен рассеиваться электронами и для объяснения такого рассеяния нет необходимости прибегать к квантовой механике. Однако специфическая связь (18e) между частотой рассеянного излучения и углом рассеяния содержит постоянную

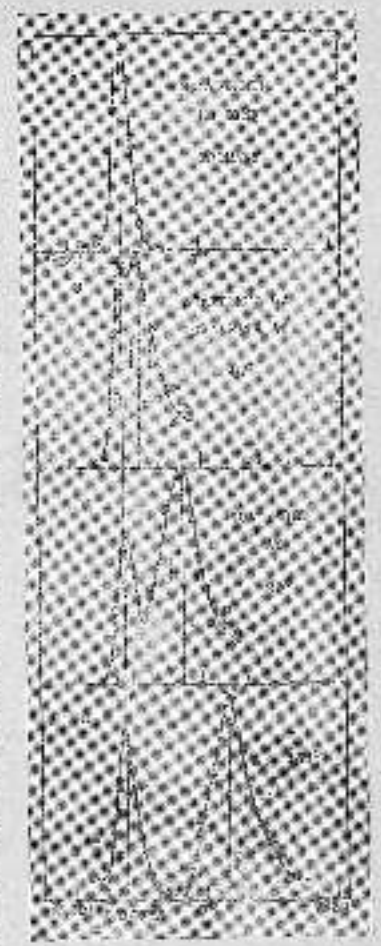


Рис. 21а. Спектры рассеянного излучения для трех углов рассеяния. На графиках отчетливо видны две линии 0,71 Å, соответствующие падающему на кристаллический излучению, и более длинноволновая линия, принадлежащая рассеянному излучению. Максимум в левой части графиков показывает, что часть рассеянного излучения имеет ту же длину волны, какой обладало падающее. Интенсивности на графиках приведены в произвольных единицах, но относительная интенсивность в максимумах правильно передает соотношение между ними. (Compton A. H. Phys. Rev., 1924, v. 23, p. 409.)

*) *Compton A. H., Simon A. W.* Directed Quanta of Scattered X-Rays.— Phys. Rev., 1925, v. 26, p. 289; см. также: *Wilson C. T. R.* Investigations on X-Rays and β-Rays by the Cloud Method.— Proc. Roy. Soc., London, 1923, v. 104, p. 1.

Планка, и способ, каким величина $\hbar$ вошла в эту формулу, является сильным доводом в пользу фотонных представлений. Напомним, что при выводе формулы (18с) мы опирались на представление, что рассеивается *весь фотон целиком*, а не какая-то, скажем третья или пятая, его часть. Таким образом, значение комптон-эффекта в том, что он подтверждает универсальный характер соотношения $E = \hbar\omega$. В опыте Комптона фотон не подвергается «расщеплению»: фотон с частотой ω всегда имеет энергию $\hbar\omega$ и импульс $\hbar\omega/c$.

В оптических опытах, где используются фотоэлементы (для видимой или ультрафиолетовой части спектра), можно проверить связь $E = \hbar\omega$ лишь для весьма ограниченной области частот. Комптон-эффект распространяет эту область до жесткого рентгеновского излучения. Разумеется, если мы верим в специальную теорию относительности, а мы в нее верим, то мы должны признать универсальный характер этого соотношения (см. начало главы). Тем не менее нельзя недооценить значение опытов, которые являются прямой проверкой этого соотношения в новой области частот: мы проверяем согласованность наших идей и, кроме того, проверяем саму специальную теорию относительности.

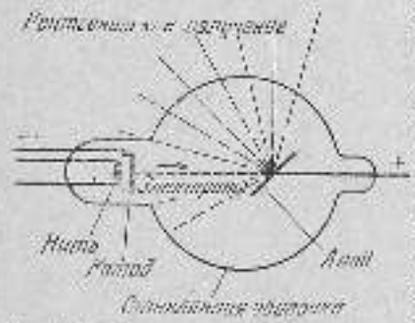


Рис. 22А. Упрощенная схема устройства рентгеновской трубки. Электроны испускаются катодом, нагреваемым нитью, и ускоряются к аноду. Часть излучения является характеристическим излучением вещества анода, другая — тормозным излучением.

В настоящее время мы располагаем исчерпывающими доказательствами общего характера соотношения $E = \hbar\omega$. Мы можем сказать, что оно является существенной частью современной физики. Чтобы продолжить изучение следствий из этого соотношения, рассмотрим два новых явления: генерацию рентгеновского излучения в рентгеновской трубке и аннигиляцию и рождение электронно-позитронных пар.

22. На рис. 22А схематически показано устройство рентгеновской трубки. Электроны, испускаемые катодом (он накаливается нитью с током), ускоряются разностью потенциалов V_0, приложенной между катодом и анодом. Попадая на анод (другое название *мишень* или *антикатод*), они останавливаются. На основании классической электромагнитной теории следует ожидать, что торможение электронов будет сопровождаться испусканием электромагнитного излучения. Это излучение впервые было обнаружено Рентгеном в 1895 г.*). Испускаемое излучение получило название рентгеновского излучения (или X-лучей в английской литературе).

Истинная природа этого излучения сначала не была ясна, но в начале века были получены исчерпывающие доказательства его электромагнитной природы. Опыты Барклa по двойному рассеянию рентгеновского излучения, выполненные в 1904 г., показали, что это излучение поперечно поляризовано. Наиболее решающие доказательства относятся к 1912 г., когда В. Фридрих и П. Книпинг, следуя идее М. Лауэ, обнаружили дифракцию рентгеновского излучения в кристалле. Мы упоминали об этом в гл. I *).

*) *Röntgen W. C.* Über eine neue Art von Strahlen.— Sitzungsber. Med. Phys. Ges., Wurzburg, 1895, S. 137; 1896, S. 11.

23. После создания методов спектроскопии рентгеновского излучения стало возможным измерять интенсивность этого излучения в зависимости от длины волны. Такие измерения были выполнены в самых разных экспериментальных условиях. Типичный график зависимости интенсивности от длины волны для трех различных мишеней при одной и той же ускоряющей разности потенциалов приведен на рис. 23А. Мы видим на фоне непрерывного спектра несколько «пиков» интенсивности, образующих резкие максимумы. Положение этих максимумов является характеристикой вещества мишени, а характер непрерывного фона при данном значении V_0 слабо зависит от вещества мишени. Рассмотрение всей совокупности экспериментальных данных позволяет сделать вывод о двух различных механизмах образования рентгеновского излучения. Резкие линии аналогичны спектральным линиям видимого света. Они образуют так называемое характеристическое излучение данного вещества мишени. Оно испускается *осколком*, возбужденным в результате столкновения с быстрым электроном. Непрерывный фон является излучением самих электронов, замедляющихся в мишени. Такое излучение называется *тормозным*. Иногда его обозначают немецким словом *Bremsstrahlung*.

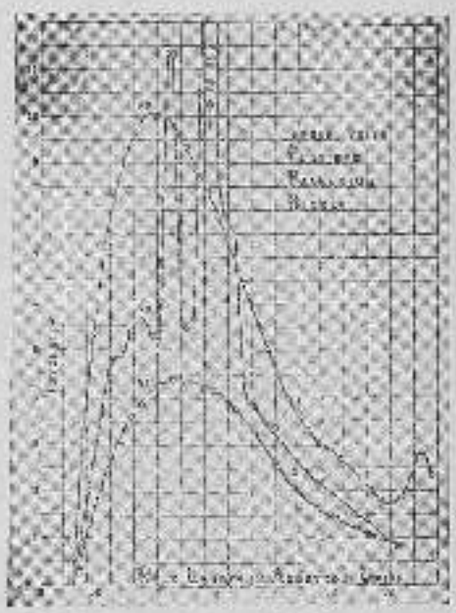


Рис. 23А. Спектр рентгеновского излучения для трех различных мишеней при одной и той же ускоряющей разности потенциалов V_0. (Из работы Кулиджа, использующего счетчики для исследования спектра излучения анода. «Отражения» при малых углах скольжения. (*Coolidge C. T.* An Experimental Investigation of the Energy in the Different X-Ray Spectra of Certain Elements.— Phys. Rev., 1918, v. 11, p. 401.)

*) *Barkla C. G.* Polarized Röntgen Radiation.— Phil. Trans. Roy. Soc., 1905, v. 204, p. 467; Polarization in Secondary Röntgen Radiation.— Proc. Roy. Soc., London, 1906, v. 77, p. 247 (в последней работе описаны опыты по двойному рассеянию); *Friedrich W., Knipping P., von Laue M.*— Ann. d. Phys., 1913, v. 41, p. 971.

Экспериментально показано, что при данной ускоряющей разности потенциалов V_1 в системе отсутствует излучение с длиной волны, меньшей определенного минимального значения $\lambda_{\min}$. Значение $\lambda_{\min}$ зависит от V_1 и не зависит от вещества мишени. Это показано на рис. 23А.

24. Попытаемся дать теоретическое объяснение рассмотренным свойствам рентгеновского излучения.

Прежде всего заметим, что, согласно классической электромагнитной теории, электрон, движущийся равномерно, не излучает. Тот же вывод следует и из фотонной теории. Рассмотрим систему покоя электрона до возможной эмиссии фотона. Его энергия в этой системе равна mc^2. После испускания одного или нескольких фотонов его энергия остается равной mc^2, но какая-то энергия должна быть унесена фотонами. Это нарушает закон сохранения энергии, и, следовательно, такое излучение невозможно.

Картина, однако, меняется, если электрон движется в сильном электрическом поле вдоль ядер мишени. В этом случае электрон может передать часть своей энергии и импульса ядру, что обеспечит сохранение полной энергии и импульса системы. Рассмотрим это более подробно. С ядром массы M, которое вначале покоилось (в лабораторной системе координат), сталкивается электрон, имеющий массу m и начальный импульс p_i. Импульсы электрона и ядра после столкновения равны p_f и p_n. Кроме того, возникает фотон с импульсом p и частотой $\omega = pc/\hbar$. Законы сохранения имеют вид

$$p_i = p_f + p_n + p \quad \text{(импульс)}, \tag{24a}$$

$$E_i + Mc^2 = E_f + E_n + \hbar\omega \quad \text{(энергия)}. \tag{24b}$$

Здесь E_i и E_f — начальная и конечная энергии электрона соответственно, а E_n — конечная энергия ядра. Таким образом, законы сохранения дают нам четыре уравнения. Они содержат, однако, девять переменных, характеризующих конечное состояние, а именно девять компонент векторов p_f, p_n и p. Подробное исследование области разрешенных значений этих векторов достаточно сложно, и мы не будем его записывать. Можно показать, что фотон, испущенный в любом данном направлении, может обладать энергией от нулевой до некоторой максимальной. Максимальное значение энергии фотона возникает в том случае, когда скорости v ядра и электрона после столкновения совпадают. Чтобы доказать это, достаточно перейти в систему центра масс системы. Перепишем законы сохранения для случая, когда конечные скорости электрона и ядра равны:

$$p_f = p - \frac{(M+m)v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{24c}$$

$$E_f + Mc^2 = cp + \frac{(M+m)c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{24d}$$

Умножая первое уравнение на c и вычитая квадрат частного из квадрата второго уравнения, получаем

$$\hbar\omega = pc - \frac{E_f - mc^2}{1 + (E_f - mc^2)/Mc^2}, \tag{24e}$$

где θ — угол между направлением испускания фотона и первичным импульсом электрона. Эта формула дает максимальную энергию фотона для данного угла θ. Мы заметим, что максимальная энергия приближенно равна $E_f - mc^2$, т. е. кинетической энергии первичного электрона, которая в свою очередь равна eV_1. Второй член в знаменателе (24e) очень мал по сравнению с единицей, так как энергия покоя ядра $Mc^2 \sim 940A$ МэВ (A — массовое число ядра) велика по сравнению с E_f, которая для обычных рентгеновских трубок лежит в интервале 1—100 кэВ.

25. В предельном случае бесконечно тяжелого ядра мы получаем следующее выражение для минимального значения длины волны:

$$\lambda_{\min} = 2\pi c/\omega = ch/eV_1. \tag{25a}$$

Этот результат очевиден: энергия фотона не может быть больше кинетической энергии первичного электрона, и если считать ядро бесконечно тяжелым, то фотон получает максимальную энергию в том случае, когда электрон полностью останавливается в столкновении.

Минимальное значение длины волны $\lambda_{\min}$ носит название *коротковолновой границы*. Его существование демонстрирует квантовый характер образования рентгеновского излучения: классическая теория предсказывает появление произвольно коротких длин волн. Зависимость квантового предела от разности потенциалов была измерена очень точно [1]. Эти измерения дали точные значения константы ch/e (и ch).

26. В заключение рассмотрим аннигиляцию электронно-позитронных пар. Позитроны были открыты К. Андерсоном в 1932 г. в космическом излучении (рис. 26А). Затем было обнаружено, что позитроны возникают при распаде многих радиоактивных ядер, например при распаде радиоактивного изотопа фосфора ^{30}P. Позитроны образуются также при прохождении γ-излучения большой энергии через вещество. Как мы упоминали в гл. 1, объясняется это явление тем, что в электрическом поле ядра γ-квант образует электронно-позитронную пару. Такой процесс носит название *закономерного образования пар*.

Если позитрон сталкивается или взаимодействует с электроном, то обе частицы могут исчезнуть (*аннигилировать*). Это означает, что частицы исчезают, а их энергия полностью переходит в энергию электромагнитного поля. Явление аннигиляции наблюдается при облучении вещества позитронами. В соответствии с нашей схемой позитроны в столкновениях с атомами сначала будут терять большую часть своей энергии, а некоторые из них, испытав прямое столкновение с электроном, аннигилируют до полного замедления.

[1] *Bearden J. A., Jensen C. T., Wiles H. M.* A New Evaluation of hc/e by X-Rays.— Phys. Rev., 1951, v. 81, p. 70.

Замедлившиеся позитроны будут диффундировать в веществе и в конце концов аннигилируют с одним из атомных электронов. При благоприятных условиях позитрон может образовать водородоподобную систему с одним электроном, такой атом носит название *позитрония*. Замедлившиеся позитроны взаимодействуют с электроном и в

Рис. 26а. Фотография представляет собой часть камеры Вильсона. Именно на таких снимках впервые открыл позитрон Андерсон (C. D. The Positive Electron. — Phys. Rev., 1933, v. 43, p. 491). Позитрон с энергией 63 Мэв входит в горизонтально расположенную свинцовую пластину толщиной 6 мм и выходит из нее с энергией 23 Мэв. Сама траектория позитрона не видна, но ее направление и кривизна после прохождения пластины легко восстанавливаются. Кривая камеры настолько велика, поле магнитное достаточно сильно, и кривизна траектории позитрона в камере очень мала. Некоторые дополнительные вопросы, связанные с этим снимком, рассмотрены в конце настоящей главы, § 131

конце концов через время порядка 10^{-10} с аннигилируют. Несколько известно, масса позитрона точно равна массе электрона.

27. Рассмотрим процесс аннигиляции, который можно записать в виде реакции

$$e^+ + e^- = n\gamma,$$

где γ — фотон (γ-квант). Допустим, что в момент аннигиляции обе частицы покоились (в лабораторной системе координат), и что аннигиляция происходит в свободном пространстве, вдали от других частиц.

Заметим прежде всего, что при аннигиляции должно возникнуть не менее двух фотонов: $n \geqslant 2$, иначе невозможно удовлетворить законам сохранения энергии и импульса. (Если электрон и позитрон первоначально покоятся, импульс системы в начальном состоянии равен нулю, а импульс *единственного* фотона *не может быть* равен нулю.) Предположим, что испускается *два* фотона. Импульс системы в начальном состоянии равен нулю, тому же полный импульс должен быть равен и в конечном состоянии. Поэтому оба фотона должны иметь равные, но противоположно направленные импульсы. Это означает, что их энергии, а следовательно, и частоты также равны. Пусть частота фотонов равна ω. Из закона сохранения энергии следует

$$2\hbar\omega = 2mc^2 \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{\lambda}{\pi}. \qquad (27a)$$

Таким образом, длина волны испущенных фотонов равна комптоновской длине волны электрона $\lambda/\pi = 0{,}0240$ Å; такой длине волны

соответствует энергия, равная энергии покоя электрона: $mc^2 = 0{,}511$ Мэв [*]).

Можно предполагать, что все эти предсказания будут справедливы и для позитрона, замедлившегося в веществе. Присутствие других частиц окажет какое-то влияние, но оно будет мало, так как энергия связи в атоме невелики по сравнению с энергией покоя электрона.

Поэтому следует ожидать, что оба фотона, испущенные при аннигиляции позитронов в веществе, будут испущены в противоположных направлениях и их длина волны будет равна комптоновской длине волны электрона. Это предсказание было проверено экспериментально и подтверждено с большой точностью [**]). Кроме того, было обнаружено, что возможна также аннигиляция с испусканием трех фотонов.

28. Имеется одно обстоятельство, которое требует разъяснения. Мы отмечали, что в пространстве при аннигиляции электронно-позитронной пары не может возникнуть один фотон, ибо энергия и импульс при этом не могли бы сохраняться. Отсюда следует, что и обратный процесс, когда из одного фотона возникает электронно-позитронная пара, также невозможен. В то же время мы говорили, что фотоны большой энергии, попадая в вещество, образуют в нем электронно-позитронные пары. Кажущееся противоречие легко разрешимо. Процесс образования пар фотонами происходит в поле ядра. При этом ядру передается определенная энергия и импульс, и этим обеспечивается возможность сохранения энергии и импульса.

Процессом, в точности обратным аннигиляции электрона и позитрона с испусканием двух фотонов, является процесс образования электронно-позитронной пары при столкновении двух фотонов. Его никто не наблюдал, потому что нет возможности получить достаточно интенсивные пучки фотонов большой энергии. Но дело не замедлится в том, что при наличии таких пучков процесс рождения электронно-позитронной пары двумя фотонами наблюдался бы. Для образования пары фотоном в поле ядра обратным будет процесс аннигиляции пары в поле ядра с образованием одного фотона. При этом присутствие ядра обеспечит сохранение энергии и импульса. Такой процесс действительно наблюдался, но полное двухфотонной аннигиляции более вероятен, и он преобладает.

29. Поскольку речь идет о позитроне, нельзя не обратиться к проблеме частиц и античастиц. В своей современной форме квантовая электродинамика является теорией, в которой электрон и позитрон играют совершенно симметричную роль. Это общая черта всех наших теорий фундаментальных частиц: мы верим, что каждой частице соответствует своя античастица (некоторые частицы, как, например, нейтральный пион, являются своими собственными

*) Заметим, что величину $\lambda/\pi mc = 0{,}0386$ Å тоже часто называют комптоновской длиной волны.

**) См., например: Klarmann G. On the Annihilation Radiation of the Positron. — Proc. Cambr. Phil. Soc., 1941, v. 37, p. 347.

античастицами) и что мир симметричен относительно замены частицы античастицей *). Масса античастицы совпадает с массой частицы, но заряды их противоположны. Дальнейшим подтверждением этих идей явилось экспериментальное открытие существования протона и антипротона **).

Фундаментальным свойством частицы и античастицы является их способность аннигилировать с образованием, например, фотонов.

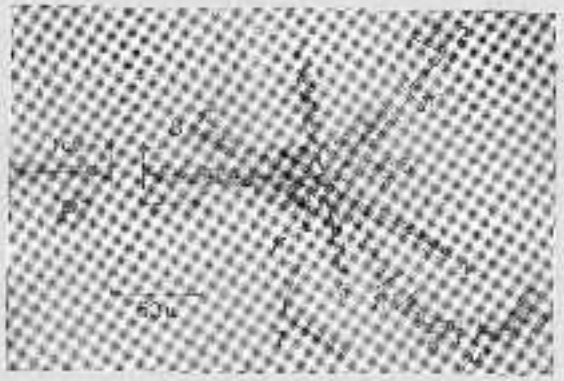


Рис. 29А. Процесс аннигиляции протона и антипротона с образованием нейтронов. Этот рисунок является копией одной из фотографий, взятых из архива Калифорнийского университета (Беркли). Камера помещалась в магнитное поле, силовые линии которого были направлены перпендикулярно плоскости рисунка. Четырех- или пятилучевая звезда, образующаяся при аннигиляции, состоит из заряженных частиц, которые отклоняются магнитным полем. Нейтральные частицы не создают видимых следов, и поэтому они невидимы. Один из нейтронов, образовавшихся при аннигиляции, взаимодействует с ядром углерода и выбивает из него протон. Этот протон оставляет короткий толстый след, который виден в центре звезды. Нейтрон, образовавшийся при аннигиляции, может также столкнуться с протоном, и тогда образуется дейтрон. Дейтрон оставляет толстый след, который виден в верхней части звезды. Остальные частицы — пионы, мюоны и электроны. Они оставляют тонкие следы, которые видны на фотографии. (Фотография любезно предоставлена Калифорнийским университетом.)

Часто при аннигиляции могут возникать другие частицы. Например, протон и антипротон при аннигиляции могут переходить в мезоны, и этот процесс теперь более вероятен, нежели образование фотонов.

30. Мы утверждаем, что частицы и античастицы во всех наших теориях играют совершенно симметричную роль. Почему же, спросит читатель, античастицы встречаются так редко? Почему так трудно было открыть позитрон, а тем более антипротон? Ответ

*) Опыты, выполненные в конце 50-х годов, показали, что слабое взаимодействие не обладает этим свойством пространственной симметрии относительно замены частиц античастицами. В то время как сильные и электромагнитные взаимодействия удовлетворяют высказанному принципу симметрии, слабые взаимодействия его нарушают. Из-за этого в электромагнитные взаимодействия нейтрино должны входить в иной форме, поэтому можно сказать, что принцип симметрии частиц (но не полностью) верен.

**) Об открытии антипротона см. работу: *Chamberlain O., Segrè E., Wiegand C., Ypsilantis T.* Observation of Antiprotons.— *Phys. Rev.*, 1955, v. 100, p. 947.

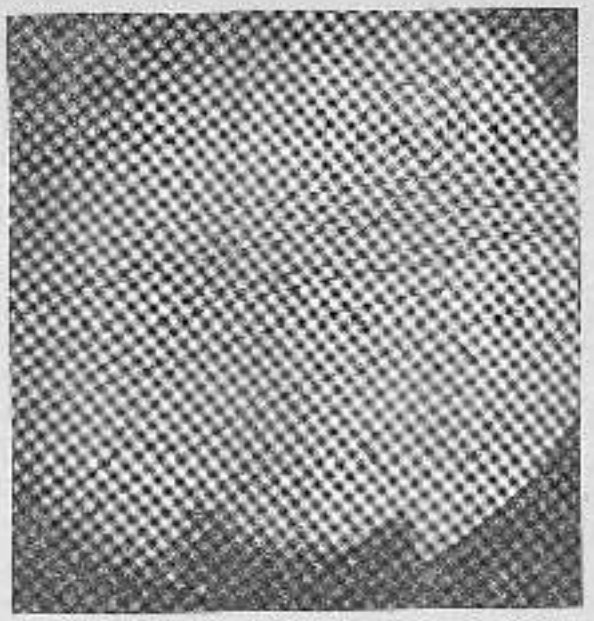


Рис. 30А. Снимок в пузырьковой камере, иллюстрирующий процесс рождения электрон-позитронной пары. Камера помещена в магнитное поле, перпендикулярное плоскости рисунка. (Поэтому можно определить знак заряда частицы.) Электрон и позитрон создают видимые следы, а нейтральные частицы оставляют следы, искривленные благодаря магнитному полю. На снимке видны также заряженные частицы, образующиеся при столкновении нейтрона с ядром углерода. Все фотографии имеют одно общее свойство — размер положительного пузырька на их нижней части больше, чем размер отрицательного. Почему? (Подробный анализ этого снимка дан в книге Сегре.)

Рис. 30В. Схематическое изображение рисунка, который должен получиться в пузырьковой камере, показанной на рис. 30А. Вертикальный след в точке *A* оставлен протоном, образовавшимся при столкновении нейтрона с ядром углерода. Протон и мезон заряжены противоположно, а нейтрон — нейтральной частицей, поэтому он и не оставляет следа. В точке *A* протон аннигилирует с антипротоном. В результате образуется пять заряженных частиц. Первичный антипротон входит в камеру по траектории, показанной пунктирной линией, и оставляет (по-видимому, из-за частых столкновений) короткий толстый след. Позитрон, образовавшийся при аннигиляции, оставляет тонкий след, который виден в верхней части камеры. Электрон, образовавшийся при аннигиляции, оставляет тонкий след, который виден в нижней части камеры. Два мезона оставляют следы, которые видны в средней части камеры. Они образуются при аннигиляции протона и антипротона.

заключается в том, что, хотя законы природы симметричны, наш мир не находится в симметричном *состоянии*: он состоит из протонов, нейтронов, электронов, атомов водорода и т. д., *но не из* антипротонов, антинейтронов, позитронов или антиводородных атомов. Причина такого отсутствия симметрии в том, что симметричное состояние неустойчиво относительно аннигиляции: материя и антиматерия не могут сосуществовать в ограниченном пространстве. Именно потому, что Земля существует, она должна быть построена либо из вещества, либо из антивещества. Она не могла бы быть из смеси.

Интересно решить вопрос: можно ли такое отсутствие симметрии в составе нашего мира распространить *на всю* Вселенную? Возможно, что существуют галактики, состоящие из антивещества; поскольку среднее расстояние между галактиками имеет порядок трех миллионов световых лет, то аннигиляция их не угрожает. На этот вопрос пока невозможно дать ответ, хотя мы склонны считать, что антигалактик не существует. Неизвестно, как возникли галактики, но можно предположить, что они возникли в процессе конденсации некоторого рода хаоса. При этом, однако, трудно понять, как произошло разделение вещества и антивещества, которое привело к образованию галактик и антигалактик. Если мы отвергнем идею антигалактик, остается неразгаданной тайна существования несимметричного мира, в котором преобладает один тип вещества, при условии, что основные законы физики, управляющие этим миром, почти полностью симметричны.

Можно ли «расщепить» фотон?

31. Рассмотрим интересный вопрос, имеющий фундаментальное значение: можно ли фотон с частотой ω расщепить на две части так, чтобы сумма их энергий была $\hbar\omega$, но частота каждой из них оставалась бы равной ω?

Известно, что классическая электромагнитная теория дает весьма полное описание большой совокупности опытов со светом. Мы говорили также, что соотношение между энергией и импульсом «фотона» может быть получено и в рамках этой классической теории. В таком случае, быть может, позволительно сказать, что фотон есть просто волновой пакет или луч волн излучения, поведение которого определяется законами классической электромагнитной теории? Мы задали сейчас вопрос, который имеет фундаментальное значение. *Если* фотон может быть расщеплен в указанном смысле, то вся совокупность идей, которую мы пытались развить в этой главе, окажется тщетной.

Ответить на наш вопрос можно, обратившись к опыту. Чтобы понять, какого рода опыты следует поставить, примем точку зрения классической теории, и затем сделаем ряд предсказаний, которые мы можем проверить на опыте, чтобы решить, справедлива ли классическая картина.

32. Классический луч волн электромагнитного излучения можно образовать с помощью источника излучения, антенны и ключа, который может включать и выключать передатчик. Включим передатчик, работающий на частоте ω, на определенное время. Антенна излучит луч волн такой же длительности. Этот луч волн можно считать классическим аналогом почти монохроматического «фотона». Можно вообразить, что возбужденный атом работает подобно этому устройству.

Снова подчеркнем, что мы стараемся теперь сравнить свойства физического фотона, проявляющиеся в реальных опытах, с поведением нашего классического луча волн. Это означает сравнение объекта *реально существующего в природе* (фотона) с объектом, *в природе не существующим*, каким является луч электромагнитных волн, точно следующий законам классической электродинамики. Мы сравниваем, таким образом, факт с фантазией. Чтобы избежать недоразумений, обозначим реальный фотон словом *фотон*, а воображаемый — словом *луч волн*. Чтобы убедиться в том, что луч волн не является реальностью, рассмотрим некоторые следствия этого представления, которые можно проверить на опыте.

33. Рассмотрим испускание света атомом ртути, возбужденным в результате столкновения. Испускаемый свет имеет частоту ω, соответствующую голубому цвету. Постоянство частоты ω испускаемого излучения понять нетрудно: эта частота соответствует некоторой определенной частоте колебаний в атоме. Невозможно, однако, исходя из классических представлений, понять, почему энергия, уносимая каждым лучом волн, всегда равна в точности $\hbar\omega$. Удары, приводящие к возбуждению атома, по-видимому, не критичны, и энергия, освобождаемая для испускания света, различна от раза к разу. Но еще труднее понять, почему два абсолютно *разных* атома, например атом натрия и атом ртути, испускающие свет различной частоты ω_{Na} и ω_{Hg}, должны испускать лучи волн с энергией $\hbar\omega_{\text{Na}}$ и $\hbar\omega_{\text{Hg}}$ соответственно. С классической точки зрения появление *универсального* коэффициента пропорциональности $\hbar$ кажется весьма таинственным.

Если обратиться к совокупности всех экспериментальных опытов, рассмотренных в гл. 3, станет ясно, что они не могут быть поняты с помощью классической теории. Забудем, однако, на время все, что нам известно об испускании и поглощении света, и обратимся к изучению «изолированного» фотона. Рассмотрим луч волн, испущенных некоторым источником, и будем изучать его свойства с помощью фотоэлемента.

34. Иными словами, мы изучаем фотоэффект. Пусть V_0 — задерживающий потенциал фотоэлемента, а W — работа выхода для фоточувствительного слоя. Если энергия волнового пакета будет больше

$$E_{\text{пад}} = eV_0 + W, \tag{34а}$$

фотоэлемент сработает, и мы услышим некий «щелчок» в регистрирующем устройстве.

Выберем такое значение $V_{\text{ст}}$, чтобы

$$\hbar\omega > E_{\text{мин}} > (2/3)\,\hbar\omega, \qquad (34г)$$

где ω — частота света. (Мы произвольно взяли 2/3 как число, большее 1/2, но меньшее единицы.) Если вся энергия пучка волн сконцентрируется на фотоэлементе, то мы услышим щелчок. Но если фотоэлемента достигнет лишь половина энергии, щелчка не произойдет, так как переданной электрону энергии будет недостаточно, чтобы он мог преодолеть задерживающий потенциал.

35. Классическая волновая картина позволяет расщепить луч волн с помощью устройства, показанного на рис. 35А. Свет от источника очень малой интенсивности падает на *расщепитель пучка*, представляющий собой полупрозрачное посеребренное зеркало или соответствующую расщепляющую призму. Можно добиться того, чтобы интенсивности прошедшего и отраженного пучков были равны и чтобы интенсивность каждого из них равнялась половине интенсивности первичного пучка, проходящего через щель. Так что это возможный реальный эксперимент, в результате которого мы обнаружим, что *энергетические* обоих пучков удовлетворяют поставленным условиям.

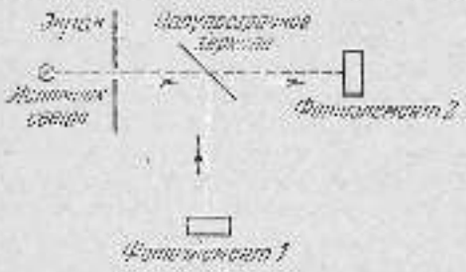


Рис. 35А. Свет от источника с низкой интенсивностью падает на полупрозрачное зеркало под углом 45°. Зарегистрируются ли при этом отдельные фотоны?

Классическое объяснение этого результата весьма просто: падая на зеркало, каждый луч волн расщепляется на две части.

Рассмотрим, что происходит при падении на зеркало одиночного цуга волн. По классической модели он должен расщепиться на две части таким образом, чтобы энергия, переносимая проходящей частью цуга волн, была равна половине первичной энергии. Но тогда фотоэлемент 2 никогда не сработает!

Этот вывод, следующий из классической теории, находится в полном противоречии с опытом. Проходящий свет остается голубым, его частота равна ω, и, пока $\hbar\omega \gg E_{\text{мин}}$, регистратор фотоэлемента 2 щелкает. Это показывает, что энергия прошедшего через зеркало света по-прежнему существует в виде порций $\hbar\omega$. Введение в пучок зеркала приводит лишь к тому, что *скорость счета* уменьшается в два раза.

36. Насколько убедительны доказательства нерасщепляемости фотона, следующие из опыта, показанного на рис. 35А, или из других подобных опытов? Их можно считать *весьма убедительными*. Мы являемся свидетелями многих подобных опытов. Любой оптический прибор, в котором имеется фотоэлемент или фотопластинка, можно рассматривать как прибор, с помощью которого мы безуспешно пытаемся расщепить фотон. Нередкий из таких опытов заключается в наблюдении фотоэффекта на различных расстояниях от источника

света. Если этот подобен аппарат, он должен испускать свет в виде цуга сферических волн. Интенсивность испущенного света пропорциональна $1/r^2$, и по классической картине это означает, что энергия, переносимая одиночным цугом волн через единичную поверхность, находящуюся на расстоянии r от источника, пропорциональна $1/r^2$. Поэтому, поскольку фотокатод имеет определенную площадь поперечного сечения, то, поместив его на достаточно большом расстоянии, уже, видимо, можно добиться того, чтобы энергия, попадающая на него, была очень мала. Можно было думать, что при данном задерживающем потенциале фотоэлемент перестанет регистрировать свет, как только расстояние превзойдет определенный предел. Но этого, однако, мы не наблюдаем. В действительности только скорость счета уменьшается по закону $1/r^2$. Возможно, наиболее удивительным примером является наблюдение фотоэлектрического эффекта от света далеких звезд. Цуг волн был испущен сотни тысяч лет назад и прошел огромные пространства космоса. И только малая часть энергии этого цуга может быть уловлена фотоэлементом, расположенным за телескопом. Тем не менее количество энергии, передаваемой электрону фотоэлемента, оказывается равным $\hbar\omega$, как и в том случае, когда источником света является лампа, расположенная на столе, рядом с фотоэлементом.

37. Всякая попытка объяснить эти факты, предположив, что мы наблюдаем некий кумулятивный эффект, когда очень большое число дробных фотонов передает свою небольшую энергию электрону фотокатода, который в конце концов, накопив достаточную энергию, оказывается выброшенным, совершенно несостоятельна.

Если бы в этом состояло объяснение, то кумулятивный эффект работал бы и при таком задерживающем потенциале, как, например, $E_{\text{мин}} \gg 100\,\hbar\omega$, а это, конечно, не то, что мы наблюдаем: если задерживающий потенциал достаточно высок, фотоэлемент *никогда* не срабатывает.

38. Итак, экспериментальные факты о фотоэффекте приводят к неизбежному выводу, что почти монохроматический фотон не может расщепиться на два фотона той же частоты, по меньшей энергии: в этом смысле фотоны не ведут себя подобно классическим цугам волн. Такой вывод налагает дополнительное подтверждение в экспериментальных данных о комптон-эффекте, рентгеновском излучении, образовании пар и их аннигиляции, рассмотренных в этой главе. Теоретический анализ этих явлений был основан на предположении, что соотношение $E = \hbar\omega$ всегда справедливо, т. е. что дробных фотонов не существует. Это предположение позволило нам объяснить все экспериментальные факты.

По-видимому, в классических идеях что-то ошибочно, и необходимо найти, в чем же их следует изменить. Воспользуемся, однако, от слишком поспешных выводов. Обратимся лучше к экспериментам другого типа, также связанным с проблемой «расщепления» фотона. Пока что наши рассуждения привели нас к заключению, что в одном определенном опыте фотон *нельзя* расщепить. Это не исключает возможности его «расщепления» в некоторых других опытах.

39. Рассмотрим дифракцию на двух щелях (рис. 39А). Непрозрачный экран имеет две щели U и L, перпендикулярные к плоскости рисунка. Источник света S освещает обе щели светом (фотонами) точно определенной частоты ω. Для простоты допустим, что щели одинаковы и их ширина мала по сравнению с длиной волны $\lambda=2\pi c/\omega$, а расстояние $2a$ между щелями сравнимо с длиной волны.

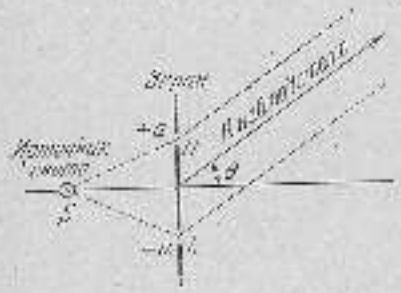


Рис. 39А. Схема, иллюстрирующая дифракцию на двух щелях. Принципиально отдельный фотон может пройти через одну из щелей или через обе, как следует из классической картины (щели узки и волновой пучок будет на интерференционную картину влиять при уменьшении интенсивности падающего света).

Будем измерять интенсивность рассеянного света в зависимости от угла рассеяния θ на расстоянии r от экрана, которое велико по сравнению с расстоянием $2a$. Предположим, что измерения интенсивности выполняются с помощью фотоэлемента. В этом случае интенсивность пропорциональна числу отсчетов фотоэлемента.

40. Рассмотрим предсказания классической электромагнитной теории о распределении интенсивности справа от экрана. Из нашего предположения о малости ширины щели по сравнению с длиной волны следует, что если одна из щелей закрыта, то угловое распределение рассеянного другой щелью излучения является плавной функцией угла θ. Обозначим через A_1 амплитуду рассеянной волны при наличии лишь *одной* щели, верхней или нижней (рис. 39А). Амплитуда $A_1=A_1(r,\theta)$ зависит от r и θ, и, воспользовавшись комплексным представлением, можно написать

$$A_1=f(r,\theta)\exp\{-i\omega t\}, \qquad (40a)$$

где $f(r,\theta)$ определяет *пространственную* зависимость амплитуды.

В опыте, показанном на рис. 39А, дифрагированная волна на большом расстоянии от экрана является суммой двух волн от обеих щелей. Их амплитуды равны, но волна от нижней щели задержана по фазе на величину $(4\pi a/\lambda)\sin\theta$ относительно волны от верхней щели. Полная амплитуда

$$A=f(r,\theta)\exp(-i\omega t)\left[\exp\left\{i\frac{\omega a}{c}\sin\theta\right\}+\exp\left\{-i\frac{\omega a}{c}\sin\theta\right\}\right]=$$
$$=2A_1\cos\left\{\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta\right\}. \qquad (40b)$$

Интенсивность дифрагированного излучения пропорциональна квадрату модуля амплитуды, и соответственно

$$I(r,\theta)=|A|^2=4I_0(r,\theta)\cos^2\left\{\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta\right\}, \qquad (40c)$$

где

$$I_0(r,\theta)=|A_0|^2 \qquad (40d)$$

— интенсивность от одной щели. Таким образом, интенсивность $I(r,\theta)$ от двух щелей равна произведению интенсивности от одной щели на множитель $4\cos^2[(2\pi a/\lambda)\sin\theta]$, который возникает вследствие интерференции волн, посылаемых обеими щелями. Заметим, что если $4\,a/\lambda\gg 1$, то благодаря интерференции в некоторых направлениях интенсивность равна нулю. В других направлениях она в *четыре* раза больше интенсивности от одной щели. Нас интересует лишь интерференционный эффект, описываемый выражением (40c). Связь интенсивностей I и I_0, заданная этим выражением, есть следствие классических волновых представлений.

41. Выше было показано, что фотон не может быть «расщеплен». На этом основании нам могло бы показаться, что классическое выражение (40c) неверно. Вот схема наших рассуждений: фотоны не могут быть расщеплены, поэтому фотон может пройти *либо* через одну, *либо* через другую щель. Допустим, что он прошел через верхнюю щель. В этом случае существование нижней щели не может повлиять на дифракцию фотона, и распределение интенсивностей от всех фотонов, прошедших через верхнюю щель, будет задано выражением $I_0(r,\theta)$. То же можно сказать и о фотонах, прошедших через нижнюю щель. Из всего можно сделать заключение, что полная интенсивность от обеих щелей должна быть равна

$$I^*(r,\theta)=2I_0(r,\theta). \qquad (41a)$$

Эта интенсивность обозначена через I^*, чтобы показать, что она получена в результате отказа от классических идей, которые привели нас к выражению (40c). Читатель должен заметить, что мы не утверждаем, что обсуждение вопроса о распределении фотона *правильно* нас к выводу (41a); мы лишь хотели исследовать эту возможность.

42. Эксперимент самым определенным образом свидетельствует в пользу предсказаний (40c), полученного на основе волновых представлений. Простой опыт дифракции на двух щелях является прототипом целого класса интерференционных опытов, к которым следует отнести опыты с дифракционными решетками и опыты по дифракции рентгеновского излучения на кристаллах.

Согласно формуле (41a), волны, дифрагировавшие от обеих щелей, не интерферируют, и если это верно для эксперимента с двумя щелями, то никакой интерференции в опыте с дифракционными решетками или кристаллами наблюдаться также не будет.

Прежде чем отвергнуть формулу (41a) как совершенно неверную, подумаем, можно ли считать интерференцию, описываемую формулой (40c), результатом некоторого взаимодействия между *несколькими* фотонами. Если интенсивность источника света достаточно велика, то в каждый данный момент можно иметь дело с несколькими фотонами в пространстве щелей. Возникает вопрос: не является ли интерференция каким-"многофотонным» эффектом? Такого рода

рассуждения могут привести нас к предположению, что предсказание (41г) справедливо для крайне слабых источников света, когда фотоны проходят через систему по одному, а предсказание (40в) имеет силу для достаточно интенсивных источников. Другими словами: верно ли, что дифракционная картина меняется от (40в) к (41а) при уменьшении интенсивности источника?

На этот вопрос дается отрицательный ответ. Нет ни малейших указаний на то, что характер дифракционной картины зависит от интенсивности излучения. Не может быть сомнения, что вся совокупность дифракционных и интерференционных опытов подтверждает идеи, положенные в основу формулы (40в).

43. Опыт, непосредственно относящийся к этой проблеме, был поставлен Г. Тэйлором [*]) в 1909 г. Г. Тэйлор фотографировал дифракционную картину от иглы, освещаемой крайне слабым источником света. В одном из его опытов время экспозиции было равно 2000 часам, т. е. больше 3 месяцам. В этом случае интенсивность настолько мала, что в области иглы в каждый данный момент находится очень малое число фотонов. Несмотря на это, дифракционная картина оказалась столь же полной и резкой, как и в случае сильного источника света. *Только* теоретический анализ опыта Тэйлора затруднителен (в частности, потому, что условия опыта описаны недостаточно подробно), и мы не будем их заниматься. Тем не менее несомненно, что в его опыте интенсивность света была столь мала, что если бы характер дифракционной картины менялся при уменьшении числа фотонов, то это было бы замечено. Как мы сказали, ни малейших следов такого явления обнаружено не было.

Необходимо подчеркнуть, что наша уверенность в том, что дифракционная картина возникает не от «взаимодействия большого числа фотонов», покоится не на одних лишь опытах Тэйлора. Она опирается на большое число других интерференционных опытов, которые можно понять только на основе волновой теории, независимо от интенсивности излучения, с которой эти опыты выполнены.

44. Попытаемся теперь наложить основы простой теории, дающей возможность понять рассмотренные выше экспериментальные факты.

1) Почти монохроматическое излучение с частотой ω, испускаемое источником света, можно представлять себе состоящим из «пакетов» излучения, которые мы называем фотонами.

2) Распространение фотонов в пространстве правильно описывается макроскопическими уравнениями классической электромагнитной теории. В этом описании каждый фотон считается классическим дугом волн, определенным векторными полями $E(r, t)$ и $B(r, t)$, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла с граничными условиями, вытекающими из рассматриваемой задачи. Волна, падающая на полупрозрачное зеркало или на экран с двумя щелями, действительно «расщепляется» на две волны, которые могут интерферировать друг с другом, как этого требует классическая теория.

3) Неправильно интерпретировать сумму квадратов амплитуд E и B как плотность энергии в пространстве, в котором движется фотон. От этой идеи, принадлежащей классической физике, необходимо отказаться. Вместо этого каждую величину, *квадратично* зависящую от амплитуды волны, следует интерпретировать как величину, *пропорциональную вероятности* какого-то процесса. Например, интеграл от суммы квадратов амплитуд E и B по некоторой конечной области пространства не равен энергии, внесенной фотоном в эту область. Он пропорционален вероятности обнаружить в этой области фотон, если мы попытаемся «поймать» его с помощью, например, фотоэлемента. Аналогично, вычисленный в классической теории поток излучения через щель в экране следует интерпретировать в нашей теории как величину, пропорциональную вероятности того, что фотон будет обнаружен, если мы поместим непосредственно за щелью фотоэлемент.

4) Если где-то в пространстве мы зарегистрировали фотон (например, с помощью фотоэлемента), то энергия, переданная детектирующему устройству, всегда равна $\hbar\omega$. Поскольку вероятность обнаружить фотон пропорциональна сумме квадратов амплитуд E и B, то мы приходим к выводу, что классическая плотность энергии, проинтегрированная по области, равна произведению энергии фотона на вероятность нахождения фотона в этой области. Таким образом, в случае стационарного источника света, испускающего большое число фотонов, *средняя* энергия в данной области равна энергии, вычисленной по классической теории.

45. Итак, мы отказались от классической электромагнитной теории. Новые идеи заключаются в том, что величины, квадратично зависящие от амплитуд электромагнитного поля, интерпретируются как *вероятности*. Мы можем продолжать применять к распространению фотонов в пространстве уравнения Максвелла, но классически вычисляемые плотность энергии или ее поток интерпретируются нами по-новому — как *средние* значения, наблюдаемые с очень большим числом фотонов. Поэтому в тех опытах, где мы измеряем средние значения и не пытаемся наблюдать отдельные фотоны, классическая теория вполне справедлива. С другой стороны, при наблюдении отдельных фотонов, например с помощью фотоэлемента, становится очевидной ограниченность классической теории.

46. Рассмотрим теперь, как в свете наших идей объяснить наблюдаемые экспериментальные факты. Обратимся к опыту, обсуждавшемуся в п. 36. Там наблюдался фотоэффект на различных расстояниях от стационарного источника света. Предполагалось, что мы имеем дело с почти монохроматическим источником, испускающим в среднем N фотонов за единицу времени с частотой ω. Фотоэлемент расположен на фиксированном расстоянии от источника и связан со счетчиком так, что можно считать число фотонов, упавших на фотокатод.

[*]) *Taylor G. I.* Interference Fringes with Feeble Light. — Proc. Camb. Phil. Soc., 1909, v. 15, p. 114.

Рассмотрим теперь фотон, испущенный источником. Его можно считать цугом волн конечной протяженности, распространяющимся во всех направлениях и несущим энергию, равную $\hbar\omega$. Пользуясь *классической* теорией, вычислим полный поток энергии E_c, который придет к фотоэлементу с нашим цугом волн. Эта энергия является малой частью, $q = E_c/\hbar\omega$, всей излученной энергии. Однако в нашей новой интерпретации величины, зависящие квадратично от амплитуды волны, определяют *вероятность* того, что фотон достигнет фотоэлемента. (Для простоты предположим, что эффективность нашего фотоэлемента равна 100%. В этом случае q равно вероятности срабатывания счетчика при испускании фотона источником.)

Невозможно предсказать, будет ли данный испущенный источником фотон зарегистрирован фотоэлементом, но можно утверждать, что вероятность регистрации равна q. *Если* счетчик сработал, то фотоэлемент получил от источника количество энергии, равное $\hbar\omega$. Отсюда следует, что *средняя* мощность, переносимая от стационарного источника к фотоэлементу, равна $W_q = qN\hbar\omega = KE_c$. Эта величина совпадает с предсказанной классической теорией.

Вычисленная классически величина E_c, конечно, пропорциональна $1/r^2$, где r — расстояние от источника до фотоэлемента. Отсюда следует, что и величина $q = E_c/\hbar\omega$ также пропорциональна $1/r^2$, а поскольку скорость счета фотоэлемента равна qN, то и эта величина также обратно пропорциональна квадрату расстояния, что совпадает с результатом наблюдений.

47. *Многие находят в приведенных выше рассуждениях нечто парадоксальное. Вот их доводы.* Допустим, что расстояние r очень велико, скажем равно световому году. Испущенный фотон распространялся подобно сферической оболочке (рис. 47А). За то время, пока волна дойдет до детектора, ее энергия распределится в большой области в пространстве, например в сферической оболочке радиусом в световой год. Каким же образом эта энергия может внезапно сконцентрироваться на фотоэлементе? Чтобы энергия с «хвостового конца» оболочки дошла до фотоэлемента, должны пройти световые годы, иначе нарушается принцип, по которому никакой сигнал не может распространяться со скоростью, большей скорости света.

Ошибочность этого рассуждения связана с уверенностью в справедливости классического выражения для плотности энергии через амплитуды электрического и магнитного полей. Не следует забывать, что вообще вся концепция электромагнитного поля в физике имеет целью описание взаимодействия *частиц*. В томе II этого курса *) мы показали, что это *удобная* концепция. Особенно удобно иногда *считать* (в макроскопических случаях), что энергия распределена в пространстве с плотностью, пропорциональной квадрату амплитуды поля. Однако, как было показано в томе II, не существует никаких физических фактов, позволяющих понимать эту концепцию буквально. Теперь мы знаем, что классическое выражение для плотности энергии относится к *средним* значениям

*) *Пасколл Я.* Электричество и магнетизм.— 3-е изд.— М.: Наука, 1983.

этой плотности, которое мы наблюдаем для очень большого числа фотонов, но не описывает плотность энергии, связанную с одиночным фотоном.

Реальная проблема заключается в следующем: каковы законы, управляющие переносом энергии от атома в источнике света до

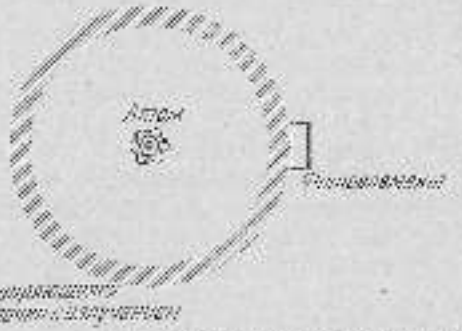


Рис. 47А. Атом в центре рисунка испускает свет год назад. Сферическая оболочка, на которой энергия излучения равна световому году. На такой же расстоянии — вправо на рисунке установлен фотоэлемент. Его приближенно отличная площадь, на которую энергия от источника попадает (вероятность срабатывания фотоэлемента). Почему энергия, попадающая таким образом от противоположной части оболочки, достигает фотоэлемента за время, меньшее чем год назад? «Парадокс» исчезает, если мы откажемся от классической идеи, что плотность энергии пропорциональна квадрату амплитуды поля. В квантовой механике полная энергия во всякой точке фотоэлементу управляется вероятностным законом и квадрат амплитуды поля интерпретируется как плотность вероятности.

электрона в детекторе? Именно это мы изучаем, и некоторые свойства новых законов мы уже обнаружили.

48. Вернемся к дифракционному опыту, рассмотренному в п. 39—42 (рис. 39А). Предположим, что с помощью фотоэлемента мы наблюдаем фотоны в данном направлении θ. Измеряя скорость счета при разных углах θ, мы можем получить дифракционную картину. Допустим, что наш счетчик сработал.

Вопрос: через какую щель прошел фотон? *Ответ*: он прошел *через обе* щели — частично через щель U, частично через щель L.

Этот ответ вполне в духе нашей теории, принципы которой изложены в п. 44. Если бы объектом исследования был, скажем, бильярдный шар, движение которого определено законами классической механики, то подобный ответ был бы парадоксальным. Но мы имеем дело с фотонами, и такой ответ не удивителен; он попросту отвечает тому, что действительно происходит.

Вопрос: можно ли так устроить, чтобы знать, через какую щель прошел фотон? *Ответ*: да, и очень просто. Закроем щель U; тогда мы знаем, что все зарегистрированные фотоны прошли через щель L. При этом, конечно, мы уже не увидим дифракции от двух щелей, а будем наблюдать дифракцию от одной щели. Читатель скажет, что это не отвечает на заданный вопрос. Проделаем этот опыт с помощью более хитрого устройства, не прибегая к закрыванию одной щели. Другими словами: мы хотим получить и *наблюдать* дифракционную картину от двух щелей в тех опытах, в каком

она существовала до хитрого устройства, но тем не менее иметь возможность указать щель, через которую прошел данный фотон. Можно ли это сделать?

Допустим, что это возможно. Тогда мы могли бы просто отбросить все отсчеты, при которых фотон прошел через щель U, и построить дифракционную картину по остальным отсчетам, отвечающим прохождению фотонов через щель L. Что представляла бы собой такая картина? Она должна была бы соответствовать дифракции от одной щели, ибо мы уверены, что через щель U ничего не прошло, а это равносильно закрытию этой щели. *Все* сказанное справедливо и для другой щели. *Все* отсчеты, рассмотренные совместно, дали бы картину, рассмотренную в п. 41, т. е. она совпадала бы с тех, что мы действительно наблюдаем в случае дифракции от двух щелей. Итак, в опыте, где мы наблюдаем дифракцию от двух щелей, мы не можем указать, через какую щель прошел фотон. Такая дифракционная картина может возникнуть лишь в том случае, если фотон проходит через обе щели, и вопрос о том, через какую именно щель прошел фотон, *не имеет смысла*.

49. Мы узнали много интересного о свойствах фотона. Изложенная в п. 44 простая теория представляет собой лишь первое приближение к квантовомеханической теории электромагнитного излучения. Но сказали мы не все. Мы ничего не сказали, в частности, о процессе, происходящем с участием нескольких фотонов. Цель этой главы — лишь в простой и предварительной формулировке квантовомеханических идей, достаточной, однако, для понимания основных опытов с фотонами. Этой цели мы достигли. Суть изложенной теории в том, что *классическое* волны, связанной с фотоном, рассматривается в рамках классической электромагнитной теории, тогда как все величины, квадратично зависящие от амплитуды, интерпретируются через вероятности. Фотон может быть расщеплен в том смысле, что волну можно разложить с помощью полупрозрачных зеркал или других устройств на две или большее число частей, как это происходит в классической теории. Однако мы не можем с помощью, например, фотоэлемента зарегистрировать часть почти монохроматического фотона с частотой ω, несущего энергию $\hbar\omega$, и в этом смысле фотон *неделим*. Эти идеи представляют собой очевидный отказ от идей классической электромагнитной теории. Было бы, однако, преувеличением утверждать, что мы *полностью* отказались от классической теории. Скорее мы обнаружили ее ограниченность.

Мы хотим подчеркнуть, что в обсуждавшихся экспериментальных опытах нет ничего парадоксального или таинственного. Обнаруживаемые в опыте свойства природы, естественно, поражают нас, но причина этого в предвзятых идеях, на которых мы воспитаны. Нам кажется, что мы знаем, что должно происходить, и бываем обескуражены, когда действительность обманывает наши ожидания. Следует, однако, привыкнуть принимать вещи такими, какие они есть, и видеть задачу теории в простом и согласованном описании явлений.

Читатель должен понимать, что теоретические идеи этой главы возникли из анализа экспериментальных фактов. Зная результат одного опыта, мы не могли бы с помощью одной лишь логики предсказать результат другого. Возможно, в некоторых случаях нам помогла бы *догадка*, но это другой вопрос. Вряд ли можно указать причины, по которым дело происходит именно так, как описано в этой главе. Вполне могло бы случиться, что расщепления фотона существовало бы или что дифракционная картина могла бы свой вид при уменьшении интенсивности света.

50. В заключение главы мы обращаем внимание читателя на замечательное теоретическое значение и познавательную ценность оптического набора, состоящего из фотоэлементов, электронных счетных схем, дифракционных решеток, монохроматических источников света и некоторых других стандартных оптических устройств. Такой набор дает возможность изучить много фундаментальных вещей.

Задачи

1. Ядро или атом массой M_2 испускает фотон. Конечное ядро (образовавшееся после испускания фотона) имеет массу M_1. Испущенный фотон наблюдается в системе координат, где начальное ядро покоилось; пусть частота фотона равна ω. Введем величину $\omega_0=(M_2-M_1)c^2/\hbar$.

а) Покажите, что

$$\omega=\frac{M_2+M_1}{2M_2}\,\omega_0=\omega_0\left[1-\frac{\omega_0\hbar}{2Mc^2}\right].$$

б) Вычислите $(\omega_0-\omega)/\omega_0$ для желтой линии натрия (λ для ультрафиолетовой линии 1849 Å, испускаемой ртутным паром, равна $^{80}_{78}$Hg.

Приведенная формула описывает *эффект отдачи* при испускании фотона. Фотон всегда имеет меньшую частоту, чем та, которую он должен был бы иметь при бесконечно тяжелом ядре M_1. Для оптических фотонов, испускаемых атомом, эффект крайне мал.

2. Рассмотрим процесс, обратный обсуждавшемуся в задаче 1. Итак, ядро с массой M_1, находящееся в покое в лабораторной системе координат, поглощает фотон с частотой ω. Конечная масса атома (или ядра) равна M_2. Опять положим $\omega_0=(M_2-M_1)c^2/\hbar$. Получите соотношение между ω, ω_0, M_1 и M_2. Заметим, что для малых относительных изменений массы частота ω очень близка к ω_0.

3. Определите по графику на рис. 23А этой главы отношение $\Delta\nu/\nu$ с точностью, допускаемой точностью графика. Скорость света считайте известной.

4. Рассмотрите кривые Комптона на рис. 20А. Абсцисса графика соответствует пропорциональна длине волны. Воспользовавшись третьим законом, постарайтесь предсказать смещение максимума для второго и четвертого графиков. Сравните предсказанное смещение с кривыми.

5. Рассмотрите графики на рис. 16А. Можете ли вывести, что абсолютное выражение в двух шкалах — скорость и частота — верно для движущихся возбужденных ядер ^{57}Fe, равная 14,4 кэВ. Можете ли вы, зная это, составить соотношение скорости и частоты для обеих шкал?

6. Объясните выражение на заштрихованную особенность рис. 18А. Эффект отдачи, о котором говорилось в задаче 2, отсутствует. Это явление известно как эффект *Мёссбауэра* (по имени открывшего его ученого *). Можете ли вы дать качественное

*) *Mössbauer R. L.* Kernresonanzfluoreszenz von Gammastrahlung in ^{191}Ir.— Zs. f. Phys., 1958, v. 151, p. 124 (перепечатой статьи см. в книге: *Френкель Ф.* Эффект Мёссбауэра.— М.: Атомиздат, 1961).

Мёссбауэр Р. Л. Резонансное ядерное поглощение γ-квантов в твердых телах.— УФН, 1960, т. 72, с. 653.

будь обязательно этому явлению. Познакомьтесь с ним, порывшись в литературе; это интересное явление.

7. У излучения с длиной волны 0,710 Å рентгеновская трубка испускает тонкий монохроматический пучок. Рассеянное излучение наблюдается под углом 60° к направлению пучка. Какую длину волны вы ожидаете?

8. Пусть оказалось, что при аннигиляции электрон-позитронной пары образовались два фотона. Если бы покоящуюся систему покоя электрон-позитронной пары (мы предполагаем, что аннигиляция происходит тогда, когда электрон и позитрон находятся почти в покое), то чему равны возможные значения энергии фотона?

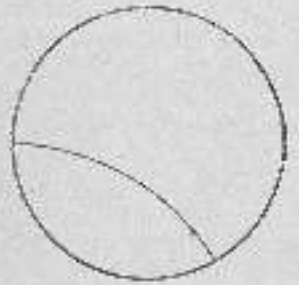
9. Фотон падает перпендикулярно к поверхности раздела вакуум — однородное диэлектрическое вещество с показателем преломления n.

а) Какова частота и энергия фотона в диэлектрике?

б) Можно ли считать фотону импульс в диэлектрике? Если да, то написать выражение для импульса. Как он связан с длиной волны и чему равна длина волны в диэлектрике?

10. Заряженная частица, движущаяся в вакууме с постоянной скоростью, не испускает электромагнитного излучения (Френель). Такое излучение запрещено законами сохранения энергии и импульса. Будет ли запрещена также частица, движущаяся в диэлектрике с постоянной скоростью, большей скорости света в диэлектрике, испуская фотоны? Оказывается, что это возможно, и такое излучение называется излучением Черенкова. (Здесь мы интересуемся только балмеровской серией и выпустим, в не детальный спектральный состав.) Фотоны излучаются под определенным углом к направлению движения частицы. Определите этот угол, если показатель преломления среды равен 1,5, частица имеет заряд и энергию 5 ГэВ и фотон находится в оптической области. Детекторы заряженных частиц, основанные на регистрации черенковского излучения, широко используются в физике высоких энергий.

11. а) Если заряженная частица движется в плоскости, перпендикулярной к направлению однородного магнитного поля, то ее траектория представляет собой окружность. Предположим, что частица имеет элементарный заряд, помните, что скорость частицы пропорциональна произведению Br (где B — индукция поля, а r — радиус траектории). Найдите постоянный множитель, который позволит выразить импульс в МэВ/с, а величину Br в Тл·см (c — скорость света).



К задаче 11. Около этого... получивших в камере Вильсона. Заряженная частица движется в магнитном поле, направленном по плоскости рисунка. Перпендикулярно ли этот след позитрону? В каком направлении он движется? Может ли этот след принадлежать электрону, движущемуся в противоположном направлении? Почему Андерсон был уверен в том, что снимок (рис. 20А) сделан позитроном, а не электроном?

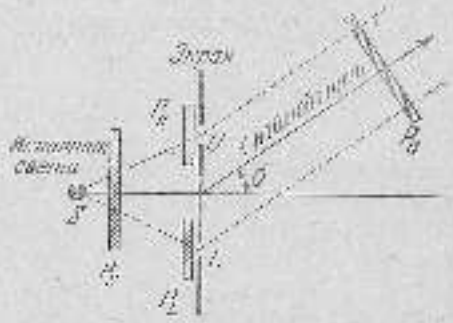
б) Аналогичную свой снимок, полученный в камере Вильсона (см. рис. 20А этой главы), Андерсон определил энергию позитрона, зная магнитное поле и кривизну траектории. Импульсы, измеренные им для двух частей траектории, оказались равными $Br = 2,1 \cdot 10^2$ Гс·см и $Br = 7,5 \cdot 10^2$ Гс·см. Покажите, что соответствующие энергии равны 63 и 23 МэВ.

в) Можно ли по фотографии следа частицы в камере Вильсона, показанной на рисунке к этой задаче, определить знак заряда и направление движения частицы? Как Андерсон понял, что частица на его снимке (рис. 20А) представляет собой позитрон, а не электрон, движущийся в обратном направлении?

г) На рис. 20А магнитное поле направлено перпендикулярно к плоскости рисунка. Как оно направлено на последнем снимке?

Обратитесь к работе Андерсона (Phys. Rev., 1933, v. 43, p. 491), чтобы понять, почему он сделал возможность, что след на полученной им фотографии принадлежит протону.

12. Рассмотрим более частный вариант опыта с дифракцией на двух щелях, обсуждавшегося в п. 32—42 (см. рисунок к этой задаче). Рассмотрим поляризационные фильтры перед щелями, перед экраном и перед наблюдателем.



К задаче 12. Условия ... с. 30А. Поляризующие фильтры расположены следующим образом: P_E — перед источником, P_{U} и P_L — перед верхней и нижней щелями; P_O — перед наблюдателем. Сколько ... будут наблюдаться при различном наборе фильтров?

Задача заключается в том, чтобы найти выражение для интенсивности, аналогичное уравнению (40г), при разных комбинациях фильтров. Предположим, что источник испускает неполяризованный свет и что щели нечувствительны к состоянию поляризации проходящего света. Рассмотрим следующие случаи:

Состояние			
P_E	P_U	P_L	P_O
отсутствует	отсутствует	горизонтальная	отсутствует
отсутствует	горизонтальная	вертикальная	отсутствует
круговая	горизонтальная	вертикальная	круговая
круговая	горизонтальная	горизонтальная	круговая
круговая	горизонтальная	вертикальная	отсутствует

В этой таблице «горизонтальная» и «вертикальная» поляризации обозначают, что фильтр пропускает свет, поляризованный соответственно в горизонтальном или вертикальном направлениях; «круговая» — фильтр ... испускает поляризованный свет.

Дополнительная литература

Зельдович Я. К квантовой теории излучения.— УФН, 1966, т. 90, с. 371.

де Бройль Л. Волны и кванты.— УФН, 1957, т. 178.

Фейнман Р. Характер физических законов.— М.: Мир, 1968.

Сворн Э., Вилкоп К. Антиматерия.— Над чем думают физики, 1963, вып. 2, с. 58.

ГЛАВА 6

МАТЕРИАЛЬНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Волны де Бройля

1. В этой главе мы изучим свойства материальных частиц, т. е. частиц с ненулевой массой покоя. К таким частицам относятся, например, электроны, протоны, нейтроны, мезоны, молекулы и т. д.

Материальные частицы обладают волновыми свойствами. Это простой экспериментальный факт, широко известный в настоящее время. Вспомним, однако, что в свое время волновые свойства электрона оказались большой неожиданностью. Причина удивления кроется в том, что физики привыкли считать электрон во всем подобным классической частице. Ранние опыты с электронами не противоречили такой модели, и до 1927 г. не было ясных экспериментальных указаний на волновые свойства электрона.

Волновые свойства фотона были открыты раньше, чем его корпускулярные свойства. Изучение электрона шло в обратном порядке. Такая историческая последовательность привела к тому, что у неспециалистов стало почти всеобщим представление, что свет состоит из волн, а электроны являются частицами. Картина эта неполная. В будущем, несомненно, станет общеизвестным, что фотоны, электроны и вообще *все* частицы похожи друг на друга в том смысле, что обладают *некоторыми* свойствами волн и *некоторыми* свойствами корпускул.

2. Интересно проследить предсказание и экспериментальное обнаружение волновых свойств вещества, ибо это было великим открытием в физике. В первой части главы мы будем почти точно руководствоваться исторической последовательностью событий и просим читателя забыть все, что ему уже известно о волновых свойствах частиц. Вернемся к ситуации, существовавшей примерно в 1923 г. В то время уже было достаточно много известно о корпускулярных свойствах электрона, но его волновые свойства были неизвестны. Однако тот факт, что фотон обладает некоторыми корпускулярными свойствами, был известен.

Нам предстоит выяснить, может ли материальная частица, например электрон, иметь волновые свойства. Для ответа на этот вопрос следует обратиться к опыту, но предварительно мы рассмотрим некоторые теоретические идеи.

3. Желание связать в одном объекте свойства волны и частицы может казаться очень странным. Мы не утверждаем, что можем логически *доказать* такую возможность. Существуют, однако, некоторые оптические аналогии, к которым мы можем обратиться. Рассмотрим прохождение света через некоторый оптический прибор. В принципе мы можем понять его свойства, решив уравнения Максвелла с подходящими граничными условиями. Они позволяют описать распространение волн от источника света до его изображения. Но имеется более простой способ рассмотрения свойств оптических приборов — метод лучевой, или геометрической, оптики.

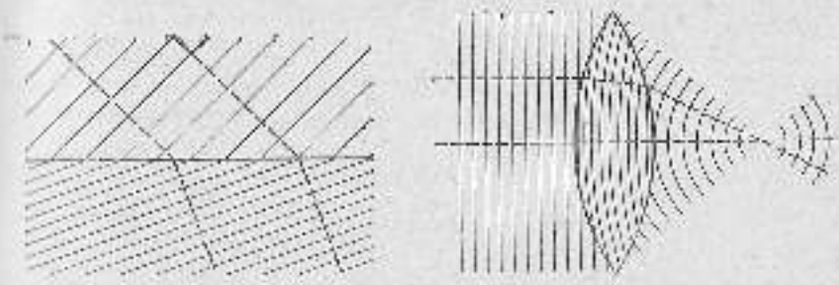


Рис. 5А. Прохождение плоской волны через [illegible] с различными показателями преломления. Волновые фронты, т. е. поверхности постоянной фазы, представляют собой [illegible]. Лучи показаны штриховыми линиями. Отражение лишь показано лучи. Они перпендикулярны к волновым фронтам. Можно сказать, что они описывают траекторию частиц. Для [illegible] волновых фронтов [illegible] траекторий, за которыми [illegible] рисунке показаны две. Волна частично отражается, но отражение [illegible] на рисунке, чтобы не загромождать рисунок.

Рис. 5Б. Опыт [illegible] предсказанное в тексте для измерения расстояний, пропорциональных [illegible]. Света [illegible] плоской волны. Два луча [illegible] фокусируются в точке [illegible]. Сильное волновое [illegible] [illegible] траектории. Можно обнаружить некоторые [illegible] эффекты, они не связаны с [illegible] частицы и показывают, что [illegible] не существует. Расчет [illegible] [illegible] [illegible]

ставим нашу волну комплексной волновой функцией:

$$\psi(x, t) = A \exp\,(ix\cdot k - i\omega t), \tag{4a}$$

где A — постоянная амплитуда волны, k — волновой вектор; ω — частота. Наша задача — попытаться угадать связь между параметрами k и ω, характеризующими волну, и параметрами p, E и m, характеризующими частицу.

Волна, описываемая волновой функцией $\psi(x, t)$, является плоской. Уравнение плоскости постоянной фазы имеет вид $(x\cdot k - \omega t) = \mathrm{const}$. Эта плоскость, а значит и волна, распространяется с *фазовой скоростью*

$$v_f = \omega k/k^2. \tag{4b}$$

На первый взгляд фазовую скорость v_f хотелось бы приравнять скорости частицы $v = pc^2/E$, но, подумав, мы должны сказать, что скорость частицы разумнее отождествить с *групповой скоростью*. Именно эта величина дает скорость распространения в пространстве сигнала или энергии, и тем самым мы рассматриваем частицу как «сгусток», или «пакет», энергии.

5. В томе III этого курса *) мы получили следующее выражение для групповой скорости волнового пакета:

$$\frac{1}{v} = \frac{dk}{d\omega}, \quad \text{или} \quad v = \frac{d\omega}{dk} \frac{dv}{dk}. \tag{5a}$$

Мы думаем, что групповая скорость v может быть скоростью частицы. Чтобы продвинуться дальше, нужно угадать зависимость частоты ω от p и E. Допустим, что зависимость $E = \hbar\omega$, справедливая для фотонов, годится и для материальных частиц. Тогда

$$\hbar\omega = E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{5b}$$

Подставляя это выражение во второе из равенств (5a), получаем

$$\frac{dk}{dv} = \frac{1}{v}\frac{d\omega}{dv} = \frac{m}{\hbar}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}. \tag{5c}$$

Интегрируя это уравнение в предположении, что $k=0$, если $v=0$, имеем

$$\hbar k = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = p, \tag{5d}$$

или в векторной форме

$$\hbar k = p. \tag{5e}$$

Именно это выражение было предложено де Бройлем.

6. Чтобы получить выражение $\hbar k = p$, мы сделали несколько сомнительное предположение, выражением левой частью уравнения (5b). Оказывается вопрос: можно ли получить тот же результат, не прибегая к такому предположению, а исходя из общих требований релятивистской инвариантности? Используем эту возможность и убедимся, что уравнения (5b) и (5d) согласуются со специальной теорией относительности.

Прежде всего следует выяснить, как меняются величины k и ω при преобразованиях Лоренца. Допустим, что в *непштрихованной системе* волновая функция $\psi(x, t)$ задана выражением (4a). Эта же волна в *штрихованной системе*, движущейся со скоростью v относительно непштрихованной системы, будет иметь вид

$$\psi'(x', t') = A' \exp\,(ix'\cdot k' - i\omega' t'), \tag{6a}$$

где A' — постоянная амплитуда, которая может быть и не равна A. Допустим, что штрихованная система является *системой покоя* нашей частицы. В этой системе $k'=0$, $p'=0$ и $E'=mc^2$. Если предположить, далее, что выражение (5b) справедливо для системы покоя, то получим $\omega' = mc^2/\hbar$.

7. Фаза волны в данной системе определена выражением $x\cdot k - \omega t$, и мы допустим, что эта величина является *инвариантом*: если в штрихованной системе в точке x' в момент времени t' фаза имеет данное значение, то она сохранит это и в соответствующей точке x и в соответствующий момент времени t нештрихованной системы. Это предположение следует из периодической структуры волны. Если фаза двух пространственно-временных точек отличается на целое число 2π в *одной* системе координат, то фазы той же волны должны отличаться на то же число 2π в *любой* системе координат. Отсюда следует, что фазы в штрихованной и нештрихованной системах могут лишь отличаться на постоянную величину. Эта величина может быть включена в отношение A/A', и, таким образом, инвариантом становится сама фаза. Сделав это предположение и выбрав штрихованную систему координат в качестве системы покоя частицы, получаем

$$x\cdot k - \omega t = -\omega' t' = -\left(mc^2/\hbar\right)t'. \tag{7a}$$

Величину t' можно выразить через x, t и скорость — v, с которой штрихованная система движется относительно штрихованной. Связь между этими величинами дается преобразованием Лоренца, рассмотренным в томе I нашего курса **):

$$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{7b}$$

Подставляя это выражение в (7a), получаем

$$x\cdot k - \omega t = -\frac{\left(mc^2/\hbar\right)\left(x\cdot v/c^2 - t\right)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{7c}$$

Полученное равенство справедливо для любых x и t. Поэтому

$$\omega = \frac{mc^2/\hbar}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{7d}$$

$$k = \frac{mv/\hbar}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{7e}$$

*) *Кронберг Ф.* Волны.— 3-е изд.— М.: Наука, 1994, гл. 3.

**) *Матвеев Л., Паст В., Рудомин М.* Механика.— 2-е изд.— М.: Наука, 1983, гл. II.

С другой стороны, v есть скорость частицы в неприхованной системе координат, так как в штрихованной системе частица покоится. Таким образом, энергия E и импульс p частицы в неприхованной системе равны

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}},\quad p=\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{7f}$$

Объединяя выражения (7d) — (7f), имеем

$$E=\hbar\omega,\quad p=\hbar k. \tag{7g}$$

Мы подтвердили формулу (5c) и видим, что выражение (5b), введенное нами в качестве догадки, справедливо в общем случае, если оно справедливо в системе покоя. Наш ход рассуждений показал, что соотношения (7g) находятся в согласии со специальной теорией относительности. Действительно, мы получили их, исходя из требования релятивистской инвариантности фазы.

8. Следуя за идеями де Бройля, мы пришли к гипотезе, что с движущейся частицей связана волна, характеризуемая волновым вектором k, который определяется импульсом частицы: $p=\hbar k$. Таким образом, длина волны, связанная с частицей, определяется выражением

$$\lambda=\frac{\hbar}{p}=\frac{2\pi}{k}. \tag{8a}$$

Это выражение известно под названием *длины волны де Бройля* для материальной частицы. Заметим, что оно справедливо и для фотона.

Чтобы выяснить, как длина волны де Бройля зависит от параметров движущейся частицы, запишем выражение (8a) в виде

$$\lambda=\frac{h}{mv}\frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{v/c}. \tag{8b}$$

Мы видим, что λ уменьшается с возрастанием скорости v. При данной скорости v длина волны обратно пропорциональна массе частицы m.

9. Если E означает *полную* энергию частицы, то

$$\lambda=\frac{hc}{\sqrt{E^2-m^2c^4}}=\frac{hc/E}{\sqrt{1-(mc^2/E)^2}}. \tag{9a}$$

Это выражение показывает, что при данной массе m длина волны λ уменьшается с возрастанием энергии E. При заданной полной энергии E длина волны λ растет с ростом массы m. При данной энергии наименьшую длину волны де Бройля имеет безмассовая частица:

$$\lambda=\frac{hc}{E}. \tag{9b}$$

Поскольку это выражение следует из (8a) при $mc^2/E=0$, оно приближенно справедливо в крайнем релятивистском пределе, когда скорость частицы v очень близка к c, или, иначе говоря, когда полная энергия частицы много больше энергии покоя.

Если T — *кинетическая* энергия частицы, то

$$E=T+mc^2. \tag{9c}$$

Подставляя это выражение для E в (9a), получаем

$$\lambda=\frac{hc}{\sqrt{T(T+2mc^2)}}=\frac{h}{\sqrt{2mT}}\frac{1}{\sqrt{1+T/2mc^2}}. \tag{9d}$$

При данной массе покоя m длина волны λ уменьшается с возрастанием кинетической энергии T. При заданной кинетической энергии T длина волны λ уменьшается при увеличении массы m.

В предельном случае, когда скорость частицы очень мала по сравнению с c, отношение T/mc^2 становится очень мало. Полагая в выражении (9d) это отношение равным нулю, получаем следующее выражение для длины волны в нерелятивистском приближении:

$$\lambda\approx h/\sqrt{2mT}\approx h/mv. \tag{9e}$$

Мы могли бы, конечно, получить его и непосредственно из (8a).

10. Теперь следует выяснить, в какой степени идея де Бройля о существовании волн материи согласуется с опытом. Прежде всего нам следует убедиться в том, что эта идея не противоречит установившимся понятиям макроскопической физики.

Рассмотрим частицу, которая мала с макроскопической точки зрения. Допустим, например, что масса частицы $m=10^{-5}$ г и что частица движется со скоростью $v=1$ см/с. Воспользовавшись нерелятивистским приближением (9e), получим, что в этом случае длина волны де Бройля $\lambda\approx 6{,}6\cdot 10^{-22}$ см. Это невероятно малая величина. Ее малостью объясняется то, что волны материи (если таковые существуют) не проявляются в макроскопических явлениях — просто эти волны слишком малы, чтобы их можно было наблюдать. Чтобы понять, в чем тут дело, необходимо вернуться к оптической аналогии. Приближение лучевой, или геометрической, оптики оказывается тем более точным, чем меньше отношение длины волны света к характерным размерам оптического прибора. Чтобы волновые свойства света как-то проявились в оптическом приборе, мы должны создать такие условия, при которых какой-нибудь геометрический параметр прибора окажется сравнимым с длиной волны. Только в этом случае мы обнаружим отклонение от законов геометрической оптики, которое проявится в виде интерференционных или дифракционных эффектов. Аналогичным образом, чтобы обнаружить существование волн материи, мы должны иметь какой-то прибор, геометрические параметры которого сравнимы с длиной волны. Более конкретно, мы должны иметь какую-то специальную решетку, с помощью которой можно было бы обнаружить дифракцию волн материи.

11. Анализ формулы (8b) показывает, что если мы хотим иметь большую длину волны, нам следует воспользоваться наиболее легкими частицами, а именно электронами, движущимися с возможно меньшей скоростью. В этом случае для вычисления длины волны достаточно хорошо нерелятивистское приближение (9e). Переписав это выражение для частицы с массой электрона и *кинетической*

энергией T, получим

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2mT}} = \sqrt{\frac{150{,}4\ \text{эВ}}{T}}\ \text{Å}\,. \qquad (11а)$$

Таким образом, длина волны равна 1 Å — 10^{-8} см, если кинетическая энергия электрона равна 150,4 эВ. Тот же порядок величины имеет постоянная кристаллической решетки. Поэтому, так же как и для рентгеновского излучения, кристаллическая структура может быть подходящей решеткой для волн материи.

Первые опыты такого рода были выполнены К. Дэвиссоном и Л. Джермером и независимо Г. Томсоном в 1927 г.*). В опытах Дэвиссона и Джермера изучалось *отражение* электронов от поверхности кристалла, тогда как Томсон наблюдал *прохождение* электронов через тонкие кристаллические пленки.

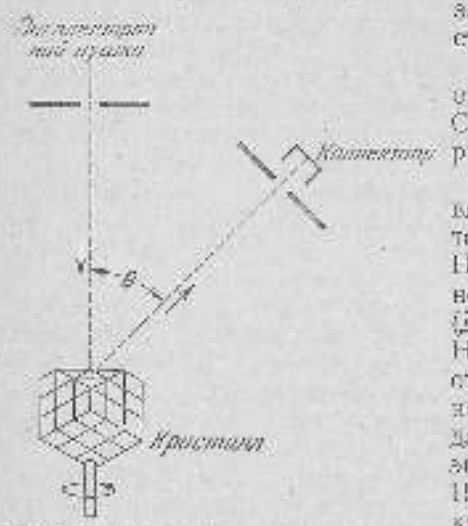


Рис. 12А. Схема дифракции электронов от поверхности кристалла. Для электронов фиксированной энергии интенсивность отдельного рассеянного пучка зависит от угла, обозначенного θ

12. Рассмотрим подробно опыт Дэвиссона и Джермера. Схема их опыта показана на рис. 12А.

Мы приведем собственные высказывания Дэвиссона об истории их открытия, взятые из Нобелевской лекции, прочитанной им в Стокгольме в 1937 г. (Дэвиссон и Томсон разделили Нобелевскую премию 1937 г. за открытие дифракции электронов.) Приведенная ниже цитата дает представление о том, что экспериментальная ситуация в 1927 г. не была столь ясной, какой она нам представляется сейчас, когда мы оглядываемся назад. После предварительного обсуждения гипотезы де Бройля Дэвиссон продолжает:

«Из теории следует, что пучки электронов, подобно пучкам света, обладают волновыми свойствами. Рассеиваясь на подходящей решетке, они должны дать дифракционную картину. Об этой интересной возможности не было указано никем из ведущих теоретиков. Первым обратил на нее внимание Эльзассер, который отметил в 1925 г., что наблюдение дифракции доказало бы физическое существование электронных волн. Этим завершился предварительные этапы открытия дифракции электронов.

Мне приятно отметить, что опыты в Нью-Йорке, закончившиеся открытием дифракции электронов, были начаты еще до получения заключений Эльзассера, вскоре после того, как оттиск работы де Бройля попал в Америку. Для истинной истории этого открытия характерно недостаток проницательности и избыток везения. Начало наших исследований нужно отнести к 1919 г., когда мы случайно обнаружили, что верхний предел энергетического спектра при теоретической электронной эмиссии совпадает с энергией первичных электронов, даже если они ускорены до пятен вольт. Это было объяснено упругим рассеянием электронов в металле.

С этого начались изучение углового распределения электронов, испытавших упругое рассеяние. И здесь опять имелся случай: совершенно неожиданно мы обнаружили, что интенсивность упругого рассеяния зависит от ориентации рассеивающего кристалла. Так же, совершенно естественно, перешли к изучению упругого рассеяния в заданном направлении. Начало этой фазы работы относится к 1925 г., т. е. она началась через год после появления работы де Бройля и всего на год не успела быстрого развития волновой механики. Таким образом, экспериментальные опыты в своем начале не были проверкой волновой механики. Они приобрели такой характер гипотезы лишь после того, как я обсудил их в Англии с Ричардсоном, Бором, Фаулером и другими.

