

211139.

РАҲМАТ АКБАРОВ

МАТЕМАТИКАИ ОЛӢ

(таҳлили математики)

Ҷилди 1

Душанбе - 1999

РАҲМАТ АКБАРОВ

МАТЕМАТИКАИ ОЛӢ

(таҳлили математикӣ)

Ҷилди 1

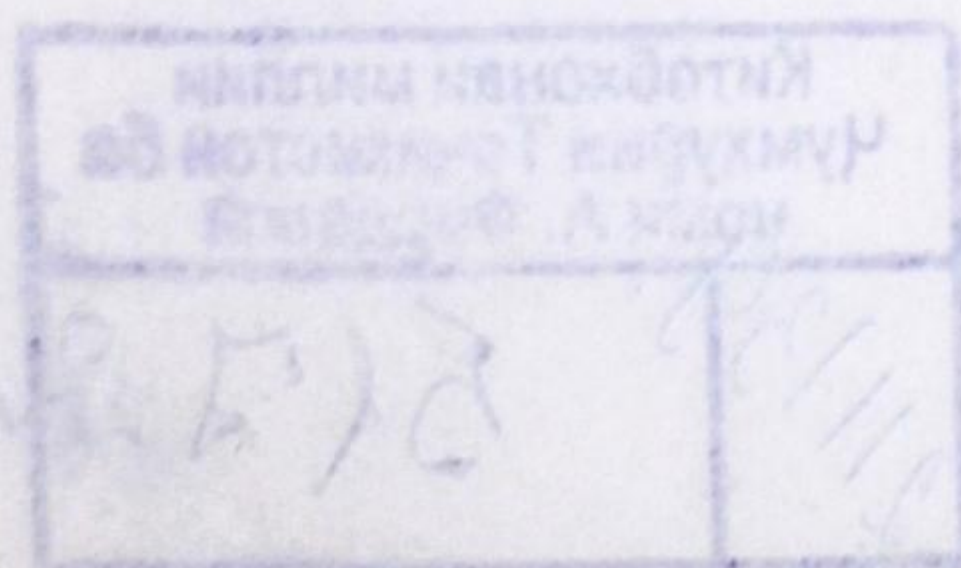
ВАСОИТИ ТАЪЛИМ

барои донишҷуёни мактабҳои олии

ВАЗОРАТИ МАОРИФИ ТОҶИКИСТОН

ба ҷоп тавсия намудааст

Душанбе - 1999



ПЕШГУФТОР

Дар васоити таълим таҷрибаи бон муаллиф ҳангоми хондани лексияҳо ва гузаронидани машғулиятҳои амалӣ аз фанни математикаи оля (элементҳои таҳлили математикӣ ва алоқаи он бо қисмҳои алгебра, геометрия ва дигарҳо) бо назардошти методҳои ҳозиразамон маълумотҳо оварда шудаанд.

Шарҳи баёни маълумотҳои назариявӣ бо ҳалли машқҳои зиёди амалӣ баён ёфтаанд. Ба мафҳумҳои барои донишҷӯён мушқилфаҳми ҳудуди функсия, мунтазам бефосилагии функсияҳо, наздиқшавии интегралҳои ғайри хос ва тадбиқи онҳо диққати махсус дода шудааст.

Васоити таълим бештар ба барномаи курси математикаи олии ихтисосҳои физика, иқтисодиёт, химия, биология ва муҳандисон таъя карда бошад ҳам, аз он донишҷӯёни ихтисоси математикаи мактабҳои оля низ бо пуррагӣ истифода бурда метавонанд. Ҳар кадом параграф рақами формула ва тасдиқоти худро дорад. Масалан, (29.3) - формулаи 3-юми параграфи 29, теоремаи 31.2 - теоремаи 2-юми параграфи 31-ро мефаҳмонад.

Барои хубтар аз худ кардани исботи тасдиқотҳои алоҳида дар баъзан бандҳои васоити супоришҳо дода шуда дар охири бобҳо машқҳо оварда мешаванд, ки онҳоро мустақилона дар машғулиятҳои амалӣ ё фардӣ иҷро намудан мумкин аст.

Васоити таълимиро устодон, профессорҳо Н. Раҷабов, С. Азизов, А. Сатторов, Н. Усмонов аъзоёни кафедраи таҳлили математикӣи донишгоҳи давлатии Кулоб, дотсентон Ҳ. Ниматов, О. Чўраев хонда фикру мулоҳизаҳои аниқ доданд, ки ба онҳо изҳори миннатдорӣ менамоям.

Васоити таълим аз камбудии ҳоли нест. Шахсоне, ки барои ислоҳи камбудии он фикру мулоҳизаҳои ҷанҷолро ба кафедраи таҳлили математикӣи донишгоҳи давлатии Кулоб мерасонанд, муаллиф ба онҳо миннатдорӣ худро пешакӣ изҳор менамояд.

Муаллиф

БОБИ 1. АДАДҲОИ ҲАҚИҚӢ

§1. МАЧМУЪ ВА АМАЛҲОИ ОН

1. *Мафҳуми маҷмӯъ* - дар математика яке аз мафҳумҳои аввалин ҳисоб мешавад. Вай таърифи умумӣ надорад. Дар зери мафҳуми маҷмӯъ ҷамъ ё би-сёрии объекти предметҳои фаҳмида мешавад, ки бо ягон нишона ҷамъ овар-да шудаанд. Масалан, маҷмӯи ҳамаи ҳарфҳои гуногуни ягон саҳифаи китоб, маҷмӯи ҳамаи садоноҳо дар алфавит, маҷмӯи ҳамаи решаҳои ягон муодила, маҷмӯи донишҷӯёни гурӯҳ, факулта, донишгоҳ ва ғайра. Маҷмӯъҳоро бо ҳарфҳои калони алфавити лотинӣ $A, B, X, Y, \dots$ ишора мекунем. Обь-ектҳои, ки маҷмӯёро ташкил медиҳанд, элементҳои маҷмӯъ ном дошта бо ҳарфҳои хурди $a, b, x, y, \dots$ ишора карда мешаванд. Агар x - элементи маҷмӯи X бошад, онгоҳ ҷуини менависанд: $x \in X$ ё $x \in X$ (" x - таълуқдори маҷмӯи X " ҳонда мешавад).

Агар x элементи маҷмӯи X набошад, онгоҳ ҷуини менави-санд: $x \notin X$, $x \notin X$, $x \notin X$ ё $x \notin X$ (" x таълуқдори маҷмӯи X нест"). Агар маҷмӯи X аз элементҳои x иборат бошад, онгоҳ ҷуини менависанд: $X = \{x\}$. Дар ин маврид x - элементи ихтиёрии маҷмӯи X мебошад. Агар элементҳои маҷмӯи X аз $x_1, x_2, x_3, \dots$ иборат бошад, онгоҳ ҷуини менависанд: $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$.

Агар ягон хосияти характерноки маҷмӯи X , масалан $P(x)$ нишон дода шавад, онгоҳ $X = \{x | P(x)\}$ ё $X = \{x : P(x)\}$ менависанд. Масалан, $X = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$ маҷмӯи ҳамаи решаҳои муодилаи $x^2 - 5x + 6 = 0$ мебошад. Маҷмӯъҳо охиринок ва беохир мешаванд.

* А. Пуанкаре (1857-1912) - математикки франсавӣ

УДК 517.2

Муҳаррирон:

Нусрат Раҷабов — узви вобастаи Академияи илмҳои Тоҷикистон, ходими хизматнишондодаи илми Ҷумҳурии Тоҷикистон, доктори фанҳои физикаю математика, профессор;

Саид Азизов — корманди шоистаи Тоҷикистон, номзоди фанҳои физикаю математика, профессор.

Муқарризон:

Абдуманон Сатторов — узви вобастаи АБИМО, доктори илмҳои физикаю математика, профессор;

Нурулло Усмонов — номзоди фанҳои физикаю математика, профессор.

Раҳмат Акбаров. МАТЕМАТИКАИ ОӢ. Васоити таълим барои донишҷӯёни мактабҳои оӣ. Душанбе, 1999.
Ҷилди 1 — 414 с.

©. Раҳмат Акбаров - 1999

Дар матбааи нашриёти "Амри илм" чоп шудааст
Ба чопаш 12.10.1999 имзо карда шуд. Чопи ротапринт.
Коғазӣ офсетӣ N:1. Супориши N:20. Адади нашр 1000 нусха.
Ҳаҷмаш 26 ҷузъи чопӣ. Нарҳаш шартномавӣ.

ISBN 5-89855-232-4



ИШОРАҲО

- ▲ - ибтидо ва интиҳон тасдиқотҳо ва машқҳо
- Э - вучуд дорад мавҷуд, ёфт мешавад
- Ү - барои ихтиёри ё барои дилхоҳ
- $f: A \rightarrow B$ - инъикоси маҷмӯи A ба маҷмӯи B
- N - маҷмӯи ададҳои натуралӣ
- Z - маҷмӯи ададҳои бутун
- Q - маҷмӯи ададҳои раціоналӣ
- J - маҷмӯи ададҳои иррационалӣ
- R - маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ
- $\mathbb{C}$ - маҷмӯи ададҳои комплексӣ
- C - классҳои функсияҳои бефосила
- $\cup$ - амали ҷамъи маҷмӯҳо
- $\cap$ - амали буриши маҷмӯҳо
- $A \setminus B$ - фарқи маҷмӯи A ва B
- $x \in A$ - x мутааллиқи маҷмӯи A
- $x \notin A$ - x ба маҷмӯи A тааллуқдор нест
- $\vee$ - аломати дизъюнксия, ки "ё" -ро иваз мекунад
- $\wedge$ - аломати конъюнксия, ки "ва" -ро иваз мекунад
- $A \Rightarrow B$ - аз A, B ҳосил мешавад B натиҷаи A аст
- $\Leftrightarrow$ - аломати баробарқувватӣ ё фақат ва фақат ҳамон вақт

ПЕШГУФТОР

Дар васоити таълим таҷрибаи бои муаллиф ҳангоми хондани лексияҳо ва гузаронидани машғулиятҳои амалӣ аз фанни математикаи оля (элементҳои таҳлили математикӣ ва алоқаи он бо қисмҳои алгебра, геометрия ва дигарҳо) бо назардошти методҳои ҳозиразамон маълумотҳо оварда шудаанд.

Шарҳи баёни маълумотҳои назариявӣ бо ҳалли машқҳои зиёди амалӣ баён ёфтаанд. Ба мафҳумҳои барои донишҷӯён мушқилфаҳми ҳудуди функсия, мунтазам бефосилагии функсияҳо, наздиқшавии интегралҳои ғайри хос ва тадбирики онҳо диққати махсус дода шудааст.

Васоити таълим бештар ба барномаи курси математикаи олии ихтисосҳои физика, истисодиёт, химия, биология ва муҳандисон таъя карда бошад ҳам, аз он донишҷӯёни ихтисоси математикаи мактабҳои оля низ бо ғурағӣ истифода бурда метавонанд. Ҳар кадом параграф рақами формула ва тасдиқоти худро дорад. Масалан, (29.3) - формулаи 3-юми параграфи 29, теоремаи 31.2 - теоремаи 2-юми параграфи 31-ро мефаҳмонад.

Барои хубтар аз худ кардани исботи тасдиқотҳои алоҳида дар баъзан бандҳои васоити супоришҳо дода шуда дар охири бобҳо машқҳо оварда мешаванд, ки онҳо мустақилона дар машғулиятҳои амалӣ ё фардӣ иҷро намудан мумкин аст.

Васоити таълимиро устодон, профессорҳо Н. Раҷабов, С. Азизов, А. Сатторов, Н. Усмонов аъзоёни кафедраи таҳлили математикони донишгоҳи давлатии Кулоб, дотсентон Ҳ. Ниматов, О. Ҷураев хонда фикру мулоҳизаҳои аниқ доданд, ки ба онҳо изҳори миннатдорӣ менамоям.

Васоити таълим аз камбудӣҳо ҳоли нест. Шахсоне, ки барои ислоҳи камбудӣҳои он фикру мулоҳизаҳои ҷашнро ба кафедраи таҳлили математикони донишгоҳи давлатии Кулоб мерасонанд, муаллиф ба онҳо миннатдорини худро пешакӣ изҳор менамояд.

Муаллиф

Математика санъатест, ки чизҳои
гуногунро номҳои якхела медиҳад.
(А. Пуанкаре)*

БОБИ 1. АДАДҲОИ ҲАҚИҚӢ

§1. МАҶМУӢ ВА АМАЛҲОИ ОН

1. *Мафҳуми маҷмӯ* - дар математика яке аз мафҳумҳои аввалин ҳисоб мешавад. Вай таърифи умумӣ надорад. Дар зери мафҳуми маҷмӯ чамъ ё би-сёрии объекти предметҳое фаҳмида мешавад, ки бо ягон нишона чамъ оварда шудаанд. Масалан, маҷмӯи ҳамаи ҳарфҳои гуногуни ягон саҳифаи китоб, маҷмӯи ҳамаи садонокҳо дар алфавит, маҷмӯи ҳамаи решаҳои ягон муодила, маҷмӯи донишҷӯёни гурӯҳ, факулта, донишгоҳ ва ғайра. Маҷмӯъҳоро бо ҳарфҳои калони алфавити лотинӣ: $A, B, X, Y, \dots$ ишора мекунем. Объектҳое, ки маҷмӯро ташкил медиҳанд, элементҳои маҷмӯ ном дошта бо ҳарфҳои хурди $a, b, x, y, \dots$ ишора карда мешаванд. Агар x - элементҳои маҷмӯи X бошад, онгоҳ чунин менависанд: $x \in X$ ё $X \ni x$ (" x - таълуқдори маҷмӯи X " хонда мешавад).

Агар x элементҳои маҷмӯи X набошад, онгоҳ чунин менависанд: $x \notin X$, $x \bar{\in} X$, $X \not\ni x$ ё $X \bar{\ni} x$ (" x таълуқдори маҷмӯи X нест"). Агар маҷмӯи X аз элементҳои x иборат бошад, онгоҳ чунин менависанд: $X = \{x\}$. Дар ин маврид x - элементҳои ихтиёрии маҷмӯи X мебошад. Агар элементҳои маҷмӯи X аз $x_1, x_2, x_3, \dots$ иборат бошад, онгоҳ чунин менависанд: $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$.

Агар ягон хосияти характерноки маҷмӯи X , масалан $P(x)$ нишон дода шавад, онгоҳ $X = \{x | P(x)\}$ ё $X = \{x : P(x)\}$ менависанд. Масалан, $X = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$ маҷмӯи ҳамаи решаҳои муодилаи $x^2 - 5x + 6 = 0$ мебошад. Маҷмӯъҳо охиринок ва беохир мешаванд.

* А. Пуанкаре (1857-1912) - математики франсавӣ

Маҷмӯъ охиринок ном дорад, агар миқдори элементҳои он ба ягон адад ифода ёбад. Масалан, маҷмӯи дарахтони ягон манзил, маҷмӯи ҳалҳои муодилаи дараҷаи ду ва ғайра. Ба маҷмӯи охиринок маҷмӯи холи низ дохил аст. Маҷмӯи $\emptyset$ - маҷмӯест, ки ягон элемент надорад. Масалан, маҷмӯи ҳалҳои муодилаи $x^2+4=0$ маҷмӯи холи аст. Маҷмӯи охиринок набударо бе-охири меномем. Маҷмӯи ҳамаи ададҳои бутун, маҷмӯи нуқтаҳои давра, маҷмӯи нуқтаҳои ҳамворӣ мисолҳои маҷмӯи беохири мебошанд.

Агар ҳар кадом элементи маҷмӯи X элементи маҷмӯи Y бошанд, онгоҳ мегуянд, ки маҷмӯи X қисми маҷмӯи Y ё зермаҷмӯи он мебошад ва чунин менависанд: $X \subset Y$ ё $Y \supset X$.

Мисол: агар X - маҷмӯи донишҷӯёни факултаҳои математика ва Y - маҷмӯи донишҷӯёни донишгоҳҳои Тоҷикистон бошад, онгоҳ $X \subset Y$ аст. Қайд мекунем, ки ҳама вақт $X \subseteq X$ буда маҷмӯи $\emptyset$ зермаҷмӯи ихтиёрии X аст: $\emptyset \subset X$. Агар $X \subset Y$ буда $X \neq Y$ бошад, онгоҳ маҷмӯи X -ро қисми дурусти маҷмӯи Y ё Y - зермаҷмӯи хоси маҷмӯи Y меноманд (расми 1).

Агар маҷмӯҳои X ва Y ҳамчоя шаванд, онгоҳ маҷмӯи $X \subset Y$ ва $Y \subset X$ буда $X=Y$ менависанд ва онҳоро баробарқувва (эквивалент) меноманд. Ҳамин тариқ, $X=Y \Leftrightarrow X \subset Y$ ва $Y \subset X$. Инкори баробарии $X=Y$ -ро бо $X \neq Y$ ишора менамоянд.

2. Амалҳо бо маҷмӯҳо. Бигзор A ва B ду зермаҷмӯҳои маҷмӯи X бошанд.

а) Сумма ё якҷоякунии маҷмӯҳои A ва B гуфта маҷмӯи он элементҳои маҷмӯи X -ро меноманд, ки ҳар кадом элементи он элементи ақалан яке аз маҷмӯҳои A ва B мебошад (расми 2).

$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ ё } x \in B\}.$$

Ҳамин тариқ, агар ягон элемент ба маҷмӯи $A \cup B$ тааллуқдор бошанд, онгоҳ вай ё ба A ё ба B ё ба ҳар дуи онҳо тааллуқдор аст.

Мисол: Агар $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ бошад, онгоҳ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Маҷмӯъ охирнок ном дорад, агар миқдори элементҳои он ба ягон адад ифода ёбад. Масалан, маҷмӯи дарахтони ягон манзил, маҷмӯи ҳалҳои муодилаи дараҷаи ду ва ғайра. Ба маҷмӯи охирнок маҷмӯи холи низ дохил аст. Маҷмӯи $\emptyset$ - маҷмӯест, ки ягон элемент надорад. Масалан, маҷмӯи ҳалҳои муодилаи $x^2+4=0$ маҷмӯи холи аст. Маҷмӯи охирнок набударо бе-охири меномем. Маҷмӯи ҳамаи ададҳои бутун, маҷмӯи нуқтаҳои давра, маҷмӯи нуқтаҳои ҳамворӣ мисолҳои маҷмӯи беохири мебошанд.

Агар ҳар кадом элементи маҷмӯи X элементи маҷмӯи Y бошанд, онгоҳ мегуянд, ки маҷмӯи X қисми маҷмӯи Y ё зермаҷмӯи он мебошад ва чунин менависанд: $X \subset Y$ ё $Y \supset X$.

Мисол: агар X - маҷмӯи донишҷӯёни факултаҳои математика ва Y - маҷмӯи донишҷӯёни донишгоҳҳои Тоҷикистон бошад, онгоҳ $X \subset Y$ аст. Қайд мекунем, ки ҳама вақт $X \subset X$ буда маҷмӯи $\emptyset$ зермаҷмӯи ихтиёрии X аст: $\emptyset \subset X$. Агар $X \subset Y$ буда $X \neq Y$ бошад, онгоҳ маҷмӯи X -ро қисми дурусти маҷмӯи X ё Y - зермаҷмӯи хоси маҷмӯи Y меноманд (расми 1).

Агар маҷмӯҳои X ва Y ҳамчоя шаванд, онгоҳ маҷмӯи $X \subset Y$ ва $Y \subset X$ буда $X=Y$ менависанд ва онҳоро баробарқувва (эквивалент) меноманд. Ҳамин тариқ, $X=Y \Leftrightarrow X \subset Y$ ва $Y \subset X$. Инкори баробарии $X=Y$ -ро бо $X \neq Y$ ишора менамоянд.

2. Амалҳо бо маҷмӯҳо. Бигзор A ва B ду зермаҷмӯҳои маҷмӯи X бошанд.

а) Сумма ё якҷоякунии маҷмӯҳои A ва B гуфта маҷмӯи он элементҳои маҷмӯи X -ро меноманд, ки ҳар кадом элементи он элементи ақалан яке аз маҷмӯҳои A ва B мебошад (расми 2).

$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ ё } x \in B\}.$$

Ҳамин тариқ, агар ягон элемент ба маҷмӯи $A \cup B$ таалуқдор бошанд, онгоҳ вай ё ба A ё ба B ё ба ҳар дуи онҳо таалуқдор аст.

Мисол: Агар $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ бошад, онгоҳ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Барои ихтиёри маҷмӯъ: $A \cup \emptyset = A$ аст. Агар $A \subset B$ бошад, онгоҳ $A \cup B = B$ мебошад.

б) Бурриш ё зарби маҷмӯъҳои A ва B гуфта маҷмӯи он элементҳои маҷмӯи X -ро меноманд, ки аз элементҳои умумии маҷмӯъҳои A ва B иборат аст (расми 3).

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ ва } x \in B\}$$

Агар A ва B элементҳои умумӣ надошта бошанд, онгоҳ $A \cap B = \emptyset$ менависанд ва онҳоро маҷмӯъҳои якдигарро набуранда меноманд.

Мисол: Бурриши маҷмӯъҳои дар банди а) овардашуда маҷмӯи $A \cap B = \{4\}$ мебошад. Агар $A \subset B$ бошад, онгоҳ $A \cap B = A$ ва $A \cap \emptyset = \emptyset$ аст.

Мафҳуми сумма ва бурриши маҷмӯъҳо барои миқдори охирикӣ ё беохирӣ маҷмӯъҳо айнан монанди таърифҳои дар банди а) ва б) овардашуда ҷорӣ карда мешаванд.

Масалан, сумма ё якҷоякунии миқдори охирикӣ ё беохирӣ маҷмӯъҳои A_k ($k=1, 2, \dots$) маҷмӯеро меноманд, ки ҳар кадом элементи он аққалан ба яке аз маҷмӯъҳои додашудаи A_k таалуқдор аст. Барои сумма ва бурриши чунин маҷмӯъҳо ишораҳои зерин қабул шудааст:

$\bigcup_{k=1}^n A_k, \bigcap_{k=1}^n A_k$ - сумма ва бурриши n маҷмӯъҳо;

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ - сумма ва бурриши миқдори беохирӣ маҷмӯъҳо.

Дар оянда сумма ва бурриши системаи маҷмӯъҳои A_α во меҳуранд, ки қимати α ягон маҷмӯи индексҳои I -ро ташкил медиҳанд. Чунончи, суммаи $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ маҷмӯъҳои A_α маҷмӯест, ки ҳар кадом элементи он аққалан ба яке аз маҷмӯъҳои додашудаи A_α таалуқдор буда шарти $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ ба ҷумлаи зерин баробарқувва аст: “чунин $\alpha \in I$ ёфт мешавад, ки $x \in A_\alpha$ аст”.

Баъзе хосиятҳои сумма (бурриш)-и маҷмӯъҳоро меорем, ки онҳоро ҷамъ ва зарби ададҳо низ доранд.

1⁰. $A \cup B = B \cup A$ - ҷойивазкунии;

$(A \cap B = B \cap A)$;

2⁰. $(A \cup B) \cap C = A \cap (B \cup C)$ - ассоциативия;

$((A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C))$;

3⁰. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ - дистрибутивия.

Дурустия 3⁰-ро исбот мекунем. Киноя аст, нишон диҳем, ки ҳар кадом элементи маҷмӯи $X = (A \cup B) \cap C$ - элементи маҷмӯи $Y = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ва баръакс мебошад.

Бигзор $x \in X$ бошад. Азбаски $x \in A \cup B$ ва $x \in C$ аст, пас $x \in A$ ё $x \in B$ ва $x \in C$. Агар $x \in A$ бошад, онгоҳ $x \in A \cap C$ аст, чунки $x \in C$ мебошад ва $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) = Y$. Агар $x \in B$ бошад, онгоҳ $x \in B \cap C$ ва $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) = Y$ мебошад. Ҳамин тариқ, агар $x \in X$ бошад, пас $x \in Y$ аст, яъне $X \subset Y$.

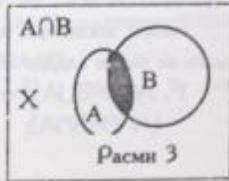
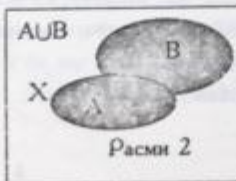
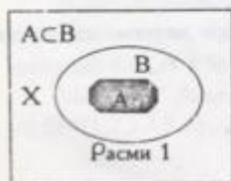
Акнун, бигзор $x \in Y$ бошад. Азбаски x ба суммаи маҷмӯҳои $A \cap C$ ва $B \cap C$ таалуқдор аст, пас $x \in A \cap C$ ё $x \in B \cap C$. Агар $x \in A \cap C$ бошад, онгоҳ $x \in A$ ва $x \in C$. Аз он, ки $x \in A$ аст, маълум мешавад, ки $x \in A \cup B$ ва аз сабаби $x \in C$ будан ҳосил мекунем: $x \in (A \cup B) \cap C = X$. Агар $x \in B \cap C$ бошад, онгоҳ $x \in B$ ва $x \in C$. Аз он, ки $x \in B$ аст, маълум мешавад, ки $x \in A \cup B$ ва аз сабаби $x \in C$ будан меёбем: $x \in (A \cup B) \cap C = X$ ва аз муносибатҳои $X \subset Y$ ва $Y \subset X$ баробарии $X = Y$ ҳосил мешавад.

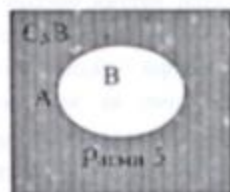
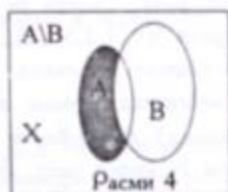
в) Фарқи маҷмӯҳои A ва B он элементҳои маҷмӯи A -ро меноманд, ки ба маҷмӯи B таалуқдор нестанд (расми 4).

$A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \text{ ва } x \notin B\}$;

Мисол: Фарқи маҷмӯҳои дар банди а) овардашуда маҷмӯҳои $A \setminus B = \{3, 5, 6\}$, $B \setminus A = \{1, 2\}$ мебошанд.

Агар $B \subset A$ бошад, онгоҳ $A \setminus B$ гурӯҳандан маҷмӯи B то маҷмӯи A ё гурӯҳандан B дар A ном дошта бо $C_A B$ ишора карда мешавад (расми 5).





Барои истифодаи системаҳои маҷмӯаҳои $\{A_a\}$, $a \in I$ ва истифодаи маҷмӯаи X муносибатҳои зерин дурустанд.

$$X \setminus \bigcup_{a \in I} A_a = \bigcap_{a \in I} (X \setminus A_a) \quad (1.1)$$

$$X \setminus \bigcap_{a \in I} A_a = \bigcup_{a \in I} (X \setminus A_a) \quad (1.2)$$

Дурустии (1.2)-ро нишон медиҳем.