Поиск дифрагированного пучка был начат осенью 1926 г., но найден он был не раньше начала следующего года. Сначала был обнаружен один пучок, потом, очень скоро, двадцать других. В девяностых опытах они были использованы для проверки связи между длиной волны и импульсом частицы. В каждом случае формула де Бройля $\lambda = h/p$ была подтверждена с точностью до погрешностей опыта.

Я кратко изложу схему опыта. Пучок электронов заданной скорости был направлен на грань (111) кристалла никеля (рис. 12А). Коллектор позволял регистрировать лишь узкую группу электронов, энергия которых была очень близка к энергии электронов первичного пучка. Он мог поворачиваться по дуге вокруг кристалла. Сам кристалл можно было вращать вокруг направления первичного пучка. Таким образом можно было измерять интенсивность упругого рассеяния в любом направлении вперед от кристалла, т. е. электронов, направленных, лежащих в пределах углов от 0 до 15°.

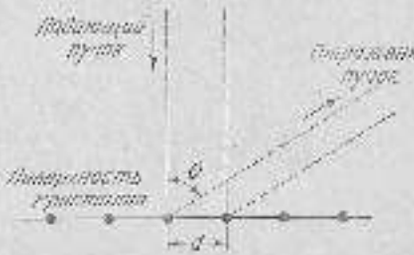


Рис. 13А. Линейная последовательность атомов, расположенных с периодом d. Каждую точку можно считать проекцией атомов, расположенных на плоскости, перпендикулярной к плоскости рисунка. Дифракционные максимумы возникают в направлениях, для которых $d\sin\theta$ равно целому числу волн

13. В этих опытах для создания электронного пучка служила так называемая электронная пушка, в которой электроны ускорялись до нужной энергии, близкой к 50 эВ. Кристалл, разумеется, находился в вакууме. Пучок падал перпендикулярно к определенной плоскости кристалла, обозначаемой символом (111). В этой плоскости атомы, расположенные на поверхности кристалла, образуют регулярную решетку. Чтобы понять идею опыта, начнем с рассмотрения простой одномерной модели, схематически показанной на рис. 13А. (Общая теория будет изложена немного позже.) Падающая волна рассеивается каждым атомом указанной последовательности. В некоторых направлениях дифрагированные от каждого атома волны усиливают друг друга, в других они друг друга гасят. Условие конструктивной интерференции (когда дифрагировавшие волны усиливают друг друга) заключается в том, чтобы разность расстояний от различных атомов до точки наблюдения была равна целому числу длин волн. Если допустить, что точка наблюдения находится очень далеко, то из рис. 13А видно, что конструктивная интерферен-

*) *Davisson C. J., Germer L. H.* Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel. — Phys. Rev., 1927, v. 30, p. 705; *Thomson G. P.* Experiments on the Diffraction of Cathode Rays. — Proc. Roy. Soc., London, 1928, v. 117A; The Diffraction of Cathode Rays by Thin Films of Platinum. — Nature, 1927, v. 120, p. 802.

ция будет происходить, если

$$d \sin\theta = n\lambda, \qquad (13a)$$

где n — целое число. Это равенство просто означает, что разность хода от двух соседних атомов до точки наблюдения должна быть равна целому числу длин волн. Таким образом, в направлениях θ, удовлетворяющих условию (13а), следует ожидать дифракционных максимумов. Мы предполагаем, что постоянная решетки d известна.

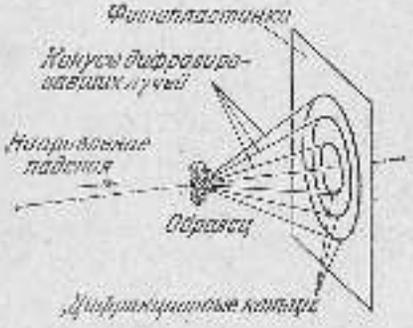


Рис. 14А. Дифракция рентгеновского излучения на поликристалле от мишени. Пучок рентгеновских лучей, отражаясь от многочисленных кристаллов, дифрагирует в виде конусов, ось которых совпадает с направлением падающего пучка. Фотография, показанная на рис. 14В, 14С, 22А и 22С, получена этим методом. Пучок дифрагированных электронов может должен находиться внутри вакуумной трубки. Дифракционная картина, как для электронов, так и для рентгеновских лучей, может быть получена на воздухе или в вакууме.

Она может быть измерена другими методами, например по дифракции рентгеновских лучей. Нашу простую теорию легко применить и к случаю двухмерной решетки, если представить себе, что каждая точка на рис. 13А соответствует ряду атомов, расположенных в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка.

Приведем типичные экспериментальные данные: $d = 2{,}15 \cdot 10^{-8}$ см, $E = 54$ эВ, максимум интенсивности наблюдается под углом $\theta = 50°$. Для $n = 1$ наблюдаемому значению θ соответствует длина волны 1,65 Å, а длина волны, вычисленная по формуле (11а), равна 1,67 Å; это хорошее согласие, если иметь в виду погрешности измерений. Дэвиссон наблюдал также максимумы более высокого порядка, соответствующие $n > 1$, и их положение оказалось в согласии с предсказаниями теории.

14. Метод, использованный Томсоном, аналогичен так называемому методу Дебая — Шерера в дифракции рентгеновских лучей. Хорошо коллимированный монохроматический пучок электронов или рентгеновского излучения рассеивается мишенью, состоящей из очень большого числа небольших, случайно ориентированных микрокристаллов. Теория предсказывает, что дифрагировавшие волны будут распространяться по поверхности круговых конусов, ось которых совпадает с направлением первичного пучка (рис. 14А). Если регистрировать рассеянное излучение с помощью фотопластинки, расположенной перпендикулярно направлению падения первичного пучка, то мы обнаружим на ней последовательность концентрических окружностей. Расположение этих окружностей определяется структурой кристалла и длиной волны. Если последняя известна, то метод Дебая — Шерера позволяет определить геометрию кристаллической решетки.

На рис. 14В и 14С приведены два полученных этим методом снимка — один для электронного пучка, второй — для рентгеновского излучения. Рассеивающая мишень состояла из микрокристаллов белого олова. Наблюдается поразительная аналогия в характере расположения окружностей. Постарайтесь этих снимков, чтобы, не зная деталей теории рассеяния волн в решетке, сказать, что электроны и рентгеновское излучение дифрагируют одинаково.

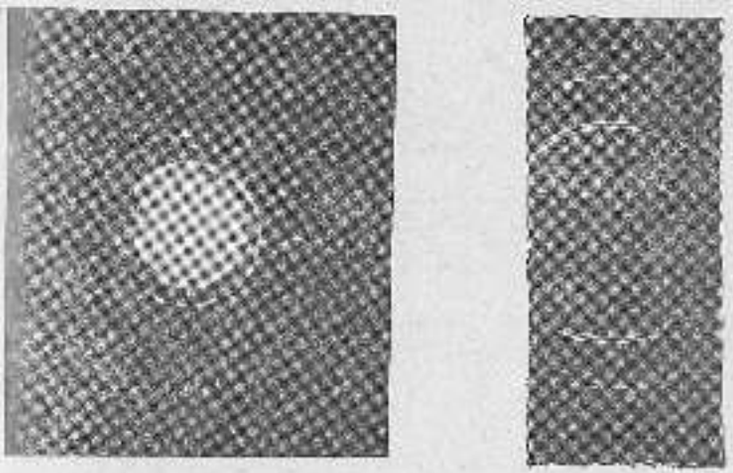


Рис. 14В. Фотография дифракции электронов на белом олове, полученная методом, показанным на рис. 14А. Энергия падающих электронов после прохождения ускоряющей разности потенциалов составляет 600 эВ (длина волны 0,50 Å). Диаметр основного кольца соответствует углу 50°. Диски, появляющиеся в центре снимка, возникают в результате прохождения электронов через отверстие в фотопластинке. Внешняя область электронограммы, которая на рисунке не видна, соответствует длине волны около 0,04 Å. Наблюдаемое здесь расположение колец обусловлено периодическими плоскостями, показанными на рис. 14А, конусов с фотопластинкой. Целью этого непосредственного опыта является изучение структуры очень малых кристаллов олова, образующих мишень.

Рис. 14С. Фотография дифракции рентгеновского излучения на белом олове, полученная с помощью, показанным на рис. 14А. На фотографии, аналогичной фотопластинке, с целью пленки, состоящей из двух кругов с центром в мишени. Рис обстоятельство не влияет существенно на дифракцию. Мишень представляет собой небольшое количество порошка, помещенное в тонкостенную трубку со средним размером кристаллов около 1 мкм. Длина волны рентгеновского излучения равна 1,4 Å. Экспозиция составляет несколько часов. Сравнение рис. 14В и 14С показывает, что электроны и рентгеновские лучи дают одинаковую картину дифракции на кристаллах олова.

15. Опыты Дэвиссона и Джермера и опыты Томсона не оставляют сомнения в том, что волны материи существуют и что длина волны (по крайней мере для электронов) совпадает с предсказываемой формулой де Бройля. В 1929 г. Эстерман и Штерн *) показали, что атомы гелия и молекулы водорода также дифрагируют в согласии с теорией де Бройля. Эти опыты чрезвычайно усилили нашу веру в универсальный характер идеи о волнах материи, поскольку они выполнены не с электронами, а с тяжелыми и сложными друг от друга частицами. Помимо того, что эти частицы отличаются от

*) *Estermann I., Stern O.* Beugung von Molekularstrahlen. — Zs. f. Phys., 1930, v. 61, p. 95.

электрона большой массой, они еще являются сложными системами, тогда как электрон (по-видимому) — элементарная частица. Таким образом, опыты показали, что атом в целом и молекула в целом обладают волновыми свойствами, и теперь нетрудно видеть, что в подходящих экспериментальных условиях макроскопическое тело тоже обнаружит свойства волн.

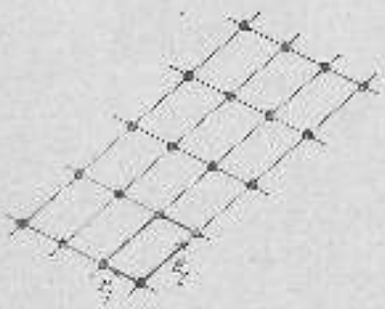
Значительно позднее была обнаружена дифракция очень медленных нейтронов от решетки кристалла, что привело к развитию новых методов изучения структуры кристаллов и молекул *).

Теория дифракции на периодических структурах **)

16. Рассмотрим более подробно дифракцию на одномерной, двухмерной и трехмерной решетках. Периодические структуры

Рис. 16А. Линейная последовательность тождественных атомов

такого типа можно создать, по крайней мере мысленно, многократным повторением *единичной ячейки*. Это идею иллюстрируют рис. 16А — 16С.



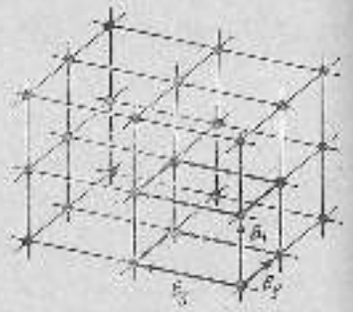


Рис. 16В. Двухмерная решетка. Единичная ячейка задается парой векторов $a_1 = a_2$, показанных стрелками. Повторением единичной ячейки можно получить всю решетку

Рис. 16С. Трехмерная решетка. Граница единичной ячейки показана жирными линиями. Вектор любой узловой точки решетки является линейной комбинацией с целыми коэффициентами векторов a_1, a_2, a_3. Необязательно, чтобы эти векторы были взаимно перпендикулярны

Для одномерной решетки единичной ячейкой является просто отрезок, для двухмерной — параллелограмм, а для трехмерной — параллелепипед. Допуская простоты, что атомы (данного вида) расположены в каждом углу единичной ячейки. Положение всех атомов в ячейке определяется для плоской решетки выражением

$$x = n_1 e_1, \tag{16a}$$

для плоской решетки выражением

$$x = n_1 e_1 + n_2 e_2, \tag{16b}$$

для трехмерной решетки выражением

$$x = n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3. \tag{16c}$$

Величины n_1, n_2 и n_3 — целые числа, а векторы e_1, e_2 и e_3 определяют, как показано на рис. 16А — 16С, единичные ячейки.

В дальнейшем мы будем считать, что решетка содержит конечное, но очень большое число атомов. Во избежание недоразумений заметим, что мы всегда рассматриваем одно-, двух- и трехмерные решетки в *трехмерном* пространстве и не имеем в виду, например, двухмерные решетки в двухмерном пространстве.

17. Рассмотрим ситуацию, схематически показанную на рис. 17А. Источник, расположенный в точке x_0, испускает волну. Она дифрагирует на последовательности идентичных атомов. Дифрагировавшая, или *рассеянная*, волна наблюдается в точке x_1. Расположим

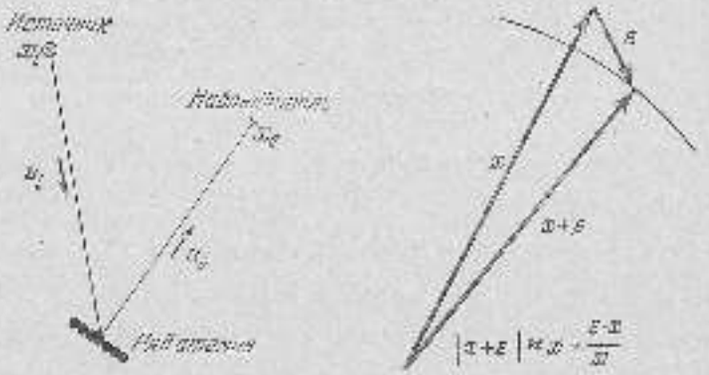


Рис. 17А. Дифракция на одномерной решетке. Средние размеры, как расстояния от источника до ближайших к нему наблюдателя и атома по сравнению с размерами решетки. Решетка содержит множество, возможно бесконечное число атомов. Единичные векторы e_1 и e_2 указывают направления распространения падающего на атом и рассеянного до излучения

Рис. 17В. Иллюстрация часто применяемого в физике приближения. Если вектор ε очень мал по сравнению с вектором x, то длина вектора $x + \varepsilon$ с хорошим приближением равна сумме длины x и проекции ε на направление x

начало координат в центре цепи последовательности атомов (радиусы одним из атомов). Пусть расстояния $x_0 = |x_0|$ и $x_1 = |x_1|$ очень велики по сравнению с линейными размерами последовательности. Начнем с одномерной решетки. Рассеяние от двух- и трехмерной решетки можно рассмотреть аналогичным образом.

Длина пути от источника к наблюдателю (путь лежит через начало координат) равна $s_1 = |x_1| + |x_0|$. Пусть $s(n_1)$ — длина пути от источника до наблюдателя через атом, положение которого в последовательности определяется целым числом n_1 (см. формулу (16c)). Тогда

$$s(n_1) = |x_1 - n_1 e_1| + |x_0 - n_1 e_1|. \tag{17a}$$

*) *Mitchell D. P., Powers P. N.* Bragg Reflection of Slow Neutrons. — Phys. Rev., 1936, v. 50, p. 486; см. также: *Wollan E. O., Shull C. G.* Neutron Diffraction and Associated Studies. — Nucleonics, 1948, v. 3, p. 8.

**) При первом чтении п. 16—22 можно пропустить. Рассмотрите, однако, фотографии, приведенные в п. 22.

Волны, приходящие в точку наблюдения от различных атомов, интерферируют друг с другом, и амплитуда результирующей волны равна сумме амплитуд волн от каждого атома. Чтобы образовался дифракционный максимум, все приходящие волны должны быть в фазе, иначе они погасят друг друга. Условие максимума требует, чтобы для каждого атома, т. е. для каждого целого n_1, разность путей $s(n_1) - s_0$ была целым кратным длины волны λ.

Предположим, что размеры решетки очень малы по сравнению с расстояниями от нее до наблюдателя и до источника, т. е. что вектор $n_1 e_1$ гораздо меньше векторов x_1 и x_0. Тогда можно написать следующие приближенные выражения для обеих расстояний в правой части равенства (17a):

$$|x_1 - n_1 e_1| \approx x_1 - n_1 x_1 \cdot e_1 / x_1, \tag{17b}$$

$$|x_0 - n_1 e_1| \approx x_0 - n_1 x_0 \cdot e_1 / x_0. \tag{17c}$$

Геометрический смысл такого приближения ясен из рис. 17B. Для разности путей получаем выражение

$$s(n_1) - s_0 \approx -n_1 e_1 \cdot \left(\frac{x_1}{x_1} + \frac{x_0}{x_0} \right). \tag{17d}$$

18. Обозначим через u_1 и u_0 единичные векторы в направлении падающего на решетку и рассеянного пучка соответственно. Тогда имеем

$$u_1 = -x_1/x_1, \quad u_0 = x_0/x_0. \tag{18a}$$

При очень больших x_1 и x_0 из (17d) получаем

$$s(n_1) - s_0 = n_1 e_1 \cdot (u_1 - u_0), \tag{18b}$$

что дает условие дифракционного максимума

$$n_1 e_1 \cdot (u_1 - u_0)/\lambda = n_1'. \tag{18c}$$

Здесь n_1' должно быть целым числом при любом выборе целого n_1, что возможно лишь в случае

$$e_1 \cdot (u_1 - u_0)/\lambda = m_1, \tag{18d}$$

где m_1 — целое число. Полученный результат можно было написать сразу. Волны от любой пары атомов приходят в фазе тогда и только тогда, если волны от двух *соседних* атомов приходят в фазе. Именно это утверждает равенство (18d).

Воспользовавшись соотношением де Бройля, придадим выражению (18d) физически более интересную форму. Пусть p_1 — первичный импульс, p_0 — импульс в рассеянном пучке. Тогда

$$u_1/\lambda = p_1/h, \quad u_0/\lambda = p_0/h \tag{18e}$$

и условие (18d) принимает вид

$$e_1 \cdot (p_1 - p_0) = e_1 \cdot q = m_1 h, \tag{18f}$$

где $q = p_1 - p_0$ — импульс, переданный решетке. Для одномерной решетки условие дифракционного максимума означает, что скалярное произведение переданного импульса q на вектор e_1 должно быть целым кратным h. Проекция переданного импульса на направление решетки «квантуется».

19. Мы молчаливо предполагали, что рассеяние является *упругим*; это означает, что энергия (или частота) рассеянной частицы равна энергии (частоте) падающей на решетку частицы. Отсюда косвенно следует, что импульсы в падающей и рассеянной волне одинаковы. Таким образом, положение дифракционного максимума определяется условиями

$$e_1 \cdot (p_1 - p_0) = e_1 \cdot q = m_1 h, \tag{19a}$$

$$|p_1| = |p_0|, \tag{19b}$$

где m_1 — целое число. Для *бесконечной* решетки условия (19a) и (19b) выполняются точно. Если размеры решетки *конечны*, то мы будем наблюдать некоторое рассеяние также в направлениях, не следующих из написанных условий.

Острота дифракционного максимума (как функция угла) зависит от числа атомов в решетке. Предположим, что оно велико. Тогда направление рассеяния хорошо определено уравнениями (19a) и (19b). Эти уравнения дают последовательность конусов, определяемых целыми числами m_1. На эти целые числа m_1, естественно, наложено ограничение

$$|m_1| \leq 2|e_1| \cdot |p_1|/h, \tag{19c}$$

означающее, что импульс, переданный решетке, не может быть больше двойного значения первичного импульса.

20. Нетрудно получить условия образования дифракционных максимумов для двухмерной ячейки. В этом случае условие (19a) должно выполняться для каждого направления решетки, т. е. для каждой линии, содержащей более одного атома. В частности, оно должно выполняться для направлений, определяющих единичную ячейку, и мы получаем условия

$$e_1 \cdot (p_1 - p_0) = m_1 h, \quad e_2 \cdot (p_1 - p_0) = m_2 h, \tag{20a}$$

$$|p_1| = |p_0|, \tag{20b}$$

где m_1 и m_2 — целые числа. Снова можно сказать, что проекция переданного импульса на обе решетки «квантуется». Чтобы показать это с большей ясностью, зададим два вектора q_1 и q_2 в плоскости (e_1, e_2) условиями

$$e_1 \cdot q_1 = h, \quad e_2 \cdot q_1 = 0, \quad e_1 \cdot q_2 = 0, \quad e_2 \cdot q_2 = h. \tag{20c}$$

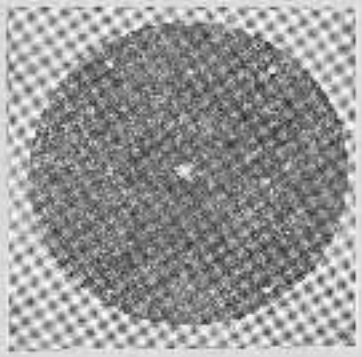
Написанные уравнения имеют единственное решение. Заметим, что направления векторов q_1 и q_2 совпадают с e_1 и e_2 лишь в случае прямоугольной решетки.

Условия (20a) теперь можно записать в виде

$$q = p_1 - p_0 = m_1 q_1 + m_2 q_2 + q^*, \tag{20d}$$

где m_1 и m_2 — целые числа; q^* — произвольный вектор, перпендикулярный к плоскости решетки. «Квантуется» лишь составляю-

пия переданного импульса в плоскости решетки (но не перпендикулярная составляющая). Они определяются условием (20b), гласящим, что рассеяние упруго. Мы можем, таким образом, найти несколько решений уравнений (20a) и (20b), предположив, что первичный импульс не слишком мал (т. е. что длина волны не слишком велика). В этом случае рассеянные лучи испускаются



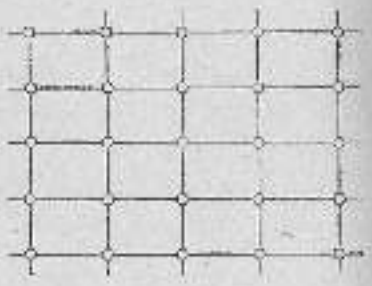


Рис. 20A. Дифракционная картина, полученная при обратном рассеянии электронов с энергией 76 эВ от гексагонального кристалла никеля. В центре снимка виден нормально падающий пучок. Что типично для случая дифракции от двухмерной решетки

Рис. 20B. Плоская поверхность кристалла. Кружки слева показывают атомы никеля в соответствующем слое. Дифракционная картина обнаруживает гексагональную симметрию поверхности. Правильно ли ориентирована дифракционная картина на снимке? Не нужно ли один из них повернуть на 90°?

в строго определенных дискретных направлениях, а не по конусам, как это происходит в случае одномерной решетки.

В опыте Дэвиссона и Джермера энергия электронов была невелика и они не проникали глубоко в кристалл. Дифракция происходила на атомах, лежащих на поверхности, когда применима теория дифракции на двухмерной решетке.

21. Для трехмерной решетки

$$\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)=n_1h,\quad \boldsymbol{e}_2\cdot(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)=n_2h,\quad \boldsymbol{e}_3\cdot(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)=n_3h, \tag{21a}$$

$$|\boldsymbol{p}_i|=|\boldsymbol{p}_f|, \tag{21b}$$

где n_1, n_2 и n_3 — целые числа. По аналогии со сделанным в предыдущем пункте, определим три вектора $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ и $\boldsymbol{q}_3$ с помощью условий

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{q}_1=h, && \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{q}_1=0, && \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{q}_1=0,\\ &\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{q}_2=0, && \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{q}_2=h, && \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{q}_2=0,\\ &\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{q}_3=0, && \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{q}_3=0, && \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{q}_3=h. \end{aligned} \tag{21c}$$

Эти уравнения всегда имеют единственное решение. Условие (21a) можно записать в виде

$$\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i=n_1\boldsymbol{q}_1+n_2\boldsymbol{q}_2+n_3\boldsymbol{q}_3. \tag{21d}$$

Переданный импульс $\boldsymbol{q}$ «квантуется» в том смысле, что он должен быть линейной комбинацией (с целыми коэффициентами) трех

векторов $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ и $\boldsymbol{q}_3$, определяемых геометрией решетки. Из уравнения (21d) следует, что возможные значения переданного импульса образуют решетку в пространстве импульсов. Эта решетка называется *обратной решеткой* кристалла.

Условиям (21d) и (21b) невозможно удовлетворить одновременно при любом значении переданного импульса. Уравнения (21a) и (21b) совместно образуют пятерые уравнения для определения трех составляющих конечного импульса $\boldsymbol{p}_f$. Их решение возможно лишь для соответствующим образом ориентированного кристалла.

22. Допустим теперь, что мы изучаем дифракцию на образце, который состоит из очень большого числа случайно ориентированных микрокристаллов. В нем всегда найдутся микрокристаллы, ориентированные так, чтобы удовлетворить уравнениям (21a) и (21b) (по крайней мере приближенно). Для такого образца мы имеем два условия дифракционного максимума:

$$|\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i|=|n_1\boldsymbol{q}_1+n_2\boldsymbol{q}_2+n_3\boldsymbol{q}_3|, \tag{22a}$$

$$|\boldsymbol{p}_f|=|\boldsymbol{p}_i|, \tag{22b}$$

где n_1, n_2 и n_3 — целые числа; $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ и $\boldsymbol{q}_3$ — векторы, рассмотренные в предыдущем пункте, соответствующие определенной ориентации решетки. Написанные уравнения имеют решение, и мы видим, что дифрагировавшие лучи распространяются по конусам, оси которых совпадают с направлением приходящей волны.

На рис. 14A показана схема дифракционного опыта, основанного на рассмотренной теории. При работе с рентгеновскими излучениями образец часто представляет собой тонкую пудру, состоящую из большого числа очень малых микрокристаллов. Дифракционная картина на рис. 14C получена именно с таким образцом. Дуги на снимке представляют собой пересечения конусов [определенных условиями (22a) и (22b)] с поверхностью фотопленки.

Легко понять, что если образец слишком мал (в том смысле, что он не содержит достаточно большого числа кристаллов), то распределение дифрагировавших лучей по поверхности конуса может оказаться весьма неравномерным. Вместо непрерывных дуг или окружностей мы увидим на фотографии отдельные точки. Это явление прекрасно иллюстрируется фотографиями, приведенными на рис. 22A и 22C, которые следует сравнить с рис. 14B; на них показана дифракция электронов с энергией 100 кэВ на кристаллах олова. В этом случае электронные волны полностью проходят в небольшие кристаллы. В качестве прибора для изучения дифракции был использован электронный микроскоп. Фотографии образцов, показанные на рис. 22B и 22D, были получены с тем же микроскопом.

Существует лишь одна постоянная Планка

23. Этот заголовок, вероятно, удивит читателя. Постоянная Планка единственна по определению. Что же в этом удивительного и что нетривиального хочет этим сказать автор?

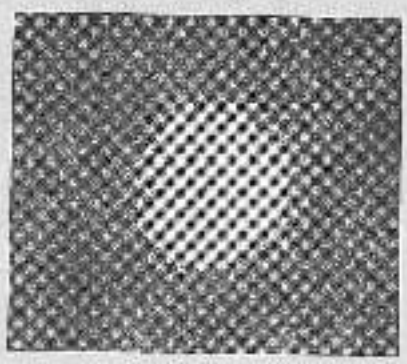


Рис. 22А.

Рис. 22В.

Дальше идет дифракция электронов, получающаяся, например, при отражении от кристалла (см. рис. 21В). На рис. 22В показана картина, рассматриваемая с электронного микроскопа (в микроскопе типа 100 кв). Мишень состоит из тонкого слоя кристаллов золота, нанесенных на тонкую (толщиной в несколько ангстрем) аморфную пленку. Хорошо видны кристаллы золота, ориентированные случайным образом. Самые мелкие кристаллы имеют размеры около 10 Å, самые крупные — около 300 Å. Средний размер кристаллов равен 600 Å. Для получения дифракционной картины пучок электронов был направлен на небольшой участок мишени. В согласии с теорией, изложенной в п. 3, мы видим на снимке кольца. Чем больше длина волны электронов, тем больше радиусы колец.

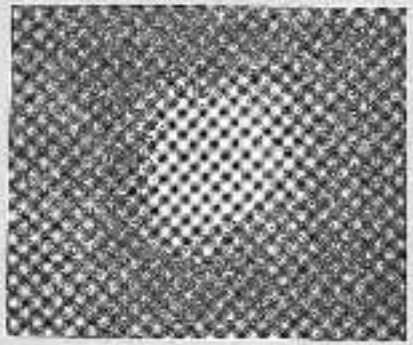


Рис. 22С.

Рис. 22D.

Снимок 5, полученный при отражении, как и рис. 22А и 22В. В данном опыте использовался более крупный кристалл (средний размер около 0,1 мм) и падающий дифрагирующие частицы участвует лишь небольшая его часть. Кольца видны несколько, но зато они четкие. Точки — следствие рассеяния. Снимки на рис. 22А и 22С получены с помощью электронного микроскопа, снимок на рис. 22В получен с помощью простого устройства, схема которого показана на рис. 21В, снимок на рис. 22D получен с помощью электронного дифрактографа. Длина волны электронов, использованных для получения снимков на рис. 22В, 22А и 22С, равнялась соответственно 0,048 Å, 0,05 Å и 0,04 Å.

Абсолютно непонятно то, что в физике не возникает необходимости в других постоянных типа постоянной Планка. Рассмотрим соотношение де Бройля, написав его в виде

$$\lambda = \hbar/p, \tag{23c}$$

где p — импульс частицы; λ — длина волны де Бройля. Обе эти величины можно измерить независимо и, имея пару значений (λ, p), определить постоянную Планка $\hbar$. Замечательным *экспериментальным* фактом является то, что для любых частиц мы получаем одно и то же значение постоянной Планка.

Мы смогли *вывести* соотношение де Бройля, исходя из некоторых очень простых идей. Подвергнем теперь критическому рассмотрению основы этого вывода.

24. В п. 3—5 мы предполагали, что с каждой материальной частицей связана волна и что ее групповая скорость равна скорости частицы. Кроме того, мы предполагали, что описание частицы-волны должно удовлетворять принципам специальной теории относительности. Это означает, что связь волнового вектора (и частоты) волны с импульсом (и энергией) частицы должна быть одной и той же в любой инерциальной системе. Исходя из этих идей, мы получили соотношения

$$E = \hbar\omega, \quad p = \hbar k, \tag{24a}$$

где E — энергия; p — импульс; ω — частота; k — волновой вектор; $\hbar$ — константа, определяемая из равенства

$$E_0 = mc^2 = \hbar\omega_0 \tag{24b}$$

через энергию покоя E_0 и частоту покоя ω_0.

На каком основании можно считать, что постоянная $\hbar$ совпадает с постоянной Планка? Это *догадка*. Соотношение $E = \hbar\omega$ справедливо для фотонов, поэтому соблазнительно считать, что оно выполняется и для материальных частиц. Поэтому решающим является вопрос: справедливо ли первое из соотношений (24а) для всех материальных частиц?

Полученный в п. 3—5 результат означает, что связь между энергией, импульсом, частотой и волновым вектором имеет вид

$$E = C\omega, \quad p = Ck, \tag{24c}$$

где C — постоянная, характеризующая частицу. Эта постоянная может быть определена, например, следующим образом:

$$C = \partial_k \omega_0. \tag{24d}$$

Однако нет оснований считать, что постоянная C должна быть *одной и той же для всех* частиц. Наш мир мог бы быть другим, и мы могли бы, например, обнаружить, что $C = \hbar$ для фотонов, $C = 7\hbar$ для электронов и $C = 17\hbar$ для протонов. А кроме того, могло бы оказаться, что электроны и протоны связаны с волнами де Бройля, тогда как у нейтронов волны материи не связаны!

25. К счастью, доступные нам экспериментальные факты позволяют отбросить эти поистине страшные предположения: постоянная $\hbar$ одинакова для всех частиц. Мы говорим «к счастью» потому, что эстетически привлекательная современная формулировка квантовой механики существенным образом зависит от предположения, что $C=\hbar$ является универсальной константой, не зависящей от типа частицы. В противном случае теория элементарных частиц и их взаимодействий оказалась бы, конечно, совершенно другой.

В какой мере известна с единственном значении $C=\hbar$ для любых частиц подтверждена на опыте? Прямые опыты, аналогичные опытам Дэвиссона и Джермера или Томсона, сделаны лишь для частиц нескольких типов. Такие опыты можно считать проверкой универсальности соотношения $\hbar=hp$, но точность их ограничена. Они подкрепляют нашу уверенность в универсальности соотношений (24а), но более реальной основой веры в универсальность постоянной Планка является успех квантовой теории в целом. Существует огромное количество экспериментальных фактов, являющихся косвенной поддержкой соотношений (24а). Их интерпретация не всегда столь же проста и прозрачна, как в случае электрона в кристалле, но в своей массе они чрезвычайно убедительны. Наше убеждение в *точности* соотношений (24а) в большой мере аналогично убеждению в *точности* соотношения $E_0=mc^2$ между массой и энергией. Прямые данные о его справедливости весьма убедительны, но совокупность косвенных указаний на общую пригодность идей специальной теории относительности вселяет еще большую уверенность.

Во всех доступных нам экспериментальных данных нельзя найти ни малейшего указания на то, что соотношения (24а) или соотношение $E_0=mc^2$ верны лишь приближенно. Мы предполагаем, что они выполняются совершенно точно, и считаем их краеугольными камнями физической теории.

Великолепна цепь рассуждений в гл. 12 тт. 2. Там мы решили, имея в виду фундаментальную роль постоянных $\hbar$ и c в релятивистской квантовой физике, выбрать систему единиц, в которой $\hbar=1$ и $c=1$. Такая система не имела бы большого смысла, если бы у каждой частицы была своя постоянная C типа постоянной Планка. Поскольку мы убеждены в единственности такой постоянной, это значит, что «масса», «энергия» и «частота» всегда находятся в одном и том же соотношении, и мы можем употреблять эти разные слова как синонимы [*]).

26. Имея в виду соотношения (24а), можно придать другую форму законам сохранения энергии и импульса, выполняющимся при процессах столкновения.

В общем случае процесс столкновения можно описать следующим образом. В некоторый начальный момент времени существует группа частиц, которые можно считать хорошо разделенными друг от друга.

Обозначим через $\mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2', \ldots, \mathbf{p}_i'$ их импульсы, а через $E_1', E_2', \ldots, E_i'$ — их энергии. Утверждая, что частицы вначале были «хорошо разделены», мы понимаем под этим, что в начале процесса всеми взаимодействиями между частицами можно пренебречь. Такой идеи имеет смысл, если силы, действующие между частицами, быстро спадают до нуля при увеличении расстояния между ними. Вначале каждая частица движется так, как если бы других частиц не было. С течением времени частицы сходятся в «область столкновения», где происходит взаимодействие, в результате которого частицы испытывают отклонения. Более того, некоторые частицы могут исчезнуть и могут возникнуть новые частицы.

Через некоторое, достаточно длительное время частицы покинут область столкновения, и взаимодействие между ними прекратится просто потому, что они окажутся на далеком расстоянии друг от друга. Каждая частица через некоторое время опять будет двигаться так, как если бы других частиц совсем не было. Обозначим импульсы частиц после столкновения через $\mathbf{p}_1'', \mathbf{p}_2'', \ldots, \mathbf{p}_j''$, а энергии через $E_1'', E_2'', \ldots, E_j''$.

Законы сохранения имеют вид

$$\sum_{r=1}^{i} E_r' = \sum_{s=1}^{j} E_s'', \quad \sum_{r=1}^{i} \mathbf{p}_r' = \sum_{s=1}^{j} \mathbf{p}_s''. \tag{26а}$$

Полная начальная энергия равна полной конечной энергии, то же верно и для полного начального и конечного импульсов. Условие, что частицы до и после столкновения не взаимодействуют, весьма существенно; в противном случае полная энергия не была бы равна сумме энергий отдельных частиц и мы должны были бы включить в выражение для полной энергии «энергию взаимодействия».

Заметим, что все эти частицы могут и не быть элементарными частицами. С равным успехом они могут быть сложными частицами, например атомами или ядрами. Рассматривая процессы столкновения, мы под «частицей» понимаем любой относительно стабильный объект, которому можно приписать импульс, энергию и массу (покоя) и который можно отделить от других аналогичных объектов. Например, можно рассмотреть столкновение между нейтральным атомом гелия и электроном. Предположим, что атом гелия ионизуется при столкновении. Тогда в начале процесса мы имеем *две* частицы — электрон и нейтральный атом гелия, а в конце *три* частицы — два электрона и однократно ионизованный атом гелия. (Это, разумеется, не единственно возможный исход процесса столкновения. Атом гелия может потерять при столкновении оба электрона, а может вообще остаться неионизованным. Кроме того, в процессе столкновения могут быть испущены один или несколько фотонов.)

27. Заметим теперь, что благодаря соотношениям (24а) с каждой из исходных и конечных частиц связаны частота и волновой вектор.

[*]) Автор предпочел бы использовать термин «масса» для обозначения «массы покоя» изолированной системы (т. е. для энергии покоя, деленной на c^2). В таком употреблении «масса частицы» совпадает со своей массой покоя. Другие авторы иногда применяют слово «масса», понимая под ней полную энергию, деленную на c^2.

Поэтому законы сохранения можно записать в таком виде:

$$\sum_{i=1}^{i} \omega_i' - \sum_{i=1}^{i} \omega_i'', \quad \sum_{i=1}^{i} k_i' = \sum_{i=1}^{i} k_i''. \qquad (27a)$$

Сумма начальных частот равна сумме конечных, и сумма начальных волновых векторов равна сумме конечных. Эти законы сохранения полностью эквивалентны законам сохранения (26а). Из одних следуют другие, потому что существует лишь одна постоянная Планка *).

Можно ли «расщепить» волны материи?

28. В предыдущей главе мы говорили о том, в каком смысле можно или нельзя расщепить фотон. Здесь мы подвергнем такому же рассмотрению волны материи. Мы будем правы, потому что свойства этих волн вполне аналогичны свойствам фотонов. В этом смысле природа позаботилась о простоте. Для определенности будем говорить об электронах, по которым мы продолжают совершенно общий смысл и в равной мере применимы к любым частицам.

В предыдущей главе было показано, что монохроматический фотон с частотой ω нельзя расщепить в том смысле, чтобы наблюдать, например с помощью фотоэлемента, «долю фотона», обладающую часью энергии $\hbar\omega$. В аналогичном смысле нельзя расщепить и электрон. Никто никогда не наблюдал «долю электрона».

29. Рассмотрим опыт по дифракции электронов, схематически показанный на рис. 29А. Электроны, падающие на поверхность кристалла, имеют вполне определенный импульс. Отраженные от поверхности электроны регистрируются счетчиками C_1—C_4. Положим, что счетчики C_1 и C_2 находятся в области дифракционных максимумов, а счетчики C_3 и C_4 расположены в области дифракционных минимумов.

Начнем со следующего экспериментального факта: скорость счета каждого из счетчиков остается пропорциональной интенсивности первичного пучка электронов при стремлении последней к нулю. Это обстоятельство не позволяет объяснить дифракцию какими-либо коллективными эффектами, т. е. совместным действием

*) *Замечание для читателя с более глубоким знанием квантовой механики.* Может показаться, что соотношения (27а) можно получить и другим путем, исходя из соображений об однородности физического пространства. Такой путь действительно возможен, если только принять электрон сложной и чисто квантовой механика. С другой стороны, ясно, что никакое число или любые доводы не могут убедить нас в существовании волн де Бройля, оставаясь с протоном, если нам известно, что электроны имеют волновые свойства. Точно так же чистая логика не может убедить нас в том, что постоянная $\hbar$ одинакова для всех частиц. Импульс и волновой вектор определяются принципиально независимыми способами, и нет никакой логической необходимости в том, чтобы они были связаны соотношением де Бройля.

многих электронов: каждый отдельный электрон обладает волновыми свойствами. Для большей простоты допустим, что скорости счета счетчиков C_1 и C_2 равны между собой, а скорости счета счетчиков C_3 и C_4 равны нулю.

Будем теперь считать электрон классической волновым пакетом. Можно ожидать, что такой пакет «расщепится» при отражении от кристалла: часть волны отразится в направлениях счетчиков C_1 и C_2, а в направлениях C_3 и C_4 отражения не будет. Можно ожидать, что такое «расщепление» первичной волны скажется и в других местах. Например, энергия, переносимая отраженной к счетчику C_1 «частью» волны, должна в этом случае быть долей энергии первичного электрона. В действительности на опыте мы этого *не наблюдаем*, и из опыта Дэвиссона следует, что энергия падающего и отраженного электронов *равна*, и если счетчик регистрирует электрон, то это весь электрон с полным электронным зарядом и всей массой. Как мы говорили, никто еще не наблюдал трети электрона. Электрон обладает волновыми свойствами, но не является волной в классическом смысле: электронной волной также нельзя расщепить, в противоположность классическому волновому пакету.

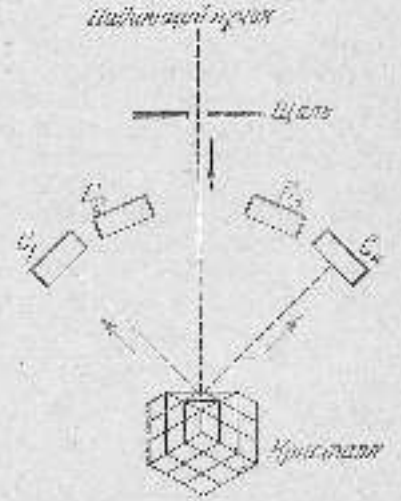


Рис. 29А. Схематическое изображение опыта для наблюдения дифракции электронов на поверхности кристалла. Подразумевается, что расстояние между кристаллом и щелью велико. Регистрируются на счетчиках C_1 полностью электроны.

30. Возможно, что читатель не вполне ясно представляет себе, что мы подразумеваем под классической волной; поэтому утверждение, что электрон не является «классической волной», не произвело на него большого впечатления. Говоря о «классической» волне, мы имеем в виду следующее: ее свойство: квадрат модуля амплитуды волны в данный момент времени и в данной точке пространства определяет такие физические величины, как, например, плотность заряда или плотность энергии. Такая идея характерна, например, для классической электромагнитной теории, где квадрат электрического и магнитного полей определяет плотность энергии.

Допустим в качестве примера, что квадрат амплитуды волны пропорционален плотности заряда. Тогда можно вычислить поток заряда в один из счетчиков, и поскольку волна «делится» между счетчиками C_1 и C_2, то мы ожидаем обнаружить счетчиком C_1 лишь половину электронного заряда. В действительности это утверждение верно лишь *для среднего* из большого числа измерений: выполнив дифракционный опыт с очень большим числом электронов, мы обнаружим, что поток заряда через счетчик C_1 действительно равен

половине полного потока, падающего на кристалл *). Однако каждый отдельный электрон регистрируется либо счетчиком C_1, либо счетчиком C_2; заряд отдельного электрона *не* расщепляется.

На языке квантовой механики мы объясняем происходящее следующим образом. Кристалл расщепляет падающую электронную волну на две части. Одна часть распространяется в направлении счетчика C_1, другая — в направлении счетчика C_2. *Интенсивность* волны в данном направлении пропорциональна квадрату модуля амплитуды волны. В квантовой механике интенсивность имеет смысл *вероятности*: величина, квадратично зависящая от амплитуды, всегда определяет *вероятность* какого-то процесса. Рассчитанный по квантовой теории поток через один из счетчиков пропорционален вероятности его срабатывания.

Вероятностная интерпретация интенсивностей является отличительной особенностью квантовой механики. Очевидно, что такая интерпретация противоречит духу классической волновой теории.

31. Вспомним рассуждения, приведенные в п. 47 гл. 4. Рассмотрим мысленный опыт, аналогичный опыту, показанному на рис. 29А, но отличающийся от него тем, что счетчики отнесены на очень большое расстояние от кристалла, скажем на расстояние в один световой год. Предположим, что счетчик C_1 отметил прохождение электрона. На основе классической волновой теории трудно понять, каким образом такие физические величины, как заряд, энергия и масса, переносимые волной, могут внезапно сконцентрироваться на счетчике C_1, хотя до этого они были распределены по большой области пространства. Эта трудность исчезает при квантовомеханической вероятностной интерпретации, которая дает согласованное описание происходящего.

32. Мы отмечали, что в дифракционном опыте, схема которого показана на рис. 29А, волна делится на две или несколько «частей». Возникает вопрос: можно ли волну, идущую в направлении счетчика C_1, заставить интерферировать с волной, испущенной в направлении счетчика C_2? В случае электромагнитных волн, расщепляемых полупрозрачным зеркалом, такая интерференция происходит. Мы ожидаем того же и для волн де Бройля. Иными словами, увидим ли мы интерференционные явления, если каким-нибудь образом отклоним волну, идущую в направлении к C_1, и «сведем» ее с волной, идущей в направлении к C_2?

На этот вопрос следует дать положительный ответ. Мы будем наблюдать интерференцию. Но следует признать, разумеется, что практически выполнение такого опыта с электронами нелегкое дело. Впрочем, нам и нет необходимости выполнять этот опыт, потому что дифракция электронов на кристалле сама по себе служит исчерпывающим доказательством существования интерференционных явлений. Каждый атом кристалла, «освещенный» приходящей электронной волной, есть источник дифрагированных волн, и совокупность этих волн образует наблюдаемую с помощью кристалла дифракционную картину. Что означает «совокупность волн образует»? Под словом «образуют» мы понимаем *сложение амплитуд* отдельных волн, в результате чего получается полная амплитуда волны, исходящей из кристалла. Квадрат этой результирующей амплитуды представляет собой интенсивность — величину, определяющую отклик детектора.

*) На практике это может оказаться неверным, но для целей этих рассуждений мы предполагаем, что электрон может пройти либо в счетчик C_1, либо в счетчик C_2.

33. В п. 39—42 гл. 4 мы обсуждали дифракцию фотонов на двух щелях. Предположим, что такой же опыт производится с электронами. Схема устройства показана на рис. 33А, который идентичен рис. 39А гл. 4. В обоих случаях рассуждения совершенно идентичны и интенсивность $I(r, \theta)$, наблюдаемая на расстояниях, больших по сравнению с расстоянием между щелями, равна

$$I(r, \theta) = 4I_1(r, 0)\cos^2\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta\right), \qquad (33a)$$

где $I_1(r, \theta)$ — интенсивность при одной открытой щели. Зависимость интенсивности от угла θ может быть определена счетчиками. Она пропорциональна скорости счета, если опыт выполняется с помощью *пучка* электронов.

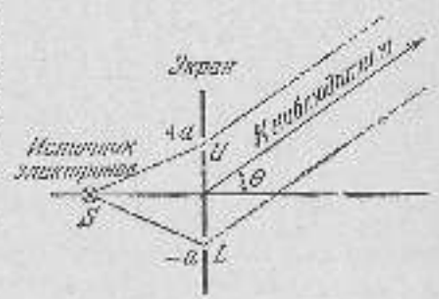


Рис. 33А. Воображаемый опыт: дифракция электронов от двух щелей. Этот рисунок подобен рис. 39А гл. 4, с тем лишь различием, что источник света S заменен источником электронов.

Опыт, полностью аналогичный этому упрощенному мысленному опыту, был выполнен и подтвердил предсказания, следующие из формулы (33а) *).

34. Чтобы наблюдать интерференционные явления, следует открыть *обе* щели, тогда каждый электрон сможет пройти через любую из них. Чтобы быть уверенным в том, что электрон прошел через данную щель, следует закрыть другую, но при этом мы, конечно, не сможем наблюдать дифракцию от двух щелей. Поместив счетчики непосредственно за щелями, мы можем сказать, через какую щель прошел электрон, но мы нарушим интерференционную картину. Скорость счета в обоих счетчиках будет одинаковой. От одного электрона может сработать один и только один счетчик. Регистрируемый электрон несет полный заряд и всю энергию первичного электрона. Нельзя предсказать заранее, какой из обоих счетчиков сработает, но можно вычислить и предсказать вероят-

*) *Möllenstedt G., Düker H.* Beobachtungen und Messungen an Biprisma-Interferenzen mit Elektronenwellen. — Zs. f. Phys., 1956, v. 145, p. 377; см. также: *Chambers R. G.* Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux. — Phys. Rev., 1960, v. 5, p. 3. В последней работе рассматривается очень интересное явление, не рассматриваемое в этой книге. Читатель может изучить его самостоятельно.

ность регистрации, найдя интенсивность волны, прошедшей через щель.

Читатель должен вернуться к рассуждениям п. 46 гл. 4, где было показано, что при дифракции от двух щелей невозможно указать, через какую именно щель прошел фотон. Те же рассуждения применимы и к электронам. Попытка создать прибор, который указал бы, через какую именно щель прошел электрон, не нарушив картину дифракции от двух щелей.

35. Несколько слов о терминологии. Обсуждая открытие волн де Бройля, мы говорили о «волнах, связанных с частицей». Это кораблекое нельзя считать удачным, ибо оно звучит так, будто бы мы имеем классическую частицу, каким-то образом движущуюся вместе с волной. Некоторые называют волну де Бройля «ведущей волной», но и это не лучше. Волна де Бройля не является волной, движущейся вместе с классической частицей и «ведущей» ее. Волна де Бройля и частица — это *одно и тоже* объект. Ничего другого нет. Реальность заключается в том, что частицы, созданные природой, имеют свойства волны. Если мы хотим подчеркнуть эту реальность, то говорим о дебройлевской волне электрона, но этот термин является синонимом слова «электрон». Извинением за использование плохих терминов на предыдущих страницах служит предварительный и отчасти исторический характер изложения. Этим оправдано, например, такое выражение, как «волна, связанная с частицей». Теперь пришло время уточнить терминологию.

Вернемся к опыту с двумя щелями. В этом опыте нет ничего, что указывало бы на классическую частицу, проходящую через одну из щелей и «управляемую» волной, проходящей через обе щели. Иначе говоря: наше описание происходящего ни в чем не выигрывает от такой идеи. Достаточно рассмотреть одну лишь волну совместно с квантовомеханической интерпретацией квадратов как вероятностей. Всякие разговоры о «скрытой» частице не имеют смысла. Они были бы обоснованы, если бы мы имели экспериментальные доказательства, что такая частица имеет свойства, не объяснимые квантовой механикой. Таких указаний нет, и мы должны отказаться от идеи о классической частице, ведомой волной.

Волновое уравнение и принцип суперпозиции

36. Теперь мы постараемся привести доводы в пользу дифференциального уравнения, описывающего распространение волн материи в *одном* пространстве и известного как уравнение Клейна — Гордона. Мы рассмотрим идеи, на которых оно покоится.

Наиболее общей идеей является предположение, что волновое уравнение, описывающее единичную частицу с массой m, должно быть *линейным* дифференциальным уравнением. Это означает, что решения такого уравнения удовлетворяют *принципу суперпозиции*: любая линейная комбинация двух решений также является решением. Кроме того, мы предполагаем, что каждое решение уравнения, удовлетворяющее некоторым разумным условиям, соответствует, по крайней мере в принципе, определенной физической ситуации. Эти предположения имеют далеко идущие физические следствия. Амплитуды волн материи могут складываться, подобно амплитудам электромагнитного поля. (Уравнения Максвелла — также *линейные* дифференциальные уравнения.)

Читатель мог заметить, что при рассмотрении дифракции волн материи от атомов на поверхности кристалла или от двух щелей мы неявно предполагали линейность. Так, мы складывали амплитуды волн от каждой щели, чтобы получить результирующую амплитуду. Мы увидим, что эта операция является следствием общего физического принципа.

37. Попытаемся теперь найти дифференциальное уравнение, которому удовлетворяли бы *любые* волны материи, описывающие частицу с массой m. Начнем с дифференциального уравнения, которому удовлетворяют все *плоские* волны:

$$\psi(x, t; p) = \exp(ix \cdot p - i\omega t). \tag{37a}$$

Мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar = c = 1$, и обозначаем импульс (равный волновому вектору) через p, а энергию (равную частоте) — через ω. Каждая такая плоская волна задается (с точностью до постоянного множителя, определяющего амплитуду волны) импульсом p.

Попробуем написать *линейное* дифференциальное уравнение (куда p явно не входит), которому удовлетворяет *любая* плоская волна. Поскольку оно линейно, то ему удовлетворяет любая линейная комбинация плоских волн и, как мы покажем, любая волна де Бройля, описывающая частицу с массой m. Энергия ω и импульс p частицы связаны равенством

$$\omega^2 - p^2 = m^2. \tag{37b}$$

Дифференцируя волновую функцию дважды по времени, имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x, t; p) = -\omega^2\psi(x, t; p), \tag{37c}$$

Дифференцируя ее дважды по координате x_1, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\psi(x, t; p) = -p_1^2\psi(x, t; p), \tag{37d}$$

и аналогично по координатам x_2 и x_3.

Принимая во внимание (37b), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x, t; p) - \nabla^2\psi(x, t; p) = -m^2\psi(x, t; p), \tag{37e}$$

где через ∇^2 обозначен *оператор Лапласа*

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \tag{37f}$$

Уравнение (37e) и есть то, что мы ищем. Мы видим, что ему удовлетворяют все плоские волны вида (37a), т. е. волны с любыми

являются p. Поэтому любые волны де Бройля, образующие суперпозицией плоских волн, также будут ему удовлетворять.

38. Волновое уравнение (37c) известно как уравнение Клейна — Гордона. Это простейшее дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют волны де Бройля. Заметим, что электромагнитные волны в *пустом* пространстве также удовлетворяют этому уравнению (для фотона $m=0$). Читатель легко проверит, что не существует такого уравнения *первого* порядка (т. е. уравнения, содержащего лишь первые производные по независимым переменным), которому удовлетворяли бы все волны де Бройля. Искомое уравнение должно быть не меньше чем второго порядка, т. к. причина этого в том, что связь (37b) между энергией и импульсом является квадратичным выражением.

Повторим снова, ибо это очень важно: уравнение (37c) описывает распространение частицы только в *пустом* пространстве, т. е. далеко от всех других частиц. Аналогично, *однородные* уравнения Максвелла, т. е. уравнения, в которых плотности тока и заряда равны нулю, описывают распространение электромагнитных волн в пространстве, свободном от токов и зарядов, т. е. вдали от других частиц.

39. Суперпозиция двух плоских волн, т. е. волна

$$\psi(x,\ t) = A' \exp\,(ix\cdot p' - i\omega' t) + A'' \exp\,(ix\cdot p'' - i\omega'' t), \qquad (39a)$$

где A' и A'' — две произвольные комплексные константы, тоже удовлетворяет уравнению (37c). Иными словами,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\psi(x,\ t) - \nabla^2\psi(x,\ t) = -m^2\psi(x,\ t). \qquad (39b)$$

Рассмотрим более сложную (непрерывную) суперпозицию плоских волн, имеющую вид

$$\psi(x,\ t) = \int\limits_{(\infty)} d^3(p)\, A(p) \exp\,(ix\cdot p - i\omega t). \qquad (39c)$$

Здесь $A(p)$ — комплексная функция вектора p. Интеграл берется по всему трехмерному p-пространству. Величина ω зависит от p согласно (37b), причем $\omega \geqslant 0$. Иными словами,

$$\omega = \omega(p) = \sqrt{p^2 - m^2}. \qquad (39d)$$

Волновая функция $\psi(x,\ t)$, определяемая (39c), также удовлетворяет дифференциальному уравнению (39b). Это наиболее общий вид волны де Бройля. Мы предполагаем, что функция $A(p)$ ведет себя достаточно «разумно», так что интеграл в (39c) имеет смысл.

40. В теории интегралов Фурье доказывается следующая теорема. Если $\psi(x,\ 0)$ — достаточно «разумная» ведущая себя функция x, и если мы определяем функцию $A(p)$ через интеграл

$$A(p) = (2\pi)^{-4} \int\limits_{(\infty)} d^3(x)\, \psi(x,\ 0) \exp\,(-ix\cdot p), \qquad (40a)$$

то

$$\psi(x,\ 0) = \int\limits_{(\infty)} d^3(p)\, A(p) \exp\,(ix\cdot p). \qquad (40b)$$

Смысл и доказательство приведенной теоремы связаны с определением «разумно ведущей себя» функции. Мы не станем доказывать здесь эту теорему, и вообще нам не понадобится теория интеграла Фурье. Наша цель — выяснить физический смысл теоремы и показать строгое значение интеграла Фурье в физике.

41. Постараемся понять смысл этой теоремы. Предположим, что $\psi(x,\ 0)$ — волновая функция де Бройля для момента времени $t=0$. С помощью интеграла (40a) можно сопоставить этой волновой функции амплитуду $A(p)$ в пространстве импульсов. Имея эту амплитуду, можно определить новую волновую функцию $\psi_1(x,\ t)$ с помощью равенства

$$\psi_1(x,\ t) = \int\limits_{(\infty)} d^3(p)\, A(p) \exp\,(ix\cdot p - i\omega t). \qquad (41a)$$

Если мы положим в этом равенстве $t=0$ и сравним его с (40b), то увидим, что $\psi_1(x,\ 0) = \psi(x,\ 0)$. Новая волновая функция удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона (39b), а в начальный момент времени $t=0$ совпадает с волновой функцией $\psi(x,\ 0)$. Это значит, что мы получили метод для решения уравнения Клейна — Гордона, пригодный для того случая, когда *начальные условия* задаются в виде функции от x в момент $t=0$.

42. Рассмотрим вопрос о единственности полученного таким методом решения уравнения Клейна — Гордона. Этот метод, в соответствии с которым мы образуем функцию $A(p)$ и $\psi_1(x,\ t)$ из данной функции $\psi(x,\ 0)$, действительно дает функцию $\psi_1(x,\ t)$, удовлетворяющую уравнению (39b). Вопрос в том, нет ли других решений дифференциального уравнения (39b), которые в момент $t=0$ совпадают с функцией $\psi(x,\ 0)$? Такое решение существует. Дифференциальному уравнению (39b) удовлетворяет также волновая функция вида

$$\psi'(x,\ t) = \exp\,(ix\cdot p + i\omega t), \qquad \omega = \sqrt{p^2 + m^2}.$$

Это решение мы называем решением для отрицательной частоты, чтобы отличить его от решения для положительной частоты, заданного выражением (37a).

Мы исключаем из рассмотрения решения с отрицательной частотой по физическим соображениям. Они не годятся для частиц с положительной энергией (т. е. с неотрицательной частотой). Однако ясно, что любому решению уравнения (39b) для неотрицательной частоты соответствует решение для того же импульса p, но отрицательной частоты, и уравнение Клейна — Гордона имеет поэтому в два раза больше решений, чем нам нужно. Происходит это потому, что уравнение (37b) имеет два решения ω для каждого p: одно положительное, а другое отрицательное. Только положительное

решению имеет физический смысл: энергия частицы — величина положительная.

Таким образом, уравнение Клейна — Гордона (39b) не определяет полностью волну де Бройля. Мы присоединим к нему условие, требующее *исключения решений с отрицательной частотой (или отрицательной энергией)*. С этим ограничением можно показать, что каждое решение уравнение (39b) однозначно определяется значением этого решения при $t=0$. Таков ответ на поставленный нами вопрос, но мы не будем заниматься доказательством этой теоремы.

43. Наиболее важный вывод из наших рассуждений заключается в том, что каждая имеющая физический смысл волновая функция де Бройля $\psi(x, t)$ может быть представлена в форме (31a). Здесь амплитуда $A(p)$ однозначно определяется равенством (40a) по волновой функции в некоторый определенный момент времени, например при $t=0$. Таким образом, любая волна материи может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн. Если угодно, мы можем считать это нашим основным предположением, что несколько снижает значение уравнения Клейна — Гордона. Оно не больше, чем красивое дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют физически приемлемые волновые функции.

44. Соответствующих выбором амплитуды $A(p)$ в импульсном пространстве интеграла Фурье (40c) [или (41a)] мы можем образовать волновые пакеты, которые будут в данный момент приближенно локализованы в некоторой ограниченной области пространства. Такие волновые пакеты будут обладать заметным значением лишь в этой области пространства, а за ее пределами при $|x|$, стремящемся к бесконечности, быстро уменьшаться до нулевого значения. Волновой пакет с такими свойствами соответствует частице, положение которой приблизительно ограничено определенной областью пространства. Ясно, что все исследуемые частицы могут быть описаны такими волновыми функциями. Мы предполагаем, конечно, что частицу легче всего обнаружить (если мы наблюдаем ее с помощью счетчика) в той области пространства, где значение волновой функции велико. Такое предположение находится в согласии с нашей квантовомеханической интерпретацией квадрата модуля амплитуды как вероятности некоторого процесса. Пока что нам достаточно понимать, что частицу легче всего найти там, где амплитуда волновой функции велика. Позже мы рассмотрим частный случай волновых функций, для которых можно будет указать точный рецепт вычисления вероятности обнаружить частицу в данной области пространства.

Уже сейчас можно сказать, что частица в любом реальном эксперименте не может быть описана простой плоской волной. У такой волны квадрат модуля амплитуды есть величина постоянная, не зависящая ни от x, ни от t, и вероятность найти частицу в любой области с единичным объемом одна и та же, т. е. не зависит от положения этой области. Поскольку все пространство образовано бесконечно большим числом таких единичных областей, то вероятность нахождения частицы в любой из них равна нулю. Вероятность

нахождения частицы в пределах *любой* конечной области также равна нулю, а это лишено физического смысла.

Таким образом, строго монохроматических волн быть не может. Возможно, однако, что в протяженно большой области пространства волну приближенно можно считать плоской волной с постоянной амплитудой. За пределами этой области волна уже должна падать до нуля. Если данная область включает и ту часть пространства, где происходит исследуемое нами явление, можно считать волновую функцию идеализированной плоской волной. В физике очень часто говорят о плоских волнах. При этом молчаливо предполагают, что волна является приближенно плоской: она похожа на плоскую волну в очень большой части пространства.

45. *Любая* волновая функция, описывающая состояние (движение) частицы с массой m, удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона (39b). Положив $m=0$, получим уравнение, которому удовлетворяют электрические и магнитные векторные поля. Уравнение Клейна — Гордона не идентично уравнениям Максвелла, и об этом не следует забывать. Можно ли считать, что в уравнениях Максвелла содержится больше, чем в уравнении Клейна — Гордона? На этот вопрос ответим утвердительно. Уравнения Максвелла описывают такое явление, как *поляризация* фотона. Состояние движения фотона не определено полностью, если известны энергия и импульс. Остается еще поляризация. Для каждого значения импульса мы имеем у фотона два линейно независимых состояния поляризации. Ими могут быть, например, состояния левой и правой круговой поляризаций.

Возникает вопрос: может ли и материальная частица находиться в различных состояниях поляризации? Ответ заключается в том, что некоторые частицы могут быть поляризованы, а другие нет. Примерами частиц, не обладающих поляризацией, являются пионы и α-частицы. Электроны, протоны и нейтроны — примеры частиц, которые можно поляризовать. У этих последних имеется внутренний момент импульса, называемый *спином*. Различные ориентации спина соответствуют разным состояниям поляризации. Пионы и α-частицы спина не имеют; в их системе покоя нет ничего, что указывало бы направление. Эти частицы сферически симметричны.

Чтобы описать состояние поляризации частицы с конечным спином, нужно, кроме переменных x и t, иметь некую переменную, отвечающую спину. Поэтому волновое уравнение для частиц со спином, например для электронов, протонов и нейтронов, должно быть более сложным, чем уравнение Клейна — Гордона (39b), но тем не менее волновая функция этих частиц будет *также* удовлетворять уравнению Клейна — Гордона. Можно сказать, что это уравнение описывает пространственно-временные свойства частицы, не обращая внимания на спин. Мы не будем здесь рассматривать квантовомеханические методы описания спина. Они в значительной мере аналогичны описанию поляризации электромагнитных волн.

46. В заключение этой части главы перепишем волновое уравнение (39b) в системе единиц СГС (или СИ). При этом в нем появятся

константы $\hbar$ и c к оно примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,\ t)-\nabla^2\psi(x',\ t)=-\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi(x,\ t). \qquad (46a)$$

Воспользовавшись соображениями размерности, читатель может проверить правильность этого уравнения. Заметим, что каждый член уравнения имеет размерность (волновая функция)/(длина)^2.

Дополнительная тема: векторное пространство физических состояний *)

47. Рассмотрим с новой точки зрения принцип суперпозиции, применимость которого к волнам материи была нашим главным предположением.

Обозначим через $\mathscr{H}$ совокупность всех волновых функций, представляющих возможные физические состояния частицы с массой m. Пусть не все из них не равна нулю. Присоединим к этой совокупности нулевую волновую функцию, которая равна нулю для всех координат и всех значений времени. Новую совокупность обозначим $\mathscr{H}$. Она обладает следующими свойствами.

1) Если ψ_1 и ψ_2 — две волновые функции из совокупности $\mathscr{H}$, то сумма $\psi_1-\psi_2$ также принадлежит этой совокупности.

2) Если ψ принадлежит $\mathscr{H}$, а c — любое комплексное число, то функция $c\psi$ также принадлежит $\mathscr{H}$.

Принцип суперпозиции волновых функций утверждает следующее: если ψ_1 и ψ_2 — две имеющие физический смысл волновые функции, а c_1 и c_2 — два любых комплексных числа, то функция

$$\psi=c_1\psi_1+c_2\psi_2 \qquad (47a)$$

также является имеющей физический смысл волновой функцией при условии, что она не обращается тождественно в нуль.

48. Совокупность $\mathscr{H}$ обладает характерными свойствами абстрактного математического объекта, называемого *абстрактным комплексным векторным пространством*. Перечислим постулаты, на которых основано существование таких объектов.

Линейное комплексное векторное пространство $\mathscr{H}$ является совокупностью элементов (называемых векторами), которые обладают следующими свойствами.

1) Из любых двух векторов ψ_1 и ψ_2 из $\mathscr{H}$ можно образовать единственный вектор ψ, принадлежащий $\mathscr{H}$, который называется суммой ψ_1 и ψ_2 и обозначается $\psi=\psi_1+\psi_2$. Операция образования суммы двух векторов удовлетворяет правилам:

а) $\psi_1+\psi_2=\psi_2+\psi_1$ для любых двух ψ_1 и ψ_2 из $\mathscr{H}$;

б) $(\psi_1+\psi_2)+\psi_3=\psi_1+(\psi_2+\psi_3)$ для любых трех векторов ψ_1, ψ_2 и ψ_3 из $\mathscr{H}$;

в) в совокупности $\mathscr{H}$ существует единственный вектор, называемый нулем, который обладает следующим свойством:

$$\psi+0=\psi \text{ для любых } \psi \text{ из } \mathscr{H}.$$

*) При первом чтении можно пропустить.

2) Рассмотрим вектор ψ из $\mathscr{H}$ и любое комплексное число c. В $\mathscr{H}$ существует единственный вектор $c\psi$, называемый произведением вектора ψ на скаляр c. Операция умножения вектора на скаляр (комплексное число) удовлетворяет правилам:

а) $(c_1c_2)\psi=c_1(c_2\psi)$ для всех векторов ψ и любых двух скаляров c_1 и c_2;

б) $(c_1+c_2)\psi=c_1\psi+c_2\psi$ для любого вектора ψ и любых двух скаляров c_1 и c_2;

в) $c(\psi_1-\psi_2)=c\psi_1+c\psi_2$ для любых двух векторов ψ_1 и ψ_2 и любого скаляра c;

г) для скаляра 1 мы имеем $1\cdot\psi=\psi$.

Эти постулаты определяют абстрактное линейное векторное пространство в поле комплексных чисел. Последняя фраза означает, что скаляры, на которые умножаются векторы, являются комплексными числами. Если мы ограничим значения этих скаляров вещественными числами, то получим определение линейного векторного пространства в поле вещественных чисел. Для краткости говорят: «комплексное векторное пространство» и «вещественное векторное пространство». Примером хорошо знакомого читателю вещественного векторного пространства является трехмерное евклидово «физическое пространство».

49. Постулат (1а) является переместительным законом сложения, а постулат (1б) — ассоциативным законом; постулат (1в) говорит о существовании и единственности нулевого вектора; постулат (2а) является ассоциативным законом умножения, а постулаты (2б) и (2в) — распределительными законами для умножения на скаляр; постулат (2г) говорит о том, что умножение «единицы» на вектор дает тот же вектор.

Из этих постулатов следует множество почти очевидных следствий, например, таких:

$$0\cdot\psi=0,\quad(-1)\cdot\psi+\psi=0,\quad(-c)\psi=-c\psi \text{ и т. д.}$$

Мы не будем перечислять здесь все тривиальные теоремы, надеясь, что читатель сам способен это сделать.

В чем значение введенного понятия об абстрактном комплексном векторном пространстве? Дело в том, что при изучении математических теорий уже достаточно встречались с различными совокупностями элементов, которые, помимо других включенных свойств, обладают еще свойством удовлетворять всем аксиомам, относящимся к абстрактному комплексному векторному пространству. Когда мы встречаемся с такого пространством, нет необходимости каждый раз рассматривать его свойства; зная перечисленные аксиомы, можно просто применить их к любой новой совокупности.

50. Теперь можно понять, что совокупность $\mathscr{H}$ всех физически допустимых волновых функций совместно с волновой функцией, тождественно равной нулю, образует *комплексное* векторное пространство. Это пространство *комплексное*, потому что его векторами являются определенные комплексные функции пространства и времени. Сравнивая постулаты для $\mathscr{H}$ со свойствами со-

совокупности волновых функций, перечисленным в п. 17, мы видим, что перечень постулатов занимает больше места. Однако большая часть этих постулатов абстрактного векторного пространства тривиально выполняется совокупностью конкретных волновых функций.

51. Заметим, что, определяя абстрактное комплексное векторное пространство, мы ничего не говорили о его *размерности*: оно может быть конечно- или бесконечномерным. Уделим этому вопросу некоторое внимание.

Совокупность N векторов $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$ в комплексном векторном пространстве $\mathscr{H}$ является *линейно независимой*, если равенство

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \psi_n = 0 \qquad (51a)$$

удовлетворяется лишь при $c_1 = c_2 = \ldots = c_N = 0$. В противном случае векторы *линейно зависимы*.

Комплексное векторное пространство имеет размерность N, если в этом пространстве можно определить совокупность N линейно независимых векторов, но нельзя определить большее число таких векторов. Векторное пространство бесконечномерно, если для *любого* целого N можно найти N линейно независимых векторов.

Векторное пространство $\mathscr{H}$ всех физически разумных волн де Бройля является *бесконечномерным*: имеется бесконечно большое число линейно независимых волновых функций.

52. Мы имели дело с решениями уравнения Клейна — Гордона, но теперь можно сказать, что совокупность решений любого линейного дифференциального уравнения образует (комплексное) векторное пространство. В рамках квантовой механики существующие в природе частицы могут быть описаны различными типами дифференциальных уравнений. Совокупность физически приемлемых решений этих уравнений всегда образует векторное пространство.

Можно выразить это иначе. Чтобы описать частицу данного типа, необходимо ввести комплексное векторное пространство и связать вектор этого пространства с возможным состоянием (движением) частицы.

Это великая идея, и лежит она в основе математической теории квантовой физики. С первого взгляда это кажется непонятным: утверждение, что *состояние* (движение) частицы описывается вектором в комплексном векторном пространстве, может показаться лишь новой формулировкой принципа суперпозиции, которому удовлетворяет решение волнового уравнения. При дальнейшем изучении квантовой физики мы найдем, однако, сколь велико значение этой идеи. Например, благодаря тому, что волновые функции образуют векторное пространство, можно упростить многие практические вычислительные задачи. Для векторного пространства вычислительные методы являются, по существу, *алгебраическими*, поэтому становятся ясными алгебраические аспекты решений дифференциальных уравнений. Следует заметить, что алгебраические методы имеют

большое преимущество (в смысле экономии вычислений) перед прямым решением дифференциальных уравнений, особенно для задач, характеризующихся специальными симметриями. В этой книге мы не сможем привести соответствующие примеры, тем не менее важно обратить внимание на указанное обстоятельство: изучение весьма абстрактной теории векторных пространств ведет к большому упрощению решений ряда практических задач. Одним из аспектов такого упрощения является упрощение обозначений. (Вопрос обозначений нельзя считать второстепенным. Неудачные обозначения могут затруднить, а удачные облегчить решение задачи.)

53. Матричная механика Гейзенберга является примером такой формулировки квантовой механики, в которой главное внимание уделено векторному аспекту теории, а волновые уравнения играют второстепенную роль. На первый взгляд кажется, что между теорией Гейзенберга и волновыми теориями, примером которых является волновая механика Шредингера, существует большое различие. В действительности же они совершенно эквивалентны и ведут к тем же самым физическим следствиям. Они имеют общую основу, которой является теория абстрактного векторного пространства. Мы не будем рассматривать теорию Гейзенберга, так как читатель еще не обладает достаточной математической подготовкой и не знает теории матриц, к тому же мы не хотим перегружать книгу отступлениями.

Первая работа Вернера Гейзенберга по квантовой механике относится к 1925 г.*). В этой работе матричная механика не была сформулирована в явной форме. В то время Гейзенберг еще не понимал, что его математический аппарат имеет матричное представление. Связь его теории с теорией матриц была вскоре выяснена в работе Макса Борна и Паскуаля Иордана, имевшей большое значение **).

54. Читатель может заметить, что исторически матричная механика *предшествовала* волновой механике Шредингера. Нет сомнения, что если бы историческая последовательность открытий была обратной, то вскоре за волновой механикой Шредингера появилась бы и матричная механика как другая формулировка волновой теории. Однако этого не произошло. Действительная последовательность открытий в настоящее время кажется почти невероятной, так как матричная механика была одних из наиболее удивительных свершений в физической теории.

Физическая эквивалентность матричной и волновой механик была показана Шредингером в 1926 г. ***).

---

*) *Heisenberg W.* Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen.— Zs. f. Phys., 1925, v. 33, p. 879.

**) *Born M., Jordan P.* Zur Quantenmechanik.— Zs. f. Phys., 1925, v. 34, p. 858. Дальнейшее развитие принципов квантовой механики произошло вскоре авторами и Гейзенбергом в работе *Born M., Heisenberg W., Jordan P.* Zur Quantenmechanik, II.— Zs. f. Phys., 1926, v. 35, p. 557.

***) *Schrödinger E.* Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen.— Ann. d. Phys., 1926, v. 79, p. 734.

Затачи

1. *Разрешающая сила* микроскопа определяет предел возможности рассмотрения с его помощью деталей исследуемого объекта. Можно назвать наименьшую силу через наименьшее расстояние между двумя точками объекта, при котором они еще видны как две отдельные точки. В оптическом микроскопе наименьшего возможного разрешения ограничено длиной волны используемого для освещения света: невозможно рассмотреть детали объекта, размеры которого много меньше длины волны. Значительно увеличить разрешающую силу позволяет электронный микроскоп. Вместо стеклянных линз в нем используются электрические и магнитные поля соответствующей конфигурации. Рассмотрим типичный электронный микроскоп, в котором освещение объекта производится пучком электронов с энергией 50 кэВ. Сравните максимальную разрешающую силу такого электронного микроскопа и оптического микроскопа.

Следует заметить, что в действительности разрешающая сила, достижимая в микроскопе (электронном или оптическом), зависит не особенностей его конструкции, а частично от того, под каким углом свет, рассеянный объектом, попадает в микроскоп. Но теоретически предельный угол гораздо меньше для электронного микроскопа, нежели для оптического, поэтому разрешающая сила электронного микроскопа гораздо ближе к максимально теоретическому значению. Подсчитайте и это, разрешающая сила электронного микроскопа во много раз больше, чем у оптического.

2. Рассмотрим газообразный гелий при комнатной температуре. Гелий — одноатомный газ, и средняя энергия его атомов при температуре T равна $E_k = \frac{3}{2}kT$. Это выражение позволяет найти среднюю скорость (и импульс) атомов гелия.

а) Вычислите среднюю скорость (в сантиметрах в секунду) атомов гелия.

б) Вычислите (в сантиметрах) длину волны де Бройля для этой средней скорости. Сравните длину волны со средним расстоянием между атомами гелия. (Предположим, что давление гелия 1 атм, и используем среднее расстояние по объемной плотности.)

Видно ожидать, что квантовые эффекты играют роль, если длина волны де Бройля будет больше среднего расстояния. Классическое описание годится в противоположном случае. В атомическом представлении газ — это некое количество обладающих массой, непрерывно сталкивающихся друг с другом, тогда как с точки зрения квантовой механики газ есть совокупность взаимодействующих волн. Поэтому интересно выполнить указанное сравнение для различных температур.

в) Плотность этого гелия равна около 0,15 г/см³. Температура затвердевания при атмосферном давлении является наименьшей достижимой температурой. По данным с задачи б) оцените длину волны де Бройля со средним расстоянием между молекулами при температуре 0,31 К.

3. Вычислите те же величины длины волны де Бройля и среднего расстояния для электронного газа в куске меди. Существуют многие металлы, в которых электроны рассматриваются как газ, заполняющий объем металла, подобно тому как атомы гелия заполняют сосуд. Допустим, что в данном металле решетка такова, что от каждого атома освобождается один свободный электрон. В этом случае расстояние между центрами равно среднему расстоянию между электронами.

4. Рассмотрим трехмерную задачу о потоке частиц на плоскость, разделяющую области R_1 и R_2. Допустим, что в больших частях областей R_1 и R_2 потенциальная энергия частицы постоянна и равна V_1 и V_2 соответственно. В области, примыкающей к границе раздела, потенциал быстро меняется от V_1 до V_2. Таким образом, в областях R_1 и R_2 не далеко от границы раздела они испытывают большую силу, перпендикулярную к поверхности. Пусть полная энергия частицы равна E, причем $E > V_1$ и $E > V_2$.

Траектория частицы будет испытывать преломление на границе раздела, и мы рассмотрим это преломление с классической и квантовомеханической точки зрения.

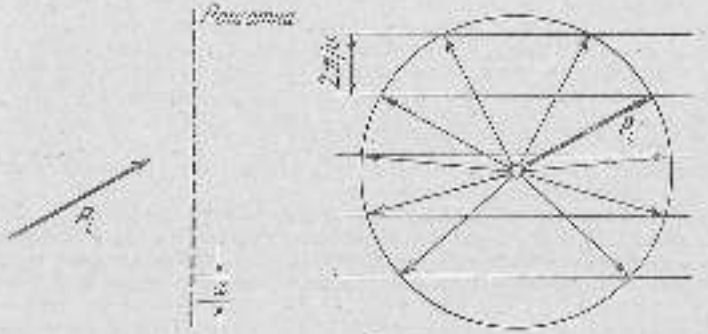
а) Получите закон преломления с помощью классической механики. В этом случае при прохождении через поверхность раздела изменяется нормальная компонента импульса частицы, но касательная и горизонтальная компоненты остаются неизменными. Затем сопоставьте энергии двух компонент в области R_2, если движение происходило в области R_1, что позволит найти закон преломления.

б) Получите закон преломления с помощью волновой механики и покажите, что он совпадает с классическим результатом. Вам нужно найти связь между энергией E, импульсом p, массой m и волновым вектором k частицы. Какие предыдущие рассуждения в тексте относились к области, для которой потенциал равен нулю, в данном случае не нужны. Попутайте, как нужно дополнить теорию в нашем случае. Здесь возникают следующие вопросы: будет ли частота одинаковой по обе стороны поверхности раздела? Будет ли сохраняться тангенциальная составляющая волнового вектора вблизи поверхности? Всегда ли верны соотношения $p = \hbar k$ и $E = \hbar\omega$?

Вы также ответили на эти вопросы: классический закон преломления, полученный в задаче а), должен быть верен. Таким образом, вы должны получить результат, который должна дать квантовая теория в этом случае.

в) Согласно классической механике частица не может быть отражена на поверхности раздела, поскольку только нормальная составляющая импульса меняется. Свет, падающий на поверхность раздела двух диэлектриков, преломляется и отражается. Что будет происходить в корпускулярной теории, т. е. в случае реальных частиц?

5. Рассмотрим дифракционную решетку, изображенную на рисунке к этой задаче. Такая решетка состоит из большого числа тонких параллельных проволок, закрепленных на плоской поверхности (стекло, металл, пластик и т. п.) и расположенных друг от друга. Для простоты рассмотрим двумерную задачу. Пусть падающая на решетку плоская волна распространяется в направлении, которое лежит в плоскости чертежа (перпендикулярной к плоскости решетки).



К задаче 5. Сечение плоской падающей дифракционной решетки. Все узлы падающей волны имеют одинаковую фазу. Расстояние между соседними штрихами решетки равно a. Справа показано правило Гюйгенса: можно построить волновой фронт, образующий дифракционный максимум. Каждый импульс отражается от проволочки окружности, радиус которой равен длине волны, и образует прямолинейный волновой фронт, разрешенный законами кристаллической составляющей падающего импульса. Показанные на рисунке векторы соответствуют углам падения и отражения импульса.

Пусть частота (энергия) волн равна ω, а полный вектор p (импульс) равен p_0. Найдите полное напряжение дифрагированных волн и покажите, что это можно сделать таким образом. Частота с импульсом p_0 совпадает с решетчатой, после отражения от импульс будет p_0. В этом отражении энергия частицы не изменится, но решетка передаст импульс $q = p_1 - p_0$. Покажите, что потенциал напряжения дифрагировавших волн определяется следующим простым условием. Компонента перпендикулярного импульса q в направлении решетки (вертикальная компонента на рисунке) должна быть кратна величине $2\pi/a$, где a — расстояние между штрихами. Таким образом, вертикальная составляющая передаваемого импульса «квантуется».

6. а) Рассмотрим дифракцию видимого света на решетке, показанной в предыдущей задаче. Пусть постоянная решетки a равна двум длинам волн света, а

угол падения волны равен 25°. Найдите все углы, под которыми выходят дифрагированные волны. Сделайте чертеж.

б) Пусть наш мысленный опыт поместим решетку между двумя пластинами из стекла, имеющего показатели преломления 1,51 (крон) и 1,74 (флинт). Толщина каждой пластины равна 5 см. Свет падает со стороны пластины из крона. Длина волны, постоянная решетки и угол падения те же, что и в первой части этой задачи. Найдите направления выхода дифрагировавших лучей из нашей двухслойной пластинки и сравните результат с первой частью задачи.

7. В опыте Дэвиссона — Джермера электроны с энергией 88 эВ падают перпендикулярно к поверхности металлического кристалла, атомы которого расположены в квадратной решетке с периодом $a = 2{,}9$ Å. Начертите схему, на которой отмечены точки пересечения дифрагированных лучей с плоскостью, параллельной поверхности кристалла и находящейся от нее на расстоянии 5 см. Чертеж должен быть в соответствующем масштабе, чтобы показать все дифрагированные лучи.

8. Некогда жил физик, который вычислил опытные длины волн для ряда металлов. В своем отчете он написал: «С металлом A я наблюдал дифракционную картину трехкратной симметрии, с металлом B — четырехкратной, с металлом C — пятикратной, с металлом D — шестикратной». (Картина имеет n-кратную симметрию, если она не меняется при повороте на угол $2\pi/n$.) Обсудите подробно этот отчет.

9. Нейтроны из реактора проходят через половину из поликристаллического бериллия. Это вещество выбрано потому, что оно слабо поглощает нейтроны. Оказывается, что нейтроны, вышедшие из колонны, «холодные», их кинетическая энергия соответствует температуре, меньшей 50 К. «Теплые» нейтроны, кинетическая энергия которых отвечает комнатной температуре, сильно рассеиваются бериллием. Можете ли вы объяснить это явление?

10. Предположим, что волновая функция $\psi(x, t)$ является решением уравнения Клейна — Гордона для положительной частоты (масса частицы равна m). Пусть это решение описывает частицу (волновой пакет), достаточно четко ограниченную в пространстве и движущуюся в более или менее хорошо определенном направлении. Рассмотрим функцию $\psi_R(x, t)$, заданную следующим образом:

$$\psi_R(x, t) = \psi(-x, t).$$

а) Покажите, что $\psi_R(x, t)$ также является решением уравнения Клейна — Гордона для положительной частоты.

б) Волновая функция $\psi_R(x, t)$ отвечает другому состоянию движения частицы. Поясните физически, как это состояние движения $\psi_R(x, t)$ связано с состоянием движения, описываемым волновой функцией $\psi(x, t)$. (Здесь может быть высказано менее и более простое положение. Подумайте сперва о «средних» траекториях в обоих случаях.)

11. Эта задача аналогична предыдущей, но труднее. Рассмотрим функцию $\psi_T(x, t)$, заданную условием

$$\psi_T(x, t) = \psi^*(x, -t),$$

где звездочка означает комплексное сопряжение.

а) Покажите, что $\psi_T(x, t)$ также является решением уравнения Клейна — Гордона для положительной частоты.

б) Покажите физически, как связаны друг с другом состояния движения, описываемые волновыми функциями $\psi_T(x, t)$ и $\psi(x, t)$.

Дополнительная литература

Существует огромная литература по теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Читатель познакомится с ней в свое время, но сейчас мы обратимся его вниманию на монографию, сыгравшую большую роль в физике:

Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1 и 2.— М.: Гостехиздат, 1951; 2-е изд.— М.: Мир, 1964.

Во втором томе рассмотрены дифференциальные уравнения в частных производных. Первый том посвящен разделам математики, особенно важным для физики: теории Штурма — Лиувилля, теории матриц и векторных пространств, теории некоторых обычных линейных дифференциальных уравнений.

Важнейшие области математики, которые позже сыграли большую роль в создании математической строгости квантовой механике, были развиты почти одновременно с ней. Д. Гильберт из Геттингенского университета был одним из ведущих математиков в этой области. Бесконечномерное гильбертово пространство, столь важное для современной теории квантовой механики, названо в его честь гильбертовым пространством. Удивительно, Гильберт не имел почти никакого отношения к своей теории линейных пространств, но открытия квантовой механики способствовали дальнейшим исследованиям, связанным с операторами в гильбертовом пространстве. Этот период характеризуется плодотворным взаимодействием между математикой и физикой.

Фок Владимир Александрович. Математические основы квантовой механики.— М.: Наука, 1976.

Квантовая механика рассмотрена во многих учебниках по квантовой механике. В качестве полезной книги, в которой рассмотрен и применен алгебраический подход к квантовой механике, можете рекомендовать:

Дирак П., Лейтнер Р., Сандс М. Физические лекции по физике. Вып. 8 и 9. Квантовая механика.— М.: Мир, 1965, 1967.

В данной книге очень слабо затронута физика твердого тела. Из вводных мы рекомендуем

Киттель Ч. Введение в физику твердого тела.— М.: Физматгиз, 1963. В ней рассмотрено, в частности, строение кристаллов, теория дифракции рентгеновских лучей, теория фононов.

Предоставляем читателю также следующие статьи из «Scientific American»:

Darrow K. The Quantum Theory, 1932, March, p. 47.

Darrow K. Davisson and Germer, 1948, May, p. 50.

Schrödinger E. What is Matter, 1953, Sept., p. 52.

Morrison P., Morrison E., The Neutron, 1951, Oct., p. 14.

Gamow G. The Principle of Uncertainty, 1952, Jan., p. 51.

ГЛАВА 6

ПРИНЦИП НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ И ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Принцип неопределенностей Гейзенберга

1. В двух предыдущих главах мы узнали, что все частицы обладают волновыми свойствами. Двигающаяся частица, импульс которой равен p, ведет себя подобно волне, причем соотношение между длиной волны и импульсом частицы $\lambda = h/p$ является *универсальным* соотношением, справедливым для любых частиц. Мы обращали внимание читателя на то, что волновые свойства частицы нельзя свести к представлению о некоторой хвостатой волне, каким-то образом связанной с классической частицей. Свойства реальной физической частицы нельзя свести к свойствам более привычных нам объектов. Волновые и корпускулярные свойства физических частиц являются различными аспектами их внутренней природы.

2. Мы показали, что состояние движения частицы может быть описано комплексной волновой функцией $\psi(x, t)$. Для изолированной частицы эта волновая функция удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона с тем дополнительным условием, что в фурье-представлении волновой функции входят только положительные частоты. Мы показали, что удовлетворяющее этому условию решение можно получить, если задать решение уравнения Клейна — Гордона $\psi(x, 0)$ в момент времени $t = 0$ (или в любой другой произвольный момент времени). Эта начальная волновая функция совершенно произвольна, и мы имеем поэтому чрезвычайно большое разнообразие волн, соответствующих различным состояниям движения частицы.

Важно представлять себе, что волна в квантовой механике не должна быть подобна синусоидальной волне. Такие подобные являются совершенно частным случаем. Уравнение Клейна — Гордона не накладывает никаких ограничений на вид волны в *данный момент*, но определяет зависимость волновой функции от времени. Это ограничивает, однако, возможный характер волны для двух различных моментов времени. Волновая функция $\psi(x, t_1)$ в момент времени $t = t_1$ однозначно определяет волновую функцию во все другие времена и тем самым однозначно определяет состояние движения частицы. В этом смысле квантовая механика является детерминистической теорией.

3. Рассмотрим теперь состояние движения частицы, описываемое начальной волновой функцией $\psi(x, 0)$. Что можно сказать о положении и импульсе частицы в момент времени $t = 0$?

Мы говорили, что амплитуда волны должна быть истолкована в понятиях вероятности. Частицу вероятнее всего обнаружить там, где амплитуда волновой функции велика. Более точно, квадрат модуля волновой функции в данной точке является мерой вероятности обнаружить частицу (например, с помощью «небольшого» прибора) вблизи этой точки. Если начальная волновая функция такова, что ее амплитуда равна нулю всюду за пределами малой области, то можно утверждать, что (в момент $t = 0$) частица находится в пределах этой области и ее положение известно довольно точно. С другой стороны, если начальная волновая функция распространяется на большую область, в пределах которой ее амплитуда мало меняется, то нельзя приписать частице определенное положение; ее положение в момент времени $t = 0$ известно с большой неопределенностью.

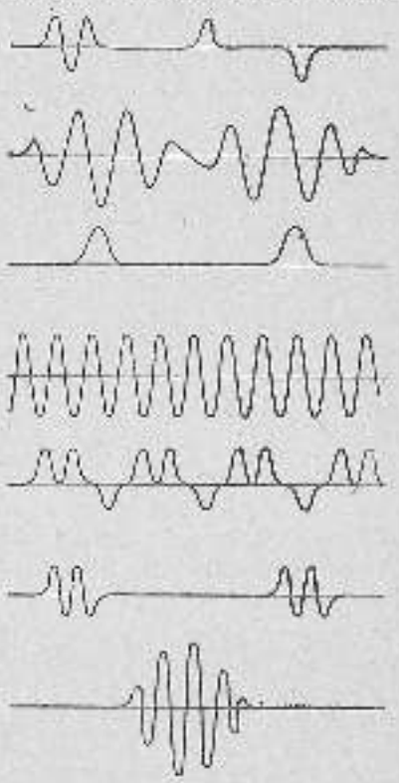


Рис. 2А. Различные типы волн в пространстве. Волны в квантовой механике, как правило, не синусоидальные и данный момент времени. Пространственная часть волновой функции и может не содержать осциллирующей части. В общем случае волновая функция является комплексной.

Итак, из волновых представлений естественно следует, что точное положение частицы (в данный момент) в общем случае не может быть задано. Точность, с которой известно положение частицы, зависит от ее состояния движения. Возможны волновые функции (состояния движения), которые определяют положение частицы с малой погрешностью, но возможны и волновые функции другого типа, определяющие положение частицы с погрешностью, не лучшей, например, светового года.

4. Аналогичные соображения справедливы и для другой переменной, т. е. для импульса. Импульс и длина волны связаны соотношением де Бройля, поэтому интуитивно ясно, что если точно знать импульс, если плохо определена длина волны. Чтобы указать длину волны, необходимо, чтобы волновая функция имела хотя бы некоторые свойства периодичности. Протяженная синусоидальная волна имеет определенную длину волны, но для нерегулярной волны произвольной формы понятие длины волны вообще неприменимо. Таким образом, точность определения импульса зависит от состояния движения частицы: импульс может быть определен весьма точно в одном состоянии и лишь очень грубо в других.

Гейзенберг показал, что, хотя не существует пределов точности, с которой можно определять *либо* импульс, *либо* положение частицы, имеется принципиальный предел для точности определения этих

величин *в один и тот же момент времени* (т. е. для данной волновой функции). Это утверждение имеет точную математическую формулировку в виде знаменитого *принципа неопределенностей* Гейзенберга, сформулированного им в 1927 г.*). Мы получим этот принцип с помощью простых интуитивных соображений.

Рис. 4А. Пример волнового пучка для волны с хорошо определенной длиной волны и плохо определенным импульсом. Для такого пучка импульс определен очень плохо. Это справедливо и для всех волн, изображенных на рис. 5А, за исключением четвертой волны сверху

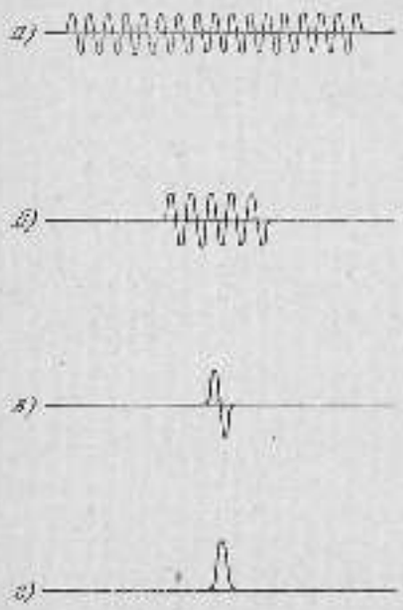


Рис. 5А. К отсутствию синусоидальности для координаты и импульса. Точно определенное положение требует «короткого пучка» волн. Точно известный импульс требует протяженного пучка монохроматических волн. Оба требования исключают друг друга. *а*) Положение определено плохо, импульс определен хорошо; *б*) положение определено лучше, импульс определен хуже; *в*) положение определено хорошо; импульс определен плохо; *г*) положение определено очень хорошо, импульс определен очень плохо

5. Начнем с волн де Бройля в одномерном пространстве. Для простоты возьмем систему единиц, в которой $\hbar=1$. В этом случае длина волны и импульс будут связаны формулой $\lambda=2\pi/p$ и понятия волнового вектора и импульса совпадают.

Наши рассуждения будут основаны на графическом изображении волн. На рис. 5А изображены четыре различных волновых пучка конечной протяженности (независимой переменной является координата x). В общем случае волновая функция является комплексной величиной и ее графическое изображение вызывает трудности. Мы можем, однако, изобразить в отдельности вещественную и мнимую части волновых функций, и читатель может считать, что на рис. 5А изображена одна из них.

На всех графиках показаны «прерванные» синусоидальные волны, описываемые функцией $\sin(px)$ в той области, где они не исчезают. Такие волны, «обрезанные» с обоих концов, разумеется, не являются истинно синусоидальными. Поэтому отвечающая им длина волны (и импульс) не может быть точно определена: точным значением этих величин отвечает «чистая» синусоида, простирающаяся от $-\infty$ до $+\infty$.

*) *Heisenberg W.* Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.— Zs. f. Phys. 1927, v. 43, p. 172.

Обращаясь к рис. 5А, замечаем, что чем точнее известно положение частицы, тем хуже мы знаем ее импульс. Обозначим неопределенность в положении x через Δx. В качестве грубой меры неопределенности положения можно принять длину волнового пучка; если он состоит из n полных волн, то

$$\Delta x \sim n\lambda = 2\pi n/p, \tag{5a}$$

где λ — длина волны. Однако ясно, что чем больше число полных колебаний в волновом пуге, тем точнее известна длина волны. В качестве грубой меры *относительной* неопределенности для длины волны можно принять величину

$$\frac{1}{n} \sim \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta p}{p}, \tag{5b}$$

где Δp — неопределенность в импульсе (поскольку $\lambda=2\pi/p$, то $\Delta\lambda/\lambda=\Delta p/p$).

Из (5a) и (5b) получаем следующее утверждение о порядке величины произведения $\Delta x\cdot\Delta p$:

$$\Delta x\cdot\Delta p \sim 1. \tag{5c}$$

Мы опустили множитель 2π, так как нас интересует лишь оценка порядка величины. Наше определение Δx и Δp не точное, а лишь качественное, поэтому и результат лишь качественный.

6. Выражение (5c) является соотношением неопределенностей для частного случая волн, показанных на рис. 5А. Соотношение неопределенностей, справедливое для общего случая *любых* волн, имеет форму *неравенства*. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим волну другого типа, показанную на рис. 6А. Очевидно, что у этой волны приблизительно та же неопределенность в положении, что и у волны *а*) на рис. 5А, но неопределенность в импульсе (в длине волны) здесь значительно больше. Поэтому более правильное выражение принципа неопределенностей имеет вид

Рис. 6А. Для этого волнового пучка, показанного здесь, как и для изображенного на рис. 5А, *а*, в данном случае известно x, но импульс во втором случае гораздо хуже, чем на рис. 5А, *а*. Соотношение неопределенностей имеет вид неравенства; можно представить себе волну, для которой неопределенности как положения, так и импульса произвольно велики

$$\Delta x\cdot\Delta p \geqslant 1. \tag{6a}$$

Это то же самое соотношение неопределенностей, которое мы весьма кратко обсуждали в гл. 1.

7. Рассмотрим теперь волны в трехмерном пространстве. Заметим прежде всего, что все сказанное об одномерной волне применимо к каждой координате отдельно. Таким образом, если x_α и p_α ($\alpha=1, 2, 3$) — декартовы координаты и импульсы частицы, то

$$\Delta x_\alpha \Delta p_\alpha \geqslant 1, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{7a}$$

С другой стороны, частица может быть весьма точно локализована в *пространстве*, скажем, в направлении 1, а ее импульс может быть известен с большой точностью для направления 2. Читатель должен вообразить волновой пакет, стянутый в узкую область, параллельную оси 2, но далеко распространившийся вдоль этой оси. В этом случае координата x_1 частицы известна точно. В направлении оси 2 мы можем иметь почти периодическую волну, распространившуюся на большое расстояние, а это означает точное знание импульса p_2. При этом точность определения координаты x_2 частицы никак не ограничена точностью определения компоненты импульса p_2, а это означает, что в общем случае

$$\Delta x_\alpha \cdot \Delta p_\beta \gtrsim 0 \text{ для } \alpha \neq \beta. \tag{7b}$$

Неравенства (7a) и (7b) являются соотношениями неопределенностей для волн (частиц) в трехмерном пространстве.

8. Чтобы развить эти идеи, вернемся к представлению произвольной волны в виде суперпозиции плоских волн:

$$\psi(x,\ 0) = \int\limits_{(\infty)} d^3(p)\, A(p) \exp(ix \cdot p), \tag{8a}$$

где

$$A(p) = (2\pi)^{-3} \int\limits_{(\infty)} d^3(x)\, \psi(x,\ 0) \exp[-ix \cdot p]. \tag{8b}$$

Мы обсуждали это представление в п. 39—44 гл. 6, где было сказано, что из любого из этих выражений следует другое.

Допустим теперь, что функция $A(p)$ локализована в очень узкой области пространства импульсов. Это означает, что $A(p)$ велика лишь в непосредственной близости к некой точке $p = p_0$, а повсюду в другом месте мала. Для простоты можно даже считать $A(p)$ *всюду, за исключением* узкой области около p_0, малой всюду. Обращаясь к интегралу (8a), мы интуитивно ожидаем, что функция $\psi(x, 0)$ не будет ограничена малой областью пространства, а будет иметь вид приближенно плоской волны с импульсом p_0. Действительно, рассмотрим крайний случай, когда ширина области, где $A(p)$ отлична от нуля, стягивается к нулю. При переходе к такому пределу амплитуда $A(p)$ должна возрастать, в предельном случае интеграл, дающий значение $\psi(x, 0)$, обратится в нуль!

Читатель видит, что чем лучше локализована функция $A(p)$, тем шире область функции $\psi(x, 0)$. Существует, однако, замечательная симметрия между уравнениями (8a) и (8b), из которой следует, что чем лучше локализована функция $\psi(x, 0)$, тем более размыта функция $A(p)$. Если функция $\psi(x, 0)$ хорошо локализована, т. е. исчезает за пределами узкой области вблизи значения x_1, то положение частицы хорошо определено. В этом случае плохо определен ее импульс, как это можно видеть из формулы (8a).

9. Эти идеи допускают более точное выражение, и можно связать степень «концентрации» функции $A(p)$ со степенью «концентрации» функции $\psi(x, 0)$. Результатом является *соотношение неопределенности*: точность определения положения обратно пропорциональ-

на точности определения координаты. Мы обещали читателю, что в этой книге он не будет иметь дела с теорией интеграла Фурье, поэтому лишены возможности познакомить строгий вывод соотношения неопределенностей*). Нашей целью было лишь качественное понимание этого соотношения. Как мы видим, сама идея предельно проста. Если положение частицы задано точно, волновой цуг должен быть очень коротким. Но это условие несовместимо с точным знанием импульса, когда волновой цуг должен содержать большое число полных периодов синусоидальной волны. Из волнового описания частицы немедленно следует, что ее положение и импульс нельзя *одновременно* определить с неограниченной точностью.

Вернемся к краткому рассмотрению физического значения соотношений неопределенностей в п. 20—26 гл. 1. Теперь должно быть совершенно ясно, что эти соотношения не связаны с неустранимыми «возмущениями», которые наши измерительные приборы вносят в классическое движение классической частицы. Собло соотношений неопределенностей в том, что они устанавливают пределы, за которыми классические идеи перестают действовать. Для квантовомеханической частицы (волнового пакета) такие понятия, как одновременно измеримые *точное* положение частицы и *точное* значение импульса, просто не имеют смысла.

10. При каких условиях электрон можно считать классической частицей, подобной заряженному «бильярдному шару»? Эти условия аналогичны условиям справедливости геометрической, или лучевой, оптики: линейные размеры прибора, через который проходит частица, должны быть гораздо больше длины волны. В противном случае мы будем наблюдать характерные для волн дифракционные явления. Обозначим через d линейный размер прибора, которым может быть диаметр линзы или ширина щели, а через λ — дебройлевскую длину волны частицы. Чтобы классическое описание было достаточно точным, необходимо, чтобы $d \gg \lambda$. Так как $\lambda = 2\pi/p$, то это соотношение можно записать в форме

$$dp \gg 1. \tag{10a}$$

В системе единиц СГС написанное соотношение имеет вид $d(p/\hbar) \gg 1$. Это тот же критерий, который мы обсуждали в п. 20—26 гл. 1.

11. Для иллюстрации применения соотношения неопределенностей попробуем выяснить, с какой точностью можно задать классическую траекторию в частном случае электрона. Рассматриваемая ситуация показана на рис. 11А и 11В. Сквозь экран падает пучок электронов, каждый из которых описывается плоской волной. Экран имеет щель шириной d. Мы хотим выбрать такое значение d, чтобы пятно на расположенном справа экране, созданное проходящим через щель пучком, было возможно меньше. Расстояние между обоими экранами равно l.

*) Обычный вывод соотношений неопределенностей см. в книге: *Шифф Л.* Квантовая механика. М.: ИЛ, 1957.

Предположим, что все электроны имеют один и тот же начальный импульс p. У электрона, проходящего через левый экран, неопределенность в положении в пространстве равна d. Поэтому

Рис. 11А. Пытаясь создать узкий пучок электронов, отправляем целый широкий пучок, сквозь щель и на экран сзади. Пучок дифрагирует на щели, и неопределенность $\Delta\theta$ в угле, под которым электрон покидает щель, вместе пропорциональна ее ширине d. Размер пятна на экране сзади $\Delta x \sim d + L\,\Delta\theta$.

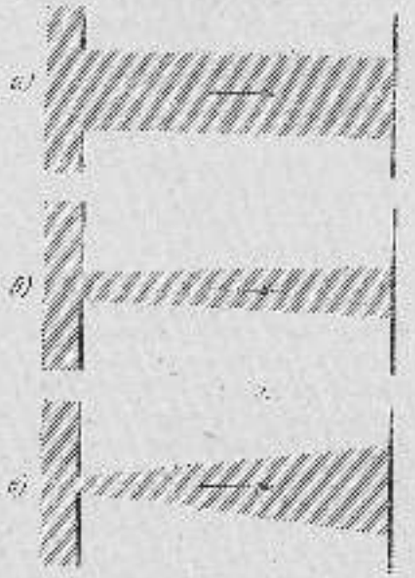


Рис. 11Б. Эти три схемы показывают, что ширина пучка зависит от ширины d входной щели. Заметим, что на всех схемах длина волны электронов меньше толщины щели. В случае *б)* пятно на экране имеет такой же размер, что и ширина входной щели. Если сильно уменьшить размер входной щели, как это показано в случае *в)*, пятно все же становится большим за счет дифракции пучка. Наименьшее пятно мы получим, выбрав $d \sim \sqrt{\lambda L}$. В этом случае размер пятна будет всего лишь порядка $\sqrt{\lambda L}$. Такой оптимальный выбор показан в случае *б)*.

неопределенность в импульсе

$$\Delta p \sim \frac{1}{d}. \tag{11a}$$

Предположим, что Δp мало по сравнению с p. В этом случае мы можем выразить (11а) через неопределенность $\Delta\theta$ в значении угла θ (угол отсчитывается от направления первичного пучка), под которым электрон выходит из экрана, и

$$\Delta\theta \sim \frac{\Delta p}{p} \sim \frac{1}{pd}. \tag{11b}$$

Пусть Δx измеряет размер пятна на правом экране. Величина Δx определяется двумя факторами — размером отверстия в левом экране и расширением волны вследствие дифракции на щели (рис. 11А). Таким образом,

$$\Delta x \sim d + L\,\Delta\theta \sim d + L/pd. \tag{11c}$$

Поскольку длина волны $\lambda = 2\pi/p$, то можно записать (11с) в виде

$$\Delta x \sim d + \lambda L/d, \tag{11d}$$

если пренебречь множителем 2π, а последнем слагаемом. Здесь мы хотим оценить только порядок величины, и поскольку конечный результат имеет более удобный вид без множителя 2π, то мы его опускаем.

Итак, если величину d сделать очень малой, то второе слагаемое в (11d), возникающее вследствие дифракции, станет очень большим, а если d велико, то велико первое слагаемое. Нетрудно вычислить оптимальное значение d_0, для которого величина Δx, оцененная по (11с), проходит через минимум. Мы находим

$$d_0 = \sqrt{\lambda L}, \quad \Delta x_{\min} = 2d_0 = 2\sqrt{\lambda L}. \tag{11e}$$

В оптимальном случае размер пятна на экране будет в два раза больше ширины щели. (Множитель 2 не следует понимать буквально. Вспомним, что мы оцениваем порядок величины и считаем $2\pi \sim 1$.) Пусть $L = 1$ м, а энергия электронов равна 150 эВ. Этой энергии отвечает длина волны $\lambda \sim 1$ Å, и по оценке (11е) следует, что размер пятна на правом экране может быть порядка 0,02 мм. Таким образом, с макроскопической точки зрения траектория электрона между двумя экранами оказывается достаточно узкой.

12. Подробное изучение условий, при которых физическую систему можно описывать законами классической физики,— интересная, но не простая задача. Иногда поступают следующим образом. Начинают с того, что решают задачу квантовомеханически, а затем полагают $\hbar = 0$, чтобы перейти к классическому пределу. Такой подход недостаточно строг. Мы не можем полагать $\hbar = 0$, так как знаем, что в действительности $\hbar = 1$ (в соответствующих единицах). *Истинная* проблема в том, чтобы показать, каким образом система, в действительности управляемая законами квантовой механики (как вообще все системы), *кажется* с достаточной точностью управляемой классическими законами. При рассмотрении этой проблемы естественно пользоваться системой единиц, в которой $\hbar = 1$, как было сделано в нашем примере.

Вопрос о достижении классического предела имеет много аспектов. Его нельзя исчерпать с помощью какого-либо одного утверждения. Если, например, понимать под «классическим пределом» классическую динамику частиц, то условием его достижения является ненаблюдаемость дифракционных явлений. Мы обсуждали это условие в предыдущем пункте. Чтобы волновой пакет был хорошо локализован и мы могли бы указать его траекторию (интерпретируемую как траектория частицы), линейные размеры щелей,

определяющих траекторию, должны быть велики по сравнению с длиной волны де Бройля. Классической динамикой не исчерпывается, однако, классический предел. Важно также выяснить условия применимости классической электромагнитной теории. Они сводятся не к отсутствию дифракционных явлений, а заключаются в том, чтобы отдельные фотоны не проявляли себя как частицы.

Мы не станем больше заниматься вопросом о классическом пределе, для дальнейшего достаточно грубых качественных представлений. Читатель должен сам обдумать этот вопрос. Наши рассуждения показывают, что условия осуществления классического предела зависят от рассматриваемой системы, и это обстоятельство нельзя забывать.

13. В качестве любого примера плодотворного применения соотношения неопределенностей попытаемся оценить с его помощью энергию связи атома водорода. Мы обещали сделать это в п. 26 гл. 2. Воспользуемся системой единиц СГС, в которой соотношение неопределенностей имеет вид

$$\Delta x\ \Delta p \geqslant \hbar. \tag{13a}$$

Допустим, что классическое выражение для полной энергии электрона в электростатическом поле протона

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \tag{13b}$$

имеет смысл и в квантовой механике. Переменная p характеризует импульс в электронной волне, а переменная r является некоторой «координатой положения» для волны.

Первый член в (13b) всегда положителен, второй — отрицателен. В основном состоянии системы энергия имеет минимальное из возможных значений. Мы знаем, что она должна быть отрицательной, в противном случае не будет связанного состояния. В *классической* теории, выбрав орбиту электрона достаточно малого радиуса, можно обеспечить сколь угодно малое значение энергии связи. Для такого состояния неопределенность Δ *положения* будет мала, и из квантовомеханического принципа неопределенностей немедленно следует, что в этом состоянии должна быть велика неопределенность в значении импульса, что означает, что величина $p^2/2m$ велика. Иными словами, сделав подходящий выбор малого r, потенциальную энергию большой (и отрицательной), мы получим большое значение кинетической энергии, и если последняя преобладает, то значение полной энергии будет большим. С другой стороны, взяв малое значение p, мы будем иметь небольшую кинетическую энергию, но тогда r будет велико и отрицательная потенциальная энергия мала. Легко понять, что существует некое оптимальное значение радиуса, для которого полная энергия принимает минимальное значение.

14. Чтобы увидеть, каким образом обмен между кинетической и потенциальной энергией приводит к установлению связанного состояния, сделаем некоторые *грубые* приближения. Заменим неопределенность Δ положения на радиус r, а неопределенность в импульсе на сам импульс p и перепишем соотношение неопределенностей в виде

$$rp \sim \hbar. \tag{14a}$$

Для определенности предположим, что

$$rp = \hbar. \tag{14b}$$

Воспользуемся теперь равенством (14b), чтобы исключить r из выражения (13b) для полной энергии. Получаем

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2 p}{\hbar}. \tag{14c}$$

Полная энергия имеет минимум в точке $p = p_0$, которую мы получим, приравняв нулю производную $\partial E/\partial p$:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_{p=p_0} = \frac{p_0}{m} - \frac{e^2}{\hbar} = 0. \tag{14d}$$

Решая это уравнение относительно p_0 и полагая $r_0 = \hbar/p_0$, имеем

$$p_0 = e^2 m/\hbar, \quad r_0 = \hbar^2/e^2 m, \tag{14e}$$

а также

$$E = \frac{p_0^2}{2m} - \frac{e^2 p_0}{\hbar} = -\frac{e^4 m}{2\hbar^2} = -R_\infty. \tag{14f}$$

Сравним этот результат со значением энергии, полученным в п. 23 гл. 2. Мы видим, что оба результата совпадают. То же следует сказать и о радиусе r_0, совпадающем со значением борровского радиуса, $r_0 = a_0 = 0{,}53 \cdot 10^{-8}$ см.

15. Разумеется, совпадение наших грубых оценок с точным значением энергии связи нужно считать «случайным». Важно лишь то, что мы получили верный порядок величины как для энергии свя-

Рис. 15А. Если электрон находится в небольшой области около ядра, его кинетическая энергия велика. В этом случае из-за соотношения неопределенностей импульс, а значит, и кинетическая энергия электрона будут большими.

Рис. 15Б. Чтобы кинетическая энергия была небольшой, электрону должна быть доступна большая область пространства. Электрон должен быть достаточно далеко от ядра, чтобы импульс, а значит, и кинетическая энергия были малы. В этом случае из-за большого отрицательного значения потенциальной энергии (ядро притягивает электрон) полная энергия будет иметь небольшое по величине отрицательное значение.

зи, так и для размера атома. А что, основываясь на столь грубых рассуждениях, можно понять, почему атомный электрон не падает на ядро. Структура атома является результатом компромисса. Энергия основного состояния — это наименьшая энергия, при которой

возможно существование этого, и оно является суммой двух слагаемых противоположного знака. Если мы сделаем отрицательное слагаемое (потенциальную энергию) больше, сконцентрировав электронную волну в небольшой области вблизи ядра, то увеличим кинетическую энергию, ибо такая волна отвечает большому импульсу. С другой стороны, нельзя слишком сильно увеличить размеры волнового пакета, так как при этом слагаемое с потенциальной энергией станет несущественным. Основное состояние отвечает аналитическому возможному компромиссу. Эти рассуждения иллюстрирует рис. 18А и 18Б.

Наши рассуждения показывают также, что идея о классической орбите электрона в атоме несовместима с волновыми представлениями. В предыдущем пункте мы показали, что неопределенность положения электрона в атоме водорода должна быть порядка боровского радиуса a_0. Эта оценка координаты в равной мере применима для всех возможных направлений в пространстве, и поэтому понятие о круговой орбите с радиусом a_0 теряет смысл.

16. Воспользуемся теперь принципом неопределенностей для грубой оценки ядерных сил. Рассмотрим нуклон, входящий в состав ядра, которое мы представляем себе в виде сферы радиуса $r_0 \approx \approx 1{,}2 \cdot 10^{-13}$ см. Из соотношения неопределенности следует, что импульс нуклона имеет порядок $p \sim \hbar/r_0$; таким образом, его кинетическая энергия должна быть порядка

$$E_k \sim \frac{1}{2M_p}\left(\frac{\hbar}{r_0}\right)^2 \sim 10\,\text{МэВ}. \tag{16a}$$

Поскольку нуклон связан в ядре, среднее значение потенциальной энергии $\langle U \rangle$ должно быть отрицательно и по модулю больше кинетической энергии:

$$-\langle U \rangle \gg 10\,\text{МэВ}. \tag{16b}$$

Выполненная оценка очень груба, но дает, однако, представление о порядке величины ядерных сил.

17. Те же доводы, основанные на принципе неопределенностей, показывают, что ядро не может состоять из протонов и электронов. Из равенства (16a) следует, что кинетическая энергия обратно пропорциональна массе частицы. Поэтому средняя потенциальная энергия электронов в ядре была бы приблизительно в 2000 раз больше оценки (16b). Это означало бы несовместимость с хорошо известным экспериментальным фактом, что электрон слабо взаимодействует с ядром и что доминирующее взаимодействие электрона является электромагнитным взаимодействием.

18. Покажем, что время и частота связаны соотношением неопределенностей, которое совершенно аналогично принципу неопределенностей, связывающему координату и импульс. Обозначим через $f(t)$ амплитуду (комплексную) некоторого физического процесса. Например, $f(t)$ может быть амплитудой электромагнитной волны в заданной точке пространства в любой момент времени t. Если волны испускаются атомом, они представляют собой волновой пут конечной длины, и амплитуда стремится к нулю при t, стремящемся к $+\infty$ или $-\infty$. Такую волну можно представить как результат суперпозиции *монохроматических* волн. Разложение волны на монохроматические компоненты выражается с помощью интеграла Фурье

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega) e^{-i\omega t}, \tag{18a}$$

где функция

$$g(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t) e^{i\omega t}. \tag{18b}$$

Как было указано в гл. 5, существует теорема, по которой для большого класса «хорошо ведущих себя» функций $f(t)$ и $g(\omega)$ существование одного из этих интегралов означает существование другого. Таким образом, указанная теорема позволяет рассматривать любой зависящий от времени процесс через его гармонические компоненты.

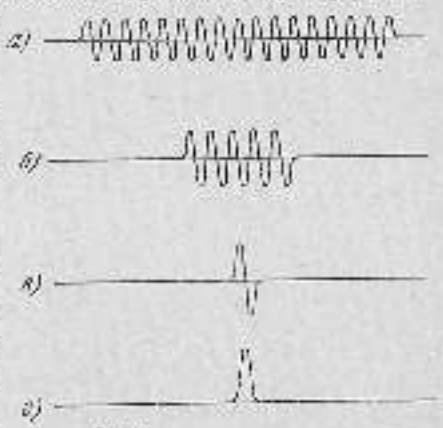


Рис. 18А. К соотношению неопределенностей для частоты и времени. Этот рисунок является аналогом рис. 5.5, но относится к другому случаю. Изменяется время. а) Время определено плохо, частота определена хорошо. б) Время определено лучше, частота определена хуже. в) Время определено хорошо, частота определена плохо. г) Время определено очень хорошо, частота определена очень плохо.

Если функция $g(\omega)$ в интеграле (18a) велика лишь в непосредственной близости от точки $\omega = \omega_0$, то можно утверждать, что частота процесса хорошо определена: амплитуда $f(t)$ соответствует почти монохроматическому процессу. Для большого интервала времени эта амплитуда приближенно имеет вид $f(t) = Ae^{-i\omega_0 t}$. Если, с другой стороны, амплитуда $f(t)$ велика только в небольшом интервале времени вблизи $t = t_0$, то она соответствует резкому импульсу, и частота определена очень плохо. В этом случае функция $g(\omega)$, определяемая (18b), велика в большом интервале частот. Частота, связанная с процессом, и момент времени, в котором он происходит, не могут быть определены с произвольной точностью. Неопределенность $\Delta\omega$ в частоте и неопределенность Δt в моменте времени связаны соотношением

$$\Delta\omega\,\Delta t \gtrsim 1, \tag{18c}$$

которое также часто называют соотношением неопределенностей. Причина возникновения этого соотношения совершенно аналогична причине появления соотношения неопределенностей для координаты и импульса. Эти идеи иллюстрируются рисунком 18А.

18. Напомним, что в п. 20—24 гл. 3 мы обсуждали вопрос о связи между средним временем τ жизни возбужденного состояния и конечной шириной ΔE соответствующего уровня энергии. Мы пришли к выводу, что ширина ΔE обратно пропорциональна среднему времени τ. Рассмотрим эту связь с точки зрения соотношения неопределенностей для времени и частоты.

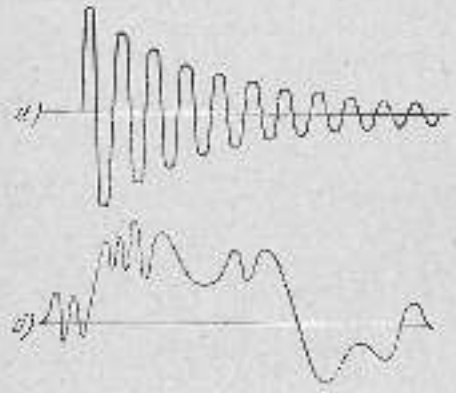


Рис. 18А. а) Колебания экспоненциально затухающего гармонического осциллятора; б) цуг волн, из которых складывается колебание. Ширина цуга $\Delta\omega$ определяется временем τ затухания колебаний.

Предположим, что распад системы заключается в переходе из возбужденного состояния в основное, сопровождающемся испусканием фотона. В этом случае неопределенность в частоте фотона равна $\Delta\omega = \Delta E/\hbar$, где ΔE — ширина возбужденного уровня. Продолжительность процесса испускания имеет порядок среднего времени τ, и неопределенность τ момента испускания также порядка τ. Имея в виду (18c), можно написать

$$\tau \cdot \Delta\omega \approx 1 \quad \text{или} \quad \tau \cdot \Delta E \approx \hbar. \tag{19a}$$

Мы написали приближенное равенство вместо неравенства. В данном случае мы имеем дело как бы с экспоненциально затухающим гармоническим осциллятором, амплитуды колебаний которого схематически показаны на рис. 19А. Временна́я зависимость амплитуды в этом случае более похожа на амплитуду *а* на рис. 18А, для которой неопределенности в частоте и времени достигают крайних значений, чем на амплитуду *б* на рис. 8А, для которой *как время, так и частоту* известны весьма грубо.

В п. 20—23 гл. 3 мы получили соотношение (19a) с помощью рассуждений, которые могут казаться отличными от приведенных здесь. Вдумавшись в проблему, читатель, однако, обнаружит, что между основными идеями обоих выводов нет существенного различия. Рассуждения, приведенные в гл. 3, можно назвать *классическим фурье-анализом*.

Измерения и статистические ансамбли

20. Оставшуюся часть главы мы посвятим проблеме измерений в физике. Для этого подвергнем анализу с точки зрения известных нам законов некоторые простые физические ситуации. Нашей целью является описание характерных особенностей квантовомеханического мышления, а отнюдь не полная теория измерений. Физические измерения чрезвычайно разнообразны по своей природе, и их полный анализ с единой точки зрения — задача, которая, по-видимому, выходит за пределы современной науки. Поэтому мы совершенно отвлекаемся от реальных *методических* трудностей, с которыми имеют дело в любом эксперименте. Наше *теоретическое* обсуждение измерений не может, таким образом, считаться верным отображением того, что реально происходит в лаборатории.

21. Процесс измерения часто удобно представить в виде двух этапов: *приготовление системы к измерению*, за которым следует само *измерение*. Это лишь схематическое описание, так как в действительности часто нет резкого различия между приготовлением и измерением; иногда процесс приготовления системы могут с равным основанием считаться процессом измерения, и наоборот.

их полный анализ с единой точки зрения. Разумеется, что, желая создать законченную теорию, мы обратимся к идеализированной экспериментальной ситуации, в которой интересующие нас характерные особенности выражены наиболее сильно. В частности,

Рис. 19А. Схема устройства счетчика Гейгера — Мюллера. Он состоит из двух электродов, помещенных в газ. Центральный электрод — тонкая нить, подключенная к положительному полюсу источника тока (около 1000 В). К отрицательному полюсу присоединен цилиндрический электрод. Заряженная частица, пролетая сквозь пространство между электродами, ионизует молекулы газа на своем пути. Освобожденные электроны ускоряются сильным электрическим полем, и скорости их становятся достаточно велики, чтобы результате вторичной ионизации образовался второй электрон. Вторичная ионизация сильно усиливает ток, который может быть усилен и зарегистрирован. Такое устройство служит чувствительным индикатором частицы. Для его успешной работы необходимо, чтобы после каждого импульса разряд обрывался. Этого можно достичь либо с помощью внешней электронной схемы, уменьшающей напряжение на нити ниже критического значения, либо наполнив счетчик газом, способным обрывать разряд. Счетчики подобного типа называются счетчиками

Рис. 19В. Для того чтобы счетчик Гейгера — Мюллера функционировал в качестве счетчика быстрых частиц, его надо окружить чем-нибудь, что превратит в заряженные частицы какую-нибудь часть падающего излучения. Слой свинца толщиной в несколько миллиметров используется для регистрации γ-частиц. В качестве β-счетчика можно использовать тонкий слой алюминия. Если энергия частиц 10 Мэв, толщина слоя 10 мм. Но можно взять и более тонкое окно. Эффективность такого счетчика для этого излучения может достигать 100%. Для α-частиц можно использовать слюдяное окно толщиной 0,1 мм. Металлическая сетка из тонкой проволоки служит самым тонким окном. Для электронов с энергией 1 кэв можно получить достаточно прочное окно толщиной 0,1 мк

Анализ, основанный на разбиении процесса на две стадии, иногда очень удобен, в частности, это относится к опытам по рассеянию. Мы изучаем взаимодействие частицы из пучка с частицей в мишени. Задача приготовителя заключается в установке мишени и создании пучка в ускорителе. Задача измерений заключается в наблюдении частиц, испускаемых из той области мишени, где происходит взаимодействие. К тому же классу принадлежат опыты с пучками света. «Приготовление» фотонов происходит в источнике, который может быть какой-нибудь «лампой» с системой линз, призм, поляризаторов, щелей и т. п. Измерение производится в некоторой области наблюдения, отделенной от источника. Измерительным прибором может служить, например, фотоумножитель, соединенный с некоторыми оптическими устройствами.

22. Характерной особенностью измерений в микрофизике является то, что мы можем их многократно повторять, каждый раз приводя систему в одно и то же состояние. Поэтому результат измерений имеет статистический характер: мы говорим, что на N упавших на мишень фотонов в среднем N' раз регистрируется фотоумножителем. *Идеальный опыт* или *однократное измерение* имеет дело лишь с одним фотоном, но в окончательном результате производится статистическое усреднение по большому числу идентичных экспериментов.

Конечно, два данных опыта в принципе не идентичны, потому что они произведены в разные моменты времени. Однако мы верим, что законы природы инвариантны относительно смещения во времени, и потому момент времени, в который произведены измерения, безразличен. По этой причине последовательность *повторных* одиночных экспериментов можно считать последовательностью идентичных экспериментов (в том смысле, что подготовительное состояние системы в каждом опыте одно и то же).

23. Пучок состоит из очень большого числа частиц, но если его интенсивность не слишком велика, то в каждом индивидуальном рассеянии участвует лишь небольшое число частиц из пучка. Это условие всегда выполняется при рассеянии материальных частиц и почти всегда при рассеянии фотонов. Поэтому можно считать, что пучок состоит из *одной частицы*. Практическим способом многократного повторения одиночного опыта (в котором участвует одновременно одна частица) является опыт с пучком частиц.

В опытах по рассеянию мишенью может быть тонкая пластина или фольга твердого вещества, так и газ или жидкость, находящиеся в колбе(ре). Если интенсивность пучка достаточно велика, то может случиться, что в мишени одновременно произойдут два или больше взаимодействия. Это не мешает считать пучок состоящим из одной частицы, так как два (или несколько) одновременных взаимодействия в мишени полностью друг от друга независимы. Они соответствуют двум *идеальным* и независимым опытам, выполненным в одно и то же время.

В принципе можно осуществить опыт с пучком *очень* малой интенсивности, равной, скажем, одной частице в минуту. В этом слу-

чае мы уверены, что с мишенью одновременно взаимодействует лишь одна частица. Опыты по рассеянию медленных протонов называют как последовательность элементарных опытов, выполняемых с пучком интенсивностью в одну частицу. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что имеем дело с пучком столь малой интенсивности. В действительности в реальном опыте мы не только не ограничиваем интенсивность пучка, но часто всячески стараемся работать с наибольшей из доступных интенсивностей.

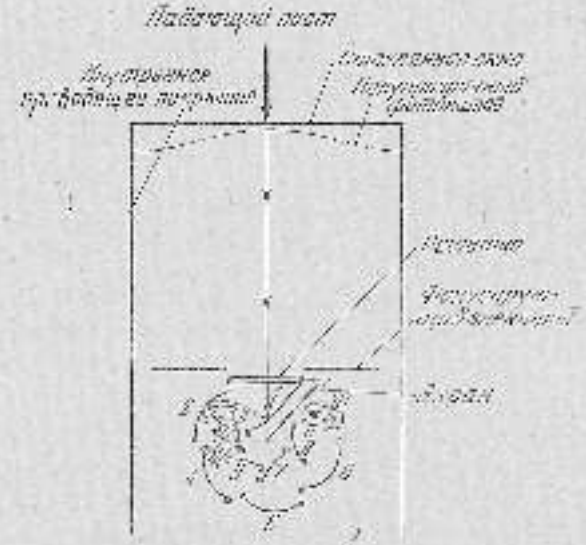


Рис. 10А. Схема экспериментальной установки, широко используемой в качестве источника фотонов: [illegible] — диафрагмы; D — экран. Основная часть потока проходит через отверстие в экране и попадает на детектор. Часть потока отклоняется от первоначального направления, рассеивается на мишени, образующей источник рассеянного излучения, и регистрируется детектором. Для уменьшения интенсивности падающего потока служат диафрагмы, ограничивающие пучок света, и фильтры, поглощающие часть фотонов. Для уменьшения интенсивности рассеянного потока служат диафрагмы, ограничивающие угол рассеяния, и экран D, предотвращающий попадание в детектор фотонов, испущенных источником. Для уменьшения интенсивности падающего потока служат диафрагмы, ограничивающие пучок света, и фильтры, поглощающие часть фотонов. Для уменьшения интенсивности рассеянного потока служат диафрагмы, ограничивающие угол рассеяния, и экран D, предотвращающий попадание в детектор фотонов, испущенных источником. В случае [illegible] часть пучка, [illegible]

24. Для иллюстрации этих идей рассмотрим опыт с пучком света. Предполагаемый идеальный опыт, т. е. последовательность явлений, происходящих после того, как фотон покидает источник. Допустим, что регистрирующая система представляет собой некоторое оптическое устройство, снабженное счетчиком фотонов (например, фотоумножителем). После испускания фотона мы замечаем, что некоторые счетчики срабатывают, а другие нет, и отмечаем срабатывание счетчиков. Представим себе, что сразу до появления следующего фотона все регистрирующие устройства приводятся в исходное состояние, и ждем следующего фотона. После восстановления исходного состояния могут срабатывать счетчики, но совсем не обязательно те самые, которые сработали в предыдущем опыте. Вновь регистрируем этот факт, восстанавливаем исходное состоя-

как и акцем следующего фотона. Продолжая в таком духе, мы накапливаем достаточно большое число, например N, прохождений фотонов через нашу систему.

Одиночный опыт над системой заключается, таким образом, в наблюдении за всеми счетчиками, и регистрируемое событие заключается в срабатывании или несрабатывании данного счетчика. Производя N одиночных опытов, можно сделать, например, следующие утверждения:

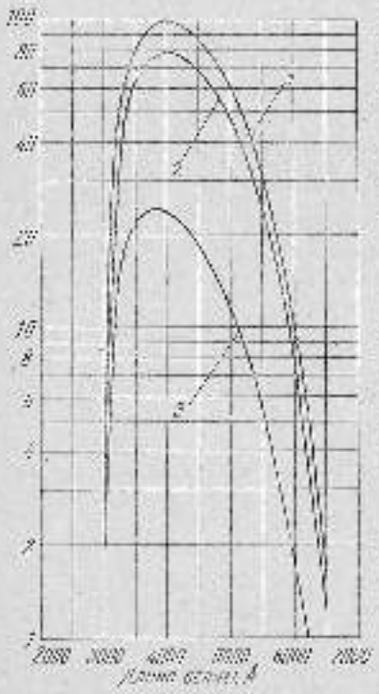


Рис. 148. Графики зависимости фотоумножителя: 1 — спектральная чувствительность s_λ; 2 — абсолютная чувствительность $s_\lambda f(\lambda)$; 3 — кривая потерь γ_λ. Обратите внимание на кривую 3. Для этого вещества рассеивания фотонов в зависимости от длины волны. Максимальная вероятность близка к 80%, что означает почти максимальную эффективность фотоумножителя

1) Счетчик 1 срабатывает в среднем p_1 раз на каждое прохождение фотона. Это среднее определяется на опыте следующим образом:

$$p_1 = N_1/N; \qquad (24a)$$

здесь N_1 — число срабатываний счетчика в N одиночных опытах.

2) Среднее число срабатываний счетчиков 1 и 2 равно p_{12} на каждый фотон. Это среднее экспериментально определяется следующим образом:

$$p_{12} = N_{12}/N; \qquad (24b)$$

здесь N_{12} — число срабатываний обоих счетчиков 1 и 2 в N одиночных экспериментах.

3) Среднее число срабатываний счетчика 1 по отношению срабатыванию счетчика 2 равно $p(1;\ 2)$. Это величина определяется следующим образом:

$$p(1;\ 2) = N_{12}/N_2, \qquad (24c)$$

где N_2 — число срабатываний счетчика 2; N_{12} определено выше.

23. Представляя опыт в указанном выше виде, мы проводим непосредственные результаты наших измерений: указанные выше числа являются нашими первичными данными. Можно, однако, сообщить о результатах измерений в другой, более абстрактной, форме:

1) *Вероятность* срабатывания счетчика 1 в условиях нашего опыта равна p_1.

2) *Вероятность* срабатывания обоих счетчиков 1 и 2 (в одном опыте) равна p_{12}.

3) *Вероятность* того, что счетчик 1 сработает при срабатывании счетчика 2, равна $p(1;\ 2)$.

Представляя данные в таком виде, мы делаем одно допущение, которое заключается в следующем. Если подвергать опыт сколь угодно долго, то отношения p_1, p_{12} и $p(1;\ 2)$ должны стремиться к определенным пределам. Эти гипотетические пределы и являются целью наших измерений. Мы обозначаем их p_1, p_{12} и $p(1;\ 2)$. В каждой реальной последовательности из N опытов N по необходимости конечно. Предположение о том, что такие пределы существуют и их можно определить с желаемой точностью и степенью достоверности при достаточно большом значении N, нуждается в доказательстве, которое завело бы нас далеко в философские основы теории вероятностей. Мы будем считать существование этих пределов, являющееся свойством природы, эмпирическим фактом.

Итак, результаты последовательности N простых опытов могут быть выражены через вероятности. Простейшими примерами являются рассмотренные нами числа p_1, p_{12}, $p(1;\ 2)$. Число p_1 есть вероятность срабатывания счетчика 1; p_{12} — вероятность одновременного наступления двух событий, заключающихся в срабатывании счетчиков 1 и 2; $p(1;\ 2)$ — условная вероятность возникновения одного события (срабатывание счетчика 1) при поступлении другого (срабатывание счетчика 2). Можно рассмотреть множество других простых вероятностей, например вероятность срабатывания счетчика 1 при условии срабатывания счетчиков 2 и 3, но иных других, и т. д.

26. Наши измерения можно описать как последовательность опытов, относящихся к большому числу фотонов, приготовленных в источнике *одинаковым образом*. Подумаем, однако, над тем, что значит приготовить фотоны одинаковым образом. Допустим, что в нашем источнике находятся две независимые лампы, скажем натриевая лампа, испускающая «желтые» фотоны, и ртутная, которая испускает «голубые» фотоны. Таким образом, в каждом из одиночных опытов фотон может быть либо «желтым», либо «голубым», и «цвет» фотона есть одна из переменных, определяемая в опыте и характеризующая свойства фотона. Допустим, что такое определение «цвета» выполнено для большой последовательности фотонов. Тогда можно определить вероятность испускания «желтого» фотона (она равна p_1) и вероятность испускания «голубого» (она равна p_2). Мы предполагаем, что интенсивность обеих ламп постоянна и что измеренные вероятности воспроизводимы: повторяя наши измерения несколько раз, мы каждый раз будем получать те же значения вероятностей p_1 и p_2.

Можно ли в этих условиях считать, что в каждом одиночном опыте фотоны в источнике приготовляются одинаковым образом? Трудно сразу ответить на этот вопрос. Можно возразить, что наш источник света с двумя лампами вводит в процесс приготовления системы элемент случайности и чтобы его исключить, следовало бы работать лишь с какой-нибудь одной из ламп. Может быть, нельзя утверждать, что фотоны приготовлены одинаковым образом, если мы не уверены в том, что они идентичны в возможно большей степени?

Трудность такой концепции в том, что в каждом опыте нужно было бы решать, имеет ли место «идентичность в возможно большей степени» или такой идентичности нет. Очевидно, что такая проблема не может считаться тривиальной. Кроме того, опыт с двумя лампами ничуть не хуже опыта с одной, если только вероятности p_1 и p_2, как и любые другие вероятности, описывающие свойства детекторов, будут *стабильны и воспроизводимы*. Это условие существенно, разумеется, для любых опытов, в которых мы имеем дело со скоростями счета и определением вероятностей. В противном случае все рассуждения п. 25 теряют смысл.

Таким образом, кажется более естественным (и практичным) принять, что во всех экспериментах, когда источником служит стационарное устройство, так что все вероятности постоянны и воспроизводимы, фотоны приготовлены одинаковым образом. Этой точки зрения мы будем придерживаться в дальнейшем.

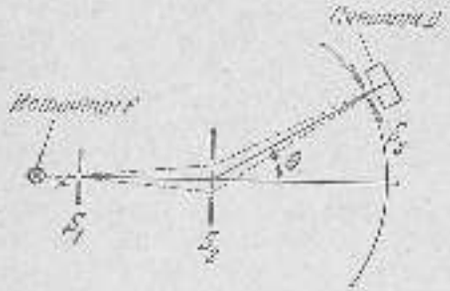


Рис. 27А. К опыту по дифракции электронов на двух щелях (п. 27—30). Регистрируется скорость счета в зависимости от угла θ. Для этого счетчик висит с входной щелью S_2, перемещаясь по дуге окружности. Если расстояние между щелями в S_2 велико по сравнению с длиной волны, а источник испускает когерентные электроны, то скорость счета будет быстро меняющейся функцией угла θ. Для наблюдения дифракционных картин с малым угловым разрешением, определяемым качеством щели S_2, должно быть очень хорошим. Если электроны не монохроматичны (например, в случае, когда источником служит нить накаливания), дифракционные картины от различных энергий перекрываются и практически размываются. Ясно, что вообще перестают быть наблюдаемыми

27. В определенном смысле опыт с двумя лампами больше соответствует действительности, чем опыт с одной. В качестве идеального случая можно предпочесть опыт с одной, скажем с голубой, лампой. Но в лаборатории природа всегда включает и вторую лампу (хотя ее интенсивность может быть очень небольшой). Два примера разъяснят, что мы имеем в виду.

На рис. 27А показан идеализированный опыт по наблюдению дифракции электронов на двух щелях в экране S_2. Электроны испускаются нитью F и ускоряются к экрану S_1, в котором имеется щель. Допустим, что, пройдя через эту щель, они обладают импульсом p. Для наблюдения дифракционной картины воспользуемся счетчиком D, находящимся на очень большом расстоянии от второго экрана S_2. Этот счетчик может перемещаться по дуге окружности, показанной на рисунке. Допустим для простоты, что расстояние от счетчика до щелей столь велико, что лучи, соединяющие входное отверстие счетчика с обеими щелями в экране S_2, можно считать *параллельными*. (На рисунке это не видно; выдержав масштаб, мы не хотели бы показать щели. Впрочем, смысл наших рассуждений мало зависит от того, параллельны ли эти лучи.)

Пусть расстояние между обеими щелями в S_2 равно $2a$. В п. 40 гл. 4 было показано, что угловое распределение $I(\theta, p)$ излучения, регистрируемого детектором D, имеет вид

$$I(\theta, p) = 4I_0(\theta)\cos^2(ap\sin\theta), \qquad (27a)$$

где $I_0(\theta)$ — угловое распределение, которое мы наблюдали бы с *одной* щелью *).

28. Мы записали интенсивность в виде $I(\theta, p)$, чтобы подчеркнуть ее зависимость от импульса p. Будем предполагать, что щели в экране S_2 имеют одинаковую ширину, которая очень мала по сравнению с длиной волны проходящих электронов. Пусть также для интервала значений p, с которыми мы имеем дело в данном опыте, интенсивность $I_0(\theta)$ *не зависит* от p. Предположим также, что расстояние между щелями $2a$ очень велико по сравнению с длиной волны; более конкретно, пусть для *среднего импульса* электронов p_0 мы имеем $ap_0 = n\cdot 10^2$. Для такого среднего импульса имеем

$$I(\theta, p_0) = 4I_0(0)\cos^2[(n\cdot 10^2)\sin\theta] = 2I_0(0)\,[1+\cos[(2n\cdot 10^2)\sin\theta]]. \qquad (28a)$$

Исследуем это выражение для интенсивности, замечаем, что оно является очень быстро меняющейся функцией угла θ. Расстояние между двумя последовательными максимумами определяется из приближенного равенства $\delta\approx 10^{-2}/\cos\theta$.

Таким образом, чтобы ясно видеть дифракционную картину, необходимо иметь аппаратуру с очень хорошим *угловым разрешением*. Угол, под которым входная щель детектора D видна из центра S_2, должен быть много меньше δ, т. е. много меньше 10^{-2}. Допустим, что это условие выполнено. В противном случае, т. е. если угловое разрешение много хуже 10^{-2}, второй член в правой части (28а) окажется усредненным до нулевого значения, и мы будем наблюдать интенсивность, в два раза большую интенсивности от одной щели.

29. Допустим теперь, что детектор обладает очень хорошим угловым разрешением, так что можно наблюдать дифракцию от двух щелей для электронов с импульсом p_0. Такой пучок, однако, нереален. При выходе из нити F электроны не имеют строго *одинаковой* энергии, поэтому на выходе из щели их импульсы не будут одинаковыми. Причина заключается в тепловом движении электронов в нити. Мы уже говорили, что хаотическое тепловое движение представляет собой «шум в чистой квантовомеханической симфонии». Теперь посмотрим, в какой степени этот шум мешает музыке.

В реальном опыте импульсы электронов в пучке имеют некоторый разброс. Для простоты допустим, что каждое значение импульса в интервале $(p_0 - q;\ p_0 + q)$ равновероятно. Величина q характеризует разброс импульсов. Для определенности допустим, что $q = 10^{-2}p_0$, т. е. импульс определен с погрешностью 1%.

Наблюдая дифракционную картину для такого пучка, мы увидим не распределение $I(\theta, p_0)$, а его *среднее* значение по всему интервалу возможных значений импульса. Обозначим это среднее через

*) В этих рассуждениях мы полагаем $k=c=1$.

$\bar{I}(\theta)$. Его легко вычислить:

$$\bar{I}(\theta)=\frac{1}{2q}\int\limits_{p_0-q}^{p_0+q} dp\, I(\theta,\ p)=$$

$$=2I_0(\theta)\left\{1+\frac{\cos(2ap_0\sin\theta)\sin(2aq\sin\theta)}{2aq\sin\theta}\right\}. \quad (29a)$$

Заметим, что, устремляя в этом выражении q к нулю, мы возвращаемся к выражению (28a).

В соответствии с нашими конкретными условиями $ap_0=\pi\cdot 10^5$ и $q=10^{-5}p_0$ из (29a) получаем

$$\left|\bar{I}(\theta)-2I_0(0)\right|\leqslant 2I_0(\theta)\left|\frac{\sin[(2\pi\cdot 10^5)\sin\theta]}{(2\pi\cdot 10^5)\sin\theta}\right|. \quad (29b)$$

В направлении строго вперед, т. е. для $\theta=0$, из формулы (29a) следует, что $\bar{I}(0)=4I_0(0)$. Для этого частного случая мы всегда, независимо от импульса p, имеем конструктивную интерференцию. Предположим, однако, что мы производим наблюдение для других направлений, например для углов θ, удовлетворяющих условию $|\sin\theta|\geqslant(2\pi)^{-1}\cdot 10^{-1}\approx 0{,}01$. Из неравенства (29b) в этом случае следует

$$\left|\bar{I}(0)-2I_0(0)\right|<10^{-5}\cdot 2I_0(\theta). \quad (29c)$$

Для таких углов дифракцию от двух щелей наблюдать трудно. Действительно, с погрешностью до 1% распределение интенсивностей совпадает с соответствующим распределением для дифракции от одной щели.

30. Из классической теории бильярдных шаров, приведенной в п. 41 гл. 4 к *фотонам*, следовало, что интенсивность в опыте с двумя щелями равна

$$I^{\mathrm{кл}}(\theta)=2I_0(\theta). \quad (30a)$$

В этой модели нет интерференции, и основанные на ней предсказания неверны и противоречат опыту. Если, однако, сравнить предсказание (30a) с предсказанием, выраженным неравенством (29c), то можно заметить, что в некоторых случаях предсказание (30a) будет *хорошо* правильным. Если по каким-либо причинам квантовомеханические интерференционные эффекты «размываются», получаются результаты, предсказываемые классической теорией.

Наши рассуждения служат хорошим примером одного из аспектов «перехода к классическому пределу». Предположим, что в рассматриваемом примере энергия электронов равна 10 эВ. Тогда расстояние $2a$ между щелями будет 0,04 мм, а такое расстояние можно считать *макроскопической* величиной. Несмотря на это, квантовомеханическая интерференция в данном случае существует, но, чтобы ее наблюдать, нужно иметь такой источник электронов, чтобы разброс q импульсов был достаточно мал. В противном случае квантовомеханическая «осциляция» размывается в нуле.

31. В качестве другого примера исчезновения интерференционных эффектов рассмотрим наблюдение интерференционных полос в интерферометре Майкельсона (рис. 31A). Свет ртутной лампы «расщепляется» полупосеребренным зеркалом, а смысл опыта заключается в наблюдении интерференции между двумя лучками, идущими к наблюдателю от зеркал 1 и 2. На рисунке плечи L_1 и L_2 интерферометра имеют разную длину. Разность хода интерферирующих пучков $d=2(L_2-L_1)$. Возникает вопрос: можно ли наблюдать интерференционные полосы при произвольно большом d?

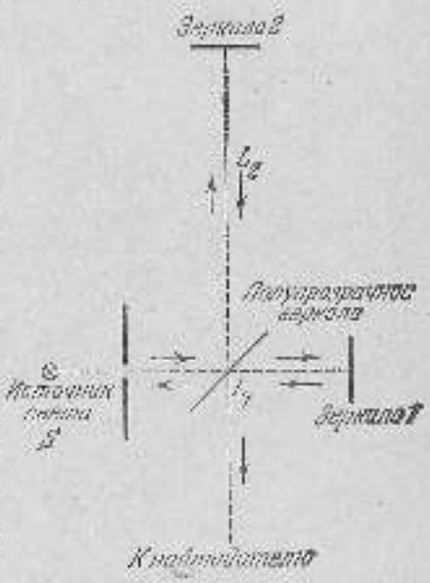


Рис. 31A. Схема интерферометра Майкельсона с плечами L_1 и L_2 неравной длины. Максимальная разность хода $d=2(L_2-L_1)$, при которой интерференция еще наблюдается, зависит от ширины спектральной линии почти монохроматического источника

Ответ заключается в том, что это возможно лишь в принципе, но не в действительности. Точность, с которой определена длина световой волны, накладывает предел на разность хода d, при которой интерференционная картина еще видна. Практически длина волны никогда не определена совершенно точно.

Рассмотрим испущенный источником фотон, которому соответствует частота ω. Та часть фотона, которая приходит от зеркала 2, запаздывает по фазе от части, приходящей от зеркала 1, на величину

$$\delta(\omega)=\omega\delta=2\pi d/\lambda, \quad (31a)$$

где λ — длина волны. Рассмотрим две различные частоты ω' и ω''. Разность запаздываний по фазе для этих частот равна

$$\delta(\omega')-\delta(\omega'')=(\omega'-\omega'')\,d. \quad (31b)$$

Если эта разность *мала*, т. е. если $|\delta(\omega')-\delta(\omega'')|\ll\pi$, то интерференционные полосы для обеих частот будут с большой точностью совпадать. С другой стороны, если эта разность равна π, т. е. если $|\delta(\omega')-\delta(\omega'')|=\pi$, то *конструктивной* интерференции для частоты ω' будет отвечать *деструктивная* интерференция для частоты ω'', и наоборот. При наложении двух систем полос, отвечающих этим частотам, мы вообще не увидим полос. Таким образом, мы приходим к простому критерию видимости полос: ширина частотной полосы $\Delta\omega$ источника должна быть такой, чтобы

$$d\,\Delta\omega\ll\pi. \quad (31c)$$

Для данного источника, т. е. для заданного $\Delta\omega$, условие (31c) дает нам верхний предел для δ.

32. Для трубокительно монохроматического источника света (частота ω) величина $\Delta\omega$ представляет собой ширину линии. Как было объяснено в гл. II, расширение монохроматической линии связано с несколькими физическими явлениями. Одно из них — доплер-эффект, возникающий вследствие движения излучающих атомов в источнике. Можно считать, что источник состоит из большого числа идентичных «ламп», но в лабораторной системе координат частота света, испускаемого этими «лампами», не строго одинакова, так как «лампы» в источнике находятся в состоянии хаотического движения.

Рассмотрим, каким образом доплер-эффект ограничивает величину δ. Полосы вовсе видны при условии

$$\Delta < \frac{\lambda}{\Delta\omega} = \frac{\omega}{\Delta\omega}\frac{\lambda}{2}. \tag{32a}$$

В п. 44 гл. II мы получили выражение для относительного доплеровского расширения, если источник представляет собой газ:

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_D \sim 0{,}32\cdot 10^{-7}\sqrt{\frac{1}{A}}\left(\frac{T}{293\text{K}}\right), \tag{32b}$$

здесь T — эффективная температура источника; A — относительная атомная масса излучающих атомов.

Объединяя (32a) и (32b), получаем

$$\Delta \leqslant 10^7\lambda\sqrt{\frac{A}{T/293\text{K}}}. \tag{32c}$$

Для T=293 K (комнатная температура), λ=5000 Å (зеленый свет) и A = 100 получаем $\Delta \leqslant 50$ см. Эта оценка согласуется с экспериментом. Максимальная разность хода, при которой еще можно наблюдать интерференционные полосы, имеет порядок 1 м для «обычных» источников света, например для газоразрядной трубки (но не для лазера).

33. Оба рассмотренных примера показывают, что природа противится созданию двух идеальных (когерентных) источников. В частности, волновые цуги создают фон, который вводит элемент случайности в приготовление системы перед измерениями.

Техническое несовершенство нашего оборудования также увеличивает элемент случайности. Допустим, например, что мы хотим создать пучок электронов с очень точно заданным импульсом. Для этого необходимо подстраивать с большой точностью значения ускоряющих потенциалов и иметь весьма совершенное устройство для фокусировки электронов. Кроме того, нужен высокий вакуум, чтобы избежать потерь энергии и изменения направления движения от столкновения электронов с остаточным газом. Ничто на свете не совершенно, и на практике мы не можем осуществить полного контроля над приготовлением системы. Интересно поэтому понять, как «несовершенство» приготовления системы может быть включено в теорию.

34. Предположим, что у нас имеется способ приготовить систему для ряда повторяющихся измерений таким образом, что каждый раз система подготовлена одинаковым образом. Мы согласились называть это слово следующим смыслом: измеряемые нами величины *средние* значения стабильны и воспроизводимы. Мы предполагаем, что можем измерить средние всех возможных физических

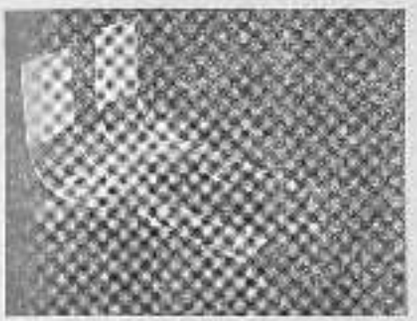


Рис. 34A. Две [illegible] системы. Каждая система, приготовленная таким [illegible] воспроизвести систему, похожую на [illegible]. Эти две системы [illegible] и через [illegible] системы [illegible] [illegible] [illegible]

ансамбля, состоящего из отдельных молекул. Это описание удобно, если нас интересует среднее поведение отдельной молекулы газа. Каждый раз, когда мы измеряем, например, скорость молекулы, мы производим опыт с одним из элементов ансамбля. В результате большого числа измерений скорости мы будем иметь среднюю скорость молекулы, которая является одной из средних величин, характеризующих ансамбль. Условия, при которых находится газ в сосуде, определяют в этом случае процедуру приготовления. Если температура и давление постоянны, то средняя скорость также постоянна. Можно сказать, что все молекулы приготовлены одинаковым образом, так как все они находятся в идентичных быстрых макроскопических условиях. Это не значит, разумеется, что однократные измерения скорости у двух разных молекул дают одинаковую величину. Скорость молекулы (в данный момент времени) есть *случайная переменная*, и измеренные значения подвержены *статистическому разбросу*.

35. Рассмотрим статистический ансамбль. Для определенности предположим, что речь идет о пучке электронов, выпущенных из ускорителя, который работает в стабильных условиях и удовлетворяет самым совершенным техническим требованиям. Мы производим повторяющиеся измерения некоторой физической величины, например импульса электрона p в направлении пучка. Обозначим среднее значение импульса, полученное в длинной последовательности измерений, символом

$$\mathrm{Av}\,(p;\ \rho),$$

где ρ — статистический ансамбль, т. е. наш пучок. Величину $\mathrm{Av}\,(p;\rho)$ называют *средним импульсом* p по *ансамблю*. Среднее по ансамблю значение *квадрата* импульса обозначается $\mathrm{Av}\,(p^2;\ \rho)$. В общем случае $\mathrm{Av}\,(p^2;\ \rho)$ не равно $\mathrm{Av}\,(p;\ \rho)^2$. Действительно, если мы обозначим измеренные значения импульса через $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_N$, то средние значения импульса и квадрата импульса будут равны

$$\mathrm{Av}\,(p;\ \rho) = N^{-1}\sum_k p_k,\quad \mathrm{Av}\,(p^2;\ \rho) = N^{-1}\sum_k p_k^2. \tag{35a}$$

Напишем тождество, которое читатель легко проверит:

$$\mathrm{Av}\,(p^2;\ \rho) - [\mathrm{Av}\,(p;\ \rho)]^2 = N^{-1}\sum_k |\,p_k - \mathrm{Av}\,(p;\ \rho)]^2. \tag{35b}$$

Правая часть (35b) представляет собой сумму неотрицательных членов, откуда следует

$$\mathrm{Av}\,(p^2;\ \rho) - [\mathrm{Av}\,(p;\ \rho)]^2 \geqslant 0, \tag{35c}$$

где знак равенства относится к тому и только к тому случаю, когда все импульсы p_k ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$) равны. В этом случае все частицы в пучке имеют точно одинаковые импульсы.

Величина в левой части (35c) является мерой статистического разброса переменной p. В общем случае она больше нуля, и мы можем сказать, что в пучке имеется некоторый разброс значений импульса.

36. Подобно импульсу, можно обсудить и другие физические переменные. Для данного ансамбля (пучка) можно определить их средние значения и *разбросы*, под которым мы понимаем статистический разброс, отнесенный по величине к самой величине (35c). Простейшей из таких переменных является срабатывание счетчика,

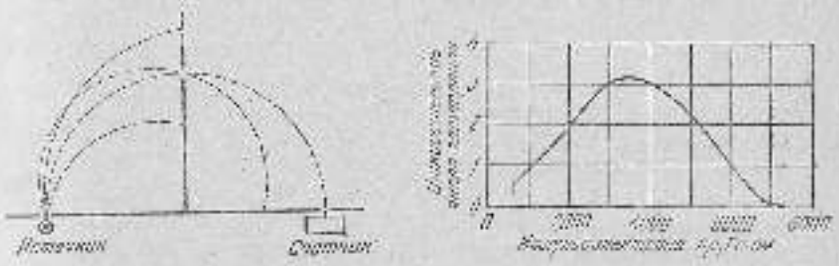


Рис. 36А. Простая работающая конфигурация «источник — счетчик» в спектрометре. Он может служить для измерения распределения импульсов (или энергий) электронов, испускаемых источником радиоактивных веществ. С помощью щелей выбираются электроны, траектории которых лежат внутри пассивного пучка. Прибор настроен и отрегулирован так, что только электроны с импульсом, лежащим в узком интервале вокруг некоторого среднего значения, могут достичь счетчика. Траектории представляют собой дуги окружностей, радиусы которых зависят от импульсов электронов. Счетчик можно использовать таким образом, что он будет срабатывать только в том случае, если электрон достигнет его, причем траектории, соответствующие различным импульсам, будут иметь различные радиусы. Регистрируя число электронов, проходящих через счетчик в единицу времени при различных значениях магнитного поля, мы получим экспериментальную кривую распределения по импульсам, т. е. вероятность того, что электрон, испущенный источником, будет иметь импульс p

Рис. 36Б. Экспериментальная кривая распределения электронов по импульсам. Максимальному импульсу соответствует 7000 гаусс-сантиметров. Ширина кривой на половине высоты составляет 1,7 %. Разброс импульсов, который можно получить с помощью щелей, ограничивающих пучок, был бы гораздо меньше, чем разброс, обусловленный случайным образом между электронами и веществом источника

Обозначим ее через D и условимся считать, что $D = 1$, если счетчик в данном эксперименте с одним фотоном срабатывает, и $D = 0$, если он не срабатывает. Тогда $\mathrm{Av}\,(D;\ \rho)$ будет вероятностью срабатывания счетчика в опыте с единичным элементом статистического ансамбля ρ.

На первый взгляд может показаться, что переменная D другого типа, чем переменная импульса p. Можно думать, что p относится к системе, т. е. к частицам пучка, тогда как величина D связана с измерительным прибором. Следует понимать, однако, что вся наша информация о свойствах системы получена из наблюдения за реакцией измерительных приборов, а сама концепция, как внутренние свойства системы, является абстракцией. Если известна вероятность срабатывания данного счетчика, помещенного в данном месте, то нам известно нечто о природе статистического ансамбля, в данном случае о природе пучка частиц. В действительности импульс частиц в пучке часто измеряется счетчиками, как это показано, например, на рис. 36А.

37. Продолжим теперь обсуждение примера, рассмотренного в п. 26. Мы имеем там источник света, состоящий из двух ламп — «ртутной» и «ртутной». Начнем с опыта, в котором работает только ртутная лампа и пучок света состоит, таким образом, из одних

«желтых» фотонов. Этот пучок можно описать статистическим ансамблем фотонов ρ_2. Для такого ансамбля среднее значение d_2 некоторой переменной D, измеряемой счетчиком, равно

$$\mathrm{Av}(D;\ \rho_2)=d_2. \tag{37a}$$

Теперь включим только ртутную лампу. Мы будем иметь дело со статистическим ансамблем ρ_1, и усредненное по ансамблю значение той же переменной D будет равно

$$\mathrm{Av}(D;\ \rho_1)=d_1. \tag{37b}$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда включены обе лампы. Их совместное действие соответствует статистическому ансамблю ρ, и среднее значение D равно

$$\mathrm{Av}(D;\ \rho)=d. \tag{37c}$$

Пусть потоки фотонов от ламп 1 и 2 соответственно равны n_1 и n_2. Полный поток равен, таким образом, n_1+n_2 фотонов в единицу времени. В каждом отдельном опыте эти фотоны могут быть либо «желтыми», либо «голубыми», в зависимости от того, какая лампа служит их источником. Вероятность обнаружить в данном опыте «желтый» фотон равна

$$\theta_1=n_1/(n_1+n_2), \tag{37d}$$

а вероятность обнаружить «голубой» фотон равна

$$\theta_2=n_2/(n_1+n_2). \tag{37e}$$

Числа θ_1 и θ_2 удовлетворяют условиям

$$1\geqslant\theta_1\geqslant 0,\quad 1\geqslant\theta_2\geqslant 0,\quad \theta_1+\theta_2=1, \tag{37f}$$

которые следуют из определений (37d) и (37e). Условия (37f) характеризуют вероятности наступления одного из двух исключающих друг друга *событий*.

35. Рассмотрим теперь единичный опыт, т. е. явление, происходящее с отдельным фотоном. Что можно сказать о вероятности $d=\mathrm{Av}(D;\rho)$ того, что счетчик, описываемый переменной D, сработает? Наш фотон либо «желтый», либо «голубой». В первом случае вероятность срабатывания счетчика равна d_1, во втором d_2. Оба случая исключают друг друга, и поэтому полная вероятность срабатывания счетчика D равна

$$d=\theta_1 d_1+\theta_2 d_2 \tag{38a}$$

или

$$\mathrm{Av}(D;\ \rho)=\theta_1\,\mathrm{Av}(D;\ \rho_1)+\theta_2\,\mathrm{Av}(D;\ \rho_2). \tag{38b}$$

Эта формула выражает среднее D по ансамблю ρ через среднее D по ансамблям ρ_1 и ρ_2 и через вероятности θ_1 и θ_2. Эти последние вероятности показывают, каким образом ансамбль ρ составлен из ансамблей ρ_1 и ρ_2. Вероятности θ_1 и θ_2 характеризуют «состав» ансамбля. Они *не зависят* от переменной D, которая определяет свойства данного счетчика, расположенного в области наблюдений. В общем случае формула (38b) приводит к среднему значению любой физической переменной, которую мы обозначим через Q:

$$\mathrm{Av}(Q;\ \rho)=\theta_1\,\mathrm{Av}(Q;\ \rho_1)+\theta_2\,\mathrm{Av}(Q;\ \rho_2). \tag{38c}$$

Мы говорим, что *статистический ансамбль* ρ *является некогерентной суперпозицией двух ансамблей* ρ_1 *и* ρ_2, *входящих в суперпозицию с вероятностями* θ_1 *и* θ_2. Символическая запись этого утверждения имеет вид

$$\rho=\theta_1\rho_1+\theta_2\rho_2. \tag{38d}$$

Термин «некогерентная» употребляется для различения этого типа суперпозиции и суперпозиции волн, рассмотренной в п. 35—16 гл. 5. Позже мы подробно обсудим это различие.

36. Идею о некогерентной суперпозиции двух ансамблей можно обобщить, рассмотрев некогерентную суперпозицию любого конечного их числа.

Рассмотрим статистические ансамбли ρ_k $(k=1, 2, 3, \ldots, n)$. С каждым таким ансамблем связана вероятность θ_k, и, таким образом,

$$1\geqslant\theta_k\geqslant 0,\quad \sum_{k=1}^{n}\theta_k=1. \tag{39a}$$

Обозначим через ρ некогерентную суперпозицию этих ансамблей. Это можно записать символически:

$$\rho=\sum_{k=1}^{n}\theta_k\rho_k. \tag{39b}$$

Такая запись означает, что среднее любой физической переменной Q для ансамбля ρ равно

$$\mathrm{Av}(Q;\ \rho)=\sum_{k=1}^{n}\theta_k\,\mathrm{Av}(Q;\ \rho_k). \tag{39c}$$

Предположим, что если ρ_1, ρ_2, ρ_3, $\ldots$, ρ_n — некоторая совокупность возможных статистических ансамблей, то любая некогерентная суперпозиция этих ансамблей также является возможным ансамблем. Это скорее математическое, чем физическое предположение, вызванное желанием иметь замкнутую *совокупность* статистических ансамблей, включающую в себя ансамбли, сделанные *некогерентной суперпозицией*. Оно означает, что если совокупность ансамблей содержит конечное число ансамблей, то она содержит и их всевозможные некогерентные суперпозиции.

40. Заметим, что в гл. 27—29 мы уже рассматривали некогерентную суперпозицию бесконечного числа различных статистических ансамблей. Обозначим через $D(\theta)$ переменную, описывающую свойства счетчика D на рис. 27А, для данного значения угла θ. Обозначим через ρ статистический ансамбль, создаваемый данным источ-

импульсом, расположенного левее экрана S_1. Предположим, что интенсивность источника такова, что через щель в S_1 каждую секунду проходит один электрон. Если интенсивность $I(\theta)$, наблюдаемую счетчиком D, выражать через число электронов в единицу времени, то

$$\mathrm{Av}\,[D(0);\,p]=I(0). \tag{40a}$$

В п. 27 мы рассматривали сначала интенсивность $I(0;\,p)$ от статистического источника, испускающего электроны со строго определенным значением импульса p. Обозначим статистический ансамбль для такого источника через $\rho(p)$. В этом случае

$$\mathrm{Av}\,[D(0;\,\rho(p)]=I(\theta;\,p). \tag{40b}$$

Мы указывали, что если источником электронов служит пучок ускоряемых ими с ускоряющим электродом, то электроны, проходящие через щель в S_1, *не могут* иметь точно определенного импульса. [Мы можем, конечно, изготовить весьма монохроматический источник, воспользовавшись каким-нибудь фильтром импульсов. Такому источнику, дающему электроны с очень малым разбросом импульсов, отвечает ансамбль $\rho(p)$.] Обозначим статистический ансамбль, соответствующий простому источнику с катодом и электродом, через $\bar{\rho}$. В соответствии с рассуждениями п. 29,

$$\mathrm{Av}\,[D(\theta);\bar{\rho}]=I(\theta)=\frac{1}{2\delta}\int\limits_{p_0-\delta}^{p_0+\delta}dp\,\mathrm{Av}\,[D(0);\,\rho(p)]. \tag{40c}$$

Сравните это выражение с выражением (38c). Очевидно, что ансамбль ρ, соответствующий «идеальному» источнику электронов, можно считать некогерентной суперпозицией идеальных источников, соответствующих ансамблям $\rho(p)$. Другими словами, по аналогии с (39b) мы имеем

$$\bar{\rho}=\frac{1}{2\delta}\int\limits_{p_0-\delta}^{p_0+\delta}dp\,\rho(p). \tag{40d}$$

Амплитуды и интенсивности

41. Различие между когерентной и некогерентной суперпозициями можно выразить следующим образом: в первом случае происходит *сложение амплитуд*, во втором — сложение *интенсивностей*.

Рассмотрим квантовомеханические представления об амплитудах и интенсивностях. На рис. 41A показана схема опыта с двумя расположенными рядом экранами, каждый из которых содержит две щели. Пусть частицы, проходящие через щель в экране N, имеют определенный импульс и их интенсивность равна одной частице в секунду. Мы наблюдаем поток частиц через остальные две щели, каждый раз помещая счетчик непосредственно за одной из них. Если измерение для данной щели числа отсчетов равно P частиц в секунду, мы говорим, что P пропорционально вероятности того, что частица, прошедшая через щель в N, проходит через рассматриваемую щель.