Агар $x \in X \setminus \bigcap_{a \in I} A_a$ бошад, пас мувофиқи таърифи фарқи маҷмӯа $x \in X$ ва $x \notin \bigcap_{a \in I} A_a$. Аз инҷо маълум мешавад, ки $x \in X$ ва барои истифодаи $a \in I$ элементҳои x ба ҳеҷ кадом A_a таалуқдор нест. ($x \in X$ ва $x \notin A_a$, $\forall a \in I$). Аз инҷо мувофиқи таърифи фарқи маҷмӯаҳо $x \in X \setminus A_a$, $\forall a \in I$ ва мувофиқи таърифи суммаи маҷмӯаҳо $x \in \bigcup_{a \in I} (X \setminus A_a)$.

Ҳамин тариқ, шартҳои $x \in X \setminus \bigcap_{a \in I} A_a$ ва $x \in \bigcup_{a \in I} (X \setminus A_a)$ баробаргузаштаанд ва он дурустии (1.2)-ро нишон медиҳад. Баробарии (1.1) айнан исбот карда мешавад.

§2. АДАД ВА МАҶҶУМИ ВАСЕЪКУНИИ ОН

1. Ададҳои бутун. Маҷмӯаи адад муҳимтарини маҷмӯа дар таълими математика аст. Вай роҳи дуру дарози таърихи роҳи дорад. Ҳанӯз дар соҳаи қадимтарин, ҳангоми ҳисоби предметҳои алоҳида ададҳои нату-

раля, яъне ададҳои бутуни мусбат пайдо шуданд. Онҳоро бо тартиби афзуншавӣ чой дода маҷмӯи ададҳои натурали $N=\{1,2,3,\dots,n,\dots\}$ ҳосил шуд, ки онҳо қатори ададҳои беохирро ташкил медиҳанд. Дар ин маҷмӯъ амалҳои ҷамъ ва зарб муайян мебошанд (сумма ва зарби ададҳои натурали боз адади натурали мебошанд). Аммо барои таъмини имкониятҳои номаҳдуди амали фарқ маҷмӯи N кифоя нест. Аз ҳамин сабаб, зарурияти васеъ кардани маҷмӯи N бар меояд. Ба маҷмӯи N адади бутуни сифрро илова карда $N_0=N\cup\{0\}=\{1,2,3,\dots,n,\dots\}$ - маҷмӯи ададҳои бутуни гайриманфиро ҳосил мекунем. Агар ба маҷмӯи N_0 ҳаман ададҳои бутуни манфии $-1,-2,-3,\dots$ -ро илова кунем, маҷмӯи $Z=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ маҷмӯи ададҳои бутунро ҳосил мекунем. Барои таъмини амали тақсим бошад танҳо ададҳои бутун нокифоя аст. Аз ин рӯ зарурияти васеъ кардани маҷмӯи ададҳои бутун то маҷмӯи ададҳои ратсионали ба миён омад.

2. Ҷорӣ намудани ададҳои ратсионали. Маҷмӯи касрҳои оддӣ намуди

$\{\frac{m}{n} | m,n \in Z; n \neq 0\}$ -ро дида мебароем. Дар маҷмӯи касрҳои оддӣ муносибати баробарии касрҳоро ҷуғн дохил мекунем: ду касрҳои баробарро ба баробарии ду ададҳои бутун меорем, яъне

$$\left[\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \right] \Leftrightarrow [m_1 n_2 = m_2 n_1].$$

Масалан: $\frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \dots$ Маҷмӯи ҳаман касрҳои ба касри $\frac{m}{n}$ баробарро

класси эквивалентноки меноманд, ки касри $\frac{m}{n}$ -ро дорад. Нишон додан мумкин аст, ки классҳои эквивалентнокии ду касрҳои оддӣ ихтиёри $\frac{m_1}{n_1}$ ва

$\frac{m_2}{n_2}$ яқдигарро ё намебуранд (агар $\frac{m_1}{n_1} \neq \frac{m_2}{n_2}$) ё ҳамчоя мешаванд (агар $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$).

Таърифи 2.1. Ададҳои раціоналӣ гуфта классҳои эквивалентнокии маҷмӯи касрҳои дурустро нисбат ба баробарии касрҳо меноманд (мухтасар: адади раціоналӣ-ин маҷмӯи ҳамаи касрҳои ба касри додашуда баробар мебошад).

Маҷмӯи ададҳои раціоналиро бо ҳарфи Q ишора намуда байни маҷмӯъҳои омӯхташуда чунин вобастагиро $N \subset N_0 \subset Z \subset Q$ ҳосил мекунем, ки ҳар кадоме аз онҳо давраҳои алоҳидаи васеъкунии маҷмӯи ададҳо мефаҳмонанд.

3. Амалҳои арифметикӣ бо ададҳои раціоналӣ. Адади раціоналиро ҳамчун маҷмӯи ҳамаи касрҳои ба касри додашуда баробар муайян намудем.

Бигузор r_i маҷмӯи ҳамаи касрҳои ба касри додашудаи $\frac{m_i}{n_i}$ ($i = 1, 2$) баробар бошад.

Қонунҳои амалҳои арифметикӣ ба касрҳои додашударо чунин барқарор мекунем.

$$r_1 \pm r_2 = \frac{m_1}{n_1} \pm \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 \pm m_2 n_1}{n_1 n_2};$$

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2};$$

$$r_1 / r_2 = \frac{m_1}{n_1} : \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2}{n_1 m_2}.$$

4. Хосиятҳои ададҳои раціоналӣ.

10. Ҳангоми ҷамъ, тарҳ, зарб ва тақсим кардани ададҳои раціоналини ихтиёрия ба ғайр аз тақсим ба сифр дар натиҷа боз адади раціоналӣ ҳосил мешавад.

2⁰. Ҷамъ ва зарби ададҳои раціоналӣ қонуноҳои ҷойивазкунии, комбинация ва тақсимотро дорад:

$$\begin{aligned}r_1 + r_2 &= r_2 + r_1; \quad r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1; \\(r_1 + r_2) + r_3 &= r_1 + (r_2 + r_3); \quad (r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3); \\(r_1 + r_2) \cdot r_3 &= r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3.\end{aligned}$$

Муносибати тартибнокиро дар маҷмӯи Q ҷорӣ мекунем. Дар маҷмӯи Z муносибати тартиб " $>$ " (калон) ҷуғи муайян карда мешавад:

$$(\forall m_1, n_2 \in Z) [(m_1 > n_2) \Leftrightarrow (m_1 - n_2) \in N]$$

Мувофиқи он ҳар гуна адади натуралӣ аз сифр ва аз ҳар гуна адади бутун манфӣ калон аст. Барои ҳар гуна ду адади бутун $m, n \in Z$ яъне аз се муносибатҳо: $m > n$, $m = n$, $n > m$ иҷрошаванда аст. Муносибати " $>$ "-ро дар маҷмӯи Q ҷорӣ мекунем.

Тарғифи 2.2. Бигузор $r \in Q$ ва $\frac{m}{n}$ - касри адади r -ро ифода кунанда бошад.

Адади $r > 0$ ҳамон вақт ва фақат ҳамон вақт, агар ададҳои бутуни $m, n \in$ мусбат ва n манфӣ бошанд.

Бигузор $r_1, r_2 \in Q$, $r_1 > r_2$ ҳисоб мекунем, агар $r_1 - r_2 > 0$ бошад. Барои ба дурустии ин тарғиф қаноат ҳосил кардан нишон додан кифоя аст, ки $r > 0$ аз ихтилоби касри $r = \frac{m}{n}$ вобастаги надорад.

Дар ҳақиқат, бигузор $r = \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1} = r_1$ бошад, онгоҳ $mn_1 = m_1n$. Агар m ва n

аломатҳои яқинла дошта бошанд, онгоҳ m_1 ва n_1 низ аломатҳои яқинла доранд, ҷуғи дар ҳолати баръакс ба хосияти тартибнокии ададҳои бутун эҷиди пайдо мешавад. Аз муносибати " $>$ " ва " $=$ " дар маҷмӯи Q муносибатҳои " $\geq$ ", " $<$ ", ва " $\leq$ " ҷорӣ карда мешавад.

3⁰. (тартибнокии ҳаттии маҷмӯи Q). Барои ду ададҳои ихтиёрии $r_1, r_2 \in Q$ яъне аз муносибатҳо: $r_1 > r_2$; $r_1 = r_2$; $r_1 < r_2$ ҷой дорад.

Ду касри оддӣ $r_i = \frac{m_i}{n_i}$ ($i = 1, 2$)-ро гирифта фарқи

$\frac{r_1 - r_2}{n_1} = \frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{n_1 n_2}$ -ро тартиб медиҳем. Барон касри

$\frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{n_1 n_2}$ яке аз се мавридҳои имконпазир ҷой дорад: ё сурат ва махраҷ

аломати якхела (онгоҳ $r_1 > r_2$), ё онҳо аломатҳои гуногун ($r_1 < r_2$) доранд.

4⁰. (зичивии маҷмӯи Q). Барон ду ададҳои гуногуни $r_1, r_2 \in Q$ адади сеюми $r \in Q$ мавҷуд аст, ки он дар байни r_1 ва r_2 меҳабад.

Бигузор $r_1 < r_2$ бошад. $r = (r_1 + r_2)/2$ мегузорем, онгоҳ

$r_1 - r = r_1 - (r_1 + r_2)/2 = 1/2(r_1 - r_2) < 0$ ва $r_1 < r$. Айнан, ҳосил мекунем: $r < r_2$. Ҳамин тариқ, $r_1 < r < r_2$. (13)

5⁰. (транзитивия). Агар $r_1 \leq r_2$ ва $r_2 \leq r_3$ бошад, онгоҳ $r_1 \leq r_3$ аст.

Азбаски $r_1 - r_2 \leq 0$ ва $r_1 - r_3 \leq 0$ аст, пас $r_1 - r_3 = r_1 - r_2 + r_2 - r_3 = (r_1 - r_2) + (r_2 - r_3) \leq 0$ мешавад.

5. Ифода кардани ададҳои ратсионалӣ дар намуди касрҳои даҳии беохир. Касри даҳии беохир руфта раъзи $\pm p_0, p_1 p_2 \dots p_k$ -ро меноманд, ки $p_0 \in N_0$ ва ададҳои натуралӣ $p_1, p_2, \dots, p_k$ шартӣ $0 \leq p_k \leq 9$ -ро қаноат мекунанд. Ҳагуна касри даҳии охиринокро ҳамчун касри даврӣ дида баромадан мумкин аст, агар ба даври он сифрҳо нависем. Масалан $1,4 = 1,4000\dots = 1,4(0)$.

6⁰. Ҳагуна адади ратсионалиро дар намуди касри даҳии даврӣ ифода кардан мумкин; баръакс ҳар қадом касри даврӣ ягон касри оддиро ифода мекунад ва бинобар ин ягон адади ратсионалӣ аст.

Мувофиқонин нишондодашуда байни худ яқинмата аст, агар касрҳои даҳии даври рақами 9 доштара дида набароем.

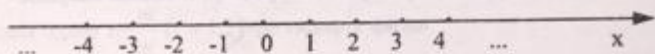
Бигузор $r \in Q$ бошад. Ин касри оддиро дар намуди $r = \pm \frac{m}{n}$, $m \in N_0$, $n \in N$ илтиҳоб мекунем. Сурати каср m -ро ба махраҷи он n тақсим мекунем:

m	n
q_0	$p, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n, \dots$
q_1	
q_2	
$\dots$	
q_{n-1}	
q_n	
$\dots$	

(2.1)

Дар пайдарпайи ҳосили тақсим $p_0 \in N_0$, $0 \leq p_k \leq 9$, ҳангоми $k=1, 2, \dots$. Бақияҳои $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n, \dots$, шартӣ $0 \leq q_k \leq n-1$ -ро қаноат мекунам. Бинобар ин, дар байни n бақияҳои $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ ақалан ду ададҳои якхела вомехуранд. Бигузор, онҳо ададҳои $q_0 = q_{n-1}$ бошанд, онгоҳ ҳосили тақсим ба намуи $p_0(p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$ оварда мешавад. Айнан ҳамин тавр, мавридҳои дигарро дида баромада хулоса мебарорем, ки касри $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$ -даври аст. Азбаски ба касрҳои оддӣ баробар як касри даврӣ мувофиқи меояд, пас дурустии тасдиқоти яқинро ҳосил мекунем. Тасдиқоти дуҷуми ҳосияти 6^0 аз қонди баргаришондани касрҳои даврӣ ба касри оддӣ, ки аз барномаи курси мактабӣ маълум аст, мебарояд. Тасдиқоти сеҷуми ҳосияти 6^0 аз он мебарояд, ки ҳаргӯна касри даврии даври 9 дошта ба ягон касри даври 0 баробар аст: $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots, p_{k-1}, p_k(9) = p_0, p_1, p_2, p_3, \dots, p_{k-1}, q_k(0)$; $q_k = p_{k+1}$. Касрҳои даври 9 доштаро аз эътибор соқит намуда мувофиқии байни худ яқинматаро ҳосил мекунем.

6. Тасвири ададҳои раціоналӣ бо нуқтаҳои тирӣ ададӣ. Тирӣ ададӣ гуфта хати ростеро меноманд, ки дар он нуқтаи (сарҳисоб) ибтидо, самти мусбат ва масштаб қайд карда шудааст. $A \dots B$



Ибтидо нуқтаи ихтиёрии дар хати рост қайд кардашуда мебошад. Самти мусбат дар хати рост ихтиёри қайд карда мешавад. Агар вай интиҳоб шуда бошад, онгоҳ самти дигар дар хати рост манфӣ ҳисобида мешавад. Масштаб порчаи ихтиёрии қайд кардашудани $[AB]$ мебошад, ки дарозинаш ба воҳид баробар аст.

Ба адади раціоналии 0 ибтидои ҳисобкунӣ нуқтаи 0 -ро дар мувофиқ мегузорем. Аз нуқтаи 0 бо самти мусбат $1, 2, 3, \dots$ бор порчаи ба воҳиди масштаб баробарро гузошта нуқтаҳоеро ҳосил мекунем, ки ададҳои натуралӣро тасвир менамоянд. Ин порчаро ба самти манфӣ гузошта тасвири ададҳои $-1, -2, -3, \dots$ -ро ҳосил мекунем. Ҳамин тавр, мо ҳамаи ададҳои бутунро бо нуқтаҳои тири ададӣ тасвир мекунем. Бигузор $n > 1$ бошад. Аз ибтидои ҳисобкунӣ дар ҳар самт порчаи $1/2$ -ро мегузорем, онгоҳ тасвири касрҳои оддии $\pm \frac{m}{n}$ -ро бо нуқтаҳои тири ададӣ ҳосил мекунем. Касрҳои баробар бо як нуқта ва касрҳои гуногун бо нуқтаҳои гуногун тасвир меёбанд. Барои исбот кифоя аст, ки ду касрҳои додашударо бо маҳраҷи умумӣ орем. Ҳамин тариқ, ҳосияти зеринро исбот мекунем.

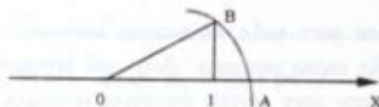
7⁰. Ҳар кадом адади раціоналӣ бо ягон нуқтаи тири ададӣ, ададҳои раціоналии гуногун бо нуқтаҳои гуногуни тири ададӣ тасвир меёбанд. Бигузор дар тири ададӣ самти мусбат аз чап ба рост интиҳоб шуда бошад, онгоҳ мазмуни геометрии ҳосияти 3⁰ чуқури аст.

Аз ду нуқтаҳои ададҳои раціоналиро ифодакунанда ҳамонош росттар ҷойгир аст, ки бо адади калонтар ифода шуда бошад.

Мазмуни геометрии ҳосияти 4⁰-ро қайд мекунем:

Байни ду нуқтаҳои ихтиёрии тири ададӣ, ки ададҳои раціоналиро тасвир мекунанд ақалан як нуқтае ёфт мешавад, ки адади раціоналиро тасвир мекунад (маҷмӯи беохирӣ чуқури нуқтаҳо ёфт мешавад).

Азбунӣ нишон медиҳем, ки на ба ҳар кадом нуқтаи тири ададӣ адади раціоналӣ мувофиқ меояд. Дар тири адади порчаи $[0A]$ -ро месозем, ки ба диагонали квадратӣ тарафаш як буда баробар аст.



Ба нуқтаи А ягон адади ратсионалӣ мувофиқ намеояд. Инро нишон медиҳем. Баръакс фарз мекунем. Бигузор касри ихтисорнашавандаи $\frac{p}{q}$

вҷуд бошад, ки дарозинаш ба дарозини порчаи $[OA]$ баробар бошад: $|OA| = \frac{p}{q}$.

Аз тарафи дигар; мувофиқи теоремаи Пифагор $\frac{p^2}{q^2} = 2$, яъне $p^2 = 2q^2$. Аз ин

ҷо маълум мешавад, ки p^2 -ҷуфт ва p низ адади ҷуфт аст, яъне $p = 2p_1$. Дар ин ҳолат, $q^2 = 2p_1^2$. Бинобар ин q -низ ҷуфт аст. Аммо ин ба ихтисорнашаванда будани касри $\frac{p}{q}$ зид аст. Ададе, ки мувофиқи хосияти b^0 ба нуқтаи

тири ададӣ мувофиқат мекунад, координатаи нуқтаи додашуда ном дорад.

Ҳамин тариқ, ададҳои ратсионалӣ кифоя нестанд, ки ба ҳар кадом нуқтаи тирӣ ададӣ координата шуда ҳисмат кунад. Аз ин ру зарурияти ва-сеъ кардани маҷмӯи Q бар меояд. Ошкор намудани ин табодулот дар охири даҳсолаҳои қарни V пеш аз мелод ба математикони юнонӣ мактаби Пифагор тааллуқдор аст. Ба онҳо кушодани адади ирратсионалӣ дар намуди порчаҳои ченшавандаи хати рост хос аст. Аммо идеяи созиши ададҳои ҳақиқӣ ҳамчун ҷамъи ададҳои ратсионалӣ ва ирратсионалӣ танҳо дар асри XI дар асарҳои математикони шарқи наздик ва мӯёна иттиҳоси худро ёфт. Дар охири асри XIX дар асарҳои Г. Кантор (1845-1918), К. Вейерштрасс (1815-1897), Д. Дедекнд (1831-1916), тадриҷи пурраи назарияи ададҳои ҳақиқӣ ҷоп шуд. Ин тадқиқотҳо дар шаклҳои гуногун гузаронида шуда бошад ҳам, онҳо ба як проблемема -бефосилагии тирӣ ададӣ бахшида шуда буданд. Дар поён ба яке аз ин назарияҳо (назарияи Дедекнд), ки ба назарияи маҷмӯъ зич алоқаманд аст, мухтасар шинос хоҳем шуд.

§3. АДАДҲОИ ҲАҚИҚИ ВА ХОСИЯТҲОИ ОН

Дар ин ҷо васеъкунии ояндаи мафҳуми ададро, ки бо бурриши Дедекиндр асос карда шудааст, мегузаронем.

1. *Бурриши маҷмӯи Q.* Маҷмӯи ҳаман ададҳои ратсионалиро ба ду синфҳои A ва A' ҷудо мекунем. A -ро синфи поёни ва A' -ро синфи болои меномем.



ТАЪРИФИ 3.1 Бурриши маҷмӯи ададҳои ратсионалӣ Q гурӯҳаи ҷамъи ду зермаҷмӯиҳои он $\{A, A'\}$ -ро меноманд, ки шартҳои зеринро қаноат меку-
нанд:

- 1) Дар ҳар кадом синф аққалан яктогӣ адад аст (яъне, синфҳои A ва A' ҳоли нестанд: $A \neq \emptyset$, $A' \neq \emptyset$).
- 2) Ададе вуҷуд надорад, ки якбора ба A ва A' тааллуқдор бошад (яъне бур-
риши синфҳои A ва A' ҳоли аст);
- 3) Ҳаргуна адад ё дар синфи A ё дар синфи A' меҳобад (яъне ҳамаи онҳо
маҷмӯи Q аст: $A \cup A' = Q$);
- 4) Ҳаргуна адади синфи поёни A аз ҳаргуна адади синфи болои A' зиёд
наст (яъне $\forall a \in A, \forall a' \in A', (a < a')$).

Бурриши синфҳои A ва A' -ро бо рамзи A/A' ишора мекунем.

2. Мисолҳои бурриш.

1) Маҷмӯи A ва A' -ро ҷуви муайян мекунем:

$$A = \{a | a \in Q; a \leq 1\}; A' = \{a' | a' \in Q; a' > 1\},$$

нишон медиҳем, ки A/A' -бурриши маҷмӯи Q аст. Дар ҳақиқат, $0 \in A$, бино-
бар ин A ҳоли нест, $2 \in A'$, пас A' ҳоли нест.

Мувофиқи хосияти 3^0 барои ихтиёри адади $2 \in Q$ яке аз муносибатҳо ҷой до-
рад: ё $2 \leq 1$ (онгоҳ $2 \in A$) ё $2 > 1$ (онгоҳ $2 \in A'$), бинобар ин $A \cap A' = \emptyset$ ва
 $A \cup A' = Q$. Дар охир, агар $a \in A$, $a' \in A'$ бошад, онгоҳ $a \leq 1 < a'$ ва аз ин ҷо му-
вофиқи хосияти транзитивӣ $a < a'$ ҳосил мекунем.

Ҳамин тариқ, исбот карда шуд, ки $A|A'$ -бурриши маҷмӯи Q аст. Дар ин бурриш синфи поёни A адади калонтарини 1-ро дошта синфи болои A' адади хурдтарин надорад. Дар ҳақиқат, агар $a' \in A'$ бошад, онгоҳ $a' > 1$. Мувофиқи хосияти 4⁰ адади $a'' \in Q$ вуҷуд дорад, ки $a' > a'' > 1$. Бинобар ин, $a'' \in A'$.

2) Азбун маҷмӯи A ва A' -ро ҷуғиҷ муайян мекунем: $A = \{a | a \in Q; a < 1\}$; $A' = \{a' \in Q; a' \geq 1\}$. Айнан монанди мисоли 1) муҳкима роида нишон додан мумкин аст, ки $A|A'$ -бурриши маҷмӯи Q мебошад. Фарқиёт танҳо он аст, ки дар ин ҷо синфи поёни адади калонтаринро надошта синфи болои A' адади хурдтаринро дорад.

3) Ба синфи болои A' ҳамаи ададҳои мусбати ратсионалие, ки квадраташон аз 2 калон ва ба синфи поёни A -ададҳои ратсионалии боқимондари дохил мекунем:

Нишон диҳед, ки $A|A'$ бурриши маҷмӯи Q -ро ташкил мекунад. Дар бурриши сохташуда синфи поёни A адади калонтарин ва синфи болои A' адади хурдтаринро надорад. Дар ҳақиқат, бигузор $a \in A$ бошад. Нишон додан лозим аст, ки дар синфи поёни адади ратсионалии b мавҷуд аст, ки аз a калон аст. Агар $a \leq 0$ бошад, онгоҳ $b = 1$ қабул кардан мумкин аст, ҷуғиҷи $1^2 < 2$ аст ва бинобар ин $1 \in A$. Ба ғайр аз ин $1 > 0 \geq a$. Бигузор $a > 0$ ва $a^2 < 2$ бошад. $b = a + 1/2$ мегузorem. Адади $n \in \mathbb{N}$ -ро бояд ҷуғиҷ калон интихоб кунем, ки $b^2 < 2$ монад. Киҷоя аст, ки $n > \frac{2a+1}{2-a^2}$ гузorem, ки он ба нобаробарии

ни $\frac{2a+1}{n} < 2 - a^2$ баробарқувва аст. Дар натиҷа ҳосил мекунем:

$$b^2 = \left(a + \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \leq a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} = a^2 + \frac{2a+1}{n} < a^2 + (2 - a^2) = 2;$$

Аз ин ҷо $\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$, яъне $\left(a + \frac{1}{n}\right) \in A$ ва $\left(a + \frac{1}{n}\right) > a$. Ин маънои онро

дорад, ки синфи поёни A адади калонтаринро надорад. Айнан, нишон додан мумкин аст, ки синфи болои A' адади хурдтаринро надорад (мустиқлони нишон диҳед).

3. Намудҳои бурришҳо. Тартифи адади ҳақиқӣ.

Бигузор $A|A'$ -бурриши маҷмӯи Q бошад. Мисолҳои овардашудаи п.2 имконияти медиҳанд, ки бурришҳоро аз рӯи нишонаи мавҷуд будан ё набудани "ададҳои сарҳадӣ"-и синфҳои A ва A' ба намудҳои ҷудо кунем.

I. Синфи поёнии A адади калонтаринро дошта синфи болои A' адади хурдтаринро надорад.

II. Синфи поёнии A адади калонтаринро надошта синфи болои A' адади хурдтаринро дорад.

III. Синфи поёнии A адади калонтаринро ва синфи болои A' адади хурдтаринро надорад.

IV. Синфи поёнии A адади калонтаринро ва синфи болои A' адади хурдтаринро надорад.

Мисолҳои дар п.2 овардашуда мавҷудияти бурришҳои нисбати I, II, III-ро мефаҳмонад. Нишон медиҳем, ки бурриши намуни IV вуҷуд надорад. Ибтидои аз баръақс мегузаронем.

Бигузор $A|A'$ -бурриши намуни IV бошад. Бо a_0 -адади калонтарини синфи поёнӣ ва бо a'_0 -адади хурдтарини синфи болоиро ишора мекунем. Азбаски $a_0 \in A$, $a'_0 \in A'$, пас $a_0 < a'_0$. Мувофиқи хосияти маҷмӯи Q адади r мавҷуд аст, ки дар байни $a_0 < r < a'_0$.

Азбаски $r > a_0$, пас $r \in A$. Айнан, азбаски $r < a'_0$, пас $r \in A'$. Бинобар ин $A \cup A' \subset Q$ ва ин ба муносибати баробарии $A \cup A' = Q$ зид аст.

Ҳамин тариқ, танҳо бурришҳои намуни I, II, III вуҷуд доранд. Байни бурришҳои намуни I ва ададҳои рақсония мувофиқати байни худ ягонматла аён аст: ба ҳар кадом бурриши намуни I-ум $A|A'$ адади калонтарини синфи поён ва бар ҳар кадом адади рақсонияи r -бурриши $A|A'$:

$$A = \{a \mid a \in Q; a \leq r\}, \quad A' = \{a' \mid a' \in Q; a' > r\}$$

мувофиқат мекунад. Чунон мувофиқати ягонматла дар байни ададҳои рақсония ва бурриши намуни II низ вуҷуд дорад.

Ин мувофиқатро ба эътибор гирифта тасдиқ кардан мумкин аст, ки бурриши намуни I, II адади рақсонияро ифода карда бурриши намуни III, ки

ададҳои сарҳади байни A ва A' надорад, ададҳои на- иррационалиро муайян мекунад.

ТАЪРИФИ 3.2. Адади иррационаля гуфта бурриши намуди III-ро меноманд (яъне ҷуғи бурришҳои маҷмӯи Q -ро меноманд, ки ададҳои раціоналини сарҳади байни синфҳои A ва A' надоранд).

Мувофиқи ин таъриф, ҳагуна бурриши намуди III ягон адади иррационалиро ифода мекунад. Ин адад ҳамчун сарҳади синфҳои A ва A' шуда хизмат мекунад. Маҷмӯи ҷуғи ададҳоро бо рамзи J ишора мекунем.

ТАЪРИФИ 3.3. Ададҳои раціоналя ва иррационалиро дар яҷҷағи ададҳои ҳаҷҷи ва ҷаҷҷағи онҳоро-маҷмӯи ададҳои ҳаҷҷи меноманд ва ҷуғи ишора мекунанд: $R=Q \cup J$

Ҳамин тариқ, маҷмӯҳои N, N_0, Z, Q, R бо ҷуғи муносибат аҷҷағи доранд: $N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R$

Баробарии ду ададҳои ҳаҷҷи $\alpha = A|A'$ ва $\beta = B|B'$ -ро ҳамчун ҷаҷҷағи бурришҳои мувофиқ муайян кардан мумкин аст, яъне $[\alpha = \beta] \Leftrightarrow [A=B; A'=B']$.

4. Муносибати тартибӣ дар R . Бигӯзор $\alpha=A|A'$ ва $\beta=B|B'$ ададҳои ҳаҷҷи бошанд. Аз ин ададҳо ҳамонаш калон ҳисоб меёбад, ки синфи поёни он васеъ бошад:

$$[\alpha > \beta] \Leftrightarrow [A \supset B];$$

Муносибати " $<$ ", " $\geq$ ", " $\leq$ " айнан муайян карда мешаванд. Ҳосиятҳои маҷмӯи R -ро дида мебароем.

1⁰. (тартибнокӣ ҳатти). Барои ихтиёри ду ададҳои ҳаҷҷи α ва β яъне аз се маврид имконпазир аст: $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$.

Бигӯзор $\alpha=A|A'$, $\beta=B|B'$ бошад. Муносибатҳои имконпазир синфи поёни A ва B -ро месозем. Агар $A=B$ бошад, онгоҳ $\alpha=\beta$ аст. Бигӯзор $A \neq B$ бошад. Нишон медиҳем, ё $A \supset B$ (яъне $\alpha > \beta$) ё $B \supset A$ (яъне $\beta > \alpha$). Агар адади $r \in A$, $r \in B$ мавҷуд бошад, онгоҳ $r \in B'$. Агар $d \in B$ бошад, онгоҳ $d < r$, пас $d \in A$. Бинобар ин, $A \supset B$ яъне $\alpha > \beta$. Айнан, агар $r \in B$, $r \in A$ мавҷуд бошад, онгоҳ $B \supset A$.

2⁰. (зигирии маҷмӯи R). Барои ду ададҳои ихтиёрии ҳақиқӣ гуногун адади ҳақиқӣ мавҷуд аст, ки дар байни ададҳои додашуда мебошад.

Бигузор $\alpha = A|A'$, $\beta = B|B'$ ва $\alpha < \beta$ бошад, онгоҳ $A \subset B$, ва адади ратсионалии $\gamma \in B$, $\gamma \in A$, мавҷуд аст ҷанне $\gamma \in A'$. Барои γ шарти $\alpha < \gamma < \beta$ ҳосил мешавад.

3⁰. Агар $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$ бошад, онгоҳ $\alpha > \gamma$ (Муस्ताқилона исбот намоед).

4⁰. (Лемма). Бигузор $\alpha, \beta \in R$. Агар барои ихтиёри адади мусбати $l \in Q$ ҷуғи ададҳои $S, S' \in Q$ мавҷуд бошад, ки $S \leq \alpha \leq S'$, $S \leq \beta \leq S'$, $S' - S < l$ бошад, онгоҳ $\alpha = \beta$.

▲ Исботро аз баръаксаш мегузаронем. Маърифи $\alpha < \beta$ -ро дида мебароем. Мувофиқи хосияти 2⁰ ададҳои $\gamma, \gamma' \in Q$ мавҷуд, ки $\alpha < \gamma < \gamma' < \beta$, $l = (\gamma' - \gamma) \in Q$ мегузарем. Аз рӯи адади $l = \gamma' - \gamma$ ададҳои $S, S' \in Q$ ёфт мешавад, ки $S \leq \alpha \leq S'$, $S \leq \beta \leq S'$, $S' - S < l$ аст. Бинобар ин, ҳосил мекунем: $S \leq \alpha < \gamma < \gamma' < \beta \leq S'$.

Аз инҷо $S' - S > \gamma' - \gamma = l$. Зиддият ҳосил шуд. ▲

5. Ифода кардани ададҳои ҳақиқӣ дар намуни касриҳои дахлӣ беохир. Дар п.5.51 ададҳои ратсионалиро дар намуни касриҳои дахлӣ беохир тасвир намудем. Ин мафҳумро барои ададҳои ҳақиқӣ ихтиёри ҷорӣ мекунем.

5⁰. Ҳар кадом адади ҳақиқӣ дар намуни касриҳои дахлӣ беохир ва баръакс ҳар кадом касриҳои дахлӣ беохир ягон адади ҳақиқӣро ифода мекунад. Ададҳои ратсионалӣ бо касриҳои дахлӣ ва ирратсионалӣ-бо касриҳои гайридахлӣ беохир ифода меёбанд. Мувофиқати нишондодашуда байни худ явонматанд, агар касриҳои дахлӣ 9 доштаро ба эътибор нагирем.

Бигузор $\alpha \in R$ бошад. Шарт мекунем, ки $\alpha > 0$ аст. Адади $p_0 \in N$ -ро меёбем, ки $p_0 \leq \alpha \leq p_{0+1}$ бошад. Баъд, адади $p_1 \in N$, $0 \leq p_1 \leq 9$ -ро ҳамон тавр меёбем, ки $p_0, p_1 \leq \alpha \leq p_{0, p_1} + 1/10$ бошад. Айнан амал намуда адади $p_k \in N$, $0 \leq p_k \leq 9$ -ро ҳамон тавр меёбем, ки

$$p_0, p_1, p_2, \dots, p_k \leq \alpha \leq p_{0, p_1, p_2, \dots, p_k} + 1/10^k \quad (3.1)$$

Ин амалро беохир бор давом дода касриҳои дахлӣ беохир $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k$ -ро меёбем, ки адади α -ро ифода мекунад. Касри $(-p_0, p_1, p_2, \dots, p_k, \dots)$ адади $(-\alpha)$ -ро ифода мекунад. (21)

Бигузор ду касрҳои $\pm p_0, p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ дода шуда бошанд. Барои адади мувофиқи онро ёфтан бурриши $\alpha = A/A'$ -ро чунон месозем:

$$A = \{a | a \in Q; (\exists k \in N) (a \leq p_0, p_1, p_2, \dots, p_k)\}; A' = Q \setminus A.$$

Мувофиқи созиши ин бурриш ба адади $\alpha = A/A'$ барои истиёри $k \in N$ нобаробарини (3.1) иҷрошаванда аст. Аз инҷо маълум мешавад, ки ба ҳар кадом касри $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ ягона адад мувофиқи меояд. Дар ҳақиқат, мавҷуд будани адади дигар β -ро фарз карда барои он нобаробарини

$$p_0, p_1, p_2, \dots, p_k \leq \beta \leq p_0, p_1, p_2, \dots, p_k + 1/10^k \quad (3.2)$$

-ро ҳосил мекунем. Барои истиёри $1/10^k > 0$ чунон адади $k \in N$ ёфт мешавад, ки $1/10^k < 1$ мешавад. Бинобар ин, аз нобаробарини (3.1) ва (3.2) мувофиқи ҳосилгати 4^0 (лемма) $\alpha = \beta$ ҳосил мешавад.

Дар мавриде, ки α ратсионалӣ аст, амалиёти созиши касри $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ ба он мувофиқи ба амалиёти тақсими (2.1) яқинла буда ба созиши касри даврӣ меорад. Аз инҷо маълум мешавад, ки ба ададҳои ирратсионалӣ касрҳои гайри даврӣ мувофиқат мекунанд (дар ҳолати баръакс адади ирратсионалӣ баробар мешуд).

6. Бефосилгии маҷмӯи R. Мафҳуми бефосилгии (пуррагии)-и маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ яке аз муҳимтарини ва яке аз ҳосилтҳои фарёкунида аз маҷмӯи ададҳои ратсионалӣ мебошад. Маҷмӯи ададҳои ҳақиқиро ба ду синфҳои X ва Y ҷудо карда бурриши X/Y -ро ҳосил мекунем.

ТАЪРИФИ 3.4. Бурриши маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ R гуфта ду зермаҷмӯҳои он $\{X, Y\}$ -ро меноманд, агар онҳо шартҳои зеринро қаноат кунанд:

1. $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$;
2. $X \cap Y = \emptyset$;
3. $X \cup Y = R$;
4. $(\forall \alpha \in X, \forall \alpha' \in Y)(\alpha < \alpha')$.

Бурриши ҳосилшударо бо $X|Y$ ишора карда, X -ро синфи поёния, Y -ро синфи болоӣ меномем. Маълум аст, ки таърифи 3.4. дар натиҷаи икки кардани A ба X , A' ба Y ва A/A' ба $X|Y$ ҳосил шудааст. Ҳангоми омӯзиши

бурриши маҷмӯи Q се намуди бурришҳо ҳосил карда будем. Бурриши на-
муди III, ки адади ратсионалии "сарҳадӣ" надошт, барои қоя намудани
ададҳои нав (ирратсионалӣ) асос шуд. Акнун саволҳои зерин пайдо меша-
ванд:

Оё ба қоя кардани бурриши маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ, ададҳои наво ҳосил
кардан мумкин аст, ки аз ададҳои ратсионалӣ ва ирратсионалӣ фарқ кунанд?

Оё барои ҳар гуна бурриши маҷмӯи R адади сарҳадӣ мавҷуд аст?

Ба ин саволҳои гузашташуда ҳосияти бифосилагии маҷмӯи R , ки бо теоре-
маи Дедекинд ифода меёбад, ҷавоб мегардонад.

6⁰. (теоремаи Дедекинд). Барои ҳар қадом бурриши $X|Y$ маҷмӯи
ададҳои ҳақиқӣ R адади ҳақиқӣ α вуҷуд дорад, ки ин бурришро мегуза-
ронад. Ин адад ё калонтарин адади синфи поёнӣ ё хурдтарин адади синфи
болӣ мешавад. ▲

Барои бурриши $X|Y$ маҷмӯи R минтақаи ҳамон 4 намуд бурриши дар
банди 3 барои маҷмӯи Q овардашуда қоя дорад. Мавриди 4-ум қоя на-
дорад. Дар ҳақиқат, агар $\alpha \in X$ адади калонтарин дар синфи поёнӣи X ва
 $\beta \in Y$ адади хурдтарин дар синфи болӣи Y бошад, онгоҳ $\alpha < \beta$ аст. Муво-
фиқи ҳосияти зичиги 2^0 маҷмӯи R маҷмӯи беохир ададҳои ратсионалӣ
ёфт мешавад, ки дар байни α ва β ҳамаи X (чунки ҳамаи онҳо аз
адади калонтарини $\alpha \in X$ калон) ва на ба Y (чунки ҳамаи онҳо аз адади
хурдтарини $\beta \in Y$ хурд) таалуқ доранд. Ин ба таърифи бурриш муқобил аст.
Акнун нишон медиҳем, ки бурриши намуди III вуҷуд надорад. Исроботро аз
баръакс мегузаронем.

Бигузор $X|Y$ бурриши намуди III маҷмӯи R бошад, яъне чунин бур-
рише, ки маҷмӯи X адади калонтарин ва маҷмӯи Y адади хурдтаринро на-
дорад. Бо A ва B маҷмӯи ададҳои ратсионалиро ишора мекунем, ки муво-
фиқан дар X ва Y меҳобанд. Онгоҳ $A|B$ -бурриши маҷмӯи Q мебошад. Ин
бурриш адади ҳақиқӣ $\alpha = A/B$ -ро муайян мекунад. Азбаски $X \cup Y = R$ аст,
пас $\alpha \in X$ ё $\alpha \in Y$. Бигузор $\alpha \in X$ бошад. Азбаски маҷмӯи X адади калон-
таринро надорад, пас адади $\beta \in X$ ёфт мешавад, ки $\beta > \alpha$ аст. Мувофиқи ҳо-
сияти маҷмӯи R байни β ва α адади ратсионалии r ёфт мешавад, ки $\beta > r > \alpha$

аст. Азбаски $\gamma < \beta$, пас $\gamma \in A$. Азбаски $\gamma > \alpha$, пас $\gamma \in B$. Аммо, мувофиқи таърифи бурриш дар маҷмӯи Q ҳар кадом адади ратсионалӣ ё ба синфи A ё ба синфи B таалуқ дорад. Бинобар ин, α ба синфи X таалуқдор шуда наметавонад.

Бигузор $\alpha \in Y$ бошад, онгоҳ дар синфи Y адади ҳақиқии $\beta < \alpha$ ёфт мешавад, ҷузви дар он адади хурдтарин нест. Мувофиқи хосияти зигзагии R адади ратсионалии γ ёфт мешавад, ки $\beta < \gamma < \alpha$ аст. Азбаски $\gamma > \beta$, пас $\gamma \in B$, инчунин $\gamma \in A$, ҷузви $\gamma < \alpha$ аст. Ин ба таърифи бурриш дар маҷмӯи Q мухолиф аст. Ин зиддиятҳои пайдошуда тасдиқоти теоремаро исбот мекунад. ♦

Аз тасдиқоти теорема маълум мешавад, ки ҳаргуна бурриши $X|Y$ дар маҷмӯи R бурриши намуҷҳои I ва II мебошад, яъне ҳар кадом бурриши маҷмӯи R боз адади ҳақиқӣ буда ё адади калонтарин дар синфи X ё адади хурдтарин дар синфи Y мебошад.

Маҷмӯи дорон ҷузви хосият доштара бефосила меноманд.

ТАЪРИФИ 3.5. Маҷмӯёро бефосила меномем, агар бурриши истиёрий дар он бурриши намуҷи I ё II бошад.

Маҷмӯи Q ададҳои ратсионалӣ хосияти бефосилагиро надорад, ҷузви бурриши намуҷи III дар он адади ратсионалиро ифода намекунад.

7. Тасвири ададҳои ҳақиқӣ бо нуқтаҳои тирӣ ададӣ. Ададҳои ратсионалиро бо нуқтаҳои тирӣ ададӣ тасвир намуда нуқтаҳоеро вохурдем, ки координатаҳои ратсионалӣ надоранд. Дар ин банд нишон медиҳем, ки ҷузви нуқтаҳои координатаҳои ратсионалиро доранд.

Бо ин мақсад, аввал хосияти бефосилагии тирӣ ададиро дар намуҷи аксиомии геометрии меорем, ки номи принсипи порчаҳои дар дохили якдигар ҷойида ном гирифтааст:

Бигузор пайдарпайи беозорӣ порчаҳои тирӣ ададӣ $[A_k; B_k]$ ($k=1, 2, \dots$) дода шуда бошанд, ки шартӣ зеринро қаноат кунанд:

$$[A_1; B_1] \supseteq [A_2; B_2] \supseteq \dots \supseteq [A_n; B_n] \supseteq \dots$$

Агар барои қиёматҳои калони n дарозии порчаи $[A_n; B_n]$ -ро аз ҳаргуна адади мусбат хурд намудан мумкин бошад, онгоҳ ягона нуқтаи C мавҷуд аст, ки ба ҳамаи порчаҳои $[A_n; B_n]$ таалуқ дорад, яъне $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n; B_n]$.

Акнун тасдиқоти асосии ин бандро меорем, ки ҳосилоти 7⁰-ро аз §2 муқаммал мекунад.

7⁰. Ҳар кадом адади ҳақиқӣ бо ягон нуқтаи тирӣ ададӣ тасвир ёфта ба ададҳои гуногун нуқтаҳои гуногун мувофиқат мекунад. Ҳар кадом нуқтаи тирӣ ададӣ тасвири ягона адади ҳақиқӣ аст.

Барои ададҳои раціоналӣ тасдиқоти яқин дар §2 исбот шуда буд. Бигузор α - иррационалӣ бошад. Ба маънии $\alpha > 0$ маҳдуд шуда адади α -ро дар намуни касри даҳӣ беохирӣ $\alpha = p_0, p_1 p_2 \dots p_k \dots$ тасвир менамоем. Бо $p_0, p_1 p_2 \dots p_k \dots$ координатаҳои раціонали нуқтаи A_k ва бо $p_0, p_1 p_2 \dots p_k + 1/10^k$ координатаҳои раціонали нуқтаи B_k -ро ишора мекунем. Пайдарпайи порчаҳои дар дохили якдигар хобидан

$[A_1; B_1] \supset [A_2; B_2] \supset \dots \supset [A_k; B_k] \supset \dots$ -ро дида мебароем, ки дарозии онҳо ба $|A_k; B_k| = 1/10^k$ ($k=1, 2, \dots$) баробар мебошанд ва дарозии онҳоро ҳағмаи бо қадри қиёсӣ калон иғтиҳоб кардани k , ниҳоят хурд кардан мумкин аст. Мувофиқи аксиомаи дар боло қайдшуда ягона нуқтаи C мавҷуд аст, ки ба ҳамаи порчаҳои $[A_k; B_k]$ таалуқдор аст. Ин нуқтаро ба адади $\alpha = p_0, p_1 p_2 \dots p_k \dots$ дар мувофиқ мегузорем. Дар ин мувофиқгузорӣ бо ададҳои гуногун нуқтаҳои гуногун мувофиқ меоянд. Дар ҳақиқат, бигузор $\beta \neq \alpha$ бошад. Барои адади β пайдарпайи порчаҳои дар дохили якдигар хобидаро чунин месозем: $[A'_1; B'_1] \supset [A'_2; B'_2] \supset \dots \supset [A'_k; B'_k] \supset \dots$.

Шарт мекунем, ки $\beta > \alpha$ аст. Адади k -ро чунин калон иғтиҳоб мекунем, ки $\frac{1}{10^k} < \frac{\beta - \alpha}{2}$ бошад. Аз ин ҷо мебарояд, ки порчаҳои $[A_k; B_k]$ ва $[A'_k; B'_k]$ нуқтаҳои умумӣ надоранд. Пас нуқтаи C' , ки ба адади β мувофиқ меояд бо C ҳамчун шуда наметавонад.

Шарт мекунем, ки дар тирӣ ададӣ нуқтаи C додашудааст. Нишон ме-диҳем, ки ба он ягона адади ҳақиқӣ (координата) мувофиқат мекунад. Ба

$$[a, b] = \{x | a \leq x < b\} \text{ ва } (a, b] = \{x | a < x \leq b\} \quad (4.3)$$

ниминтервалҳо ном доранд. Маҷмӯҳои (4.1)-(4.3) — маҷмӯҳои маҳдуданд. Аксари мавридҳо маҷмӯҳои номаҳдуд низ дучор мешаванд. Ҳангоми навиштани онҳо аз ишораи ададҳои "ғайри ҳос" -и $+\infty$ ва $-\infty$ истифода мебаранд. Дар ин навишти онҳо ҳамавақт $-\infty < x < +\infty$ фаҳмида мешавад. Мисоли чунин маҷмӯҳо инҳоянд:

$$\begin{aligned} [a, +\infty) &= \{x | a \leq x\}; \quad (a, +\infty) = \{x | x > a\}, \\ (-\infty, a] &= \{x | x \leq a\}; \quad (-\infty, a) = \{x | x < a\}. \end{aligned}$$

Баъзан мавридҳо тире ададӣ дар намуди $(-\infty; +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$ навишта мешавад. Вазъияти қавсҳои квадратӣ дар маҷмӯҳои ифодакардашуда таалуқ доштани охириҳои a ва b -ро ба маҷмӯҳои номбаршуда муайян мекунад. Интервали (a, b) аз порчаи $[a, b]$ танҳо бо он фарқ мекунад, ки охириҳои a ва b ба (a, b) таалуқдор нестанд.

Маҷмӯҳои ададӣ дар ин банд овардaro дар якҷоягӣ фосилаҳои ададӣ меноманд. Намуди дигари маҷмӯҳои ададӣ, ки дар таҳлили математикӣ воমেхуранд маҷмӯҳои охиринок мебошанд. Масалан, решаҳои ҳақиқии муодилаи алгебравии додашуда. Маҷмӯҳои ҳисобӣ низ воમેхуранд. Маҷмӯи X ҳисобӣ ном дорад, агар элементҳои онро дар намуди пайдарпай ифода кардан мумкин бошад, яъне

$$X = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \quad (27)$$

Дар охир, маҷмӯи маҷмӯҳои ададӣ кушод ва сарбаст (маҳкам) -ро қайд мекунем. Маҷмӯҳои кушод гуфта якҷоякунии интервалҳо (фосилаҳои кушода) -ро меномем. Маҷмӯҳои сарбаст - иловаи маҷмӯҳои кушодро меноманд, яъне агар X — маҷмӯи кушод бошад, онгоҳ маҷмӯи $R \setminus X = \{x | x \in R, x \notin X\}$ -сарбаст ҳисоб мешавад. Оддитарин мисоли маҷмӯи кушод интервали (a, b) ва мисоли маҷмӯи сарбаст: маҷмӯҳои охиринок ва порчаи $[a; b]$ мебошанд. Маҷмӯи $\emptyset$ ва R дар як маврид кушод ва сарбаст мебошанд (исбот кунед!).

Муҳимтарин маҷмӯро дар оянда маҷмӯи атрофи нуқтаи тире ададӣ мебозад.

ТАЪРИФИ 4.2. Бигузур ε -адади мусбати ихтиёри ва a ягон адади ҳақиқӣ бошад. " ε -атрофи" нуқтаи a гуфта маҷмӯи нуқтаҳои интервали $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ -ро меноманд ва дар ягон намууди зерин ишора меёбад:

$$U(a, \varepsilon) = U_\varepsilon(a) = \{x | a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x | |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

a -маркази атроф ва ε -радиуси он ном доранд.

Агар $a = +\infty$ бошад, онгоҳ $U(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty]$ ва ҳангоми $a = -\infty$ будан $U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -1/\varepsilon)$.

Агар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ танҳо бо ∞ пур карда шавад: онгоҳ ε -атрофи он $U(\infty, \varepsilon)$ бо баробарии зерин муайян карда мешавад.

$$U(\infty, \varepsilon) = \{x | x \in \mathbb{R}, |x| > 1/\varepsilon\} \cup \{\infty\};$$

Яъне ин атроф аз ду интервалҳои беохир ($-\infty, -1/\varepsilon$), $(1/\varepsilon, +\infty)$ ва худ элементҳои ∞ иборат аст. Ҳаргуна ε -атрофи нуқтаи охиринок ё беохир тир ҳақиқӣ атрофи ном дорад ва аксар мавридҳо бо $U(a)$ ишора карда мешавад. Интервали $(a-\varepsilon, a)$ -ниматрофи чап ва $(a, a+\varepsilon)$ -ниматрофи рост нуқтаи a ном дорад.

Дар адабиётҳо ишораҳои дигари атрофи нуқтаи a : ба монанди $V(a)$, $W(a)$, $O(a)$ воমেҳуранд. Атрофҳои нуқта чунин хосияти муҳимтаринро доро мебошанд, ки онро беисбот меорем:

Барои ду нуқтаҳои гуногуни хати рост атрофҳои якдигарро набуранда вуҷуд доранд.

2. Бузургии мутлақӣ адад - ё модули адади ҳақиқӣи x гуфта ҳади адади x -ро ҳангоми $x \geq 0$ ва $-x$ -ро ҳангоми $x < 0$ будан меноманд ва чунин ишора менамоянд:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{агар } x \geq 0, \\ -x, & \text{агар } x < 0. \end{cases}$$

Мисол: $|+3|=3$, $|-7|=-(-7)=7$, $|0|=0$
 $|\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$, чунки $\sqrt{3} < \sqrt{7}$ ва $-(\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}) = -\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$.

Геометрия, бузургии мутлақии адади x , масофаи нуқтаи x тири ададиро аз ибтидои ҳисобкунӣ ифода мекунад. Бузургии мутлақии адади x хосиятҳои зеринро дорад.

$$1^0. |x| \geq 0$$

▲ Дар ҳақиқат, агар $x \geq 0$ бошад, онгоҳ $|x| = x \geq 0$, агар $x < 0$ бошад, онгоҳ $|x| = -x$, аммо $-x > 0$, чунки $x < 0$ аст, яъне $|x| > 0$. Аз ин хо $|x| \geq 0$. ▲

$$2^0. |x| = |-x|$$

▲ Дар ҳақиқат, агар $x \geq 0$ бошад, онгоҳ $-x \leq 0$ ва $|-x| = -(x) = x = |x|$. Агар $x < 0$ бошад, онгоҳ $-x > 0$ ва $|-x| = -x = |x|$. Аз ин хо $|x| = |-x|$. ▲

$$3^0. -|x| \leq x \leq |x|$$

▲ Дар ҳақиқат, агар $x \geq 0$ бошад, онгоҳ $|x| = x$, $-x \leq 0$ ва $-x \leq 0 \leq x = |x| \Rightarrow -x \leq |x|$ ё $-|x| \leq x$. Агар $x < 0$ бошад, онгоҳ $|x| = -x$, $-x > 0$ ва $x < 0 < -x = |x| \Rightarrow x < |x|$. Ҳамин тариқ $-|x| \leq x \leq |x|$. ▲

Аз исбот хосиятҳои 1^0 - 3^0 дурустии нобаробариҳои $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$ мебарояд.

4^0 . Нобаробариҳои $|x| \leq \varepsilon$ ва $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ барои ихтиёри $\varepsilon > 0$ баробарқувваанд.

▲ Бигузор $|x| \leq \varepsilon$ бошад. Агар $x \geq 0$ бошад, онгоҳ $|x| = x \leq \varepsilon$ ва $0 \leq x \leq \varepsilon$. Агар $x < 0$ бошад, онгоҳ $|x| = -x \leq \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon \leq x \leq 0$. Ҳамин тариқ, барои ихтиёри x ҳосил мекунем $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$. Бигузор $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ бошад, онгоҳ нобаробариҳои $x \leq \varepsilon$ ва $x \geq -\varepsilon$ дар як маврид иҷрошавандаанд. Аз охири нах $-x \leq \varepsilon$ ҳосил мешавад. Мувофиқи таърифи бузургии мутлақии адад, $|x|$ ё x ё $-x$ мебошад, пас $|x| \leq \varepsilon$. ▲

5^0 . Бигузор $\varepsilon > 0$ бошад. Нобаробариҳои $|x| < \varepsilon$ ва $-\varepsilon < x < \varepsilon$ баробарқувваанд.

Монанди хосияти 4^0 исбот карда мешавад. Исробаширо ба хонандан гирифтӣ месупорем. Қайд мекунем, ки нобаробариҳои $x^2 < \varepsilon$ ва $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ баробарқувваанд.

6^0 . Агар $|x| > \varepsilon$ бошад, онгоҳ ё $x > \varepsilon$ ё $x < -\varepsilon$.