Предположим, что длина волны частицы велика по сравнению с шириной щели и что ширина всех щелей одинакова. В этом случае мы можем говорить о комплексной амплитуде волны в щели.

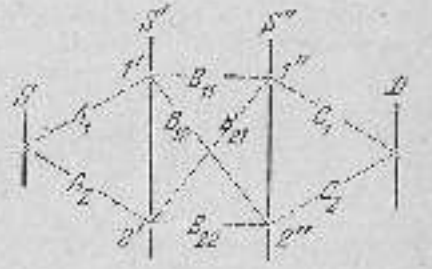


Рис. 41A. Идеальная экранная сетка с двумя щелями (см. 41—44). Частицы (волны) исходят из щели в S. Нас интересуют вероятности прохождения частиц через отдельные щели и частоты через щели в D. Для каждой щели указаны соответствующие амплитуды, а также интенсивности. Комплексные числа A_1, A_2, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}, C_1, C_2 называются амплитудами перехода между щелями. Все интересующие нас вероятности выражаются через эти амплитуды.

42. Пусть A_1 — амплитуда волны в щели $1'$, когда амплитуда волны в щели S равна единице. Аналогично, A_2 — амплитуда волны в щели $2'$ при том же условии. Пусть B_{11} — амплитуда волны в щели $1''$, когда амплитуда в щели $1'$ равна единице, но *амплитуда в щели $2'$ равна нулю*. Аналогично, B_{21} — амплитуда волны в щели $1''$, когда амплитуда в щели $1'$ равна нулю, но амплитуда в щели $2'$ равна единице. Через C_1 обозначим амплитуду в щели экрана D, когда амплитуда в щели $1''$ равна единице, а амплитуда в щели $2''$ равна нулю. Остальные амплитуды определяются аналогичным образом. Назовем их *амплитудами перехода*, потому что они описывают распространение волн через щели слева направо. Эти переходы обозначены на рис. 41A штриховыми линиями. С каждой такой линией связана своя амплитуда перехода.

Амплитуды перехода являются комплексными числами. Квадрат их модуля определяет *вероятность перехода* следующим образом: $P_1=|A_1|^2$ равно вероятности того, что частица, пропущенная через щель в S, будет зарегистрирована непосредственно за щелью $1'$; $P_2=|A_2|^2$ равно вероятности регистрации частицы, прошедшей через щель в S, за щелью $2'$; $P_{12}=|B_{12}|^2$ равно вероятности того, что частица, прошедшая через щель $1'$, пройдет и через щель $2''$. В *этом случае щель $2'$ должна была закрыта*, чтобы быть уверенным в том, что частица действительно прошла через щель $1'$. Квадрат модуля остальных амплитуд перехода имеет аналогичный смысл. Перечислим все вероятности перехода, соответствующие восьми амплитудам:

$$\begin{aligned} &P_1=|A_1|^2,\quad P_2=|A_2|^2,\quad P_{11}=|B_{11}|^2,\quad P_{12}=|B_{12}|^2,\\ &P_{21}=|B_{21}|^2,\quad P_{22}=|B_{22}|^2,\quad P_1'=|C_1|^2,\quad P_2'=|C_2|^2. \end{aligned} \tag{42a}$$

Читателю следует тщательно обдумать, как можно измерить эти вероятности со счетчиком, закрывая, если это необходимо, некоторые щели.

48. Задачи теперь следующий вопрос: пусть все щели открыты; чему в этом случае равна вероятность P того, что частица, пройдя через щель в S, пройдет через щель в D?

Без долгих размышлений скажем: так как нам известны вероятности перехода через щели, то найдем P, например, комбинируя эти вероятности по правилам теории вероятностей. Вероятность того, что частица пройдет через щель $1''$, была бы равна сумме вероятностей ее прохождения от щелей $1'$ и $2'$ к щели $1''$. Иными словами, она равна $P_1'P_{1''}+P_2'P_{1''}$. Такой способ рассуждения привел бы нас к неверному результату:

$$P=|(A_1B_{11}+A_2B_{21})C_1+(A_1B_{12}+A_2B_{22})C_2|^2. \qquad (43a)$$

Теперь напишем верный ответ:

$$P=|(A_1B_{11}+A_2B_{21})C_1+(A_1B_{12}+A_2B_{22})C_2|^2. \qquad (43b)$$

Он, разумеется, отличается от выражения (43a). В какой щели следует складывать *амплитуды* приходящих к щели волн, так как волны интерферируют. Выражение (43b) — это верный ответ, согласующийся с квантовой механикой, тогда как выражение (43a) — лишь предсказание, следующее из классической теории.

44. *Вопрос*: как найти P, если нам известны лишь вероятности, а не амплитуды переходов? *Ответ*: это вообще невозможно сделать. Чтобы найти P, нужно знать как фазы, так и абсолютные значения комплексных амплитуд перехода, но вероятности перехода дают нам лишь абсолютные значения амплитуд.

Обсудим более подробно, в чем ошибка предположения о «сложении вероятностей», которое привело к неверному результату (43a). Рассмотрим величину $P_1'P_{1''}$. Что она дает? Очевидно, вероятность того, что частица, пройдя через щель в S, проходит через щель $1'$, когда щель $2'$ закрыта. Аналогично, $P_2'P_{1''}$ соответствует вероятность, что частица, попавшая через щель в S, пройдет через щель $1''$, когда закрыта щель $1'$. Если *обе* щели $1'$ и $2'$ открыты, то вероятность того, что частица, пройдя через щель в S, пройдет через щель $1''$, не равна сумме $P_1'P_{1''}+P_2'P_{1''}$. Волны, приходящие к щели $1''$ от щелей $1'$ и $2'$, *когерентны*, и мы должны складывать *амплитуды*, а не *интенсивности*.

43. Рассмотрим немного измененный опыт (рис. 45А). Он отличается от рис. 41А тем, что в плечо, соединяющее щель в S с щелью $1'$, вставлено устройство, задерживающее фазу волны. В остальном оба прибора одинаковы. Единственным следствием задержки фазы будет замена амплитуды A_1 амплитудой $A_1e^{i\theta}$. Таким образом, фаза меняется на величину θ, но амплитуда волны не меняется. Если опыт производится со светом, для изменения фазы можно использовать стеклянные пластины.

Обозначим через $P(\theta)$ вероятность того, что частица, прошедшая через щель в S, пройдет через щель в D (все остальные щели открыты). В соответствии с (43b)

$$P(\theta)=|A_1e^{i\theta}(B_{11}C_1+B_{21}C_2)+A_2(B_{12}C_1+B_{22}C_2)|^2=$$
$$=|A_1(B_{11}C_1+B_{21}C_2)|^2+|A_2(B_{12}C_1+B_{22}C_2)|^2+U\cos\theta+V\sin\theta, \qquad (45a)$$

где

$$U=A_1(B_{11}C_1+B_{21}C_2)A_2^*(B_{12}^*C_1^*+B_{22}^*C_2^*)+$$
$$+A_1^*(B_{11}^*C_1^*+B_{21}^*C_2^*)A_2(B_{12}C_1+B_{22}C_2), \qquad (45b)$$

$$V=i[A_1(B_{11}C_1+B_{21}C_2)A_2^*(B_{12}^*C_1^*+B_{22}^*C_2^*)-$$
$$-A_1^*(B_{11}^*C_1^*+B_{21}^*C_2^*)A_2(B_{12}C_1+B_{22}C_2)]. \qquad (45c)$$

В справедливости этих формул читатель может убедиться сам. Выражение для $P(\theta)$ можно записать в виде

$$P(\theta)=\frac{1}{2}[P(0)+P(\pi)]+\frac{1}{2}[P(0)-P(\pi)]\cos\theta+$$
$$+\frac{1}{2}\left[2P\left(\frac{\pi}{2}\right)-P(0)-P(\pi)\right]\sin\theta, \qquad (45d)$$

откуда следует, что величина $P(\theta)$ как функция θ однозначно определяется своими значениями для трех углов $\theta=0$, $\pi/2$ и π.

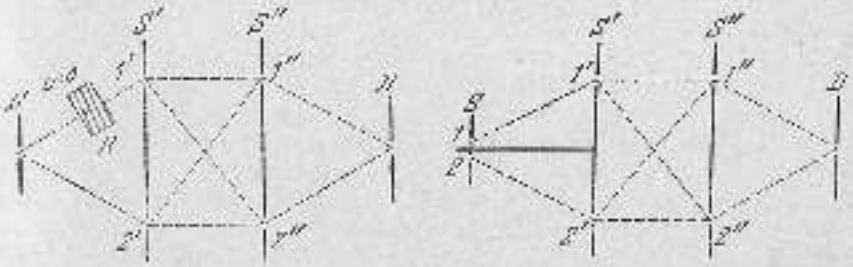


Рис. 45А. Модификация опыта, изображенного на рис. 41А. Между источником S и щелью $1'$ устроено *устройство, задерживающее фазу волны*. Оно изменяет комплексную амплитуду волны, идущей через $1'$, на множитель $e^{i\theta}$. На основании опыта, показанного на рис. 41А, следует, что данное устройство оставляет амплитуду A_1 волны неизменной, а A_1 заменяет на $A_1e^{i\theta}$.

Рис. 41А. *Модификация опыта рисунка 41А с двумя дополнительными щелями.* Щели 1 и 2 освещаются двумя некогерентными источниками света равной интенсивности. Результат опыта можно вычислить, если сложить интенсивности, создаваемые в отдельности каждой парой щелей, изображенных на рис. 45А, причем интенсивности складываются, а не амплитуды. Интенсивность, измеренная в данном опыте, является функцией (по фазовому углу θ) величин, описанных в предыдущем опыте, измеренном в опыте, изображенном на рис. 45А. Об этом также можно сказать, что некогерентные источники складываются по правилам вероятностей.

46. Теперь рассмотрим «прибор», показанный на рис. 46А. Мы имеем два *отдельных* источника 1 и 2, освещающих щели $1'$ и $2'$ соответственно. Во всем остальном «прибор» такой же, как на рис. 41А. Пусть интенсивность обоих источников одинакова.

Какова вероятность P_1 того, что частица, прошедшая через экран S, пройдет через щель в D? Очевидно, что

$$P_1=\frac{1}{2}|A_1(B_{11}C_1+B_{12}C_2)|^2+\frac{1}{2}|A_2(B_{21}C_1+B_{22}C_2)|^2. \qquad (46)$$

В этом случае, чтобы найти интенсивность, созданную на щели D при работе обоих источников, мы складываем *интенсивности*, создаваемые каждым источником в отдельности. Выражение $|A_1(B_1C_1+B_{12}C_2)|^2$ представляет собой вероятность того, что частица от источника 1 пройдет через щель в D; выражение $|A_2(B_{21}C_1+B_{22}C_2)|^2$ — вероятность частице из источника 2 пройти через щель в D. Для каждой частицы, проходящей через щель в D, вероятность прийти от источника 1 или 2 одна и та же; это объясняет появление коэффициента 1/2 в выражении (46a).

47. Обсудим дополнительные вопросы, возникающие в связи с рис. 45A и 46A. Будем считать экран S' со всем, что расположено от него слева, источником. В этом случае рис. 45A и 46A показывают один и тот же опыт, выполненный с двумя различными источниками. Возникает вопрос: какова вероятность $P'(\theta)$ того (рис. 45A), что частица, пришедшая от экрана S', пройдет через щель в D? Поскольку каждая частица, прошедшая через щель в D, должна пройти через экран S', то вероятность $P'(\theta)$ должна быть равна произведению вероятности $P(\theta)$, следующей из формулы (45a), к вероятности того, что частица, вышедшая из щели в S, пройдет через экран S'. Последняя вероятность равна $\frac{1}{2}[|A_1|^2+|A_2|^2]$, и мы получаем

$$P'(\theta)=\tfrac{1}{2}\{|A_1(B_1C_1+B_{12}C_2)|^2+|A_2(B_{21}C_1+B_{22}C_2)|^2+ \\ +U\cos\theta+V\sin\theta\}\,[|A_1|^2+|A_2|^2]^{-1}, \quad (47a)$$

что можно записать также в виде

$$P'(\theta)=\tfrac{1}{2}[P'(0)+P'(\pi)]+\tfrac{1}{2}[P'(0)-P'(\pi)]\cos\theta+ \\ +\frac{1}{2}\left[2P'\left(\frac{\pi}{2}\right)-P'(0)-P'(\pi)\right]\sin\theta. \quad (47b)$$

Аналогичный вопрос можно поставить и для рис. 46A. Какова вероятность P_1' того, что частица, прошедшая через S', пройдет через щель в D? Легко видеть, что

$$P_1'=\{|A_1(B_1C_1+B_{12}C_2)|^2+|A_2(B_{21}C_1+B_{22}C_2)|^2\}\,[|A_1|^2+|A_2|^2]^{-1}. \quad (47c)$$

Сравнивая выражения (47a) и (47c), замечаем интересную особенность: если $P'(\theta)$ усреднить по всем углам θ от 0 до 2π, то получим P_1':

$$P_1'=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\,P'(\theta). \quad (47d)$$

В действительности даже нет необходимости в таком усреднении, так как

$$P_1'=\tfrac{1}{2}[P'(0)+P'(\pi)]. \quad (47e)$$

Таким образом, можно считать статистический ансамбль, определяемый источником, показанным на рис. 46A (этим источником

является экран S' и все расположенное от него слева), некогерентной суперпозицией двух или бесконечного числа статистических ансамблей, каждый из которых определяется источником, показанным на рис. 45A, при θ, рассматриваемом как переменный параметр. (Различные значения θ отвечают различным источникам.)

48. Результат (47d) иллюстрирует общий принцип, касающийся некогерентной суперпозиции. Пусть два некогерентных источника, можно начать с того, чтобы считать их когерентными и складывать амплитуды волн обоих источников, имея в виду, однако, множитель $e^{i\theta}$, соответствующий переменной относительной фазе. Вычисляем интересующую нас интенсивность $I(\theta)$ и зависимости от угла θ и, наконец, усредняем $I(\theta)$ по всем углам θ от 0 до 2π. Полученным таким образом среднее $\bar{I}$ и будет действительным средним для двух *некогерентных* источников. Два источника, относительная фаза которых случайна, некогерентны.

49. После этих упражнений с амплитудами, интенсивностями и вероятностями приступим к систематическому рассмотрению статистических ансамблей.

Совокупность всех статистических ансамблей, очевидно, состоит из двух совокупностей: ансамбли, которые можно рассматривать как некогерентные суперпозиции двух или большего числа отдельных статистических ансамблей, и ансамбли, которые нельзя представить в виде такой суперпозиции. Статистические ансамбли последнего типа называются *чистыми ансамблями* или *чистыми состояниями*. Все остальные ансамбли называются *смешанными ансамблями* или *статистической смесью*.

Рассмотрим смешанный ансамбль. Известно, что это некогерентная суперпозиция других ансамблей. Верно ли также, что подобный ансамбль есть некогерентная суперпозиция *чистых* ансамблей? Этот вопрос фактически касается природы *всех* физически реализуемых статистических ансамблей. Несомненно, возможен случай, когда совокупность всех физически реализуемых ансамблей не содержит вовсе чистого ансамбля. В этом случае на наш вопрос следует отрицательный ответ. С другой стороны, мы должны считать чистый ансамбль предельным случаем смешанного и можем поэтому увеличить наш набор статистических ансамблей, включив в него не только все физически реализуемые ансамбли, но и все предельные случаи этих ансамблей. Если мы выполним эту чисто математическую абстракцию, то интуитивно можно ожидать, что наша расширенная совокупность ансамблей будет обладать тем свойством, что каждый статистический ансамбль представляет либо чистый ансамбль, либо некогерентную суперпозицию чистых ансамблей.

В дальнейшем мы используем это предположение. Как физическое предположение это идеализация: мы воображаем, что осуществление всех чистых ансамблей возможно, и рассматриваем другие ансамбли как статистическую смесь чистых ансамблей. На практике, может быть, и невозможно реализовать даже чистого ансамбля, но нет никаких причин, по которым нельзя было бы сколь угодно приблизиться к нему.

Можно ли в принципе предсказать исход каждого измерения?

50. Интуитивно ясно, что об элементах чистого ансамбля известно больше, нежели об элементах *смешанного* ансамбля. Рассмотрим наш пример источника света с двумя лампами. Очевидно, что, когда включены обе лампы, нам меньше известно о свойствах индивидуальных фотонов, чем при работе одной лампы. В частности, мы меньше знаем о «цвете» фотонов.

Чтобы приготовить чистый ансамбль, следует осуществить полный контроль над стадией приготовления; мы должны подавить все источники статистических флуктуаций, которые в принципе могут быть подавлены.

Теперь ясно, что, предпринимая измерения, желательно приготовить ансамбль таких образом, чтобы он был настолько чист, насколько это технически возможно. Поступая таким образом, мы уменьшаем статистический разброс наших данных, что означает возрастание точности результата. Далее следует сказать, что теоретическая интерпретация результатов опыта проще и яснее для чистого ансамбля, чем для смешанного. В чистом ансамбле можно изучать поведение системы в наилучших возможных условиях, невозмущенных «шумами», которые *можно побежать*.

51. Теперь возникает вопрос фундаментальной важности. Можно ли утверждать, что чистые состояния характеризуются полным отсутствием статистического разброса всех физических переменных? Иными словами: полностью ли предсказуем исход каждого измерения для чистых состояний?

Следует понять, что этот вопрос касается основных свойств нашего мира, и ответ может быть дан лишь на базе *экспериментального* исследования. Чистая логика вряд ли поможет нам ответить на этот вопрос.

Классические теории основаны на предположении, что на поставленный вопрос следует *положительный* ответ. Квантовая теория отвечает на этот вопрос *отрицательно*. (Чтобы избежать недоразумений, заметим, что квантовая механика — это одна из возможных теорий, которая отвечает на наш вопрос отрицательно.) Принимая в качестве теории квантовую механику, мы вводим непредсказуемость в наше описание природы. Эту непредсказуемость следует понимать в том смысле, что, как бы мы ни приготавливали чистый ансамбль, всегда останутся измерения, исход которых в каждом конкретном случае непредсказуем. (Характер этих непредсказуемых измерений зависит от природы ансамбля.) Все это не значит, что квантовая механика предсказывает «хаос и неопределенность». Эта теория в состоянии делать точные количественные утверждения о *вероятностях* или о *средних значениях* физических переменных.

52. Для заданного нами вопроса характерно, что его нельзя окончательно решить с помощью определенного ряда опытов. Столкнувшись с явлением, для которого мы вынуждены дать отрицательный ответ, всегда можно попытаться спасти положение, сказав, что, если бы измерения были выполнены «в лучших условиях», выводы были бы иными. Другими словами: всегда можно сказать, что непредсказуемость возникает потому, что экспериментатор выполнил не самым лучшим образом. Такую аргументацию трудно отвергнуть в абсолютном смысле. С другой стороны, уместно спросить защитника детерминистической теории в классическом смысле: как конкретно должны быть выполнены измерения, чтобы детерминистический характер квантовой механики исчез?

Отрицательный ответ основан на двух типах доказательств. Во-первых, это подробный анализ большого разнообразия опытов, в которых учтены наблюдаемые свойства частиц. Во-вторых, это предсказания, основанные на квантовомеханической теории, краеугольным камнем которой является *отрицательный* ответ. Эти предсказания оказываются в прекрасном согласии со всеми опытными фактами; *отрицательный* ответ на поставленный вопрос никогда не приводит к противоречию с опытом.

53. В гл. 4 и 5 были приведены весьма убедительные доводы в пользу *отрицательного* ответа. Реальные частицы распространяются подобно волнам в пространстве. Эти волны разделяются полупосеребренным зеркалом, двойной щелью и дифрагируют на препятствиях. С другой стороны, наблюдая за частицами с помощью фотоэлемента или другого детектора частиц, мы никогда не обнаружим «доли фотона» или «доли электрона». Для согласованного описания всех этих явлений мы должны перейти к вероятностной интерпретации *амплитудного* волны: величины, пропорциональные квадрату абсолютного значения волновой функции, соответствуют *вероятностям*. Мы можем знать только вероятность срабатывания счетчика, но никогда не сможем сделать такой счетчик, относительно реакции которого в каждом данном опыте мы были бы полностью уверены.

Рассмотрим, например, опыт с двумя щелями. Если он должен быть выполнен с определенным импульсом падающих частиц, то следует осуществить такую схему опыта, чтобы импульс был определен как можно точнее. Когда такой пучок падает на экран с двумя щелями, мы наблюдаем характерную дифракционную картину. Эта картина возникает, лишь когда обе щели открыты, т. е. если частица проходит через обе щели. Если мы, однако, попытаемся регистрировать частицу счетчиком, помещенным за одной из щелей, то никогда не обнаружим половины частицы, а всегда частицу целиком. В каждом одиночном опыте счетчик может либо сработать, либо не сработать, и невозможно знать заранее, что произойдет. Мы можем знать лишь вероятность срабатывания счетчика. Читатель спросит: может быть, это происходит потому, что ансамбль не является чистым? Но что он может предложить, чтобы сделать ансамбль более чистым?

54. Суть проблемы в том, можно ли найти способ более детального описания частицы, чем это делает волновая теория? Если волновое описание верно и, кроме того, частица обладает свойством

неделимости, так что частица получить «дробную» частицу, то есть лишь один выход — интерпретировать интенсивность как вероятность. Вспомним наши рассуждения о принципе неопределенностей в начале этой главы. Если импульс частицы точно известен, то следует описывать как распространяющуюся в пространстве волну, то в этом случае мы ничего не знаем о ее *положении*. Небольшой статистический разброс в измерениях импульса вызывает большой разброс измерений положения, и, пока мы принимаем волновое описание и интерпретируем интенсивность как вероятность, у нас нет возможности отказаться от принципа неопределенностей. С другой стороны, нет никаких экспериментальных данных, которые позволили бы предположить, что частицу можно описать более подробно, чем это позволяет волновое описание; нет абсолютно никаких указаний на какие-то «скрытые переменные».

Все сказанное приводит к следующему основному принципу квантовой механики: чистые состояния частицы описываются волнами. *Ансамбль состояний частицы является полным тогда и только тогда, если каждой заданной системе описывается одной и той же волновой функцией.* Если можно задать волновую функцию, которая описывает все частицы ансамбля, то имеется максимально возможный контроль над источником. Ничто не может быть более чистым, чем определенная волна.

55. Интересно сравнить некоторые аспекты классического мира фантазии и реального мира. Понятия статистического ансамбля, статистических смешанных и чистых состояний не чужды классической физике. Действительно, идея статистического ансамбля возникла в классической статистической физике задолго до открытия квантовой механики. Добрая часть наших рассуждений о процессе измерения остается применимой в рамках классического описания. И здесь чистое состояние возникает в том случае, когда мы имеем полный контроль над стадией приготовления системы, тогда как статистическая смесь состояний проявляется тогда, когда наш контроль значительно менее совершенен. Решающее различие между классическим и квантовомеханическим описаниями заключается в природе чистого состояния. В классической теории свойства чистого состояния таковы, что исход любого одиночного измерения *можно* предсказать. Если данный счетчик срабатывает в данном одиночном опыте, то он хорошо срабатывает и в каждом последующем. Каждый последующий опыт повторяет то же самое, что было в предыдущем. Чистое состояние не дает статистического разброса *любой* физической переменной.

Задолго до появления квантовой механики физики говорили, что происходящее в микроскопическом мире *практически* невозможно предсказать с неограниченной точностью. Тепловые шумы и многие другие вещи существующие «возмущения», над которыми у нас нет контроля в макроскопической ситуации, создают неопределенность в значениях физических переменных, которая полностью маскирует характерную для квантовой механики неопределенность. Классическая физика считала очевидным, что в чистых

состояниях у физических переменных нет статистического разброса. Критический анализ микроскопических ситуаций обнаруживает, что эта вера была заблуждением.

56. Установление статистического характера всех предсказаний, даже в случае чистого ансамбля, было существенным шагом в развитии физической теории. Возвращаясь к нашей истории квантовой физики, мы замечаем, что идея о вероятностном описании физических явлений была для физиков очень трудной и неприятной. Двойная природа света, который обнаружил свойства волны и частицы, казалась весьма смущающим открытием. Оно получило название «дуализма» волн и частиц. В гл. 4 мы показали, что этот дуализм может быть ясно понят, но на ранней стадии квантовой физики ситуация была иной. Никому не приходило в голову интерпретировать квадрат амплитуды волны в понятиях вероятностей, а без этой идеи, которая представляет собой радикальный отход от классической физики, дуализма света не может быть понят.

Существование принципиального предела для нашей возможности предсказать будущие явления было воспринято многими, особенно нефизиками, настроенными философски, как весьма глубокая и революционная идея. По этому поводу неизбежно было написано достаточно вздора (как и по поводу соотношения неопределенностей), авторы которых делали далеко идущие выводы о влиянии квантовой механики на человеческие дела вообще.

Нельзя отрицать, что вопрос о предсказуемости и непредсказуемости в принципе может вызвать большой интерес у философов. Следует, однако, заметить, что в настоящее время физики уделяют этой стороне дела очень мало внимания. Не будет ошибкой считать, что большинство из них возвращается к теории измерений в квантовой механике лишь при необходимости прочесть вводный курс на эту тему.

Поляризованный и неполяризованный свет

57. Поляризация света является прекрасной иллюстрацией разницы между чистым состоянием и статистической смесью состояний в квантовой механике. Рассмотрим опыт, показанный на рис. 57А. Почти монохроматические фотоны (с частотой ω) проходят через поляризующий фильтр P_A и расположенную за ним щель в экране S. Таким образом, приготовление статистического ансамбля происходит слева от S. Фотоны регистрируются фотоэлементом P_B, перед которым помещен поляризующий фильтр F_B. Фотоэлемент совместно с этим фильтром можно считать измерительным прибором, измеряющим счетную переменную D.

Можно разработать поляризующие фильтры весьма высокого совершенства, пропускающие волны с определенным состоянием поляризации и полностью поглощающие волны с другим состоянием поляризации. Предположим, что фильтры F_A и F_B являются такими совершенными фильтрами, свойства которых мы можем подобрать по желанию.

58. Пусть фильтр F_x пропускает только лево(право)поляризованный по кругу свет. Проходящие через фильтр фотоны будут элементами статистического ансамбля ρ_x. Определим скорость света в отсутствие фильтра F_x. Эта величина даст нам число фотонов за единицу

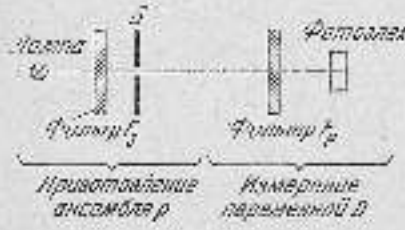


Рис. 57А. Схема опыта с поляризационными свойствами, проходящий через щель S и фильтр F_β свет находится в определенном чистом состоянии поляризации, а фильтр F_β пропускает только свет этого состояния. Регистрацию счетчиком на данный фотон можно предсказать точно. Точное предсказание возможно лишь в том случае, если фильтры F_x и F_β пропускают свету в одну и ту же (чистую) состояние поляризации.

времени и позволит нормировать наши измерения. Пусть эффективность счетчика P равна 100 %, т. е. он регистрирует каждый попадающий на него фотон, а скорость света равна n фотонам в единицу времени.

Возьмем несколько различных фильтров F_β. Каждому фильтру соответствует свое значение счетной переменной D. Среднее значение D определяется как отношение n'/n, где n' — скорость света при наличии фильтра. Если фильтр F_β пропускает только лево(право)поляризованный по кругу свет, соответствующая счетная переменная обозначается D_L (D_R). Если этот фильтр пропускает свет, линейно поляризованный в направлении x или y, соответствующая счетным переменная обозначается через D_x или D_y соответственно. Рассмотрим, наконец, фильтры, пропускающие свет, линейно поляризованный в направлении, составляющем 45° с осями x и y (счетная переменная D_{45°), и поляризованный перпендикулярно этому направлению (счетная переменная D_{135°).

Для ансамбля ρ_L имеем следующие значения средних:

$$\mathrm{Av}\,(D_L;\rho_L)=1,\quad \mathrm{Av}\,(D_R;\rho_L)=0, \tag{58a}$$

$$\mathrm{Av}\,(D_x;\rho_L)=\mathrm{Av}\,(D_y;\rho_L)=\mathrm{Av}\,(D_{45^\circ};\rho_L)=\mathrm{Av}\,(D_{135^\circ};\rho_L)=1/2. \tag{58b}$$

Для этого ансамбля две переменные D_L и D_R точно известны, но относительно остальных четырех переменных мы находимся в состоянии максимальной неопределенности. Является ли ансамбль ρ_L чистым? Этот вопрос означает: можем ли мы сделать его более чистым? Очевидно, это невозможно. Если мы требуем, чтобы переменные D_R и D_L были точно известны и имели значения, указанные в (58a), то фотон, прошедший через щель в S, должен быть строго левополяризованным по кругу. Но каждую левополяризованную волну можно разложить на две линейно поляризованные волны равной амплитуды, поляризованные по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Если мы поместим фильтр, который пропустит одну из линейно поляризованных компонент, то интенсивность прошедшей волны будет составлять половину падающей. Среднее значение переменных D_x, D_y, D_{45°, D_{135° в каждом отдельном опыте точно предсказуемо, как это видно из (58b). Это экспериментальный факт. Имея в виду другой экспериментальный факт, а именно, что фотон перестает по энергии поляризационным фильтром, мы приходим к важнейшему выводу, что ни одна из четырех переменных D_x, D_y, D_{45° и D_{135° не может быть точно предсказана для любого данного единичного опыта. Действительно, непредсказуемость этих переменных — максимально возможная, несмотря на то, что используй ансамбль является простейшим возможным ансамблем фотонов, поляризованных по кругу.

59. Следует подчеркнуть, что мы пришли к совсем другому выводу, считая, что фотоны ведут себя во всех отношениях подобно классическим волновым пакетам. Среднее значение переменной D_x должно в этом случае зависеть от чувствительности детектора. Если она достаточна для регистрации половины энергии, переносимой волной, то скорость счета D_x была бы такой же, как и скорость счета D_L, т. е. $\mathrm{Av}\,(D_x;\rho_L)=1$. Это среднее было бы равно нулю при чувствительности счетчика, недостаточной для срабатывания от половинной энергии. Реальные фотоны не ведут себя подобно классическим волновым пакетам: независимо от того, какой фильтр поставлен перед счетчиком, мы всегда обнаружим, что энергия фотона, зарегистрированного счетчиком, равна $\hbar\omega$.

Реакция счетчика D_x, D_y, D_{45° и D_{135° в единичном опыте, таким образом, непредсказуема даже для чистого ансамбля ρ_L. Этот пример является сильным аргументом в пользу общих выводов, рассмотренных в п. 51—54.

60. Что произойдет, если убрать фильтр F_β? Предположим, что полученное пучка обладает зеркальной симметрией и любое состояние поляризации испущенного света равновероятно. Мы называем такой свет *неполяризованным*. Соответствующий ансамбль является *наиболее хаотическим ансамблем* по отношению к поляризационным степеням свободы, и независимо от природы идеального поляризационного фильтра F_β скорость света с фильтром составляет половину скорости света без него. Мы наблюдаем в этом случае следующие средние:

$$\mathrm{Av}\,(D_L;\rho_0)=\mathrm{Av}\,(D_R;\rho_0)=1/2, \tag{60a}$$

$$\mathrm{Av}\,(D_x;\rho_0)=\mathrm{Av}\,(D_y;\rho_0)=\mathrm{Av}\,(D_{45^\circ};\rho_0)=\mathrm{Av}\,(D_{135^\circ};\rho_0)=1/2. \tag{60b}$$

Заметим, что средние (60b) совпадают по величине со средними (58b) и степень незнания четырех переменных D_x, D_y, D_{45° и D_{135° для ансамблей ρ_L и ρ_0 одна и та же. Ансамбли *различаются* по величине информации, которой мы обладаем о переменных D_L и D_R. Для ансамбля ρ_L нам полностью известны эти переменные, но меньше всего нам известно о них в случае ансамбля ρ_0.

Следует поэтому ожидать, что ансамбль ρ_0 является статистической смесью. Чтобы сделать это явным, рассмотрим опыт, в котором фильтр F_β пропускает только правополяризованные по кругу волны. Обозначим соответствующий ансамбль ρ_R. Средние для такого ансамбля равны

$$\mathrm{Av}\,(D_L;\rho_R)=0,\quad \mathrm{Av}\,(D_R;\rho_R)=1, \tag{60c}$$

$$\mathrm{Av}\,(D_x;\rho_R)=\mathrm{Av}\,(D_y;\rho_R)=\mathrm{Av}\,(D_{45^\circ};\rho_R)=\mathrm{Av}\,(D_{135^\circ};\rho_R)=1/2. \tag{60d}$$

Читателю нетрудно убедиться, что из полусуммы средних значений по ансамблям ρ_1, ρ_2 и ρ_3 следует

$$\rho_3 = \rho_1/2 + \rho_2/2. \qquad (60a)$$

Этот вывод находится в согласии с рассуждениями п. 38.

Таким образом, хаотический ансамбль можно рассматривать как *некогерентную суперпозицию* двух чистых ансамблей ρ_1 и ρ_2.

61. В школьные годы автора беспокоил вопрос о различии между неполяризованным светом и светом, поляризованным по кругу. Он читал в книгах, что неполяризованный свет является смесью света, поляризованного в двух перпендикулярных направлениях. Там же было написано, что свет, поляризованный по кругу, является суперпозицией света, поляризованного в двух перпендикулярных направлениях. В конце концов автор понял, что в первом случае происходит сложение *интенсивностей*, а во втором — сложение *амплитуд*. Поляризованный по кругу свет представляет собой *когерентную* смесь света, поляризованного в двух перпендикулярных направлениях, тогда как неполяризованный свет представляет собой *некогерентную* смесь.

Задачи

1. При попытках опровергнуть соотношение неопределенностей излюбленным доводом является следующий (см. рисунок к этой задаче). Пучок электронов с определенным импульсом p падает слева на экран S_1, в котором имеется отверстие диаметром a. На расстоянии d от S_1 помещен другой экран S_2 с таким же отверстием. Оба отверстия находятся строго на одной линии со направлением пучка. Часть электронов, пройдя первую щель, отклонится, а часть пройдет через вторую щель. Рассмотрим один из таких электронов. Неопределенность в его координате порядка $\Delta x \approx a$, а импульс равен p, так как электрон в этом опыте не отклоняется и не приобретает энергии. Поскольку известно, что электрон прошел через обе щели, то неопределенность в направлении импульса будет меньше или порядка $\Delta\theta \sim a/d$. Поэтому неопределенность в поперечной проекции импульса электрона имеет порядок $\Delta p_x \approx p\Delta\theta \approx pa/d$. Таким образом, произведение неопределенностей координаты и импульса для поперечного направления

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx p a^2/d \approx 0$$

можно сделать сколь угодно малым при надлежащем выборе a и d (если только d не равно нулю). Это нарушает соотношение неопределенности, являющееся одной из основ квантовой механики.

К задаче 1. В задаче описанные допущения, что отношение импульса к энергии может быть нарушено, если сделать щели узкими, а экран достаточно близким. В этом случае кажется, что произведение неопределенности импульса на неопределенность положения в направлении x сколь угодно малой. Где ошибка в этих рассуждениях?

Можете ли вы опровергнуть это рассуждение?

Приведенное рассуждение является одним из многих, предпринимавшихся для опровержения квантовой механики через отрицание соотношения неопределенностей. Следует, однако, уяснить себе, что подобные рассуждения ни в какой мере не угрожают соотношению неопределенностей, если принять *правильное* волновое *описание*, так как из этих предпосылок соотношение неопределенностей вытекает. Попытки «опровергнуть» волновой механики можно разделить на две группы:

а) Доводы, описывающие опыт волновой механики, хотя и не всегда в явной форме.

б) Доводы, которые допускают, что основаны на некоторых идеях волновой механики.

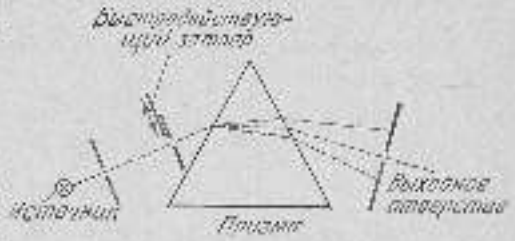
Тщательный анализ высказываемых возражений обнаружит природу ошибки. Полный отказ от волновой механики не может быть сделан опровергнут логическим путем, и нам следует обратиться к экспериментальным фактам; логические следствия описания оказываются в противоречии с опытом. Доводы категории б) просто ошибочны.

2. а) Рассмотрим монохроматизирующий опыт. Пусть совершенно монохроматический свет с длиной волны 6000 Å проходит через очень быстрый затвор, который периодически открывается и закрывается так, что он открыт 10^{-10} с и закрыт 10^{-6} с в течение периода. Проходящий через затвор свет больше не монохроматичен: мы обнаружим определенный разброс длин волн. Оцените неопределенность в длине волны (в ангстремах).

б) Предположим теперь, что затвор свет направляется в кварцевую трубу, заполненную сероуглеродом (CS_2). Это электронная среда, для которой в ультрафиолетовом свете длина волны, как известно, показателя преломления n с длиной волны определяется соотношением

$$\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda} = -0{,}575.$$

Пусть импульс световых волн, проходящих через затвор, измеряется с помощью другого затвора, расположенного на определенном расстоянии от первого и открывающегося позже. С какой скоростью распространяется в сероуглероде световой импульс?



К задаче 2. Предложено опыт изучать природу неопределенностей. Пучок описывается спектрограф с очень большим разрешением, а моменты времени, когда мы знаем, время ухода пучка, будут открыты затвором. Анализ показывает, что время прохождения щели светом и его спектра могут быть малыми, сколь угодно, и, в чем согласны этого утверждения?

3. Рассмотрим еще одну идею о нарушении принципа неопределенностей. Она относится на этот раз к соотношению между временем и энергией. Принцип опыта сокращенно, весьма схематично, на рисунке к этой задаче. Пучок монохроматического света проходит через щель, за которой стоит быстродействующий затвор. Мы не входим в технические трудности и предполагаем, что затвор можно открывать на короткое конечное время. Затем свет попадает на спектрограф, изображенный в виде призмы, и фокусируется хорошо известным путем. Выходящий из спектрографа свет не будет больше монохроматическим, а будет иметь разброс частот, подобно тому, как это обсуждалось в задаче 2. Мы можем, однако, сделать спектрограф достаточно узкой входной щелью, помещенной в средней части экрана, и открыть затвор таким образом, чтобы узкий участок спектра. Свет после выходящей отверстия может быть сделан монохроматическим с произвольно высокой степенью. С другой стороны, с помощью затвора продолжительность импульса может быть сделана сколь угодно малой. Таким образом, свет, выходящий из спектрографа, может иметь сколь угодно малую длительность и произвольно точную частоту, что противоречит соотношению неопределенностей.

Можете ли вы указать ошибку в этих рассуждениях?

4. Вернитесь к рассуждениям с. 29, предположим, что температура нити равна 1000°C, а ускоряющий потенциал равен 10 В. Оцените относительный разброс импульсов испускаемых электронов, т. е. величину $\Delta p/p$. Достаточно грубой оценки.

5. Получив пучок электронов очень малой энергии, можно наблюдать электронографический свет с дифракцией электронов. Предположим, что мы попытаемся создать пучок с очень определенным импульсом, соответствующим, например, энергии 0,01 эВ. Рассмотрите практические трудности получения такого пучка. Очевидно, что простое устройство из катода и одного ускоряющего электрода

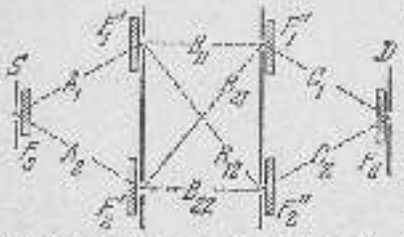
не хватит, т.е. вероятно, существуют другие методы, о которых можно подумать. Попытайтесь указать на некоторые из них и обсудите, насколько они технически осуществимы.

8. Рассмотрим решетку из задачи 5 гл. 6. Предположим, что решетка не бесконечно велика, а содержит только N штрихов. В этом случае мы не будем строго периодической системой, и дифрагированный пучок будет иметь угловой разброс. Полученное можно выразить следующим образом. Характеристический импульс, передаваемый решетке, больше не кратен точно $2\pi\hbar$, а определен с погрешностью Δq. Найдите связь между N и Δq. Повторите эксперимент из 5Б с решеткой из рис. 5А этой главы. Возможно, это упражнение даст вам некоторые идеи. Воспользуйтесь результатом, чтобы получить выражение для разброса углов, под которыми дифрагируют интерференционные пучки.

7. Определите длину монохроматического пучка света, испускаемого атомным источником. Проблема заключается в определении с помощью опыта неизвестного состояния поляризации пучка.

а) В пятом распоряжении идеальный поляризационный фильтр и фотоумножитель. Какое наименьшее число измерений, с помощью которых можно полностью определить состояние поляризации пучка? Объясните свое утверждение.

б) Предположим, что имеется фотоумножитель, два одинаковых поляроидных плитки и листочка в четверть волны. Как, используя только поляроидное оборудование, определить состояние поляризации пучка? В этом случае вы должны предполагать, что поляроид представляет собой идеальный поляризационный фильтр.



Задача 8. Цепочка из трех идеальных поляризационных фильтров. Требуется найти вероятность того, чтобы фотон, испускаемый атомом S, попадет в щель D при различных комбинациях фильтров. Через A_{xx}, B_{xx} и C_{xx} обозначены амплитуды перехода в отсутствие фильтров. Мы предполагаем, что эти амплитуды не зависят от состояния поляризации.

8. На рисунке показан более частный вариант опыта с двумя щелями, обсуждавшегося в п. 41—43. Перед щелями, а также перед источником и регистрирующим прибором (детектором) помещены (или отсутствуют) идеальные поляризационные фильтры. Предположим, что амплитуды прохождения, рассмотренные в п. 41—43, не зависят от состояния поляризации и что источник испускает неполяризованный свет. Полученное выражение, аналогичное (43.5), для вероятности того, что фотон, покинувший щель в S, пройдет через щель в D при различных комбинациях фильтров, указанных в следующей таблице:

F_0	F_1'	F_2'	F_1''	F_2''	F_d
Нет	Г	Б	нет	нет	нет
ЛЦ	Г	Б	нет	нет	нет
ЛП	Г	Б	нет	нет	ЛП
ЛЦ	Г	Б	ПП	ЛП	Г
нет	Г	нет	нет	Г	нет

«Нет» — фильтр отсутствует. Г и Б — фильтры, создающие горизонтально и вертикально поляризованный свет. ЛП и ПП — плоскости левой и правой круговой поляризации соответственно.

9. Рассмотрим различие между идеальным и обычным счетчиками. Реальный счетчик может, и довольно часто, работать в отсутствие события и пропустить (не зарегистрировать) событие. Число отсчетов в отсутствие источника именуется *фоном счетчика*. Один из источников фона является проникающее всюду космическое излучение. Далее, если два события разделены слишком коротким интервалом времени, то счетчик не разрешит их и отметит как одно. Наименьшее время t_0 между двумя событиями, при которых они еще регистрируются счетчиком раздельно, называется *разрешающим временем* счетчика. Его можно определить следующим образом. Пусть имеются два радиоактивных источника 1 и 2. Поместим их на таких расстояниях от счетчика, чтобы число отсчетов от каждого было приблизительно одинаково. Пусть N_0 — скорость счета, когда оба источника убраны, $N_1 = N_2$ — скорости счета отдельно от источников 1 и 2, N_{12} — скорость счета в присутствии обоих источников. Подберем расстояния так, чтобы N_{12} было заметно меньше $2N_1$, но не пренебрежимо мало по сравнению с $2N_0$. Пусть также N_0 меньше N_1, N_2 и N_{12}. Покажите, что из этих четырех измерений скорости счета можно определить t_0. Выразите t_0 через N_0, N_1, N_2 и N_{12}.

Заметим, что для идеального счетчика в его отсутствие дает $N_{12} = N_1 + N_2$.

Дополнительная литература

Излагаемую в этой главе теорию следует дополнить описанием экспериментальных методов физики элементарных частиц. Мы рекомендуем следующие источники:

Фрош Д., Теруддэ А. Элементарные частицы.— М.: Атомиздат, 1966.

Статьи в сборнике «Над чем думают физики»:
Хейдо Г. Треки следы элементарных частиц.— 1962, вып. 1, с. 25.
О'Нейл Ф. К. Искровая камера.— 1965, вып. 4, с. 56.

Статьи в журнале «Scientific American»:
Bilaniuk O. M. Semiconductor Particle-Detectors.— 1962, Oct., p. 72.
Collins G. B. Scintillation Counters.— 1953, Nov., p. 66.
Glaser D. A. The Bubble Chamber.— 1955, Feb., p. 46.
Yount D. E. The Streamer Chamber.— 1967, Oct., p. 38.

Rochester G. D., Wilson J. G. Cloud Chamber Photographs of the Cosmic Radiation. (Альбом снимков различных явлений, возникающих при прохождении космических лучей через камеру Вильсона.)

Introduction to the Detection of Nuclear Particles in a Bubble Chamber (Prepared at the Lawrence Radiation Laboratory, Berkeley, The University of California), 1964. (Альбом стереоскопических снимков разнообразных взаимодействий элементарных частиц в пузырьковых камерах.)

Дейч М. М., Дейч Г. А. Искровые детекторы заряженных частиц.— УФН, 1965, т. 86, с. 371.

Ржанов С. М., Матвеев О. А., Стриков П. Б. Полупроводниковые счетчики ядерных частиц.— М.: Знание, 1964.

ГЛАВА 7

ВОЛНОВАЯ МЕХАНИКА ШРЕДИНГЕРА

Нерелятивистское волновое уравнение Шредингера

1. Обратимся теперь к рассмотрению феноменологической теории, сыгравшей крайне важную роль в развитии квантовой физики. Основой этой теории является уравнение Шредингера; его впервые сформулировал Эрвин Шредингер в 1926 г. [*]), вскоре после того, как Гейзенберг открыл матричную механику. Обе эти теории были первыми количественными формулировками основных принципов квантовой механики.

В этой книге мы обращаемся к теории Шредингера, чтобы дать читателю некоторое представление о том, как работает волновая теория, т. е. как с ее помощью вычисляются расчеты реальных явлений. Мы выбрали нерелятивистскую теорию Шредингера в качестве примера волновой теории, ибо она во многих отношениях особенно проста.

2. Теория уравнение Шредингера, понимаемая в несколько ограниченном, как будет показано ниже, смысле, основано на нескольких сильных допущениях, из которых мы исходим главные:

1) Частицы не рождаются и не исчезают в любом физическом процессе число частиц данного типа остается постоянным.

2) Скорость частиц достаточно мала, лишь в этом случае возможно нерелятивистское приближение.

Мы считаем перечисленные допущения сильными, так как, во-первых, из опыта известно, что процессы рождения и аннигиляции частиц действительно происходят, а во-вторых, любая фундаментальная теория должна принимать во внимание принципы специальной теории относительности.

Указанные допущения нельзя считать независимыми. Рассмотрим, например, столкновение двух одинаковых частиц, и пусть в системе центра масс их скорости очень близки к скорости света. При этом кинетическая энергия частиц достаточно велика для образования новых частиц. С другой стороны, если скорости малы, то малая и кинетическая энергия, и процессы рождения частиц невозможны — они запрещены законом сохранения энергии. Это утверждение нуждается в одной оговорке. Поскольку масса фотона равна нулю, то фотон может возникнуть или исчезнуть (т. е. свет может быть испущен или поглощен) даже в том случае, если

*) *Schrödinger E.* Quantisierung als Eigenwertproblem. Ann. d. Phys., 1926, v. 79, p. 361; v. 79, p. 489; v. 80, p. 437; v. 81, p. 109.

остальные частицы, имеющие массу покоя, движутся с нерелятивистскими скоростями. Таким образом, теория Шредингера, понимаемая в более широком смысле, должна описывать поглощение и испускание света, и высказанные выше допущения следует уточнить:

1*) Рождение или исчезновение частиц, *имеющих массу покоя*, не происходит, но испускание и поглощение фотонов возможно.

2*) *Все* частицы, *имеющие массу покоя*, движутся с малыми скоростями, и их можно описывать нерелятивистским образом. Фотоны, являющиеся релятивистскими объектами, требуют специального описания.

Следует заметить, что существуют теории, основанные на «релятивистских» волновых уравнениях, в которых вторые допущение снято. Примером может служить знаменитое уравнение Дирака. Имеется также «релятивистский» вариант уравнения Шредингера. Мы не станем рассматривать здесь эти уравнения; говоря об уравнении Шредингера, мы имеем в виду нерелятивистское уравнение, основанное на приведенных выше допущениях.

3. В п. 1 этой главы мы назвали теорию Шредингера *феноменологической*. Она не претендует на звание фундаментальной теории. Выше были перечислены некоторые причины такого положения, и мы хотим, чтобы читатель их ясно понял. Теория уравнения Шредингера не эквивалентна квантовомеханической теории в целом.

Необходимо тем не менее подчеркнуть, что применение теории Шредингера к атомным и молекулярным явлениям оказалось чрезвычайно успешным. В этой области ее следует считать, несмотря на ограниченность, хорошим *приближением*.

4. Прежде чем перейти к самому уравнению Шредингера, постараемся понять, почему теория, основанная на двух допущениях, рассмотренных в п. 2, оказалась в состоянии правильно описать свойства атомов и молекул. Главной причиной является «жесткость» постоянной тонкой структуры α. В гл. 2 было показано, что именно эта жесткость приводит к тому, что атомы и молекулы оказываются слабо связанными структурами, состоящими из медленно движущихся частиц. Мы показали, что скорость электрона в атоме водорода имеет порядок αc[37]. Внешние электроны остальных атомов имеют скорости того же порядка, а ядра в молекуле движутся с много меньшими скоростями. Таким образом, второе допущение, лежащее в основе теории Шредингера, хорошо выполняется для атомов и молекул.

5. Чтобы понять, на чем основано первое допущение, вспомним рассмотренные в гл. 2 типичные значения энергии переходов и связи для атомов и молекул. Энергии оптических переходов и энергии ионизации атомов и молекул имеют порядок 1—10 эВ. Наибольшие энергии имеют рентгеновские кванты, испускаемые тяжелыми атомами, но и они не превосходят 100 кэВ.

Такие энергии существенно меньше энергии покоя электрона, равной 0,5 МэВ. Нет легких частиц, кроме электрона (кроме фотона, но мы условились рассмотреть позитрон отдельно), а она может быть рождена лишь в паре с позитроном. Рождение электрон-

ронно-позитронной пары требует по меньшей мере энергии в 1 МэВ, что намного превосходит энергии, типичные для атомов и молекул. (Читатель может возразить, что имеется еще одна частица, существенно более легкая, чем электрон,— нейтрино. Но нейтрино *очень слабо* взаимодействует со всеми другими частицами, и, по сравнению с электромагнитным взаимодействием, происходящие с участием нейтрино взаимодействия пренебрежимо слабы. В атомной и молекулярной физике о взаимодействии нейтрино можно полностью забыть.)

6. Квантовая электродинамика, представляющая собой частный случай так называемой *квантовой теории поля*, может с полным основанием считаться «верной» теорией атомных и молекулярных явлений. Теория Шредингера в применении к этим явлениям может рассматриваться как первое приближение к «верной» теории. Сравнивая предсказания квантовой электродинамики с предсказаниями теории Шредингера, можно получить представление о точности последней. Общий результат такого сравнения позволяет считать, что теория Шредингера правильно описывает основные свойства структуры атомов и молекул. Более точно это утверждение можно выразить следующим образом. Теоретические значения многих атомных и молекулярных величин, таких как энергии и времена жизни стационарных состояний, длины волн излучения, геометрические параметры молекул и т. д., могут быть разложены в ряд по степеням постоянной тонкой структуры α. В этом разложении теория Шредингера дает верное значение основного члена. Члены более высокого порядка являются так называемыми «радиационными поправками». Эти поправки малы, так как мала постоянная α.

7. Перейдем теперь к изложению теории Шредингера для очень простой физической ситуации, а именно для движения частицы, например электрона, во внешнем силовом поле. Теория Шредингера в действительности способна на значительно большее. Она в состоянии описать движение любого числа взаимодействующих между собой частиц. Но чтобы понять основные принципы, начнем с еще более простой ситуации.

Рассмотрим, скажем, движение частицы в отсутствие внешнего поля, т. е. движение *свободной частицы*. Теория Шредингера основана на волновом уравнении, известном под названием уравнения Шредингера. Его решением является волна де Бройля, «связанная» с частицей. В п. 37 гл. 5 мы имели уже дело с одним из волновых уравнений, а именно с уравнением Клейна — Гордона. Это уравнение обладает релятивистской инвариантностью и применимо при любой скорости движения частицы. Мы хотим изменить уравнение Клейна — Гордона таким образом, чтобы оно согласовалось с приближениями, на которых основана теория Шредингера, иными словами, мы хотим получить его нерелятивистское приближение. Затем мы дадим физическое истолкование волновой функции $\psi(x, t)$, описывающей волну де Бройля.

8. В гл. 5 мы дали *общую* интерпретацию волновой функции: «частицу легче найти в тех областях пространства, где амплитуда $\psi(x, t)$ велика». Здесь мы сделаем специальное предположение, которое придаст этой идее количественный характер.

Шредингеровская волновая функция $\psi(x, t)$, т. е. амплитуда волны де Бройля, в теории Шредингера определяет вероятность нахождения частицы в данной точке пространства и времени. Если мы пытаемся установить положение частицы в данный момент времени t, то *вероятность* обнаружить частицу в малой части объема $d^3(x)$, содержащей точку x, пропорциональна $|\psi(x, t)|^2 d^3(x)$. Таким образом, *плотность вероятности* пропорциональна квадрату модуля волновой функции.

Это характерное и основное предположение теории Шредингера. Чтобы иметь возможность делать точные вычисления, мы, естественно, должны иметь *какую-то* интерпретацию волновой функции, и сформулированная выше вероятностная интерпретация и удобна, и физически прозрачна, и плодотворна. Эта глубокая и важная идея впервые высказана была Максом Борном [*].

9. Шредингеровская волновая функция зависит от положения и времени и является комплексной величиной, удовлетворяющей (линейному) уравнению Шредингера (которое мы вскоре напишем).

Определенная волновая функция *соответствует* некоторому определенному состоянию движения частицы. Заметим, что если $\psi(x, t)$ — возможная для данного состояния волновая функция, то функция $e^{i\theta}\psi(x, t) = \psi_1(x, t)$ также возможна, если θ — вещественная постоянная. Очень важно, что плотности вероятности, определяемые функциями ψ и ψ_1, *совпадают*. Это означает, что обе волновые функции $\psi(x, t)$ и $\psi_1(x, t)$ описывают одно и то же состояние движения частицы. Мы можем утверждать, что каждой волновой функции соответствует определенное состояние движения частицы. Обратное утверждение неверно: данное состояние движения частицы определяет шредингеровскую волновую функцию с точностью до *постоянного* комплексного коэффициента с модулем, равным единице. Две волновые функции, отличающиеся таким множителем, соответствуют *одному и тому же* физическому состоянию.

10. Обозначим массу частицы через m и рассмотрим плоскую волну с импульсом p. Энергия частицы [**])

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}. \tag{10a}$$

Перейдем теперь к нерелятивистскому приближению, когда скорость частицы много меньше скорости света. Такое предположение означает, что в выражении (10a) слагаемое c^2p^2 много меньше слагаемого m^2c^4. Разлагая выражение под корнем (10a) по степеням p^2 и удерживая два первых члена, получим

$$E \approx mc^2 + p^2/2m. \tag{10b}$$

---

[*]) *Born M.* Quantenmechanik der Stoßvorgänge.— Zs. f. Phys., 1926, v. 38, p. 803.

[**]) В этой главе мы используем системы единиц СИ или СГС.

Первое слагаемое в (10b) дает энергию покоя частицы, а второе — нерелятивистское выражение для ее кинетической энергии.

Соответствующая волновая функция де Бройля, которую мы обозначим через $\psi_p(x, t)$, приближенно равна

$$\psi_B(x,t) = \exp\left[\frac{i(x\cdot p}{\hbar} - \frac{ip^2}{2m\hbar}t\right]\exp\left(-\frac{imc^2}{\hbar}t\right). \qquad (10c)$$

Ее можно записать в виде произведения двух множителей. Первый из них обозначим через $\psi_S(x, t)$:

$$\psi_S(x,t) = \exp\left[\frac{i(x\cdot p}{\hbar} - \frac{ip^2}{2m\hbar}t\right]. \qquad (10d)$$

Тогда имеем

$$\psi_B(x,t) = \psi_S(x,t)\exp(-imc^2t/\hbar), \qquad (10e)$$

при этом

$$|\psi_B(x,t)|^2 = |\psi_S(x,t)|^2. \qquad (10f)$$

Из равенства (10f) следует, что обе волновые функции ψ_B и ψ_S отличаются комплексным множителем с модулем, равным единице, который не зависит от состояния движения частицы, т. е. от импульса p. Квадраты абсолютных значений обеих волновых функций совпадают в любой точке пространства для всего времени. Для описания распределения вероятности волновая функция ψ_S так же хороша, как и «правильная» волновая функция де Бройля ψ_B. Именно такая операция над волновой функцией и производится в теории Шредингера. Функция ψ_S, определенная равенством (10d), является шредингеровской волновой функцией, описывающей свободную частицу, движущуюся с малым импульсом p. Произведенный выбор волновой функции является вопросом удобства; зачем вводить в вычисления множитель $\exp(-imc^2t/\hbar)$, если заранее известно, что за ним не скрывается никакого физического смысла?

11. В общем случае волновая функция Шредингера может быть представлена суперпозицией плоских волн, имеющих вид (10d). Чтобы найти волновое уравнение, которому удовлетворяет любая волновая функция Шредингера, повторим рассуждения, приведенные в п. 37 гл. 5. Итак, мы хотим иметь простейшее *линейное* волновое уравнение, которому удовлетворяет любая плоская волна. Выкладки полностью аналогичны произведенным в гл. 5, и мы получаем

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,t). \qquad (11a)$$

В этом уравнении индекс S у волновой функции опущен. В дальнейшем мы будем иметь дело только со шредингеровской волновой функцией, и в индексе нет необходимости.

Уравнение (11a) является волновым уравнением Шредингера для свободной частицы. Оно описывает движение такой частицы в нерелятивистском приближении. Сравнивая (11a) с релятивистским уравнением (37c) гл. 5, замечаем, что уравнение (11a) содержит лишь первую производную по времени. Кроме того, в согласии с нерелятивистской природой уравнения Шредингера, в нем нет места для скорости света.

12. Рассмотрим решение уравнения Шредингера (11a) в виде плоской волны (10d). *Фазовая скорость* v_f' такой волны равна

$$v_f' = \omega/k = p/2m, \quad \text{где } \omega = p^2/2m\hbar, \quad k = p/\hbar. \qquad (12a)$$

С другой стороны, фазовая скорость v_f волны де Бройля (в нерелятивистском приближении) согласно (10c) равна

$$v_f \approx \frac{mc^2}{p} + \frac{p}{2m}. \qquad (12b)$$

Обе фазовые скорости v_f и v_f' не равны друг другу, хотя две волны ψ_B и ψ_S должны, по нашим предположениям, соответствовать одной и той же физической ситуации. У нас нет, однако, оснований для тревоги: фазовая скорость — это совсем не то, что скорость частицы, и фазовой скорости не отвечает нечто наблюдаемое. С другой стороны, *групповая* скорость v для волны Шредингера равна

$$1/v = dk/d\omega = m/p, \qquad (12c)$$

и эта скорость действительно равна скорости частицы, как и должно быть. Мы уже отмечали в гл. 5, что групповая скорость волны де Бройля равна скорости частицы. Таким образом, оба типа волн распространяются с одинаковой групповой скоростью.

13. Попытаемся сейчас продвинуться на шаг дальше и рассмотреть движение частицы под действием внешних сил, имеющих потенциал. Обозначим потенциальную энергию, или потенциал, частицы через $V(x)$; потенциал зависит от координат, но не от времени.

У читателя могут возникнуть сомнения в связи с появлением в квантовой механике потенциала, определяющего силу. Силы, испытываемые частицей, вызваны, разумеется, присутствием других частиц, и согласованная теория требует квантовомеханического описания всей системы частиц. *Все* частицы в данной физической ситуации должны быть описаны волнами де Бройля, и *фундаментальная* теория взаимодействия частиц должна быть теорией, рассматривающей взаимодействие между этими волнами. Именно такое фундаментальное описание взаимодействия характерно для *квантовой теории поля*. Согласно этой теории, волна де Бройля, описывающая, например, электрон в атоме водорода, взаимодействует с квантованным электромагнитным полем, которое в свою очередь может взаимодействовать с волной де Бройля, описывающей протон. В такой теории взаимодействие электрона с протоном не является прямым процессом; оно осуществляется квантованным электромагнитным полем. Мы говорим, что взаимодействие происходит благодаря *обмену фотонами*.

В данной главе, однако, мы остаемся в рамках приближений, характерных для теории Шредингера, и будем работать не с фундаментальной, а с феноменологической теорией. Нас интересует

столь движение *одинаковой* частицы, и действие всех других частиц разумно описать с помощью *эффективного потенциала* $V(x)$. В выборе такого потенциала путеводной нитью будет аналогия с классической физикой.

Идея о введении потенциальной функции становится особенно ясной, если рассмотреть движение заряженной частицы в *макроскопическом* электрическом поле, создаваемом проводящими телами, подключенными к батареям. В этом случае движение электрона с высокой степенью точности описывается классической теорией и траектория частицы определяется электростатическим потенциалом, созданным системой проводников. На языке квантовой теории поля электрон обменивается фотонами со всеми заряженными частицами в проводниках. Интуитивно ясно, что конечный эффект такого обмена фотонами может быть описан через электростатический потенциал, существующий электрон в каждой точке пространства.

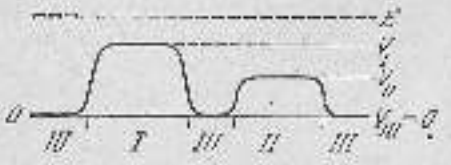


Рис. 15А. К задаче уравнения Шредингера. Пример типа задачи, которая удовлетворяет всем условиям, описанным в области I, II и III, где потенциал V постоянен. Сколько уравнений (5а), (5в) и (5б) потребуется для того, чтобы добавить к единственному уравнению (15d), которое связывает E и k в области I? Для графика, показанного на рисунке, выберите E так, чтобы полная энергия была больше потенциальной энергии. Для этого значения E и k найдите длину волны частицы в области I. Какой будет длина волны, если частица будет иметь ту же полную энергию, но ее потенциальная энергия будет равна нулю?

14. *Идея об эффективном потенциале в теории Шредингера во многих отношениях аналогична идее о показателе преломления в классической оптике.* Хорошо известно, что в макроскопическом масштабе стекло, которое состоит из атомов, не является однородной средой. Описывая распространение в стекле световой волны (фотона) в рамках *фундаментальной* теории, мы должны были бы рассмотреть взаимодействие волны со всеми атомами стекла. Если, однако, можно ограничиться *феноменологическим* описанием распространения света через стекло (которое может быть, например, частью оптической системы), то суммарный эффект элементарных взаимодействий можно заменить некоторым эффективным показателем преломления. Как мы указывали, оптический показатель преломления в большой степени аналогичен потенциалу в теории Шредингера, и такая аналогия помогает понять теорию. Вспомним, однако, что описание электромагнитных свойств твердого тела с помощью показателя преломления имеет свои ограничения. Аналогично, в некоторых физических ситуациях взаимодействия между элементарными частицами не могут быть полностью описаны потенциальной функцией. Такая функция имеет смысл лишь в тех случаях, когда выполнены два основных допущения теории Шредингера.

15. Рассмотрим теперь ситуацию, когда имеются две ограниченные области пространства I и II, причем потенциальная энергия частицы в области I равна V_I, а в области II равна V_{II}. Предположим, что за границами этих областей потенциалы быстро спадают до нуля. Обозначим остальную часть пространства, не входящую в области I и II, индексом III. Тогда $V_{III}=0$. Такая ситуация схематически изображена на рис. 15А, где показана зависимость потенциала от координаты.

Допустим теперь, что в таком потенциальном поле или движется частица с энергией E (мы рассматриваем *полностью нерелятивистский* случай). Полная энергия E будет равна сумме кинетической и потенциальной энергий частицы (энергия покоя mc^2 в выражение для энергии *не включается*). Согласно классической механике, *кинетическая* энергия частицы равна $E-V_{III}$ в области III, $E-V_I$ в области I и $E-V_{II}$ в области II. Кинетическая энергия связана с импульсом частицы следующим образом:

$$E_k = p^2/2m. \tag{15a}$$

Полная энергия показана на рис. 15А жирной штриховой линией. Начнем с предположения, что полная энергия всюду больше потенциальной.

16. Рассмотрим теперь поведение шредингеровской волны, связанной с частицей. У такой волны частота ω пропорциональна энергии: $E=\hbar\omega$, и волновая функция зависит от времени t только благодаря множителю $\exp(-iEt/\hbar)$. Поэтому шредингеровская волна для частицы с определенной энергией E удовлетворяет уравнению

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = E\psi(x,t). \tag{16a}$$

Пространственная зависимость волны определяется импульсом частицы: импульс и длина волны связаны соотношением де Бройля $\lambda=h/p$. Рассмотрим волну в области III при энергии, равной E. Волна может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн. Пространственная зависимость этих плоских волн задается экспоненциальным множителем $\exp(ix\cdot p/\hbar)$, где импульс p определяется энергией

$$E = p^2/2m, \tag{16b}$$

Отсюда следует, что каждая из плоских волн удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,t) = E\psi(x,t). \tag{16c}$$

Таким образом, шредингеровская волна, отвечающая частице с энергией E, находящейся в области III, удовлетворяет дифференциальному уравнению (16c).

Рассмотрим теперь волну в области I. Будем по-прежнему считать ее суперпозицией плоских волн типа $\exp(ix\cdot p/\hbar)$. В согласии с (16a) импульс p теперь определяется соотношением

$$p^2/2m = E_k = E - V_I. \tag{16d}$$

Отсюда следует, что шредингеровская волна в области I удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,t)=(E-V_I)\psi(x,t). \qquad (16c)$$

Аналогично, уравнение для волновой функции в области II имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,t)=(E-V_{II})\psi(x,t). \qquad (16f)$$

17. Доводы, которые привели нас к уравнениям (16c), (16e) и (16f) для волновых функций в областях I, II и III, кажутся правдоподобными. Заманчиво объединить эти три уравнения в одно:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,t)=[E-V(x)]\psi(x,t); \qquad (17a)$$

здесь $V(x)$ — потенциальная функция, принимающая значения V_I, V_{II} и $V_{III}=0$ в трех областях. Заметим, однако, что мы не привели никаких соображений в пользу справедливости уравнения (17a) в переходных областях, где потенциал быстро меняется. Заранее не очевидно, что уравнение (17a) здесь выполняется. Автор должен сознаться, что он умышленно вел рассуждения и рисовал кривые на рис. 15А так, чтобы привести читателя к убеждению в справедливости, например, уравнения (16c). В силу *рассуждения* есть слабое место. До тех пор, пока область II очень *велика* по сравнению с длиной волны де Бройля, можно не сомневаться в справедливости уравнения (16c). Поведение волны *в данной точке* области не будет зависеть от потенциала в любых других точках, и связь между длиной волны и кинетической энергией будет именно такой, какую мы предполагали. Ситуация, однако, меняется, если область II *мала* по сравнению с длиной волны, т. е. если потенциал $V(x)$ заметно меняется на длине волны. В этом случае ясно, какова должна быть пространственная зависимость волновой функции. Действительно, «длина волны» в точке x, определяемая соотношением де Бройля через кинетическую энергию $E-V(x)$, оказывается функцией положения.

Поэтому совершенно не очевидно, что уравнение (17a) окажется справедливым для любой точки пространства и для любой потенциальной функции $V(x)$. Тем не менее мы *предположим*, следуя Шредингеру, что уравнение (17a) верно. Это, по крайней мере, является разумным уравнением, отражающим свойства шредингеровских волн, и мы подвергаем его большому числу испытаний. Заметим, однако, что до сих пор наши рассуждения отнюдь не были *проверкой* справедливости уравнения (17a). Они содержали лишь правдоподобные доводы в его пользу. В действительности возможно нечто лучшее. Можно исходить из квантовой электродинамики. В этом случае удается показать, что уравнение (17a), которое применяется к нерелятивистским задачам для атомов и молекул, является приближением, следующим из теории поля. Другой возможный подход заключается в систематическом изучении волновых уравнений, допускающих разумную физическую интерпретацию, включая вероятностную интерпретацию, рассмотренную в п. 8. Мы хотим сохранить эту интерпретацию волновой функции для частицы, находящейся под действием сил. Можно показать, что уравнение (17a) в определенном смысле является простейшим волновым уравнением для квантовомеханических задач, которые «соответствуют» классическим задачам для частицы, движущейся в потенциальном поле $V(x)$. Подробное исследование этих проблем увело бы слишком далеко, и нам следует поэтому принять уравнение (17a) как рабочую гипотезу, основанную на высказанных выше соображениях.

18. Уравнение (17a) относится к волне, имеющей определенную энергию E. Для такой волны справедливо уравнение (16z), и (17a) можно переписать в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,t)+V(x)\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t); \qquad (18a)$$

здесь E отсутствует, и, таким образом, (18a) справедливо для *любой* энергии и, следовательно, для *любой* волны Шредингера.

Уравнения (17a) и (18a) представляют собой знаменитые уравнения Шредингера. Уравнение (18a) известно как *зависящее от времени уравнение Шредингера*, а уравнение (17a) — *уравнение Шредингера, не зависящее* от времени. Следует иметь в виду, что уравнение (18z) справедливо для всех волн Шредингера, тогда как (17a) выполняется только для волн, описывающих частицу с заданной энергией E.

Наилучшим подтверждением справедливости уравнений (17a) и (18a) является совпадение предсказаний, основанных на этих уравнениях, с опытом. Вскоре после великого открытия Шредингера его уравнения были с замечательным успехом применены во многих областях атомной и молекулярной физики. Сам Шредингер принимал активное участие в этих исследованиях. В следующей главе мы познакомимся с тем, как он объяснил квантовые состояния атомов. Нельзя не восхищаться интуицией Шредингера, которая привела к уравнению (18a). Оно справедливо в пределах допущений, на которых основано.

В нашу задачу не входит рассмотрение общей теории решения уравнения (18a); мы ограничимся несколькими весьма простыми примерами, которые помогут понять, как это уравнение «работает».

Некоторые простые «барьерные» задачи

19. Предположив, что уравнения Шредингера (17a) и (18a) справедливы для любой потенциальной функции $V(x)$, мы тем самым еще ничего не сказали, однако, кроме как в случае, когда потенциал $V(x)$ везде меньше полной энергии E. Посмотрим теперь, что происходит в тех областях пространства, где потенциал $V(x)$ больше полной энергии E. Согласно классической механике, такие области

целое уходит дуг, то в квантовой механике возникает иная ситуация.

Для простоты ограничим наши рассуждения одномерным случаем: частица перемещается вдоль прямой, и ее положение определяется координатой x. Одномерная модель имеет то преимущество, что сводит не зависящее от времени уравнение Шредингера к обычному дифференциальному уравнению с одной независимой переменной. Математическое рассмотрение такого уравнения намного проще уравнения с частных производных, возникающего для двух- или трехмерного случая. В то же время существенные особенности явления сохраняются и в простой одномерной модели.

20. Рассмотрим одномерное уравнение Шредингера (17а) для случая, когда энергия частицы $E>0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)=[E-V(x)]\psi(x,t). \qquad (20a)$$

Зависимость волновой функции $\psi(x,t)$ от времени определяется множителем $\exp(-iEt/\hbar)$, и можно написать

$$\psi(x,t)=\varphi(x)\exp(-iEt/\hbar). \qquad (20b)$$

Зависящая только от координаты часть волновой функции $\varphi(x)$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению (20а), т. е.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)=[E-V(x)]\varphi(x). \qquad (20c)$$

Решив его относительно $\varphi(x)$, получим с помощью (20b) определяющую волновую функцию $\psi(x,t)$.

21. Рассмотрим теперь ситуацию, приведенную на рис. 21А, где жирной штриховой линией показана полная энергия E, а сплошная линия соответствует потенциальной функции $V(x)$. В левой части рисунка потенциал равен нулю, а в правой он имеет постоянное значение $V_0>E$. Точка x_1, где кинетическая энергия равна нулю, называется *точкой поворота*. Согласно классической механике, частица, достигнув этой точки, остановится и начнет движение в обратном направлении. Область справа от x_1 недоступна для классической частицы.

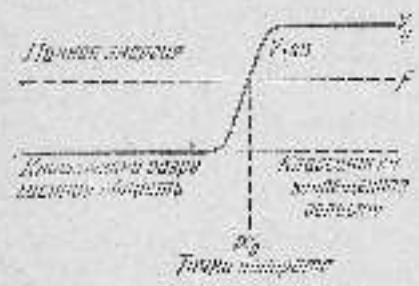


Рис. 21А. [illegible] потенциальной энергии $V(x)$, жирной штриховой линией показана энергия E, точка x_1 в которой $V(x)=E$ — классическая точка поворота. В квантовой механике частица может проникать в область, классически запрещенную

Мы должны решить уравнение (20с) для потенциала, показанного на рис. 21А. Решением $\varphi(x)$ должна быть непрерывная функция от x, имеющая непрерывную первую производную. И без явного решения приведенного уравнения можно догадаться, что волновая функция $\varphi(x)$ не может сразу обращаться в нуль справа от x_1.

В соответствии с вероятностной интерпретацией волновой функции, это означает отличную от нуля вероятность обнаружить частицу в области справа от x_1. Таким образом, квантовая механика предсказывает, что частица может проникать в область, запрещенную классической механикой.

22. Рассмотрим это явление более подробно. Чтобы еще больше упростить ситуацию, заменим ступенчатую функцию, изображенную на рис. 21А, ступенчатой функцией на рис. 22А, и начало координат поместим в точку поворота, так что $x_1=0$. В этом случае

$$V(x)=0 \text{ для } x<0,$$
$$V(x)=V_0>E \text{ для } x>0. \qquad (22a)$$

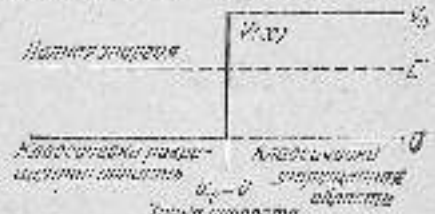


Рис. 22А. Чтобы упростить вычисления, ступенчатая функция на рис. 21А заменена ступенькой

Потенциал, показанный на рис. 22А, можно считать предельным случаем потенциала, изображенного на рис. 21А. Если этот потенциал растет все более и более круто, то в пределе получается идеализированная ситуация, показанная на рис. 22А. Пока потенциал имеется непрерывной функцией, волновая функция остается непрерывной и имеет непрерывную первую производную. Это свойство сохраняется и в предельном случае ступенчатого потенциала. Однако в последнем случае *вторая* производная волновой функции может испытать «скачок». Заметим, что все эти утверждения о поведении волновой функции и ее производных являются математическими утверждениями о свойствах дифференциальных уравнений, возникающих в теории Шредингера. Как физики, мы должны считать ступенчатый потенциал идеализацией реального потенциала. При такой точке зрения не возникает сомнения в том, что физическая волновая функция должна удовлетворять перечисленным выше требованиям.

23. Обратимся к области $x>0$. Здесь волновое уравнение имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)=(E-V_0)\varphi(x), \qquad (23a)$$

и мы без труда можем написать два простых независимых решения:

$$\exp(-x\eta), \quad \exp(+x\eta), \quad \text{где } \eta=\sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar. \qquad (23b)$$

Решение $\exp(+x\eta)$ растет экспоненциально с ростом x, то же происходит и с квадратом его модуля. Согласно нашей вероятностной интерпретации волновой функции, такой рост означает, что плотность вероятности обнаружить частицу неограниченно растет с ростом координаты x. Это решение физически недопустимо. Здесь мы имеем другой пример граничных условий, которые должно удовлетворять решение волнового уравнения, имеющее физически смысл: решение, неограниченно возрастающее на бесконечности, должно быть отброшено. Таким образом, полное, физически

по возможное решение $\exp(-ixq)$, а если мы обозначаем волновую функцию в области $x>0$ через $\psi_B(x)$, то

$$\psi_B(x)=\exp(-xq). \tag{23c}$$

24. Рассмотрим область $x<0$. Здесь уравнение Шредингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)=E\varphi(x). \tag{24a}$$

Два линейно независимых решения уравнения (24a) могут быть записаны в форме

$$\exp(ikx), \quad \exp(-ikx), \text{ где } k=\sqrt{2mE}/\hbar; \tag{24b}$$

они представляют собой осциллирующие функции и не возрастают при x, стремящемся к $-\infty$. Оба решения физически приемлемы[*]). И, обозначая через $\psi_L(x)$ волновую функцию в области слева от $x=0$, имеем

$$\psi_L(x)=A\exp(ikx)+B\exp(-ikx), \tag{24c}$$

где A и B — постоянные, которые нам предстоит найти.

Мы утверждали, что *волновая функция и ее первая производная должны быть непрерывны*. Таким образом, функции $\psi_R(x)$ и $\psi_L(x)$ должны быть сшиты друг к другу так, чтобы

$$\psi_R(0)=\psi_L(0), \quad \psi_R'(0)=\psi_L'(0). \tag{24d}$$

Действительно, обе эти функции представляют собой одну волновую функцию, заданную в двух различных областях, которые соединяются в точке поворота $x=0$. Два условия (24d) дают два уравнения:

$$A+B=1, \quad ik(A-B)=-q, \tag{24e}$$

решая которые легко определить постоянные A и B:

$$A=\frac{1+iq/k}{2}, \quad B=\frac{1-iq/k}{2}. \tag{24f}$$

25. Нам будет легче интерпретировать полученное решение, умножив волновую функцию на коэффициент $1/A$. Такое умножение возможно, ибо уравнение Шредингера — линейное уравнение. Итак, ясное выражение для полученного решения имеет вид

$$\varphi(x)=e^{-ikx}+\frac{1-i\sqrt{V_0/E-1}}{1+i\sqrt{V_0/E-1}}e^{ikx} \text{ для } x<0, \tag{25a}$$

$$\psi(x)=\frac{2e^{-qx}}{1+i\sqrt{V_0/E-1}} \text{ для } x>0, \tag{25b}$$

где

$$k=\sqrt{2mE}/\hbar, \quad q=\sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar. \tag{25c}$$

[*]) Если вас не устроил этот утверждение, то советуем вам обратиться к п. 5 настоящей главы.

Рассмотрим теперь выражение (25a), определяющее волновую функцию в области $x<0$. Она образована суперпозицией двух волн. Первое слагаемое $\exp(ikx)$ соответствует волне, распространяющейся *вправо*, а второе, пропорциональное $\exp(-ikx)$, — волне, бегущей *влево*. Множитель перед экспонентой во втором слагаемом имеет модуль, равный единице:

$$\left|\frac{1-i\sqrt{V_0/E-1}}{1+i\sqrt{V_0/E-1}}\right|=1, \tag{25d}$$

поэтому амплитуды обеих волн равны по модулю. Квадрат модуля амплитуды пропорционален плотности частицы, и, таким образом, волновая функция (25a) описывает положение, характерное для

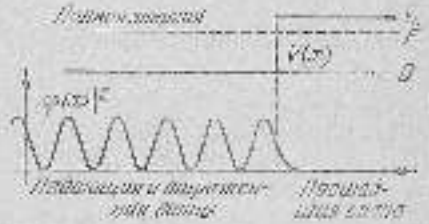


Рис. 25A. Волна проникает в классически запрещенную область. Сдвиг фазы от барьера можно считать малой величиной, поэтому образуются при интерференции практически чистые стоячие волны с амплитудой, отличающейся от амплитуды падающей волны на 1. Заметьте, что в такой постановке задачи функция не соприкасается с горизонтальной прямой.

того частица, приведшая слева, отражается от скачка потенциала и уходит влево. Такая интерпретация находится в согласии с классической картиной.

Волновая функция для $x>0$ [уравнение (25b)] описывает проникновение прямоугольной волны в область, запрещенную для классической частицы. Амплитуда такой волны экспоненциально уменьшается по мере проникновения в запрещенную область, и на больших расстояниях от барьера амплитуда практически равна нулю, в согласии с классической картиной. Рис. 25A иллюстрирует эти утверждения.

26. Интересно рассмотреть предельный случай, когда высота потенциального барьера стремится к бесконечности, т. е. когда $V_0\to+\infty$ (энергия E не меняется). Из выражений (25c) следует, что при неограниченном возрастании V_0 величина q также стремится к бесконечности, что означает бесконечно быстрое уменьшение амплитуды волновой функции по мере увеличения глубины проникновения (от классической точки поворота). По мере увеличения высоты барьера волновая функция все меньше и меньше проникает в запрещенную область. Из (25b) следует, что амплитуда прошедшей волны стремится к нулю, если V_0 стремится к бесконечности. В предельном случае бесконечно высокого барьера

$$\varphi(x)=e^{-ikx}+e^{ikx} \text{ для } x<0, \tag{26a}$$

$$\psi(x)=0 \text{ для } x>0. \tag{26b}$$

Итак, при бесконечно высоком потенциальном барьере волновая функция должна исчезать у барьера, т. е. при $x=0$, и справа от него, т. е. при $x>0$.

На рис. 26А показано поведение квадрата модуля волновой функции, т. е. плотность вероятности обнаружения частицы. Заметим, что слева от барьера плотность вероятности испытывает осцилляции, которые представляют собой квантовомеханический интерференционный эффект, не имеющий аналога в классической механике. Такое же явление, естественно, видно и на рис. 25А.

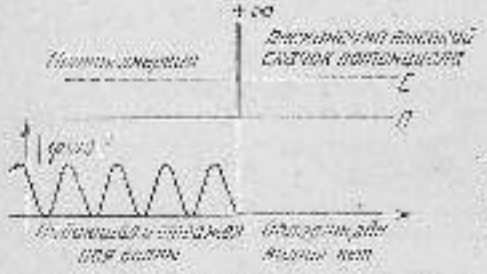


Рис. 26А. Предельный случай бесконечно высокого скачка потенциальной энергии (ср. с рис. 25А). В точке $x=0$ производная от волновой функции претерпевает конечный скачок, но не превращается в бесконечность

27. Мы столь подробно рассмотрели случай внезапного скачка потенциала, чтобы показать существование решения уравнения Шредингера и его физическую интерпретацию. Можно быть уверенным, что решение существует и в более общем случае разумно непрерывного или составленного из отдельных скачков потенциала. Разумеется, не всегда легко найти явный вид решения, и возникающие трудности имеют чисто математический, вычислительный характер. Даже не имея точного решения, часто можно сказать очень много о его *свойствах* и получить, таким образом, сведения о поведении физической системы. Так, например, изучение свойств волновой функции привело нас к выводу, что предписываемая волна может проникать в области, запрещенные для частицы классической механикой.

28. Чтобы расширить наше понимание уравнения Шредингера, рассмотрим рис. 28А, где показан внезапный скачок потенциала. Мы хотим изучить движение частицы с энергией $E>V_0$ в таком поле. (Подробное изучение этой ситуации мы оставляем для задачи 1 в конце главы.)

Читатель заметит, что в области слева от скачка потенциала существуют *два* возможных решения и столько же решений имеется для области справа от скачка. Но как узнать, какое из решений следует избрать? Это зависит от исследуемой физической ситуации. Допустим, что частица падает на барьер, двигаясь слева направо. Волна частично отразится от барьера, но часть будет продолжать распространяться в прежнем направлении. Это означает, что правильная волновая функция нашей задачи должна соответствовать частице, движущейся направо в области $x>0$, т. е. должна иметь там вид $\exp(ixk')$. В области слева от скачка потенциала волновая функция будет иметь вид

$$A\exp(ixk)+B\exp(-ixk),$$

где первое и второе слагаемые отвечают соответственно волнам, бегущим слева направо и справа налево. Второе слагаемое соответствует *отраженной* волне, а первое — *прошедшей*. Как найти коэффициенты A и B? Для этого следует использовать два условия: непрерывность волновой функции и ее производных во всех точках, в том числе и в точке $x=0$. Таким образом получаем два уравнения для двух неизвестных A и B. Найдя амплитуды A и B, будем знать интенсивности падающей, отраженной и прошедшей волн, а тем самым и коэффициент отражения рассматриваемого «барьера».

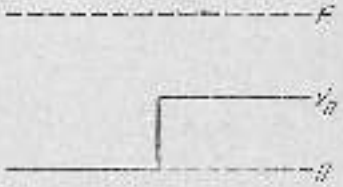


Рис. 28А. Энергия E частицы больше высоты потенциального барьера. В классической теории частица проходит такой барьер не отражаясь. В квантовой механике часть падающей волны проходит, другая часть отражается барьером

Допустим, что имеет место другая ситуация: частица движется справа налево. В таком случае волновая функция слева от барьера будет иметь вид $\exp(-ixk)$, так как в этой области мы имеем лишь волну, распространяющуюся влево. Справа от барьера волновая функция имеет вид $A'\exp(ixk')+B'\exp(-ixk')$. Снова найдем коэффициенты A' и B' из условий непрерывности волновой функции

Рис. 29А. Для решения этой задачи следует рассмотреть классические отражение и прохождение волны в точках разрыва непрерывности $x=0$ и $x=a$. Более сложной задачей — найти общее решение уравнения Шредингера и удовлетворить граничным условиям. Поэтому сегодня необходимость рассматривать многократное отражение

и ее производной в точке $x=0$. Таким образом, при заданной форме потенциала выбор волновой функции зависит от рассматриваемой задачи.

Отметим главный вывод из рассмотрения движения частицы в потенциальном поле, показанном на рис. 28А: в месте разрыва непрерывности потенциала происходит частичное отражение падающей волны и частичное ее проникновение в область за разрывом.

29. Обратимся теперь к случаю, показанному на рис. 29А. Разрыв непрерывности потенциала происходит в *двух* точках: $x=0$ и $x=a$. Из рассуждений предыдущего пункта следует, что в данном случае будет происходить частичное отражение и частичное прохождение волны в обеих точках.

Предположим, что мы хотим рассмотреть случай, когда частица падает на барьер слева. Читатель поймет, что это сложная ситуация. Рассмотрим волну, падающую слева, и обнаружим, что в точке $x=0$ часть волны отразится, а другая часть пройдет. Прошедшая волна наткнется на второй разрыв потенциала в точке $x=a$ и здесь частично отразится, а частично пройдет. Отраженная волна вернется в точку $x=0$, и снова произойдет частичное отражение и прохождение. Чтобы найти волну, распространяющуюся направо

от барьера, мы должны рассмотреть бесконечное число отражений в точках $x=0$ и $x=2a$ и сложить амплитуды всех волн, распространяющихся направо от точки $x=2a$.

Можем ли мы решить эту задачу? Да, можем методом многократных отражений, но есть и значительно более простой способ ее решения. Для этого следует лишь найти такое решение уравнения Шредингера, которое всюду было бы непрерывно вместе со своей

Рис. 30А. Частица (волна) отражается барьером, тем как энергия E меньше предельного значения потенциала барьера. Отражение происходит в области изменения потенциальной энергии

Рис. 30Б. Плавная кривая рис. 30А вместо ступенек, напоминающая скользкую горку. В каждой точке разрыва непрерывности волна частично проходит и частично отражается. Решения уравнения Шредингера учитывают все многократные отражения

первой производной и имело бы вид $\exp(ikx)$ для $x>a$. Последнее условие, в соответствии с рассматриваемой физической ситуацией, означает, что часть падающей волны, прошедшая сквозь барьер, распространяется от точки $x=a$ направо.

Таким образом, для $x>a$ волновая функция имеет вид $\exp(ikx)$. Для $a>x>0$ волновая функция имеет вид

$$A\exp(ikx)+B\exp(-ikx).$$

Чтобы найти коэффициенты A и B, нужно воспользоваться условием непрерывности волновой функции и ее первой производной в точке $x=a$. В области $0>x$ волновая функция имеет вид

$$A'\exp(ikx)+B'\exp(-ikx),$$

и для определения A' и B' нужно использовать те же условия непрерывности, но в точке $x=0$. Таким способом мы найдем *полное решение* уравнения Шредингера (20с), отвечающее условиям рис. 29А, и найденное решение будет *единственным* (с точностью до постоянного множителя). Таким образом, нашу задачу можно решить без больших усилий.

30. Важно понять, что решение барьерной задачи рассмотренного типа сводится к получению решения уравнения Шредингера (20с), пригодного *во всем пространстве* и удовлетворяющего *граничным условиям*, определяемым физической ситуацией, например условию, что справа от барьера волна должна иметь вид $\exp(ikx)$. Такой способ получения решения автоматически учитывает «многократные отражения», о которых мы рассуждали, основываясь на физической интуиции. Нашу задачу можно попытаться решить,

рассматривая многократные отражения, но *всегда лучше* непосредственно найти общее решение уравнения Шредингера.

Рассмотрим потенциальный барьер, показанный на рис. 30А. Где должно произойти отражение частицы? Оно «происходит» во всей области пространства, в которой увеличен потенциал. При желании непрерывно меняющийся потенциал $V(x)$ можно аппроксимировать функцией с большим числом малых скачков, как показано на рис. 30Б. На каждом скачке потенциала волна частично проходит и частично отражается, и мы снова можем считать, что перед нами картина с каскадом многократных отражений. Уравнение Шредингера (20с) описывает все эти многократные отражения, и его решение можно при желании интерпретировать таким образом: найдя общее решение уравнения Шредингера (20с), мы сразу учтем все бесконечное число локальных отражений и прохождений.

31. Рассмотрим теперь другую задачу, которая следует из предыдущей. Что происходит, если потенциал имеет вид, показанный на рис. 31А, а высота барьера V_0 больше полной энергии E?

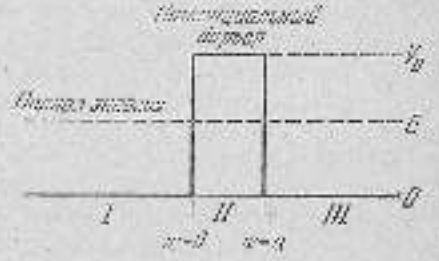


Рис. 31А. В классической теории частица прошедшего слева не может пройти через барьер. В квантовой механике существует отличная от нуля вероятность «просочиться» через барьер. Это явление называется туннельным эффектом

Ответ легко угадать: волна, падающая слева, частично отразится, а частично *сможет* пройти через барьер в область *III*. С классической точки зрения частица, находящаяся в области *I*, отразится в точке $x=0$ и не сможет пройти в области *II* и *III*. Согласно квантовой механике, частица может «просочиться через барьер», абсолютно непроницаемый с классической точки зрения; это одна из наиболее замечательных особенностей квантовой механики. Рассматриваемое явление называется *туннельным эффектом*.

Чтобы получить решение уравнения Шредингера для ситуации, показанной на рис. 31А, можно поступить так, как это поступили в п. 28—30. Найдем общее решение для каждой из трех областей *I*, *II* и *III*, а затем используем условия непрерывности волновой функции и ее первой производной во всем пространстве и, в частности, в точках $x=0$ и $x=a$. Таким образом, барьерная задача, показанная на рис. 31А, в принципе нетрудна, но требует некоторых трудоемких вычислений. К счастью, можно постичь ее существенные особенности и без таких выкладок. С ними можно познакомиться в более подробном курсе или выполнить эту задачу в качестве домашнего задания, см. также задачу 2.]

32. Рассмотрим решение для частного случая, когда частица падает на барьер слева. Она частично отражается барьером, час-

точно «просачивается» через него. Это означает, что в области *III* решение имеет вид $\exp(ikx)$, соответствующий частице, движущейся направо. В области *I* мы имеем обязательно две волны: одна распространяется влево, другая направо. Первая из них является отраженной волной, а вторая — падающей. Таким образом, волновая функция в области *I* имеет вид

$$\varphi(x) = e^{ikx} + Ae^{-ikx}, \text{ где } k = \sqrt{2mE/\hbar^2}; \qquad (32a)$$

здесь A — постоянная, определяющая амплитуду отраженной волны. Модуль A меньше единицы, так как часть падающей волны проникает через барьер.

Внутри барьера волновая функция имеет вид экспоненты

$$\varphi(x) \approx B\exp(-xq), \quad q = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}; \qquad (32b)$$

здесь B — постоянная. Эта волновая функция является лишь приближением, которое, однако, справедливо для не слишком низкого барьера.

Допустим, что aq велико по сравнению с единицей. В таком случае отношение $\varphi(a)/\varphi(0) \approx \exp(-aq)$ для волновой функции (32b) будет малым числом. Вспомним процесс согласования двух решений в точке поворота, рассмотренный в п. 24, мы поймем, что модуль отношения амплитуд в областях *III* и *I* должен быть близок к отношению $\varphi(a)/\varphi(0) = \exp(-aq)$. В действительности это отношение не исчерпывается простым экспоненциальным множителем, но если $aq \gg 1$, т. е. если барьер высок и широк, то экспоненциальный множитель является определяющим.

33. Мы считали, что амплитуда падающей волны равна единице. В области *III* амплитуда волны гораздо меньше. Ее величина (точнее — *порядок* величины) приближенно равна $\exp(-aq)$. Квадрат T модуля амплитуды имеет простую физическую интерпретацию. Он равен *вероятности* того, что падающая на барьер частица пройдет через него:

$$T = |\varphi(a)|^2 \sim \exp(-2aq), \qquad (33a)$$

или, имея в виду второе выражение (32b),

$$T \sim \exp\left\{-2a\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}\right\}. \qquad (33b)$$

Величина T называется *коэффициентом прозрачности* барьера. Наша грубая оценка этого коэффициента [формула (33b)] основана на весьма простом факте, а именно на приблизительно экспоненциальном ослаблении амплитуды волны справа *в области* барьера. Нас интересовал прежде всего случай большого aq, т. е. малого коэффициента прозрачности T. Можно, разумеется, вычислить точное значение T; тогда в выражении (33b) появляется дополнительный множитель. Порядок величины T определяется, однако, экспонентой, и для наших целей выражения (33b) совершенно достаточно.

На *рис. 33А схематически* показан барьерный эффект. В верхней части рисунка приведен потенциал, а в нижней — модуль квадрата волновой функции. Прошедшая волна оказывается бегущей вправо волной с комплексной амплитудой. Модуль амплитуды есть величина постоянная, что и показано на рисунке.

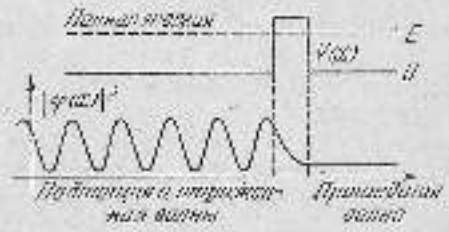


Рис. 33А. Схема, иллюстрирующая туннельный эффект. Обратите внимание на прошедшую волну и на ее экспоненциальное затухание в пределах барьера. Слева от барьера на графике изображены суммарная волна. Амплитуда отраженной волны меньше амплитуды падающей, и поэтому амплитуда всегда не обращается в нуль.

34. Прежде чем перейти к физическим приложениям рассмотренной теории квантовомеханического туннельного эффекта, следует указать на его аналогию в классической электромагнитной теории. Речь идет об отражении плоской электромагнитной волны от плоской поверхности раздела двух сред с различными показателями преломления.

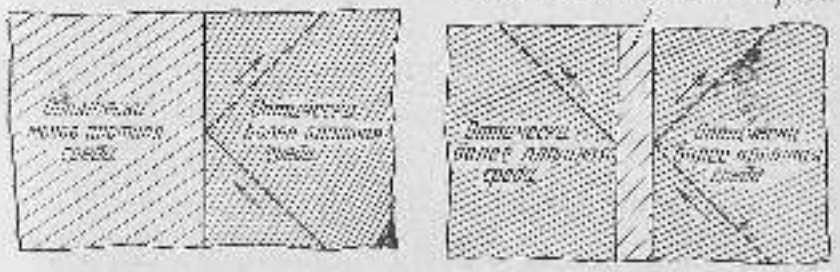


Рис. 34А. Полное отражение плоской электромагнитной волны на поверхности раздела двух сред с различными показателями преломления. Падающая и отраженная лучи показаны штриховыми линиями

Рис. 34В. Классическая электромагнитная теория предсказывает, что волна, падающая из такой среды под углом, большим критического угла полного отражения, частично проходит и частично отражается. Это явление аналогично квантовомеханическому туннельному эффекту. Падающий, преломленный и отраженный лучи показаны штриховыми линиями

Рассмотрим плоскую волну, падающую на границу, разделяющую две среды с различной оптической плотностью. Пусть волна (рис. 34А) падает из оптически более плотной среды в среду менее плотную, т. е. в среду с меньшим показателем преломления. Предположим, что угол падения больше угла полного отражения и что менее плотная среда простирается до бесконечности влево от поверхности раздела. В этом случае происходит полное отражение волны, схематически показанное на рис. 34А, где штриховой линией показан луч, т. е. нормаль к плоскому фронту волны. Несмотря на то, что волна не может проникнуть в менее плотную среду, элек-

трическое поле волны от поверхности раздела не равно нулю: поле в эту среду проникает, но по мере перехода вглубь от поверхности раздела амплитуда поля экспоненциально уменьшается. Ситуация полностью аналогична квантовомеханической задаче, рассмотренной в п. 22–25.

Обратимся теперь к рис. 34В. Здесь оптически более плотная среда представляет собой тонкий слой между двумя более плотными средами. В этом случае волна, падающая на границу справа, частично отражается, но малая доля волны все же проникает через запрещенную область и распространяется в более плотной среде в виде бегущей влево волны. Ситуация аналогична квантовомеханическому проникновению через барьер. Заметим, что мы не нарисовали «случай» в запрещенной области. Действительно, здесь «случая» оптика неприменима: волновой вектор имеет комплексное значение.

Рассмотренное явление полностью объясняется классической электромагнитной теорией. В ситуации, показанной на рис. 34В, коэффициент прохождения очень мал, если толщина оптически менее плотной среды хотя бы немного больше длины волны падающего излучения. При уменьшении толщины коэффициент прохождения возрастает, достигая значения, равного единице, при толщине, стремящейся к нулю.

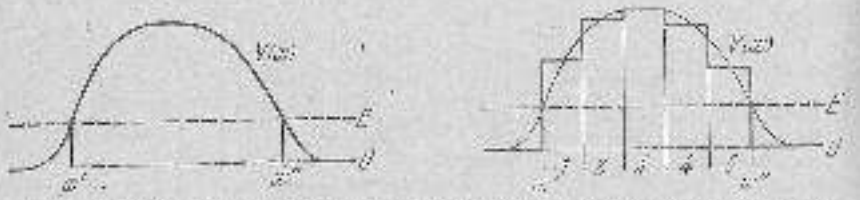


Рис. 35А. Как получить выражение для коэффициента прохождения такого барьера?

Рис. 35В. К вычислению коэффициента прохождения барьера произвольной формы. Значения непрерывного потенциала заменяются приближенно на ряд ступенчатых барьеров. Полное коэффициент прохождения равен произведению коэффициентов для этих ступенек. Это приближение, которое справедливо для всех ступенчатых барьеров. Однако приближенный характер этого метода — не учтена возможность отражения

35. Обобщим идеи рассуждения о квантовомеханическом туннельном эффекте. Вместо показанного на рис. 31А прямоугольного потенциального барьера рассмотрим барьер произвольной формы (рис. 35А). Пусть слева на барьер падает волна с энергией E. Волна частично отразится, частично пройдет через барьер. Нас интересует прежде всего полный коэффициент прохождения барьера, и, чтобы найти его точное значение, нужно решить уравнение Шредингера для потенциала $V(x)$. Воспользовавшись методом, рассмотренным в п. 32 и 33, можно, однако, получить приближенное выражение для T. Такое приближение тем лучше, чем меньше длина волны по сравнению с шириной барьера.

Чтобы получить приближенное значение величины T, вообразим, что область потенциального барьера разделена на несколько малых областей, как показано на рис. 35В. Заменим в каждой такой области реальный потенциал $V(x)$ постоянным потенциалом. Мы уже вычисляли коэффициент прохождения прямоугольного барьера. Пусть коэффициенты прохождения пяти прямоугольных барьеров, показанных на рис. 35В, равны T_1, T_2, ..., T_5. Полный коэффициент прохождения приблизительно равен произведению коэффициентов прохождения малых областей:

$$T \approx T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \tag{35a}$$

или

$$\ln T = \ln T_1 + \ln T_2 + \ln T_3 + \ln T_4 + \ln T_5. \tag{35b}$$

36. Вернемся к выражению (33b). Пусть Δx_n — толщина одного прямоугольного барьера, а $V(x_n)$ — его высота. Коэффициент прохождения такого барьера равен

$$\ln T_n \approx -2\sqrt{2m|V(x_n) - E|}\,\Delta x_n. \tag{36a}$$

Из формулы (35b) следует, что логарифм коэффициента прохождения всего барьера получается суммированием по всем областям. Переходя к бесконечному пределу и заменяя сумму интегралом, получаем

$$\ln T \approx -2\int_{x'}^{x''} dx \sqrt{\frac{2m(V(x) - E)}{\hbar^2}}. \tag{36b}$$

Не следует забывать, что это выражение для коэффициента прохождения является *приближенным*. Тем не менее приведенная формула очень полезна, так как дает правильное качественное описание явлений проникновение через барьер. Заметим, что пределами для написанного интеграла являются классические точки поворота x' и x''.

Рассмотрим зависимость коэффициента прохождения от параметров, входящих в выражение (36b). Если остальные параметры фиксированы, то коэффициент прохождения тем меньше, чем больше масса частицы. Коэффициент прохождения T возрастает с увеличением полной энергии E, и для этого есть две причины. Во-первых, уменьшается подынтегральное выражение, которое всегда положительно, а во-вторых, область интегрирования по мере сближения точек поворота становится меньше. Разумеется, коэффициент прохождения возрастает при уменьшении ширины барьера.

Теория альфа-радиоактивности

37. Попытаемся теперь применить теорию проникновения через барьер к реальному физическому явлению.

В задаче 8 гл. 2 мы отмечали, что период полураспада ядер радия $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$, испускающих α-частицы, оказывается «неестественно большим». Он равен 1622 годам, что совершенно несопоставимо ни с какой разумной *ядерной* шкалой времени. В качестве характеристического времени для ядерных процессов можно принять время, необходимое свету, чтобы пройти через ядро, т. е. время порядка

на 10^{-22} с. Период полураспада радия равен $5 \cdot 10^{10}$ с, что в 10^{32} раз больше характеристического ядерного времени. Таким образом, мы оказываемся перед необходимостью объяснить возникновение «аномально большого» числа 10^{32}. Разумеется, «характеристическое ядерное время» есть довольно свободное понятие, но наша задача не станет проще даже в том случае, если мы увеличим это время в 1000 раз.

Следует указать на такой экспериментальный факт: некоторые α-радиоактивные ядра живут довольно небольшой период полураспада. Например, у α-радиоактивного изотопа полония $^{212}_{84}Po$ период полураспада равен $3 \cdot 10^{-7}$ с. В качестве противоположной крайности отметим такой α-излучатель, как изотоп урана $^{238}_{92}U$.

Рис. 37А. Один из ранних фотографических следов α-частиц, испускаемых радиоактивным препаратом, в камере Вильсона (*Geiger H. Über den Aufbau des Atomkerns.* — Naturwiss., 1931, v. 19, p. 366). α-частица с данной энергией имеет в газе определенный пробег в веществе, она теряет свою энергию за столкновения с атомами вещества. Следовательно, когда частица теряет всю кинетическую энергию, пробег становится равным пробегу R. Эмпирически при нормальных условиях и температуре (воздух) $R = 0{,}32\,E^{3/2}$, где E [МэВ] — энергия, R [см] — пробег. Радиоактивный источник, испускающий α-частицы, в данной части снимка, отсутствует. Видны два пучка частиц с различными энергиями. Можно видеть пробег частиц с большой энергией. Пробег медленных частиц значительно меньше. Снимок любезно предоставлен Сидни Чаттоком.

Его период полураспада равен $4{,}5 \cdot 10^9$ лет. Таким образом, периоды полураспада α-излучателей лежат в необычайно широком интервале значений, и это также нуждается в объяснении.

Энергии испускаемых α-частиц находятся в пределах 4 — 10 МэВ. Каждый данный изотоп испускает α-частицы с определенной энергией, хотя существуют изотопы, которые могут испускать α-частицы, обладающие несколькими дискретными значениями энергии. Забудем временно об этом усложнении, которое мы обсуждали в п. 40 гл. 3. Опыт показывает существование сильной корреляции между периодом полураспада ядер и энергией испускаемых α-частиц: чем больше энергия, тем меньше время жизни.

38. Подумаем теперь, как объяснить рассмотренные факты [*]). Пока α-частица находится в ядре, на нее действуют мощные ядерные силы. Мы говорили, что радиус действия этих сил весьма мал, и в первом приближении можно считать, что за пределами поверхности ядра их действие прекращается. Все ядра главной силой

[*]) Мы лишь объясняем в рамках теории Шредингера, поскольку все скорости α-частиц являются нерелятивистскими. В этом легко убедиться, вспомнив, что энергия α-частицы не превосходит 10 МэВ.

является электростатическое отталкивание между α-частицей, заряд которой равен $2e$, и образующимся после распада *дочерним ядром*. Заряд этого ядра равен $-Z'e$, где Z' — атомный номер дочернего ядра. Если исходное материнское ядро имеет заряд $-Ze$, то заряд дочернего ядра $Z' = Z - 2$. Описанная ситуация схематически показана на рис. 38А, где по оси абсцисс отложено расстояние от центра ядра. Сплошной кривой показана потенциальная энергия α-частицы относительно дочернего ядра. За пределами поверхности ядра, т. е. при $r \geqslant R$, потенциал является кулоновским:

$$V(r) = 2e^2 Z'/r \quad \text{при } r \geqslant R. \tag{38а}$$

По мере приближения к поверхности ядра α-частица начинает испытывать действие ядерных сил, т. е. потенциал резко уменьшается. На рис. 38А показана упрощенная ситуация, когда потенциал предполагается ступенчатым. Потенциальная кривая внутри

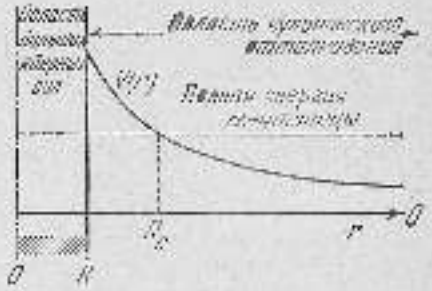


Рис. 38А. Схематическое изображение (сплошная линия) потенциальной энергии α-частицы вблизи ядра. Вне ядра, т. е. на расстояниях, больших R, известна доказанная экспериментально. Внутри ядра на α-частицу действуют силы притяжения. Сплошная кривая показана неизвестной. Полная энергия E такова, что падение в точке R слишком велико, чтобы частица могла преодолеть его. Штриховой линией показана полная энергия α-частицы. Квантовая механика разрешает α-частице проникать через барьер и происходит при α-распаде сложного ядра

ядра не показана. Ее точная форма нам неизвестна, так как вообще внутри ядра в мощном поле ядерных сил α-частица, по-видимому, теряет свою индивидуальность.

Штриховой линией показана полная энергия E α-частицы. Именно с этой энергией частица движется на большом расстоянии от ядра, где электростатический потенциал спадает до нуля.

38. Из рис. 38А следует, что α-частица должна до своего испускания из ядра проникнуть через потенциальный барьер, заключенный в области от R до R_e. Попробуем проверить справедливость этого предположения. Если оно верно, то классическая точка поворота, определяемая равенством

$$R_e = 2e^2 Z'/E, \tag{39а}$$

должна удовлетворять условию $R_e \geqslant R$.

Возьмем в качестве примера ядро $^{222}_{86}Ra$, для которого $Z = 88$, $Z' = 86$ (атомный номер благородного газа радона), $E = 4{,}78$ МэВ, и мы получаем $R_e \approx 50 \cdot 10^{-13}$ см $= 50$ ферми. [Для упрощения вычислений можно написать

$$R_e = \frac{e^2}{m_e c^2} \cdot 2Z' \cdot \frac{m_e c^2}{E} \approx (2{,}8 \cdot 10^{-13}\text{ см}) \cdot 172 \cdot \frac{0{,}5\text{ МэВ}}{4{,}78\text{ МэВ}} \approx 50\text{ ферми},$$

где m_e — масса электрона.]

В п. 36 гл. 2 было показано, что радиус R ядра с массовым числом A равен

$$R \approx r_0 A^{1/3}, \text{ где } r_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \tag{39b}$$

Для $^{226}_{88}$Ra массовое число $A=226$, и мы получаем $R \approx 7{,}3$ ферми.

Таким образом, наши представления получили качественное подтверждение: α-частица действительно должна проникать через потенциальный барьер. Заметим, однако, что масштаб рис. 38А неверен: барьер в действительности *намного шире*. Несмотря на это, рисунок правильно передает существенные особенности явления.

Неравенство $R_2 \gg R$ справедливо для всех α-радиоактивных ядер. Все они являются тяжелыми ядрами с большим атомным номером Z. Типичным α-излучателем можно считать ядро $^{226}_{88}$Ra. Таким образом, важнейшей особенностью α-распада является наличие потенциального барьера для α-частицы, и можно надеяться, что простая теория туннельного эффекта позволит понять необычайно большой разброс периодов полураспада α-излучателей и сильную зависимость этих периодов от энергии α частиц.

40. Вычислим теперь коэффициент пропускания T для потенциального барьера, показанного на рис. 38А. Из формулы (36b) следует

$$\ln T \approx -2 \int_{R}^{R_2} dr \sqrt{\frac{2m_\alpha (2e^2Z'/r - E)}{\hbar^2}}. \tag{40a}$$

Заметим, что подынтегральное выражение обращается в нуль при $r=R_2$ [см. формулу (39a)]. Чтобы взять этот интеграл, следует ввести новую переменную $x=r/R_2$. Если r меняется от R до R_2, то новая переменная x меняется от $x_2=R/R_2$ до $+1$. Принимая во внимание выражение (39a), можно записать определенный интеграл (40a) в виде

$$\ln T \approx -\frac{4e^2Z'}{\hbar} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{E}} \int_{x_2}^{1} dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1}. \tag{40b}$$

Значение этого интеграла можно довольно легко вычислить. Величина $x_2=R/R_2$ в общем случае достаточно мала, и нам следует лишь получить приближенное значение интеграла, в котором сохранены только первые два члена разложения по x_2. Вычисления имеют вид

$$\int_{x_2}^{1} dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \int_{0}^{1} dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} - \int_{0}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \int_{0}^{1} dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} - \int_{0}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1}{x}} + \int_{0}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \approx$$

$$\approx \int_{0}^{1} dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} - \int_{0}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1}{x}} = \int_{0}^{1} dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} - 2\sqrt{x_2}. \tag{40c}$$

Первый член в крайней правой части (40c) может быть вычислен подстановкой $x=\sin^2\theta$. Получаем

$$\int_{0}^{1} dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = 2 \int_{0}^{\pi/2} d\theta \cos^2\theta = \frac{\pi}{2}. \tag{40d}$$

Таким образом, интеграл в (40b) равен

$$\int_{x_2}^{1} dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \approx \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{R_2}}. \tag{40e}$$

Подставляя это значение в (40b) и принимая во внимание (39a), имеем

$$\ln T \approx -\frac{2\pi e^2 Z'}{\hbar} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{E}} + \frac{8}{\hbar} \sqrt{e^2 Z' R m_\alpha}. \tag{40f}$$

41. Чтобы получить удобную для применений и проверочную по опыту формулу, воспользуемся некоторыми приближениями. Примем $Z'=86$ и $R=7{,}3$ ферми, что соответствует ядру $^{222}_{86}$Rn в качестве материнского ядра при α-распаде. Таким образом, мы ограничиваемся некоторыми «типичными» для всех α-активных ядер значениями R и Z'. Все α-излучатели принадлежат к очень тяжелым ядрам, и значения Z' и R для этих ядер не слишком далеки от взятых нами значений. Важным параметром в (40f) является энергия E, которая, как мы отмечали, лежит в пределах 4—10 МэВ. Таких образом, наше приближение достаточно справедливо, особенно если иметь в виду остальные сделанные нами приближения.

Подставляя теперь в (40f) приближенные средние значения физических констант и полагая $Z'=86$ и $R=7{,}3$ ферми, получаем

$$\log T \approx -\frac{148}{\sqrt{E_\alpha/\text{МэВ}}} + 32{,}5. \tag{41a}$$

Заметим, что выражение (41a) дает десятичный логарифм T. Чтобы перейти к натуральному логарифму, вспомним, что $\log x = \log e \times \ln x \approx 0{,}434 \ln x$.

Итак, мы получили общее выражение (41a) для зависимости коэффициента пропускания T потенциального барьера от энергии α-частицы E. Воспользуемся им, чтобы найти периоды полураспада α-излучателей.

42. С этой целью рассмотрим весьма наивную модель α-распада. Предположим, что до испускания α частица колеблется вдоль диаметра ядра, многократно отражаясь от его «стенок». Обозначим через τ_0 интервал времени между двумя последовательными ударами о стенку. В каждом столкновении имеется определенная вероятность «просачивания» частицы через потенциальный барьер, равная коэффициенту пропускания T. Таким образом, α-частица должна испытать порядка $1/T$ столкновений, чтобы покинуть ядро, и мы можем написать, что время жизни (или период полураспада)

равно

$$\tau = \tau_0 T, \tag{42a}$$

или

$$\log \tau = \log \tau_0 + \frac{148}{\sqrt{E/\text{МэВ}}} - 32{,}5. \tag{42b}$$

Чтобы оценить τ_0, можно предположить, что скорость α-частицы в ядре равна ее скорости после распада. Тогда

$$\tau_0 = 2R/v, \qquad v = \sqrt{2E/m_\alpha}. \tag{42c}$$

Для такого «стандартного» α-излучателя, как $^{226}_{88}$Ra, мы получаем $\tau_0 \approx 10^{-20}$ с.

Мы видим из формулы (42c), что время τ_0 зависит от энергии E и от радиуса ядра R. Величина τ_0 является аргументом в выражении (42b) для $\log \tau$, а изменение первого члена с изменением E совершенно незначительно по сравнению с изменением второго члена. Чтобы показать это в явном виде, рассмотрим, что произойдет при изменении E от 9 до 4 МэВ. Отношение значений первого члена при этих двух энергиях равно $\log(3/2) \approx 0{,}18$, тогда как для второго члена это отношение гораздо больше: $148 \cdot (1/2 - 1/3) \approx 25$. Поэтому можно считать, что величина $\tau_0 = 10^{-21}$ с приблизительно подходит для всех α-излучателей. Таким образом, мы приходим к выводу, что *определяющим* фактором в α-распаде является проникновение через барьер. Нам плохо известны процессы, происходящие в ядре до распада, но мы можем сказать, что они определяют время τ_0, которое можно интерпретировать как время между последовательными «попытками» α-частицы проникнуть через барьер. Время τ_0 зависит от материнского ядра, но кажется разумным допустить, что оно имеет примерно одинаковый порядок величины для всех α-излучателей. Во всяком случае для разумных моделей изменение первого члена в (42b) оказывается гораздо меньше изменения второго члена, и по этой причине наша наивная модель, которая дает верный порядок величины τ_0, не так плоха, как может показаться. Выражаясь более точно, можно сказать, что она может быть плохой, но это не играет большой роли.

Итак, мы можем, наконец, написать общее соотношение между временем жизни τ (в секундах) и энергией α-частицы E:

$$\log(\tau/c) \approx \frac{148}{\sqrt{E/\text{МэВ}}} - 53{,}6. \tag{42d}$$

43. На рис. 43А показана зависимость периода полураспада α-излучателей от энергии E. Штриховая линия соответствует формуле (42d). По оси ординат отложен $\log(\tau/c)$, а по оси абсцисс $-1/\sqrt{E/\text{МэВ}}$. В таких координатах соотношение (42d) изображается прямой. На том же графике нанесены значения $\log \tau$ и $1/\sqrt{E}$ для известных α-излучателей, и мы можем сравнить экспериментальные данные с предсказаниями нашей теории.

Мы замечаем, что, хотя экспериментальные точки, как правило, не лежат на теоретической прямой, она правильно описывает общий характер зависимости $\log \tau$ от E. Это следует считать замечательным

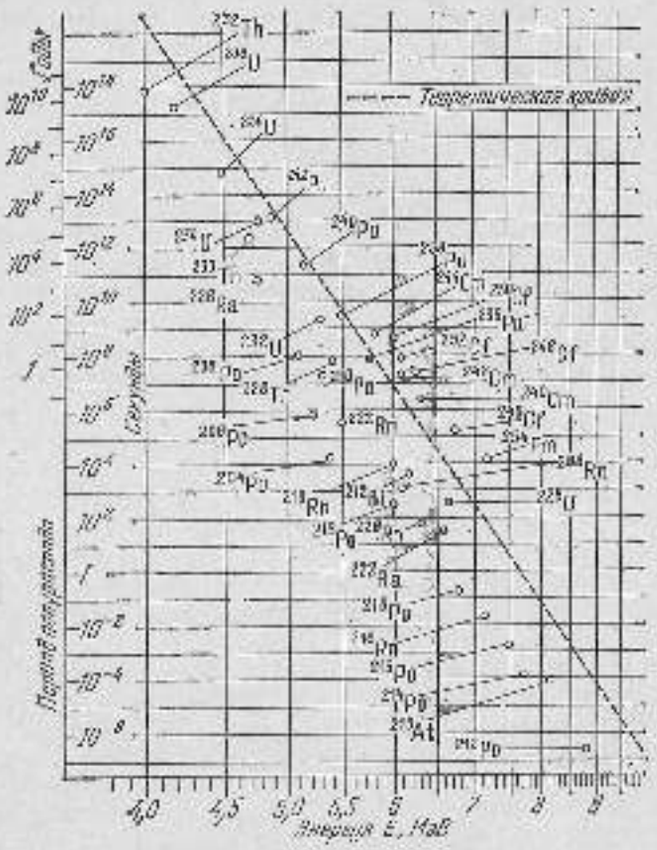


Рис. 43А. Зависимость периода полураспада от энергии α-частицы. Кружками показаны экспериментальные точки. По оси ординат — логарифм τ; по оси абсцисс — $1/\sqrt{E}$, где E — кинетическая энергия α-частицы. Из теории простой теории следует, что кружки должны лежать на прямой линии. Согласие между опытом и теорией имеет качественный характер, но точки явно дают более определенную характеристику зависимости τ от E. Рисунок в целом является весьма сильным подтверждением идей квантовой механики.

успехом квантовой механики. С помощью простой и наглядной теории мы смогли разобраться в главных особенностях α-распада, который на первый взгляд казался бесконечно сложным явлением.

Теория квантовомеханического проникновения через барьер была создана Гамовым и независимо Кондоном и Герни в 1928 г. *).

*) *Gamow G.* Zur Quantentheorie des Atomkernes.— Za. f. Phys. 1928, v. 51, p. 204; Quantum Theory of Nuclear Disintegration.— Nature, 1928, v. 122, p. 805; *Gurney R. W., Condon E. U.* Wave Mechanics and Radioactive Disintegration.— Nature, 1928, v. 122, p. 439.

С тех пор в теорию было внесено много уточнений, и в настоящее время она дает значительно более точное описание экспериментальных фактов, чем наша простая модель.

44. «Время жизни», определяемое рис. 43А, представляет собой период полураспада радиоактивного ядра. Читателю, конечно, известно, что радиоактивный распад описывается экспоненциальным законом: если в момент времени $t=0$ мы имели N_0 радиоактивных ядер, то среднее число ядер, не распавшихся к моменту t, равно

$$N(t)=N_0 e^{-\lambda t}. \qquad (44a)$$

Постоянная λ носит название *постоянной распада* или *скорости распада*. Обратная величина $\tau=1/\lambda$ называется *средним временем жизни* ядра. Период полураспада определяется как время, за которое число радиоактивных ядер уменьшается в среднем вдвое: $N(t)=N_0/2$.

Обозначив среднее время жизни через τ_∞, а период полураспада через $\tau_{1/2}$, получим следующее соотношение между этими величинами:

$$\tau_{1/2}=\lambda^{-1}\ln 2=\tau_\infty \ln 2. \qquad (44b)$$

Что же дает нам формула (42б): среднее время, период полураспада или еще какое-нибудь «время жизни»? Ибо если расчет для среднего времени жизни, то точность наших оценок такова, что вопрос о различии между τ_∞ и $\tau_{1/2}$ не имеет значения. Из рис. 43А видно, что наши теоретические результаты справедливы с точностью до множителя 100 или 1000.

45. Вернемся снова к рис. 38А. Он описывает также «обратный» процесс, когда заряженная частица, энергия E которой меньше высоты барьера, сталкивается с ядром. Такой частицей может быть α-частица, протон или, например, дейтрон. Если частица проникает через барьер в область действия больших ядерных сил, то может произойти ядерная реакция. Согласно классической механике проникновение через барьер невозможно, но, как мы уже знаем, в квантовой механике возникает другая ситуация. Если энергия E очень мала, то, конечно мал и коэффициент пропускания T и возникновение ядерной реакции крайне маловероятно. При увеличении энергии E возрастает прозрачность барьера, а тем самым и вероятность ядерной реакции. Рост вероятности реакции с энергией частицы грубо описывается экспоненциальной зависимостью. Таким образом, проникновение через барьер является существенной особенностью многих ядерных реакций, вызываемых заряженными частицами не слишком большой энергии. Ситуация меняется, если падающей частицей будет нейтрон. Для нейтральной частицы кулоновский барьер отсутствует, и она свободно проникает в ядро, как бы мала ее энергия ни была. Действительно, многие ядерные реакции дают большой выход даже для *тепловых нейтронов*, под которыми понимают нейтроны с энергией, соответствующей комнатной температуре, т. е. близкой к (1/40) эВ.

46. Тяжелые радиоактивные ядра можно разделить на четыре группы, соответствующие четырем реальным радиоактивным рядам. При испускании α-частицы массовое число A ядра изменяется на четыре единицы, а атомный номер Z — на две единицы. Для

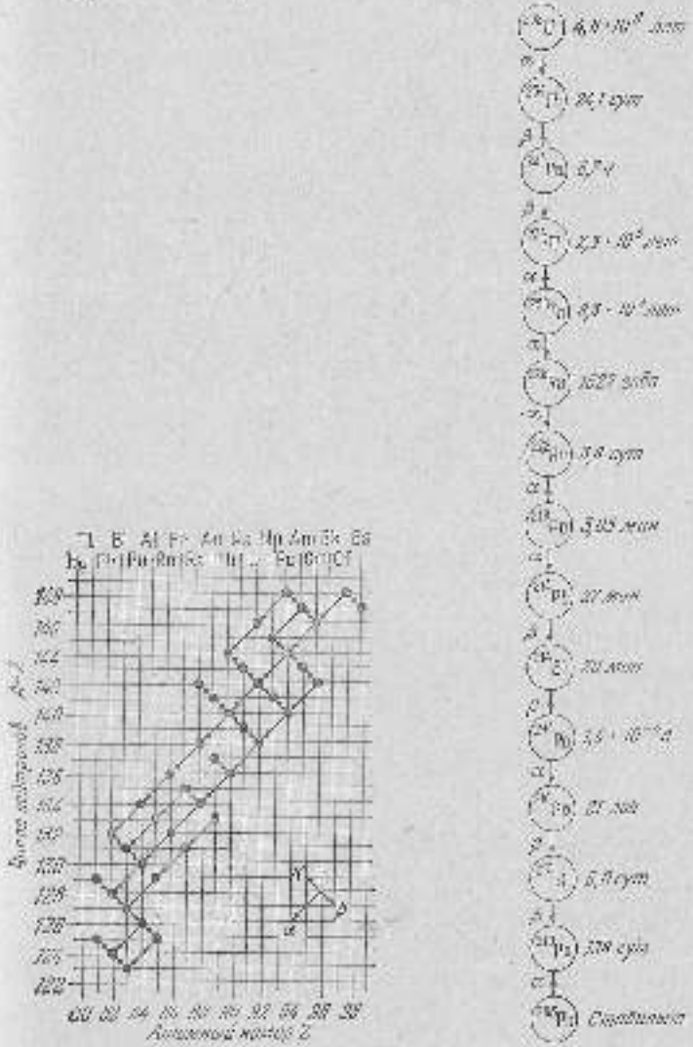


Рис. 46А. Уровни возбуждения радиоактивных ядер. Массовые числа ядерных изображаются прямыми $A=4n+2$. Стрелками показаны разные возможные распады. Обратите внимание, что все стрелки направлены вниз по этому рисунку: стрелка α обозначает α-распад, стрелка β^- — β-распад (испускание электрона с атомной орбиты), стрелкой K обозначен K-захват. Заметим, что у ядер, которые могут испытать оба вида распада, конечным продуктом того или иного распада оказывается стабильный изотоп свинца ^{206}Pb.

Рис. 46Б. Ряд радиоактивных распадов урана — радия — актиния. Периоды полураспада указаны справа, а энергия α-частиц — слева от протона. Вместо изотопов применяются их химические названия, так как принадлежат они различным химическим элементам. Трансурановые элементы ряда (массовое число $A=4n+1$) имеют периоды полураспада, которые слишком велики, чтобы показать их на этой шкале времени.

β-распаде, когда испускается электрон (позитрон) и антинейтрино (нейтрино), массовое число не меняется, но атомный номер меняется на +1 (−1). Некоторые тяжелые ядра испытывают α-распад, а некоторые — β-распад. Существует другая возможность: ядро может захватить электрон из окружающего его облака атомных электронов и испустить нейтрино. Такой процесс носит название *K-захвата*. Он тесно связан с β-распадом. Существенным взаимодействием, ответственным за *K*-захват и β-распад, является универсальное *слабое взаимодействие*, о котором мы говорили ранее. Электрон, позитрон и нейтрино (в отличие от α-частицы) не принимают участия в сильных взаимодействиях, ответственных за «ядерные силы». Причиной больших (в ядерном масштабе) времен жизни радиоактивных ядер относительно β-распада или *K*-захвата является не проникновение через барьер, а просто чрезвычайно слабое взаимодействие.

В α-распаде массовое число A меняется на четыре единицы, при β-распаде и *K*-захвате оно не меняется. Радиоактивные ядра можно разделить на четыре семейства, в массовое число в пределах каждого из них описывается выражением $A=4n-r$, где n — переменное число, а r фиксировано. Четыре семейства соответствуют различным значениям $r=0, 1, 2, 3$. Одно из таких семейств для $r=2$ показано на рис. 46А и 46Б.

Встречающиеся в природе (естественные) радиоактивные элементы либо сами имеют очень большие времена жизни, либо являются членами ряда, в начале которого находится долгоживущий элемент. Среди тяжелых ядер с большим периодом полураспада отметим ^{238}U, для которого $\tau_{1/2}=4{,}5\cdot10^9$ лет, ^{232}Th с $\tau_{1/2}=1{,}4\cdot10^{10}$ лет и ^{235}U, с $\tau_{1/2}=7{,}13\cdot10^8$ лет. Самым долгоживущим членом семейства $(4n+1)$ является изотоп нептуния ^{237}Np ($\tau_{1/2}=2{,}2\cdot10^6$ лет). В геологическом масштабе это время невелико, и поэтому семейство $4n+1$ в природе не встречается, а является искусственно созданным.

Несколько естественных легких ядер также радиоактивны. Примером служат β-активное ядро ^{40}K, для которого $\tau_{1/2}=1{,}3\cdot10^9$ лет, и ^{87}Rb с $\tau_{1/2}=4{,}7\cdot10^{10}$ лет.

47. Явление естественной радиоактивности дает возможность определять возраст породы, т. е. время, прошедшее с момента ее последнего химического превращения. Принцип весьма прост. Определяется относительное число долгоживущего радиоактивного изотопа и стабильного конечного продукта распада в радиоактивном семействе, присутствующего в образце в качестве какой-либо примеси. Рассмотрим, например, семейство урана — радия — свинца, которое начинается с ^{238}U и кончается стабильным изотопом свинца ^{206}Pb. Допустим, что в данном образце мы обнаружили свинец, соответствующий N_{Pb} атомам, и уран, соответствующий N_U атомам. Предположим, что все атомы свинца ^{206}Pb возникли от распада ^{238}U. Тогда можно написать:

$$N_U = N_0 e^{-\lambda T}, \qquad N_{Pb} = N_0 (1 - e^{-\lambda T}), \tag{47a}$$

где N_0 — число атомов ^{238}U, существовавших в начале образования

породы; λ — скорость распада урана; T — возраст образца. Так как $N_0 = N_U + N_{Pb}$, то

$$e^{\lambda T} = (N_{Pb} + N_U)/N_U. \tag{47b}$$

Зная λ, можно найти T. Разумеется, этот метод дает лишь *нижнюю границу* для T, так как часть ядер ^{206}Pb, находящихся в образце сегодня, могла находиться в нем и в момент образования. Более мудрый подход к проблеме заключается в сравнении изотопического состава свинца в минералах, содержащих и не содержащих уран. Наш пример слишком упрощает дело, и мы привели его для иллюстрации принципа.

Другой метод определения возраста заключается в сравнении содержания гелия в породе с содержанием в ней урана. В каждом α-распаде возникает ядро гелия, и если мы уверены, что гелий не улетучивается из породы, то можно найти, сколько атомов урана распалось с момента образования породы, чтобы создать наблюдаемое в ней количество атомов гелия [*]).

С помощью подобных методов было показано, что возраст наиболее старых минералов Земли близок к $3\cdot10^9$ лет. Эта величина является *нижним пределом* возраста Земли, так как ее оболочка в прошлом испытывала много химических превращений. Были изучены также и метеориты, возраст которых оказался близким к $4{,}6\cdot10^9$ лет. Как образовались метеориты, наверняка не известно, но существуют достоверные указания на то, что они образовались (кристаллизовались) примерно в то же время, что и остальные твердые тела Солнечной системы. Поэтому возраст Земли как твердого тела следует считать близким к $4{,}6\cdot10^9$ лет. С помощью радиоактивных «часов» можно оценить также время, протекшее между последним образованием химических элементов в метеорите и его кристаллизацией. Согласно одной из таких оценок [**]), это время близко к $0{,}35\cdot10^9$ лет. Отсюда следует, что последнее образование химических элементов в планетах и метеоритах произошло около $5\cdot10^9$ лет назад. Это время и представляет собой оценку возраста нашей Солнечной системы.

48. Замечательно простираются наши рассуждения. Каков возраст Вселенной? Как образовались химические элементы? Мы не в состоянии рассмотреть здесь идеи, которые дают возможность оценить возраст Вселенной. Весьма правдоподобно, что он близок к $10\cdot10^9$ лет, что по порядку величины близко к возрасту Солнечной системы.

Вероятно, химические элементы образовались из водорода в ядерных реакциях, происходящих в звездах. На рис. 46А пре-

*) Первая оценка возраста Земли, основанная на законах радиоактивности, была сделана Резерфордом (*Rutherford E.* The Mass and Velocity of the Particles Expelled from Radium and Actinium.— Phil. Mag., 1906, v. 12, p. 348). Резерфорд оценивает возраст исследованных им минералов в 400 миллионов лет.

**) *Reynolds J. H.* Determination of the Age of the Elements.— Phys. Rev. Lett., 1960, v. 4, p. 8; см. также: *Holmberg G. M., Patnik F. A., Reynolds J. H.*, Xenon-Iodine Dating: Study Isotopically in Chondrites.— Science, 1957, v. 130, p. 202. В этих работах показано, что возраст может оказаться заметно меньшим.

ведена оценка распространенности химических элементов в Солнечной системе. Точки, соответствующие конкретным химическим элементам, получены в результате усреднения реальных оценок, основанных на спектроскопическом определении относительной распространенности в солнечной атмосфере, определении относительной распространенности в метеоритах и на оценках химического состава оболочки Земли. Заметьте, что водород и гелий

Рис. 48А. Относительная распространенность элементов в Солнечной системе (*Aller L. H.*, The Abundance of the Elements. — N. Y., 1961.). По вертикали отложены десятичный логарифм распространенности χ по отношению к кремнию. Точки, соответствующие элементам, соединены линиями, чтобы облегчить чтение графика. Приведенные здесь данные основаны на измерениях, весьма различных по характеру, и их применение в каждом конкретном случае требует осторожности. Данные для легких элементов получены главным образом из спектроскопических исследований излучения Солнца, а те данные о распространенности тяжелых элементов, которые использованы здесь, взяты в составе метеоритов. Следует иметь в виду предположение о неизменности химического состава солнечной системы. Поэтому остается, что распространенность элементов в планетной системе может отличаться от их распространенности в Солнечной системе. Так, распространенность элементов в нашем непосредственном окружении (см. табл. 48А) заметно отличается от космической распространенности.

эпоху является наиболее распространенным элементом. Обратите также внимание на то, что максимумам кривой распространенности отвечают особенно стабильные элементы. Мы видим, что элементы с четным атомным номером, как правило, имеют большую распространенность, нежели соседние элементы с нечетным атомным номером. Эта закономерность является отражением того факта, что ядра с четным числом протонов и четным числом нейтронов более стабильны, чем остальные ядра.

Объяснение деталей кривой распространенности тесно связано с понижением ранней истории Солнечной системы. В настоящее

Таблица 48А. Восемь наиболее распространенных элементов земной коры

Элемент	Число атомов, %	Элемент	Число атомов, %	Элемент	Число атомов, %
Кислород	62,6	Натрий	2,64	Магний	1,94
Кремний	21,2	Кальций	1,94	Калий	1,42
Алюминий	6,5	Железо	1,92		

Таблица дает оценку состава 16-километрового слоя земной коры, основанную на измерениях, проведенных в литосфере. Перечисленные восемь элементов составляют около 98% всей массы земной коры. Гравитационное поле Земли не может удержать легкие элементы — водород и гелий. Этим объясняется их малое по сравнению с космическим, распространение в земной коре. Можно думать, что распространенность элементов в Земле приводится в соответствие с космическим. Однако известные процессы в Земле приводят к перераспределению тяжелых элементов, поэтому данные земной коры не характеризуют распространенность элементов для Земли в целом.

время, по-видимому, нам ясны лишь основные особенности этой кривой.

Что касается первоначального происхождения *водорода*, то автору абсолютно нечего сказать по этому вопросу.

Дополнительная тема: нормировка волновой функции*)

48. Рассмотрим шредингеровскую волновую функцию, ограничившись для простоты одномерных случаев, когда волновая функция $\psi(x, t)$ зависит только от одной координаты x и времени. Мы утверждали, что квадрат модуля волновой функции пропорционален плотности вероятности. Это означает, что вероятность обнаружить частицу в момент времени t в интервале $x_2 - x_1$ равна

$$P(x_1, x_2) = N \int_{x_1}^{x_2} dx\, |\psi(x, t)|^2, \tag{49a}$$

где N — некоторая постоянная, *не зависящая от* x. Как она определяется? Из очевидного условия, что вероятность обнаружить частицу *где-то* должна быть равна единице:

$$1 = N \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\psi(x, t)|^2 \tag{49b}$$

Может случиться, однако, что интеграл в (49b) не сходится. В этом случае постоянная N равна нулю, и из (49a) следует, что вероятность обнаружить частицу в любом конечном интервале значений x также равна нулю. Такой результат не годен с физического склада, и мы приходим к такому выводу, что *надлежащая волновая функция* $\psi(x, t)$ *должна для всех значений* t *иметь интегрируемый квадрат модуля*. Это означает сходимость интеграла (49b).

*) При первом чтении можно пропустить.

Допустим теперь, что волновая функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет условию «квадратичной интегрируемости». Тогда новую волновую функцию $\psi_n(x, t)$ можно определить из условия

$$\psi_n(x, t) = \sqrt{N}\psi(x, t), \tag{49c}$$

где N определено из выражения (49b). Такая волновая функция обладает следующим свойством:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\psi_n(x, t)|^2 = 1, \quad P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} dx\,|\psi_n(x, t)|^2. \tag{49d}$$

Для функции $\psi_n(x, t)$ плотность вероятности *равна* квадрату ее абсолютного значения.

Волновая функция, удовлетворяющая первому условию в (49d), называется *нормированной волновой функцией*, или функцией, *нормированной к единице*. С такой функцией удобно работать, так как квадрат ее абсолютного значения непосредственно дает плотность вероятности.

50. Теперь мы должны выяснить, может ли постоянная N, определяемая равенством (49b), зависеть от времени t? Мы предполагали, что $\psi(x, t)$ является решением уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x, t) + V(x)\,\psi(x, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t). \tag{50a}$$

Новая волновая функция $\psi_n(x, t)$ также будет решением (50a), если постоянная N не зависит от времени.

Докажем следующую теорему: если $\psi(x, t)$ удовлетворяет уравнению (50a) и $\psi(x, t)$ «достаточно быстро» стремится к нулю при стремлении x к $+\infty$ или $-\infty$, то

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\psi(x, t)|^2 = 0. \tag{50b}$$

Требование «достаточной быстроты», в частности, означает, что функция $\psi(x, t)$ должна иметь интегрируемый квадрат абсолютного значения.

Для доказательства этой теоремы произведем дифференцирование под знаком интеграла:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x, t)|^2 = \frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x, t)\psi(x, t) = \psi^*(x, t)\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial\psi^*(x, t)}{\partial t}\psi(x, t), \tag{50c}$$

Уравнение (50a) дает нам выражение для производной по времени $\partial\psi(x, t)/\partial t$. Чтобы получить аналогичное выражение для производной комплексно сопряженной волновой функции, произведем комплексное сопряжение уравнения (50a):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^*(x, t) - V(x)\,\psi^*(x, t). \tag{50d}$$

Мы считаем $V(x)$ *вещественной* функцией. Действительно, потенциал в теории Шредингера соответствует потенциалу аналогичной классической задачи. Вещественность потенциала существенна для наших рассуждений, и это предположение характерно для теории Шредингера.

Исключая с помощью (50a) и (50d) производные по времени из (50c), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x, t)|^2 = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right) = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right). \tag{50e}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,|\psi(x, t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x, t)|^2 = \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right]_{-\infty}^{+\infty}. \tag{50f}$$

Однако если производные волновой функции по x ограничены, то выражение в скобках в формуле (50f) обращается в нуль, так как волновая функция исчезает на бесконечности. Таким образом, равенство (50b) доказано, и из (49b) немедленно следует, что N есть постоянная, не зависящая от времени t. Поэтому функция $\psi_n(x, t)$ также является решением уравнения Шредингера (50a). *Из данной волновой функции мы всегда можем образовать нормированную волновую функцию, и частности волновую функцию, нормированную к единице.*

Эти важные выводы сохраняются и в трехмерном случае. Мы не доказали этого, но соответствующее доказательство совершенно аналогично одномерному случаю.

51. Читатель может усомниться в нашем утверждении, что каждая волновая функция, имеющая физический смысл, должна быть квадратично интегрируемой в смысле (49a).

Поводом для сомнения является плоская монохроматическая волна $\exp(ixp/\hbar - ip^2t/2m\hbar)$. Ясно, что эта функция не обладает таким свойством и, следовательно, не может быть нормирована к единице. Нам пришлось сделать вывод, что волна с *точно* заданным значением импульса p, зависимость которой от координаты x имеет вид $\exp(ixp/\hbar)$, не отвечает физически реализуемому состоянию движения частицы.

С другой стороны, ничто не мешает нам рассматривать волну, которая в очень *большом* интервале значений x зависит от x по закону $\exp(ixp/\hbar)$ и стремится к нулю при x, стремящемся к $+\infty$ или $-\infty$. Поэтому возникшую трудность можно разрешить, согласившись, что под «волной с точно определенным импульсом» мы не будем подразумевать волну, которая при любых x имеет вид $\exp(ixp/\hbar)$. Мы предполагаем, что волна должна исчезнуть на бесконечности, но она имеет вид $\exp(ixp/\hbar)$ в достаточно *большом* интервале значений x, включающем в интересующую нас область. Та-

ким образом, мы «монохроматической волной» уж почтем почти монохроматическую волну. При таком понимании можно продолжать говорить о волнах, которые зависят от координат по закону $\exp(ixp/\hbar)$ или $\exp(ix\cdot p/\hbar)$, как обычно пишут почти во всех книгах по квантовой механике. Нормированную волну можно считать простейшим случаем нормированной волны и при желании называть волновые функции первого типа *несобственными волновыми функциями* (improper wave functions). Этот термин должен также умиротворить математиков. Их чувства часто страдают от того, что физики говорят о плоских волнах как о настоящих гильбертовых волновых функциях.

Задачи

1. Рассмотрим барьер, показанный на рис. 28А этой главы для случая, когда $E>V_1$.

а) Сначала рассмотрим случай, когда частица падает на барьер слева. Волновой пакет, соответствующий частице, частично отражается, частично проходит и область скачка потенциала. Для рассмотрения этого случая нам нужно также решение, которое в области справа от скачка представлено бегущей направо волной. Найдите это решение для того пространства и получите выражение для коэффициента отражения R, т. е. для вероятности отражения частицы. Коэффициент пропускания T (вероятность проникновения сквозь) будет равен $1-R$.

б) Рассмотрим случай, когда частица падает справа. Теперь решение уравнения Шредингера должно соответствовать волне, бегущей в левой части рисунка влево. Найдите решение для этой области и получите выражение для коэффициента отражения R' и пропускания $T'=1-R'$. Заметим, что падающая частица в случае, показанном на рис. 28А, не отражается от барьера.

2. Получите точное выражение для коэффициента пропускания в случае потенциального барьера, показанного на рис. 31А, и сравните полученное выражение с приближенной формулой (63б). Удастся ли свести выражения для T, в их алгебраическом виде, к приближенной формуле, данной выше для малого барьера?

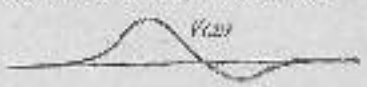
3. Представьте интерес рассмотреть специальный случай плоского преломления через барьер, показанного на рис. 34Б. Показатель преломления фтора (сорт стекла для длины волны 6000 Å (в воздухе) равен 1,75. Предположим, что на рис. 34Б показана более плотной средой является фтор, а менее плотной — воздух. Пусть угол падения равен 45°, а расстояние между плоскостями равно 0,01 см. Оценим, какая часть света проникает через барьер. (Не нужно делать сложных вычислений, достаточно оценки, основанной на приближенном рассмотрении проникновения через барьер.)

Заметьте, что интенсивность проникшего света падает экспоненциально с увеличением толщины получившегося слоя между двумя стеклянными призмами. Важным параметром является отношение толщины к длине волны. Заметьте, что составляющая полного вектора, нормальная плоскому разделу, одна и та же для стекла и для воздуха. Почему?

4. (Не интересуясь, зеркала рис. 34В. Рассмотрите соотношение между лучами падающего и прошедшего света. Быть может, проходящий луч должен быть продолжением падающего и проходить не так, как показано на рисунке? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо, пожалуй, несколько опыта. Пусть толщина оптически плотной среды будет порядка длины волны падающего света. С помощью системы зеркал создадим сразу много лучей падающего света, показанной штриховой линией на нижней части рисунка справа. Тогда мы сможем исследовать проходящий пучок и выяснить, верно ли рисунок. Нет необходимости проделывать этот опыт в лаборатории: можно считать его имеющимся экспериментом, так как известное электромагнитное теория описывает его полностью. Обсудим этот опыт с учетом, сперва же рис. 34В

5. Рассмотрим движение частицы в сферически-симметричном потенциале, который изображен на рисунке. При x, стремящемся в ту или $-\infty$, потенциал $V(x)$ падает до нуля.

Пусть частица с энергией E приходит слева. Волновая функция имеет вид $\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$ для очень больших отрицательных значений x и $\psi(x)=De^{ikx}$ для очень больших положительных значений x. Чтобы найти две константы A и B, нужно решить уравнение Шредингера для потенциала $V(x)$, показанного на рисунке.



К задаче 5. Движение под действием потенциального барьера произвольного вида. Коэффициенты отражения и пропускания, выраженные через амплитуды волн, «регистрирующихся» справа и слева, равны одному и тому же

Мы интерпретировали $|A|^2$ как коэффициент отражения барьера, а $|D|^2$ — как коэффициент пропускания. Если такая интерпретация верна, то

$$|A|^2+|B|^2=1. \qquad (a)$$

Возникает следующий вопрос: выполняется ли написанное соотношение для всех потенциальных функций $V(x)$? Проверьте это соотношение в общем случае.

Указание. Рассмотрите функцию

$$F(x)=\psi^*(x)\frac{d\psi(x)}{dx}-\psi(x)\frac{d\psi^*(x)}{dx}$$

и покажите, что $dF/dx=0$, если $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению Шредингера.

Из этого примера видно, что иногда можно вывести свойства решения, не имея явного решения. В таких частных случаях мы имеем важное общее свойство уравнения Шредингера и его решений. Если теория может сказать, уравнение (*a*) должно выполняться.

6. Есть еще интересные вопросы, возникающие в связи с опытом и предыдущей задачей. Например, одинакова ли прозрачность барьера в обоих направлениях?

Теорема. Коэффициент пропускания для частицы, падающей на барьер слева и справа, различен, если энергия частицы в обоих случаях одна и та же.

Докажите эту теорему.

Указание. Заметим, что если рассмотренная в предыдущей задаче функция $\Phi(x)$ является решением уравнения Шредингера, то решением будет и зеркальная с ней функция $\psi^*(x)$, а также любая линейная комбинация функций $\Phi(x)$ и $\psi^*(x)$. Рассмотрите нормированную линейную комбинацию $\psi(x)$ и $\psi^*(x)$.

7. Многие неустойчивые ядра распадаются, испуская позитрон и нейтрино. Энергия позитрона обычно лежит в интервале от 10 кэВ до нескольких мегаэлектрон-вольт. Как мы отмечали, процесс такого распада назвался слабо взаимодействие. Мы отмечали также, что длительность больших времен жизни β-активных ядер является крайне малой слабого взаимодействия. Это не исключает возможности, что проникновение через барьер играет важную роль. Последуем этой мысли на конкретном примере. Оценим коэффициент пропускания для позитрона, проходящего через этнический потенциальный барьер. Это позволит нам убедиться, что проникновение через барьер не играет заметной роли в β-распаде.

8. Й. Мейтнер и Р. Ортнер (Zs. f. Phys., 1933, v. 60, p. 143) осуществили калориметрические измерения энергии, освобождающейся при β-распаде RaE. (Это старое название ядер ^{210}Bi.) Опыт показывает, что источник RaE, помещенный в калориметр и измеряемая выделяемая в калориметре теплота. Зная период полураспада RaE (5 суток) и количество препарата, они могли вычислить число распадов в секунду, а тем самым и энергию, выделяемую при одном распаде. Ее значение оказалось равным (0,337 ±0,030) МэВ на распад.

С другой стороны, было известно, что максимальная кинетическая энергия электронов при β-распаде RaE равна 1,170 МэВ, и, таким образом, избыток большое расхождение между двумя указанными величинами энергии, чрезвычайно тревожило физиков. Если мы верим, что распад заключается в переходе между двумя уровнями с точно заданной энергией каждого уровня, то должны считать, что при каждом распаде испускается энергия, равная 1,170 МэВ, но часть этой энергии не уносится электроном или спектром и как. Этот результат так обескуражил, что многие физики, в их числе Бор, обсуждали возможность нарушения закона сохранения энергии в микрофизике.

Оценить ли изотопы или смеси U-фракций, найти потребное обогащение результатов опыта Мейсьер и Оливьер.

8. Распространенность платины 285 и 288 в природном уране составляет соответственно 0,71 и 98,28%, а их периоды полураспада равны $7{,}1 \cdot 10^8$ и $4{,}50 \cdot 10^{17}$ лет.

а) Такая распространенность наблюдается как в земных образцах урана, так и для урана из метеоритов. Какие выводы можно сделать из этих фактов?

б) Предположим для упрощения задачи, что начальные распространенности обоих изотопов урана в Солнечной системе одинаковы. Каково при этом предположении оценка возраста Солнечной системы?

10. а) Вычислите массу радия в урановой руде, которая содержит 1 г урана. Зависит ли эта масса от возраста руды, равного, например, 1 миллиону или 500 миллионам лет?

б) Какую массу свинца можно обнаружить в руде, возраст которой равен 500 миллионам лет?

Дополнительная литература

Шифф Л. Квантовая механика.— М.: ИЛ, 1957.
Зоммерфельд А., Лайльке Е. Квантовая механика.— М.: Наука, 1971.
Бете Г., Моррисон Ф. Элементарная теория ядра.— М.: ИЛ, 1958.
Де Бенедетти С. Ядерные взаимодействия.— М.: Атомиздат, 1968.
Дэвис У. Ядерная физика частиц высоких энергий.— М.: ИЛ, 1963.
Хьюз Ф. Галактики, ядра и квазары.— М.: Мир, 1938.
Юй Дж. Метеориты и происхождение Солнечной системы.— М.: Мир, 1971.

ГЛАВА 8

ТЕОРИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

Квантование как проблема собственных значений

1. Приведенный подзаголовок повторяет общее заглавие четырех знаменитых работ Шредингера *) о волновой механике, в которых показано, что существование в атоме дискретных уровней энергии можно понять, исходя из волновых представлений, в частности с помощью уравнения Шредингера.

Теории Шредингера предшествовала созданная в 1913 г. полуклассическая теория атома. Мы говорим «полуклассическая» потому, что она основана на планетарной модели атома, описываемой законами классической механики, и на дополнительном предположении, что не все классически разрешенные орбиты реализуются. Выбор разрешенных орбит в теории Бора подчинен ряду *квантовых условий*, существенно неклассического характера. Напомним, например, о требовании, чтобы полный момент импульса для орбитального движения электрона в атоме был кратен величине $\hbar$. Во многих случаях (хотя и не всегда) полная энергия при движении по разрешенным квантовым условиями орбитам образует дискретный ряд значений. Целью теории Бора было объяснить дискретные уровни энергии в атоме, иными словами, произвести *квантование* движения в атоме. Таково историческое происхождение термина «квантование».

2. Квантовые условия Бора являются догадкой, удовлетворительной далеко не во всех случаях. Ко времени появления работ Шредингера стало ясно, что теория Бора, объяснившая некоторые экспериментальные факты, не в состоянии объяснить ряда атомных явлений. Таким образом, назрела необходимость в новых идеях.

Великое открытие Шредингера заключалось в том, что он показал, что если принять волновые представления о веществе, то получается естественный и общий способ квантования. Шредингер заметил, что при определенных условиях решения его волнового уравнения представляют собой *стоячие волны*, и связал эти решения со стационарными состояниями атомов. Решения в виде стоячей волны зависят от времени благодаря множителю $\exp(-i\omega t)$, причем возможные значения частоты ω образуют дискретный ряд $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots$, таким образом, энергия n-го стационарного состояния равна $E_n = \hbar\omega_n$. В этой главе мы последуем за Шредингером и рассмотрим следствия этой идеи.

*) *Schrödinger E.* Quantisierung als Eigenwertproblem.— Ann. d. Phys., 1926, v. 79, p. 361; v. 79, p. 489; v. 80, p. 437; v. 81, p. 109.

3. В гл. 7 с помощью ряда правдоподобных рассуждений было получено уравнение Шредингера *)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,\ t)+V(x)\,\psi(x,\ t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,\ t). \tag{3a}$$

которое описывает поведение частицы с массой m в поле сил, определяемых потенциальной функцией $V(x)$. Мы отмечали, что уравнение Шредингера является лишь приближением: оно справедливо, когда рассматривается нерелятивистское движение и когда игнорируются все явления рождения и исчезновения частиц. Мы объясняли, почему это уравнение оказалось столь плодотворным в атомной и молекулярной физике и даже в некоторых задачах ядерной физики. В последнем случае мы достигли большого успеха, объясняя с помощью квантовомеханического туннельного эффекта явление α-распада, в частности зависимость времени жизни α-излучателей от энергии α-частиц.

Для ясности мы начнем, следуя методу, использованному в гл. 7, с особенно простых задач, которые допускают применение одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,\ t)+V(x)\,\psi(x,\ t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,\ t). \tag{3b}$$

Математически это уравнение гораздо проще трехмерного уравнения (3a), а существенные особенности интересующих нас явлений сохраняются и в одномерной задаче (3b). Следует также иметь в виду, что это уравнение отнюдь не нефизично, как может показаться на первый взгляд: многие проблемы трехмерного движения действительно могут быть сведены к одномерному движению.

4. Начнем с весьма простой задачи. Рассмотрим движение частицы в «ящике» длиной a с бесконечно высокими стенками. Сплошной кривой на рис. 44,*а* показана потенциальная энергия для этой задачи. Потенциал равен нулю для x в интервале $(0,\ a)$ и обращается в $+\infty$ за его пределами.

В п. 26 гл. 7 было рассмотрено движение частицы при наличии *одной* «стенки» с бесконечно большим потенциалом. Мы нашли решение в виде монохроматической стоячей волны. Оно описывало отражение от стенки частицы, которая могла иметь любое положительное значение энергии E. Новым моментом в рассматриваемой ситуации является то, что движение частицы ограничено *двумя* бесконечно высокими «стенками» потенциала. Попытаемся найти решение уравнения Шредингера (3b), предположив, что оно имеет вид

$$\psi(x,\ t)=\varphi(x)\exp(-iEt/\hbar), \tag{4a}$$

т. е. что волновая функция $\psi(x,\ t)$ зависит от времени через экспоненциальный множитель $\exp(-iEt/\hbar)$. Подставляя это решение в (3b), получаем не зависящее от времени уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)=[E-V(x)]\varphi(x). \tag{4b}$$

В п. 26 гл. 7 было показано, что в области с бесконечно большим значением потенциала и во *всех* точках волновая функция обращается в нуль. В нашей задаче волновая функция равна нулю в точках $x=0$ и $x=a$ и за пределами интервала $(0,\ a)$.

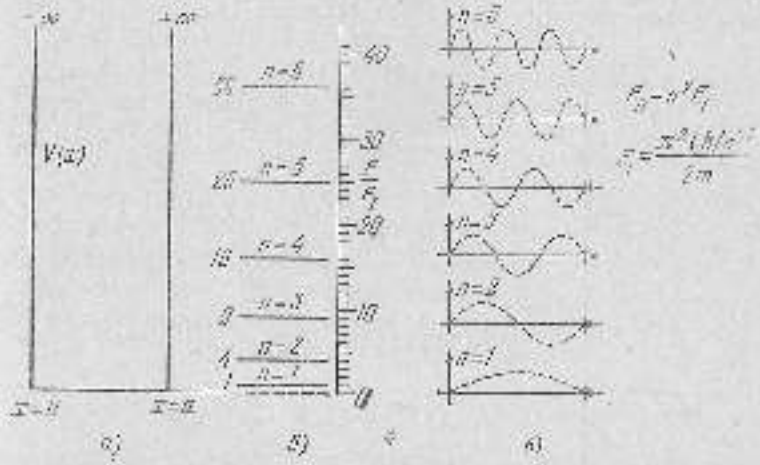


Рис. 44. Задача о частице в одномерном ящике является весьма важной точечной. Хотя она может показаться очень простой иллюстрацией, на ней проиллюстрирована теория стационарных состояний. На рис. *а)* показан потенциал, представляющий бесконечно большое значение на концах $x=0$ и $x=a$. В этих точках волновая функция — математическая величина, должна обращаться в нуль. Это возможно лишь в том случае, если (полная) энергия принимает дискретные значения, показанные на рис. *б)*. На рис. *в)* изображена схема условий (синусоидальная форма) для частиц, находящихся на рис. *б)*. На рис. *в)* показаны соответствующие волновые функции (собственные функции) для первых шести стационарных состояний.

Внутри одномерного «ящика» общее решение уравнения (4b) имеет вид

$$\varphi(x)=A\exp(ikx)+B\exp(-ikx), \tag{4c}$$

где

$$k=\sqrt{2mE/\hbar^2}, \tag{4d}$$

а множители A и B — постоянные.

Из условия, что волновая функция равна нулю при $x=0$, следует, что решение запишется в виде

$$\varphi(x)=C\sin(kx), \tag{4e}$$

где C — не равная нулю постоянная. Волновая функция должна обратиться в нуль в точке $x=a$, что приводит к условию

$$C\sin(ak)=0, \quad \text{или} \quad ak=n\pi. \tag{4f}$$

Это условие определяет возможные значения k, а следовательно, и энергии E. Принимая во внимание связь между E и k [см. (4d)],

*) В этой главе мы работаем с системами единиц СГС или СИ.

получаем

$$E_n = \frac{n^2\pi^2(\hbar/a)^2}{2m}, \tag{4g}$$

где n — целое *положительное* число. Только такие значения энергии E физически приемлемы в полученном решении. Случай $n=0$ следует отбросить, так как при этом волновая функция всюду равна нулю, что лишено физического смысла.

5. Итак, для нашей задачи о частице в «ящике» уравнение Шредингера (3b) имеет стационарные решения, которые экспоненциально зависят от времени, т. е. решения типа $\psi(x, t) = \varphi(x)\exp(-iEt/\hbar)$. Такие решения возможны *лишь тогда*, когда энергия принимает одно из дискретных значений $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, равное

$$E_n = \frac{n^2\pi^2(\hbar/a)^2}{2m}; \tag{5a}$$

здесь n — положительное целое число. *Нормированная* *) волновая функция $\psi_n(x, t)$ для n-го возможного значения энергии E_n имеет вид

$$\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right) \tag{5b}$$

в интервале $(0, a)$ и обращается в нуль за его пределами. Легко проверить, что эта волновая функция нормирована к единице: интеграл от $|\psi_n(x, t)|^2 = (2/a)\sin^2(n\pi x/a)$ в пределах от нуля до a равен единице.

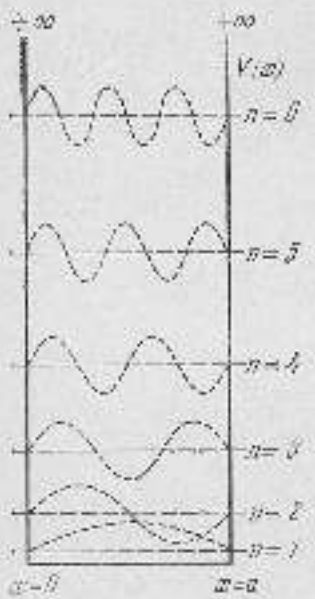


Рис. 5A. (Приблизительно — см. рис. 4A.) Те же самые стрелки, показанные здесь, имеют такое же значение, как и на рис. 4A. Кроме того, показаны уровни энергии. Каждое из этих уровней (кроме первого) соответствует волновой функции.

На схеме уровней, изображенной на рис. 4A, *б*, указаны первые шесть возможных значений энергии E_n. На рис. 4A, *в* приведены соответствующие волновые функции $\varphi_n(x)$, которые равны волновым функциям $\psi_n(x, t)$ при $t=0$. На рис. 5A оба рисунка совмещены.

6. Обратимся теперь к вопросу о различии между стационарными и нестационарными решениями уравнения Шредингера (3b).

Рассмотрим сначала n-е стационарное решение, определяемое волновой функцией (5b). Она нормирована к единице, поэтому квадрат ее модуля дает плотность вероятности $P_n(x)$ обнаружить частицу вблизи точки x. Находим

$$P_n(x) = |\psi_n(x, t)|^2 = (2/a)\sin^2(n\pi x/a) \tag{6a}$$

*) О нормировке волновых функций см. п. 43 тл. 7.

вокруг интервала $(0, a)$ и $P_n(x) = 0$ *вне его*. Из выражения (6a) следует, что для стационарного решения плотность вероятности *не зависит от времени*.

Рассмотрим теперь нестационарное решение. Поскольку уравнение Шредингера (3b) является линейным дифференциальным уравнением, то линейная комбинация любой пары его решений будет новым решением. Это новое решение удовлетворяет тем же граничным условиям $\psi(0, t) = \psi(a, t) = 0$, если их удовлетворяют оба исходных решения. Таким образом, можно сделать вывод, что, в согласии с принципом суперпозиции, любая линейная комбинация стационарных решений (5b) дает тоже физически приемлемое решение.

Чтобы понять, как ведет себя такая линейная комбинация решений, рассмотрим следующий частный случай:

$$\psi(x, t) = \sqrt{1/2}\,[\psi_{n'}(x, t) + \psi_{n''}(x, t)], \tag{6b}$$

где, разумеется, $n' \neq n''$. Заметим, что написанное решение уравнения Шредингера также нормировано к единице (для всех значений t). Действительно, плотность вероятности $P(x, t)$, соответствующая решению (6b), равна

$$P(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = \frac{2}{a}\left[\sin^2\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) + \sin^2\left(\frac{n''\pi x}{a}\right) + 2\sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n''\pi x}{a}\right)\cos\frac{(E_{n'} - E_{n''})t}{\hbar}\right]. \tag{6c}$$

Интегрируя это выражение от нуля до a, читатель легко убедится, что волновая функция (6b) действительно нормирована к единице.

Мы видим, что плотность вероятности $P(x, t)$ *осциллирует* во времени: последний член в выражении (6c) соответствует осцилляциям, частота которых равна

$$\omega_{n'n''} = (E_{n'} - E_{n''})/\hbar. \tag{6d}$$

7. Очевидно, что плотность вероятности осциллирует в тех случаях, когда решение является суперпозицией стационарных решений (5b). При этом любым двум стационарным решениям $\psi_{n'}$ и $\psi_{n''}$, входящим в суперпозицию (в ней может быть любое, даже бесконечно большое число стационарных решений), отвечает осциллирующий с частотой $\omega_{n'n''}$ член в выражении для плотности вероятности. Осцилляции появляются от «перекрестных» членов $\psi_{n'}^*\psi_{n''}$ и $\psi_{n''}^*\psi_{n'}$, входящих в выражение для квадрата модуля волновой функции

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n\psi_n(x, t), \tag{7a}$$

где c_n — постоянные.

Теперь возможно доказать следующую *теорему*: каждое физически приемлемое решение уравнения Шредингера для «частицы в ящике» может быть однозначно представлено рядом (7a), который является разложением по *стационарным* решениям (5b) задачи.

Мы не станем доказывать эту теорему, а примем ее, как весьма правдоподобную. Математически она эквивалентна теореме о разложении в ряд Фурье, и из нее следует, что стационарными решениями уравнения Шредингера будут лишь те решения, которым соответствует не зависящая от времени плотность вероятности.

6. Итак, мы рассмотрели сущность шредингеровской теории стационарных состояний и смысл уровней энергии квантовомеханической системы. Стационарные состояния отвечают стационарным решениям уравнения Шредингера. Для этих решений плотность вероятности от времени не зависит. Для нестационарных состояний плотность вероятности осциллирует со временем, и частота осцилляций определяется, как это следует из (6d), *разностью* энергий различных стационарных уровней. Эти частоты представляют собой характеристические частоты системы, для которых можно ожидать излучения или поглощения энергии: на таких частотах система резонирует. Частоты переходов ω_{jk} в свою очередь определяют уровни энергии, с точностью до аддитивной постоянной, которая может быть задана, если энергии основного состояния приписать определенное значение. (В нашем примере за уровень нулевой энергии принимается «дно потенциальной ямы».)

Теперь перед нами возникает грандиозная программа-максимум: решить уравнение Шредингера (соответствующим образом обобщенное для систем из многих частиц) для всех физически интересных случаев, когда теория Шредингера является хорошим приближением.

В частности, особенно интересны квантованные в единице стационарные решения: они описывают стационарные состояния и дают их уровни энергии. Нет необходимости говорить, что столь обширная программа далека от осуществления: ограниченность математических возможностей не позволяет получить для сложных систем точные решения уравнения Шредингера. Они известны лишь для некоторых особенно простых систем.