♣ Дар ҳақиқат, агар $x \geq 0$ бошад, онгоҳ $|x| = x$ ва $x < \varepsilon$ мешавад. Агар $x < 0$ бошад, онгоҳ $|x| = -x$ ва $-x > \varepsilon \Rightarrow x < -\varepsilon$ мешавад. ♣

7⁰. Бузургини мутлақи суммаи ду ададҳои ҳақиқӣ аз суммаи бузургини мутлақи ин ададҳо зиёд нест, яъне $|x+y| \leq |x|+|y|$.

♣ Бигузор x ва y ададҳои ҳақиқӣи ихтиёри бошанд. Мувофиқи хосияти 3⁰ барои ададҳои x ва y нобаробариҳои $-|x| \leq x \leq |x|$; $-|y| \leq y \leq |y|$ иҷрошавандаанд. Онҳоро аъзо ба аъзо ҷамъ намуда ҳосил мекунем ($|x|+|y| \leq x+y \leq |x|+|y|$). Мувофиқи хосияти 4⁰ нобаробариҳои охирина нобаробариҳои $|x+y| \leq |x|+|y|$ баробарқувва мебошад. ♣

Аз хосияти 7⁰, нобаробариҳои $|x+y| \leq |x|+|y|$ мебарояд. Дар ҳақиқат, хосияти 7⁰ барои миқдори охириноки ҷамъшавандаҳо дуруст аст.

8⁰. Бузургини мутлақи фарқи ду ададҳо аз фарқи бузургини мутлақи ин ададҳо кам нест, яъне:

♣ Барои ихтиёри ададҳои x ва y баробариҳои $x=y+(x-y)$ ҷой дорад. Мувофиқи хосияти 7⁰ аз нобаробариҳои $|x| \leq |y|+|x-y|$ меёбем: $|x-y| \geq |x|-|y|$.

9⁰. Бузургини мутлақи ҳосили зарби ду ҳамзарбшавандаҳо ба ҳосили зарби бузургини мутлақи ҳар кадом зарбшаванда баробар аст, яъне $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

♣ Мувофиқи қонди зарби ду ададҳои ҳақиқӣ

$$xy = \begin{cases} |x| \cdot |y|, & \text{агар } x > 0, y > 0 \text{ ё } x < 0, y < 0 \text{ бошад;} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ ё } y = 0; \\ -|x| \cdot |y|, & \text{агар } x > 0, y < 0 \text{ ё } x < 0, y > 0 \text{ бошад.} \end{cases}$$

Аз ин ҷо, дар ҳамаи мавридҳо $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ аст. ♣

Ин хосият барои миқдори охириноки ҳамзарбшавандаҳо ҷой дорад, яъне

$$|x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n| = |x_0| \cdot |x_1| \cdot |x_2| \cdot \dots \cdot |x_n|.$$

Дар ин ҷо, агар $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ бошад, онгоҳ $|x^n| = |x|^n$.

10⁰. Бузургини мутлақи ҳосили тақсими ду ададҳо ба ҳосили тақсими бузургини мутлақи сурат ва махраҷ баробар аст, яъне: $|x:y| = |x|:|y|$, ($y \neq 0$).

♣ Дар ёқикат $x:y=z$ гузошта $x=yz$ ҳосил мекунем ва мувофиқи хосияти 9^0 $|x|=|yz|=|y| \cdot |z|$ ё ки $|z|=|x|:|y|$, яъне $|x:y|=|x|:|y|$ мешавад ♣

Акнун тадбиқи хосиятҳои овардашударо дар ҳалли машқҳои зерин дида мебароем.

МИСОЛИ 1. ҳалли муодилаҳои зеринро ёбед:

$$1. |x|=x+3, \quad 2. x+3|x|=4 \quad 3. x^2+|x|-6=0$$

ҲАЛ: 1) ҳангоми $x \geq 0$: $x=x+3 \Rightarrow 0=3$, ки он баробарии имконнопазир аст. Ҳангоми $x < 0$ будан $-x=x+3 \Rightarrow -2x=3 \Rightarrow x=-1.5$ ҳосил мекунем. Ин ҳалли муодила мебошад.

2) Бигузур $x \geq 0$ бошад, онгоҳ $x+3x=4 \Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1$ ҳосил мешавад. Агар $x < 0$ бошад, онгоҳ $x-3x=4 \Rightarrow x=-2$. Бинобар ин, $x=1$ ва $x=-2$ ҳалли муодила мебошанд.

3) Азбаски $x^2=|x|^2$ аст, пас $|x|^2+|x|-6=0$ ҳосил мешавад. $|x|=y$ гузошта муодилаи $y^2+y-6=0$ -ро ҳосил мекунем, ки ҳалли он ададҳои $y_1=-3$ ва $y_2=2$ мебошанд. Азбаски $y=|x| \geq 0$, пас $y_1=-3$ ҳал намешавад. Танҳо $|x|=2$ ё $x=\pm 2$ ҳалҳои муодила мешавад.

МИСОЛИ 2. Нобаробариҳои 1. $|x-3| < 4$ 2. $(x+3)^2 \leq 36$ 3. $x^2+2x-8 < 0$ -ро ҳал намоед.

ҲАЛ: 1) Мувофиқи хосияти 5^0 меёбем: $-4 < x-3 < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 7$.

2) Аз ҳар ду тараф решаи квадратӣ бароварда нобаробарии $|x+3| \leq 6$ -ро ҳосил мекунем. Мувофиқи хосияти 4^0 $-6 \leq x+3 \leq 6 \Leftrightarrow -9 \leq x \leq 3$;

3) Нобаробарии додашударо дар намуди $x^2+2x+1 < 9$ ё $(x+1)^2 < 9$ навишта меёбем: $|x+1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x+1 < 3 \Rightarrow -4 < x < 2$.

3. Маҷмӯаҳои маҳлуд ва сарҳади онҳо.

Бигузур $X=\{x\}$ ягон маҷмӯи ададҳо бошад.

ТАЪРИФИ 4.3. Маҷмӯи ададҳои X аз боло маҳлуд ном дорад, агар чунин адади M (сарҳади болоӣ) мавҷуд бошад, ки ҳамаи ададҳои маҷмӯи X аз M зиёд набоянд.

$$(\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X), (x \leq M); \quad (4.4)$$

аз поён маҳдуд, агар ҷуғнин адади m (сарҳади поёни) мавҷуд бошад, ки ҳаман ададҳои маҷмӯи X аз m калон ё баробар бошад:

$$(\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in X), (x \geq m). \quad (4.5)$$

Маҳдуд, агар вай ҳам аз боло ва ҳам аз поён маҳдуд бошад:

$$(\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in X), (m \leq x \leq M) \quad (4.6)$$

Тасдиқотҳои инкори (4.4)-(4.6) -ро тартиб дода таърифи меёраҳои номаҳдудро ҳосил мекунем. Агар M сарҳади болоии маҷмӯи X боло маҳдуди X бошад, онгоҳ ҳаргуна адади аз M калон сарҳади болоии маҷмӯи X мешавад.

Ҳамин тариқ, маҷмӯи аз боло маҳдуд миндори беохир сарҳади болоӣ дошта метавонад.

Хурдтарин аз ададҳои маҷмӯи X -ро аз боло маҳдуд, вақнда сарҳади аниқ болоии маҷмӯи X ном дошта бо $\sup X$ (хонда мешавад: "Supremum X ") ишора карда мешавад.

Агар m -сарҳади поёнии маҷмӯи аз поён маҳдуди X бошад, онгоҳ ҳаргуна адади аз m хурд нисбат ба сарҳади поёнии он шуда метавонад. Ҳамин тариқ, маҷмӯи аз поён маҳдуди X миндори беохир сарҳади поёни дорад. Калонтарин адад аз сарҳадҳои поёнии маҷмӯи X -ро сарҳади аниқ поёнии маҷмӯи X номида бо $\inf X$ (хонда мешавад: "infimum X ") ишора мекунанд.

МИСОЛҲО: 1) X -маҷмӯи касрҳои дуруст. Маҷмӯи X маҳдуд аст, ҷуғкин агар $M=1$ гузорем, онгоҳ $x \in X$ ҷа тавре ки набошад $|x|$ қамешавад.

2) X -маҷмӯи ҳаман ададҳои манфӣ. Маҷмӯи X аз боло бо $m=0$ адади ихтиёрии мусбат маҳдуд аст.

3) Бигузор $X=(a,b)$ бошад. Адади a ва ҳаргуна адади аз a калон сарҳади болоии X , адади a ва ҳаргуна адади аз он хурд сарҳади поёнии маҷмӯи X мебошанд, яъне $b=\sup X$, $a=\inf X$.

4) Бигузор $X=(a;+\infty)$ бошад, онгоҳ $a=\inf X$, аммо X сарҳади аниқ болоӣ надорад.

5) Маҷмӯи N аз поён бо адади сифр ($\inf N=0$) ва ҳаргуна адади манфӣ маҳдуд буда аз боло маҳдуд нест, пас сарҳади аниқӣ болоӣ надорад;

6) Маҷмӯаҳои Z , Q , R -маҷмӯаҳои номаҳдуданд.

Мисолҳои овардашуда нишон медиҳанд, ки на ҳар кадом маҷмӯи сарҳадҳои аниқӣ поёнӣ ва болоӣ дорад. Ба саволи он, ки чигуна маҷмӯаҳои ададӣ сарҳадҳои дақиқ доранд тасдиқоти зерин ҷавоб мебаронад.

ТЕОРЕМАИ 4.1. (Мавҷудияти сарҳадҳои аниқ).

Ҳаргуна маҷмӯи ғайриҳолӣ аз боло (поён) маҳдудӣ X сарҳади аниқӣ болоӣ (поёни) дорад.

♣ Мавҷудияти сарҳади аниқӣ болоӣ ($\sup X$)-ро нишон медиҳем.

Қисми дуҷуми теорема айнан исбот карда мешавад. Бигузор маҷмӯи $X=\{x\}$ аз боло маҳдуд бошад ва адади калонтарини $\bar{x} \in X$ -ро дар худ дошта бошад, онгоҳ ($\forall x \in X$): ($x \leq \bar{x}$), яъне $\bar{x}$ -сарҳади болоӣ аст. Агар M боз як сарҳади болоӣ маҷмӯи X бошад, онгоҳ аз сабаби он ки $\bar{x} \in X$ аст, бояд $\bar{x} \leq M$ бошад. Бинобар ин, $\exists \sup X = \bar{x}$.

Шарт мекунем, ки маҷмӯи X адади калонтарин надорад. Бурриши $A|A'$ маҷмӯи R ададҳои ҳақиқиро чунин мегузаронем: ба синфи болоӣ A' ҳаман сарҳадҳои болоӣ маҷмӯи X ва ба синфи поёнӣ A ҳаман ададҳои боқимондари дохил мекунем. Синфҳои A ва A' -ҳоӣ нестанд, чунки $\emptyset \neq X \leq A$ ва $\exists M \in A'$. Ба ғайр аз ин, мувофиқи созиш $A \cap A' = \emptyset$, $A \cup A' = R$. Агар $a \in A$: $a' \in A'$ бошад, онгоҳ ($\exists x \in X$), ($a < x$) ва ($\forall x \in X$): ($x < a'$) аст. Аз ин ҷо $a < a'$. Бинобар ин, $A|A'$ -бурриш аст. Мувофиқи теоремаи Дедекинд адади ҳақиқии α мавҷуд аст, ки ин бурришро мегузаронад. Ин адад ба синфи болоӣ A' таалуқдор аст ва дар он ҷо хурдтарин аст. Бинобар ин сарҳади аниқӣ болоӣ маҷмӯи X аст. Ҳамин тариқ, $\exists \sup X = \alpha$ ♣

Баъзе хосиятҳои сарҳадҳои аниқро меорем.

1^o. Агар $\alpha = \sup X$ бошад, онгоҳ барои ихтиёри $\varepsilon > 0$ адади $x_0 \in X$ мавҷуд аст, ки $x_0 > \alpha - \varepsilon$.

▲ Мувофиқи таъриф $\alpha = \sup X$ -хурдтарин аз ҳамаи сарҳадҳои болоӣ аст. Азбаски $\alpha - \varepsilon < \alpha$ аст, пас адади $(\alpha - \varepsilon)$ сарҳади болоии маҷмӯи X намебошад, пас адади $x_0 \in X$ ёфт мешавад, ки $x_0 > \alpha - \varepsilon$ яъне $(\exists x_0 \in X): (x_0 > \alpha - \varepsilon)$ ▲

Ҳосиятҳои поён айнаи исбот мешаванд.

2⁰. Агар $\alpha = \inf X$ бошад, онгоҳ барои ихтиёри $\varepsilon > 0$ адади $x_0 \in X$ ёфт мешавад, ки $x_0 < \alpha + \varepsilon$.

3⁰. Агар ҳамаи ададҳои ягон маҷмӯи X нобаробарии $x \leq M$ -ро қаноат кунад, онгоҳ $\sup X \leq M$ аст.

4⁰. Агар ҳамаи ададҳои ягон маҷмӯи X нобаробарии $x \geq M$ -ро қаноат кунад, онгоҳ $\inf X \geq M$ аст.

Агар маҷмӯи X аз боло (поён) маҳдуд набошад, онгоҳ $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$) ва барои маҷмӯи $(X = \emptyset)$ ҳоля $\sup X = -\infty$; $\inf X = +\infty$ муъаён-ранд.

Бо чунин ишораҳои ҳосияти зерин дуруст аст:

5⁰. Агар $X \neq \emptyset$ бошад, онгоҳ $\inf X \leq \sup X$.

▲ Агар $X \neq \emptyset$ бошад, онгоҳ $\exists x \in X$ ва $\inf X \leq x \leq \sup X$. Аз ин ҷо, мувофиқи ҳосияти транзитивия $\inf X \leq \sup X$ ▲

Сарҳадҳои аниқи маҷмӯъ иҷро шудани талаботҳои зеринро дар назар доранд:

1) Агар $\alpha = \sup X$ бошад, онгоҳ:

а) барои ихтиёри $x \in X$ нобаробарии $x \leq \alpha$ иҷрошаванда аст;

б) адади $\varepsilon > 0$ чӣ тавре ки набошад ақдалан як нуқтаи $x' \in X$ ёфт мешавад, ки $x' < \beta + \varepsilon$.

5. Методи индуксияи математикӣ.

Методи индуксияи математикӣ методест, ки бо ёрии он ягон далел ё формуларо барои ҳаргуна адади натуралӣ n исбот кардан талаб карда мешавад. Далел ё $T(n)$ барои ихтиёри $n \in \mathbb{N}$ дуруст ҳисоб меёбад, агар ду шартҳои зерин иҷро шавад (принсипи индуксияи математикӣ):

1) Далели $T(n)$ барои $n=1$ дуруст бошад;

2) Барои ихтиёри $k \in \mathbb{N}$ аз дурустии далели $T(n)$ барои $n=k$ дурустии он барои $n=k+1$ ҳосил шавад.

Ақсун баъзе мисолҳоро бо ин метод таҳлил намуда, яқчанд теоремаҳоро дар шакли тасдиқотҳо беисбот меорем.

МИСОЛИ 4.1. Суммаи $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!$ ҳисоб карда шавад.

ҲАЛ: Яқчанд қиматҳои аввалини суммаи S_n -ро меёбем:

$$S_1 = 1 \cdot 1! = 1 \Rightarrow S_1 = 2! - 1 = 1;$$

$$S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 1 + 4 = 5 \Rightarrow S_2 = (2+1)! - 1;$$

$$S_3 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 1 + 4 + 18 = 23 \Rightarrow S_3 = (3+1)! - 1;$$

$$S_4 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 1 + 4 + 18 + 96 = 119 \Rightarrow S_4 = (4+1)! - 1; \dots;$$

$$S_n = (n+1)! - 1.$$

Шарт кардан мумкин аст, ки барои ҳамаи қиматҳои $n \in \mathbb{N}$ тасдиқоти $T(n): S_n = (n+1)! - 1$ ҳаққония аст. Дурустии тасдиқоти T_n алакай барои мавриди $n=1$ ($S_1 = 1 \cdot 1! = 1 \Rightarrow S_1 = 2! - 1 = 1$) санҷида шуд. Бигузор T_n барои $n=k$, яъне $S_k = (k+1)! - 1$ ҳаққония бошад. Барои $n=k+1$ ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)(k+1)! = (k+1) - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+1)!(k+1+1) - 1 = \\ &= (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1 \end{aligned}$$

Ҳамин тариқ, тасдиқоти $T(n)$ барои $n=k+1$ ҳаққония будааст ва мувофиқи ҳулосаҳои боло $\forall n \in \mathbb{N}$ тасдиқоти $T_n: S_n = (n+1)! - 1$ дуруст аст.

Баъзе мавридҳо тасдиқоти $T(n)$ -ро на барои ҳамаи ададҳои натуралӣ, балки барои ҳамаи $n \geq m$ исбот кардан лозим меояд, ки дар ин ҷо m -ягон адади бутун мебошад. Дар ин маврид тасдиқоти T_n -ро аввал барои $n=m$ санҷидан лозим меояд. Агар барои ихтиёри адади бутуни $k \geq m$ аз тасдиқоти $T(n)$ ҳангоми $n=k$ дурустии он барои $n=k+1$ ҳосил шавад, онгоҳ ҳулоса мебарорем, ки T_n барои ҳамаи $n \geq m$ ҳаққония мебошад.

МИСОЛИ 4.2. Барои ҷиғуна $n \in \mathbb{Z}$ нобаробарии

$$2^{n+6} > (n+6)^2 \quad (4.7)$$

чой дорад.

ҲАЛ: ҳангоми $n+6 < 0$ нобаробарии (4.7) чой дорад, чунки тарафи чапи он аз 1 хурд буда тарафи рости он адади натураля мебошад.

$$\begin{aligned} \text{ҳангоми } n=-6 & \quad 2^0=1 > 0=0^2, \\ \text{ҳангоми } n=-5 & \quad 2^1=2 > 0=(-5+6)^2, \\ \text{ҳангоми } n=-4 & \quad 2^{(-4+6)}=4=(-4+6)^2, \\ \text{ҳангоми } n=-3 & \quad 2^{(-3+6)}=8 < 9=(-3+6)^2, \\ \text{ҳангоми } n=-2 & \quad 2^{(-2+6)}=16=(-2+6)^2, \\ \text{ҳангоми } n=-1 & \quad 2^{(-1+6)}=32 > 25=(-1+6)^2, \\ \text{ҳангоми } n=0 & \quad 2^{(0+6)}=64 > 36=(0+6)^2. \end{aligned}$$

Ҳамин тариқ, шарт намудан мумкин аст, ки барои ҳамаи қиматҳои $n > -1$ нобаробарии (4.7) чой дорад. Барои $n=-1$ дурустии он дида шуд.

Бигузор (4.7) барои $n=k, k > -1$ дуруст бошад, яъне $2^{k+1} \geq (k+6)^2$ барои $k \geq -1$. Азбаски $2^{(k+1)+6} = 2 \cdot 2^{k+6}$ аст, пас

$$2^{(k+1)+6} = 2 \cdot 2^{k+6} > 2(k+6)^2 = 2k^2 + 24k + 72 = (k^2 + 14k + 49) + (k^2 + 10k + 23) > (k+7)^2$$

Бинобар ин, $2^{(k+1)+6} > ((k+1)+6)^2$ ва мувофиқи методи индуксия хулоса мебарояд, ки нобаробарии (4.7) барои ҳамаи қиматҳои $n \geq -1$ дуруст аст.

ТАСДИҚОТИ 4.1. Бигузор тасдиқоти T_n барои $n=1$ дуруст бошад. Агар аз дурустии он, ки T_n барои ҳамаи $n \leq k$, $n, k \in \mathbb{N}$ ҳаққония аст, натиҷа барояд, ки вай барои $n=k+1$ низ ҳаққония мебошад, онгоҳ T_n барои ҳамаи қиматҳои $n \in \mathbb{N}$ ҳаққония аст.

МИСОЛИ 4.3. Исбот мекунем, ки барои ихтиёри $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ но-

$$\text{баробарии } x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \dots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n+1 \quad (4.8)$$

иҷрошаванда аст.

ҲАЛ:

$$\blacktriangle S_n = x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \dots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \text{ мегузорем.}$$

Тасдиқоти матлаби $T(n): S_n \geq n+1: \forall n \in \mathbb{N}$ -ро нишон додан лозим аст. ҳангоми $n=1$ меёбем: $S_1 = x+1/x$. Азбаски, барои ихтиёри x , $(x-1)^2 \geq 0$ аст, пас $x+1/x \geq 2$ ё $S_1 = x+1/x \geq 2$;

ҳангоми $n=2$, $S_2 = x^2+1+1/x^2$ мебошад. Дар нобаробарии $x+1/x \geq 2$, x -ро ба x^2 иваз намуда меёбем: ки $x^2+1/x^2 \geq 2$. Адади 1-ро ба ҳарду тарафи нобаробарии охирин ҳамъ намуда ҳосил мекунем $S_3 = x^2+1+1/x^2 \geq 2+1 \Rightarrow S_3 \geq 3$.

Ҳамин тариқ, тасдиқоти $T(n)$ ҳангоми $n=1,2$ дуруст будааст. Шарт мекунем, ки $T(n)$ барои ҳамаи қиматҳои $n \leq k$, $k \geq 2$ ҷой дошта бошад. Ибтот мекунем, ки нобаробарии (4.8) дар мавриди хусуси барои $n=k+1$ ҳаққонӣ аст. Мувофиқи шарти кардашуда нобаробарии (4.8) дар мавриди хусусӣ барои $n=k-1$ ($k-1 \geq 1$) дуруст аст, яъне

$$S_{k-1} = x^{k-1} + x^{k-3} + \dots + \frac{1}{x^{k-3}} + \frac{1}{x^{k-1}} \geq k+2 \quad (4.9)$$

Дар нобаробарии $x+1/x \geq 2$, x -ро ба x^{k+1} иваз намуда ҳосил мекунем: $x^{k+1}+1/x^{k+1} \geq 2$ (4.10)

Нобаробариҳои (4.9) ва (4.10)-ро ҳамъ намуда меёбем:

$$x^{k+1} + x^{k-1} + x^{k-3} + \dots + \frac{1}{x^{k-3}} + \frac{1}{x^{k-1}} + \frac{1}{x^{k+1}} \geq k+2$$

Яъне $S_{k+1} = k+2$.

Мувофиқи тасдиқоти 4.1. нобаробарии (4.8) барои ихтиёри k ҳаққонӣ аст $\blacktriangle$

ТАСДИҚОТИ 4.2. Бигузор ягон тасдиқоти $T(n)$ барои ҳамаи қиматҳои n , ки ба ягон пайдарпайии ададҳои натуралӣ қатъи авзуншавандан (p_k) таалуқдор аст, ҳаққонӣ бошад. Агар аз дурустии $T(n)$ ҳангоми $n=k$, (k -адади натуралӣ калон аз 1) дурустии он, ҳангоми

$n=k-1$ барояд, онгоҳ $T(n)$ барои ҳамаи қиматҳои $n \geq n_1$ ҳаққонӣ аст. Ин тасдиқотро дар баъзе мавридҳо "индуксияи баръакс" меноманд.

МИСОЛИ 4.4. Ибтот кунад, ки миёнаи арифметикии n ададҳои ғайриманфӣ $a_1, a_2, \dots, a_n$ аз миёнаи геометрии онҳо кам нест. Яъне

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}; \quad (4.11)$$

Ибтотро ба ду қисм ҷудо мекунем.

1) нишон медиҳем: ки (4.11) барои ҳамаи қиматҳои пайдарпаии афзуншавандаи $n=2^k$, $k \in \mathbb{N}$ иҷрошаванда аст.

Аз методи индуксияи математикӣ истифода мебарем.

Нобаробарии (4.11)-ро ҳангоми $n=2$ менависем,

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}; \quad (4.12)$$

Мувофиқи нобаробарии (4.12) ҳосил мекунем,

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} &= \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)} \\ &\geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}. \end{aligned}$$

Яъне нобаробарии (4.11)-ро барои мавриди $n=4=2^2$ ҳосил намудем. Шарт мекунем, ки нобаробарии (4.11) барои мавриди $n=2^k$, $k \in \mathbb{N}$ иҷрошаванда аст. Нишон медиҳем, ки вай ҳангоми $n=2^{k+1}$ низ иҷро мешавад. Усули гузориш аз мавриди $n=2$ ба $n=4$ -ро истифода мебарем:

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, b_2 = \frac{a_3 + a_4}{2}, \dots, b_{2^{k-1}} = \frac{a_{2^{k-1}-1} + a_{2^{k-1}}}{2};$$

мегузорем ва мувофиқи шартҳои индуксия

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{b_1 b_2 \dots b_{2^k}};$$

Аз ин ҷо, мувофиқи нобаробарии (4.12)

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[k]{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right) \dots \left(\frac{a_{2^{k-1}-1} + a_{2^k}}{2}\right)} \geq \sqrt[k]{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4} \dots \sqrt{a_{2^{k-1}-1} a_{2^k}}} \\ = \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_{2^k}};$$

Ҳамин тариқ, дар асоси принсипи индуксияи математикӣ хулоса мебарорем, ки нобаробарии (4.11) барои ҳамаи қиматҳои $n=2^k$, $k \in \mathbb{N}$ иҷрошаванда аст.

2) ҳангоми исботи (4.11) барои ҳамаи қиматҳои $n \in \mathbb{N}$ аз тасдиқоти 4.2. истифода мебарем.

Шарт мекунем, ки нобаробарии (4.11) барои ихтиёри ададҳои $m > 1$, $m \in \mathbb{N}$ иҷро шавад. Нишон медиҳем, ки (4.11) барои $m-1$ ададҳои ихтиёри дуруст аст.

$b_1 = a_1, b_2 = a_2, \dots, b_{m-1} = a_{m-1}$, гузошта b_m -ро ҳамин тавр интихоб мекунем, ки шарт

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_m}{m} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}}{m-1}, \text{ яъне } b_m = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}}{m-1};$$

иҷрошаванда бошад.

Мувофиқи шarti индуксия $\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_m}{m} \geq \sqrt[m]{b_1 b_2 \dots b_m}$, онгоҳ

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}}{m-1} = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_m}{m} \geq \sqrt[m]{b_1 b_2 \dots b_m} = \\ = \sqrt[m]{b_1 b_2 \dots b_{m-1} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}}{m-1}} = \sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_{m-1} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}}{m-1}}$$

Бинобар ин, нобаробарии

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}}{m-1}\right)^m \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}}{m-1}\right) \text{ ба нобароба-}$$

рии (4.11) ҳангоми $n=m-1$ будан баробарқувва аст.

Ҳамин тариқ, мувофиқи тасдиқоти 4.2. хулоса мебарорем, ки нобаробарии (4.11) барои ҳамаи қиматҳои $n \in \mathbb{N}$ ҷой дорад.

5. Ҷойгиркуниҳо, ҷойивазкуниҳо, пайвастуниҳо ва биноми Нютон.

Бигузор ягон маҷмӯи охиринокӣ n элементҳои гуногуни $x_1, x_2, \dots, x_n$ додашуда, ягон адади натуралӣ $k \leq n$ қайд шуда бошад.

ТАЪРИФИ 4.3. Ҷойгиркуниҳо аз n элемент k -тогӣ гуфта гурӯҳи элементҳоеро меноманд, ки онҳо аз ҳамдигар ё аққалан бо як элемент ё бо тартиби ҷойгиршавии элементҳо фарқ мекунанд.

Мисол, аз 3 элементҳои a, b, c дутогӣ чунин ҷойгиркуниҳоро тартиб додан мумкин аст: $\{a, b\}, \{b, a\}, \{a, c\}, \{c, a\}, \{b, c\}, \{c, b\}$.

Миқдори ҷойгиркуниҳо аз n элемент k -тогиро бо A_n^k ишора мекунем, ки дар ин ҷо $n=1, 2, \dots, k=1, 2, \dots, n$ аст.

Тасдиқоти зерин ҷой дорад, ки беисбот меорем.

ТАСДИҚОТИ 4.3. Шумораи ҳамаи ҷойгиркуниҳо аз n элемент k -тогӣ ба

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)] \quad (4.13)$$

баробар аст.

ТАЪРИФИ 4.4. Ҷойивазкуниҳо аз n элемент гуфта ҷойгиркуниҳо аз n элемент n -тогиро меноманд, яъне онҳо маҷмӯаҳои n элементдоре мебошанд, ки аз ҳамдигар фақат бо тартиби элементҳо фарқ мекунанд.

Мисол. Ҷойивазкуни аз элементҳои a, b, c инҳоянд: $\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}$.

Миқдори ҷойгиркуниҳо аз n элементҳо бо P_n ишора мекунем.

ТАСДИҚОТИ 4.4. Шумораи ҳамаи ҷойивазкуниҳо ба $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$ баробар аст.

Ин бевосита аз формулаи (4.13) ҳангоми $k=n$ будан ҳосил мешавад:

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = n! \quad (4.14)$$

Барои куллан $P_0 = 0! = 1$ мегузоранд.

ТАЪРИФИ 4.5. Пайвастуниҳо аз n элемент k -тогӣ гуфта маҷмӯаҳои n элементдореро меноманд, ки ҳар кадоми онҳо аз якдигар

аққалан бо як элемент фарқ мекунанд (тартиби ҷойгиршавии элементҳо ба назар гирифта намешавад).

Мисол. Пайвастуниҳо аз 3 элементҳои a, b, c дутогӣ инҳоянд:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}.$$

Адади ҳамаи пайвастуниҳо аз n элементҳо k -тогиро бо C_n^k ишора мекунем.

ТАСДИҚОТИ 4.5. Шумораи пайвастуниҳо аз n элемент k -тогӣ ба

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{n!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (4.15)$$

баробар аст.

♣ Аз ҳар як пайвастуниҳои аз k элемент иборат буда $k!$ ҷойгиркуниҳо тартиб додан мумкин аст. Бинобар ин $A_n^k = C_n^k k!$ Мешавад. Аз ин ҷо $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!}$. Сурат ва маҳраҷи тарафи ростӣ баробариҳо ба $(n-k)!$ зарб карда, формулаи (4.15)-ро ҳосил мекунем ♣

Аз (4.15) формулаи зерин, $C_n^k = C_n^{n-k}$ мебарояд, чунки

$$C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Акнун нишон медиҳем, ки

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad (4.16)$$

♣ Дар ҳақиқат мувофиқи (4.15) меёбем:

$$\begin{aligned} C_{n-1}^k &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}, C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}, \\ C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} = \\ &= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k \end{aligned}$$

Ададҳои C_n^k ҳангоми ба дараҷа бардоштани дуаъзогии $x+y$ вомеҳуранд. Масалан:

$$\begin{aligned}
 (x+y)^1 &= C_1^0 x + C_1^1 y; \\
 (x+y)^2 &= 1x^2 + 2xy + 1y^2 = C_1^0 x^2 + C_1^1 xy + C_1^1 y^2; \\
 (x+y)^3 &= 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 = C_3^0 x^3 + C_3^1 x^2y + C_3^2 xy^2 + C_3^3 y^3.
 \end{aligned}$$

ТАСДИҚОТИ 4.6. Барон ихтиёри $p \in \mathbb{N}$ формулаи зерин ҷой до-
рад:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k. \quad (4.17)$$

▲ Баробарии (4.17)-ро бо методи индуксияи математикӣ исбот ме-
кунем. Ҳангоми $p=1$ баробарии (4.17) намуди зеринро дорад.

$x+y = C_1^0 x + C_1^1 y$, ҷунки $C_1^0 = C_1^1 = 1$ мебошанд. Шарт мекунем, ки
(4.17) ҳангоми $p=k$, $k \in \mathbb{N}$ дуруст аст, яъне

$$(x+y)^k = \sum_{p=0}^k C_k^p x^{k-p} y^p. \quad (4.18)$$

Ҳар ду тарафи (4.18)-ро ба $x+y$ зарб мекунем:

$$\begin{aligned}
 (x+y)^{k+1} &= (x+y) \sum_{p=0}^k C_k^p x^{k-p} y^p = \sum_{p=0}^k C_k^p x^{k+1-p} y^p + \sum_{p=0}^k C_k^p x^{k-p} y^{p+1} = \\
 &= C_k^0 x^{k+1} + \sum_{p=1}^k C_k^p x^{k+1-p} y^p + \sum_{p=0}^k C_k^p x^{k-p} y^{p+1} + C_k^k y^{k+1}.
 \end{aligned}$$

Дар суммаи $\sum_{p=0}^{k-1} C_k^p x^{k+1-p} y^{p+1}$ индекси p -ро ба $p-1$ иваз менамоем,

яъне ҷамъшавандаҳоро аз нав рақамгузорӣ мекунем:

$$\sum_{p=0}^{k-1} C_k^p x^{k+1-p} y^{p+1} = \sum_{p=1}^k C_k^{p-1} x^{k+1-p} y^p.$$

Бинобар ин

$$\begin{aligned}
 (x+y)^{k+1} &= C_k^0 x^{k+1} + \sum_{p=0}^k C_k^p x^{k+1-p} y^p + \sum_{p=1}^k C_k^{p-1} x^{k+1-p} y^p + C_k^k y^{k+1} = \\
 &= C_k^0 x^{k+1} + \sum_{p=0}^k (C_k^p + C_k^{p-1}) x^{k+1-p} y^p + C_k^k y^{k+1}.
 \end{aligned}$$

Азбаски $C_k^0 = C_k^k = C_{k+1}^0 = C_{k+1}^{k+1} = 1$ ва $C_k^p + C_k^{p-1} = C_{k+1}^p$ аст, пас ҳосил мекунем: $(x+y)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} C_{k+1}^p x^{k+1-p} y^p$. Яъне формулаи (4.18), ҳангоми $p=k+1$ будан низ ҷой дорад. Мувофиқи принципи индуксияи математикӣ ҳулоса мебарояд, ки формулаи (4.18) барои ихтиёри $p \in \mathbb{N}$ дуруст аст. ♣

Формулаи (4.18)-ро формулаи бинومي Нютон ва коэффитсентҳои он C_n^k -ро коэффитсентҳои биномиалӣ меноманд.

Аз формулаи бинومي Нютон истифода бурда якҷанд натиҷаҳо ҳосил намудан мумкин аст:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n; \quad (4.19)$$

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n; \quad (4.20)$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + C_n^7 + \dots \quad (4.21)$$

Масалан: баробари (4.21)-ро исбот мекунем.

♣ Дар ифодаи $(x+y)^n$, $x=1$; $y=-1$ гузошта меёбем.

$$0 = (1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n.$$

Аз ин ҷо, ҳосил мекунем: $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + C_n^7 + \dots$

Баробариҳои (4.19) ва (4.20) ҳамин тавр исбот карда мешаванд, ки онҳоро ба хонанда тавсия менамоем.

Машқҳо барои боби I

1. Сарҳади аниқи маҷмӯаҳои зеринро ёбед:

а) $[a;b]$, $(a;b)$, $[a;b)$, $(a;b]$;

б) $X = [-1; -1/2] \cup [1/2; 1]$;

в) $X = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$;

г) $X = \{x | x^2 - 5x + 4 = 0\}$;

д) $X = \{m \setminus n | m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m < n\}$.

2. Суммаи ду ададҳои ҳақиқии α ва β гуфта: адади γ -ро меноманд, ки дар байни ҳамаи суммаҳои намуди $a+b$; $a'+b'$ ҷойгиранд, ки

дар ин ҷо $a, b, a'b' \in \mathbb{Q}$ ва $a \leq \alpha \leq a'$, $b \leq \beta \leq b'$. Мавҷудият ва ягонагии суммаро исбот намоед.

3. Бигузор $\alpha = A|A'$ бошад. Адади $(-\alpha)$ -ро бо ёрии бурриш муайян намуда нишон диҳед: ки $\alpha + (-\alpha) = 0$ аст. Таърифи фарқи ду адади ҳақиқиро диҳед.

4. Модули адади ҳақиқии α -ро чунин муайян мекунем: $\alpha =_{\text{def}} \sup\{\alpha, -\alpha\}$. Нобаробарии «секунча»: $\|\alpha\| - \|\beta\| \leq \|\alpha + \beta\|$ -ро исбот намоед.

5. Таърифи зарби ду адади ҳақиқиро дода мавҷудият ва ягонагии онро исбот намоед.

6. Бигузор $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $p \in \mathbb{N}$ бошад. Адади $1/\alpha$ -ро муайян намуда мавҷудияти онро исбот намоед. Тақсими ду ладҳои ҳақиқӣ $\alpha \setminus \beta$ -ро муайян намуда мавҷудияти онро исбот намоед.

7. Бигузор $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $p \in \mathbb{N}$ бошад. Таърифи $\sqrt[p]{\alpha}$ -ро бо ёрии бурриш дода, мавҷудияти онро исбот намоед. Дараҷаро бо нишондиҳандаи раціоналӣ ва нишондиҳандаи ҳақиқӣ муайян намоед.

8. Исбот намоед, ки агар γ -адади раціоналӣ ва α -адади иррационалӣ бошад, онгоҳ $(\alpha + \gamma)$ -адади иррационалӣ мебошад.

9. Исбот намоед, ки байни ду ададҳои ҳақиқии гуногун ададҳои раціоналӣ ва иррационалӣ ҷойгиранд.

10. Исбот намоед, ки чунин адади раціоналӣ γ вуҷуд надорад, ки $\gamma^2 = 5$ бошад.

11. Исбот намоед, ки маҷмӯи $\left\{ \frac{n^2}{n^2 + 4} \right\}$, $p \in \mathbb{N}$, маҳдуд аст. Сарҳади дақиқи поёни ва болои онро ёбед.

12. Исбот намоед, ки маҷмӯи $\left\{ [1 + (-1)^n]n + \frac{1 - (-1)^n}{n} \right\}$, аз боло маҳдуд набуда аз поён маҳдуд аст. Сарҳади дақиқи поёни онро ёбед.

*Китоби дурусти табиат бо
забони математика навишта шудааст. Г.Галилей**

БОБИ II. МАЪЛУМОТҲОИ АВВАЛИНИ ӑҒЪИКОС ВА ФУНКЦИЯҲО

Ба ғайр аз мафҳуми адад ва маҷмӯъ, ӑғъикос низ ба мафҳуми асосии математика мансуб аст. Дар ин боб, бо таърифи мухтасар, аввалин мафҳумҳои ӑғъикос, функсияҳо ҳамчун ӑғъикоси маҷмӯъҳои ададӣ, баъзе синфҳои функсияҳо ва дигар далелҳои ба мафҳуми ӑғъикос алоқаманд омӯхта мешаванд.

§5. ӑҒЪИКОС ВА ХОСИЯТҲОИ ОДИТАРИНИ ОН

1. Мафҳуми ӑғъикоси маҷмӯъ. Бигуздор X ва Y маҷмӯъҳои ихтиёрӣро ғайри холя бошанд.

ТАЪРИФИ 5.1. Мегуянд, ки ӑғъикоси маҷмӯи X ба маҷмӯи Y дода шудааст, агар қонун ва қондан f нишон дода шуда бошад, ки мувофиқи он ба ҳар кадом элементи $x \in X$ элементи $y \in Y$ яқинмата мувофиқ гузошта мешавад. Элементи $x \in X$ -ро тағйирёбандан новобаста (ϵ аргумент) ва элементи $y \in Y$ -ро тағйирёбандан вобаста (ϵ функсия) меноманд.

Ин мувофиқгузориро бо рамзҳои: $y=f(x)$, $f:X \rightarrow Y$ ё $X \rightarrow Y$ ишорат мекунанд. Дар навишти $y=f(x)$, $f(x)$ -қимати функсияе мебошад, ки қондан f ба қимати аргументи x мувофиқ мегузорад. Элементи y , ки дар ӑғъикоси f ба элементи x мувофиқат меояд, образи элементи x (ва элементи x — прообрази элементи y) ном дорад. Маҷмӯи X -маҷмӯи (ϵ соҳаи) муаввӣ ва Y маҷмӯи (ϵ соҳаи) тағйирёбандан ӑғъикоси f ном дорад. Ҳамин тариқ, дода шудани ягон ӑғъикос (функсия) нишон додани сегонан объектҳои X , Y , f -ро талаб мекунанд.

* Г. Галилей (1564-1642) — олимони итлоӣ

Қайд менамоем, ки дар таърифи иғъикос яворматагӣ (ба ҳар кадом қимати x як ва фақат як қимати y дар мувофиқ гузошта мешавад) мафҳуми муҳимтарини мебошад.

Вобаста аз хосиятҳои иғъикоси f , барои ду қиматҳои гуногуни $x_1, x_2 \in X$ ($x_1 \neq x_2$), маъридҳои $f(x_1) \neq f(x_2)$ ё $f(x_1) = f(x_2)$ имкониятиро мебошад. Агар даъ таърифи 5.1 талаботи яворматагӣ нагузарем, онгоҳ мафҳуми умумитари мувофиқатро ҳосил менамоем, ки дар таҳлили математикӣ камтар воқеъурад.

Вобаста аз талаботи маъмулҳои X ва Y дар қисмҳои алоҳидаи математика намудҳои гуногуни сингонивҳои иғъикос: функция, табдилот, оператор, функционал, морфизм ва дигарҳо воқеъуранд.

ТАЪРИФИ 5.2. График иғъикоси $f: X \rightarrow Y$ маъмул аз ҳаман он ҷуфтҳои тартибнокӣ (x, y) иборат аст, ки $x \in X$ ва $y = f(x)$ мебошанд, яъне

$$\Gamma = \{(x, y) | x \in X; y = f(x)\} \quad (5.1)$$

2. *Образҳо ва прообразҳои маъмул дар иғъикосҳо.* Бигузор $f: X \rightarrow Y$ иғъикос ва A -ягон зермаъмули X бошад: $\emptyset \subseteq A \subseteq X$.

ТАЪРИФИ 5.3. Образи $f(A)$ маъмули A дар иғъикоси $f: X \rightarrow Y$ маъмули образҳои ҳаман элементҳои маъмули A -ро меноманд:

$$f(A) = \{y | y \in f(x); x \in A\} \quad (5.1)$$

Айён аст, ки ҳама вақт $f(x) \subseteq Y$ аст.

Дар он маъриди хусусие, ки $f(x) = Y$ аст, иғъикоси $f: X \rightarrow Y$ сюръективӣ (иғъикоси X дар Y) ном дорад. Бъёзан хосиятҳои образҳоро меорем:

$$1^0. f(\emptyset) = \emptyset;$$

$$2^0. [A_1 \subseteq A_2] \Rightarrow [f(A_1) \subseteq f(A_2)];$$

$$3^0. f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$$

$$4^0. f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2).$$

Ба сифати мисол иғъикосе, ки дар 4^0 ишораи қатъини $\subseteq$ аст, нишон медиҳем.

▲ «Иғъикоси доимии» $g: X \rightarrow \{y_0\}$ -ро дида мебароем, ки ҳаман элементҳои маъмули X -ро ба як элементи y_0 мегузаронад:

$$(\forall x \in X) (g(x) = y_0).$$

Агар $\emptyset \neq A_1 \subseteq X$ бошад, онгоҳ $g(A_1) = \{y_0\}$. Айнан, агар $\emptyset \neq A_2 \subseteq X$ бошад, онгоҳ $g(A_2) = \{y_0\}$. Агар $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ бошад, онгоҳ ҳосил мекунем:

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset \subset \{y_0\} = \{y_0\} \cap \{y_0\} = f(A_1) \cap f(A_2).$$

Аввал ва охирашро гирифта ҳосил мекунем:

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2). \spadesuit$$

Мустақилона он Ӯғйикосҳоро шарҳ диҳед, ки дар 4^0 аломати «баробарӣ» аст.

Бигузӯр Ӯғйикоси $f: X \rightarrow Y$ ва маҷмӯи, $B \subseteq X$ дода шуда бошад. Маҷмӯи прообрази пурраи маҷмӯи B —ро дар Ӯғйикоси f ҷорӣ мекунем.

ТАЪРИФИ 5.4. Прообрази пурраи $f^{-1}(B)$ маҷмӯи $B \subseteq Y$ дар Ӯғйикоси $f: X \rightarrow Y$ гуфта, маҷмӯи ҳамаи он элементҳои $x \in X$ —ро меноманд, ки барои онҳо $f(x) \in B$ мебошад:

$$f^{-1}(B) = \{x \mid x \in X; f(x) \in B\} \quad (5.3)$$

Айён аст, ки $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ аст. Аммо, ҳангоми $B \neq \emptyset$ маҷмӯи $f^{-1}(B) = \emptyset$ ҷойдоштаниш мумкин аст.

Ба сифати машқ нишон диҳед, ки шарти $[B \neq \emptyset \Rightarrow f^{-1}(B) \neq \emptyset]$ ба Ӯғйикоси сюръективӣ баробарқувва аст.

Батъе хосиятҳои прообразҳои пурраи маҷмӯҳоро дар Ӯғйикоси $f: X \rightarrow Y$ қайд мекунам:

$$5^0. B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$$

$$6^0. f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

$$7^0. f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

$$8^0. f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$$

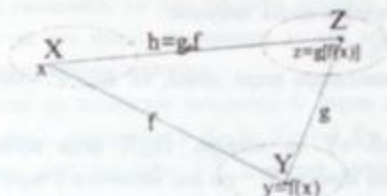
Рамзи $Y \setminus B$ дар 8^0 овардашуда пурқунадан маҷмӯи B —ро то Y мефаҳмонад ва ҷуғин муайян карда мешавад: $Y \setminus B = \{y \mid y \in Y; y \notin B\}$.

3. Ӯғйикосҳои мураккаб. Ӯғйикоси баръакс. Бигузӯр ду Ӯғйикосҳои $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ ҳамингавр дода шуда бошанд, ки соҳаи таъғирёбии Ӯғйикоси якум ба соҳаи муайявнии Ӯғйикоси дуҷум ҳамҷоя бошад. Ӯғйикоси нави $g \circ f: X \rightarrow Z$ —ро дохил менамоем, ки Ӯғйикоси мураккаб ($\bar{e}$ композитсия, $\bar{e}$ суперпозитсия) ном дорад.

ТАЪРИФИ 5.5. Ӯғйикосҳои $f: X \rightarrow Y$ ва $g: Y \rightarrow Z$ мураккаб ном дорад, агар Ӯғйикоси $h = g \circ f: X \rightarrow Z$ бо қонди зерин амал кунад:

$$(\forall x \in X), ((g \circ f)(x) = g[f(x)]) \quad (5.4)$$

«Диagramма»-и Ӯғйикосҳои мураккаб намуди зеринро дорад:



Ифтикоши мураккаби се ба адади калони ифтикошхоро тартиб додан мумкин аст.

Масалан, бигузор се ифтикошхон $f: X \rightarrow Y$; $g: Y \rightarrow Z$; $h: Z \rightarrow F$

дода шуда бошанд. Ифтикоши $(h \circ g \circ f): X \rightarrow F$ —ро тағри тартиб додан мумкин аст, ки $(\forall x \in X) ((h \circ g \circ f)(x) = h[g[f(x)])$ ва барои он хосияти асосияти ифтикошаванда аст: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. "Диagramма"-и ин ифтикош дар нақшаи зерин оварда шудааст:

Дар таҳлили математикӣ аксар мавридҳо ифтикоши айвонитӣ $I: X \rightarrow X$ воҷебхӯрад, ки барои ҳамаи $x \in X$ бо баробарии $I(x) = x$ муайян карда мешавад.

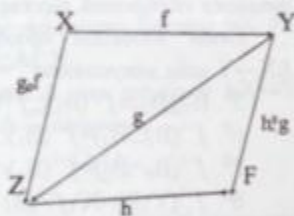
ТАЪРИФИ 5.6. Ифтикоши $f^{-1}: Y \rightarrow X$ инсбат ба ифтикоши $f: X \rightarrow Y$ баръакс ном дорад, агар $f^{-1} \circ f = I$ бошад, ки дар ин ҷо I — ифтикоши айвонитӣ аст:

$$(\forall x \in X), (f^{-1}[f(x)] = x).$$

Масалан, ифтикоши ба ифтикоши айвонитӣ баръакс вуҷуд дошта боз ифтикоши айвонитӣ мебошад: $I^{-1} = I$.

Аз ҳамин сабаб, ифтикоши айвонитиро баъзан мавридҳо воҳиди меноманд. Аммо на барои ҳамаи ифтикош, ифтикоши баръакс вуҷуд дорад. Масалан, агар маҷмӯи X аз як элемент зиёд дошта бошад, онгоҳ ифтикоши дониш $f: X \rightarrow \{y_0\}$, ки ҳамин элементҳои маҷмӯи X —ро ба як элемент y_0 мегузаронад, ифтикоши баръакс надорад.

Чӣ гуна ифтикошхоро ифтикошхон баръакс доранд? Ба ин савол дар банди оянда ҷавоб хоҳем дод.



4. Ғиёсий, суръективӣ, инъективӣ ва биъективӣ. Мафҳуми ғиёсий суръективӣ $f: X \rightarrow Y$ -ро дар боло бо шарт $f(X) = Y$ муайян намудем. Ин мафҳумро бо истифода набурдани термини «образҳои маҷмӯъ» муайян мекунем.

ТАЪРИФИ 5.7. Ғиёсий $f: X \rightarrow Y$ суръективӣ (ё сурексия) ном дорад, агар барои элементҳои ихтиёрии $y \in Y$ прообраз маҷмӯд бошад, яъне элементҳои $x \in X$, ки $y = f(x)$ аст: $(\forall y \in Y, \exists x \in X, (f(x) = y))$.

ТАЪРИФИ 5.8. Ғиёсий $f: X \rightarrow Y$ инъективӣ (ё инъексия) ном дорад, агар он элементҳои гуногуни маҷмӯи X -ро ба элементҳои гуногуни маҷмӯи Y гузаронад, яъне: $(\forall x_1, x_2 \in X), (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$;

ТАЪРИФИ 5.9. Ғиёсий $f: X \rightarrow Y$ биъективӣ (ё биексия) ном дорад, агар вай дар як маврид суръективӣ ва инъективӣ бошад.

ТЕОРЕМАИ 5.1. Барои ҳаргуна ғиёсий биъективӣ ғиёсий баръакс маҷмӯд ва он низ биъективӣ мебошад.

❖ Бигузор $f: X \rightarrow Y$ ғиёсий биъективӣ бошад. Ихтиёри элементҳои $y \in Y$ -ро гирифта маҷмӯи ҳамаи $x \in X$, ки барои онҳо $f(x) = y$ аст, яъне $f^{-1}(\{y\})$ -ро дида мебароем. Азбаски f суръективӣ аст, пас $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.

Бигузор $x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y\})$ яъне $f(x_1) = f(x_2) = y$ бошад. Агар $x_1 \neq x_2$ бошад, онгоҳ мувофиқи инъективӣ будани ғиёсийи f бояд $f(x_1) \neq f(x_2)$ бошад. Мо зиддият ҳосил намудем. Бинобар ин, маҷмӯи $f^{-1}(\{y\})$ аз як элементҳои x иборат аст ва мо $x = g(y)$ гузошта ғиёсийи $g: Y \rightarrow X$ -ро ҳосил мекунем. Барои ихтиёри $x \in X$ доро мешавем: $((g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(y) = x)$. Яъне, $g \circ f = I$, бинобар ин $g = f^{-1}$. Ҳамин тариқ, маҷмӯидиги ғиёсийи f^{-1} исбот карда шуд. ❖

Мустақилона исбот намоед, ки ғиёсийи f^{-1} биъективӣ аст?

Аз биъективнокуни ғиёсийи f^{-1} натиҷа ҳосил мешавад, ки ғиёсийи f барои f^{-1} ғиёсийи баръакс аст. Дар охири қайд мекунем, ки ғиёсийи биъективӣ $f: X \rightarrow Y$ -ро аксар мавридҳо ғиёсийи байни худ явдматан X дар Y ва ғиёсийи инъективиро ғиёсийи байни худ явдматан X ба Y меноманд. Дар анализи математикӣ ғиёсийҳои $f: X \xrightarrow{f} Y$ ва $f: X \xrightarrow{f^{-1}} Y$ (қиддан) қатъи фарқ намекуянд. Аз ҳамин сабаб, ғиёсийҳои байни худ явдматан инъективиро ба эътибор гирифта барои онҳо

теоремаи 5.1-ро ба он маъно тадбиқ менамоянд, ки f^{-1} инъикоси баръаксӣ сии $f: X \xrightarrow{\text{sur}} Y$ мебошад.

§6. ФУНКСИЯҲОИ ТАҒЙИРЁБАНДАИ ҲАҚИҚИ. МУҲИМТАРИН СИНОҶОИ ФУНКСИЯҲО.

1. Функсияҳо. Тағйирёбандии функсияҳо.

Функсия яке аз мафҳумҳои муҳимтарини фанни математика буда предмети омӯзиши фанни анализи математикиро ташкил медиҳад. Функсия-мавриди хусусии инъикос мебошад, бинобар ин ҳаман далаҳои барои инъикоси ихтиёрӣ ҷой дошта барои функсияҳо низ дуруст мебошанд. Азбаски омӯзиши таҳлили математикиро аз функсияи тағйирёбандадор мегузаронанд, пас дар боран ин мафҳум гурӯҳтар истода мегузарем.

Дар соҳаҳои гуногуни илм ва ҳаёт-математика, физика, техника ва дигар соҳаҳо ба бузургҳои гуногун (суръат, дарозӣ, ҳаҷм, масса, вақт ва ғайра) воҷебмуд. Бо шароитҳои муайян баъзан аз ин бузургҳо бетағйир монда баъзеаш тағйир ёфтанишон мумкин аст.

Таҳлили математикӣ асосан ду намуди бузургҳо: доимӣ ва тағйирёбандаро дида мебарояд.

Бузургии доимӣ мавриди хусусии бузургии тағйирёбанда мебошад ва он дар шартӣ маънаи дар ҳама маврид қимати муайяни яқинлоро дорад (бетағйир мемонад). Нисбати дарозии давра ба дарозии диаметри он ($\pi=3,14159265358979\dots$), сӯлҳои қутбҳои дарунии секунҷа дар геометрии евклидӣ (180°) ва дигарҳо мисолҳои бузургҳои доимӣ мебошанд.