7. При рассмотрении указанной выше программы может, однако, возникнуть вопрос, действительно ли это то, к чему мы стремимся. Подробное обсуждение пределов стационарных состояний и т. д. показало, что при более строгом рассмотрении они вовсе не стационарны. С другой стороны, для частицы в «ящике» теория дает нам строго стационарные состояния. Изложенная программа также привела бы к строго стационарным состояниям, и противоречие с известными экспериментальными фактами. Мы здесь сталкиваемся с очевидной ограниченностью уравнения Шредингера: оно не описывает радиационных переходов. Поэтому уравнением Шредингера дело не исчерпывается, что-то еще не учтено. В этом смысле можно провести аналогию между теорией Шредингера и классической теорией, которая принимает во внимание все электростатические взаимодействия между электронами и ядрами, но пренебрегает излучением электромагнитных волн движущимися частицами. Тем не менее можно надеяться, что для атомных и молекулярных явлений уравнение Шредингера представляет собой хорошее приближение. Таким образом, можно ожидать, что предсказываемые уравнением Шредингера стационарные состояния должны соответствовать почти стационарным состояниям квантовой теории и что средние энергии последних состояний очень близки к точным значениям энергии, предсказываемым уравнением Шредингера.

8. Прежде чем пойти дальше, познакомимся с некоторыми часто употребляемыми терминами. Не зависящее от времени уравнение Шредингера (4b) представляет собой типичное уравнение для определения уровней энергии системы. Перепишем его в символической форме:

$$H\varphi(x) = E\varphi(x) \tag{10a}$$

Здесь

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \tag{10b}$$

— *дифференциальный оператор*.

Мы хотим найти решение $\varphi(x)$ дифференциального уравнения (10a). Оно может иметь решения при любых значениях энергии E, но не все такие решения физически приемлемы. Поэтому условие физической приемлемости, в частности требование квадратичной интегрируемости волновой функции *), является *существенной* частью проблемы. Наложив эти условия, мы обнаружим, что энергия E не может быть произвольной. Значения энергии E_j, для которых уравнение (10a) имеет физически приемлемые решения, называются *собственными значениями дифференциального оператора* H. Соответствующие волновые функции носят название *собственных функций* этого оператора.

Теперь нам должно быть понятно название работ Шредингера: «Квантование как проблема собственных значений».

Рис. 11А. Частный случай потенциала, приближающегося к постоянному значению V_+ и V_- соответственно, при стремлении x к $+\infty$ и $-\infty$ соответственно. Мы хотим исследовать собственные значения E. Предположим, для ряда значений полной энергии E, горизонтальные прямые пересекают кривую потенциальной энергии $V(x)$ в различных комбинациях значений энергии

11. Задача о частице в потенциальном ящике с бесконечно высокими стенками поучительна, но малореалистична. Рассмотрим проблему собственных значений в более общем одномерном случае. Предположим, что потенциал $V(x)$ простирается до бесконечности и имеет форму, показанную на рис. 11А. При $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ потенциал $V(x)$ принимает постоянное значение, равное соответственно V_+ и V_-. Предположим, что $V_+ \geqslant V_-$, и обозначим через V_0 минимальное значение потенциала.

Мы хотим изучить свойства не зависящего от времени уравнения Шредингера (4b) для потенциала $V(x)$. Перепишем это

*) В случае одномерной задачи с бесконечно высокими стенками за волновую функцию следует, что потенциал $V(x)$ должен иметь на бесконечности и на ее границах, как было показано в п. 26 гл. 7.

уравнение и исследует его свойства для различных значений энергии E, рассматриваемой как параметр, т. е. для $E<V_0$, $V_0<E<V_1$,

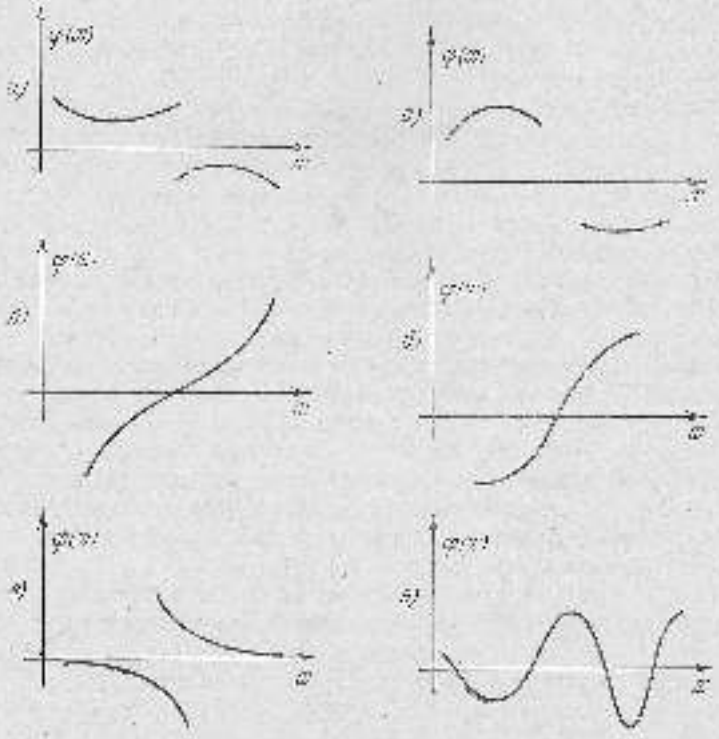


Рис. 12А. [illegible]

Рис. 13А. Полное качественное изображение кривых, которые могут служить графиками вещественной волновой функции $\psi(x)$ для $E>V(x)$. Знак второй производной волновой функции всегда противоположен знаку самой функции.

$V_1<E<V_2$ и $E>V_2$. Легко понять, что дифференциальное уравнение (11а) имеет решения для всех этих значений E, но не все решения физически приемлемы.

*При графическом представлении комплексных (в общем случае) волновых функций возникают некоторые трудности. Есть возможность показать на графике ход модуля волновой функции. Другая возможность заключается в рассмотрении вещественных решений уравнения (11а). Мы замечаем, что если $\varphi(x)$ — некоторое (комплексное) решение уравнения (11а), то $\varphi^*(x)$ также будет решением, если только величины E и $V(x)$ вещественны. Сумма $\psi(x)+\varphi^*(x)$ и разность $\psi(x)-\varphi^*(x)$ этих решений также будут решениями, и притом вещественными, и их можно изобразить на графике.

12. Рассмотрим описанное поведение вещественных решений в области, где $E-V(x)>0$. Из уравнения (11а) видно, что в этой области вторая производная волновой функции имеет всюду тот же знак, что и сама функция. Отсюда следует, что если функция не проходит через нуль в этом интервале, то она должна быть обращена «выпуклостью» в сторону оси x, как показано на рис. 12А, *а* для двух интервалов оси x. Если же волновая функция пересекает

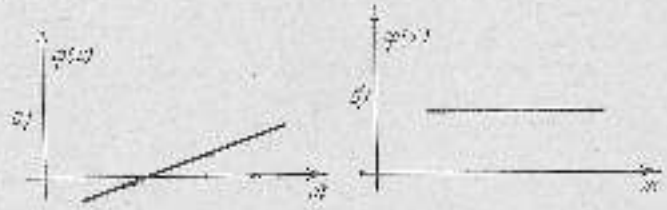


Рис. 14А. Поведение вещественной волновой функции в области, где $E-V(x)=0$. [illegible]

ось x, она будет удаляться от оси по обе стороны от точки пересечения (рис. 12А, *б*). Волновая функция может также асимптотически приближаться к оси x слева или справа, как показано для двух интервалов оси x на рис. 12А, *в*.

Мы приходим к выводу, что если $V(x)>E$ для всех значений x, то не существует физически приемлемых решений (11а), так как при этом модуль волновой функции неограниченно растет слева или справа или с обеих сторон рассматриваемого интервала. К примеру к рис. 11А такой вывод означает, что физическая система не может иметь энергии E, меньшей V_0.

13. Рассмотрим теперь поведение волновой функции в области, где $E-V(x)<0$. В этом случае знак второй производной *противоположен* знаку самой волновой функции. Поэтому волновая функция должна быть обращена «выпуклостью» в сторону оси x, как показано на рис. 13А, *а* для двух интервалов оси x. Если волновая функция пересекает ось x, то по обе стороны от точки пересечения она будет обращена вогнутостью в сторону оси x. Это показано на рис. 13А, *б*, который следует сравнить с рис. 12А, *б*. В этих условиях волновая функция может несколько раз пересекать ось x, и мы получаем «осциллирующую» волновую функцию, показанную на рис. 13А, *в*.

14. Рассмотрим, наконец, случай, когда $E-V(x)=0$ во всей области. (Такая, весьма специфическая, ситуация может возникнуть лишь в том случае, когда потенциал $V(x)$ постоянен.) Вторая производная волновой функции будет равна нулю; следовательно, первая — постоянна. Такой волновой функции соответствует прямая линия, как это показано на рис. 14А.

Заметим теперь, что для потенциала, показанного на рис. 11А, физически приемлемая волновая функция и ее первая производная не могут обращаться в нуль в одной и той же точке, так как в этом случае волновая функция обратилась бы в нуль всюду. Высказанное утверждение является теоремой, доказываемой в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Именно вследствие такой теоремы сегменты кривых, показанных на рис. 12А, 13А и 14А, нигде *не касаются* оси x, хотя могут пересекать ее или асимптотически к ней приближаться.

15. Мы изучили *локальное* поведение волновой функции при различных значениях разности $E-V(x)$. Теперь рассмотрим свойства волновой функции *в целом* при *всех* значениях x для потенциала, показанного на рис. 11А. Для этого нам придется наложить на возможные решения дифференциального уравнения (11а) условие, которым должна удовлетворять физически приемлемая волновая функция.

Начнем со случая, когда энергия $E>V_+$ (пунктирная линия E_3 на рис. 11А). Особенность этого случая в том, что $E-V(x)>0$ для любых x и решение во всей области, и в частности в $+\infty$ и $-\infty$, имеет характер осцилляции. Оно остается осциллирующим при $+\infty$ и $-\infty$ и в том случае, если энергия E меньше максимального значения потенциала $V(x)$, но $E>V_+$. В этом случае мы имеем дело с задачей о проникновении через потенциальный барьер. Итак, для *любого* $E>V_+$ можно найти два линейно независимых решения, осциллирующих на бесконечности, и этим решениям соответствуют бегущие волны. Физическая интерпретация таких решений была рассмотрена в гл. 7. При заданной энергии E решение не нормировано к единице, но, взяв суперпозицию (непрерывную) решений в виде бегущей волны, можно образовать нормированное решение. В п. 51 гл. 7 мы условились называть решение, отвечающее определенному E и осциллирующее при $-\infty$ и $+\infty$, «несобственной» волновой функцией, и для любого $E>V_-$ мы имеем две линейно независимые «несобственные» волновые функции. Эти волновые функции или, вернее, образованные из них волновые пакеты, могут описывать, например, падающую на барьер слева частицу. Она частично отражается обратно и частично проходит вправо. Аналогично, частица может приходить справа.

16. Теперь рассмотрим случай $V_+>E>V_-$. При этом для правой части рисунка $E-V(x)<0$, а для левой части $E-V(x)>0$. Такого рода задача была рассмотрена в п. 21—25 гл. 7. В этом случае для правой области физически приемлемо лишь *одно* из двух линейно независимых решений, а именно то, которое стремится к нулю при x, стремящемся к $+\infty$ (см. правый сегмент на рис. 12А, *в*). Продолжение влево, такое решение приобретает характер осцилляций в области, где $E-V(x)>0$. (Разумеется, волновая функция и ее первая производная должны быть всюду непрерывны, иначе решение не будет *общим* решением уравнения Шредингера.) Итак, если энергия E такова, что $V_+>E>V_-$, мы имеем *одну* (несобственную) волновую функцию, которая описывает отражение приходящей слева частицы от потенциального «горба». Такая задача была рассмотрена в гл. 7.

17. Обратимся теперь к случаю $V_->E>V_0$. Он соответствует энергии E_2 на рис. 11А, когда справа и слева имеются области, для которых $E-V(x)<0$, а для области в середине $E-V(x)>0$. Две граничные точки, отделяющие эти области друг от друга, являются *классическими точками поворота*. Обозначим их x_1 и x_2.

Слева от x_1 волновая функция асимптотически приближается к оси x, как показано на левом сегменте на рис. 12А, *з*. (У волновой функции может быть другой знак, но это не имеет значения.) Другой возможностью для волновой функции является монотонное возрастание при x, стремящемся к $-\infty$. Но постоянно возрастающая волновая функция не будет физически приемлемым решением. Поведение волновой функции справа от x_2 напоминает правый сегмент на рис. 12А, *в*. В области, лежащей между точками x_1 и x_2, волновая функция осциллирует, и здесь мы имеем два линейно независимых и физически приемлемых решения. Задача заключается в «согласовании» таких различных типов решений с тем, чтобы получить физически приемлемую волновую функцию, всюду непрерывную вместе со своей первой производной [1]). *Это не может быть сделано для произвольного значения энергии E. Физически приемлемые решения (они должны быть подходящим образом нормированы) существуют лишь для определенных дискретных значений энергии E. Каждой такой энергии отвечает особое стационарное состояние системы.*

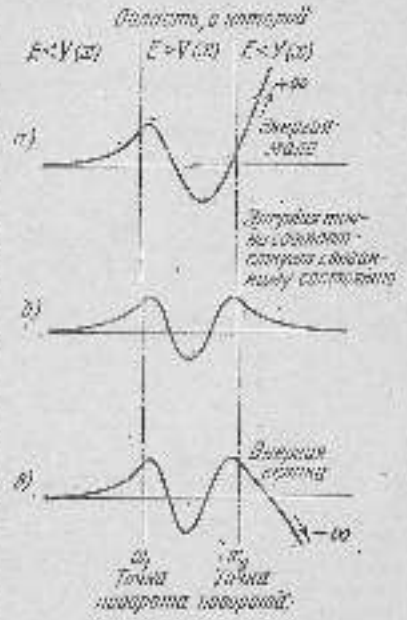


Рис. 18А. Схема, показывающая, как корректно решается уравнение Шредингера, асимптотически стремящееся к нулю при $x\to\pm\infty$. Три кривые отвечают решениям при трех различных значениях энергии. Одно из них (при $x\to+\infty$) расходится стремясь к $+\infty$ или $-\infty$, два других не имеют такого асимптотического поведения. Некоторые решения дифференциального уравнения физики часто оказываются «ненужными» при решении задачи. Например, в задаче о частице, движущейся в потенциальной яме, решения, которые стремятся к $+\infty$ при $x\to+\infty$, не представляют собой волновую функцию связанного состояния.

18. Сказанное поможет нам понять рис. 18А. Возьмем для энергии E некоторое значение $V_->E>V_+$. Чтобы удовлетворить физическим условиям «слева», мы должны выбрать в качестве решения волновую функцию, асимптотически приближающуюся к оси x при x, стремящемся к $-\infty$. В точке поворота x_2 решение «слева» должно быть «согласовано» с осциллирующим решением

[1]) «Согласование» выполняется, конечно, автоматически, если мы находим полное решение волнового уравнения.

для области (x_1, x_3). Требование непрерывности самой волновой функции и ее первой производной приводит к *единственному* решению в этой области. Полученное решение опять должно быть согласовано с решением для области «справа» от x_3, которое в свою очередь *единственно*. Это последнее решение, если значение энергии E выбрано верно, должно вести себя так, как кривая на правом рисунке рис. 12А, *б*, т. е. волновая функция справа от x_3 должна асимптотически приближаться к оси x. При неверном выборе энергии E волновая функция будет удаляться от оси x, что означает физически неприемлемое решение. Требование асимптотического приближения волновой функции к оси x слева и справа от точек поворота в общем случае невыполнимо. Оно удовлетворяется лишь для некоторых дискретных значений E, которые должны быть больше V_0. Мы уже отмечали, что при $E<V_0$ *не существует* физически приемлемых решений.

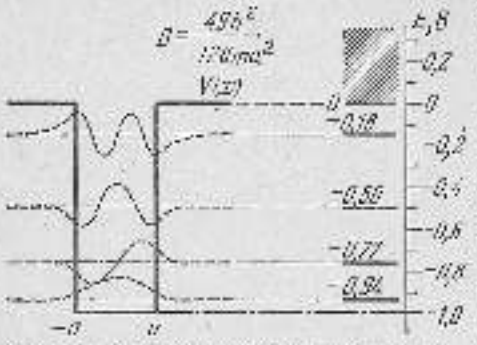


Рис. 19А. Частица в потенциальной яме глубиной E. Слева — схема потенциала, справа — уровни энергии. Имеются четыре связанных состояния (четыре дискретных уровня энергии). Соответствующие волновые функции показаны слева. Они совмещены с графиком потенциала. Область непрерывного спектра примыкает к верху ямы и заштрихована.

Для потенциала, показанного на рис. 11А, схема уровней состоит из дискретного ряда уровней (в нем может не быть ни одного уровня), расположенных между V_0 и V_-, и непрерывной последовательности уровней при энергиях, бо́льших V_∞.

19. На *рис.* 19А показана простая одномерная задача, принадлежащая к задачам рассматриваемого выше типа. В этом случае возможно сравнительно простое аналитическое решение. На рис. 19А $V_+ = V_-$ и потенциал в интервале $(-a, a)$ постоянен. Справа на рисунке показана схема уровней, которых всего четыре. Они расположены ниже области непрерывного спектра. В левой части рисунка показаны волновые функции четырех связанных состояний. Заметим, что первая волновая функция имеет один экстремум (и ни одного нуля), вторая — два экстремума (и один нуль), а четвертая волновая функция, соответствующая наиболее высокому *дискретному* уровню энергии, имеет четыре экстремума и три нуля. Для более глубокой потенциальной ямы мы имели бы большее число связанных состояний, а в предельном случае ямы с бесконечно высокими стенками (эта задача обсуждалась в п. 4) число связанных состояний бесконечно велико. Сравнив рис. 1А, *б* и 19А, читатель увидит, что для обоих случаев положение уровней четырех первых связанных состояний аналогично, хотя и не совпадает полностью.

Рекомендуем читателю найти четыре связанных состояния для ямы из рис. 19А.

Теперь мы поясним, почему с точки зрения теории Шредингера

квантовомеханическая система имеет связанные состояния и почему выше определенного предельного значения энергии возникает непрерывный спектр состояний. Это начало соответствует энергии, при которой система диссоциирует. В нашем простом случае такая диссоциация означает, что частица ведет себя как «волновой пакет», распространяющийся далеко от «центральной области».

20. Поговорим теперь о том, как понять рассмотренное в п. 38 гл. 3 явление, которое заключается в том, что уровни энергии расположены выше нижней границы непрерывного спектра (см. схему уровней на рис. 38А гл. 3).

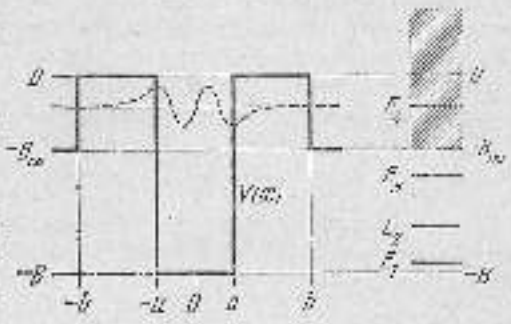


Рис. 20А. Одномерная потенциальная яма, показанная на рис. 19А. Потенциал постоянен и равен нулю лишь в интервале $(-a, a)$, за его пределами он равен $-B_\infty$. Область непрерывного спектра начинается при $-B_\infty$, а существует лишь три стационарных состояния. Однако если b очень велико, то, хотя четвертого уровня все же нет, существует четвертое состояние с энергией, сколь угодно близкой к E_4. Это состояние соответствует уровню на рис. 38А гл. 3.

Рассмотрим показанную на рис. 20А одномерную задачу. Она отличается от задачи рис. 19А тем, что за пределами ямы потенциал не постоянен, а уменьшается скачком до значения $-B_\infty$ на некотором расстоянии b от ямы. Предположим, что после скачка потенциал сохраняет постоянное значение $-B_\infty$.

В соответствии с нашей теорией непрерывный спектр начинается при энергии $-B_\infty$, как показано на рис. 20А. При не слишком малых b существуют три связанных состояния. Отвечающие им уровни энергии E_1, E_2, E_3 весьма близки к трем первым уровням энергии на рис. 19А, пока постоянная b велика, т. е. пока оба барьера, показанные на рис. 20А, достаточно широки. Ограничимся случаем широкого барьера (b достаточно велико). Если b бесконечно велико, задача на рис. 20А переходит в задачу на рис. 19А. Область непрерывного спектра начинается при нулевой энергии, и существует четвертое связанное состояние с энергией E_4. Для любого конечного значения b мы имеем лишь три связанных состояния и непрерывный спектр, начинающийся при энергии, равной $-B_\infty$. Предположим, однако, что ширина ямы, в которой находится, например, электрон, имеет типичные атомные размеры, что ее глубина порядка 10 эВ, а величина b превосходит 1 км. В этих условиях трудно понять, чем отличаются ситуации, показанные на рис. 20А и 19А. Здравый смысл подсказывает, что в обоих случаях поведение частицы вблизи ямы должно быть одним и тем же, и мы ожидаем получить, что четвертый уровень на схемы уровней рис. 19А будет существовать и в задаче на рис. 20А. Тщательное математическое исследование задачи, которое мы не можем здесь выполнить, подтверждает сказанное. Мы приведем лишь общий ход доказательства.

21. Рассмотрим, как зависит в обоих случаях шредингеровская волновая функция $\psi(x, t)$ от времени. Предположим, что в момент $t=0$ эта функция идентична четвертой собственной функции, показанной на рис. 19А. Ей соответствует собственная энергия четвертого уровня $E_4 \approx -0{,}16B$. Иными словами,

$$\psi(x, 0)=\varphi_4(x), \tag{21a}$$

где волновая функция $\varphi_4(x)$ — та волновая функция, которая показана на уровне E_4 на рис. 19А и повторена на рис. 20А. Заметим, что за пределами ямы эта функция быстро стремится к нулю.

Легко получить решение задачи на рис. 19А для зависящего от времени уравнения Шредингера (3h) при начальных условиях (21a). Поскольку функция $\varphi_4(x)$ является собственной функцией дифференциального оператора Шредингера, то сразу же имеем

$$\psi(x, t)=\varphi_4(x)\exp(-iE_4t/\hbar), \tag{21b}$$

так как состояние $\psi(x, t)$ стационарное. Теперь можно написать выражение для вероятности $P(t)$ того, что частица находится *внутри* ямы:

$$P(t)=\int_{-a}^{a} dx\,|\psi(x, t)|^2=P(0). \tag{21c}$$

Эта вероятность не зависит от времени, что опять отражает стационарный характер волновой функции $\psi(x, t)$. Заметим, что интеграл в (21c) берется только в пределах ямы, т. е. от $-a$ до $+a$.

22. Если попытаться решить ту же задачу для ситуации, показанной на рис. 20А, при тех же начальных условиях (21a), то окажется, что решение *не будет* иметь вида (21b), хотя оно к нему близко.

Действительно, получив зависящую от времени волновую функцию $\psi(x, t)$ для задачи на рис. 20А, мы нашли бы, что вероятность $P(t)$ не остается постоянной, а имеет вместо (21c) следующую приближенную зависимость от времени:

$$P(t)=\int_{-a}^{a} dx\,|\psi(x, t)|^2 \approx P(0)\exp(-t/T), \tag{22a}$$

где T — положительная постоянная, имеющая размерность времени. Подчеркнем *приближенный* характер формулы (22a); она пригодна для не слишком больших времен t. Доказательство приведенного результата завело бы нас слишком далеко. Ограничимся поэтому лишь тем, что покажем его правдоподобность.

Результат (22a) можно интерпретировать следующим образом. Если частица в момент $t=0$ находится в яме и ее энергия близка к E_4, то она может покинуть яму. Если T велико (случай большой ширины ямы b), то частица будет долго находиться в яме и мы имеем *приближенно стационарное состояние*. Время T есть среднее время жизни состояния. При b, стремящемся к бесконечности, T также стремится к бесконечности и состояние становится *строго*

стационарным (рис. 19А). Если b стремится к a, то время T уменьшается и в пределе $b=a$ «состояние» с энергией E_4 теряет свой смысл квазистационарного состояния.

Полученный результат объясняет, почему на рис. 20А уровень с энергией E_4 находится *внутри* непрерывного спектра: он соответствует приближенно стационарному состоянию. Такие уровни часто называют *виртуальными* уровнями энергии.

Качественный результат (22a) можно понять как следствие проникновения через барьер, рассмотренного в гл. 7. Частица с энергией E_4, помещенная в яму, осталась бы в ней согласно классической механике навсегда. В рамках квантовой механики дело обстоит иначе: частица может выйти с одной или другой стороны ямы. Чем шире барьер, тем дольше он удерживает частицу и тем больше время T. При очень больших T частица многократно ударяется о стенки ямы и ее поведение приближенно описывается волновой функцией стационарного состояния.

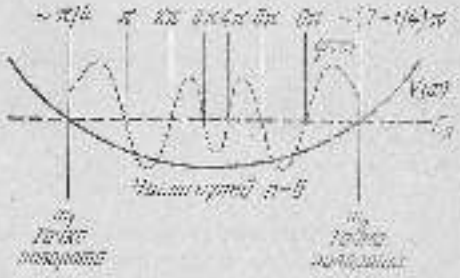


Рис. 19А. Иллюстрация так называемого приближенного ЖКБ-метода. Чтобы найти n-е (т. е. n-е наименьшее) собственное состояние, отбираем такое значение энергии, чтобы кривую классического движения (пунктир) удовлетворяло $n+\frac{1}{2}$ полуцикла. Высшая (положительная) точка пересечения определяется состоянием энергии и называется «точкой поворота». Волновая функция в одной (любой) точке поворота) пишется для данного возбуждения аналогично осциллирующей функции, умноженной на экспоненту, характеризующую проникновение волновой функции через один указанный барьер. В данном случае можно изменить один квант состояния поворота, удовлетворяет условию $\Delta(n+\frac{1}{2})=\frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2}(k-\kappa)\,dx$

23. До сих пор задачи нахождения стационарных состояний каждый раз сводились к подгонке осциллирующей волновой функции в двух классических точках поворота. Волновая функция основного состояния имеет один экстремум и ни одного нуля. Волновая функция следующего состояния обладает двумя экстремумами и однажды проходит через нуль. В общем случае волновая функция n-го состояния имеет n экстремумов и $n-1$ нулей. Для обозначения квантового состояния будем пользоваться квантовым числом n, равным числу нулей волновой функции. Таким образом, квантовое число основного состояния будет $n=0$ и n-е возбужденное состояние имеет квантовое число n. Волновая функция, отвечающая квантовому числу n, имеет $n+1$ экстремумов.

Опишем теперь *приближенный* метод определения уровней энергии частицы в потенциальной яме, показанной на рис. 23А сплошной кривой. Штриховой линией показана энергия E_4 шестого возбужденного состояния, а осциллирующая штриховая кривая соответствует волновой функции этого состояния. Волновая функция вычерчена лишь для области между точками поворота x_1 и x_2 [которые определены условием $V(x_1)=V(x_2)=E_4$]. За пределами этого интервала волновая функция асимптотически приближается к оси x.

21. Предположим, что мы пытаемся представить волновую функцию, показанную штриховой кривой на рис. 23А, в виде

$$\psi(x) = A(x)\sin f(x); \tag{24a}$$

здесь $A(x)$ — положительная амплитуда, $f(x)$ — фаза, монотонно растущая при увеличении x. Каждый раз, когда значение фазы $f(x)$ становится равным $k\pi$ (где k — целое число), волновая функция проходит через нуль. Рассмотрим изменение фазы Δf волновой функции между точками поворота

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1). \tag{24b}$$

Из рис. 23А следует, что изменение фазы волновой функции близко к $(6 - \frac{1}{2})\pi$. Это наводит нас на мысль, что для волновой функции n-го состояния изменение фазы $f(x)$ между точками поворота будет близко к

$$\Delta f_n \approx (n+\tfrac{1}{2})\pi. \tag{24c}$$

Мы выбрали выражение (24c) для удобства, чтобы иметь простую формулу. Более корректно было бы написать неравенство для разности фаз:

$$(n-1)\pi < \Delta f_n < n\pi, \tag{24d}$$

о справедливости которого читатель легко убедится. Обращаясь к рис. 4А, *в*, мы видим, что в данном случае реализуется верхний предел неравенства (24d). Для третьего возбужденного состояния на рис. 19А мы оказываемся близки к нижнему пределу. Выражение (24c) является, таким образом, некоторым приближением.

23. Постараемся теперь получить приближенное выражение для изменения фазы волновой функции в зависимости от энергии E. Рассмотрим сначала область, где потенциал постоянен и равен V. В этом случае, если $E > V$, волновая функция имеет вид

$$\psi(x) = A_0 \sin[(x - x_0)\, p/\hbar]; \tag{25a}$$

здесь A_0 и x_0 — постоянные, а импульс

$$p = \sqrt{2m(E - V)}. \tag{25b}$$

Сравнивая (25a) и (24a), находим

$$f(x) = (x - x_0)\, (p/\hbar). \tag{25c}$$

При смещении вправо на расстояние dx изменение фазы оказывается равным

$$df = (p/\hbar)\, dx = \hbar^{-1} \sqrt{2m(E - V)}\, dx. \tag{25d}$$

Предположим, что выражение (25d) дает *приближенное* значение изменения фазы и в том случае, когда потенциал $V(x)$ не постоянен и зависит от координаты x. Такое приближение выполняется тем лучше, чем медленнее изменяется потенциал $V(x)$. В такого рода приближении *полное* изменение фазы между точками поворота x_1 и x_2 равно

$$\Delta f = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dx}\, dx \approx \hbar^{-1} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m[E - V(x)]}. \tag{25e}$$

Применим полученный результат к случаю $(n+1)$-го стационарного состояния с энергией $E = E_n$. Полное изменение фазы тоже приближенно равно $(n+\frac{1}{2})\pi$ [см. (24c)], и, приравнивая выражения (25e) и (24c), получаем

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m[E_n - V(x)]} \approx (n + 1/2)\, \pi\hbar. \tag{25f}$$

26. С помощью уравнения (25f) можно определить энергию E_n для $(n+1)$-го стационарного состояния. Прежде всего необходимо найти точки поворота x_1 и x_2 в зависимости от энергии E; решив для этого уравнение

$$V(x_1) = V(x_2) = E, \quad x_2 > x_1. \tag{26a}$$

Обозначим соответствующие решения через $x_1(E)$ и $x_2(E)$. Затем вычислим интеграл

$$g(E) = \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} dx \sqrt{2m[E - V(x)]}, \tag{26b}$$

который даст нам функцию $g(E)$. Наконец, чтобы получить энергию E_n, решим уравнение

$$g(E) = (n + \tfrac{1}{2})\pi\hbar, \tag{26c}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$

Итак, мы рассмотрели *приближенный* метод определения уровней энергии частицы в потенциальной яме, пример которой показан на рис. 23А. Он известен под названием *ВКБ-метода* [*]) и во многих случаях позволяет получить весьма точные результаты. Он вполне пригоден, если нам достаточно грубого определения уровней энергии. Рассмотренный метод основан на той же идее, что и приближение, использованное при выводе формулы (36b) гл. 7 для прозрачности потенциального барьера. В обоих случаях возникают интегралы одного типа.

Интересно отметить, что уравнение (25f), полученное нами на основе волновых представлений, идентично так называемым квантовым условиям Бора — Зоммерфельда в старой теории Бора. Таким образом, теперь можно понять, почему эта теория столь хорошо работает в некоторых случаях и терпит неудачу в других; уравнение (25f) не является строгим, оно приближенное.

---

*) По имени его авторов Вентцеля, Крамерса и Бриллюэна (см., например: *Kramers H. A.* Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung.— Zs. f. Phys., 1926, v. 39, p. 828).

27. Применим теперь наш приближенный метод к одной из наиболее важных задач о собственных значениях, а именно к задаче об уровнях энергии одномерного гармонического осциллятора. В данном случае потенциал

$$V(x) = (K/2)\,x^2, \tag{27a}$$

где K — «жесткость пружины». Если m — масса частицы, то круговая частота колебаний ω_0, согласно классической теории, равна

$$\omega_0 = \sqrt{K/m}. \tag{27b}$$

Для применения описанного в п. 26 приближенного метода необходимо начать с определения координат точек поворота. Они расположены симметрично по отношению к началу координат и мы обозначим их через $x_1 = -x_0$ и $x_2 = x_0$. В согласии с (26a), имеем

$$x_0(E) = \sqrt{2E/K}, \quad E = (K/2)\,x_0^2. \tag{27}$$

Теперь найдем определяемую формулой (26b) функцию $g(E)$:

$$g(E) = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m\left[E - V(x)\right]} = \int_{-x_0}^{+x_0} dx \sqrt{Km\left(x_0^2 - x^2\right)}. \tag{27c}$$

Переходя к новой переменной θ с помощью подстановки $x = x_0 \sin\theta$, получаем

$$g(E) = 2\sqrt{Km}\,x_0^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \cos^2\theta = \pi E \sqrt{m/K}, \tag{27e}$$

где x_0 исключено с помощью равенства (27c). Подставляя полученное выражение для $g(E)$ в (26c), получаем для энергии E_n $(n+1)$-го стационарного состояния гармонического осциллятора весьма простое выражение:

$$E_n = (n + 1/2)\,\hbar\omega_0; \tag{27f}$$

здесь $n = 0, 1, 2, \ldots$ — любое целое неотрицательное число.

28. Точное решение уравнения Шредингера (4b) дает в случае гармонического осциллятора, т. е. для потенциала $V(x)$, определяемого формулой (27a), *такой же* результат (27f).

В этой книге нас не интересуют точные решения уравнения Шредингера, и мы не будем искать точного решения задачи о гармоническом осцилляторе. Благодаря замечательной случайности наш приближенный метод дает совершенно точный результат.

На рис. 28A показаны схема уровней (слева) и потенциальная функция (справа) гармонического осциллятора. Мы видим (это следует из формулы (27f)), что интервал энергий между смежными уровнями остается постоянным. (Это свойство уровней называется *эквидистантностью*.) На рис. 28A за нулевой уровень энергии выбрано дно потенциальной ямы. Разумеется, такой выбор произволен.

Если осциллирующая частица обладает зарядом, то следует ожидать радиационных переходов между различными уровнями. Таким образом, если принять во внимание процессы излучения, уровни энергии для $n > 0$ перестают быть совершенно стабильными. Можно показать, что для *электрических дипольных переходов* правило отбора заключается в том, что квантовое число n может меняться на единицу. Частота испущенных квантов совпадает с классическим значением ω_0 для *любых* переходов такого рода. Такой же результат следует и из классической теории.

Рис. 28A. Пять нижних уровней энергии гармонического осциллятора. Потенциальная яма, изображенная здесь, такова, что уровни равны $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega_0$, где ω_0 — классическая частота. Метод ВКБ дает эти же результаты, что и точная теория.

29. Теория гармонического осциллятора имеет в физике весьма большое значение, потому что уравнения движения многих, внешне непохожих физических систем формально эквивалентны уравнениям движения системы гармонических осцилляторов, очень слабо взаимодействующих друг с другом. В первом приближении, когда взаимодействием между осцилляторами пренебрегают, квантовая теория таких систем математически эквивалентна весьма простой теории для системы совершенно независимых гармонических осцилляторов. Последняя система допускает весьма простой анализ, так как каждый осциллятор ведет себя так, как если бы остальных осцилляторов не было. Очевидно, что, если мы можем описать поведение *одного* из них, мы можем описать и поведение любого из них.

В качестве примеров таких систем укажем на электромагнитное поле, на упругое колеблющееся твердое тело и на различные квантовые поля. Отметим также, что все молекулы имеют колебательные степени свободы, свойства которых с хорошим приближением описываются теорией гармонического осциллятора. Выражаясь с большей общностью, можно сказать, что теория гармонического осциллятора применима к системам, которые удовлетворяют *линейным* или *приближенно линейным* уравнениям движения.

30. На рис. 30A показано, что колебания реальной молекулы, а именно молекулы водорода, имеют *приближенно* гармонический характер. В молекуле водорода оба протона могут колебаться друг относительно друг. Такие колебания можно объяснить с помощью некоторого эффективного потенциала взаимодействия, показанного на рис. 30A, где кривая дает зависимость потенциальной энергии системы от расстояния между обоими протонами молекулы водорода. Существование и форма такого эффективного потенциала хорошо объясняются теорией, и ниже мы рассмотрим это объяснение. Для изучения колебательных состояний молекулы H_2 или любой

другой двухатомной молекулы мы должны, таким образом, прежде всего определить эффективный потенциал, после чего найти уровни энергии колебательных состояний, решив одномерное уравнение Шредингера для такого потенциала.

Как и раньше (рис. 28А), мы выбираем за начало отсчета энергии «дно» потенциальной ямы. Предположим, что если расстояние между протонами r стремится к нулю, то потенциал стремится к

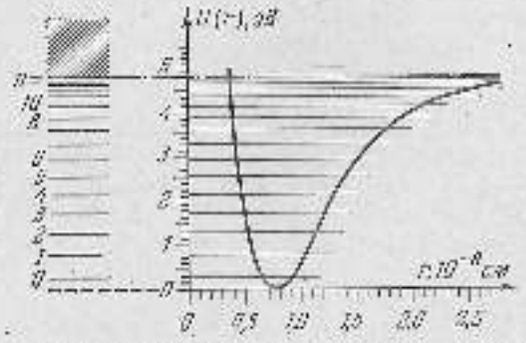


Рис. 31А. «Эффективный» потенциал взаимодействия между ядрами молекулы водорода (кривая) и соответствующая ему уровни энергии. Для вычисления энергии колебательных уровней молекулы можно пользоваться гармоническим осциллятором. Обратите внимание, кривая потенциальной энергии уже не симметрична относительно своего минимума. Сходство с уровнями гармонического осциллятора (рис. 28А). По мере увеличения расстояния между ядрами потенциальная энергия стремится к постоянному значению, и поэтому спектрист область непрерывного спектра, соответствующая диссоциации. Энергия $D(e)$ отсчитана от нижнего уровня и имеет экспериментальную природу.

бесконечности. Известно, что при стремлении r к бесконечности потенциал стремится к постоянному значению 4,8 эВ (рис. 30А). При такой энергии молекула диссоциирует, и именно отсюда начинается область непрерывного спектра, как это показано на схеме уровней в левой части рисунка. Таким образом, потенциал двухатомной молекулы не совпадает с потенциалом гармонического осциллятора. Если, однако, не слишком удаляться от дна потенциальной ямы, то с достаточно хорошим приближением потенциальную кривую можно заменить параболой. Действительно, любая гладкая кривая с минимумом и исчезающей нулю второй производной в этом минимуме имеет вблизи от него хорошо известную параболическую форму. Поэтому можно ожидать, что при не слишком высоком возбуждении поведение системы будет *близко* к поведению гармонического осциллятора. Сравнив рис. 28А и 30А, мы обнаружим различие между точно гармоническим и приближенно гармоническим осцилляторами. На рис. 30А уровни энергии больше не эквидистантны. Они приблизительно эквидистантны лишь при малых возбуждениях, когда амплитуда колебаний невелика. Кроме того, у реальной молекулы имеется лишь *конечное* число колебательных состояний.

Энергия диссоциации молекулы представляет собой энергию, которую надо передать молекуле в ее основном состоянии, чтобы она диссоциировала. Из рис. 30А следует, что энергия диссоциации

молекулы водорода близка к 4,5 эВ; это — разность энергий между нижней границей непрерывного спектра и энергией основного состояния.

Когда молекула H_2 находится в основном состоянии, среднее расстояние между ядрами (протонами) близко к 0,75 Å. Волновая функция основного состояния концентрируется главным образом вблизи значений r, отвечающих минимуму потенциала.

31. Рассмотрим теперь смысл эффективного межъядерного потенциала. Это форма показана в правой части рис. 30А. К такому потенциалу приводит приближенная теория строения молекулы, известная под названием «приближение Борна — Оппенгеймера». Идея заключается в следующем. Так как ядра молекулы имеют массу, во много раз большую массы электронов, то скорость движения ядер в молекуле весьма мала по сравнению со скоростью электронов. В *первом* приближении *можно* считать, что ядра неподвижны и находятся на фиксированном расстоянии r друг от друга. Для конкретности рассмотрим молекулу H_2, но наши рассуждения применимы к любым молекулам. В таком приближении мы должны найти основное состояние двух электронов, находящихся в электростатическом поле обоих протонов. Предположим, что мы решили эту задачу для произвольного расстояния r. В таком случае нам известна функция $U(r)$, представляющая собой зависимость энергии основного состояния *системы* (включая электростатическую энергию отталкивания между двумя протонами) от расстояния r. Для очень малых r энергия $U(r)$ очень велика и положительна, так как электростатическая энергия отталкивания обоих протонов стремится к $+\infty$, когда расстояние r между ними стремится к нулю. Для очень больших r энергия $U(r)$ стремится к постоянному значению U_∞, которое представляет собой энергию основного состояния двух атомов водорода, разнесенных на бесконечно большое расстояние.

Таким образом, существует область значений r, для которых $U(r)<U_\infty$, как показано на рис. 30Б. Функция $U(r)$ имеет минимум в точке $r_1\approx0{,}75$ Å.

Наименьшее возможное значение энергии молекулы в предположении, что оба протона неподвижны, обозначено через $U(r_1)$. В качестве первого шага теория Борна — Оппенгеймера показывает, что это и есть энергия основного состояния молекулы.

32. Протоны, однако, движутся, и следующим шагом в приближении Борна — Оппенгеймера будет предположение, что это движение сводится к колебанию около «равновесного» положения r_0. Эффективная потенциальная энергия этих (медленных) колебаний (которые должны, конечно, описываться квантовомеханически) дается функцией $U(r)$, определенной на первом этапе рассматриваемого приближения.

Таким образом, функция $U(r)$ является эффективной потенциальной энергией для второго шага приближения Борна — Оппенгеймера, в котором учитываются колебания обоих протонов *друг относительно друга*. В рассматриваемой теории *дополнительным*

взаимодействием, определяющим строение молекулы, является электростатическое взаимодействие между четырьмя заряженными частицами молекулы водорода. Эффективный потенциал $U(r)$ возникает как следствие такого взаимодействия и описывает хорошо известные силы. Можно сказать, что за этим потенциалом скрываются электростатические силы. *Это важнейший элемент нашего рассуждения.*

33. Задача получения явного выражения для $U(r)$ лежит за пределами этой книги. Попробуем, однако, дать качественное объяснение тому, что потенциал $U(r)$ может иметь минимум. Для этого

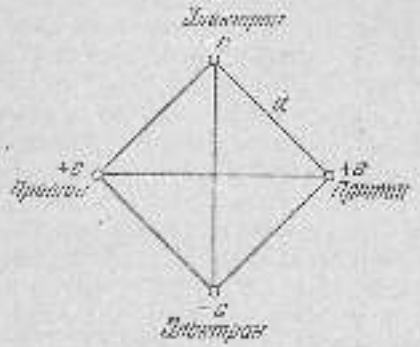


Рис. 33А. При $r=a$, потенциальная энергия системы имеет минимум. Потенциальная энергия двух электронов, расположенных на данном расстоянии a друг от друга, равна e^2/a. Потенциальная энергия расстояния между электроном и протоном та же, что и в атоме водорода, и может быть, что она образуется за счет «перекрывания» двух облаков. Этот рисунок показывает, что между двумя атомами водорода могут возникнуть силы притяжения, но на языке теории не случайно, а вследствие электрического взаимодействия отдельных частиц.

следует убедиться, что существует такая конфигурация *ядер* в молекуле, для которой электростатическая энергия меньше (т. е. выражается большим отрицательным числом), чем для двух находящихся на бесконечно большом расстоянии атомов водорода. Это необходимое, хотя и недостаточное условие молекулярной связи.

Обратимся к показанной на рис. 33А конфигурации. Здесь оба электрона и оба протона расположены в вершинах квадрата со стороной a. Линии символизируют электростатическое взаимодействие между шестью парами частиц. Для такой особой конфигурации полная электростатическая потенциальная энергия

$$E'_{\text{пот}} = \sqrt{2}\frac{e^2}{a} - 4\frac{e^2}{a} = (\sqrt{2}-4)\frac{e^2}{a}. \qquad (33a)$$

Ее следует сравнить с полной потенциальной энергией $E''_{\text{пот}}$ двух атомов водорода, удаленных на большое расстояние друг от друга. Эта потенциальная энергия равна

$$E''_{\text{пот}} = -2e^2/a_1, \qquad (33b)$$

где a_1 — боровский радиус. В частном случае $a=a_1$ разность энергий $E'_{\text{пот}}$ и $E''_{\text{пот}}$ отрицательна:

$$\Delta E_{\text{пот}} = E'_{\text{пот}} - E''_{\text{пот}} = (e^2/a_1)(\sqrt{2}-2) \approx -1{,}2\,R_\infty; \qquad (33c)$$

здесь R_∞ — постоянная Ридберга, $R_\infty = e^2/2a_1 \approx 13{,}6$ эВ.

Итак, мы показали, что существует некоторая конкретная конфигурация, для которой величина $\Delta E_{\text{пот}}$ отрицательна. Очевидно, что эта величина останется отрицательной и для «соседних» конфигураций: частицы не обязательно должны быть расположены точно в вершинах квадрата.

34. *Полная* энергия молекулы водорода является суммой ее потенциальной и кинетической энергий. Вспомним теперь наши рассуждения в п. 14 гл. 6 в духе принципа неопределенностей о строении атома водорода. Мы пришли к выводу, что электрону в молекуле водорода должно быть доступно значительное пространство, в противном случае, как следует из принципа неопределенностей, его кинетическая энергия будет слишком велика. Рассматривая атом водорода, мы пришли к выводу, что если неопределенность в положении электрона равна a_1 (это означает, что электрон «занимает» область с линейными размерами a_1), то его кинетическая энергия *будет* порядка R_∞. Те же рассуждения применимы и к молекуле водорода: если ее кинетическая энергия имеет такой же порядок величины, электроны должны занимать область, размер которой близок к a_1.

Чтобы продвинуться в наших рассуждениях дальше, следует ограничить положение электронов различными возможными областями и вычислить для каждой из них потенциальную и кинетическую энергии, принимая при этом во внимание принцип неопределенностей. Это не очень легко, и мы не будем пытаться это проделать. Лучший способ решения этой задачи — подбор подходящей волновой функции, описывающей оба электрона, и последующее вычисление на основе теории Шредингера энергии, соответствующей данной волновой функции. Мы не рассматривали волновой функции двух частиц и не подготовлены поэтому к решению подобных задач *).

В свете сказанного читатель подготовлен, вероятно, к тому, чтобы поверить в существование минимума полной энергии $U(r)$ при некотором значении расстояния *между* атомами r. Как и в атоме водорода, такой минимум возникает в результате компромисса: электроны должны занимать достаточно большую часть пространства, чтобы кинетическая энергия была мала, и достаточно малую, чтобы потенциальная энергия имела подходящее значение. Грубо говоря, полная потенциальная энергия *отрицательна* и в первом приближении обратно пропорциональна «размеру» молекулы, тогда как кинетическая энергия *положительна* и обратно пропорциональна *квадрату* размера. Для некоторого оптимального размера сумма обеих энергий имеет минимум.

35. Теперь попытаемся оценить «типичную» частоту колебаний в двухатомной молекуле. Вблизи минимума (при $r=r_0$) кривую потенциальной энергии можно заменить параболой. Таким образом,

*) Первая удачная теория молекулярной связи была дана в работе: *Heitler W., London F.* Wechselwirkung neutraler Atome und homöopolare Bindung nach der Quantenmechanik.— Zs. f. Phys., 1927, v. 44, p. 455.

потенциал

$$U(r) \sim \frac{b-a\delta^2}{a^2} R_m - U(r_1). \qquad (35a)$$

Это разумное предположение. При $r=r_1$ правая часть выражения дает первое слагаемое потенциала $U(r_1)$. Для $|r-r_1|=a_1$ потенциал больше чем $U(r_1)$ на величину R_m. Размер молекулы близок к a_1, а энергия связи — к R_m; мы предполагаем, что потенциальная кривая примерно имеет такую форму.

Правая часть выражения (35a) представляет собой потенциал гармонического осциллятора. «Жесткость пружины» K такого осциллятора

$$K \sim 2R_m a_1^2 = a^2 b a^2 / a_0^2. \qquad (35b)$$

Предположим, что эффективная масса осциллятора равна M. Тогда получаем следующее выражение для частоты колебаний ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \sim \alpha^2 \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{M}}, \qquad (35c)$$

где использовано выражение $a_0 = a^{-1}\hbar/mc$ для борровского радиуса. Подчеркиваем, что оценка (35c) дает лишь порядок величины.

В гл. 2 мы рассматривали характеристики для атомной физики величины и показали, что величина

$$\omega_e = \alpha^2 mc^2/\hbar \qquad (35d)$$

имеет смысл атомной частоты для электронных переходов в атомах или молекулах, т. е. для таких переходов, при которых происходит изменение электронной конфигурации. Теперь можно переписать (35c) в виде

$$\omega_0 \sim \omega_e \sqrt{m/M}. \qquad (35e)$$

Для всех молекул величина M имеет порядок массы ядра, тогда как m — масса электрона. «Типичные» электронные частоты ω_e лежат в видимой области электромагнитного спектра. Мы видим, что «типичные» частоты колебаний ядер в молекуле ω_0 меньше чем частота ω_e на множитель $\sqrt{m/M}$, т. е. они приходятся на инфракрасную часть спектра. Это предсказание подтверждается опытом.

Таблица 35. Частоты колебаний некоторых двухатомных молекул

Молекула	Частота ω_0	Волновое число, $см^{-1}$	Молекула	Частота, Γ_u	Волновое число, $см^{-1}$
C_l	$4,921\cdot10^{13}$	1641,35	CO	$6,506\cdot10^{13}$	2170,21
N_2	$7,074\cdot10^{13}$	2359,61	HBr	$0,805\cdot10^{14}$	268,4
O_2	$4,379\cdot10^{13}$	1460,20	S_2	$2,179\cdot10^{13}$	727,68
NO	$5,736\cdot10^{13}$	1904,03			

36. Найдите, чему равна эффективная масса M двухатомной молекулы, если массы ядер равны M_1 и M_2. Оба ядра совершают колебания вдоль отталкивания друг от друга так, что их центр масс лежит на линии, соединяющей ядра. Обозначим через r расстояние между ядрами, а через r_1 и r_2 — расстояния от центра масс первого и второго ядра соответственно, как показано на рис. 36А. Кинетическая энергия такой системы

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{r}_2^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \dot{r}^2. \qquad (36a)$$

Точкой обозначается производная по времени. Потенциальная энергия нашего осциллятора определена выражением (35a) и зависит от r, а кинетическая энергия, определенная (36a), зависит от $\dot{r}$. Эффективной массой M осциллятора является коэффициент при $\dot{r}^2/2$, т. е.

$$M = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}. \qquad (36b)$$

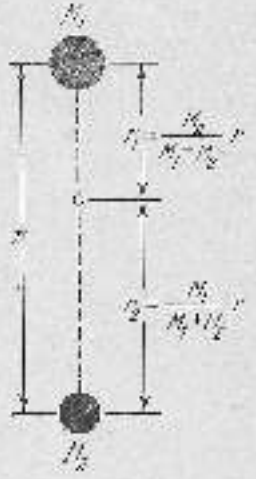


Рис. 36А. Схема двухатомной молекулы. Массы ядер равны M_1 и M_2, частица пружина — горизонтальная прямая, соединяющая ядра, показан центр масс системы. При «собственных» колебаниях ядра колеблются вдоль линии, соединяющей ядра, в противоположных друг другу направлениях

Именно это выражение для M следует подставить в (35c). Величина M носит название *приведенной массы* системы из двух частиц.

37. Поскольку мы не располагаем точным выражением для жесткости пружины K, которая была лишь *оценена* в п. 36, мы не в состоянии найти точное значение частоты колебаний двухатомной молекулы. Можно, однако, дать некоторую относительную величину *изотопического эффекта*. Рассмотрим снова молекулу, у которой массы ядер равны M_1 и M_2, а частота колебаний ω_0', а затем химически идентичную ей молекулу, состоящую из изотопов тех же ядер с массами M_1' и M_2' соответственно. Пусть частота колебаний этой молекулы будет ω_0''. В рамках приближения Борна — Оппенгеймера обе молекулы имеют одну и ту же жесткость пружины K, ибо при определении эффективного потенциала $U(r)$ мы не учитывали движение ядер. Таким образом, частоты ω_0' и ω_0'' связаны соотношением

$$\frac{\omega_0'}{\omega_0''} = \sqrt{\frac{M_1' M_2' (M_1 + M_2)}{M_1 M_2 (M_1' + M_2')}}. \qquad (37a)$$

Это предсказание с большой точностью подтверждается на опыте, и это увеличивает нашу уверенность в правильности рассмотрения выше весьма простых идей.

38. Перейдем теперь к *вращательным возбуждениям* молекулы. У каждой молекулы имеется система дискретных состояний вращения молекулы как целого вокруг некоторой оси. Спектр энергий

разности энергий, связанных с возбуждением вращательных состояний.

Для простоты обратимся к двухатомной молекуле, схематически показанной на рис. 38А. Рассмотрим некоторое вращательное состояние, когда молекула вращается с угловой частотой ω_0 вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной к оси симметрии, т. е. линии, соединяющей оба ядра. Пренебрежем колебаниями, т. е. будем считать, что молекула подобна жесткой гантели. В обозначениях рис. 38А скорости обоих ядер равны $\omega_0 r_1$ и $\omega_0 r_2$ соответственно. Кинетическая энергия вращательного движения равна

$$T_r = \frac{1}{2} M_1 (\omega_0 r_1)^2 + \frac{1}{2} M_2 (\omega_0 r_2)^2. \qquad (38a)$$

Выражая r_1 и r_2, как это показано на рис. 38А, через межъядерное расстояние r и массы M_1 и M_2, получаем

$$T_r = \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (\omega_0 r)^2 = \frac{1}{2} M (\omega_0 r)^2, \qquad (38b)$$

где M — приведенная масса молекулы, определенная выражением (36b).

Момент инерции I молекулы по отношению к оси вращения равен

$$I = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 = M r^2. \qquad (38c)$$

Найдем снова момент импульса молекулы по отношению к оси вращения:

$$J = M_1 r_1^2 \omega_0 + M_2 r_2^2 \omega_0 = M r^2 \omega_0 = I \omega_0. \qquad (38d)$$

Теперь, исключив круговую частоту ω_0 из выражения (38b) с помощью (38d), можно записать кинетическую энергию вращения молекулы в виде

$$T_r = J^2/2I. \qquad (38e)$$

39. Между прочим, это моменты импульса для вращения молекулы должны быть порядка $\hbar$. Поэтому типичные энергии вращательного возбуждения молекулы по порядку величины равны

$$T_r \sim \hbar^2/2I. \qquad (39a)$$

Таблица 39А. Постоянная B_e для некоторых двухатомных молекул

Молекула	B_e, МГц	r, Å	Молекула	B_e, МГц	r, Å
HF	10 230	1,76	HCl	317 000	1,13
HCl	3 800	2,79	OH	465 000	0,97
HBr	2 430	2,64	NO	51 100	1,15

Постоянная B (см. 38А) выражена через соответствующую энергию $B_e = \hbar/4\pi^2 I$ в мегагерцах. B_e служит для определения расстояния между ядрами r.

Введя соответствующую частоту ω_r, можно написать (39a) в виде

$$\omega_r = T_r/\hbar \sim \hbar/2I. \qquad (39b)$$

Согласно (38d) момент импульса $J = I\omega_0$, а поскольку мы предположили, что $J \sim \hbar$, то $\omega_0 \sim \hbar/I$. Таким образом, частота ω_0 и характеристическая частота вращения ω_r, определяемая из (39b), оказались одного порядка. Этого и следовало ожидать, исходя из классической модели.

Полная квантовомеханическая теория молекулы в виде гантели приводит к весьма простой формуле для уровней энергии. Каждое вращательное состояние характеризуется неотрицательным целым значением *квантового числа* j, *определяющего момент импульса*. Энергия этого состояния равна

$$E_j = j(j+1)\hbar^2/2I, \qquad (39c)$$

где $j = 0, 1, 2, \ldots$ Хотя мы не даем вывода этой важной формулы, все же целесообразно привести ее здесь.

40. Расстояние между ядрами в любой молекуле имеет порядок боровского радиуса a_0. Поэтому в качестве оценки момента инерции следует взять $I \sim Ma_0^2$. Подставляя эту оценку в (39b), имеем

$$\omega_r \sim \hbar/2Ma_0^2. \qquad (40a)$$

Поучительно выразить эту оценку через характеристическую частоту электронных переходов $\omega_e = \alpha^2 mc^2/\hbar$. Так как боровский радиус $a_0 = \alpha^{-1}\hbar/mc$, то (40a) принимает вид

$$\omega_r \sim \omega_e m/M. \qquad (40b)$$

(В такой оценке численный множитель, равный 2, не имеет значения.)

Сравним теперь характеристические частоты вращений и колебаний. Сравнивая выражения (35c) и (40b), получаем

$$\omega_e : \omega_0 : \omega_r \sim 1 : (\sqrt{m/M}) : (m/M); \qquad (40c)$$

здесь ω_e — «типичная» частота электронных переходов; ω_0 и ω_r — «типичные» частоты колебательных и вращательных переходов соответственно. Мы видим, что частоты вращательных переходов гораздо меньше как электронных, так и колебательных частот. Они лежат в далекой инфракрасной (микроволновой) области.

41. Теперь можно объяснить природу очень сложных оптических *колебательно-вращательных спектров*, испускаемых молекулами. Основная идея

Рис. 39А. Схема первых нескольких вращательных уровней двухатомной молекулы. В предположении, что все ядра считать имеющими «нулевой спин». Согласно формуле (39c), число E_j состояний с моментом импульса j равно $E_j = \frac{1}{2}(2j+1)$, т. е. $B = \hbar^2/2I$ — константа, характеризующая вращение молекулы. Справа показаны электрические дипольные переходы, при которых j меняется на единицу.

заключается в том, что каждая молекула имеет три различных типа возбуждения: *электронное*, *колебательное* и *вращательное*. Им соответствуют характеристические частоты ω_e, ω_v и ω_r.

Сильно упрощая ситуацию, можно сказать, что мы имеем три системы энергий соответственно тем различным типам возбуждений. Энергия стационарного состояния молекулы является поэтому

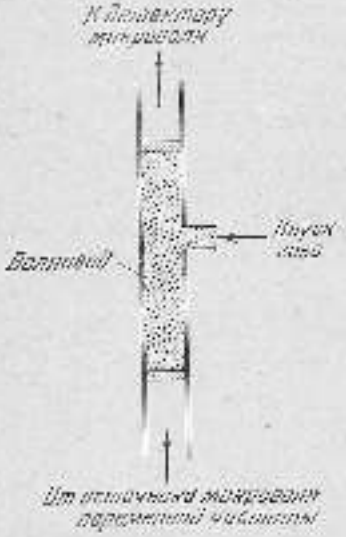


Рис. 41а. Упрощенная схема устройства для микроволновой спектроскопии. Газ из исследуемых молекул заполняет стеклянный сосуд. Микроволновое излучение проходит через волновод и помещенный на его выходе детектор измеряет интенсивность пропущенного света. При резонансных частотах молекул газ поглощает излучение, и интенсивность зависит от частоты определяет положение резонансных частот. Под «микроволновой областью» спектра понимают излучение длиной волны от $\lambda=1$ см до $\lambda=1$ м

суммой трех энергий — электронной, колебательной и вращательной. Совершая переходы между различными возможными уровнями энергии, молекула излучает или поглощает фотоны. При оптическом переходе меняется электронное состояние (конфигурация) молекулы, и обычно при этом происходит также изменение ее вращательного и колебательного состояний. Поэтому линии возможных частот оказываются густыми и спектр представляет собой полосы, состоящие из крайне большого числа очень близких линий (см., например, рис. 6В гл. 3).

Колебательные и вращательные спектры можно изучать отдельно, поскольку переходы, при которых *электронное* состояние молекулы не меняется. После второй мировой войны были развиты новые методы наблюдения таких переходов, позволившие создать *микроволновую спектроскопию* — новую ветвь спектроскопии, чрезвычайно расширившую наше понимание строения атомов и молекул.

Водородоподобные системы

42. Обратимся теперь к трехмерной задаче определения уровней энергии атома водорода. Мы ее не решали, но рассмотрение некоторых ее аспектов будет весьма поучительно.

Рассмотрим более общую задачу. Пусть частица с массой m и зарядом $-e$ движется в электростатическом поле, образованном

ядром с зарядом $+Ze$. Предположим, что ядро неподвижно и находится в начале координат. В действительности это возможно лишь при бесконечно большой массе ядра. Однако если отношение массы M ядра к массе m «электрона» очень велико, наше предположение годится в качестве первого приближения.

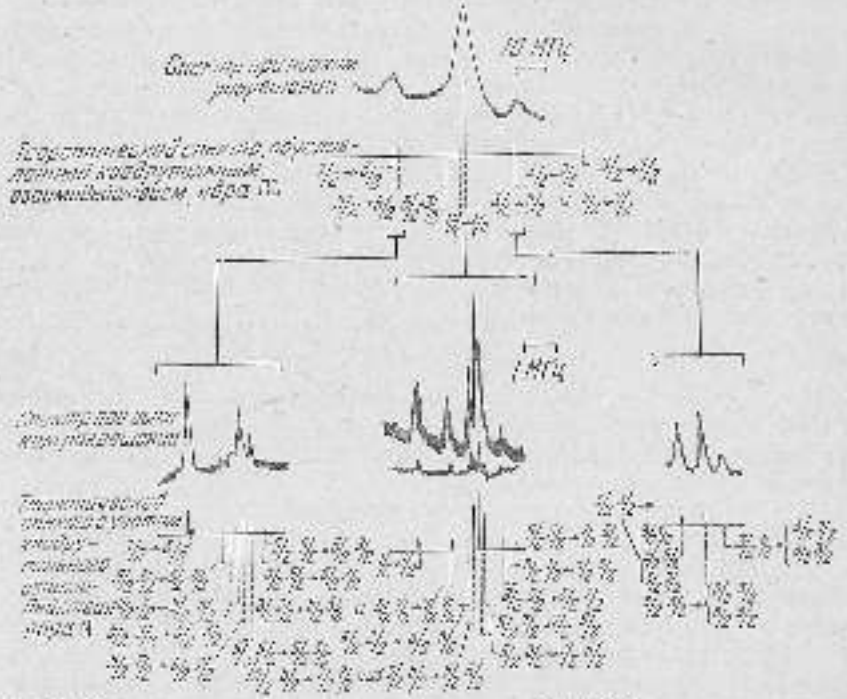


Рис. 41б. Микроволновый спектр молекулы $OCS^{32}C^{14}K$ при низких разрешениях, на которых видны переходы из состояния $J=1$ в состояние $J=2$. Молекула была получена испарением твердого калия ксантогената. Она состоит из сосредоточенных около расположенных ядер. Центром центрального пика является 24 360 МГц. Линии сверхтонкого расщепления молекулу ^{39}K — появляются в микроволновом излучении с забавными названиями. Из них получают хороших примеров тонкого разрешения, которого можно достичь в микроволновой спектроскопии. Образец линии для сравнения согласно с экспериментом: Таунс Ч., Шавлов А. Радиоспектроскопия. М.: ИЛ, 1959. с. 564).

Не зависящее от времени уравнение Шредингера нашей задачи имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x)-\frac{e^2Z}{x}\psi(x)=E\psi(x), \qquad (42a)$$

где $x=|x|$.

43. Введем новую независимую переменную ρ:

$$x=\frac{\hbar}{mcaZ}\rho, \text{ где } a=\frac{e^2}{\hbar c}, \qquad (43a)$$

новый параметр энергии λ:

$$E=(mZ)^2mc^2\lambda, \qquad (43b)$$

и волновую функцию $f(y)$:

$$\varphi(x) = f(y). \tag{43c}$$

Перепишем волновое уравнение в новых переменных:

$$-\frac{1}{2}\nabla_0^2 f(y) - \frac{1}{a} f(y) = \lambda f(y), \tag{43d}$$

где ∇_0^2 — дифференциальный оператор Лапласа для переменной y.

Уравнение (43d) представляет собой «безразмерную форму» уравнения Шредингера (42a). Оно безразмерно в смысле отсутствия физических констант m, e, $\hbar$, c и Z. Решив уравнение (43d), можно перейти к старым переменным с помощью равенств (43a) — (43c). Уравнения (43d) и (42a), очевидно, эквивалентны.

44. Итак, перед нами чисто математическая задача решения уравнения (43d). Мы не станем решать его, а лишь приведем некоторые результаты решения *):

1) Уравнение Шредингера (43d) имеет квадратично интегрируемое решение лишь в том случае, если параметр

$$\lambda_n = -1/2n^2, \tag{44a}$$

здесь n — любое положительное целое число. Оно называется *главным квантовым числом* водородоподобного атома. (Не следует смешивать его с квантовым числом n, которое мы ввели для квантовомеханического осциллятора.)

2) Непрерывный спектр начинается при $\lambda = 0$. Отсюда следует согласно (43b), что ионизация атома происходит при энергии $E = 0$.

3) Для любого n при $\lambda = \lambda_n$ дифференциальное уравнение (43d) имеет n^2 линейно независимых решений. Их можно классифицировать с помощью квантового числа l, которое характеризует пространственную симметрию волновой функции. Например, все решения, для которых $l = 0$, сферически симметричны. Квантовое число l при данном n может принимать значения от нуля до $n-1$, и для каждой пары квантовых чисел (n, l) уравнение имеет $2l+1$ линейно независимых решений, отвечающих различной *ориентации* атома. Физическая интерпретация квантового числа l заключается в том, что оно измеряет момент импульса атома. Поэтому его называют *квантовым числом орбитального момента импульса* **).

45. Из приведенных выше математических свойств решения уравнения (43d) следует, что возможные значения энергии атома (в неионизованном состоянии) равны

$$E_n = -\frac{1}{2}(\alpha Z)^2 mc^2 \frac{1}{n^2}. \tag{45a}$$

Чтобы удовлетворить любознательность читателя, приведем в явном виде решение уравнения Шредингера (42a) для основного состояния. В этом частном случае $n = 1$ и соответственно $l = 0$, что означает сферическую симметрию волновой функции, которая имеет вид

$$\psi_{10}(x) = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a_0^3}} \exp\left(-\frac{xZ}{a_0}\right), \tag{45b}$$

где $a_0 = \hbar/\alpha mc$. Читатель может убедиться, что волновая функция

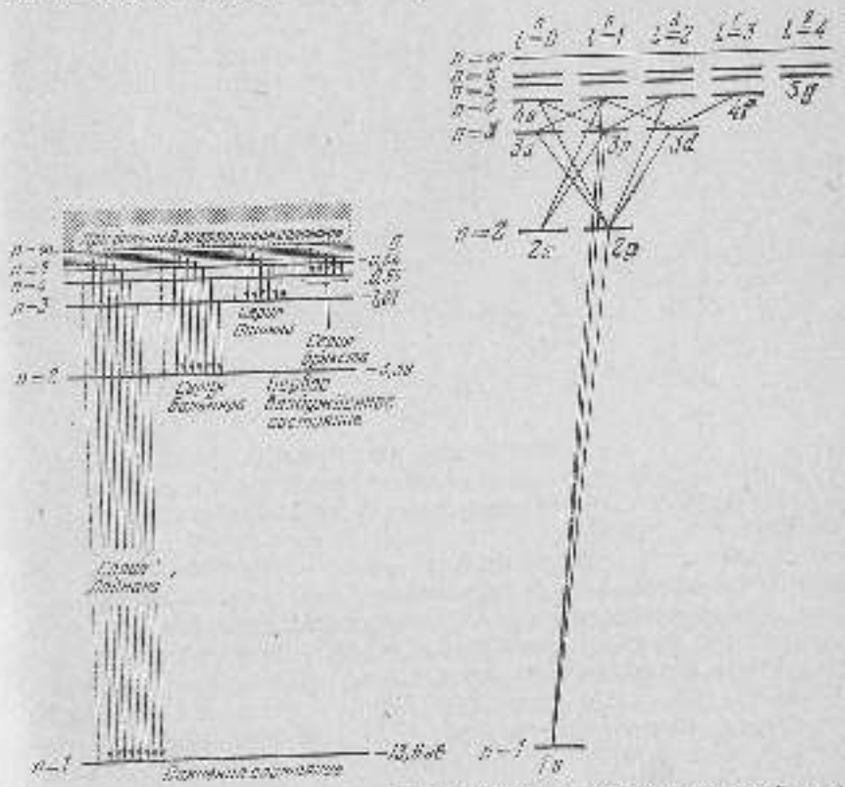


Рис. 46А. Схема уровней атома водорода. С очень хорошим приближением энергия E_n уровня с главным квантовым числом n равна $E_n = -\mathcal{R}_H/n^2$, где $\mathcal{R}_H = (1 + m/M_p)^{-1} \mathcal{R}_\infty = 15{,}9970$ эВ. Вертикальными линиями показаны возможные электрические дипольные переходы. Эти переходы группируются в серии, названные именами известных спектроскопистов. Все переходы серии Лаймана лежат в ультрафиолетовой области; серия Бальмера — в красной области спектра. Пашена лежит в ультрафиолетовой области. Непрерывный спектр водорода, на котором видны некоторые линии серии Бальмера

Рис. 46Б. Схема уровней водородоподобного атома. Каждая колонка уровней означает различным значениям квантового числа l орбитального момента импульса. Показаны все электрические дипольные переходы для значений главного квантового числа $n \leqslant 4$. В этих переходах l может меняться на единицу. Заметим, что из состояния $2s$ электрический дипольный переход невозможен: это метастабильное состояние. Сравните показанную схему уровней со схемой уровней для щелочных металлов (рис. 28А и 29А гл. 34). Вы обнаружите много общего

$\psi_{10}(x)$ удовлетворяет волновому уравнению (42a) и что она нормирована к единице. Последнее означает, что взятый по всему пространству интеграл от квадрата волновой функции равен единице,

$$\int \psi_{10}^2(x)\, dV = 1.$$

46. До сих пор наши рассуждения опирались на предположение, что ядро неподвижно. Нетрудно обобщить наши рассуждения на

*) Решение задачи атома водорода приведено во многих курсах квантовой механики. Впервые оно было дано Шредингером в первой статье из серии статей «Quantisierung als Eigenwertproblem» (Ann. d. Phys., 1926, v. 79, p. 361).

**) См. для сравнения обсуждение в п. 30, 31 и 34 гл. 3.

случай движущегося ядра. Пусть M — масса ядра, а m — масса электрона. Приведенная масса μ системы ядро — электрон равна

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = m\left(1+\frac{m}{M}\right)^{-1} \qquad (46a)$$

в соответствии с нашими рассуждениями в п. 36.

Задача о движении двух частиц в потенциальном поле, зависящем лишь от расстояния между ними, полностью эквивалентна задаче о движении одиночной (фиктивной) частицы с массой, равной приведенной массе системы, в исходном потенциальном поле, источник которого *неподвижен*. Чтобы принять во внимание движение ядра, нам следует попросту заменить во всех формулах массу m на приведенную массу μ. При этом энергии уровней будут равны

$$E_n = -\frac{1}{2}(\alpha Z)^2 \mu c^2 \frac{1}{n^2}. \qquad (46b)$$

Эту формулу можно записать иначе:

$$E_n = -\frac{\mu}{m} Z^2 R_\infty \frac{1}{n^2}, \qquad (46c)$$

где

$$R_\infty = \alpha^2 mc^2/2 \approx 13{,}5 \text{ эВ} \qquad (46d)$$

— постоянная Ридберга.

Следует сразу же заметить, что для атома водорода (для которого $m/M \approx 1/1836$) приведенная масса очень близка к массе электрона. Из формулы (46a) следует, что относительная разность обеих масс близка к $1/2000$.

Заметим также, что приведенная масса атома дейтерия не совпадает с приведенной массой атома водорода. Поэтому спектр дейтерия несколько отличается от спектра водорода (см. задачу 7 гл. 2), и это различие легко наблюдается спектроскопически.

47. Наша формула (46c) дает уровни энергии любой «водородоподобной системы». Под этим названием мы понимаем систему из двух частиц противоположного знака заряда, связанных лишь силами электростатического притяжения. Полагая в (46c) $Z=2$, получим уровни энергии однократно ионизованного гелия. При $Z=3$ получаем из этой формулы уровни энергии дважды ионизованного лития. Соответствующие значения приведенной массы (которые очень близки к массе электрона) следуют из формулы (46a), если вместо M подставить массу ядра гелия или лития.

«Атомы», в которых электрон заменен мюоном (μ-мезоном), известны под названием *мюонных атомов*. Они образуются, когда мюоны, замедляющиеся в веществе, захватываются кулоновским полем ядер. Заметим сначала, что боровский радиус «атома» *обратно* пропорционален массе «электрона». Это означает, что размеры мюонного атома приблизительно в 200 раз меньше размеров обычного атома (масса мюона близка к 200 электронным массам). Предположим теперь, что мюон был захвачен, например, атомом алюминия. Испуская электромагнитное излучение, такая система быстро перейдет в состояние, при котором мюон окажется очень близко от ядра

алюминия: волновой пакет мюона будет расположен гораздо ближе к ядру, чем волновой пакет электрона. Таким образом, мюон и ядро алюминия образуют водородоподобную систему — мюонный атом, окруженный «облаком» электронов.

Описанная схема образования мюонных атомов экспериментально подтверждена наблюдением электромагнитного излучения, испускаемого такими «атомами» *). Это излучение принадлежит рентгеновской части спектра, в чем можно убедиться, рассмотрев формулу (46b): приведенная масса μ в данном случае близка к массе мюона.

Одно из подзаголовков гл. 5 гласит: «Существует лишь одна постоянная Планка». Заметим, что экспериментальное подтверждение предсказаний теории об уровнях энергии мюонных атомов является прекрасным доказательством универсальности формулы де Бройля.

48. Подведем итоги нашему рассмотрению водородоподобных атомов». Такие системы состоят из двух частиц. Одна из них имеет заряд $-e$, другая $+Ze$. Не решая уравнения Шредингера для системы из двух частиц, описывающего поведение таких атомов, мы пришли к выводу, что их дискретные уровни энергии даются формулой

$$E_n = -\frac{1}{2}(\alpha Z)^2 \mu c^2 \lambda_n, \qquad (48a)$$

где μ — приведенная масса; α — постоянная тонкой структуры; безразмерное число λ_n — собственное значение безразмерного уравнения Шредингера (43c) для одной частицы. Нахождение числа λ_n представляет собой чисто математическую задачу, решение которой приведено во многих курсах. Это число равно $\lambda_n = -1/2n^2$.

Таким образом, зная спектр водорода, мы знаем также спектры дейтерия, однократно ионизованного гелия, дважды ионизованного лития и спектры всех подобных атомов. Это возможно благодаря тому, что нам известна зависимость уровней энергии от соответствующих физических параметров: заряда ядра Z и массы обеих частиц. Наши рассуждения еще раз убеждают в силе простых соображений размерности.

Дополнительная тема: переменные положения и импульса в теории Шредингера **)

49. Попытаемся теперь найти математические объекты, которые в простой теории Шредингера играют роль координаты и импульса в классической теории.

Пусть $\psi(x, t)$ — шредингеровская волновая функция, нормированная к единице. В этом и следующем пунктах мы будем рассматривать волновые функции в данный, фиксированный момент времени. Поэтому будем игнорировать переменную t и для крат-

*) *Fitch V. L., Rainwater J.* Studies of X rays from Mu-Mesonic Atoms.— Phys. Rev., 1953, v. 92, p. 789.

**) При первом чтении может пропустить.

кета будем писать $\psi(x)$. Величина $|\psi(x)|^2$ дает плотность вероятности, определяющую распределение вероятности для переменной x, поэтому средние значения x и x^2 равны

$$\Delta v(x)=\bar{x}=\langle\psi|x|\psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,x|\psi(x)|^2, \tag{40a}$$

$$\Delta v(x^2)=\overline{x^2}=\langle\psi|x^2|\psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,x^2|\psi(x)|^2. \tag{40b}$$

Обозначение $\langle\psi|x|\psi\rangle$ эквивалентно выражению *ожидаемое значение* x для состояния ψ. Такие обозначения обычны для квантовой механики.

Если $\bar{x}$ — среднее значение переменной x, то за меру *неопределенности* x можно принять корень из среднего значения квадрата отклонения от $\bar{x}$:

$$\Delta x=\sqrt{\Delta v(x-\bar{x})^2}, \tag{40c}$$

или

$$(\Delta x)^2=\int_{-\infty}^{\infty}dx(x-\bar{x})^2|\psi(x)|^2=\Delta v(x^2)-2\bar{x}\,\Delta v(x)+\bar{x}^2. \tag{40d}$$

Из последнего равенства следует

$$(\Delta x)^2=\Delta v[(x-\bar{x})^2]=\Delta v(x^2)-[\Delta v(x)]^2. \tag{40e}$$

Заметим, что чем больше волновая функция концентрируется около среднего значения $\bar{x}$, тем меньше Δx. Состояние, для которого положение *точно* известно, т. е. состояние с $\Delta x=0$, физически неосуществимо.

Среднее значение любой функции от x вычисляется по аналогии с формулами (39a) и (39b), которые дают средние значения x и x^2. В частности, среднее значение потенциальной энергии равно

$$\Delta v(E_{\text{пот}})=\Delta v(V(x))=\langle\psi|V(x)|\psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,V(x)\,|\psi(x)|^2. \tag{40f}$$

50. Постараемся тщательно обдумать значение сказанного. Вероятностная интерпретация предгейзеровской волновой функции привела нас к понятию о *среднем* значении координаты частицы, определенном выражением (40a). Интеграл в правой части этого выражения позволяет найти численное значение *среднего квантовомеханической переменной* x, если известна волновая функция, описывающая состояние частицы. По сему равно численное значение *самой* квантовомеханической переменной x? Ответ заключается в том, что квантовомеханическая переменная не может быть выражена *численным* значением: *она определяется лишь той операцией, которую нужно совершить над волновой функцией, чтобы получить среднее значение.*

Переменная координаты x является в теории Шредингера особенно простой переменной. В этом случае значение основного принципа, заключающегося в том, что квантовомеханическая переменная определяется через свое среднее (для всех состояний), оказывается несколько замаскированным. Символ x присутствует в качестве независимой переменной в волновой функции, и поэтому глубокий смысл определения (40a) не проявляется с достаточной четкостью. Рассмотрим, однако, такую квантовомеханическую переменную, как импульс (обозначим ее через p). Символ p отсутствует в волновой функции, поэтому позволено усомниться в существовании такой переменной. Чтобы решить этот вопрос, *определим* квантовомеханическую переменную импульса p, дав определение предписанию, как вычислять *средние* значения импульса p для любого данного состояния. Реальная проблема сводится к тому, можем ли мы определить среднее значение импульса физически разумным способом.

51. Начнем с частного случая нормированной к единице волновой функции, которая в большом интервале имеет вид $\psi(x)=C\exp(ix\bar{p}/\hbar)$. Вне этого интервала волновая функция быстро падает до нуля. Для такой волны средний импульс очень близок к $\bar{p}$, и можно написать $\Delta v(p)\approx\bar{p}$. В рассматриваемом интервале

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)=\bar{p}\,\psi(x), \tag{51a}$$

и поскольку волновая функция нормирована к единице, то

$$\bar{p}\approx\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x). \tag{51b}$$

Мы предполагаем здесь, что основной вклад в интеграл возникает от области, где выполняется равенство (51a). Для рассматриваемой волновой функции специальной формы можно найти средний импульс, вычислив интеграл (51b). Предположим теперь, что этот интеграл дает точно среднее значение для всех нормированных функций. Таким образом, *постулируем*:

$$\Delta v(p)=\langle\psi|p|\psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) \tag{51c}$$

для *любой* нормированной предгейзеровской волновой функции $\psi(x)$. Наш постулат означает, что в теории Шредингера переменной импульса p отвечает *дифференциальный оператор*, действующий на волновую функцию, расположенную справа от него в интеграле (51c). Иными словами,

$$p\to-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}. \tag{51d}$$

52. Переменной квадрата импульса соответствует дифференциальный оператор

$$p^2\to-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \tag{52a}$$

и среднее значение квадрата импульса поэтому равно

$$\mathrm{Av}(p^2) = \langle\psi|p^2|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\psi^*(x)\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x). \qquad (52b)$$

Совершенно аналогично формулам (49c) — (49e) найдем неопределенность Δp значения импульса:

$$\Delta p = \sqrt{\mathrm{Av}(p-\bar{p})^2}, \qquad (52c)$$

$$(\Delta p)^2 = \mathrm{Av}[(p-\bar{p})^2] = \mathrm{Av}(p^2) - [\mathrm{Av}(p)]^2, \qquad (52d)$$

где $\bar{p} = \mathrm{Av}(p)$. Заметим, что те же соображения, которые привели нас к определению среднего значения импульса [формула (51c)], применимы и к определению среднего значения p^2 [формула (52b)].

53. Рассматривая выражения (49a), (49b), (49d), (51c) и (52b), мы замечаем, что их структура одинакова: среднее значение квантовомеханической переменной Q определяется выражением

$$\mathrm{Av}(Q) = \langle\psi|Q|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\psi^*(x)\,Q\psi(x); \qquad (53a)$$

здесь Q — либо дифференциальный оператор, действующий на расположенную справа от него волновую функцию, либо переменная x или x^2, либо некоторая функция от x.

Формула (53a) выражает общую схему, с помощью которой определяется квантовомеханическая переменная в теории Шредингера. *Среднее* значение переменной Q равно интегралу в правой части (53a), где Q — некоторый линейный оператор, действующий на расположенную справа от него волновую функцию. (Для переменной координаты линейный оператор представляет собой «умножение на x».) Далее, среднее значение Q^2 получается заменой в интеграле оператора Q оператором Q^2. При этом $Q^2\psi(x)$ представляет собой результат повторного действия оператором Q на функцию $\psi(x)$.

54. Рассмотрим новые примеры, иллюстрирующие эту идею. Кинетическая энергия E_k частицы с массой m описывается дифференциальным оператором

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \to -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \qquad (54a)$$

Полной энергии частицы отвечает оператор H, представляющий собой сумму операторов кинетической и потенциальной энергий. В теории Шредингера оператор энергии имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \to -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), \qquad (54b)$$

в согласии с рассуждениями п. 10 этой главы.