Бузургии тағйирёбанда ном дорад, агар вай дар шартӣ маънаи додашуда қиматҳои гуногуни ададиро қабул намояд. Суръати ҳаракати нуктаи материали, фишори атмосфера, ҳаракати ҳаво, вазни ҷисм, баландии отоб аз уфуқ ва дигарҳо мисолҳои бузургҳои тағйирёбанда мебошанд.

Дар таҳлили математикӣ аз хосиятҳои физикавии мушоҳиаси бузургҳои тағйирёбандае, ки дар табиат мушоҳида мешаванд сарфи назар карда бузургҳои тағйирёбандан абстрактӣ фақат бо қиматҳои ададӣ тавсифишаванда омӯхта мешаванд.

Маҷмӯи $X=\{x\}$ ҳамаи қиматҳо, ки онҳоро бузургии таъғирёбандан додашуда қабул карда метавонад, соҳаи таъғирёбии бузургии таъғирёбандан номида мешавад. Бузургӣҳои таъғирёбандаро бо ҳарфҳои латинии $x, y, z, \dots$ ишора мекунем.

ТАЪРИФИ 6.1. Функсия ҳақиқии ястатъғирёбандадор гуфта ғиёрикоси якқиматан ҳаргуна зермаҷмӯи ғайри холии ($X \neq \emptyset$) маҷмӯи R —ро дар маҷмӯи R меноманд, яъне

$$f: X \rightarrow R, X \subseteq R, X \neq \emptyset.$$

f -ро характеристикаи функсия меноманд. Вай қонуноро ифода мекунад, ки мувофиқи он ба ҳар як қимати $x \in X$, як қимати муайяни $y \in Y$ дар мувофиқ гузошта мешавад.

Функсия додашуда ҳисоб меёбад, агар:

1) соҳаи X —и таъғирёбии аргументи x (X -ро соҳаи муайяни функсия низ меноманд);

2) қонуни f нишон дода шуда бошад.

Қимати функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи $x=x_0$ бо ишорати $f(x_0)$ иҷро карда мешавад. Масалан, агар $f(x)=4/(2+x^2)$ бошад, онгоҳ $f(1)$ қимати функсияи $f(x)$ -ро ҳангоми $x=1$ будан нишон медиҳад, ки вай адади $4/3$ мебошад.

Мисолҳои функсияро меорем:

1. $y = \sqrt{4-x^2}$, функсия дар маҷмӯи $X=\{x|4-x^2 \geq 0\} = \{x|-2 \leq x \leq 2\}$ муайян буда маҷмӯи $Y=\{y|0 \leq y \leq 2\}$ —соҳаи қиматҳои он мебошад;

2. $y=x^2$; ин функсия дар тамоми хати рости беохирӣ $X=R=(-\infty, +\infty)$ дода шуда, нимохати рости $Y=\{y|0 \leq y < \infty\}$ маҷмӯи ҳама қиматҳои ин функсия мебошад;

3. Функсияи Дирихле¹:

$$y = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \text{ адади иррационалӣ бошад;} \\ 1, & \text{агар } x \text{ адади раціоналӣ бошад.} \end{cases}$$

Ин функсия дар маҷмӯи $X=R$ дода шуда маҷмӯи ҳамаи қиматҳои он аз ду нуқтаҳои 0 ва 1 иборат аст.

¹ Петер Густав Лежен-Дирихле-математикӣ немис (1805-1859)

Функсия бо тараҳон гуногун дода мешавад. Дар байни онҳо тараҳон аналитикӣ, ҷадвали, графикӣ ва бо суҳан баён шудани функсия бештар вомехӯрад.

1. *Тарзи аналитикӣ дода шудан* - ба формула ифода ёфтани функсия мебошад. Масалан, $y = 3^x$, $y = \ln|\operatorname{tg} z|$, $u = \arcsin \sqrt{1-x}$, $s = \sqrt{t}$, $F = mq$.

Дар ин мисолҳо ифодаҳои аналитикӣ функсияҳои y аз x , u аз z , s аз t , F аз q дар шакли «ошкор» ифода ёфтаанд. Тараҳи дигари аналитикӣ дода шудани функсияҳо (ноошкор, параметрӣ) низ вомехӯранд.

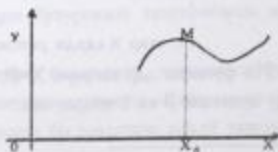
2. *Тарзи ҷадвали дода шудани функсия* - бо дода шудани қатори қиматҳои ададӣ аргумент ва қиматҳои мувофиқи функсия ифода меёбад. Масалан:

X	6	5	4	3	2	1				-1	-4		
Y	-3	4	0	-2	1	5				1	7		

Ин тарзи дода шудани функсия яке аз тараҳи пахшшуда мебошад. Бисёр адабиётҳо нашр шудаанд, ки ҷадвали функсияҳоро аз нуқтаи назари ягон тадбири онҳо доранд. «Ҷадвали чоррақамаи математикӣ»-и В.М. Брадис, ки дар курси математикан мактабӣ бештар истифода бурда мешавад, мисол шуда метавонад.

3. *Тарзи графикӣ дода шудани функсия* $f: X \rightarrow R$, $X \subseteq R$ -ро дидла мебароем. Дар ҳамворӣ ду хатҳои байни худ перпендикулярро бо ибтидои умумии 0 (системаи координати росткунҷаи декартӣ) мегирем.

Байни маҷмӯи нуқтаҳои M ҳамворӣ ва маҷмӯи координатаҳои ин нуқтаҳо (ҷуфти тартибнокӣ (x, y)) мувофиқати байни худ яқинмата вуҷуд дорад. Мувофиқи таърифи 5.2 графики функсияи f маҷмӯи $\Gamma = \{(x, y) | x \in X; y = f(x)\}$ мебошад. Ҳар кадом ҷуфти $(x, y) \in \Gamma$ -ро дар намуни нуқтаҳои M ҳамвории xOy тасвир намуда маҷмӯи нуқтаҳоро ҳосил мекунем, ки ба сифати тасвири графики функсияи f қабул карда мешавад. Қайд мекунем, ки ҳар



гуна хати рости аз нуқтаи ихтиёрии $x \in X$ гузаронидашудан бо тири Oy параллел графики функцияи $f: X \rightarrow R$ —ро дар як ва танҳо дар як нуқта мебурад. Ин далел натиҷаи талаботи яқинматиғии инъикос (функция) -и f мебошад, ки дар таърифҳои 4.1 ва 5.1 гузошта шудаанд.

4. *Тарзи бо суҳан баён намудани функция* - чунин тарзе мебошад, ки мувофиқи он қонуни мувофиқати функция аз рӯи қиматҳои додашудан аргумент, қиматҳои мувофиқи функция ёфта мешавад. Масалан, «Калонтарин адади бутуни аз адади ҳақиқии додашудан x зиёд набуда» ё «қисми бутуни адади x » чунин ишора карда шуда, $y = [x]$, ин тавр хонда мешавад: « y баробари анте* аз x ». Соҳаи мавҷудияти ин функция интервали $x = (-\infty, +\infty)$ буда соҳаи қиматҳои он танҳо аз адади бутун иборат аст. Аз таърифи $[x]$ маълум мешавад, ки $n \leq x < n+1$ аст.

Мисол:

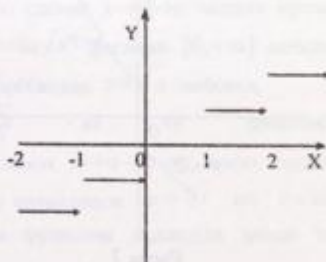
$[4]=4$, $[2,5]=2$, $[\sqrt{2}]=1$, $[\pi]=3$, $[-3,5]=-4$, (чунки $-4 < -3,5 < -3$), $[0,5]=0$. Агар m -адади бутун бошад, онгоҳ $[x+m] = [x] + m$.

Графики функция $y = [x]$ —ро месозем. Азбаски дар ҳар кадом нисм-сегментҳои

..., $[-3, -2)$, $[-2, -1)$, $[-1, 0)$, $[0, 1)$,
 $[1, 2)$, $[2, 3)$, ...

функция мувофиқан ба ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ... баробар аст, пас

графики он функцияи зиннамонанд-ро ифода мекунад, ки аз порчаҳои охири ҳар рост маҳрум гашта иборат мебошанд (расми 6).



Боз як мисоли функцияро мео-

рем, ки қонуни мувофиқати он бо суҳан баён карда мешавад. «Ба ҳар кадом қимати x аз порчаи $[2, 5]$ дучандани қимати аргумент ва плус квадрати он дар мувофиқ гузошта мешавад». Қимати он дар нуқтаи 3 ба $2 \cdot 3 + 3^2 = 15$ баробар аст. Агар қонуни мувофиқат мураккаб бошад, гуфто-

* аз каллиман франсавии entier-бутун

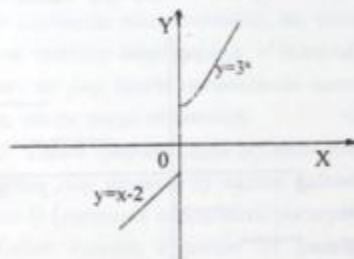
ри зиёд зарур мешавад. Аксари мавридҳо функсия дар қитъаҳои гуногуни соҳаи мавҷудияташ бо формулаҳои гуногун дода мешавад. Масалан,

$$f(x) = \begin{cases} 3^x, & \text{агар } x > 0, \\ 0, & \text{агар } x = 0, \\ x-2, & \text{агар } x < 0. \end{cases}$$

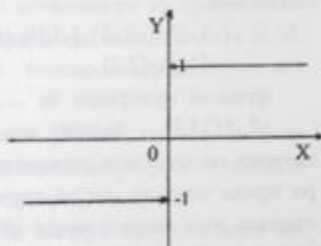
Ин функсия дар маҷмӯи $\mathbb{R}$ муайян буда маҷмӯи қиматҳояш низ маҷмӯи $\mathbb{R}$ мебошад (расми 7).

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{агар } x > 0, \\ 0, & \text{агар } x = 0, \\ -1, & \text{агар } x < 0. \end{cases}$$

Функсия дар маҷмӯи $\mathbb{R}$ муайян буда маҷмӯи қиматҳои он аз се адад



Расми 7



Расми 8

$-1, 0$, ва 1 иборат аст (расми 8).

Агар дар функсияи $f: X \rightarrow Y$ аргументи x аз маҷмӯи N қиматҳо гиррад, онгоҳ функсияро функсияи аргументи натуралӣ мегуянд. Дар ишорати ин гуна функсия одатан аз ишорати функционали муқаррарии $y = f(x)$ даст мекашанд ва ба ҷои $f(n)$ ҳарфе менависанд, ки дар поёнаш индекс (ишорат)-и n дорад. Масалан, функсияи x_n дар шакли формулае дода мешавад, ки вай барои ҳосил кардани қиматҳои муносиби функсия ба

адади натуралӣи таъғирёбандан n , нағзи амалиётҳои аналитикҳо ро муқарраъ мекунанд. Масалан,

$$x_n = \frac{n-2}{n^2+3n+4}, \quad a_n = q^n, \quad y_n = \log_3 n, \dots, \quad S_n = \frac{a-aq^n}{1-q}, \quad (q \neq 1)$$

Мухтасар, мафҳуми функсия мураббабро қуръ мекунем. Бигзор функсияи $y=f(z)$ дар маҷмӯи Z ва функсияи $z=\varphi(x)$ дар маҷмӯи X муайян бошад. Агар қимати функсияи $z=\varphi(x)$ ба маҷмӯи Z таалуқдор бошад, онгоҳ ба ҳар кадом адади $x \in X$ функсияҳои додашудан $z=\varphi(x)$, $y=f(z)$ ягона қимати y -ро дар мувофиқ мегузоранд; аввал бо қимати додашудан x қимати $z=\varphi(x)$ ва баъд бо қимати ёфташудан z қимати $y=f(z)$ ҳисоб карда мешавад. Бузургии y -ро функсияи мураббаби таъғирёбандан x меноманд, ки бо схеман зерин тартиб дода шуда $x \rightarrow \varphi(x) = z \rightarrow f(z) = y$ бо рамзи $y=f[\varphi(x)]$ навишта мешавад.

Функсияи $z=\varphi(x)$ -ро аргументи фосилавӣ меноманд.

Якчанд мисолҳо меорем.

1) Функсияи мураббаби $y=\sin \sqrt{x}$ аз ду функсияҳои $y=\sin z$, $z=\sqrt{x}$ иборат буда бо схеман $x \rightarrow z \rightarrow y$ ташкил ёфтааст. Соҳан муайянии функсияи $y=\sin \sqrt{x}$ фосилаи $[0, +\infty)$ мебошад. Роли аргументи фосилавиро таъғирёбандан $z=\sqrt{x}$ мебошад.

2) Функсияи $y=\sin^2 \sqrt[3]{x}$ аз се функсияҳои $y=z^2$, $z=\sin u$, $u=\sqrt[3]{x}$ бо схеман $x \rightarrow u \rightarrow z \rightarrow y$ ҳосил шудааст. Роли аргументҳои фосилавиро ду функсияҳои $u=\sqrt[3]{x}$ ва $z=\sin u$ иҷро мекунанд. Соҳан муайянии функсияи додашуда ҳаман тирн ҳамаҷа аст.

2. Функсияҳои монотон. Функсияҳои баръакс.

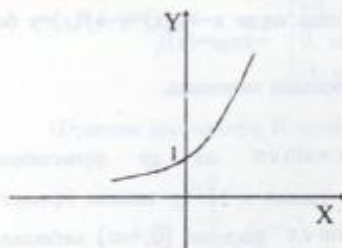
Аз §4 медонем, ки ҳар кадом аз муносибатҳои $<, \leq, >, \geq$ маҷмӯи R ва умуман ҳагуна маҷмӯи ихтиёрии ададҳои X -ро ба маҷмӯи тартибно-ки хаттӣ табдил медиҳад. Агар функсияи $f: X \rightarrow R$, $X \subseteq R$ дода шуда бошад, онро барои тартибноки намудани маҷмӯи қиматҳои $f(x) = \{f(x) | x \in X\}$ истифода бурдан мумкин аст.

ТАЪРИФИ 6.2. Функсияи $f: X \rightarrow R$, $X \subseteq R$:

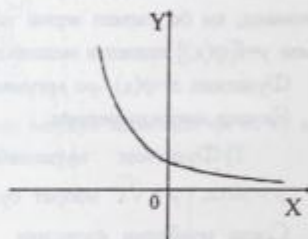
- 1) афзуншаванда, агар аз шарт $x' > x''$ нобаробарии $f(x') > f(x'')$;
- 2) камшаванда, агар аз шарт $x' > x''$ нобаробарии $f(x') < f(x'')$;
- 3) камнашаванда, агар аз шарт $x' > x''$ нобаробарии $f(x') \geq f(x'')$;
- 4) афзуннашаванда, агар аз шарт $x' > x''$ нобаробарии $f(x') \leq f(x'')$

ҳосил шавад.

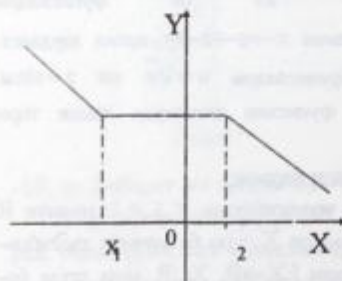
Функсияҳое, ки ягон аз шартҳои номбаршударо қаноат мекунад, функсияҳои монотон ном доранд. Функсияҳои афзуншаванда ва камшавандаро функсияҳои қатъи монотон (ё монотон дар маънои қатъи) ва функсияҳои камнашаванда ва афзуннашавандаро функсияҳои монотон «дар маънои васеъ» меноманд.



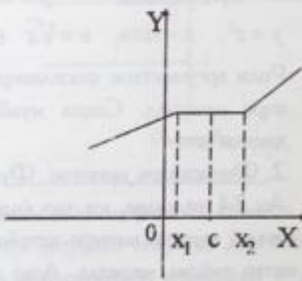
Рисун 9



Рисун 10



Рисун 11



Рисун 12

Дар расмҳои графикаи функсияҳои афзуншаванда (расми 9), камшаванда (расми 10), камнашаванда (расми 11) ва афзуннашаванда (расми 12) тасвир Ӯфтаанд.

ТЕОРЕМАИ 6.1. Ҳаргуна функсияи қатъи монотонии $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ функсияи баръаксии $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ —ро дорад ва ин функсияи баръакс чун функсияи f қатъи монотон мебошад.

♣ Мувофиқи таърифи 6.2 барои функсияи қатъи монотонӣ f аз шартҳои $x' \neq x''$ нобаробарии $f(x') \neq f(x'')$ мебарояд. Ҳамин тариқ функсияҳои монотон қатъӣ, Ӯғбекосҳои Ӯғбективӣ мебошанд.

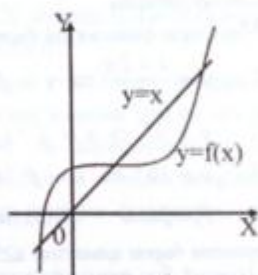
Аз тарафи дигар, функсияи $f: X \rightarrow f(X)$ Ӯғбекоси суръективӣ аст, пас мувофиқи таърифи 5.9 $f: X \rightarrow f(X)$ Ӯғбекоси биективӣ мебошад. Муво-

фиқи теоремаи 5.1. барои он, Ӯғбекоси баръакси $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ вуҷуд дорад. Қатъи монотон будани функсияи f^{-1} —ро исбот мекунем. Бигузор $y', y'' \in f(X)$ ва $y' > y''$ бошад. $x' = f^{-1}(y')$ ва $x'' = f^{-1}(y'')$ мегузорем. Азбаски f^{-1} биективӣ аст, пас $x' \neq x''$ мебошад. Мавридҳои зерин имконпазир аст: $x' > x''$ ё $x' < x''$. Агар f афзуншаванда бошад, онгоҳ аз шартҳои $x' < x''$ нобаробарии $y' = f(x') < f(x'') = y''$ яъне $y' < y''$ мебарояд. Ин ба шартҳои $y' > y''$ зид аст. Бинобар ин, агар f афзуншаванда бошад, онгоҳ

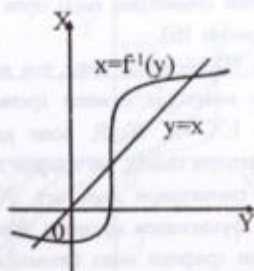
$$y' > y'' \Rightarrow f^{-1}(y') > f^{-1}(y'').$$

Яъне f^{-1} азуншаванда. Мавриди камшаванда будани f айнан исбот карда мешавад. ♣

Графикаи функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ маҷмӯи $\Gamma = \{(x, y) | x \in X: y = f(x)\}$ ва графикаи функсияи баръакси $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ маҷмӯи $\Gamma^{-1} = \{(x, y) | y = f(x) \text{ } x = f^{-1}(y)\}$ мебошанд. Байни графикҳои Γ ва Γ^{-1} мувофиқати байни худ эвриматан $(x, y) \leftrightarrow (y, x)$ ҷой дорад. Ба ин



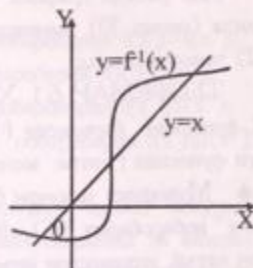
Расми 13



Расми 14

инъикос дар ҳамвории xOy «инъикоси симметрия» нисбат ба биссектрисаи кунҷи координатии якум мувофиқ меояд. Бинобар ин, графики функсияи f^{-1} — ро аз графики функсияи f бо «инъикоси» нишондодашуда ҳосил намудан мумкин аст.

Қайд менамоем, ки ҳангоми омӯзиши функсияҳои баръакс дар таҳлили математикӣ аргументро бо x ишора кардан қабул шудааст, яъне ба ҷои навишти $x=f^{-1}(y)$ навишти $y=f^{-1}(x)$ истифода бурда мешавад (расмҳои 13, 14, 15).



Расми 15

Ин қайдро дар оянда ҳангоми омӯзиши функсияҳои баръакс ба эътибор мегирем.

Мисолҳои функсияҳои баръаксро меорем:

$$1. \quad y = \frac{1-2x}{3} \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1-3y}{2}, \quad \text{ё} \quad f^{-1}(x) = \frac{1-3x}{2};$$

$$2. \quad y = x^3 \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}, \quad \text{ё} \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x};$$

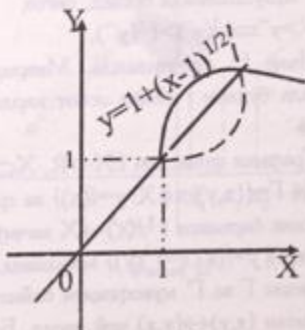
$$3. \quad y = 10^x \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \lg y, \quad \text{ё} \quad f^{-1}(x) = \lg x;$$

$$4. \quad \text{Графики функсияи } y = 1 + \sqrt{x-1} \text{ — ро созед.}$$

Ин функсия барои қиматҳои $x \geq 1$ муайян аст. Функсияи баръакси он $f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ мебошад. Графики функсияи $f^{-1}(x)$ — ро сохта, баъд нисбат ба биссектрисаи $y=x$ нуқтаҳои симметрияи онро ёфта метавонем (расми 16).

3. Функсияҳои ҷуфт, тоқ ва даврӣ.

Аксар мавридҳо созиши графики функсияи $f: X \rightarrow R$, $X \subseteq R$ осон мешавад, агар маълум шавад, ки график ягон хосияти симметрияро дорад. Ҳоло мо синфи функсияҳои муҳимро ҷудо мекунем, ки графики онҳо баъзан симметрияро дорад мебошанд.



Расми 16

ТАЪРИФИ 6.3. Функсияи

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ ҷуфт ном дорад, агар соҳан муайянии он X дар тирӣ $0x$ ҷойгир шуда нисбат ба ибтидон координат симметрия бошад ва барон ихтиёрии $x \in X$ айвяти $f(-x) = f(x)$ иҷро шавад: $(\forall x \in X) [(x \in X \Leftrightarrow (-x) \in X): (f(-x) = f(x))]$.

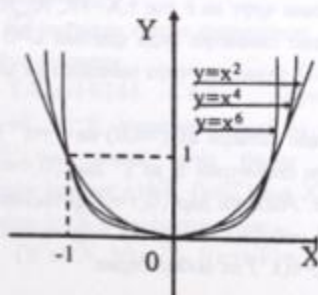
Мисолҳои Ҳукисияҳои ҷуфт: $y = c$, $y = x^2$, $y = x^{2k} (k=1,2,\dots)$,
 $y = 1/(1+x^2)$, $y = |x|$

Аз сабаби он ки дар нуқтаҳои x ва $(-x)$ Ҳукисияи ҷуфт қиматҳои баробар қабул мекунад, графҳои Ҳукисияи ҷуфт нисбат ба тирӣ $0y$ симметрия мебошад.

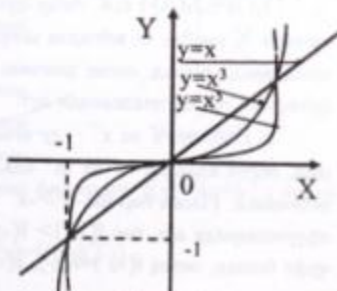
ТАЪРИФИ 6.4. Ҳукисияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ тоқ ном дорад, агар соҳан муайянии он X дар тирӣ $0x$ ҷойгир шуда нисбат ба ибтидон координат симметрия бошад ва барон ихтиёрии $x \in X$ айвяти $f(-x) = -f(x)$ иҷро шавад: $(\forall x \in X) [(x \in X \Leftrightarrow (-x) \in X): (f(-x) = -f(x))]$.

Мисолҳои Ҳукисияҳои тоқ: $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = x/(1+x^2)$, $y = \operatorname{sign} x, \dots$. Агар $0 \in X$ бошад, онгоҳ қимати Ҳукисияҳои тоқ ҳангоми $x=0$ ба нул баробар аст: $f(0) = f(-0) = -f(0)$. Аз ин ҷо $f(0) = 0$. Аз шарт $f(-x) = -f(x)$ натиҷа мебарояд, ки графҳои Ҳукисияи тоқ нисбат ба ибтидон координат симметрия мебошад. Дар расмҳои поён ягон графҳои Ҳукисияҳои ҷуфт (расми 17) ва тоқ (расми 18) тасвир Ӯфтаанд.

Нисбат ба Ҳукисияҳои ҷуфт ва тоқ тасдиқотҳои зерин ҷой доранд, ки исботи онро ба хонандагон пешниҳод мекунем.



Расми 17



Расми 18

ТЕОРЕМАИ 6.2. Сумма ва фарқи ду функсияҳои ҷуфт (тоқ), функсияи ҷуфт (тоқ); ҳосили зарби ду функсияҳои ҷуфт ё ду функсияҳои тоқ функсияи ҷуфт; ҳосили зарби ду функсияҳои ҷуфт ва тоқ функсияи тоқ мебошад.

Ҳаргуна функсияро ҷуфт ё тоқ номидан хато аст. Агар маҷмӯи X барои функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ нисбат ба ибтидои координат симметрия набошад, онгоҳ онди ҷуфт ва тоқ будани функсияи f суҳан рондан маъно надорад. Масалан, дар бораи ҷуфт ва тоқ будани функсияҳои $y=x^2$, $y=\lg x$ дар маҷмӯи $x=[0,1]$ суҳан рондан маъно надорад. Дар маҷмӯҳои нисбат ба ибтидои координат симметрия буда низ на ҳаргуна функсияҳо ҷуфт ва тоқ мешаванд. Масалан, функсияҳои $y=5x+4$, $y=x^2-4x$, $y=\sin x - \cos x, \dots$ на ҷуфтанду на тоқ.

Аммо тасдиқоти зерин ҷой дорад.

ТЕОРЕМАИ 6.3. Ҳаргуна функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ —ро дар маҷмӯи нисбат ба ибтидои координат симметрия X дар намуди суммаи функсияҳои ҷуфт ва тоқ дар ин маҷмӯъ додашуда ифода кардан мумкин аст.

▲ Бигузор X —суҳан муайяни нисбат ба ибтидои координат симметрия будаи функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ бошад. Функсияҳои, $\varphi(x) = (f(x) + f(-x))/2$ ва $\psi(x) = (f(x) - f(-x))/2$, ки дар маҷмӯи X муайян мебошанд, дида мебароем. Функсияи $\varphi(x)$ —ҷуфт ва $\psi(x)$ —тоқ мебошанд (нишон диҳед). Суммаи онҳо $f(x)$ мебошад. ▲

ТЕОРЕМАИ 6.4. Агар функсияи ҷуфт ва ё тоқ $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ дар маҷмӯи X нисбат ба ибтидои координат симметрия буда ҳангоми $x > 0$ афзуншаванда бошад, онгоҳ ҳангоми $x < 0$ функсияи ҷуфт камшаванда ва функсияи тоқ афзуншаванда аст.

▲ Бигузор x' ва x'' —ду қиматҳои ихтиёрӣ аз $(-\infty, 0)$ ва $x' < x''$ бошад, онгоҳ ададҳои $-x'$ ва $-x''$ ададҳои симметрии x' ва x'' дар $(0, +\infty)$ мебошанд. Илова бар ин $-x' > -x''$ аст. Азбаски дар $(0, +\infty)$ функсияи $f(x)$ афзуншаванда аст, пас $f(-x') > f(-x'')$ мебошад. Агар $f(x)$ —функсияи ҷуфт бошад, онгоҳ $f(-x') = f(x')$, $f(-x'') = f(x'')$ ва нобаробарии

$f(-x') > f(-x'')$ намуди $f(x') > f(x'')$ —ро мегирад. Ҳамин тариқ, аз шарт $x' < x''$ нобаробарии $f(x') > f(x'')$ ҳосил шуд, пас $f(x)$ дар $(-\infty, 0)$ камшаванда аст. Агар $f(x)$ —функсияи тоқ бошад, онгоҳ $f(-x') = -f(x')$,

$f(-x'') = -f(x'')$ ва нобаробарии намуди $-f(x') > -f(x'')$ ё $f(x') < f(x'')$ ҳосил мешавад, яъне $f(x)$ дар $(-\infty, 0)$ афзуншаванда аст. ♣

Айнан исбот карда мешавад, ки агар ҳангоми $x > 0$ функсияи ҷуфт ё тоқ камшаванда бошад, онгоҳ, барои $x < 0$ функсияи тоқ камшаванда аст. Исроти ин тасдиқотро ба хонанда тавсия мекунем.

Дар мавридҳои алоҳида функсияи дар $[0, a]$ додашудани $f(x)$ -ро дар фосилаи $[-a, 0]$ аз нав ҳамин тавр муайян менамоянд, ки бай дар порчаи $[-a, a]$ функсияи ҷуфт ё тоқ шавад. Дар ҳамаи маврид функсияи $\varphi(x)$ дар порчаи $[-a, a]$ функсияи ҷуфт ва функсияи тоқ $\psi(x)$ мешавад (нишон

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{агар } 0 \leq x \leq a, \\ f(-x), & \text{агар } -a \leq x < 0 \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{агар } 0 \leq x \leq a, \\ -f(-x), & \text{агар } -a \leq x < 0 \end{cases}$$

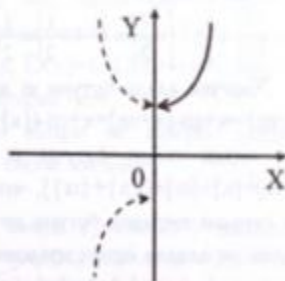
диҳед).

Амали ба ин тарз аз нав муайянкунии функсияро, аксар мавридҳо бо тарзи ҷуфт ё тоқ давомдиҳии функсияҳо меноманд. Дар расми 19 давомдиҳии аз нав муайянкунии функсия бо хатҳои пӯстириш тасвир ҷифтааст.

Ба омӯзиши сифати функсияҳои даврӣ машғул мешавем.

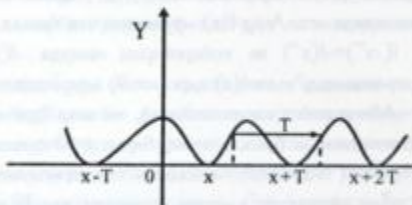
ТАЪРИФИ 6.5. Функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ функсияи даврӣ бо даври $T > 0$ ном дорад, агар барои ҳамаи ададҳои n намуди $x + kT$, ($k \in \mathbb{Z}$) дар X буда баробарии $f(x) = f(x + kT)$ барои ихтиёри $x \in X$ иҷро шавад, яъне

$$(\forall x \in X, \forall k \in \mathbb{Z}), [(x + kT) \in X; f(x) = f(x + kT)].$$



Расми 19

Оддитарин мисолҳои функсияҳои даврий функсияҳои тригонометрия мебошанд. Барои сохтани графики функсияи даврий кифоя аст, ки онро дар порчаи ихтиёрии дарозини T дошта созем. Қисми боқимондаи графикаро аз қисми сохташудаи он бо усули қуҷонии ба рост ё чап ба порчаи дарозини бо T карати бутун дошта ҳосил намудан мумкин аст (расми 20).



Расми 20

Функсияҳои даврии аз функсияҳои тригонометрия фарқсунандаро меорем. Дар байни маҷмӯи даврҳо даври хурдтаринро даври минималӣ меноманд.

Мисоли 1. Функсияи $y=\{x\}=x-[x]$, ки номи «қисми касрии адади x » ном дорад, дида мебароем.

Соҳаи мавҷудияти он $X=(-\infty, +\infty)$ буда соҳаи қиматҳои он $Y=[0, 1)$ мебошад. Масалан,

$$\left\{\frac{7}{2}\right\}=\frac{1}{2}; \quad \left\{-\frac{7}{2}\right\}=\left\{-4+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}, \quad \left\{-\frac{7}{3}\right\}=\left\{-3+\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}; \quad \{ \pi \} = \{ 3,14 \dots \} = 0,14$$

Ҳагӯна адади бутуни m даври функсияи $\{x\}$ мебошад. Дар ҳақиқат, $\{x+m\}=x+m-[x+m]=x+m-([x]+m)=x-[x]=\{x\}$. Исроот мекунем, ки ҳагӯна адади гайри бутуни α даври $\{x\}$ намешавад. Айён аст, ки $\{x+\alpha\}=\{x\}+\{\alpha\}+\{[x]+\{\alpha\}\}$, чунки қисми бутуни суммаи ду ададро ҳамчун суммаи қисмҳои бутуни ин ададҳо ва қисми бутуни суммаи қисмҳои касрии ин ададҳо ёфтан мумкин аст. Бинобар ин, ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} \{x+\alpha\} &= (x+\alpha)-[x+\alpha]=(x+\alpha)-([x]+[\alpha]+\{[x]+\{\alpha\}\})=x-[x]+\alpha-[\alpha]- \\ &-\{[x]+\{\alpha\}\}=\{x\}+\{\alpha\}-\{[x]+\{\alpha\}\} \end{aligned}$$

Азбаски ҳагӯнаи гайри бутун будани α , $\alpha \neq [\alpha]$, аст, пас $\{ \alpha \}$ бутун шуда наметавонад ва дар ҳолати хусуси $\{ \alpha \}-\{[x]+\{\alpha\}\}$ нул шуда намета-

1) *Функсияи ратсионалии бутун* (ё бисёрраъзогӣ аз як таътирбанда) — функсияи намуди $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ — ро меноманд, ки дар ин ҷо $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ коэффициентҳо, $N \in \mathbb{N}$ — дараҷаи бисёрраъзогӣ аст. Барои бисёрраъзогӣ $x \in \mathbb{R}$, $E(f)$ аз n вобастагӣ дорад. Мавридҳои хусусии бисёрраъзогиро дида мебароем:

- $f(x) = a_0$ — бисёрраъзогии дараҷаи нул ё функсияи доимӣ. Барои он $E(f) = \{a_0\}$;

- $f(x) = a_0x + a_1$ — функсияи хаттӣ. Барои он $E(f) = \mathbb{R}$. Графики он хатти рост мебошад;

- $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_0$ — сеъраъзогии квадратӣ. Графики он параболоае аст, ки тираш бо тири Oy параллел мебошад. Маҷмӯи $E(f)$ аз вазъияти қуллаи параболо ва аз аломати адади a_0 , ки самти шохаҳои параболаро характеристика медиҳад, вобаста мебошад;

- $f(x) = x^n$, ($n \in \mathbb{N}$) — функсияи дараҷагӣ бо нишондиҳандаи натуралӣ мебошад. Агар n — тоқ бошад, онгоҳ $E(f) = \mathbb{R}$; агар n — ҷут бошад, онгоҳ $E(f) = [0, +\infty)$.

2) *Функсияи касри ратсионалӣ* (ё касри ратсионалӣ) — функсияест, ки дар намуди нисбати ду бисёрраъзогӣҳо:

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n}$$

ифода меёбад. Ин функсия дар ҳамаи тири ҳақиқӣ ба ғайр аз маҷмӯи охиринокӣ нуқтаҳо, ки махраҷ ба нул баробар мешавад, муайян мебошад. Ду мавриди хусусии ин функсияро дида мебароем:

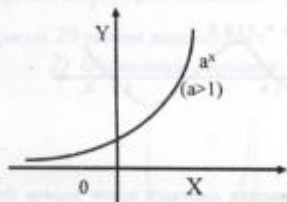
- $f(x) = \frac{a_0x + b_0}{c_0x + d_0}$ — функсияи касри-хаттӣ. Графики он гипер-

болоаест, ки асимптотаҳои он бо тирҳои координатӣ параллел мебошад. Соҳаи муайянии он $X = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -a_0/c_0\}$, маҷмӯи қиматҳо $E(f) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$;

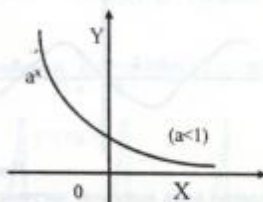
• $f(x) = \frac{1}{x^n}$, ($n \in \mathbb{N}$) — функсияи дараҷагӣ бо нишондиҳандаи бутуни манфӣ. Барои он $X = \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$; $E(f) = (0, +\infty)$, агар n — ҷуфт, $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, агар n — тоқ.

3) *Функсияи дараҷагӣ* $f(x) = x^\alpha$, ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Мавридҳои дар боло қайдшудаи $\alpha \in \mathbb{Z}$ —ро хориҷ намуда дар

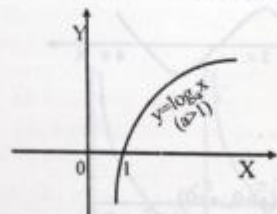


Рисун 22

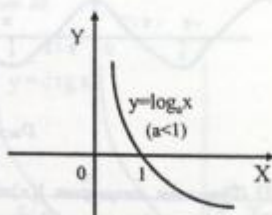


Рисун 23

ҳолатҳои боқимонда барои функсияи дараҷагӣ $X = [0, +\infty)$, агар $\alpha > 0$ ва $X = (0, +\infty)$, агар $\alpha < 0$ қабул менамоянд. Дар мавридҳои раціоналӣ будани α соҳан муайяни X —ро бо илова намудани қиматҳои манфии x ва



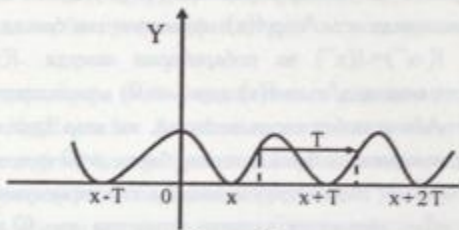
Рисун 24



Рисун 25

се менамоянд. Аммо мо ин мавридҳои имконпазиро намебинем.

Оддитарин мисолҳои функсияҳои даврӣ функсияҳои тригонометрия мебошанд. Барои сохтани графики функсияи даврӣ кифоя аст, ки онро дар порчаи ихтиёрии дарозии T дошта созем. Қисми боқимондаи графикро аз қисми сохташудаи он бо усули қуҷониш ба рост ё чап ба порчаи дарозии бо T каратини бутун дошта ҳосил намудан мумкин аст (расми 20).



Расми 20

Функсияҳои даврии аз функсияҳои тригонометрия фарқунандаро меорем. Дар байни маҷмӯи даврҳо даври хурдтаринро даври минималӣ меноманд.

Мисоли 1. Функсияи $y=\{x\}=x-[x]$, ки номи «қисми касрии адади x » ном дорад, дида мебароем.

Соҳаи мавҷудияти он $X=(-\infty, +\infty)$ буда соҳаи қиматҳои он $Y=[0,1)$ мебошад. Масалан,

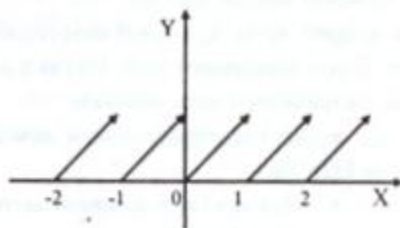
$$\left\{\frac{7}{2}\right\}=\frac{1}{2}; \quad \left\{-\frac{7}{2}\right\}=\left\{-4+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}, \quad \left\{-\frac{7}{3}\right\}=\left\{-3+\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}; \quad \{\pi\}=\{3.14\ldots\}=0.14$$

Ҳаргуна адади бутуни m даври функсияи $\{x\}$ мебошад. Дар ҳақиқат, $\{x+m\}=x+m-[x+m]=x+m-([x]+m)=x-[x]=\{x\}$. Иббот мекунем, ки ҳаргуна адади ғайри бутуни α даври $\{x\}$ намешавад. Айён аст, ки $\{x+\alpha\}=\{x\}+\{\alpha\}$, чунки қисми бутуни суммаи ду ададро ҳамчун суммаи қисмҳои бутуни ин ададҳо ва қисми бутуни суммаи қисмҳои ин ададҳо ёфтан мумкин аст. Бинобар ин, ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} \{x+\alpha\} &= (x+\alpha) - [x+\alpha] = (x+\alpha) - ([x] + [\alpha] + \{x\} + \{\alpha\}) = x - [x] + \alpha - [\alpha] - \{x\} - \{\alpha\} \\ &= \{x\} + \{\alpha\} - \{x\} - \{\alpha\} \end{aligned}$$

Азбаски ҳангоми ғайри бутун будани α , $\alpha \neq [\alpha]$, аст, пас $\{x\}$ бутун шуда наметавонад ва дар ҳолати хусуси $\{x\} - \{x\} = 0$ нул шуда намета-

вонад. Бинобар ин, $\{x+\alpha\} \neq \{x\}$. Ҳамин тариқ адади 1 даври хурдтарин барои $\{x\}$ мебошад. Барои сохтани графики функсияи $\{x\}$ аввал графики онро дар фосилаи $0 \leq x < 1$ месозем ва баъд дар тамоми маҷмӯи $X \subseteq \mathbb{R}$ даврии давом медиҳем. Дар фосилаи $0 \leq x < 1$ графики функсия бисектрисаи қунии координати якумро ифода мекунад, чунки дар ин нисмегмент $\{x\} = x$ аст (расми 21).



Расми 21

Мисоли 2. Барои функсияи Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{агар } x \in \mathbb{J}. \end{cases}$$

ҳаргуна адади рацсионалии $\tau \neq 0$ даври мебошад. Дар ҳақиқат, агар x адади рацсионалӣ (иррацсионалӣ) бошад, онгоҳ адади $x+\tau$ низ адади рацсионалӣ (иррацсионалӣ) мешавад. Бинобар ин, барои ҳар кадом x , $D(x+\tau) = D(x)$ мешавад. Ҳеҷгуна адади рацсионалии α даври $D(x)$ шуда наметавонад, чунки дар нуқтаи рацсионалии x , $D(x) = 1$, $D(x+\alpha) = 0$, бинобар ин дар байни давраҳои мусбати $D(x)$ хурдтарин нест.

Мисоли 3. Бигузор $f(x) = \text{const}$ бошад. Даври он ҳаргуна адади ҳақиқии аз нул фарқкунанда мебошад, чунки барои ихтиёри

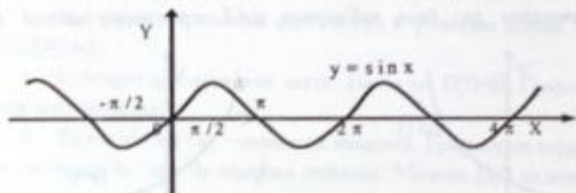
$$0 \neq a \in \mathbb{R}, f(x+a) = \text{const} = f(x).$$

4. Функсияҳои элементарии асосӣ. Ба ин намуна функсияҳо 7 намунаи функсияҳои, ки дар поён оварда мешаванд таалуқдор мебошад. Ҳангоми омӯзиш ба ҳисоб мегирем, ки онҳо дар курси мактабӣ омӯхта шудаанд. Бо X — соҳаи муайяни функсияи тадқиқшаванда ва бо $E(f) = f(X)$ — образи соҳаи муайяни (маҷмӯи қиматҳои функсия) — ро ишора мекунем.

4) *Функсияи нишондиҳандагӣ* $f(x)=a^x$, ($a>0$).

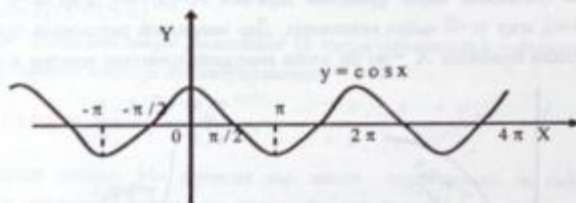
Барои он $X=\mathbb{R}$, $E(f)=(0,+\infty)$. Ҳангоми $a>1$ функсияи нишондиҳандагӣ афзунешаванда буда ҳангоми $a<1$ камшаванда аст. Графикҳои онҳо чуқури аст (расмҳои 22 ва 23).

Муҳимтарини фарқияти байни функсияҳои дараҷагӣ ва нишондиҳандагӣ қайд мекунем: аргументи функсияи дараҷагӣ асоси дараҷа буда, аргументи функсияи нишондиҳандагӣ — нишондиҳандаи дараҷаи он



Расми 26

дараҷагиро қайд мекунем: аргументи функсияи дараҷагӣ асоси дараҷа буда, аргументи функсияи нишондиҳандагӣ — нишондиҳандаи дараҷаи он



Расми 27

аст.

5) *Функсияи логарифмӣ*: $f(x)=\log_a x$, ($a>0$, $a\neq 1$).

Оғро ҳамгун функсияи ба функсияи нишондиҳандагӣ баръакс муайян намудан мумкин аст. Барои функсияи логарифмӣ $X=(0,+\infty)$; $E(f)=\mathbb{R}$. Графикҳои онҳо чуқури аст (расмҳои 24 ва 25).

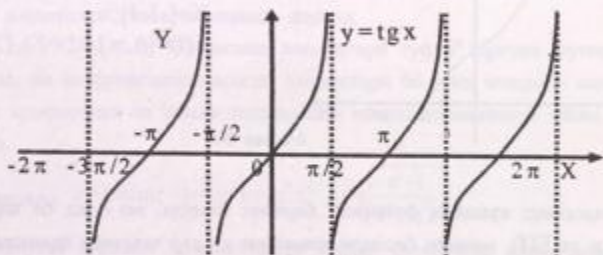
6) *Функсияҳои тригонометрия* $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=\operatorname{tg} x$, $f(x)=\operatorname{ctg} x$. Ин функсияҳо — даврӣ мебошанд: $\sin x$ ва $\cos x$ даври 2π ; $\operatorname{tg} x$ ва

$\sin x$ даври π доранд. Барои синус: $X=\mathbb{R}$, $E(f)=[-1;1]$. Графики он чунин аст (расми 26).

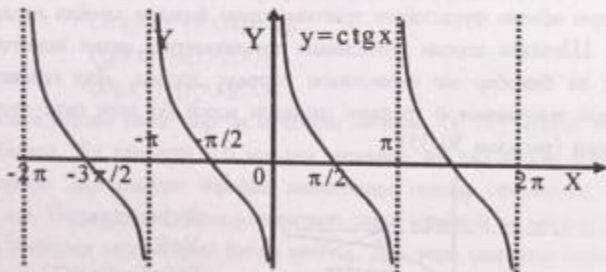
Барои косинус: $X=\mathbb{R}$, $E(f)=[-1;1]$. Графики он чунин аст (расми 27).

Барои тангенс: $X=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}(k\pi-\frac{\pi}{2}; k\pi+\frac{\pi}{2})$; $E(f)=\mathbb{R}$. Графики он чунин аст (расми 28). Барои котангенс: $X=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}(k\pi, (k+1)\pi)$; $E(f)=\mathbb{R}$. Графики он дар расми 29 нишон дода шудааст.

7) *Функсияҳои баръакси тригонометрия*. $f(x)=\arcsin x$, $f(x)=\arccos x$.

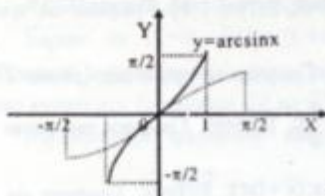


Расми 28



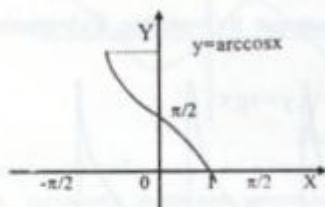
Расми 29

$f(x)=\arctg x$, $f(x)=\text{arccctg} x$. Функсияҳои тригонометрия функсияҳои баръ-



$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin x; \\ X &= [-1; 1]; \\ E(f) &= [-\pi/2, \pi/2]. \end{aligned}$$

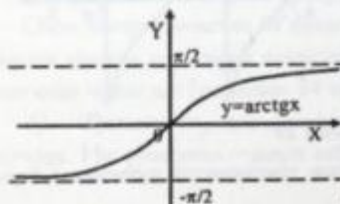
Расми



$$\begin{aligned} f(x) &= \arccos x; \\ X &= [-1; 1]; \\ E(f) &= [0, \pi]. \end{aligned}$$

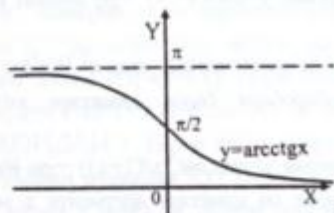
Расми 31

акс надоранд: кушиши функсияи баръакс намуда, мо бояд ба ҳар кадом қимати $y \in E(f)$, маҷмӯи беохори қиматҳои x (дар таърифи функсия бошад талаботи ҷориматағй гузошта шудааст) —ро дар мувофиқ гузорем. Аз ҳамин сабаб функсияҳои тригонометрии баръакс, ҷун функсияҳо бо ном шохаҳои асосии функсияҳои тригонометрии баръакс муайян карда мешаванд. Шохаҳои асосии функсияҳои тригонометрӣ, қатъи монотон мебошанд ва бинобар ин функсияҳои баръакс доранд. Дар графикҳои функсияҳои тригонометрӣ графикҳои шохаҳои асосӣ бо хати ғайр ҷудо карда шудаанд (расмҳои 30-33).



$$\begin{aligned} f(x) &= \arctg x; \\ X &= \mathbb{R}; \\ E(f) &= [-\pi/2; \pi/2]. \end{aligned}$$

Расми 32



$$f(x) = \text{arccotg} x;$$

$$X = \mathbb{R};$$

$$E(f) = [0; \pi].$$

Расми 33

5. Функсияҳои элементарӣ. Дар таҳлили математикӣ ва тадқиқҳои он аҳамияти муҳимтаринро функсияҳои элементарӣ, ки бо ёрии функсияҳои асосии элементарӣ сохта мешаванд, доранд.

ТАЪРИФИ 6.6. Функсияи элементарӣ гуфта ҳаргуна функсияро меноманд, ки аз функсияҳои асосии элементарӣ бо ёрии мавқидори охиринокӣ амалҳои арифметикӣ ва амали ташкилӣ-бини композитсияи онҳо ҳосил карда мешавад.

Мисолҳо: $y = \ln \sin x$, $y = \lg^3 x + \ln^2 x$, $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^2 + \sqrt{x}}}$, ...

Мафҳуми амалҳои арифметикӣро барои функсияҳо аниқ менамоем. Бигзор $f: X_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g: X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ — ду функсияҳо бошанд. Сумма, фарқ ва тақсими онҳоро барои $\forall x \in X_1 \cap X_2$ чунин муайян мекунем:

$$(f \pm g)(x) = [f(x) \pm g(x)];$$

$$(fg)(x) = [f(x) \cdot g(x)];$$

$$(f/g)(x) = [f(x)/g(x)].$$

Ҳосили тақсим танҳо дар он нуқтаҳои маҷмӯи $X_1 \cap X_2$ муайян аст, ки $g(x) \neq 0$ бошад. Аз таърифи 6.6 маълум мешавад, ки ҳар кадом функсияи элементариро дар намууди ифодаи аналитикӣ ошкор (формула) додан мумкин аст. Барои функсияҳои элементарӣ соҳан муайяния ва муайян намуодани он мафҳуми муҳимтарин ҳисоб меёбад. Дар зери мафҳуми соҳан муайяния функсияи элементарӣ маҷмӯи ҳаман қиматҳои аргументи x фаҳмида мешавад, ки барои онҳо формулаи функсияро ифодакунанда маъно дошта бошад ва натиҷаи ҳисобкунӣ аз рӯи ин формула адади ҳақиқиро диҳад.

Мисоли 1. Соҳан муайяни функсияи $y=\log_2(x^2-9)$ —ро муайян намоед.

ҲАЛ: Функсияи логарифм муайян ҳисоб меёбад, агар $x^2-9>0 \Rightarrow (x-3)(x+3)>0$ бошад. Ин нобаробари барои қиматҳои $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ иҷро шаванда аст.

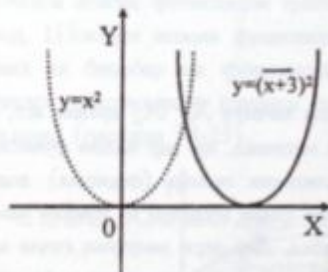
Мисоли 2. Соҳан муайяни функсияи $y=\arccos(2x/(1+x))$ —ро ёбед.

ҲАЛ: Функсияи аркосинус барои он қиматҳои аргументи x маъно дорад, ки нобаробари $-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1$ иҷро шавад. Аз ин ҷо

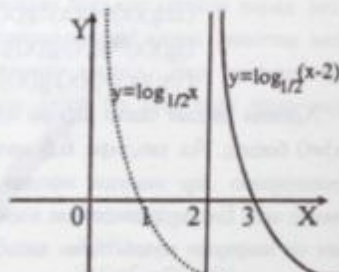
$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{2} - 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq -\frac{1}{1+x} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2} \geq \frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq 1+x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - 1 = x \leq 2 - 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Ҳамин тариқ, $X = \{x | -1/3 \leq x \leq 1\}$.

6. Соизии графикҳои функсияҳо. Дар банди 1 ба мафҳуми графикҳои функсия маълумоти назариявии мухтасар оварда будем. Аз рӯи нуқтаҳо сохтани графикҳои функсия аз курси мактабӣ маълум аст. Дар ин ҷо аз рӯи графикҳои функсияҳои маълум мувофиқи баъзе қоидаҳои кучонии тарзи сохтани графикҳои матлубро меомӯзем.



Рисун 34



Рисун 35

Бигузор графики функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ маълум бошад. Графикҳои функсияи $y=f(x-a)$ —ро аз рӯи графики додашудаи $f(x)$ месозем. Аз

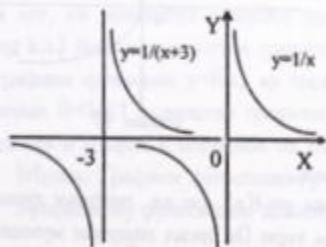
нуқтаи ғиёри x , ки ординатаи $f(x)$ дар он маълум аст, амал намуда нуқтаи x_1 —ро ҳамин тавр меёбем, ки ординатаи $f(x_1-a)$ бузургтарин $f(x)$ —ро дора бошад: $f(x_1-a)=f(x)$. Иҷро шудани ин баробарӣ қиёс аст, ки $x_1-a=x$ ё $x_1=x+a$ гузorem. Аз ин ҷо, қондаи зерин ҳосил мешавад.