55. Читатель мог заметить, что до п. 51 у нас не было ясного понимания смысла импульса в теории Шредингера. Пока мы имели дело с волновой функцией вида $\exp(ixp/\hbar)$, было ясно, что p в экспоненте представляет собой импульс. Мы должны были, однако,

определить импульс p для общего случая *любой* (нормированной*) волновой функции Шредингера, и именно это было сделано соотношениями (51c) и (51d).

Возникает вопрос: можно ли определить понятие импульса иначе? Тщательное исследование проблемы показало, что наше определение является единственным. Лишь оно удовлетворяет тому требованию, чтобы квантовомеханическая переменная импульса имела физическую интерпретацию, находящуюся в соответствии с понятием об импульсе в классической физике.

56. Разумный характер определения (51c) среднего значения импульса может быть подтвержден следующей теоремой, принадлежащей П. Эренфесту. Мы приведем ее без доказательства **).

Среднее значение квантовомеханической переменной удовлетворяет тем же уравнениям движения, что и соответствующая классическая переменная. В частности, из этой теоремы следует

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Av}(x) = \frac{1}{m}\mathrm{Av}(p), \qquad (56a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Av}(p) = -\mathrm{Av}\left(\frac{dV(x)}{dx}\right), \qquad (56b)$$

если только волновая функция Шредингера $\psi(x, t)$, для которой вычисляются указанные выше средние, удовлетворяет уравнению Шредингера

$$H\psi(x, t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t}, \qquad (56c)$$

где H — дифференциальный оператор (54b).

Шредингеровская волновая функция $\psi(x, t)$ зависит от времени t, и эта зависимость описывается уравнением Шредингера (56c). Отсюда средние значения x и p также зависят от времени, и нетрудно доказать, что эта зависимость удовлетворяет уравнениям (56a) и (56b). Действительно, нужно произвести дифференцирование под знаком интеграла, определяющего интересующие нас средние. Затем следует исключить производные по времени от ψ и ψ^* с помощью уравнения Шредингера (56c) и сопряженного ему уравнения. После интегрирования по частям и группировки членов получаются результаты (56a) и (56b). Мы не приводим этих вычислений, так как они несколько утомительны, но вполне доступны для самостоятельной работы **).

57. Рассмотренная теорема, которую легко обобщить на случай трех измерений, имеет большое значение для понимания основных концепций квантовой механики. Она объясняет, в частности, почему классическая механика представляет собой предельный случай квантовой механики: обе теории эквивалентны, если можно

*) *Ehrenfest P.* Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik.— Zs. f. Phys., 1927, v. 45, p. 455.

**) Читатель найдет доказательство в книге: *Шифф Л.* Квантовая механика.— М.: ИЛ, 1957.

пренебречь неопределенностью переходных, т. е. их статистическим разбросом.

Нам необходимо существование такого соответствия между классической и квантовой механикой, чтобы считать последнюю верной теорией, и теорема Эренфеста постулирует наш выбор переменной импульса.

Идея о том, что классическую механику следует считать предельным случаем квантовой механики, является содержанием так называемого *принципа соответствия* Бора. Этот принцип имеет большое значение, ибо если квантовая механика претендует на полное описание явлений, то она должна описывать *все* физические явления, включая и те, которые имеют классическое объяснение. Исторически принцип соответствия был ведущим принципом на ранней стадии развития квантовой механики. Он накладывал ограничения на возможные новые теории, хотя, конечно, для однозначного выбора верной теории его недостаточно. В частности, принцип соответствия позволил с самого начала скептически отнестись к правилам «квантования», которые представляли собой предписание того, как нужно перейти от классического описания к квантовомеханическому. Очевидно бессмысленно указание следующего типа: «Чтобы найти *верные* (квантовомеханические) уравнения, будем исходить из *неверных* (классических) уравнений, снабдив их неким магическим правилом квантования». Более верный путь к истинным уравнениям физики заключается в основанной на экспериментальных фактах догадке, которая в свою очередь подвергается экспериментальной проверке.

58. Для каждой квантовомеханической переменной Q величина

$$\Delta Q = \sqrt{\overline{Av\,(Q^2)} - [Av\,(Q)]^2}, \tag{58a}$$

вычисленная для данной волновой функции, есть мера точности, с которой эта переменная Q известна в состоянии, описываемом волновой функцией. Переменная Q имеет в данном состоянии *точное* значение лишь в том случае, если $\Delta Q = 0$. В качестве примера рассмотрим переходную энергию H. Ее значение точно задано для каждого стационарного состояния и равно E — энергии этого состояния. Для нестационарных состояний $\Delta H > 0$.

Принцип неопределенностей накладывает ограничение на точность, с которой одновременно могут быть известны две различные переменные. Он имеет форму неравенства, связывающего $\Delta Q'$ и $\Delta Q''$ для двух переменных Q' и Q''. Равенства (49c) и (52d) дают вам определение величин Δx и Δp соответственно. С их помощью можно проверить, что соотношение

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \hbar/2 \tag{58b}$$

действительно выполняется *для всех* волновых функций и что существуют волновые функции, для которых соотношение (58b) имеет вид равенства. Мы не будем производить этих вычислений, так как и без них приобрели достаточно ясное качественное понимание смысла соотношения (58b).

Задачи

1. а) Вернемся к задаче о частице в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками (рис. 44). Рассмотрим волновую функцию (выражение (61)) для $n' = 17$ и $n'' = 18$. Нарисуйте график плотности вероятности (выражение (62)), вычислив ее для моментов времени $t = 0$, $t = t_0/2$, $t = 3t_0/2$, $t = 3t_0/4$ и $t = t_0$, где $t_0 = 2ma^2/35\hbar$. Этот график демонстрирует периодическое движение частицы между стенками. Период движения равен t_0.

б) Рассмотрите движение классической частицы с массой m и энергией $E_c = (1/2)(E_{17} + E_{18})$ в той же потенциальной яме и сравните период движения с периодом t_0.

в) Волновой пакет (часть а) задан не слишком концентрировано. Фактически он занимает около 1/2 размера ямы. Чтобы образовать хорошо локализованный в пространстве волновой пакет, лучше представляющий свойства классической частицы, необходима суперпозиция большого числа собственных функций. При этом, тем точнее определено положение частицы, тем менее точно известны ее импульс и энергия. Заметим, что энергия n-го уровня пропорциональна n^2, тогда как разность энергий соседних уровней грубо пропорциональна n. Волновой пакет с высокой средней энергией может поэтому быть суперпозицией большого числа собственных функций, обеспечивающей как локализацию частицы, так и небольшой относительный разброс энергии. Мы встретимся здесь с другим примером перехода к классическому пределу. Волновой пакет в потенциальной яме может вести себя подобно классической частице, если его средняя энергия велика по сравнению с энергией основного состояния.

Мы не станем рассматривать здесь в подробностях условия перехода к классическому пределу. Остановимся, однако, на одной стороне проблемы. Пусть $n' = n$ и $n'' = n+1$. Найдите период движения пакета, соответствующий суперпозиции (63), и сравните его с периодом для классической частицы, энергия E которой такова, что $E_{n+1} \geqslant E \geqslant E_n$. Перейдите, в частности, к пределу $n \to \infty$.

2. *Обсудите*, справедливы ли приведенные ниже рассуждения автора (они похожи на некоторые попытки объяснения квантовой механики, встречающиеся в популярной литературе). Плотность вероятности $P(x) = |\psi(x, t)|^2$ для стационарного состояния, представленного волновой функцией $\psi(x, t)$, может быть понята как *среднее по времени* от плотности вероятности для классической частицы, движущейся в том же потенциальном поле с энергией, равной энергии стационарного состояния. Иными словами, частица движется по классической траектории, но если усреднить ее движение по времени, которое велико по сравнению с периодом движения, то получим плотность вероятности $P(x)$. В случае трехмерного движения частицы, например для электрона в атоме водорода, можно дать аналогичную интерпретацию квадрата модуля волновой функции *стационарного* состояния. Частица движется классически, но наши измерительные приборы слишком грубы, чтобы уследить за подробностями этого движения, поэтому мы наблюдаем распределение вероятностей для электрона в атоме, которое может быть понято как результат усреднения классического движения по большому интервалу времени.

Читатель заметит, что это утверждение, понятое буквально, может быть немедленно отвергнуто. Поэтому автор вместо отступит назад: он скажет, что данная им интерпретация квадрата модуля волновой функции не является строго корректной, но тем не менее она дает удобный способ размышления о квантовомеханической природе частицы и позволит проникнуть в происходящее.

Оба эти утверждения, взятые первое и изменяющие второе, должны быть безусловно отвергнуты, и читатель должен объяснить, почему. При этом следует еще раз обдумать рассуждения, приведенные в начале этой главы, а также опыт с двойной щелью, рассмотренный в гл. 4 и 6.

3. Интеграл (22a) вычислен в пределах от $-a$ до $+a$. Предположим, что мы интегрируем от $-\infty$ до $+\infty$. Как такой интеграл зависит от времени t и чему он равен при $t = 0$?

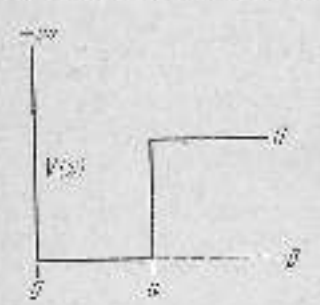
4. Мы должны убедиться в том, что потенциал притяжения не обязательно приводит к связанному состоянию. Для этого обратимся к рисунку. Пусть B — глубина ямы, a — ее ширина, m — масса частицы. Покажите, что если величина $G = a^2 B m / 2\hbar^2$ меньше определенной постоянной G_0, то связанное состояние отсутствует, а если $G > G_0$, то будет по меньшей мере одно стационарное состояние. Найдите постоя-

ямы U_0. Заметьте, что эти рассуждения относятся к яме, одна стенка которой бесконечно высока. Для ямы, показанной на рис. 19А этого вовсе, всегда существует по крайней мере одно связанное состояние независимо от глубины ямы.

Рекомендуем вам примеры, объясняя, почему каждое из написанных ниже условий благоприятствует образованию связанного состояния: а) большая масса m; б) большая глубина ямы; в) широкая яма.

Иллюстрируйте ваши соображения (которые должны быть применены и более общему типу потенциальной ямы, чем показанный на рисунке) соответствующими графиками.

Этот пример позволяет понять, почему два атома не всегда образуют стабильную молекулу, несмотря на то, что при определенных расстояниях между атомами действуют силы притяжения. (Если силы притяжения сильно возрастают, как это иногда бывает, связанное состояние, разумеется, не образуется.) Мы можем считать потенциал, показанный на рисунке, грубым подобием реального потенциала, приведенного на рис. 30А.



К задаче 4 и 5. В задаче 5 удобно считать, что для потенциальной энергии двух частиц простой модели системы протон — нейтрон справедлива формула, для вывода которой достаточно знать некоторые свойства дейтрона и особенности протон-протонного взаимодействия при малых энергиях. Из нее можно вычислить расстояние между нейтроном и протоном

5. В качестве простой одномерной модели дейтрона (представляющего собой связанное состояние протона и нейтрона) примем потенциальную яму конечной глубины, показанную на рисунке. Пусть $a=1{,}85\cdot10^{-13}$ см и $B=11{,}6$ Мэв. Найдите энергию связи дейтрона в этой модели и сравните ее с экспериментальным значением, которое равно 2,21 Мэв. Близкое согласие вовсе не следует считать триумфом теории, так как для получения указанных значений a и B было использовано наблюдаемое явление энергии связи дейтрона и другие экспериментальные данные. Хотя использованный нами потенциал сильно идеализирован, он правильно воспроизводит некоторые особенности протон-нейтронного взаимодействия. Задача нахождения эффективного потенциала на основании некоторых принципов не решена. *Указание.* Масса m — приведенная масса системы протон — нейтрон: $m=M_p/2$.

6. При рассмотрении колебательного спектра хлористого водорода HCl обнаружили, что спектральные линии оказываются близко расположенными дублетами. Незначительность коротковолновых членов дублета приблизительно в три раза превышает незначительность длинноволновых. Для линий, расположенных в области спектра, близкой к 3000 $см^{-1}$ (волновое число), разделение двух компонент составляет 4 $см^{-1}$. Объясните это явление и получите разумное различие между компонентами. Объясните такое относительную интенсивность обеих компонент.

7. При изучении частот, связанных с вращательными переходами в молекулах, получены следующие значения частот (в мегагерцах):

$H^{35}Cl$	6998,	27 396;
$H^{37}Cl$	6684,	26 181.

Для молекул, содержащих изотоп ^{35}Cl, цифры указаны в верхней строке; содержащих изотоп ^{37}Cl — в нижней строке. Йод представлен одним изотопом ^{127}I в обеих молекулах.

а) Как получить числа нижней строки, зная частоты верхней?

б) Если образец, используемый для измерений, изготовлен из природного хлора, то наблюдают все четыре частоты. Можете ли вы предсказать отношение интенсивностей линий верхней строки и интенсивности соответствующих линий нижней строки?

в) Рассмотрим изотопический эффект для вращательных уровней двухатомной молекулы в общем случае. Пусть имеются два типа молекул, у которых массы изотопических ядер равны M_1' и M_2' для молекул первого типа и M_1'' и M_2'' для молекул второго типа. Соответствующие частоты переходов для этих изотопических молекул обозначим ω' и ω''. Можно связать ω' и ω'', зная массы изотопов, методами квантовой теории молекул. Покажите, что отношение обеих частот

$$\frac{\omega''}{\omega'}=\left(\frac{M_1'M_2'(M_1''+M_2'')}{M_1''M_2''(M_1'+M_2')}\right)^{k}.$$

Определите показатель степени k. Сравните это выражение с выражением (37а), которое описывает изотопический эффект для колебательных уровней.

8. Рассмотрим кристалл, построенный из атомов с атомной массой A, который имеет форму куба с длиной стороны L.

Оцените порядок следующих величин: а) внешнюю резонансную частоту колебаний кристалла; б) энергию расщепления частот. Запишите результат в такой форме, чтобы зависимость частот от фундаментальных констант α, $\beta=m/M_p$ и λ_c/a, а также от констант A и Z — L/a. (a_0 — боровский радиус, M_p — масса протона) была ясно видна. в) Рассмотрите кристалл с $A=1$ и получите для него частоту в мегагерцах.

9. В п. 50 тл. 2 было указано, что в приближении отношения c_s/c скорости звука в кристалле c_s к скорости света c можно выразить через следующие четыре константы: постоянную тонкой структуры $\alpha\approx1/137$, отношение массы электрона к протона $\beta=m/M_p$, атомную массу A и атомный номер Z атомов кристалла. Точное численное отношение c_s/c — задача сложная, но порядок величины и характер зависимости от констант α, β и A оценить нетрудно. Выполните такую оценку и проверьте полученную формулу в случае меди ($A=63{,}5$; $c_s=4700$ м/с).

10. а) Мы отмечали, что для потенциала $U(x)$, показанного на рис. 20б, расстояние между соседними уровнями уменьшается с увеличением квантового числа n. Дайте этому качественное объяснение.

б) Начертите параболу, соответствующую потенциалу для строго гармонического осциллятора. На том же графике начертите две потенциальные кривые, симметричные по отношению к началу, отвечающие очень гармоническим колебаниям, причем радиус кривизны всех трех кривых в начале координат (где потенциал имеет минимум) должен быть одинаков. Эти две кривые должны быть такими, чтобы для первой из них расстояние между соседними уровнями энергии возрастало с ростом квантового числа n, а для второй уменьшалось. Как объяснить указанные свойства обеих кривых?

11. В п. 47 было показано, что уровни энергии двукратно ионизованного гелия получаются простым изменением масштаба уровней однократно ионизованного гелия, причем коэффициент подобия близок к 4. Оба иона представляют собой водородоподобные одноэлектронные системы. Исходя из таких же соображений, автор хотел бы доказать, что уровни энергии однократно ионизованного лития также можно получить изменением масштаба от уровней нейтрального гелия, ибо оба атома представляют собой двухэлектронную систему, отличающуюся лишь зарядом ядра. Иными словами, отношение двух соответствующих спектральных линий должно быть постоянным, как в случае дважды ионизованного гелия. Однако опыт не подтверждает это предположение. Оба атома имеют весьма похожую схему уровней, которую не могут не заметить не менее внимательные наблюдатели. Объясните, почему простые масштабные соображения, справедливые для одноэлектронных систем, перестают работать для двухэлектронных систем.

12. Среднее время жизни $2p$-состояния водорода равно $1{,}6\cdot10^{-9}$ с. Чему равно это время для $2p$-состояния однократно ионизованного гелия?

13. Чему равно среднее время жизни $2p$-состояния ионного атома, образованного при захвате отрицательного мюона ядром алюминия?

14. Вычислите длину волны фотона, испущенного мюонным атомом алюминия при переходе из $3s$- в $2p$-состояние.

15. Найдите боровский радиус для: а) мюонного атома алюминия; б) мюонного атома свинца. Связано ли это явление с размерами ядер. Если боровский радиус сравнимый с радиусом ядра, то соотношение нельзя больше считать точным порядком уровней энергии мюонного атома не могут быть точно описаны формулой, подобной (36г). Действительно, из экспериментов следует, что уровни энергии тяжелых мюонных атомов сильно отклоняются от уровней, предсказываемых фор-

мулой (90б). Систематическое изучение этих отклонений оказалось средством получения сведений о распределении зарядов в ядрах и об их размерах.

16 *). Попытайтесь доказать теорему Эренфеста, упомянутую в п. 30, следуя математическому ходу рассуждений (см. также п. 50 гл. 7).

17 *). а) Приложите теорему Эренфеста к гармоническому осциллятору, для которого потенциал имеет вид $V(x)=\frac{1}{2}Kx^2$, и получите два дифференциальных уравнения, которым удовлетворяют $Av\,[x(t)]$ и $Av\,[p(t)]$. Решите эти уравнения и выразите $Av\,[x(t)]$ через $Av\,[x(0)]$ и $Av\,[p(0)]$. Сравните полученные решения с решениями соответствующей классической задачи.

б) Для стационарного состояния $Av\,[x(t)]=0$, но для нестационарного состояния $Av\,[x(t)]$ в общем случае представляет собой осциллирующую функцию времени. Имея в виду рассуждения п. 27 и результаты части а) этой задачи, приведите доводы в пользу того, что расстояние между соседними уровнями теории гармонического осциллятора постоянно и равно $\hbar\sqrt{K/m}$. Заметим, что из рассуждения п. 27 следует, что это расстояние должно быть приблизительно постоянно, но в действительности оно строго постоянно и равно $\hbar\sqrt{K/m}$.

18. Рассмотрим двухатомную молекулу в виде «гантели». Вращательное поведение такой молекулы было рассмотрено в п. 38—40. Предположим, что центр заряда молекулы не совпадает с ее центром масс. Молекула будет иметь электрический дипольный момент, который будет вращаться. Классически следует ожидать испускания электромагнитного излучения, частота которого равна классической круговой частоте ω_k.

Квантовая механика дает для нашей молекулы уровни энергии, выражаемые формулой (39с). Разумно предположить, что квантовое число j меняется на единицу, когда молекула испускает или поглощает квант дипольного излучения. Выразите частоту испускаемого излучения через квантовое число j момента импульса начального состояния молекулы и сравните полученный результат с классической формулой. Мы ожидаем, что при больших значениях j будет достигнут «классический предел». Верно ли это?

Дополнительная литература

Кроме книг, приведенных в библиографии к гл. 7, укажем следующие:
Ферми Э. Молекулы и кристаллы.— М.: ИЛ, 1960.
Борн М. Атомная физика.— М.: ИЛ, 1960.

---

*) Эти задачи относятся к дополнительной теме.

ГЛАВА 9

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Процессы столкновения и волновая картина

1. В последней главе книги мы рассмотрим некоторые аспекты той области современной физики, которая имеет дело с элементарными частицами и их взаимодействиями. Эта часть физики фундаментальна по своему значению. Мы встретим здесь множество еще не решенных проблем. В этой области физики мы стремимся иметь теорию, которая позволила бы «понять» причины существования различных элементарных частиц и их свойства. Иными словами, мы надеемся, что возможно существование нескольких фундаментальных принципов, объясняющих великое множество наблюдаемых явлений. Оправдана ли такая надежда? Разумеется, логических оснований для нее нет. Может вполне случиться, что мы постоянно будем иметь дело с феноменологическими теориями, которые суммируют и обобщают экспериментальные факты путем несколько более экономным, чем таблицы и графики, но далеки от полноты, изящной ясности и красоты, ожидаемой от фундаментальной теории. Такая возможность кажется весьма непривлекательной, и нам хочется верить во внутреннюю простоту явлений. Эту надежду поддерживает история физики. Как источник знаний физика растет с очень большой скоростью, и доступная нам информация о деталях отдельных явлений поражает своей необъятностью. Но еще более удивительно то, что все эти детали могут быть объяснены в рамках весьма простых теорий. Говоря о простых теориях, автор вовсе не считает теоретическую физику тривиальным предметом. Он имеет в виду, что фундаментальные принципы наших теорий отличаются ясностью концепций. Как мы говорили ранее, в настоящее время нет «простой» и исчерпывающей теории элементарных частиц. В этой главе мы постараемся показать читателю, сколь близко мы подошли к такой теории, и познакомить его с фактами и проблемами этой части физики.

2. Большую часть наших сведений об элементарных частицах мы получили из экспериментов, когда они сталкиваются с такими же или с другими частицами. Поэтому целесообразно высказать некоторые идеи, позволяющие интерпретировать такого рода опыты. В опытах по рассеянию пучок частиц A, выходящий из ускорителя (дальше мы будем называть его первичным пучком), падает на мишень, состоящую из частиц B (мишень может быть твердой, жидкой или газообразной). Опыт заключается в наблюдении и изучении частиц, возникающих при столкновении частиц A и B. Столкновение двух частиц называют *упругим*, если новых частиц не возникает;

частица A лишь рассеивается частицей B. При возникновении новых частиц говорят о *неупругом* процессе.

Результаты наблюдений обычно выражают через различные *эффективные сечения*. Начнем с простейшего из них, а именно с

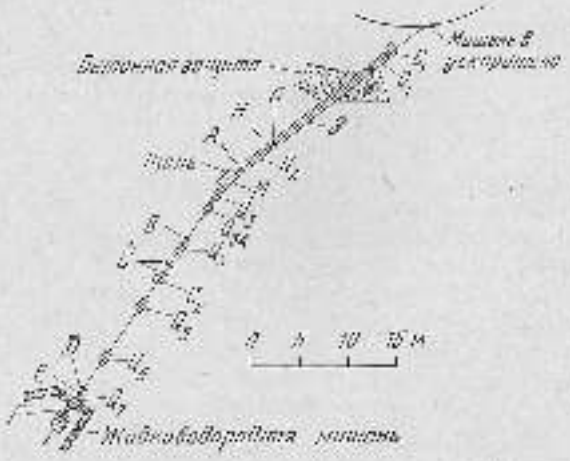


Рис. 1А. Схема опыта по измерению различных эффективных сечений при отскоке и упругом рассеянии антипротонов от протонов. Источником антипротонов является мишень, расположенная в вакуумном объеме. Антипротоны, вылетающие из мишени, которая фокусирует их на жидководородную мишень (вместе C_1 — C_2, A — отклоняющие магниты; Q_1 — Q_5 — квадрупольные магниты; A — A' — сцинтилляционные счетчики; C — черенковские счетчики; S — спектрометр скоростей. Частицы, возникающие в жидководородной мишени, наблюдаются с помощью системы счетчиков, окружающих мишень (на схеме не показаны). Взаимодействующие с мишенью антипротоны и выключают из рассмотрения частицы с энергией, меньшей 1,0; 1,5; 2,0; 2,5 Гэв (*Armenteros R. et al.* Antiproton — Proton Cross Sections at 1.0, 1.5, 2.0 GeV. — *Phys. Rev.*, 1960, v. 119, p. 2068).

полного эффективного сечения, которое обозначим σ_t. Чтобы дать определение σ_t, предположим, что мишень представляет собой очень тонкий слой случайно (но в среднем равномерно) распределенных частиц B. Пусть n — среднее число частиц, приходящихся на единицу ее поверхности. Полное эффективное сечение определяется следующим образом:

$$\sigma_t = P/n. \qquad (2a)$$

где P — вероятность того, что частица A, падающая на мишень перпендикулярно к ее поверхности, испытает *некоторое* взаимодействие с одной из частиц B, в результате чего частица A выбудет из падающего пучка. В этом определении существенно, что мишень достаточно тонка, так что наблюдаемая вероятность P мала по сравнению с единицей. (Мы рассмотрим этот вопрос в п. 4.)

3. Понятие о полном эффективном сечении можно пояснить с помощью следующей модели. Представим себе, что с каждой частицей B связан диск, площадь которого равна σ_t. Все диски одинаково ориентированы, а первичный пучок частиц A перпендикулярен к их поверхности. Диски обладают тем свойством, что

попавшая в диск частица A выбывает из пучка. Частица, не попавшая в диск, не испытывает взаимодействия и не отклоняется. Рассмотрим снова тонкую мишень, на единичную поверхность которой приходится n частиц. Полная площадь, закрытая дисками на поверхности мишени площадью F, равна $nF\sigma_t$. Это означает, что

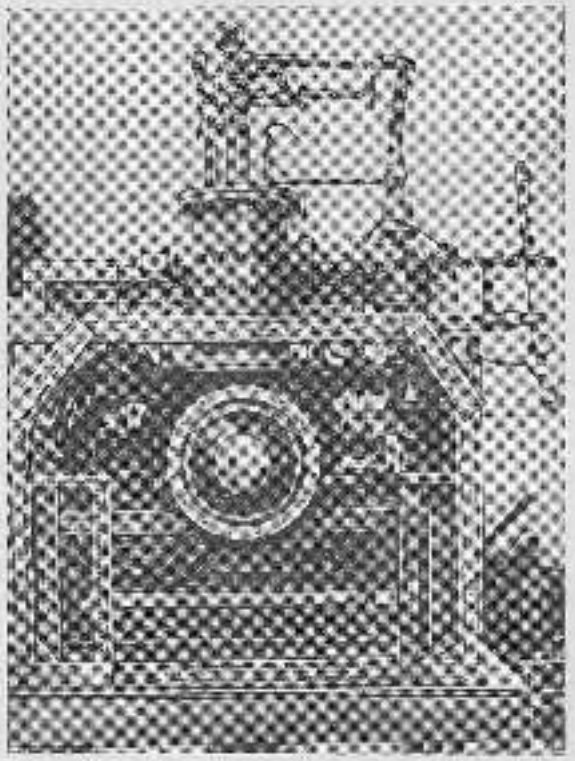


Рис. 2В. Жидководородная мишень за отскоком, схема которого показана на рис. 2А. Вещество камеры и магнитное поле, расположенные в центре мишени. Пучок антипротонов перпендикулярен к плоскости рисунка.

доля поверхности, равная $n\sigma_t$, «непрозрачна», а доля, равная $1 - n\sigma_t$, «прозрачна». Вероятность того, что некоторая частица A выбудет из первичного пучка, равна, таким образом, $P = n\sigma_t$. Такая модель позволяет почувствовать смысл равенства (2а), но читатель должен понимать, что непрозрачные диски существуют лишь в нашем воображении. Эффективное сечение является всего лишь удобной мерой способности частиц A и B взаимодействовать друг с другом, но не следует думать, что оно связано с их геометрическими свойствами.

4. Теперь обобщим выражение (2а) на случай, когда мишень нельзя считать тонкой. Обозначим через $P(n)$ вероятность того, что частица A выбудет из пучка в результате столкновения с мишенью,

состоящей из частиц B, равномерно распределенных с поверхностной плотностью n. Величина $T(n)=1-P(n)$ дает вероятность свободного прохождения частиц A через мишень. Предположим, что за слоем с поверхностной плотностью n_1 расположен второй слой

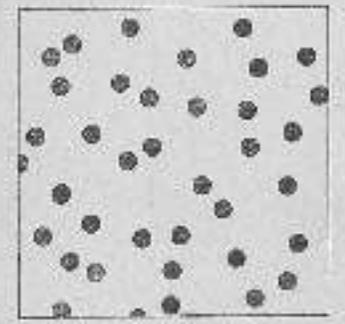


Рис. 3А. Вероятность столкновения частиц A пучка с частиц B мишени выражается через эффективное сечение σ_t. Представим себе, что с каждой частицей B связан диск с поверхностью, равной σ_t, так что частица A (которую можно считать точкой) будет взаимодействовать с частицей B лишь при попадании в диск. На рисунке показан изображающий диск для очень тонкой мишени из частиц B. Ввиду на единицу поверхности мишени приходится n частиц, то полная поверхность, закрытая дисками, равна $n\sigma_t$. Вероятность того, что частица пройдет через мишень без взаимодействия, равна $1-n\sigma_t$. Рисунок не следует, разумеется, понимать буквально: частицы B не плоские и действительности не на диске, не на сферу

с поверхностной плотностью n_2. Суммарная поверхностная плотность равна n_1+n_2. Вероятность того, что частица A пройдет через оба слоя, равна

$$T(n_1+n_2)=T(n_1)\,T(n_2). \tag{4a}$$

Это уравнение должно выполняться для всех положительных n_1 и n_2. Его общее решение имеет вид

$$T(n)=\exp(-Cn), \tag{4b}$$

где C — вещественная постоянная. Далее, имеем

$$P(n)=1-\exp(-Cn). \tag{4c}$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to 0}\frac{P(n)}{n}=C, \tag{4d}$$

Сравнивая этот результат с выражением (2a), написанным для малых n, мы приходим к выводу, что $C=\sigma_t$. Таким образом,

$$P(n)=1-\exp(-n\sigma_t),\quad T(n)=\exp(-n\sigma_t). \tag{4e}$$

Мы видим, что интенсивность прошедшего пучка экспоненциально падает с толщиной мишени. Для определения полного эффективного сечения следует выполнить простой опыт по ослаблению пучка. Он заключается в измерении (с помощью различных счетчиков частиц) относительного уменьшения интенсивности проходящего пучка для фольг различной толщины. По этим данным с помощью формул (4e) можно вычислить эффективное сечение.

5. Аналогичным путем можно определить эффективные сечения для различных других процессов. Допустим, например, что при взаимодействии частиц A и B образуются частицы C и D в реакции

$$A+B\to C+D. \tag{5a}$$

Эффективное сечение такого процесса равно

$$\sigma_{AB\to CD}=\sigma_t P_{AB\to CD}, \tag{5b}$$

где $P_{AB\to CD}$ — вероятность того, что исчезновение частицы из пучка сопровождается реакцией (5a). Предположим, что реакция (5a) есть единственно возможный *неупругий процесс*. Частица может выбыть из пучка еще вследствие *упругого* рассеяния, в котором

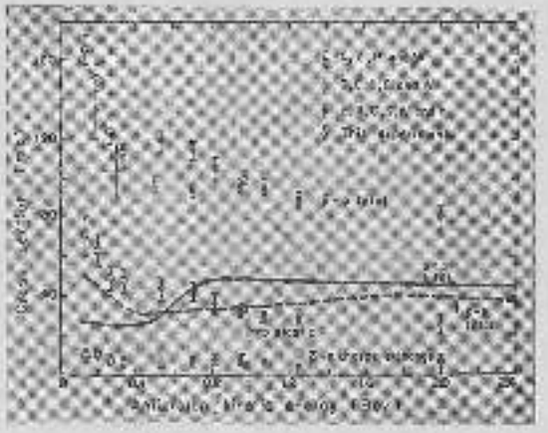


Рис. 4А. Графики зависимости эффективного сечения взаимодействия протонов с протонами от энергии. Часть экспериментальных точек этого графика помещена в опыте, схема которого показана на рис. 2А. Для сравнения на том же графике показаны полное эффективное сечение для n — взаимодействия. Заметим, что полное эффективное сечение p — p-взаимодействия примерно в два раза больше полного сечения p — n-взаимодействия (*Abrosimov N. et al.* A Tabulation — Proton Cross Sections at 1.0, 1.25 and 2.0 GeV. — Phys. Rev., 1960, v. 118, p. 2068)

частицы A и B сохраняют свою индивидуальность после столкновения. Определим *эффективное сечение упругого процесса* равенством

$$\sigma_e=\sigma_t P_e, \tag{5c}$$

где P_e — вероятность того, что столкновение упругое. Три рассмотренных сечения связаны равенством

$$\sigma_t=\sigma_e+\sigma_{AB\to CD}, \tag{5d}$$

вытекающим из условия $P_e+P_{AB\to CD}=1$.

6. В ядерной физике и в физике элементарных частиц эффективные сечения измеряются в *барнах* и *миллибарнах*, причем

$$1\text{ барн}=10^{-24}\text{ см}^2,\quad 1\text{ миллибарн}=10^{-3}\text{ барн}. \tag{6a}$$

На рис. 6А показана зависимость полного эффективного сечения кадмия для нейтронов от их энергии, а на рис. 6В — аналогичная зависимость для серебра. Заметим, что эти данные получены для химических элементов и представляют собой поэтому эффективные сечения, усредненные по естественному распределению изотопов.

Достаточно взглянуть на эти кривые, чтобы убедиться, что полное эффективное сечение имеет мало общего с «геометрическими» свойствами ядер. Заметьте, что кривые демонстрируют необычайно резкую зависимость эффективного сечения от энергии. У кадмия эффективное сечение падает от максимального значения 7200 барн при энергии нейтронов 0,176 эВ до 20 барн при энергии 1 эВ. Эффективное сечение серебра столь же сильно зависит от энергии, проходя через резкий резонансный максимум при 0,32 эВ.

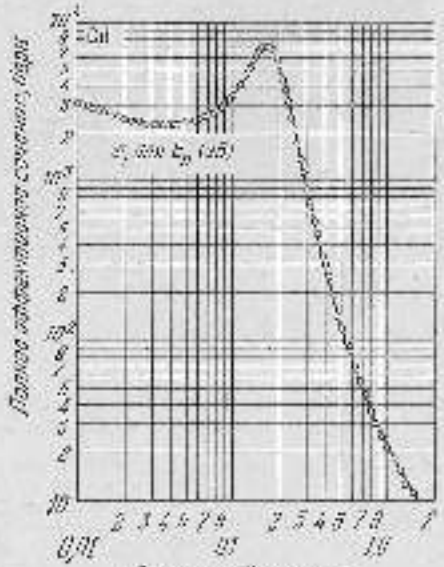


Рис. 6А. Кривая зависимости полного эффективного сечения взаимодействия нейтронов с ядрами кадмия от энергии нейтронов. Кривая получена для монокристалла кадмия и дает поэтому среднее значение эффективного сечения. Сечения других веществ, широко используемых в качестве эффективных сечений для определения энергии, имеют сходный вид. Они выглядят подобно для нейтронов. Открытие большого эффективного сечения для нейтронов малой энергии сделало возможным для данного уровня мощности широкое использование (Goldsmith H. H., Ibser H. W., Touch B. T. Neutron Cross Sections of the Elements.— Rev. Mod. Phys., 1947, v. 19, p. 259)

Обратим внимание на величину эффективного сечения. Ядра кадмия и серебра имеют близкие размеры. Действительно, из формулы

$$r \approx A^{1/3} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \qquad (6b)$$

определяющей радиус ядра в зависимости от массового числа A, следует, что радиус этих ядер близок к 5,8 ферми ($A \sim 110$). Соответствующее *геометрическое* сечение πr^2 равно 1 барн. Это в 7000 раз меньше максимального эффективного сечения на рис. 6А.

Рассмотрим теперь рис. 24А и 24В этой главы. На рис. 24В показан ход эффективного сечения упругого рассеяния положительных и отрицательных пионов на протонах, а на рис. 24А — эффективное сечение реакции $^{27}Al + p \rightarrow {}^{28}Si + \gamma$. Обратите

внимание на большое число очень острых резонансов в последнем случае.

7. Измерения эффективных сечений при различных энергиях дают нам важную информацию о взаимодействиях между сталки-

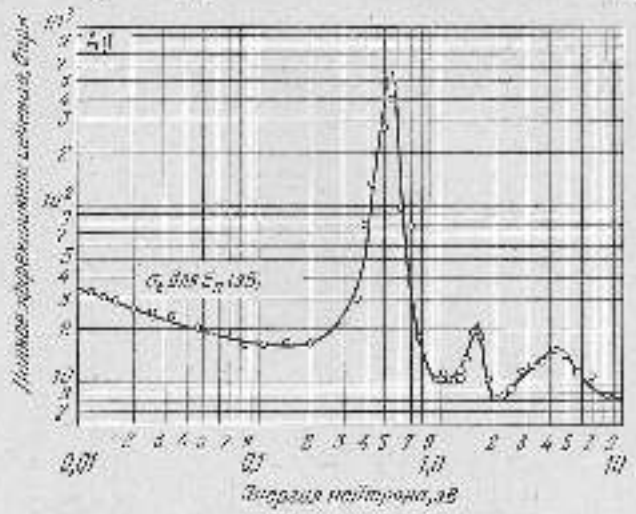


Рис. 6Б. Зависимость полного эффективного сечения взаимодействия нейтронов с ядрами серебра (естественная смесь изотопов) от энергии нейтронов. Обратите внимание на малость сечения (геометрическое) и наличие резонансных пиков. Эта кривая (в отличие от рис. 6А) ясно показывает, что эффективное сечение реакции имеет мало общего с размерами ядер. Кривые для кадмия и серебра весьма сходны, но последовательность пиков и минимумов различна по энергии. Общий характер наблюдаемых закономерностей хорошо объясняется волновой теорией столкновений (Goldsmith H. H., Ibser H. W., Touch B. T. Neutron Cross Sections of the Elements.— Rev. Mod. Phys., 1947, v. 19, p. 259) (см. также обзор ранних исследований в этой области)

вающимися частицами. Ценность этой информации может сильно возрасти, если измерять также *угловое распределение* частиц после столкновения. Рассмотрим для простоты упругое рассеяние частиц

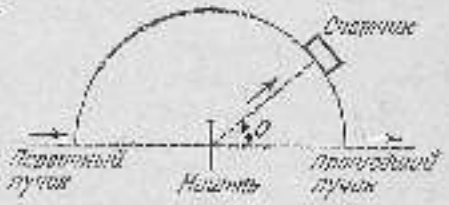


Рис. 7А. Упрощенная схема опыта по рассеянию. Пучок частиц регистрируется и падает на мишень. С помощью счетчика регистрируется относительная интенсивность частиц, рассеянных в различных направлениях. Задаются углом θ. В таких опытах измеряется дифференциальное эффективное сечение рассеяния

A частицами B мишени. Будем измерять интенсивность рассеянных в различных направлениях частиц A с помощью счетчиков, находящихся на одном и том же расстоянии от мишени, но в различных угловых положениях. Интенсивность первичного пучка должна поддерживаться в таком опыте постоянной (или непрерывно измеряться). Полученные результаты могут быть выражены через *дифференциальное эффективное сечение* $\sigma_s(E; \theta, \varphi)$. Эта величина зависит от полярного угла θ и азимутального угла φ, определяющих направление от мишени на счетчик, а также от энергии E.

Величина $\sigma_a(E, \theta, \varphi)d\Omega$ равна вероятности того, что частица A из падающего пучка будет рассеяна в телесном угле $d\Omega$ в направлении, определяемом углами θ и φ, если поверхностная плотность частиц B равна единице. Для данного счетчика, помещенного на том же расстоянии от мишени, но в другом направлении, скорость счета прямо пропорциональна дифференциальному эффективному сечению.

Во многих случаях рассеяния частиц дифференциальное эффективное сечение зависит, кроме энергии частиц, только от угла между

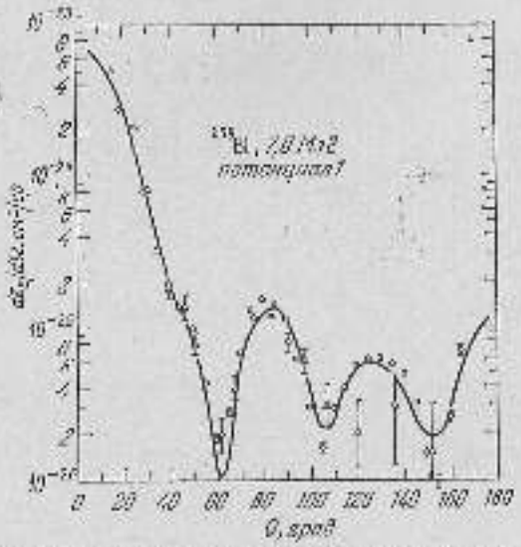


Рис. 7В. Дифференциальное эффективное сечение упругого рассеяния нейтронов ядрами свинца [208]Pb. Показаны экспериментальные точки и теоретическая кривая, отвечающая оптической модели. По оси абсцисс отложен угол рассеяния, по оси ординат — дифференциальное эффективное сечение на единицу телесного угла (Zaffarano C. J. et al. Large Angle Neutron Scattering from Lead at 7 MeV.— Phys. Rev. Lett., 1965, v. 14, p. 963)

направлением первичного пучка и направлением движения частицы A, испытавшей рассеяние. Если мы обозначим этот угол θ, то можно записать дифференциальное эффективное сечение в виде $\sigma_a(E; \theta)$, поскольку оно не зависит от азимутального угла *).

Полное эффективное сечение упругого рассеяния получается интегрированием дифференциального сечения по всем направлениям. Если последнее не зависит от угла φ, то

$$\sigma_a(E) = \int_{\Omega} d\Omega\, \sigma_a(E; \theta) = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, \sigma_a(E; \theta). \qquad (7a)$$

*) Части обозначения не совсем удачны, так как для «полного» и дифференциального эффективных сечений используется один и тот же символ σ. Оба типа эффективных сечений можно различать по угловой переменной в обозначении дифференциального эффективного сечения.

Аналогично можно определить понятие о дифференциальном эффективном сечении для неупругих процессов.

8. Первичными данными, получаемыми в различных опытах по рассеянию частиц, являются всевозможные эффективные сечения и их зависимость от энергии сталкивающихся частиц. Перед

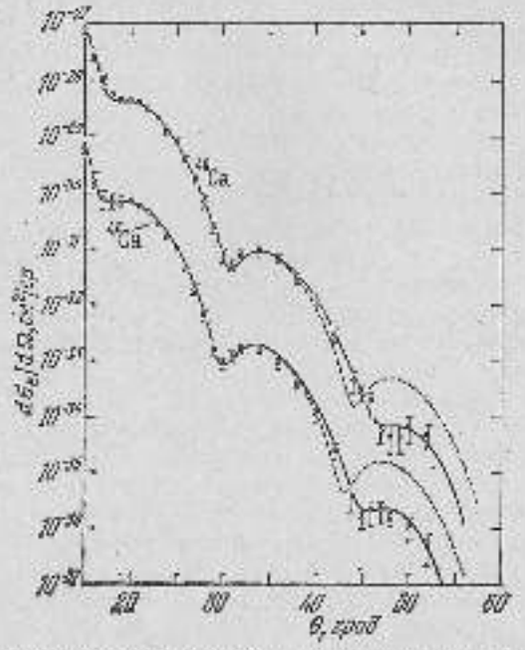


Рис. 7Г. Дифференциальное эффективное сечение рассеяния электронов с энергией 750 МэВ двумя изотопами кальция. По оси ординат отложено дифференциальное эффективное сечение на единицу телесного угла, причем данные для ^{48}Ca увеличены в 10 раз, а для ^{40}Ca уменьшены в 10 раз. (Кривые очень близки друг к другу, и поэтому отличия их удобнее рассмотреть на одном графике.) Наблюдаемое рассеяние возникает за счет электромагнитного взаимодействия электрона с ядром, и целью опыта является изучение распределения электрического заряда в ядре. Обратите внимание на то, что дифференциальное эффективное сечение для больших значений углов меняется на множитель порядка 10^3 (Hofstadter J. et al. Scattering of 750-MeV Electrons by Calcium Isotopes.— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 387)

физиками стоит задача получения свойств неизвестных взаимодействий из этих данных. Возможен и другой подход к этой задаче: исходя из некоторой теории можно вычислить ожидаемые эффективные сечения и сравнить предсказания теории с экспериментом.

Как уже упоминалось нами, большая часть имеющейся информации об элементарных частицах получена из анализа опытов по рассеянию. Для такого анализа были развиты специальные математические методы, обсуждение которых, однако, завело бы нас слишком далеко. Нет необходимости подчеркивать, что задача нахождения «сил» по известным эффективным сечениям на практике далеко не тривиальна, хотя и ясна в принципе.

9. Согласно классической интерпретации опытов по рассеянию, первичные частицы отклоняются в поле сил, создаваемом частицей мишени. По квантовой механике, рассеяние есть результат ди-

дракции волн. Именно с такой точки зрения мы рассматривали дифракцию электронов в гл. 5, где наблюдаемые эффекты объяснялись тем, что падающая электронная волна дифрагирует на всех атомах кристалла. В определенных направлениях происходит конструктивная интерференция, и в этих направлениях мы наблюдаем максимумы интенсивности. Таким образом, в рассеянии проявляется дифракция волн де Бройля на *препятствиях*, т. е. на атомах кристалла.

Читатель может заметить, что данное нами описание дифракции электронов имеет односторонний характер. Мы считаем, что первичная электронная волна рассеивается «препятствием». Но «препятствие» состоит из частиц, и все частицы должны быть описаны волнами. Нелогично одни частицы описывать волнами де Бройля, а другие считать *классическими* препятствиями. В опытах по дифракции электронов мы в действительности наблюдаем результат взаимодействия первичных электронных волн с волновыми пакетами, представляющими атомы в кристалле. Чтобы быть последовательными, следует считать, что *рассеяние есть результат взаимодействия волн с волнами.*

Несколько позже в этой главе мы используем эту идею. Здесь же заметим, что новая точка зрения ни в коей мере не обесценивает наше рассмотрение дифракции электронов. Существенно лишь то, что падающая волна *с чем-то* сталкивается и ее взаимодействие с «чем-то» вызывает дифракцию волны. До тех пор, пока наше внимание обращено на первичные частицы, природа «препятствий» не слишком существенна. Ими могут быть как «классические препятствия», так и концентрированные волновые пакеты.

10. Теперь перейдем к весьма схематическому обзору волновой теории рассеяния. Рассмотрим наиболее простой случай, когда волна, соответствующая частицам, упруго рассеивается (дифрагирует) неподвижным полем сил, имеющим сферическую симметрию. Будем считать, что это поле может быть получено из потенциала, который с увеличением расстояния от центра быстро стремится к нулю. Такая задача в некоторой степени аналогична задаче о барьере, рассмотренной в гл. 7. Частица A находится в области, где потенциал зависит от положения. В результате первичная волна испытывает дифракцию на потенциале.

В соответствии с рассматриваемой моделью будем считать, что частицы B мишени описываются сферически симметричным потенциалом, несмотря на то что в действительности они должны быть описаны волнами. В нашем случае корректное квантовомеханическое описание рассеяния двух частиц *концептуально эквивалентно* нашей модели. Таким образом, принятая модель не так уж плоха. Тщательно ее обдумав, мы придем к выводу, что ранее был применен аналогичный подход. В гл. 7 при изучении α-радиоактивности мы рассматривали движение «квантовомеханической» α-частицы в потенциальном поле сил. При рассмотрении колебаний молекулы мы имели дело с движением одиночной частицы в приблизительно гармоническом поле сил. В каждом из этих случаев

реальная задача связана с движением по меньшей мере двух частиц, и мы заменили ее моделью, в которой единичная частица движется в потенциале, описывающем взаимодействие со всеми остальными частицами.

11. Рассмотрим плоскую волну

$$\psi_i(x, t) = C \exp(ix \cdot p_i - i\omega t), \tag{11a}$$

соответствующую частице A, которая падает на частицу B (расположенную в начале координат $x=0$). Здесь p_i — импульс волны,

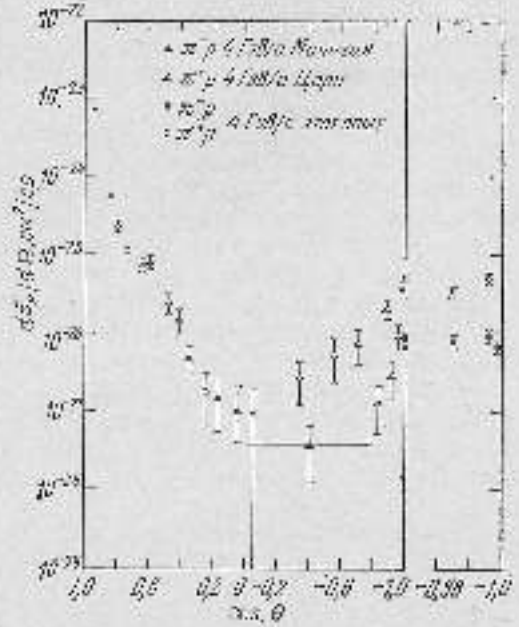


Рис. 11А. Дифференциальное эффективное сечение упругого рассеяния протонов пионов с импульсом 4 ГэВ/c. По оси абсцисс отложен косинус угла рассеяния в системе центра масс, по оси ординат — дифференциальное эффективное сечение на единицу телесного угла. Эффективное сечение вблизи направления назад (т. е. для $\cos\theta$, близкого к -1) показано только в увеличенном масштабе (вставка). Приведенные данные относятся к протонным и отрицательным пучкам (Orear J., Ni. et al. Backward Elastic Scattering of High Energy Pions by Protons. — Phys. Rev. Lett., 1958, v. 1, p. 315)

ω — энергия *), C — нормировочная константа. Волна дифрагирует на частице B. Можно догадаться, что волновая функция, описывающая дифрагировавшую волну на очень большом расстоянии от начала координат, имеет вид

$$\psi_s(x, t) \approx C f(\theta) x^{-1} \exp(ixp - i\omega t); \tag{11b}$$

здесь x — расстояние от начала координат; p — первичный импульс, так что $x^{-1}x$ и $p=|p_i|$. Функция $f(\theta)$ зависит от угла θ между направлениями вектора первичного импульса p_i и вектора положения x (проведенного от начала координат в «точку наблюдения»).

*) Мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar=1$.

Рассмотрим некоторые свойства волновой функции ψ, чтобы выяснить, при каких условиях она может соответствовать рассеянной волне. Амплитуда рассеянной волны пропорциональна амплитуде C приходящей волны, и наша догадка согласуется с разумным предположением о *линейности* системы. Частота ω рассеянной волны совпадает с частотой приходящей волны, что означает *сохранение* энергии частицы A. Этого и следует ожидать для *упругого* рассеяния, когда положение частицы B фиксировано.

Множитель $\exp(ixp-i\omega t)$, очевидно, описывает сферическую волну, распространяющуюся *наружу*. Фазовая скорость в любой точке направлена от начала координат вдоль радиус-вектора. Именно таким свойством и должна обладать волна, испущенная рассеивающим центром. Множитель x^{-1} в (11b) описывает уменьшение амплитуды рассеянной волны с расстоянием. *Интенсивность* волны пропорциональна квадрату модуля волновой функции. Интенсивность рассеянной волны измеряет поток вероятности, выходящий из начала координат (или, если угодно, поток частиц в последовательности повторяющихся опытов), и эта величина *должна* меняться с расстоянием, как x^{-2}. Поэтому сама амплитуда должна быть пропорциональна x^{-1}, как мы и предположили.

12. Из простых физических соображений следует, что волновая функция, описывающая рассеянную волну, имеет вид (11b). Функция $f(\theta)$ называется *амплитудой рассеяния*. Очевидно, что она описывает угловое распределение рассеянных частиц. Мы хотим связать амплитуду рассеяния с дифференциальным эффективным сечением. Представим себе поверхность сферы радиуса x с центром в начале координат и рассмотрим небольшую часть dF этой поверхности, содержащую точку x. Вероятность dP того, что испытавшая рассеяние частица пройдет через площадку dF, пропорциональна произведению dF на квадрат модуля волновой функции $\psi_s(x, t)$. Таким образом,

$$dP = k|\psi_s(x, t)|^2 dF = k|C|^2|f(\theta)|^2 x^{-2} dF, \qquad (12a)$$

где k — некоторый фиксированный коэффициент пропорциональности. Величина $dF/x^2 = d\Omega$ равна телесному углу, под которым малая поверхность dF видна из начала координат. Поэтому

$$dP = k|C|^2|f(\theta)|^2 d\Omega; \qquad (12b)$$

dP — вероятность рассеяния частицы в конус с малым пространственным углом $d\Omega$.

Рассмотрим теперь падающую волну (11a). Представим себе *диск единичной* поверхности, перпендикулярный к импульсу p, падающих частиц, центр которого находится в начале координат. Вероятность того, что первичная частица пройдет через этот диск, равна

$$P_i = k|\psi_i|^2 = k|C|^2, \qquad (12c)$$

где k — *та же* постоянная, что и в (12a) и (12b)

Рассмотрим теперь последовательность повторяющихся опытов по рассеянию (где импульс частицы A в каждом опыте равен p). Отношение числа частиц, рассеянных в конус, обнимающий телесный угол $d\Omega$, к числу частиц, падающих на единичный диск, равно отношению вероятностей (12a) и (12c):

$$dP/P_i = |f(\theta)|^2 d\Omega. \qquad (12d)$$

Вспоминая то, что было сказано в п. 7 о дифференциальном эффективном сечении, мы видим, что отношение dP/P_i равно произведению дифференциального эффективного сечения на телесный угол $d\Omega$, и получаем, что дифференциальное эффективное сечение просто равно квадрату модуля амплитуды рассеяния:

$$\sigma_s(\theta) = |f(\theta)|^2. \qquad (12e)$$

13. Чтобы найти теоретическое выражение для амплитуды рассеяния $f(\theta)$, нам следует, разумеется, иметь явное решение нашей дифракционной задачи. Это означает необходимость найти решение уравнения Шредингера или, возможно, другого уравнения, более подходящего к рассматриваемой задаче. В нашей модели мы должны найти решение уравнения Шредингера с потенциалом, действующим на частицу A вследствие присутствия частицы B. Волновые уравнения квантовой механики имеют бесконечное число решений, и мы должны выбрать из них одно, описывающее опыт по рассеянию. Условия, налагаемые на искомое решение, заключаются в том, что на *больших* расстояниях от начала оно должно иметь вид

$$\psi(x, t) \approx C\exp(ix\cdot p_i - i\omega t) - Cf(\theta)x^{-1}\exp(ixp - i\omega t). \qquad (13a)$$

Такая форма решения означает, что далеко от рассеивающего центра существуют плоская падающая волна и расходящаяся рассеянная волна. Мы не будем пытаться решать здесь эту задачу. Можно доказать для весьма общих условий, что при любом заданном импульсе существует *единственное* решение волнового уравнения, имеющее асимптотическую форму (13a). Таким образом, для данного импульса и заданного взаимодействия (потенциала) амплитуда рассеяния однозначно определена. Она зависит от импульса p, и можно, следовательно, написать ее в виде $f(p; \theta)$. Если амплитуда рассеяния найдена, то известно и дифференциальное сечение рассеяния (12e).

14. Рассмотрим частный случай, имеющий большое значение. Пусть амплитуда рассеяния *не зависит* от угла рассеяния θ, т. е. $f(\theta) = f = \text{const}$. В этом случае дифференциальное сечение рассеяния постоянно, $\sigma_s(\theta) = |f|^2 = \text{const}$, и угловое распределение рассеянных частиц сферически симметрично. Такая ситуация характерна для рассеяния при малых энергиях. Нетрудно дать качественное объяснение этому явлению. Угловое распределение может быть быстро меняющейся функцией угла θ в том случае, когда длина волны падающей частицы меньше размеров «области», на которую приходится дифракция. В дифракции принимают участие все «части» объекта, каждая из которых посылает свою дифрагированную

волну. В зависимости от относительной фазы этих волн в определенных направлениях будет происходить конструктивная или деструктивная интерференция. Если длина волны меньше размеров объекта, то небольшое изменение направления рассеяния может оказать значительное влияние на относительные фазы, что приведет к быстрому изменению дифференциального эффективного сечения с углом θ. Если же длина волны велика по сравнению с размерами объекта, «геометрические» интерференционные эффекты отсутствуют и амплитуда рассеяния лишь медленно меняется с углом. В предельном случае малых энергий, когда длина волны много больше размеров рассеивающего объекта, амплитуда рассеяния от угла не зависит и рассеяние оферически симметрично.

15. В случае $f(\theta)=f=\text{const}$ рассеянная волна

$$\psi_s(x,\ t)=(C/r)\exp(ikr-i\omega t) \tag{15a}$$

связана с первичной волной *только* через параметр C, равный амплитуде падающей волны. В частности, амплитуда рассеянной волны не зависит от направления импульса p_1. Этого и следует ожидать, если рассеивающий объект много меньше длины волны.

Заменим теперь плоскую волну (11a) ее средним, взятым по всем возможным направлениям p_1. Мы рассматриваем, таким образом, новую задачу о рассеянии, в которой падающая волна имеет вид

$$\psi_{in}(x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}d\Omega_{p_1}C\exp(ix\cdot p_1-i\omega t). \tag{15b}$$

Этот интеграл легко вычислить, если за угол θ между векторами x и p_1 взять полярный угол вектора p_1. Получаем

$$\psi_{in}(x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}d\theta\sin\theta\ C\exp(ikr\cos\theta-i\omega t)=$$
$$=\frac{C}{2ikr}\exp(ikr)-\exp(-ikr)]\exp(-i\omega t). \tag{15c}$$

Если рассеянная волна не зависит от направления первичного импульса, то первичная волна ψ_{in} *образует тот же самый* рассеянную волну, что и плоская волна (11a). Мы можем считать волну ψ_{in} *оферически симметричной частью* падающей плоской волны. Лишь эта часть падающей волны создает *оферически* симметричную рассеянную волну ψ_s, определяемую формулой (15a).

16. Оферически симметричная часть приходящей волны имеет интересную форму. Рассматривая выражение (15c), замечаем, что оно является суммой *расходящейся* и *сходящейся* волн. Плоская волна «содержит» две такие волны, потому что они описывают как движение частиц к началу координат, так и движение, направленное от начала. Амплитуды обеих волн равны. Так и *должно быть*, ибо в противном случае выходящий поток отличался бы от входящего. Мы рассматриваем упругое рассеяние (в котором число частиц A сохраняется), и оба эти потока частиц A должны быть равны.

Рассмотрим теперь среднее значение (по сфере) выражения (13a) для случая $f(\theta)=f=\text{const}$:

$$\psi_0(x,\ t)=\psi_{in}(x,\ t)+\psi_s(x,\ t)=$$
$$=\frac{C}{2ikr}[(1-2ikf)\exp(ikr)-\exp(-ikr)]\exp(-i\omega t). \tag{15a}$$

Это выражение можно интерпретировать как асимптотическую форму волновой функции, описывающей рассеяние в условиях, когда оферическая волна ψ_{in} играет роль падающей волны. Из (16a) следует, что волна $\psi_0(x,\ t)$ также состоит из сходящейся и расходящейся волн. Если происходит упругое рассеяние, то модули амплитуд обеих волн *должны* быть равны, что приводит к важному условию

$$|1+2ikf|=1 \tag{16b}$$

для амплитуды рассеяния f.

Общее решение уравнения (16b) удобно записать в форме

$$f=\frac{1}{2ik}(e^{i\delta}-1), \tag{16c}$$

где δ — некоторое *вещественное* число. Величина δ носит название *фазового сдвига* (s-волны). В общем случае δ зависит от импульса p.

17. Выясним, как велико может быть эффективное сечение для оферически симметричного упругого рассеяния. Дифференциальное эффективное сечение равно $|f|^2$, а полное эффективное сечение σ_s получается интегрированием дифференциального эффективного сечения по всем направлениям. Таким образом [имея в виду (16c)], получаем

$$\sigma_s=(\pi/p^2)|e^{i\delta}-1|^2. \tag{17a}$$

При заданном p это выражение максимально, если $\delta=(n+1/2)\pi$, где n — любое целое число.

$$(\sigma_s)_{max}=4\pi/p^2. \tag{17b}$$

Эта формула написана в системе единиц, где $\hbar=1$.

«Восстановить» постоянную Планка очень просто. Она должна быть возведена во вторую степень и стоять в числителе, так как эффективное сечение имеет размерность площади. В системе СГС или СИ

$$(\sigma_s)_{max}=4\pi(\hbar/p)^2. \tag{17c}$$

Таким образом, максимальное значение эффективного сечения для упругого и оферически симметричного рассеяния равно произведению 4π на квадрат длины волны де Бройля первичной частицы. При малых импульсах это эффективное сечение может быть весьма велико. На этой основе легко понять с точки зрения волновой картины рассеяния большие эффективные сечения, о которых мы упоминали в п. 6, и которые, возможно, поставили читателя перед рядом трудностей.

18. Как мы сказали, фазовый сдвиг δ зависит от первичного импульса p. Так как энергия ω падающей волны является монотонной функцией p, то фазовый сдвиг δ зависит от энергии. Мы отметим эту зависимость символом $\delta(\omega)$.

В тех случаях, когда фазовый сдвиг, рассматриваемый как функция энергии, проходит через одно из значений $(n+1/2)\pi$, максимальное значение эффективного сечения становится равным (17b). Мы говорим, что рассеяние при этой энергии имеет *резонансный* характер. Рассмотрим поведение амплитуды рассеяния и эффективного сечения в непосредственной близости от резонанса. Обозначим энергию резонанса через ω_r. Итак, имеем $\delta(\omega_r)=(n_r+1/2)\pi$, где n_r — целое число.

Формулу (16c) можно переписать, имея в виду тождество для котангенса

$$\operatorname{ctg}[\delta]=\cos\delta/\sin\delta=i(e^{i\delta}+e^{-i\delta})/(e^{i\delta}-e^{-i\delta}). \tag{18a}$$

Мы получим (в чем читателю нетрудно убедиться самому)

$$f(\omega)=\frac{1}{2ip}\left(e^{2i\delta(\omega)}-1\right)=\frac{1/p}{\operatorname{ctg}[\delta(\omega)]-i}. \tag{18b}$$

Вблизи точки $\omega=\omega_r$, в которой $\operatorname{ctg}[\delta(\omega_r)]=0$, можно разложить выражение для котангенса по степеням $(\omega-\omega_r)$. Оставляя лишь первый, линейный, член, имеем

$$\operatorname{ctg}[\delta(\omega)]\approx-(2/\Gamma)(\omega-\omega_r), \tag{18c}$$

где, следуя установившемуся обычаю, обозначаем производную от $\operatorname{ctg}[\delta(\omega)]$ в точке ω_r через $-2/\Gamma$.

Предположим, что вблизи резонанса фазовый сдвиг растет с энергией. Это означает, что $\operatorname{ctg}[\delta(\omega)]$ уменьшается с ростом ω и введенный в формулу (18c) параметр Γ положителен. Подставляя приближенное выражение (18c) (оно справедливо лишь вблизи резонанса) в (18b), получаем

$$f(\omega)\approx-\frac{1}{p}\frac{i\Gamma/2}{(\omega-\omega_r)+i\Gamma/2}, \tag{18d}$$

$$\sigma_r(\omega)\approx\frac{4\pi}{p^2}\frac{(\Gamma/2)^2}{(\omega-\omega_r)^2+(\Gamma/2)^2}. \tag{18e}$$

Читатель узнает в формуле (18e) резонансную формулу Брейта — Вигнера (21d) из гл. 3. Мы получили ее из совершенно других соображений. Величина Γ представляет собой ширину резонанса. В гл. 3 мы связывали возбужденные уровни с резонансами, и здесь вернулись к этой идее. Величина $1/\Gamma$ — есть в таком случае среднее время жизни возбужденного уровня, который проявляется как резонанс.

Что понимается под частицей?

19. Прежде чем продолжить изучение проблемы взаимодействия частиц, имеет смысл рассмотреть наши представления о частице. Допустим, что мы хотим составить таблицу частиц и находимся перед необходимостью сформулировать определение частицы.

В некотором смысле частицу можно представлять в виде «одиночного» объекта с определенными физическими свойствами, который может быть локализован и сосредоточен в ограниченной области пространства в данное время. Этот объект имеет определенные физические свойства, и это дает возможность указать его массу, заряд, момент инерции и т. д. Можно также потребовать, чтобы частица оставалась стабильной, будучи изолированной от других частиц.

20. Определив таким образом понятие частицы, мы должны считать частицей протон, электрон, позитрон, нейтрино, фотон и даже стабильные ядра. Принятые критерии, однако, сразу же создают некоторые проблемы. Прежде всего, нейтральные атомы и ионы в своих основных состояниях также удовлетворяют этим критериям. То же можно сказать и о молекулах и молекулярных ионах в основных состояниях, и наша таблица становится удручающе большой. С другой стороны, принятые критерии не позволяют поместить в таблицу, например, α-радиоактивное ядро $^{226}_{88}$Ra на том основании, что оно нестабильно. Такое положение малоудовлетворительно, ибо ядро $^{226}_{88}$Ra *почти* стабильно (период полураспада 1622 года) и для химика, например, атомы радия и атомы стабильного бария имеют близкие свойства. Но хуже, что принятые критерии не позволяют включить в нашу таблицу нейтрон. Эта частица является «близнецом» протона, и мы знаем, что ядра состоят из протонов и нейтронов. Внутри стабильного ядра нейтрон так же стабилен, как протон, но в свободном состоянии нейтрон распадается. Его среднее время жизни близко к 17 мин, что в ядерной или ядерной шкале времен является огромным временем (оно велико по сравнению с 10^{-23} с или даже 10^{-14} с). В опытах, где исследуемые явления длятся гораздо меньше 17 мин, нейтрон можно считать стабильной частицей. Например, можно изучать дифракцию нейтронов на кристаллической решетке.

Наконец, довольно против выбранных нами критериев является то, что многие ядра, которые мы считаем стабильными, могут оказаться в соответствующем масштабе времени нестабильными. Это обстоятельство может в дальнейшем привести к тому, что некоторые «частицы» придется лишить этого звания.

21. Из сказанного следует необходимость изменить критерии «частицы». Мы должны, например, допустить, что частицы «в большой степени» нестабильны, и тогда новые критерии позволят включить в таблицу нейтрон и ядро радия. По тем самым мы, строго говоря, отказываемся и от требования постоянства массы, так как (гл. 3), если система имеет конечное время жизни τ, ее энергия (в данном случае она совпадает с массой покоя частицы) определена лишь с точностью порядка $\hbar/\tau$. Иными словами, если среднее время жизни частицы равно τ, то неопределенность значения ее массы покоя будет

$$\Delta m\sim\frac{\hbar}{c^2\tau}. \tag{21a}$$

Для нейтрона эта неопределенность меньше 10^{-23} э. в. м., что составляет крайне малую величину.

22. Отказавшись от критерия абсолютной стабильности частицы, обнаруживаем, что достаточно трудно решить, какую степень нестабильности можно допустить. Мюон живет, например, около 10^{-6} с, что очень мало в макроскопической шкале, но крайне велико в ядерной. То же можно сказать и о заряженных пионах, среднее время жизни которых близко к 10^{-8} с. Эти частицы следовало бы включить в таблицу. Среднее время жизни нейтрального пиона около 10^{-16} с. Это все еще очень много по сравнению с 10^{-24} с, и, кроме того, нейтральные пионы тесно связаны с заряженными. Поэтому мы должны считать их частицами, и то же следует сказать о K-мезонах и гиперонах, время жизни которых имеет порядок 10^{-10} с. Заметим, что соответствующая приведенным временам неопределенность массы покоя все еще крайне мала по сравнению с самой массой.

23. Теперь следует решить, включать ли в таблицу возбужденные состояния атомов, молекул и ядер. В пользу этого говорит тот факт, что среднее время жизни большинства возбужденных состояний очень велико по сравнению с временем жизни нейтральных пионов, а иногда даже больше времени жизни нейтрона. Многие из таких состояний распадаются, испуская фотон, а в некоторых случаях испуская материальные частицы. Правильно ли исключить из таблицы возбужденные состояния, если мы поместили в нее основное состояние ядра ^{226}Ra, при распаде которого образуется α-частица? Кроме того, не являются ли некоторые гипероны «возбужденным состоянием» нуклонов? (Гипероны нестабильны, и одной из вторичных частиц при их распаде является нуклон.) Мы чувствуем, что сопротивляться этим доводам очень трудно, и «возбужденные состояния» включаются в таблицу.

24. При таких критериях в таблице окажется огромное число «частиц», более миллиона. Такое положение нас не удовлетворяет. Мы надеялись получить небольшую и удобную таблицу «элементарных» частиц и видим, что наши надежды рухнули. Более того, после включения в таблицу «возбужденных состояний» возникают сомнения в разумности применяемых критериев. Действительно, рассмотрим, как на опыте определяются возбужденные состояния, т. е. уровни энергии, расположенные над основным состоянием системы. В гл. 3 мы показали, что в процессах рассеяния возбужденные состояния проявляют себя как резонансы. Примером может служить рассеяние света атомом. Измеряя эффективность атома как устройства, рассеивающего свет, в зависимости от частоты света, обнаруживаем резкие максимумы на частотах, соответствующих разностям энергий возбужденных и основного состояний. Это явление, однако, не ограничено рассеянием света: мы сталкиваемся с ним также при рассеянии материальных частиц. Рассмотрим в качестве примера рис. 24А. По оси ординат отложена величина, пропорциональная эффективному сечению реакции. Кривая, проведенная через экспериментальные точки, дает зависимость эффективного

сечения поглощения протонов ядрами алюминия от энергии протонов. Резкие максимумы определяют положение возбужденных состояний ядер кремния, возникающих при такой реакции.

Ширина Γ резонансного максимума является мерой неопределенности энергии соответствующего возбужденного состояния. Пока резонансы остаются очень узкими, их легко интерпретировать как

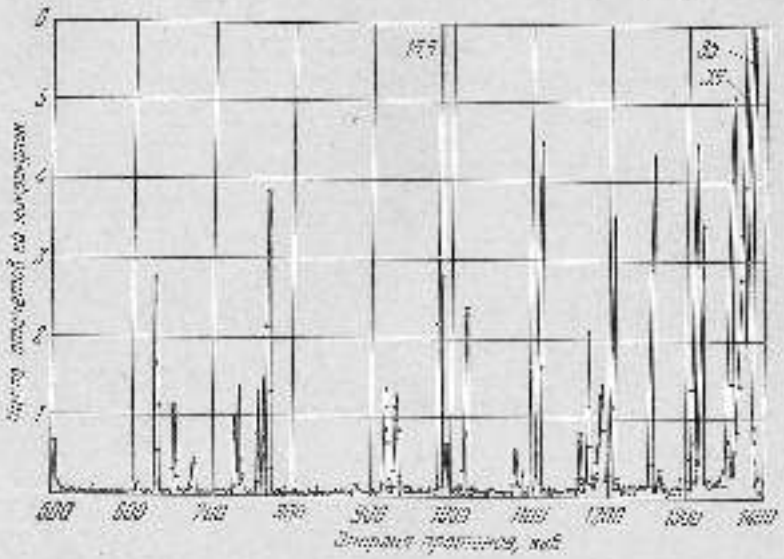


Рис. 24А. Кривая выхода для реакции ^{27}Al (p, α) ^{24}Mg [7]. Ординаты пропорциональны эффективному сечению реакции. По оси абсцисс отложена кинетическая энергия первичных протонов. Для наблюдения частиц, испущенных под углом 90° к направлению падающего пучка протонов, использовался магнитный спектрометр. Резкие пики связаны с возбуждением уровней ядра-мишени, участвующих в реакции

возбужденные состояния, и такие возбужденные состояния можно считать «частицами».

Обратимся теперь к рис. 24В, где показана зависимость от энергии для эффективного сечения рассеяния пионов протонами. Эффективное сечение для положительно заряженных пионов имеет характерный максимум в начале кривой и «горб» при больших энергиях. Для отрицательно заряженных пионов мы видим три относительно четко разрешенных максимума. Можно ли считать, что все эти максимумы отвечают частицам? В настоящее время многие физики склонны дать положительный ответ на этот вопрос. Массы этих «частиц» (M) просто равны значениям абсцисс в максимумах кривых.

25. Возникает вопрос: как провести границу между частицей и нечастицей? Нельзя, конечно, считать, что каждый небольшой «горб» на кривой зависимости эффективного сечения от энергии отвечает частице. С другой стороны, любой критерий, согласно которому резонанс «достаточно» узок, чтобы связывать его с частицей, будет весьма произволен. Имеют смысл лишь такие данные, объект

можно было считать частицей, его время жизни не должно быть слишком малым, но какой жёсткостью следует ограничиться?

Придется пересмотреть наши цели. По-видимому, мы ничего не добьемся, пытаясь дать *точное* и общее определение частицы. Такие попытки привели нас к таблице, состоящей из миллионов качественно весьма различных частиц. В эту таблицу входят, например, пионы и молекулы белка. Лингвистически все эти объекты можно называть частицами, но вряд ли мы узнаем что-либо существенное о фундаментальных взаимодействиях, если будем считать пионы и молекулы белка одинаково важными объектами нашей теории.

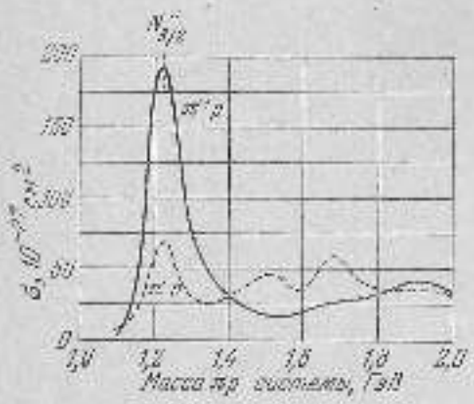


Рис. 21В. Результаты измерения эффективного сечения рассеяния протонами положительных и отрицательных пионов. Не это зависит от полного эффективного сечения, но оно обещает — помимо энергии пиона и протона в системе центра масс. Такой способ отсчета удобен тем, что положение максимума дает непосредственно массу резонанса или резонансного состояния. Рассмотрим отрицательный максимум при энергии около 1,236 ГэВ. Она соответствует наблюдаемой системе частиц (938 МэВ и покоящемуся протону. Мы обнаружили резонанс при энергии 1,238 ГэВ символом Δ_{33}^{++}. В литературе он называется (или обозначается) Δ (1238).

Некоторые частицы являются несомненно составными, сложными системами, и такими мы должны описывать их в нашей теории. Мы должны «объяснить» их с точки зрения взаимодействий между образующими их более элементарными составляющими.

Практический подход к проблеме заключается в установлении иерархии частиц по степени их «элементарности». В зависимости от рассматриваемых физических явлений наши представления об «элементарных» составных частях сложной системы будут меняться. Мы считаем, что молекулы являются связанными состояниями атомов, атомы — связанными состояниями ядра и электронов, а ядро связанным состоянием протонов и нейтронов. Мы не можем, однако, сказать, что протоны, нейтроны и электроны являются связанными состояниями чего-то другого. Их можно считать предельно элементарными частицами. В качестве таковых они представляют особый интерес для фундаментальной теории.

26. Попытаемся создать новую таблицу частиц, которые в настоящее время можно считать (истинно?) элементарными. Прежде всего следует исключить из этой таблицы частицы, о которых заведомо известно, что они «очевидно сложные». В гл. 1 были перечислены некоторые экспериментальные критерии сложности или элементарности частицы. Не вызывает сомнения, что все атомы, все молекулы и все ядра тяжелее протона являются сложными частицами, и поэтому они не включены в новую таблицу. Тогда

Таблица 26.1. Лептоны

Частица	Заряд	Масса, МэВ	Частица	Заряд	Масса, МэВ
e^- электрон e^+ позитрон	$-e$ $+e$	0,511 0,511	ν_e e-нейтрино $\bar{\nu}_e$ e-антинейтрино	0 0	0 0
μ^- μ^+ мюоны	$-e$ $+e$	105,7 105,7	ν_μ μ-нейтрино $\bar{\nu}_\mu$ μ-антинейтрино	0 0	0 0

Массы нейтрино не известны, но распадные данные дают $m_{\nu_e} < 60$ эВ, $m_{\nu_\mu} < 1{,}7$ МэВ. (Здесь за верхнюю границу массы принято экспериментальное значение.) Среднее время жизни мюона равно $2{,}22 \cdot 10^{-6}$ с. Нейтрино могут отличаться друг от друга и другими квантовыми числами, которые мы здесь не обсуждаем.

Таблица 26.2. Главный мезонный октет

Частица	Масса, МэВ	Среднее время жизни, с	Основные распады
π^+ π^- заряженные пионы	139,58	$2{,}61 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+\nu_\mu$ $\mu^-\bar{\nu}_\mu$
π^0 нейтральный пион	134,96	$0{,}83 \cdot 10^{-16}$	$\gamma\gamma$ γe^+e^-
K^+ K^- заряженные K-мезоны	493,8	$1{,}23 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+\nu_\mu$ $\pi^+\pi^0$ $\pi^+\pi^+\pi^-$
K^1 K^2 нейтральные K-мезоны $\begin{cases} K_1 \\ K_2 \end{cases}$	497,8	$0{,}87 \cdot 10^{-10}$	$\pi^+\pi^-$ $\pi^0\pi^0$
		$5{,}38 \cdot 10^{-8}$	$\pi^\pm e^\mp \nu$ $\pi^\pm \mu^\mp \nu$ $\pi^0\pi^0\pi^0$ $\pi^+\pi^-\pi^0$
η эта-мезон	548,8	$< 3{,}6 \cdot 10^{-19}$	$\gamma\gamma$ $\pi^0\pi^0\pi^0$ $\pi^+\pi^-\gamma$ $\pi^+\pi^-\pi^0$ $\mu^+\mu^-\gamma$

Указанные моды составляют около 70% всех распадов. Зарядовое число равно нулю. Все заряженные K-мезоны $\mu^\pm$ и $\pi^\pm$ тоже имеют при распаде эти моды, но они были исключены для частиц K_1^0 и K_2^0, среднее время жизни которых весьма

Таблица 28С. Главный барионный октет

Частицы	Масс., МэВ	Средние время жизни, с	Схема рас-пада
p протон n нейтрон	938,256 939,550	слабильный $1{,}01\cdot10^{3}$	— $pe^{-}\bar{\nu}$
Λ, лямбда-гиперон	1115,56	$2{,}5\cdot10^{-10}$	$p\pi^{-}$ $n\pi^{0}$
Σ^{+}	1189,47	$0{,}81\cdot10^{-10}$	$p\pi^{0}$ $n\pi^{+}$
Σ^{0} сигма-гипероны	1192,56	$<10^{-19}$	$\Lambda\gamma$
Σ^{-}	1197,44	$1{,}65\cdot10^{-10}$	$n\pi^{-}$
Ξ^{0} ксигтные частицы	1314,7	$3{,}0\cdot10^{-10}$	$\Lambda\pi^{0}$
Ξ^{-}	1321,2	$1{,}7\cdot10^{-10}$	$\Lambda\pi^{-}$

Спин всех этих частиц равен 1/2, а барионное число равно +1. Античастицы состоят из антикварков, составленных из соответствующих антиквар-ков. Частицы этого октета отличаются от частиц, с ними и средние времена жизни по отно-ю к барионам иного происхождения этих

в ней остается около ста частиц, составной характер которых не оговорен. Это протон, нейтрон, антипротон и антинейтрон, долгоживущие гипероны и антигипероны, пионы, K-мезоны, мюоны, нейтрино, электрон с позитроном и фотон. За исключением протона, антипротона, электрона, позитрона, фотона и нейтрино, все эти частицы нестабильны. Однако в свете сказанного выше нельзя, конечно, считать непременным условием «элементарности» абсолютную стабильность.

Элементарные частицы можно разделить на четыре группы. Фотон является единственным членом первой из них. Остальные группы частиц носят общие названия *лептонов*, *мезонов* и *барионов* (включая и антибарионы). В табл. 26А — 28С указаны некоторые свойства лептонов и наиболее характерных мезонов и барионов (см. также табл. С приложения).

27. Перечисленные в табл. 26В, 26С мезоны и барионы показаны также на рис. 27А и 27В, которые сильно напоминают схемы уровней на стр. 3. Каждая частица представлена на диаграммах короткой чертой, ордината которой равна массе покоя частицы, а абсцисса

соответствует ее электрическому заряду. (Заряд указан против середины черты.)

По современным представлениям, приведенные диаграммы полностью аналогичны схемам уровней атомов. Каждая диаграмма относится к «мультиплету» частиц, которые можно считать различными состояниями одной частицы, «общей» для всего мультиплета.

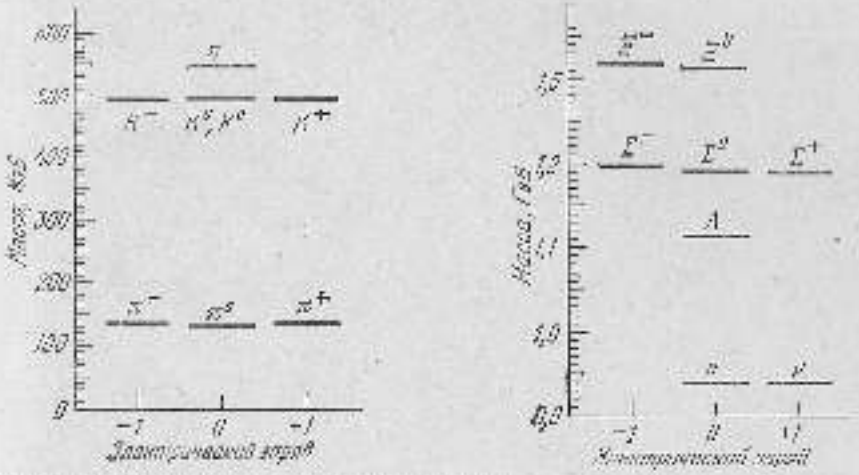


Рис. 27А. Спектр масс для мезонного октета, к которому принадлежат пионы и K-мезоны. Все частицы октета имеют барионное число, равное нулю. Истинно нейтральные мезоны K^0 и $\bar{K}^0$, обозначенные на схеме светлой линией разных цветов. Частицы и античастицы расположены симметрично по отношению к вертикали, проходящей через нуль странности. K- и η-мезоны идентичны по своим античастицам: $\bar{K}^0$-мезон является античастицей K^0-мезона

Рис. 27В. Спектр масс барионного октета, к которому принадлежат протон и нейтрон. Все частицы октета имеют спин, равный 1/2, и барионное число, равное +1. Принадлежность всему уровней можно рассматривать как состояние различных зарядовых состояний одной частицы, образующих мультиплет

На рис. 27С показан мультиплет антибарионов, состоящий из восьми частиц, каждая из которых является античастицей соответствующего бариона на рис. 27В. Античастицы мезонов для рис. 27А приведены на том же рисунке. Мы говорили, что октет мезонов самосопряжен. Отрицательный пион, таким образом, является античастицей положительного пиона, а отрицательный K-мезон — античастицей положительного K-мезона. Частицы, обозначенные K^0 и $\bar{K}^0$, образуют пару античастиц. Что касается нейтрального пиона и η-мезона, то они тождественны своим античастицам.

На рис. 27D показан мультиплет из десяти барионов, в который входят резонансы, обозначенные символом $N^*_{3/2}$ на рис. 21В. Природа этих резонансов еще, пожалуй, не ясна, но многие физики предпочитают включать их в число элементарных частиц.

28. Существующие в природе взаимодействия разделяются на *сильные* (частным случаем таких взаимодействий являются ядерные силы), *электромагнитные*, *слабые* и *гравитационные* взаимодействия. Мезоны, барионы и антибарионы сильно взаимодействуют

друг с другом. Фотоны и лептоны не обладают сильным взаимодействием; их поведение определяется электромагнитным и слабым взаимодействиями. Сильно взаимодействующие частицы (для них принято общее наименование *адроны*) могут участвовать как в электромагнитных, так и в слабых взаимодействиях. Многие

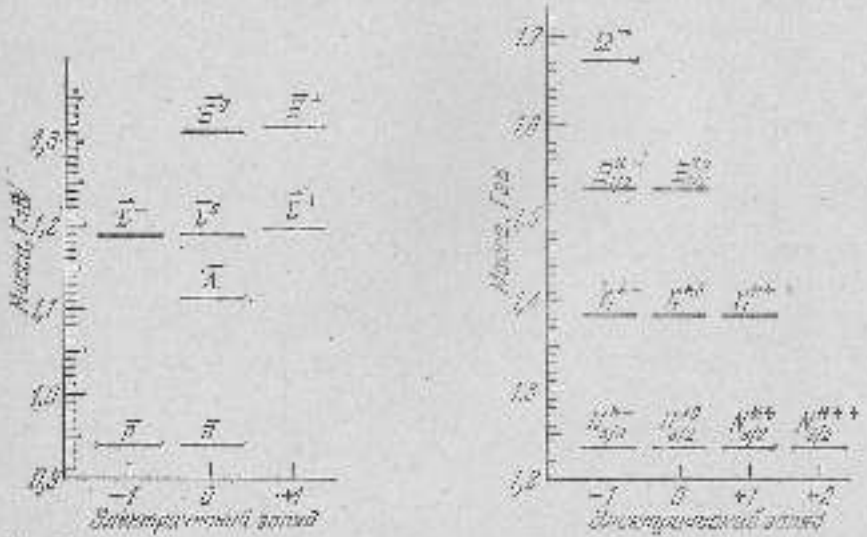


Рис. 27С. Спектр масс (в единицах массы протона) барионов, принадлежащих октету, приведенному на рис. 27А. Все частицы антибарионного октета имеют барионное число —1, спин, равный $^1/_2$. Отрицательно заряженные частицы, отмеченные звездочкой, имеют заряд, равный —1, остальные — нулевой.

Рис. 27D. Схема уровней адронных резонансов. Горизонтальная ось соответствует странности, вертикальная — полному изотопическому спину. Резонансы, как и на рис. 27С, образуют октет. Все показанные частицы имеют спин, равный $^3/_2$, и барионное число +1. На этой диаграмме показаны только те резонансы, которые распадаются в основном сильным образом. Приведенные значения масс получены с помощью дисперсионных соотношений. Существование частиц, отмеченных звездочкой, было предсказано до их обнаружения. Время жизни резонансов Y_1^{*0} и Ξ^{*0} составляет $\sim 10^{-23}$ с. Все остальные частицы имеют время жизни $\sim 10^{-20}$ с.

нестабильные адроны распадаются благодаря слабым взаимодействиям, и притом потому их времена жизни оказываются очень большими в ядерной шкале времени.

Взаимодействия элементарных частиц управляются рядом очень строгих законов сохранения и принципов симметрии. Один из таких законов сохранения заключается в том, что полный электрический заряд сохраняется при *всех* взаимодействиях *).

Существует аналогичный закон сохранения *барионного числа*. Если условно, довольно и жизненно приписать барионное число, равное нулю, барионам из табл. 26С — барионное число, равное +1,

*) Сохранение заряда является фундаментальным принципом электромагнитной теории (см. том II нашего курса: Бессель Э. Электричество и магнетизм. — 3-е изд. — М.: Наука, 1968).

а соответствующие антибарионам — барионное число —1, то можно утверждать, что при любых взаимодействиях полное число барионов сохраняется. Такой закон сохранения «объясняет» стабильность протона. Поскольку это самый легкий из барионов, его распад на более легкие частицы (которые не могут быть барионами) означал бы нарушение закона сохранения барионного числа.

29. Два упомянутых выше закона сохранения универсальны, так как выполняются во *всех* взаимодействиях. Известны другие

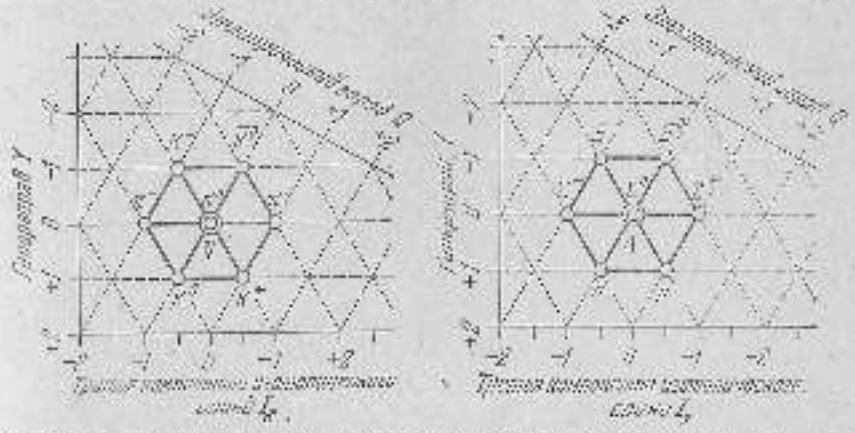


Рис. 28A. Диаграмма, на которой нанесены кривые постоянных частот изотопического спина, для мезонного октета, приведенного на рис. 27A. Гиперзаряд сохраняется во всех сильных и электромагнитных взаимодействиях. Полный заряд сохраняется во всех взаимодействиях. На этой диаграмме показаны только частицы, являющиеся членами как октетов по изотопическому спину, так и октетов по гиперзаряду. Частицы, не являющиеся членами обоих октетов, могут быть получены путем комбинирования этих частиц с частицами, принадлежащими синглету. Так, η-мезон является членом синглета, а η'-мезон — члены обоих октетов. Все частицы, принадлежащие данному октету, имеют одинаковый спин.

Рис. 28B. Диаграмма, показывающая изотопический спин для барионного октета, в котором входят протон и нейтрон. Не следует особенно удивляться тому, что гиперзаряд, как и изотопический спин, сохраняется в сильных взаимодействиях, которые управляются принципами симметрии, следующими из принципов симметрии пространства-времени. Например, что-то сохраняется, если пространство обладает симметрией относительно поворота. Заметим, что все частицы, принадлежащие данному октету, имеют одинаковый спин. Барионное число у всех частиц равно +1.

законы сохранения, характерные для определенных типов взаимодействий. Примером является величина, называемая *изотопическим спином*, которая сохраняется лишь в сильных и электромагнитных взаимодействиях. Каждому из адронов можно приписать определенное (целое) значение квантового числа (*гиперзаряд*), обладающего тем свойством, что во всех сильных и электромагнитных взаимодействиях полный гиперзаряд всегда сохраняется. При слабых взаимодействиях гиперзаряд не сохраняется. На рис. 28A — 28D показано, как производится приписывание квантового числа гиперзаряда сильно взаимодействующим частицам.

Рассмотрим некоторые примеры, которые покажут нам значение сохранения гиперзаряда. Реакция

$$\underset{(0)}{\pi^-} + \underset{(+1)}{p} \to \underset{(+1)}{K^0} + \underset{(0)}{\Lambda^0} \qquad (29a)$$

разрешена законом сохранения гиперзаряда. Она действительно происходит при столкновении отрицательных пионов достаточной энергии с протонами и хорошо изучена. (Числа в скобках под символами частиц означают их гиперзаряд.) Реакция

$$\underset{(-1)}{\pi^-} + \underset{(+1)}{p} \longrightarrow \underset{(0)}{\pi^0} + \underset{(0)}{\Lambda^0} \qquad (29b)$$

запрещена законом сохранения гиперзаряда. Это означает, в частности, что в столкновениях отрицательных пионов с протонами Λ-гиперон не может возникнуть до тех пор, пока энергия пиона

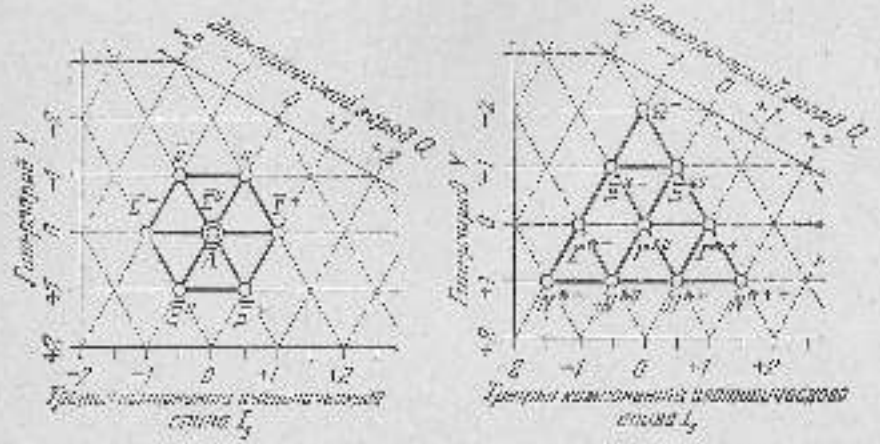


Рис. 29C. Диаграмма симметрии, следующая из «восьмеричного пути» для системы элементарных частиц, взаимодействующих сильно, соответствующих частицам на рис. 28B. Античастицы обозначены чертой над символом частицы. Все частицы имеют барионное число +1 (нет +1, нейтрон (1), Σ, Ξ), гиперзаряда и гиперзаряда античастицы противоположны соответствующим частицам

Рис. 29D. Диаграмма симметрии, следующая из «восьмеричного пути» для барионного дублета, к которому принадлежит сильно распадающаяся частица Δ. Поскольку нашим основным рассматриваемым процессом является образование этих частиц, диаграмма этих частиц приведена на рис. 27D

ще станет достаточно большой, чтобы вместе с Λ-частицей возникла *K*-частица в соответствии с реакцией (29c). До сих пор реакция (29b) никогда не наблюдалась. Реакция

$$\underset{(+1)}{n} + \underset{(+1)}{p} \longrightarrow \underset{(0)}{\Lambda^0} + \underset{(+1)}{p} \qquad (29c)$$

также запрещена законом сохранения гиперзаряда и никогда не наблюдалась на опыте.

Один из схем распада Λ-частицы имеет вид

$$\underset{(0)}{\Lambda^0} \longrightarrow \underset{(1)}{\pi^-} + \underset{(+1)}{p}; \qquad (29d)$$

при этом распаде гиперзаряд не сохраняется. Время жизни Λ частицы (порядка 10^{-10} с) очень велико в ядерной шкале времени. Законы сохранения барионного числа и гиперзаряда гарантируют ее от распада по всем другим каналам, за исключением тех, которые

осуществляются благодаря слабым взаимодействиям. В этом объясняется большое время жизни Λ-частиц.

30. На рис. 29A — 29D отражены экспериментально наблюдаемые свойства частиц; они кажутся весьма удивительными. Трудно сомневаться в том, что мы наблюдаем здесь проявление некоторой скрытой от нас симметрии природы. Такое же впечатление производит и схема уровней на рис. 27D, где один из замечательных особенностей является неравномерное расположение между уровнями (эквидистантность).

В настоящее время мы обладаем лишь весьма ограниченным представлением о том, что скрывается за удивительными симметриями и закономерностями, обнаруженными на опыте. Существует,

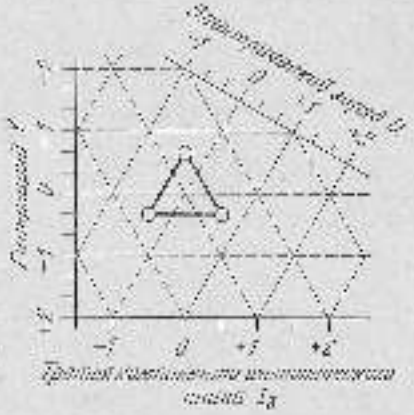


Рис. 29A. Если [illegible] существовать для описания [illegible] элементарных частиц, то [illegible] здесь диаграмма симметрии. Все [illegible] принадлежат [illegible] симметричного [illegible]. Частицы [illegible] диаграммы имеют барионное число $+1$ и спин, равный $\frac{1}{2}$. Заметьте, что [illegible] частицы имеют электрический заряд $+1$, [illegible], [illegible] -1. Следовательно, [illegible] тривиальное [illegible] диаграммы симметрии, которую можно получить из этой отражением от [illegible] плоскости, нулевого электрического заряда. Вследствие [illegible] кварков равно $+1/3$. Детали на диаграмме, соответствующей рис. 29B, могут представлять собой [illegible] состояние [illegible] и антикварка. Состояние на схеме на рис. 29E могут быть связанными состояниями трех кварков. Так как число кварков [illegible] сохраняется, то должна существовать [illegible] частица с дробным зарядом. Эксперименты [illegible] такие частицы не удалось обнаружить, и вполне возможно, что их не существует. Тем не менее, [illegible] ускорителях.

однако, феноменологическая теория (известная под названием «восьмеричного пути»), описывающая симметрии, изображаемые диаграммами, представленными на рис. 29A — 29D. Эта теория позволяет найти все возможные диаграммы симметрии и предсказать некоторые свойства частиц, образующих диаграмму. Замечательным успехом теории «восьмеричного пути» было экспериментальное подтверждение предсказания Мюрея Гелл-Манна о существовании частицы, обозначенной на рис. 27D и рис. 29D символом Ω^- [*].

31. О рассмотренных нами элементарных частицах (и мы можем добавить некоторые другие) можно сказать, что все они

[*]) *Barnes V. E. et al.* Observation of a Hyperon with Strangeness Minus Three.— Phys. Rev. Lett., 1964, v. 12, p. 204. (Заметим, что у этой работы 33 автора!)

равной степени элементарных. Мы не исходим среди них частиц, которые казались бы естественными. Тем не менее некоторые физики предполагают, что существуют еще более элементарные образования.

Гелл-Манн предположил, что мезоны и барионы являются сложными системами, образованными еще не открытыми частицами, которые он назвал *кварками*. Такую гипотезу нельзя считать безосновательной. Гелл-Манн заметил, что некоторые свойства мезонов и барионов и, в частности, принципы симметрии, управляющие взаимодействиями этих частиц, могут получить эстетически привлекательное объяснение, если кварки (и антикварки) существуют. Согласно идее Гелл-Манна, заряд кварков должен быть равен $\pm e/3$ и $\pm 2e/3$ (e — элементарный заряд), и этим они сильно отличаются от всех известных частиц. Диаграмма симметрии кварков показана на рис. 31А.

Все поиски кварков до сих пор не привели к положительному результату. Кварки должны быть значительно тяжелее нуклонов, в противном случае они были бы обнаружены в опытах на ускорителях. Можно поэтому думать, что если нуклон действительно является связанным состоянием (трех) кварков, то энергия связи таких состояний должна быть очень велика по сравнению с массой нуклона. Нуклон должен быть, таким образом, очень сильно связанной системой; в этом смысле он радикально отличался бы от других известных нам составных систем, в ядрах от атомов, молекул и даже ядер. (Энергия связи всех этих систем мала по сравнению с массой системы.) Поэтому можно думать, что если когда-нибудь будет установлена составная природа нуклона, то он окажется составным совсем не в том смысле, в каком составной является, например, такая частица, как дейтрон.

Основные идеи квантовой теории поля

32. Рассмотрим теперь некоторые теоретические попытки понять взаимодействия частиц. Вернемся к идее, высказанной в п. 3, согласно которой рассеяние следует рассматривать как проявление взаимодействия волны с волной. Классической идее о двух частицах, взаимодействующих с помощью сил, соответствует квантовомеханическая пара с взаимодействием волн де Бройля. Это значит, что волна де Бройля одной из частиц влияет на распространение волны де Бройля *другой* частицы. Такое влияние возможно лишь в том случае, если среда, в которой распространяются волны де Бройля, нелинейна, т. е. если коэффициенты среды нелинейны.

В линейной среде, где распространение волн описывается линейными дифференциальными уравнениями, любая линейная суперпозиция двух волн дает возможную волну, и присутствие одной волны не влияет на поведение другой.

33. Обсудим теперь свойства *вакуума*, или пустого пространства. В XIX веке, когда развивалась электромагнитная теория, вакуум был наделен еще другим наименованием. Его называли эфиром. Рассуждая о волне, естественно поставить вопрос о том, что же «колеблется», физики прошлого века говорили, что колеблется эфир и что поведение электромагнитных волн в эфире описывается уравнениями Максвелла. Для физиков того времени было естественным желание понять электромагнетизм в рамках механических моделей и считать электромагнитные волны чем-то аналогичным упругим волнам в твердом теле. На создание таких моделей было затрачено много усилий. Механические свойства, которыми приходилось наделять эфир, оказались совершенно отличными от свойств любого известного твердого тела или жидкости, но это само по себе не свидетельствовало против теории.

Механическая теория эфира вызывала, однако, серьезные возражения принципиального характера. Рассмотрение механических свойств эфира не казалось необходимым и ничего не добавляло к пониманию электромагнитных явлений. Уравнения Максвелла *сами по себе*, без всякой механической интерпретации, содержат все, что в классической электромагнитной теории имеет значение для эксперимента. Например, если мы хотим описать распространение радиоволн от одной антенны к другой, достаточно решить уравнения Максвелла с соответствующими граничными условиями, а наличие или отсутствие механической модели распространения волн не имеет значения. Постепенно физики поняли, что для электромагнетизма имеет значение лишь уравнение Максвелла. Попытки построения механических моделей поэтому были прекращены, и вопрос о том, что на самом деле колеблется, был признан бессмысленным.

34. Появление специальной теории относительности ускорило кончину механической теории эфира. Постараемся понять, почему это произошло. Если свойства эфира в какой-то степени аналогичны свойствам твердого тела или жидкости, то мы вправе ожидать существования некоторой преимущественной системы, по отношению к которой эфир покоится. С другой стороны, все соответствующие опыты указывали на невозможность определить состояние движения относительно эфира: все инерциальные системы полностью эквивалентны друг другу. Последнее утверждение составляет основу специальной теории относительности. Если это справедливо, то не вызывает у нас сомнений, что движущийся эфир должен иметь те же физические свойства, что и покоящийся. Такими качествами не может обладать никакое обычное твердое тело или жидкость. В связи с тем, что у эфира оказались фундаментально «немеханические» свойства, бессмысленным было пытаться наделить его другими механическими свойствами.

35. Сегодня *механический* эфир изгнан из физики и само слово «эфир» не встречается больше в учебниках. Мы говорим о «вакууме», демонстрируя тем самым отсутствие интереса к среде, в которой происходит распространение волн. Изучая электромагнитные волны или волны де Бройля, мы не спрашиваем больше о том, что колеблется. Мы ограничиваемся тем, что ищем *волновое уравнение* для этих волн, которое дает нам возможность предсказать экспериментально наблюдаемые явления. Как мы упоминали, это волновое

уравнения должны быть нелинейными, если мы хотим описать с их помощью взаимодействие частиц. Получение таких волновых

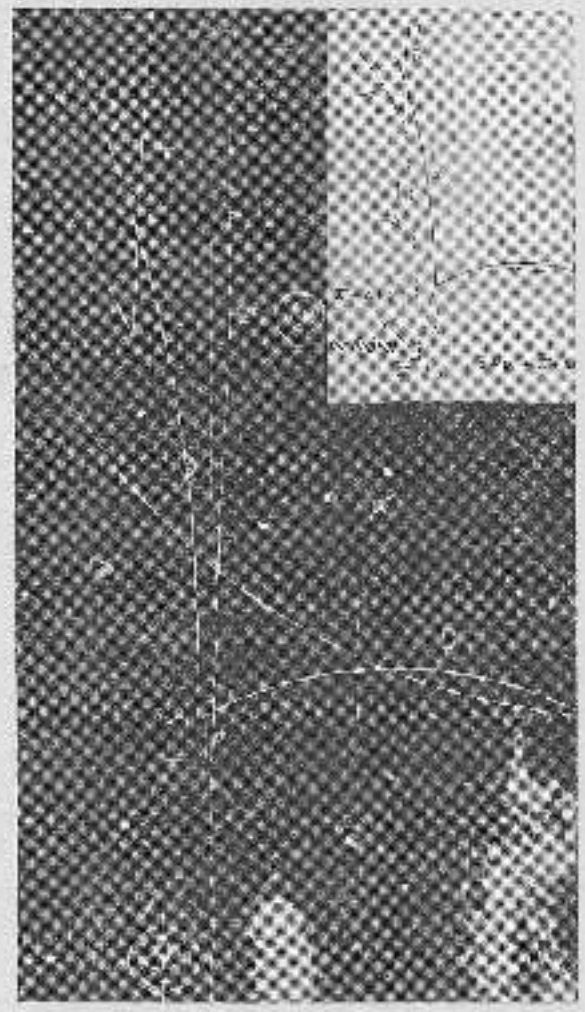


Рис. 33А. Схема образования и распада виртуальной электрон-позитронной пары в пузырьковой камере. В верхнюю часть этой камеры, имеющей форму цилиндра, налита жидкость, и поршень быстро опускают. Давление в камере при этом резко уменьшается, и жидкость оказывается в перегретом состоянии. Любая заряженная частица, пролетающая через камеру, ионизует молекулы жидкости, и вдоль ее траектории образуются пузырьки пара. Если камера помещена в магнитное поле, перпендикулярное к плоскости рисунка, то траектории заряженных частиц искривляются. Электрон и позитрон, возникшие в результате рождения пары, искривляются в противоположные стороны. Если электрон испытывает столкновение с протоном, то образуются $\bar{D}^0$ и γ-квант, который приводит к рождению новой электрон-позитронной пары. Электрон и позитрон снова испытывают столкновения с протонами, и образуются $\bar{D}^0$ и γ-кванты. Все описанные процессы происходят за очень короткое время (порядка 10^{-23} сек). Поэтому $\bar{D}^0$-частицы и γ-кванты, образующиеся в этих процессах, не успевают оставить видимых следов в камере.

уравнений и извлечение из них экспериментальных предсказаний является задачей *нелинейной теории поля*, которая претендует быть фундаментальной теорией элементарных частиц. В этой теории

волны описываются нелинейными полями, и по своему идеям она является квантовомеханическим обобщением классической волновой теории.

Мысль описать взаимодействие частиц через квантованные поля привлекательна во многих отношениях, и нам следует попытаться понять лишние перекладины такой теории. К сожалению, для этой цели необходим довольно сложный математический аппарат, которым мы сами не владеем, и нам придется ограничиться изложением основных идей.

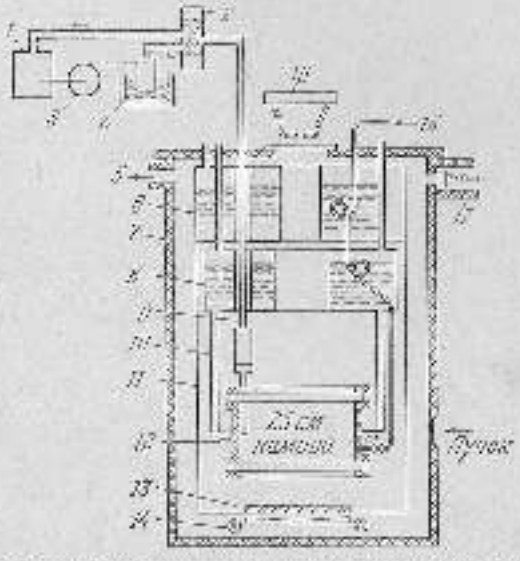


Рис. 33Б. Схема пузырьковой водородной пропановой камеры длиной 25 см. Камера «возбуждается» внезапным увеличением размеров, при которых находится жидкий водород. При уменьшении давления жидкость оказывается выше точки кипения, но кипение не может начаться немедленно: в течение короткого промежутка времени жидкость остается в перегретом состоянии. Когда через жидкость проходит заряженная частица, образуются ионы, становящиеся центрами кипения. При этом возникает ряд маленьких пузырьков пара, которые можно сфотографировать. Затем давление снова увеличивают, и все следы исчезают; камера готова к следующему циклу. 1 — резервуар для сбрасывания давления; 2 — золото сброса давления; 3 — конденсатор; 4 — декомпрессионный бак для накопления жидкого водорода; 5 — к вакуумному насосу; 6 — вакуумная рубашка; 7 — конденсационный бак; 8 — генератор импульсов возбуждения; 9 — радиационная защита; 10 — жидкий азот; 11 — жидкий водород; 12 — магнитная; 13 — затвор; 14 — поршень; 15 — фотокамера; 16 — оптическое окно; 17 — «спящий» клапан

36. Рассмотрим в весьма общем виде проблему взаимодействия между двумя (или несколькими) частицами, оставаясь сначала в рамках классической физики. В *нерелятивистской* теории можно было бы ввести силовое поле, действующее между частицами. Сила, действующая на данную частицу, зависит от ее положения и от положения другой частицы в тот же момент времени. Таким образом, действие сил в этом случае является мгновенным: если положение частицы внезапно меняется, соответствующее изменение силы мгновенно воспринимается другой частицей.

Мы считаем, что любая фундаментальная теория должна находиться в согласии с принципами специальной теории относитель-

света. Между тем описанное выше мгновенное взаимодействие полностью их противоречит. Никакой сигнал не может распространяться со скоростью, большей скорости света c, поэтому мгновенное действие тел невозможно. Если положение или состояние движения одной из частиц внезапно меняется, то другая частица почувствует изменение лишь через некоторое время, причем потребное для этого минимальное время равно времени распространения светового сигнала между частицами.

Создание релятивистской инвариантной теории взаимодействия классических частиц отнюдь не тривиальная задача. Для этого необходимо глубокое изменение нерелятивистских идей о мгновенном действии на расстоянии.

37. Возможный способ решения такой задачи заключается в понятии о (классическом) поле. Каждая частица является источником поля, которое способно распространяться в пространстве со скоростью, не превышающей скорость света c, и это поле влияет на движение других частиц. В релятивистской *классической* теории такого типа мы имеем дело как с частицами, так и с полями. Взаимодействие заряженных частиц, осуществляемое через электромагнитное поле, является хорошим примером такой теории: заряд представляет собой источник электромагнитного поля, и это поле в свою очередь влияет на движение заряженных частиц.

38. Рассмотрим проблему взаимодействия частиц с иной стороны. В классической нерелятивистской теории, где взаимодействие частиц сводится к мгновенно действующим силам, будущее поведение изолированной системы из нескольких частиц однозначно определено, если заданы положения и скорости всех этих частиц в некоторый момент времени. Другими словами, если мы имеем N частиц, то их состояние движения определяется $6N$ параметрами: система имеет конечное число степеней свободы. С другой стороны, в релятивистской теории, в которой взаимодействие описывается полями, недостаточно указать положения и скорости частиц в заданный момент времени. Мы должны еще указать и состояние поля. Классическая электромагнитная теория является прекрасным примером такой ситуации: положения и скорости всех заряженных частиц в данный момент времени не определяют однозначным образом электромагнитное поле. Начальные условия должны включать в себя и значения электромагнитного поля в любой точке пространства. Электромагнитное поле требует, однако, для своего описания бесконечно большого числа параметров, и вся система не является больше системой с конечным числом степеней свободы. В этом глубокое различие между релятивистскими и нерелятивистскими теориями.

39. Обратим внимание на другую особенность (классической) релятивистской теории: в любой момент времени часть полной энергии системы заключена в поле. Это свойство любой теории, в которой взаимодействие переносится полем. Рассмотрим, например, две частицы A и B, взаимодействующие друг с другом, и пусть частица A внезапно сталкивается с частицей C, которая на

действует непосредственно на частицу B. Состояние движения частицы A изменится, и с течением времени это изменение проявится как возмущение поля, создаваемого частицей A, в месте расположения

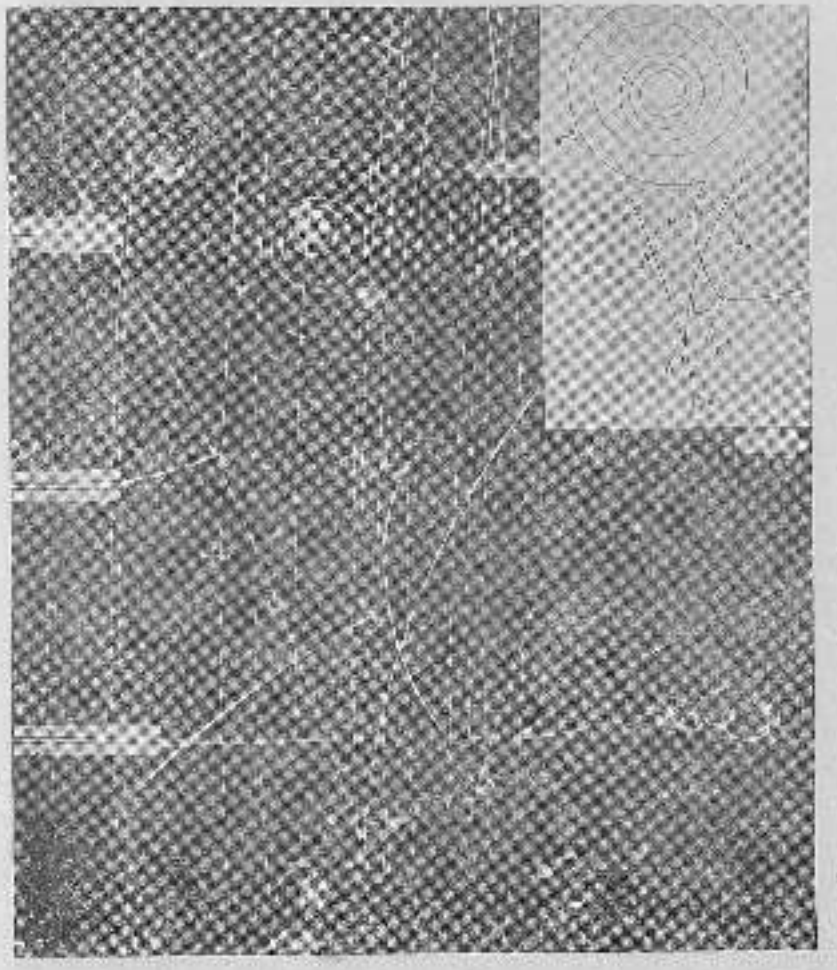


Рис. 89А. Сигнал, испущенный в момент времени t_1 частицей A, достигает в момент t_2 частицы B и вызывает в ней отдачу. В момент t_2 частица B испускает сигнал, который в момент t_3 достигает частицы A. Отдача частицы B в момент t_2 изменяет энергию частицы A на величину $\Delta E = -\Delta E$. Таким образом, энергия системы $A + B$ сохраняется.

частицы B. В конце концов состояние движения частицы B тоже изменится, и частица B может изменить свою кинетическую энергию. Таким путем между частицами A и B произойдет обмен энергией, осуществляемый через посредство поля. Если мы хотим построить теорию, в которой имеет смысл понятие о полной энергии системы в

данный момент времени и сохраняется полная энергия изолированной системы, то мы должны спросить себя, где находилась энергия, переданная частице B, между моментом столкновения частиц A и C и последующим моментом, когда частица B почувствовала изменение состояния частицы A. Мы вынуждены считать, что эта энергия была заключена в поле.

40. Эти размышления позволяют сделать еще один интересный вывод. Допустим, что ситуация не изменилась, но частица B отсутствует. В тот момент, когда частицы A и C столкнулись, поле, создаваемое частицей A, изменилось, и некоторая часть энергии частицы A перешла в поле. Это та же часть энергии, которая имелась в присутствии частицы B, так как частица A не «знает», что частица B, которая может воспринять энергию, отсутствует. Но если частицы B нет, куда исчезает энергия, передаваемая полем? Она куда-то уходит, и одна из возможностей ее исчезновения — излучение в пространство. Именно это и происходит в электромагнитной теории: если заряженная частица A сталкивается с другой частицей C (которая может быть и нейтральной), то частица A испускает электромагнитные волны, которые могут перенести энергию «в бесконечность», если нет других частиц, способных поглотить часть этой энергии.

Мы пришли, таким образом, к весьма общему выводу: если взаимодействие между частицами осуществляется полем, то поле должно проявлять себя в виде свободно распространяющихся и переносящих энергию волн.

41. Рассмотрим теперь проблему взаимодействия частиц с точки зрения квантовой механики. Еще в первых главах книги мы пришли к заключению, что с каждой частицей связана волна и что, с другой стороны, каждая волна имеет некоторые свойства частицы. Можно сказать, что квантовомеханическая волна идентична квантовомеханической частице: это один и тот же объект, поведение которого не совпадает ни с поведением классической частицы, ни с поведением классического волнового пакета. Такая точка зрения приводит к замечательному упрощению наших концепций. В классической физике мы имеем дело с двумя типами объектов — с частицами и волнами, осуществляющими взаимодействия между частицами. В квантовой физике удается избежать этой двойственности, рассматривая «частицы» и волны как различные проявления свойств одного и того же объекта. Мы формулируем теорию поля, описывающую распространение волн полей, которые представляют собой либроильевские волны частиц. Такая теория поля описывает также и взаимодействие между волнами, сводя к нему эффективные силы, действующие между частицами.

Это весьма привлекательная идея, и она является основой квантовой теории поля. В теории Шредингера силы между частицами должны быть заданы. Задав их, можно предсказать движение частиц, но сама теория Шредингера не дает никакого «объяснения», почему силы таковы. С другой стороны, в квантовой теории поля существование и природа сил тесно связаны с существованием частиц; мы

единым образом описываем частицы, волны и силы. Квантовая электродинамика, которая является одной из теорий поля, дает нам хороший пример этих свойств теории. Действительно, силы между электронами (и позитронами) возникают как проявление электромагнитного поля, а кванты электромагнитного поля (фотоны) испускаются взаимодействующими электронами.

42. Сделаем обзор основных идей квантовой теории поля. Квантовые поля вводятся для описания частиц и взаимодействия между ними. Поля зависят от координат и времени и описывают то, что называют *локальными* системами вакуума *). Волновой аспект материи вводится в теорию с самого начала: решения уравнений квантовой теории поля являются волнами. Волны имеют также свойства частиц. Хорошо локализованная частица соответствует концентрированному волновому пакету: частицу легче всего найти в той области пространства-времени, в которой амплитуда поля велика.

Уравнения поля нелинейны, и поэтому они могут описывать *взаимодействия* между волновыми пакетами (частицами). Нелинейность проявляет себя лишь в тех случаях, когда амплитуда поля велика. Если амплитуды малы, то волны распространяются приблизительно так же, как и в линейной теории. Если два волновых пакета, соответствующие двум частицам, перекрываются в данный момент времени в некоторой части пространства, нелинейность становится существенной и две волны влияют друг на друга. В классической картине это соответствует взаимодействию между двумя частицами. С другой стороны, если волны не перекрываются, между ними нет заметного взаимодействия, и это отвечает классической картине двух частиц, очень слабо взаимодействующих, если расстояние между ними велико.

43. Квантовая теория поля является существенным образом *теорией многих частиц*: она дает единый метод, пригодный для описания состояний с любым числом частиц данного типа. Рождение и исчезновение частиц представляют собой естественные и обычные для этой теории процессы. Их существование связано с нелинейным характером уравнений поля. Два волновых пакета (отвечающие двум частицам) могут перекрываться, взаимодействовать и создавать новые волновые пакеты (соответствующие новым частицам). Например, при столкновении двух электронов испускаются электромагнитные волны. Мы говорим, что происходит рождение фотона.

44. В соответствии с этими идеями были сформулированы многие более или менее глубокие квантовые теории поля. Классическим примером такой теории является квантовая электродинамика, которая достигла замечательных успехов в описании электромаг-

*) Пока не являются более обычными и сингулярные функции, зависящие от координат и времени. Они представляют собой математические объекты, определяемые операторами. Для наших целей можно, однако, считать их обычными функциями.

нитных взаимодействий заряженных частиц, и особенно в ядерной физике. Специальные предположения, лежащие в основе других теорий поля, правильно объяснить слабые и сильные взаимодействия, оказались менее успешными. Эти теории дают нам понимание

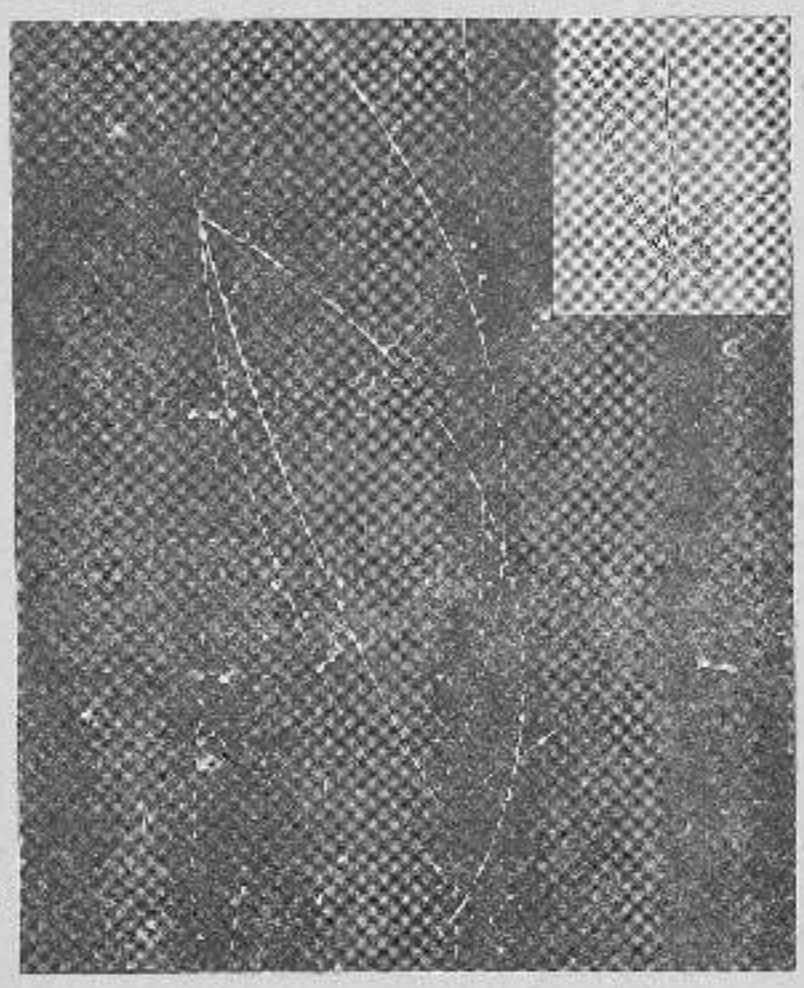


Рис. 44А. Фотография образования и последующего распада пары «мезон — антипротон». Двигаясь справа налево, мезон (π⁻) сталкивается с протоном, входящим в состав ядра водорода, содержащегося в пузырьковой камере. В результате столкновения образуются нейтральная частица (V°), которая распадается на протон и отрицательный мезон, и антипротон (p̄). Он, вероятно, аннигилирует с протоном ядра, образуя несколько мезонов. (Фотография любезно предоставлена Комптоновской лабораторией.)

некоторых, весьма общих свойств элементарных частиц, но не привели, однако, к существенно предсказаниям, подтверждающимся на опыте. В случае сильных взаимодействий метод последовательных

приближений, на которых основаны успехи квантовой электродинамики, оказывается непригодным. Причиной успехов электродинамики несомненно является малость постоянной тонкой структуры, т. е. слабость электромагнитных взаимодействий. Сильные взаимодействия чрезвычайно сильны. Это обстоятельство не позволяет найти решение предложенных уравнений поля, а по ряду таких решений нельзя судить о пригодности самих уравнений. Скорее всего они не годятся. Существует бесконечные возможности выбора уравнений, и в прошлом единственным руководящим принципом был «принцип простоты». Лишь для квантовой электродинамики путеводной нитью новой теории была классическая аналогия заряженных частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем.

46. В настоящее время характерными трудности теории перенормировки и попыт получить *решения* уравнений поля, предложенных для описания сильных взаимодействий. Такая ситуация привела к некоторому разочарованию в самих теориях поля как таковых. Раздались голоса, требующие отказаться от дальнейших попыток в этом направлении.

Против квантовой теории поля могут быть выдвинуты еще более общие возражения эпистемологического характера. Можно сказать, что *основные принципы* теории ставятся под сомнение на том основании, что не имеют непосредственного «операционального» значения (operational significance). Например, неясно, как могут быть измерены, хотя бы в принципе, сами поля. Лишь в отдельных специальных случаях эта проблема получила сколько-нибудь удовлетворительное решение. Возникает также вопрос: как ведут себя поля в очень малых областях пространства, с линейными размерами порядка, скажем, 10^{-130} см? Как и какими «линейками» можно измерить поля в таких областях? Удавалось ли кому-нибудь измерить (в любом значении этого слова) расстояния, меньшие 10^{-13} см?

Все эти возражения и вопросы действительно серьезны. Но против них следует, однако, заметить, что нет необходимости, чтобы каждое понятие теории имело *непосредственный* операциональный смысл. Хотя трудно представить себе, как можно «измерить» расстояния порядка 10^{-130} см, однако можно сохранить пространственно-временные координаты для описания явлений, на которой происходят физические явления. С другой стороны, не исключено, что будущая успешная теория взаимодействия элементарных частиц связана с отказом от некоторых из наших представлений о пространстве и времени. Квантовые теории поля дают *детальное* описание происходящего в любой точке пространства в любой момент времени. Вполне возможно, что это слишком большое требование и такое описание нереально в принципе.

46. Подобные соображения привели Вернера Гейзенберга в 1943 г. к новой теории взаимодействия частиц, названной теорией S-матрицы. В этой теории, которую мы не станем здесь обсуждать, Гейзенберг попытался рассмотреть лишь понятия, которые имеют ясный операциональный смысл. Он следовал, таким образом, тем

же идеям, которые в 1925 г. привели его к созданию матричной механики. Можно сказать, что теория S-матрицы имеет дело лишь с *результатом* процесса столкновения, а не с детальной последовательностью явлений, происходящих в течение самого процесса. До сих пор, однако, не удалось создать удовлетворительной теории. В настоящее время не существует *фундаментальной* теории сильных взаимодействий. Было сделано много попыток создания такой теории, но результаты не кажутся очень убедительными. Возможно, будущей теорией будет полевая теория или теория, подобная теории S-матрицы, а может быть, и совершенно новая теория, которую, возможно, удастся создать кому-нибудь из читателей этой книги.

Пионы и ядерные силы

47. Совершенно очевидно, что в этой книге мы не в состоянии обсуждать детали квантовой теории поля. Для этого нужно владеть весьма сложным математическим аппаратом. С другой стороны, мы уже убедились, что основные идеи такой теории просты. Прежде чем оставить эти проблемы, рассмотрим задачу, которую первым успешно решил Хидеки Юкава в 1934 г.

Вопрос заключается в том, существуют ли частицы, связанные с ядерными силами. Иными словами, это вопрос о существовании квантов поля ядерных сил. Если такие кванты существуют, то каковы их свойства? Можно ли их наблюдать экспериментально?

Известно, что с электромагнитными силами, действующими между заряженными частицами, связаны частица, а именно фотон. Известно также, что силы, связывающие нуклоны в ядре, не электромагнитного происхождения. Они гораздо сильнее электромагнитных сил и, кроме того, отличаются от них очень малым радиусом действия. На расстояниях, превышающих 10^{-13} см, ядерные силы очень быстро спадают до нуля и при расстояниях, больших 10^{-11} см, не имеют уже никакого практического значения. Приняв идеи квантовой теории поля, следует ожидать, что поле ядерных сил может проявить себя тоже в виде свободно распространяющихся волн, и нас интересует вопрос о соответствующих частицах. Подобно тому, как при столкновениях заряженных частиц испускаются фотоны, можно ожидать, что и при достаточно сильном столкновении двух нуклонов будут испущены кванты ядерного поля сил.

48. Читатель, вероятно, слышал, что такие частицы существуют и что они называются *пионами*. В 1934 г. о существовании мезонов никто не подозревал, и предположение Юкавы было поистине пророческим. Ему были известны лишь два замечательных свойства ядерных сил — их большая величина и малый радиус действия, и он поставил перед собой простейшие выше вопросы. Зная свойства ядерных сил, он не только смог предсказать существование соответствующих квантов, но и указал, что их масса должна быть приблизительно в 200 раз больше массы электрона. В этой работе он, несомненно, руководствовался аналогией с электромагнитным взаимодействием.

Экспериментальное подтверждение существования мезонов Юкавы имеет сложную и драматическую историю. Примерно к 1937 г. в космическом излучении были открыты частицы с массой, близкой к 200 массам электрона. Естественно, их сразу отождествили с мезонами Юкавы. Дальнейшие исследования показали, однако, что эти частицы (теперь они известны под названием *мюонов*, или *мю-мезонов*) очень слабо взаимодействуют с веществом (т. е. с ядрами) и поэтому не могут быть частицами, ответственными за большие ядерные силы. Загадка была решена лишь в 1947 г., главным образом благодаря работам Поуэлла и его сотрудников, которые обнаружили в составе космического излучения также частицы *), Это были пионы. Их масса близка к 270 электронным массам, они сильно взаимодействуют с ядрами и, без сомнения, должны быть отождествлены с квантами Юкавы.

К 1948 г. развитие методов ускорения частиц открыло возможность получения пионов в больших количествах при нуклон-нуклонных столкновениях высоких энергий. С этого времени началось интенсивное исследование их свойств. В настоящее время мы знаем, что пионы играют существенную роль во всех явлениях, связанных с сильным взаимодействием.

49. Попытаемся теперь «повторить» открытие Юкавы **). Будем рассматривать силы, действующие между двумя нуклонами, по аналогии с электростатическими силами между двумя стационарными заряженными частицами и постараемся решить нашу задачу на основе предполагаемой аналогии. Следует помнить, что эта аналогия далеко не совершенна. Тем не менее она приводит к правильному фундаментальному соотношению между массой пиона и свойствами сил, действующих между двумя нуклонами.

Будем рассуждать следующим образом. Уравнения Максвелла дают описание свободно распространяющихся электромагнитных волн в отсутствие источников. *Те же самые* уравнения описывают и электростатическое поле стационарного точечного заряда, а тем самым и потенциальную энергию взаимодействия двух таких зарядов. Действительно, электростатический потенциал, созданный одним из таких зарядов, удовлетворяет волновому уравнению всюду вне заряда, и это решение волнового уравнения обладает сферической симметрией и не зависит от времени. Предположим, что мы имеем волновое уравнение для свободно распространяющихся мезонов и хотим найти для него сферически симметричное и не зависящее от времени решение. Будем надеяться, что это решение даст нам потенциал поля ядерных сил, создаваемый одиночным нуклоном. Обозначим его через $V(r)$. Энергия взаимодействия двух нуклонов, находящихся на расстоянии r, должна быть пропорциональна

*) *Lattes C. M. G., Muirhead H., Occhialini G. P. S., Powell C. F.* Processes Involving Charged Mesons.— Nature, 1947, v. 159, p. 694; см. также: *Lattes C. M. G., Occhialini G. P. S., Powell C. F.* Observations on the Tracks of Slow Mesons in Photographic Emulsions.— Nature, 1947, v. 160, p. 453.

**) Теория Юкавы изложена см в работе: On the Interaction of Elementary Particles (Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 1936, v. 17, p. 48).

$V(r)$. Коэффициент пропорциональности характеризует силу связи нуклона с двойным полем.

50. Волновое уравнение, которому удовлетворяет добрейшавская волновая функция пиона, представляет собой уравнение Клейна — Гордона, знакомое нам по гл. 5. Если массу пиона обозначить через m_π и воспользоваться системой единиц, где $\hbar=c=1$, то волновое уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,\ t)-\nabla^2\psi(x,\ t)=-m_\pi^2\psi(x,\ t), \tag{50a}$$

где

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{50b}$$

— оператор Лапласа.

Волновое уравнение (50a) описывает свойства волнового поля де Бройля в отсутствие источников. В соответствии с нашей программой постараемся теперь найти стационарное и сферически симметричное решение этого уравнения, которое описывало бы хаотичное поле вне нуклона, расположенного в начале координат. В данном случае мы имеем дело с точечным источником, а именно с нуклоном, расположенным в начале координат. Поэтому решение может не удовлетворять уравнению (50a) в начале координат, но должно удовлетворять ему во всем *пространстве*. Мы принимаем это решение за потенциальную функцию и обозначаем его через $V(r)$. Оно не зависит от времени, поэтому первый член уравнения (50a), представляющий собой вторую производную по времени, исчезает. Уравнение принимает вид

$$\nabla^2V(r)=m_\pi^2V(r). \tag{50c}$$

51. Функция $V(r)$ зависит только от расстояния $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, и далее следует найти результат действия оператора Лапласа на такую функцию. Заметим прежде всего, что

$$\partial r/\partial x_1=x_1/r. \tag{51a}$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{\partial V(r)}{\partial x_1}=\frac{dV(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_1}=\frac{x_1}{r}\frac{V(r)}{dr}. \tag{51b}$$

Дифференцируя еще раз по x_1, получаем

$$\frac{\partial^2V(r)}{\partial x_1^2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{x_1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\right\}=\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}+\frac{x_1^2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\right), \tag{51c}$$

и окончательно:

$$\nabla^2V(r)=\frac{3}{r}\frac{dV(r)}{dr}+r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\right). \tag{51d}$$

После простого преобразования правой части можно (51d) записать в виде

$$\nabla^2V(r)=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV(r)}{dr}\right). \tag{51e}$$

Это важное равенство описывает действие дифференциального оператора Лапласа на функцию $V(r)$, зависящую только от расстояния r.

52. Мы пришли к обычному линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV(r)}{dr}\right)=m_\pi^2V(r). \tag{52a}$$

Читатель легко проверит подстановкой, что два линейно независимых решения этого уравнения имеют вид

$$r^{-1}\exp(-m_\pi r) \text{ и } r^{-1}\exp(+m_\pi r). \tag{52b}$$

Общее решение может быть выражено в виде их линейной комбинации. Заметим, что второе решение описывает потенциалу, который бесконечно *растет* при возрастании r, а это значит, что такое решение описывает внутринуклонные силы, которые растут с расстоянием. Ясно, что такое решение неприемлемо физически, и мы приходим к выводу, что потенциал должен быть пропорционален первому решению (52b), и получаем

$$V(r)=Cr^{-1}\exp(-m_\pi r), \tag{52c}$$

где C — постоянная.

Мы отбросили второе решение, что является иллюстрацией важного принципа, с которым мы не раз сталкивались прежде: не каждое решение волнового уравнения квантовой механики имеет физический смысл. Физически приемлемое решение должно удовлетворять не только самому волновому уравнению, но и ряду *граничных условий*, одно из которых заключается в том, что решение не может безгранично возрастать на бесконечности.

53. Мы достигли теперь цели, получив выражение для потенциальной энергии $U(r)$ двух нуклонов, находящихся на расстоянии r друг от друга:

$$U(r)=Cr^{-1}\exp(-r/\lambda_\pi). \tag{53a}$$

Здесь $\lambda_\pi=1/m_\pi$, а C — постоянная, характеризующая связь.

Благодаря экспоненциальному множителю потенциал $U(r)$ очень быстро уменьшается с увеличением расстояния r. В качестве грубой оценки можно принять, что *область действия* потенциала имеет размер λ_π. На расстояниях много больших потенциалом становится пренебрежимо малым. Такая зависимость потенциала от расстояния была рассмотрена в п. 38 т. 2.

Мы знаем теперь, что масса пиона равна 140 МэВ. Величина $\lambda_\pi=1/m_\pi$ — это комптоновская длина волны для пиона. (В системе СГС $\lambda_\pi=\hbar/m_\pi c$.) Численное значение $\lambda_\pi=1{,}4\cdot10^{-13}$ см, и таков «радиус действия ядерных сил». Юкава с самого начала знал, что этот радиус имеет порядок 10^{-13} см, и поэтому мог предсказать,

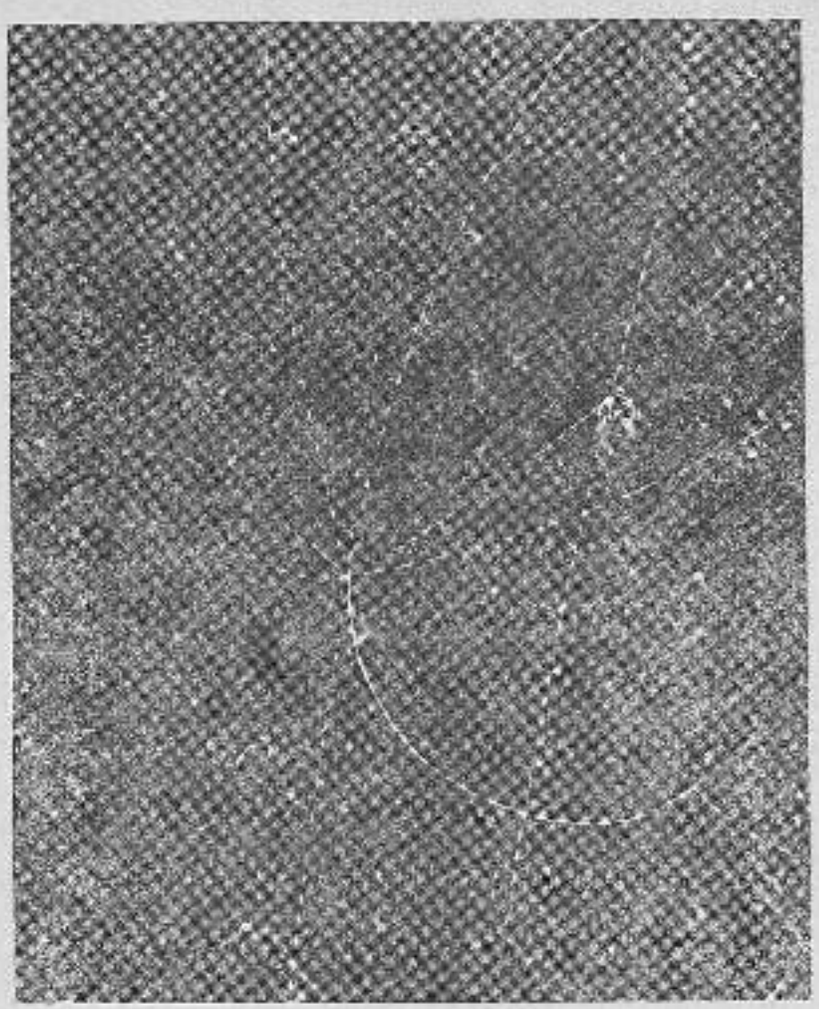


Рис. 6.1. Фотография протонного и антипротонного пузырьковой камере. Отсутствие искривления траектории в верхней части снимка. Антипротон проходит снизу, оставляя пузырьковый след. При аннигиляции возникают четыре заряженных пиона. Один, направленный движется вверх почти противоположно движению антипротона, распадается на мюон и нейтрино. Четыре пиона вскоре распадаются на мюоны и два нейтрино. Мюонный след трудно отличить от протонного, но только следы мюонов хорошо видны. Кривизна пионных и мюонных следов, направленных вправо, такова, что они образуют отрицательный мюонов отклоняются по движению часовой стрелки, следы положительных — в противоположную сторону. Медленно движущиеся протоны оставляют плотные следы, когда как следы более быстрых частиц, таких как электроны

что масса гипотетического кванта должна быть близка к 100 МэВ, т. е. к 200 электронным массам.

Обратите внимание, что «радиус действия» обратно пропорционален массе частицы, в данном случае пиона. Частица, не имеющая массы, например фотон, отвечает силам бесконечного радиуса действия: потенциал $U(r)$, отвечающий равенству (6.8), переходит в кулоновский потенциал. Этот потенциал, разумеется, тоже уменьшается с расстоянием, но уменьшение не является экспоненциальным. Таким образом, мы пришли к некоторому пониманию связи между существованием полей и свойствами полей ядерных сил.

54. Здесь мы рассмотрим вопрос терминологии. Часто говорят, что взаимодействие между двумя нуклонами осуществляется *обменом мезонами* и, аналогично, что кулоновское взаимодействие двух заряженных частиц осуществляется *обменом фотонами*. Смысл этих утверждений в том, что взаимодействие между двумя нуклонами может быть найдено именно так, как мы это сделали, т. е. то же волновое уравнение, которое описывает распространение свободных мезонов (или фотонов), описывает и силы, связанные с этими частицами. Имея дело с такой терминологией, читатель не должен думать, что нуклоны обмениваются хоккейными шайбами. «Обмен» является лишь фигуральным выражением, и это следует иметь в виду. Усвоив себе это, нет большой беды говорить «обмен частицами». Так принято. Обычно результаты открытий, «сделанных» нами на предыдущих страницах, описывают такими словами: «Две частицы могут взаимодействовать друг с другом благодаря тому, что они взаимодействуют с третьей частицей». В этом случае говорят о силах, возникающих благодаря обмену третьей частицей. Радиус действия результирующей силы обратно пропорционален массе «обменивающейся» частицы.

55. Следует внести ясность в один пункт, который может вызвать недоумение. Мы упомянули о этой главе о *волновом* характере уравнений квантовой теории поля. Несмотря на это, потенциал Юкавы [формула (6.8а)] появился в результате решения *стационарного* волнового уравнения, и читатель вправе спросить, верен ли ход наших рассуждений. Такое недоумение в некоторой степени справедливо.

Рассмотренная нами линейная теория является лишь приближением, годным, когда мезонное поле или потенциал $V(r)$ не слишком велики. Поэтому потенциал Юкавы имеет смысл для расстояний, больших комптоновской длины волны пиона, и может оказаться неверным для *всех* малых расстояний. Следует признать, что характер взаимодействия для таких расстояний в настоящее время неизвестен. Однако нет оснований полагать, что для расстояний, больших 10^{-13} *см*, общие свойства эффективных сил правильно описываются потенциалом Юкавы. Использование линейного приближения не может поэтому изменить основного вывода о том, что радиус сил обратно пропорционален массе частицы, участвующей в «обмене».

66. В предыдущих главах мы научились квантовомеханическому пониманию разнообразных физических явлений. Пятое положение, естественно, очень условно, и это не должно отвлекать внимания, так как настоящая книга носит вводный характер. Из перечисленных рассмотрена, осталось очень много общих принципов и законов, а то, что удалось затронуть, изучено с недостаточной полнотой и глубиной. Следует, однако, иметь в виду, что квантовая физика интенсивно развивалась в течение 40 или 50 лет и в этой области накоплено необозримое количество знаний. Никакая книга, носящая лишь вводный характер, не в состоянии рассмотреть этот предмет сколько-нибудь полно, и читателю предстоит прослушать специальные лекции и прочесть другие книги.

Мы сделали, однако, неплохое начало. Мы познали волновую природу частиц и рассмотрели причины, по которым физические явления, используемые для классической физики, получили естественное объяснение на основе волновых представлений. Мы поняли также, что законы классической физики являются «предельными» случаями более общих квантовомеханических законов. Мы обнаружили, что в любой физической системе существуют уровни энергии, и познали квантовомеханическое объяснение этого явления. В процессе обучения мы познакомились с удивительному (на первый взгляд) миром микрофизических явлений, рассмотрели порядок соответствующих физических величин и научились делать простые оценки, основанные на элементарных моделях.

Читатель, изучивший книгу с начала до конца последней главы, получил представление о некоторых наиболее важных проблемах современной физики. Он понял, что современная физика не завоевания — существует много будоражащих проблем, решения которых еще не видно.

Задачи

1. а) Вычислите вероятность прохождения нейтронов с энергией 0,1 эВ через квадратную фольгу толщиной 0,1 мм при комнатной температуре. Плотность кадмия равна 8,7 г/см³. Используйте для решения рис. 8А.

б) Вычислите вероятность прохождения нейтронов с энергией 1 эВ через слой кадмия толщиной 1 см при нормальном падении.

2. Полное эффективное сечение взаимодействия K^+-мезонов с протонами примерно равно 15 миллибарн при энергии K-мезонов, равной 100 МэВ. Чему равно среднее число взаимодействий на 1 см пути K-мезонов такой энергии в жидком водороде (например, в пузырьковой камере)? Плотность жидкого водорода равна 0,071 г/см³.

3. Эффективное сечение образования электрон-позитронной пары ультрафиолетовым квантом с энергией 20 МэВ при столкновении с атомом свинца равно 14 миллибарн. Какова вероятность образования пары при нормальном падении γ-кванта на свинцовую пластину толщиной 2,5 мм? Плотность свинца равна 11,3 г/см³.

4. Для γ-квантов с энергией 100 эВ измеренное на опыте эффективное сечение комптоновского рассеяния равно 0,29 барн. При этой энергии, которая много меньше энергии связи электрона, характеризующее классическое взаимодействие сечение эффективного сечения. Комптоновское рассеяние описывается процессом

поглощения и последующего испускания электрона. (Комптон-эффект был нами рассмотрен в гл. 4, но вопрос об эффективном сечении не обсуждался.) Предположим, что падающая волна с амплитудой A и частотой ω встречает покоящийся электрон. Он будет совершать колебания в направлении электрического вектора волны. Обозначим через x амплитуду этих колебаний. Согласно, что амплитуда x пропорциональна амплитуде A волны и зависит также от массы m и заряда электрона. Энергетический спектр рассеянного электрической волны с энергией $\hbar\omega$, в частности, он содержит электромагнитные волны. Пусть мощность излучения равна W (формула для W приведена в п. 49 гл. 31). Выразите, какая часть энергии, проходящей через единичную поверхность (поперечную электрону), рассеивается электроном. Выразите полученный результат через эффективное сечение рассеяния, если будет эффективное влияние комптоновского рассеяния. Эффективное сечение комптоновского рассеяния для атома равно произведению полученной величины на число электронов в атоме.

5. а) В п. 17 было проведено элементарное вычисление для вычисления эффективного сечения упругого сферического рассеяния. Интересно сравнить полученный там результат с экспериментальным значением эффективного сечения для α-рассеяния, приведенным на рис. 34D. Для упрощения задачи можно считать, что протон обладает бесконечно большой массой. В этом случае полная кинетическая энергия системы равна кинетической энергии налетающего α-частицы. В области экспериментальных данных, обозначенных $N_{\text{эксп}}$, она близка к 195 МэВ (в лабораторной системе координат). Величина πa_{max}^2 в области σ, оптом. Вы обнаружите, что порядок величин совпадает, но что экспериментальное эффективное сечение значительно больше, чем предсказано по простой теории упругих столкновений. Объяснение заключается в том, что рассеяние не имеет сферической симметрии, и теория должна быть расширена на случай более сложных угловых распределений. Тогда роль эффективного сечения в максимуме является в основном вопросом.

б) Оценка с помощью рис. 2-5 этой книги среднего время жизни N_{16}^*-состояния.

6. С помощью простой теории резонансного рассеяния решите задачу 17 и 19 этой главы, оценив эффективное сечение резонансного поглощения γ-лучей с энергией 14,3 эВ ядрами ^{57}Fe. (Экспериментальные результаты приведены на рис. 13А гл. 4). Предположим, что ширина линии составляет 20 эВ. Какова вероятность прохождения фотона через фольгу?

Заметим, что здесь мы имеем неприменимость нашей элементарной теории к фольгам толщиной в 1 см, что сечение имеет смысл только вблизи резонанса. Нетрудно ожидать, что действительная ширина резонансного эффективного сечения больше, чем вероятность испускания фотона атомом. Теория, однако, дает вероятность испускания максимального эффективного сечения, отсюда ведет к верхней оценке ширины резонансного эффективного сечения.

7. Максимальное эффективное сечение резонансного рассеяния на ядре атома может быть очень большим, так как здесь велико относительное изменение амплитуды, соответствующее резонансу вблизи линии с длиной волны 5000 Å, это очень велико.

а) Оцените максимальное эффективное сечение в барнах.

б) В реальном эксперименте в качестве мишени для опыта по резонансному рассеянию можно использовать стеклянный сосуд с парами натрия. (Рассмотрим, например, линию, описанную в задаче 3 гл. 3.) Атомы натрия имеют ширину спектральной линии $\Delta\omega$, расширенную доплеровским эффектом. Среднее время жизни возбужденного состояния составляет около 10^{-8} с. Оцените время, можно ожидать, ширину линии для наблюдаемых в лаборатории атомов натрия. Предположим, что получится опыт с парами натрия, имеющими такую ширину линии и что максимальное эффективное сечение составляет 10^{-12} см². Оцените эффективное сечение рассеяния этими парами в опыте для фольги с нормальным пучком.

в) Воспользовавшись данными, приведенными в предыдущем пункте задачи, оцените эффективное сечение, считая число атомов натрия в 1 см³ сосуда, необходимое для полного ослабления интенсивности луча света на длине 1 см. Оцените, что

такой спектр будет непрерывным и прозрачным для энергий, длина которых меньше реальной.

8. Рассмотрим частицу, образующие барионный октет. Его сектор представлен на рис. 27D, а диаграмма весов для изотопического спина — на рис. 28B. Одна из частиц октета стабильна. Одна из нестабильных частиц распадается благодаря электромагнитным взаимодействиям (за время жизни значительно порядка времени жизни нормальных частиц), а остальные частицы имеют слабые взаимодействия. Воспользуемся для объяснения этих особенностей октета рассмотренным законом сохранения барионного числа, заряда и гиперзаряда. Рассмотрим возможность распада частиц октета на упомянутые в тексте частицы, принимая во внимание экспериментальные данные для них. Например, можно ли с вычетом всех законов распад Σ^+ частицы на K^+-мезон и что-то еще. Вы обнаружите, что число возможностей заметно ограничено, и вам не придется рассматривать слишком много случаев. Покажите, что из известных законов сохранения следует, что ни одна из частиц октета не может распасться благодаря сильным взаимодействиям и лишь одна может распасться электромагнитным взаимодействием.

9. На диаграммах симметрии (рис. 29A — 29D) приведены значения величины I_3, равной третьей компоненте изотопического спина. Мы отмечали, что во всех сильных и электромагнитных взаимодействиях величина I_3 сохраняется.

Объясните, почему этот закон сохранения имеет большее значение, чем законы сохранения заряда, гиперзаряда и барионного числа.

10. В литературе по элементарным частицам часто встречается величина, называемая странностью. Она является одной из характеристик сильных взаимодействующих систем. Каждой из них можно приписать квантовое число S, странность, причем $S=Y-B$. Здесь Y и B — квантовые числа гиперзаряда и барионного числа соответственно. Из определения странности следует, что странность пионов и нуклонов равна нулю; они не странные, а обычные частицы.

а) При каких взаимодействиях полная странность сохраняется?

б) Странность S, электрический заряд Q, барионное число B и третья компонента изотопического спина I_3 связаны простым линейным соотношением. Получите его. (Это следует, в частности, из диаграмм симметрии, представленных на рис. 29A — 29D.)

11. Мы хотим получить Λ-частицу в столкновениях протонов с протонами. Какова минимальная кинетическая энергия протона, необходимая для этой реакции, если другой протон покоится?

12. В гл. II мы допустили, что на больших расстояниях от рассеивающего центра рассеянная волна имеет вид

$$\psi_k(x, t) = C_k(\theta)\, x^{-1} \exp(ikx - i\omega t). \qquad (*)$$

Покажите, что в частном случае сферически симметричного рассеяния, когда амплитуда рассеяния $f(\theta) = f$ не зависит от угла рассеяния θ, волновая функция $(*)$ действительно является решением уравнения Клейна — Гордона в свободном пространстве (за исключением точки $x=0$). Для этого будет полезно вспомнить задачу, обсуждаемую в п. 5.1—5.2.

Покажите, что для произвольной зависимости $f(\theta)$ уравнение $(*)$ представляет приближенное решение уравнения Клейна — Гордона. Подставив эту волновую функцию в уравнение Клейна — Гордона, убедитесь, что она удовлетворяет уравнению с точностью до членов x^{-2}, которые стремятся к нулю при x, стремящемся к бесконечности.

Дополнительная литература

Ферми Э. Элементарная частица.— М.: ИЛ, 1953.

Ферми Э. Лекции по атомной физике.— М.: ИЛ, 1952.

Окунь Л. Б. Законы и парадоксы элементарных частиц.— В кн.: Физика наших дней.— М.: Наука, 1972.

Хилл Р. По следу частиц.— М.: Мир, 1965.

Статьи в сборниках общего характера:

Паскаль Р. Атомное ядро.— 1962, вып. 1, с. 67.

Гелл-Манн М., Рейнбург Г. Элементарные частицы.— 1965, вып. 2, с. 5.

Чу Г., Гелл-Манн М., Розенфельд А. Сильно взаимодействующие частицы.— 1965, вып. 3, с. 85.

Вайсберг Дж., Глэзер Д. Законы сохранения в физике.— 1965, вып. 3, с. 5.

Морпурго Г. Ядерные силы.— 1965, вып. 4, с. 5.

Пасиер С. Мезон.— 1965, вып. 6, с. 36.

Хилл Р. Резонансные частицы.— 1965, вып. 3, с. 51.

Лебедев Л. Двухкомпонентное электричество.— 1963, вып. 3, с. 51.

Гребенев П. Сильное взаимодействие.— 1965, вып. 5, с. 20.

Мухин К. Спин.— 1963, вып. 2, с. 32.

Хофштадтер Р. Атомное ядро, 1962, вып. 1, с. 72.

Фрош Ф., Трилинг Л. Элементарные частицы.— М.: Атомиздат, 1963.

Альварес Л. Современное состояние физики элементарных частиц. Нобелевская лекция.— УФН, 1968, т. 100, с. 93.

Окунь Л. Б. Физика элементарных частиц.— М.: Наука, 1964.

Рубаков В. Экспериментальные наблюдения промежуточных векторных бозонов.— УФН, 1985, т. 147, вып. 2, с. 371.

Вайсенберг А. О. Время жизни очарованных частиц (обзор экспериментальных данных).— УФН, 1981, т. 135, вып. 1, с. 3.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица А. Значения основных физических констант

Постоянная Планка

$$\hbar = 2\pi\hbar = (6{,}62559 \pm 0{,}00030) \cdot 10^{-27}\ \text{эрг}\cdot\text{с}$$
$$\hbar = \hbar/2\pi = (1{,}05449 \pm 0{,}00003) \cdot 10^{-27}\ \text{эрг}\cdot\text{с}$$

Скорость света

$$c = (2{,}997925 \pm 0{,}000010) \cdot 10^{10}\ \text{см/с}$$

Элементарный заряд

$$e = (4{,}80298 \pm 0{,}00010) \cdot 10^{-10}\ \text{СГСЭ}_q = (1{,}59210 \pm 0{,}00002) \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}$$

Гравитационная постоянная

$$G = (6{,}670 \pm 0{,}005) \cdot 10^{-8}\ \text{дин}\cdot\text{см}^2/\text{г}^2$$

Постоянная тонкой структуры

$$\alpha = e^2/\hbar c = (7{,}29720 \pm 0{,}00003) \cdot 10^{-3}$$
$$1/\alpha = 137{,}0388 \pm 0{,}0006$$

Постоянная Ридберга

$$R_\infty = (1{,}09737{,}312 \pm 0{,}012) \cdot 10^{5}\ \text{см}^{-1}$$

Постоянная Больцмана

$$k = (1{,}38054 \pm 0{,}00006) \cdot 10^{-16}\ \text{эрг/К}$$

Тепловой эффект

$$N_A\varepsilon = (96487{,}2 \pm 0{,}5)\ \text{Кл/экв}$$

Универсальная газовая постоянная

$$R = N_A k = 8{,}314 \cdot 10^7\ \text{эрг/(град}\cdot\text{моль)} = 1{,}986\ \text{кал/(град}\cdot\text{моль)}$$

Масса электрона

$$m = (9{,}1092 \pm 0{,}0012) \cdot 10^{-28}\ \text{г}$$
$$= (5{,}4859 \pm 0{,}0001) \cdot 10^{-4}\ \text{а. е. м.}$$
$$= (0{,}51102 \pm 0{,}00002)\ \text{МэВ}/c^2$$

Атомная единица массы

$$1\ \text{а. е. м.} = (1{,}6604 \pm 0{,}0002) \cdot 10^{-24}\ \text{г}$$
$$= 931{,}478 \pm 0{,}045\ \text{МэВ}/c^2$$

Масса протона

$$M_p = (1{,}6724 \pm 0{,}0007) \cdot 10^{-24}\ \text{г}$$
$$= (1{,}0072764 \pm 0{,}0000008)\ \text{а. е. м.}$$
$$= 938{,}256 \pm 0{,}04\ \text{МэВ}/c^2$$

Масса нейтрона

$$M_n = (1{,}6666 \pm 0{,}0004) \cdot 10^{-24}\ \text{г}$$
$$= (939{,}550 \pm 0{,}04)\ \text{МэВ}/c^2$$

Комптоновская длина волны электрона

$$\lambda_c = \lambda/mc = (2{,}4263 \pm 0{,}0002) \cdot 10^{-10}\ \text{см}$$
$$\lambda_c = \hbar/mc = (3{,}8144 \pm 0{,}0003) \cdot 10^{-11}\ \text{см}$$

Период комптоновской волны

$$\lambda_c = \hbar^2/mc^2 = \alpha^{-1}\lambda_c = (3{,}8617 \pm 0{,}0002) \cdot 10^{-3}\ \text{см}$$

Классический радиус электрона

$$e^2/mc^2 = \alpha\lambda_c = (2{,}81777 \pm 0{,}0004) \cdot 10^{-13}\ \text{см}$$

Ионизационный потенциал водорода при бесконечно большой массе протона

$$\bar{h}\omega_\infty = \alpha^2 mc^2/2 = (13{,}5978 \pm 0{,}0006)\ \text{эВ}$$

Постоянная Ридберга при бесконечно большой массе протона

$$\bar{R}_\infty = \omega_\infty/4\pi c = \bar{R}_\infty/\alpha = (109737{,}31 \pm 0{,}01)\ \text{см}^{-1}$$

Постоянная Ридберга для водорода

$$\bar{R}_H = (109677{,}576 \pm 0{,}012)\ \text{см}^{-1}$$

Магнетон Бора

$$\mu_0 = e\hbar/2mc = (9{,}2734 \pm 0{,}0002) \cdot 10^{-21}\ \text{эрг/Гс}$$

Частота, отвечающая одному электрон-вольту:

$$(2{,}4196 \pm 0{,}0002) \cdot 10^{14}\ \text{Гц}$$

Температура, отвечающая одному электрон-вольту:

$$(11604{,}5 \pm 2{,}0)\ \text{К}$$

Таблица Б. Приближенные значения основных физических констант

Постоянная Планка $\hbar \approx 0{,}63 \cdot 10^{-26}$ эрг·с

Постоянная Авогадро $N_A \approx 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$

Скорость света $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с

Элементарный заряд $e \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ

Постоянная тонкой структуры $\alpha \approx 1/137$

Энергия покоя электрона $mc^2 \approx 0{,}5$ МэВ

Энергия покоя протона $Mc^2 \approx 940$ МэВ

Энергия, эквивалентная атомной единице массы, 1 а. е. м. $= 1/mc^2 \approx 931$ МэВ

Отношение массы протона к массе электрона $M/m \approx 1840$

Ионизационный потенциал водорода $\bar{R}_\infty = \alpha^2 mc^2/2 \approx 13{,}6$ эВ

Боровский радиус водорода $a_1 = \hbar/\alpha mc \approx 0{,}5 \cdot 10^{-8}$ см

Магнетон Бора $e\hbar/2mc \approx 0{,}9 \cdot 10^{-20}$ эВ/Гс

Радиус куба 1 Å — наименьшее число n, для которого $n^{1/3} > 1{,}2 \cdot 10^{8}$ см

Энергия связи ядра на нуклон ≈ 8 МэВ

Критическая температура ≈ 200 К $= (1/20)\ mc^2$

Оптическая область $4000 - 8000$ Å

$3{,}0 - 1{,}5$ эВ

Один электрон может соответствовать

температуре 12 000 К,

частоте $2{,}4 \cdot 10^{14}$ Гц,

колебательной энергии 2 000 кал/моль,

вращательному числу 8000 см$^{-1}$,

длине волны 12 000 Å.

Приближенные значения констант легко запомнить. К основным постоянным относятся

Таблица 5. Наиболее стабильные элементарные частицы *)

Частица	Спин	Масса, МэВ	Среднее время жизни, с	Основные типы распада: схема распада	вероятность	энергетическая ширина линии, кэВ (время распада, с) или масса покоя, МэВ
γ фотон	1	0	стабилен	стабилен		
Лептоны: ν_e нейтрино ν_μ нейтрино	1/2	0 ($<0{,}2$ кэВ) 0 (<2 МэВ)	стабилен	стабильны		
$e^\pm$ электрон — позитрон	1/2	0,5 [1]	стабилен	стабильны		
$\mu^\pm$ мюон	1/2	105,659	$2{,}20\cdot10^{-6}$	$e\nu\nu$	100 %	105
Барионы **) p протон n нейтрон	1/2	938,256 939,550	стабилен $1{,}01\cdot10^{3}$	стабилен $pe^-\nu$	100 %	0,79
Λ гиперон	1/2	1115,58	$2{,}51\cdot10^{-10}$	$p\pi^-$ $n\pi^0$ $p\mu^-\nu$ $pe\nu$	64 % 36 % $1{,}4\cdot10^{-4}$ $0{,}89\cdot10^{-3}$	38 41 72 177
Σ^+ Σ^0 Σ^- — гипероны	1/2	1189,37 1192,56 1197,44	$0{,}81\cdot10^{-10}$ $<1{,}3\cdot10^{-14}$ $1{,}65\cdot10^{-10}$	$p\pi^0$ $n\pi^+$ $n\gamma$ $\Lambda\gamma$ $n\pi^-$ $ne^-\nu$ $n\mu^-\nu$ $\Lambda e^-\nu$	53 % 47 % $1{,}0\cdot10^{-3}$ 100 % 100 % $1{,}3\cdot10^{-3}$ $3{,}0\cdot10^{-4}$ $5{,}8\cdot10^{-4}$	116 110 251 77 118 257 152 81
Ξ^0 } каскадные Ξ^- } гипероны	1/2	1314,7 1321,2	$3{,}0\cdot10^{-10}$ $1{,}71\cdot10^{-10}$	$\Lambda\pi^0$ $\Lambda\pi^-$ $\Lambda e^-\nu$	100 % 100 % $3{,}0\cdot10^{-4}$	7 5 205
Ω^- гиперон	3/2	1674	$1{,}3\cdot10^{-10}$	$\Xi\pi$ ΛK^-	~38 % ~50 %	231 63

*) Данные таблицы взяты из обзора: Particle Data Group, M. Roos et al. Rev. Mod. Phys., 1970, v. 42, p. 1. В этом обзоре приведены дополнительные данные о свойствах частиц и резонансных состояний, не вошедшие в таблицу.

**) Кроме барионов, перечисленных в таблице, не указанных в таблице.

Продолжение таблицы

Частица	Спин	Масса, МэВ	Среднее время жизни, с	Основные типы распада: схема распада	вероятность	энергетическая ширина линии, кэВ (время распада, с) или масса покоя, МэВ
Мезоны: $\pi^\pm$ заряженные пионы	0	139,58	$2{,}609\cdot10^{-8}$	$\mu\nu$ $e\nu$ $\pi^0e\nu$ $\pi^0\mu\nu$ $\gamma\gamma$ e^+e^-	~100 % $1{,}24\cdot10^{-4}$ $1{,}24\cdot10^{-4}$ $1{,}0\cdot10^{-8}$ 98,8 % 1,2 %	34 139 34 4,09 135 133
π^0 нейтральный пион	0	134,98	$0{,}89\cdot10^{-16}$			
$K^\pm$ заряженные каоны (K-мезоны)	0	493,8	$1{,}23\cdot10^{-8}$	$\mu\nu$ $\pi^\pm\pi^0$ $\pi^\pm\pi^0\pi^0$ $\pi^+\pi^0\gamma$ $e^\pm\pi^0\nu$	63,1 % 21,3 % 5,5 % 1,7 % 8,4 % 4,6 %	388 215 75 64 253 359
K^0 K_1^0 K_2^0 — нейтральные каоны	0	497,9	$0{,}87\cdot10^{-10}$ $5{,}66\cdot10^{-8}$	$\pi^+\pi^-$ $\pi^0\pi^0$ $\pi^0\pi^0\pi^0$ $\pi^+\pi^-\pi^0$ $\pi^\pm e^\mp\nu$ $\pi^\pm\mu^\mp\nu$ $\pi^+\pi^-$ $\pi^0\pi^0$	68,9 % 31,1 % 21,5 % 12,5 % 27,5 % 38,8 % 0,15 % 0,33 %	219 228 93 84 203 356 219 229
Ξ^0 — каскадный гиперон	0	518,6	$\sim2{,}3\cdot10^{-10}$	$\Lambda\pi^0$ $\Lambda\pi^-$ $\Lambda\pi^0\pi^0$ $\Lambda\pi^-\pi^0$ $\Lambda e^-\nu$	31,1 % 21,0 % 20,5 % 23,4 % 4,6 %	149 114 411 176 359

Э. Вихман

КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

Перевод с английского

Редакторы Л. М. Глазова, В. А. Григорьев
Художественный редактор Т. Н. Кольченко
Технический редактор Г. В. Журавлева
Корректоры О. А. Сазон, Н. Н. Дорохова

ИБ № 12054

Сдано в набор 02.10.80. Подписано к печати 24.03.81. Формат 84×108/16. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 14,0. Усл. кр.-отт. 14,0. Уч.-изд. л. 27,05. Тираж 24 000 экз. Заказ № 1582/127. Цена 1 р. 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Набрано в типографии Октябрьской революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28. Отпечатано в Первомайской типографии ПО «Периодика» Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Первомайск, ул. Кирова, д. 16.