ҚОИДАИ 1. Барои ҳосил намудани графики функсияи $y=f(x-a)$ аз рӯи графики функсияи $f(x)$ қиёс аст, ки графики додашударо қад-қад тирин абсиса a вохид ба тарафи рост ҳангоми $a>0$ ва $|a|$ вохид ба тарафи чап ҳангоми $a<0$ кучонем.

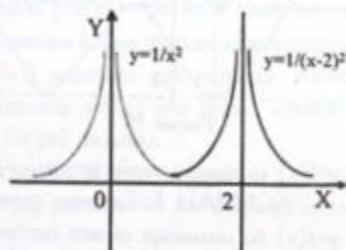
Мисоли 1. Аз қондаи 1 истифода бурда графики функсияҳои зеринро созед.

$$\begin{array}{ll} 1) \quad y=(x-3)^2 & 2) \quad y=\log_{\frac{1}{2}}(x-2); \\ 3) \quad y=\frac{1}{x+3}; & 4) \quad y=\frac{1}{(x-2)^2}; \end{array}$$

Графикҳои функсияҳои додашуда дар расмҳои 34-37 оварда шудааст.



Расм 36



Расм 37

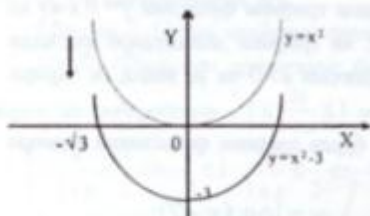
Ғиёзор графики функсияи $y=f(x)$ маълум бошад. Графики функсияи $y=f(x)+c$ —ро аз рӯи қондаи зерин месозем.

ҚОИДАИ 2. Барои сохтани графики функсияи y қиёс аст, ки графики функсияи $y=f(x)$ —ро қад-қад тирин $0y$ ба бузургтарин $|c|$ ба боло (поён) кучонем, агар $c>0$ ($c<0$) бошад.

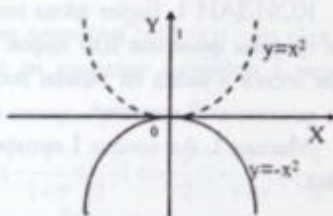
Мисол. Графикҳои функсияҳои $y=x^2-3$, $y=\sin x-2$ -ро аз қондан 2 истифода бурда созад.

Графикҳои ин функсияҳоро дар расмҳои 38 ва 39 дидан мумкин аст.

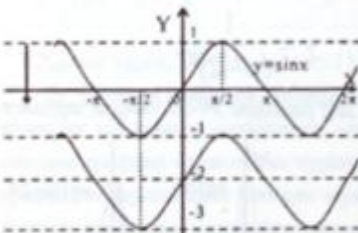
Барои сохтани графикҳои функсияи $y=-f(x)$ аз рӯи графикҳои функсияи



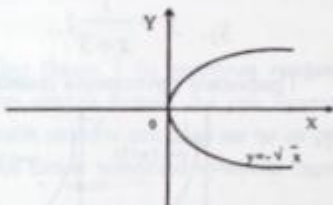
Расм 38



Расм 40



Расм 39



Расм 41

$y=f(x)$ аз қондан зерин истифода баред.

ҚОИДАИ 3. Графикҳои функсияи $y=f(x)$ -ро аз графикҳои функсияи $y=f(x)$ бо илғамоси оннағӣ нисбат ба тирӣ Ox ҳосил намудан мумкин аст (Аломати ординатаи графикҳои функсияи $y=f(x)$ -ро ба баръаксаш иваз намудан кифоя аст).

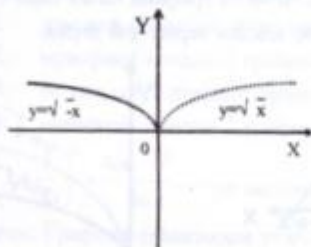
Мисол. Графикҳои функсияҳои $y=-x^2$, ва $y=-\sqrt{x}$ -ро созад. Графикҳои функсияҳои додашуда мувофиқи қондан 3 дар расмҳои 40 ва 41 сохта шудаанд.

Графикҳои функсияи $y=f(x)$ дода шудааст. Графикҳои функсияи $y=f(-x)$ -ро аз рӯи қондан зерин месозем.

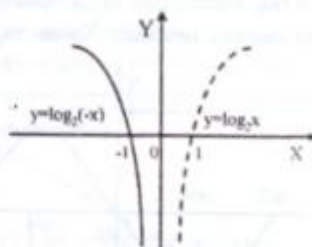
ҚОИДАИ 4. Ғрағғкн ғуғқснн $y=f(-x)$ —ро аз ғрағғкн ғуғқснн $y=f(x)$ бо ғиғққосн оннғғ ннсбат ба тнрн Oy ҳоснл намудан мумкнн аст.

Мнсол. Ғрағғкнн ғуғқсннққон $y=\sqrt{-x}$, $y=\log_2(-x)$ —ро созед. Ғрағғкнн ғуғқсннққон дода шуда дар расмққон 42 ва 43 оварда шудааст.

Аз рўн ғрағғкнн ғуғқснн $y=f(x)$ ғрағғкнн ғуғқснн $y=kf(x)$ —ро ме-созем.



Расмн 42

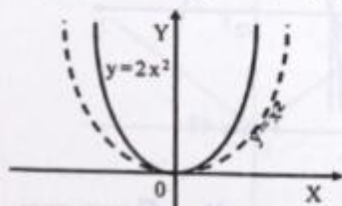


Расмн 43

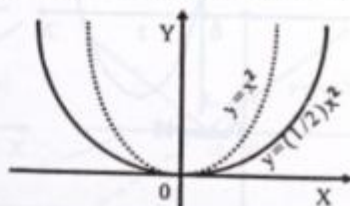
ҚОИДАИ 5. Барон ҳоснл намуданн ғрағғкн ғуғқснн $y=kf(x)$ кн-ғоя аст, кн ординатанн ғрағғкнн ғуғқснн $y=f(x)$ —ро бо k зарб занем. Агар $k>1$ бошад, ординатанн ғрағғкнн ғуғқснн k бор ағзада «васеғшавн»-н ғрағғкнн ғуғқснн $y=f(x)$ аз тнрн Ox k маротнба рўн меднққад. Аннан ҳнғтоми $0<k<1$ ординатанн ғрағғкнн ғуғқснн $y=f(x)$ кам шуда «ғншур-дашавн»-н ғрағғкнн k маротнба ба тнрн Ox рўн меднққад.

Мнсол. Ғрағғкнн ғуғқсннққон $y=2x^2$, $y=(1/2)x^2$ —ро созед.

Ғрағғкнн нн ғуғқсннққон додашуда дар расмққон 44 ва 45 сохта шуда-

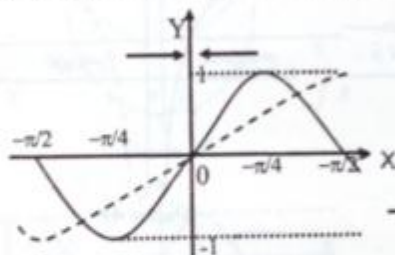


Расмн 44

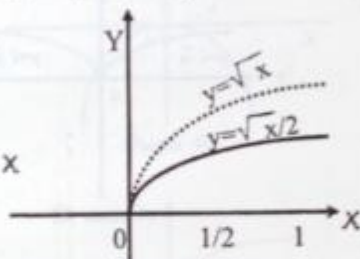


Расмн 45

Графики функсияи $y=f(x)$ дода шудааст. Графики функсияи $y=f(kx)$ —ро месозем. Айён аст, ки онҳо ординатаи яхсила доранд: $f(x)=f(kx_1)$. Барон иҷро шудани ин баробария кифоя аст, ки шарти $x=kx_1 \Rightarrow x_1=\frac{1}{k}x$ иҷро шавад. Агар $k>1$ бошад, графики функсияи $y=f(x)$ ба тирӣ Oy ба $1/k$ бор «фишурда» шуда, ҳангоми $0<k<1$ графики он аз тирӣ Oy ба $1/k$ бор «васеъ» мешавад. Ҳамин тариқ, қондан зерин ҷой дорад.



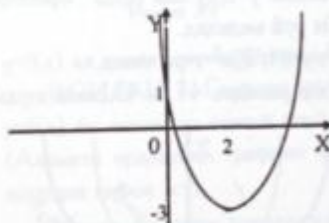
Расми 46



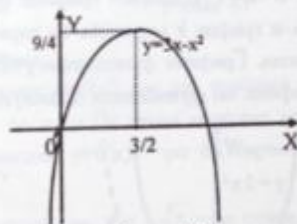
Расми 47

ҚОИДАИ 6. Барон сохтани графики функсияи $y=f(kx)$ кифоя аст, ки қисмати x —ро ба адади k тақсим кунем.

Мисол. Графики функсияҳои $y=\sin 2x$ ва $y=\sqrt{x/2}$ —ро созед.



Расми 48



Расми 49

Графики ин функсияҳои додашуда дар расмҳои 46 ва 47 сохта шудаанд.

Барои сохтани графики функсияи $y=ax^2+bx+c$ аввал квадрати пурраи онро ҷудо мекунем:

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Созишно аз рӯи тартиби зерин мегузаронем:

1. графики функсияи $y=x^2$ маълум ҳисоб мекунем;
2. мувофиқи қоидаи 5 графики функсияи $y=ax^2$ —ро месозем;
3. бо қоидаи 1 графики функсияи $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ —ро месозем;
4. мувофиқи қоидаи 2 графики функсияи

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \text{ —ро месозем;}$$

Мисол. Графики функсияҳои $y=x^2-4x+1$ ва $y=3x-x^2$ —ро созед.

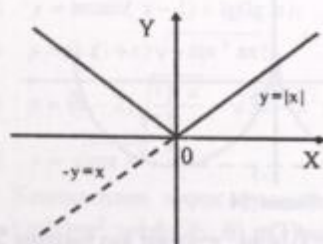
Графики ин функсияҳои додашуда дар расмҳои 48 ва 49 сохта шудаанд.

Графики функсияи $y=f(x)$ дода шудааст. Графики функсияи

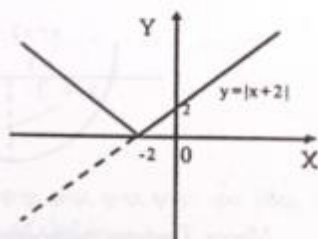
$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{агар } f(x)\geq 0; \\ -f(x), & \text{агар } f(x)< 0 \end{cases}$$

—ро бо қоидаи зерин месозем.

ҚОИДАИ 7. Барои сохтани графики функсияи $y=|f(x)|$ аз рӯи гра-



Расми 50



Расми 51

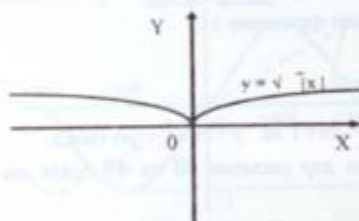
фики функсияи $y=f(x)$ кифоя аст, ки қисмҳои дар болои тире Ox ҳобидаи

графикҳои $y=f(x)$ —ро бетайғир гузошта, қисмҳои дар поёни тирин Ox хоби-дан графикро нисбат ба ин тир оинавӣ (симметрия) илғикос кунем.

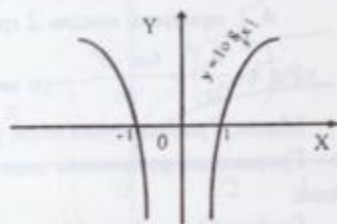
Мисол. Графикҳои функсияҳои $y=|x|$ ва $y=|x+2|$ —ро созед.

Графикҳои ин функсияҳои додашуда мувофиқи қондаи 7 дар расмҳои 50 ва 51 сохта шудаанд.

Аз рӯи графикҳои функсияи $y=f(x)$ графикҳои функсияи $y=f(|x|)$ —ро ҷуви месоҷем. Азбаски $f(|-x|)=f(|x|)$, пас функсияи $f(|x|)$ ҷуфт буда графикаш нисбат ба тирин Oy симметрия аст. Ба ғайр аз ин, $f(|x|)=f(x)$



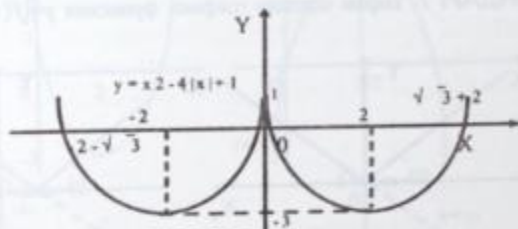
Расми 52



Расми 53

ҳангоми $x \geq 0$. Ҳамин тариқ, қондан зерин ҷой дорад.

ҚОИДАИ 8. Барои ҳосил намудани графикҳои функсияи $y=f(|x|)$ аз графикҳои функсияи $y=f(x)$ кифоя аст, ки графикҳои функсияи $y=f(x)$ —ро ҳангоми $x \geq 0$ созем ва онро нисбат ба тирин Oy оинавӣ (симметрия) илғикос кунем.



Расми 54

Мисол. Графикҳои функсияҳои $y=\sqrt{|x|}$ ва $y=\log_3|x|$ дар расмҳои 52, 53 мувофиқи қондаи 8 сохта шудаанд.

Аксар мавридҳо сохтани графикҳои функсияи намуни $y=|f(|x|)|$ зарур мешавад. Дар ин маврид қондаҳои 7 ва 8 —ро явҷоя истифода мебаранд.

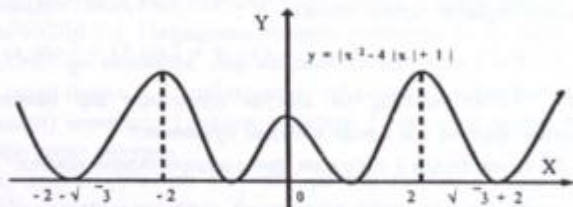
Мисол. Графикҳои функсияи $y=|x^2-4||x|+1|$ —ро созад. Графикҳои функсияи $y=x^2-4x+1$ —ро сохта будем (расмҳои 48). Азбаски $x^2=|x|^2$ аст, графикҳои функсияи $y=x^2-4||x|+1|$ —ро бо қондан 8 месозем. Қисми параболҳои $y=x^2-4x+1$ —ро ҳангоми $x \geq 0$ месозем ва онро нисбат ба тирӣ Оу симметрия ҷиғикос мекунем.

Мувофиқи қондан 7 графикҳои модуло месозем:

Усулҳои созиши графикҳои функсияҳо барои функсияҳои намуни

$y=f_1(x) \pm f_2(x)$, $y=f_1(x) \cdot f_2(x)$, $y=f_1(x)/f_2(x)$ ва $y=f_1(x)\varphi(x)$ низ вуҷуд

доранд.



Расми 55

Машғуро барои боби II

1. Сохтан муайяни функсияҳои зеринро ёбед:

a) $y = \lg[\sin(\lg x)]$;

б) $y = \arcsin(x-1) + \lg(\lg x)$;

в) $y = (|x| - x)\sqrt{-\sin^2 \pi x}$;

г) $y = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{3x-x^3}$;

д) $y = \sqrt{\cos x^2}$.

2. Композитсияи ҷуфти функсияҳои $\varphi \cdot \psi$, $\varphi \cdot \psi$, $\psi \cdot \varphi$, $\psi \cdot \psi$ —ро ёбед,

агар а) $\varphi(x)=x^2$, $\psi(x)=2^x$; б) $\varphi(x)=\operatorname{sign} x$, $\psi(x)=1/x$;

$$\text{в) } \varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0; \\ |x|, & \text{агар } x > 0, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0; \\ -x^2, & \text{агар } x > 0, \end{cases}$$

бошад.

3. Функсияи бартак ва соҳи муайяни оғро ёбед:

$$a) y = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 0$$

$$b) y = \begin{cases} x, & \text{агар } -\pi \leq x \leq 0, \\ x^2, & \text{агар } 0 \leq x \leq \pi, \\ 2, & \text{агар } x > \pi \end{cases}$$

$$6) y = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

4. Ҷуфт ва тоқ будани

$$a) y = \left| \ln \frac{1-x}{1+x} \right|$$

функсияҳои зеринро тадриқ намоед:

$$6) y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$в) y = 2 \sin 3x - \frac{1}{2} \cos x;$$

г) Ибтот намоед, ки ҳагуна функсияро дар намуни сӯзман функсияҳои ҷуфт ва тоқ ирода намуни мувофи аст.

5. Монотон буди ё набудани функсияро тадриқ намоед:

$$a) y = x + \sin x; \quad 6) y = x + \frac{1}{x}; \quad в) y = \lg x;$$

$$з) y = \frac{ax+b}{cx+d}; \quad 4) y = ax^2 + bx + c.$$

6. Дари асоси функсияҳои зеринро ёбед:

$$a) y = A \sin(\omega x + \varphi), \quad A, \omega, \varphi - \text{ададҳои доимӣ};$$

$$6) y = \sin 2x + 2 \sin 3x;$$

$$в) y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{21}{17} \sin 3x;$$

$$з) y = \cos x + \cos 5x.$$

7. Графикҳои функсияҳои зеринро созед:

$$a) y = \frac{x^3}{4-x^2}; \quad 6) y = \lg \cos x, \quad в) y = \arcsin(3x-1); \quad з) y = \arccos(-2x);$$

Ҳаёт бо ду ҷиз: математика ва
таълими он эбо мегардад.

С.Д. Пуассон*

БОБИ III. ПАЙДАРПАИҲО

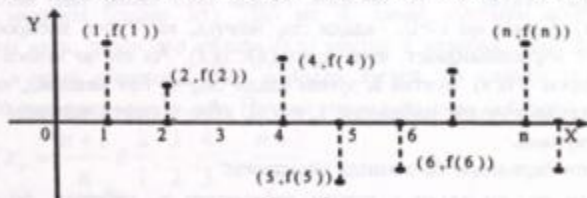
Дар ин боб пайдарпаиҳои ададӣ ва ҳудуди онҳо омӯхта мешавад. Компактнокии порчаи $[a, b]$ исбот карда шуда мафҳуми ҳудуди поёнӣ ва болоии пайдарпай чорӣ карда мешавад.

§7. ПАЙДАРПАИҲОИ АДАДӢ ВА ҲУДУДҲОИ ОНҲО.

1. *Мафҳуми пайдарпай.* Бигузор $X \neq \emptyset$ маҷмӯи ихтиёрӣ бошад.

ТАЪРИФИ 7.1. Пайдарпаии беохирӣ элементҳо аз X гуфта инъикоси $f: N \rightarrow X \neq \emptyset$ -ро меноманд. Дар мавриди хусусӣ, агар $\emptyset \neq X \subset R$, яъне X — маҷмӯи ададӣ бошад, пайдарпаиро пайдарпаии ададӣи беохир (ё пайдарпаии ададӣ) меноманд. Графикҳои функсияи f -ро сохта шарҳи геометрии пайдарпаиро ҳосил мекунем.

Бо x_n қимати функсияи $f: N \rightarrow X$ -ро дар нуқтаи n ишора мекунем: $x_n = f(n)$. Ин ишораро истифода бурда пайдарпаии ададиро чунин менави-



Расми 56

санд: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$

Адади x_n —ро аъзои n —уми пайдарпай меноманд. Шаклҳои дигари навишти пайдарпаиро қайд мекунем:

$$(x_n | n \in N), (x_n)_{n=1}^{\infty}, (x_n)_{n \in N}, (x_n), x_n$$

Дар тирӣ адади аъзоҳои пайдарпаии x_n —ро тасвир намуда боз як шарҳи геометрии пайдарпаиро ҳосил мекунем.

* С.Д. Пуассон (1781-1840) — математикӣ франсавӣ

2 Худуди пайдарпай. Ду таърифи худуди пайдарпайро меорем.

ТАЪРИФИ 7.2. Адади $a \in \mathbb{R}$ худуди пайдарпайи x_n ном дорад, агар барои ихтиёри $\varepsilon > 0$, ҷуғи адади n мавҷуд бошад, ки ҳамаи аъзоҳои пайдарпайи x_n , ки рақамҳои он аз n_ε калонанд ($n > n_\varepsilon$), нобаробарии $|x_n - a| < \varepsilon$ -ро қаноат намоёнд, яъне ($\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n > n_\varepsilon: |x_n - a| < \varepsilon$).

Таърифи 7.2 —ро, мухтасар, таърифи худуди пайдарпай бо забони « ε - n » меноманд.

ТАЪРИФИ 7.3. Адади $a \in \mathbb{R}$ худуди пайдарпайи x_n ном дорад, агар барои ихтиёри атрофи $U(a)$ нуқтаи a ҷуғи адади n_ε вуҷуд дошта бошад, ки $\forall n > n_\varepsilon$ шарти $x_n \in U(a)$ иҷро шавад (таърифи худуди пайдарпай бо забони атрофҳо « U - n »).

ЭЗОҲ. Бо қаноатмандӣ ҳисоб намудан мумкин аст, ки $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ($n_\varepsilon \in \mathbb{N}$), ҷуғи агар нобаробарии $|x_n - a| < \varepsilon$ ($x_n \in U(a)$), барои $\forall n > n'_\varepsilon$ ($\forall n > n'_\varepsilon$) иҷро шавад, онгоҳ вай барои $\forall n > n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ($\forall n > n_\varepsilon \in \mathbb{N}$) низ иҷрошаванда мебошад, ки дар ин ҷо $n_\varepsilon \geq n'_\varepsilon$ ($n_\varepsilon \geq n'_\varepsilon$).

Таърифҳои 7.2 ва 7.3 дар он маъно баробарқувваанд, ки агар адади $a \in \mathbb{R}$ худуди пайдарпай бо маънои таърифи 7.2 бошад, онгоҳ вай худуди пайдарпайи x_n дар маънои таърифи 7.3 мебошад ва баръакс.

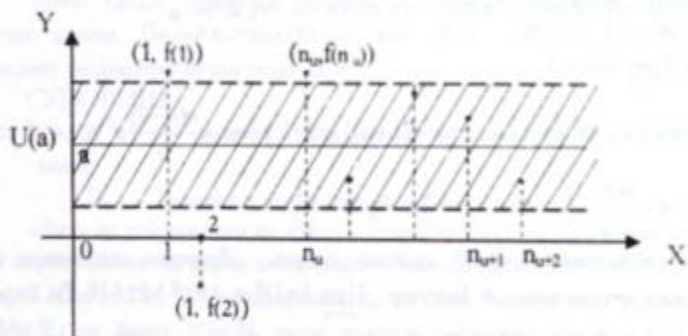
Дар ҳақиқат, бигзор a —худуди x_n дар маънои таърифи 7.2 бошад, атрофи $U(a)$ нуқтаи a —ро мегирем. Адади $\varepsilon > 0$ ҳамин тавр мегирем, ки $U_\varepsilon(a) \subset U(a)$. Барои ин $\varepsilon > 0$, адади n_ε мавҷуд, ки $\forall n > n_\varepsilon$ нобаробарии $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ иҷрошавандааст, яъне $x_n \in U_\varepsilon(a) \subset U(a)$. Аз ин ҷо хулоса мебарорем, ки барои $\forall U(a)$ нуқтаи a , ҷуғи адади $n_\varepsilon = n_\varepsilon$ ёфт мешавад, ки ҳангоми $n > n_\varepsilon$ ҳамаи аъзоҳои пайдарпайи $x_n \in U(a)$, яъне а шарти таърифи 7.3 —ро қаноат мекунад.

Исботи баръаксро ба хонанда месупорем.

Далели он, ки адади a худуди пайдарпайи x_n мебошад, бо рамаҳои $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (хонед: «ҳангоми ба беохир афзудани n худуди x_n ба a баробар аст») ё ҳангоми $n \rightarrow \infty$ $x_n \rightarrow a$ (хонед: «ҳангоми ба беохир афзудани n пайдарпайи x_n ба a наздик мешавад») навишта мешавад. Агар пайдарпайи x_n худуди $a \in \mathbb{R}$ —ро дошта бошад, онгоҳ онро наздикшаванда (дар $\mathbb{R}$) меноманд ва дар ҳолати баръакс дуршаванда (дар $\mathbb{R}$) меноманд.

Шарҳи геометрии худуди пайдарпайи ададиро медиҳем. Маҷмӯи нуқтаҳои $\{(n, f(n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ —ро дар ҳамвории декарти тасвир менамоем (расми 57).

Аз таърифи 7.3 ҳудуди пайдарпай мебарояд, ки ҳаман нуқтаҳои маҷмӯи $\{(n, f(n)) | n \in \mathbb{N}\}$ бо абсиссаҳои аз адади p_ϵ калон, дар тасмаи штрих карда-

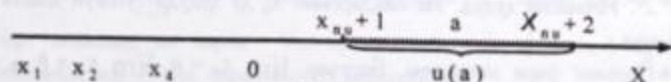


Расми 57.

шуда меафтанд. Ординатаҳои ин нуқтаҳо дар атрофи $u(a)$ нуқтаи a меҳобанд. Аъзоҳои пайдарпаи ба a наздикшавандан x_n —ро дар тирӣ ададӣ тасвир мекунем (расми 58). Дар ин ҷо ҳаман нуқтаҳои пайдарпай бо рақамҳои аз p_ϵ калон дар атрофи $u(a)$ нуқтаи a меҳобад, яъне дар атрофи нуқтаи a ҷамъ мешаванд. Дар маърифи хусуся, ба сифати $u(a)$ атрофи симметрия гирифташ мумкин аст. Якчанд мисолҳои дида мебароем.

$$1) x_n = \frac{n+1}{n} \text{ ё } \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$$

▲ Нисшон медиҳем, ки $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ аст. Адади $\epsilon > 0$ —ро гирифта чунин p_ϵ меёбем, ки барои $\forall n > p_\epsilon$ нобаробарии $|x_n - 1| < \epsilon$ иҷро шавад.



Расми 58

$|(n+1)/n - 1| < \epsilon \Leftrightarrow 1/n - 1 < \epsilon \Leftrightarrow n > 1/\epsilon$. Ба сифати p_ϵ кифоя аст, ки $1/\epsilon$ —ро гирем. ▲

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0.$$

$$\blacktriangle \left| \frac{\sin n}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad n \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \blacktriangle$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$\begin{aligned} \left| \sqrt[n]{n} - 1 \right| < \varepsilon &\Leftrightarrow \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow n < (1 + \varepsilon)^n \Leftrightarrow n < 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n < \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \Leftrightarrow n-1 > \frac{2}{\varepsilon^2}, \quad n \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

4) пайдарпайи $x_n = (-1)^n$ дуршаванда аст. Дурустии тасдиқотро аз баръаксаш мегузаронем. $\blacktriangle$ Бигузор $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Ба сифати ε адади $0 < \varepsilon < \min\{|1-a|, |1+a|\}$ —ро интихоб мекунем. Фарқи $|x_n - a|$ ба $|1-a|$, ҳангоми ҷуфт будани n ва ба $|1+a|$, ҳангоми тоқ будани n баробар аст. Аз ин сабаб, барои ихтиёри n , ин адал аз ε хурд шуда наметавонад. Айнан муқаррар карда мешавад, ки $a=1$ ва $a=-1$ ҳудудҳои пайдарпай шуда наметавонанд (исбот кунед). $\blacktriangle$

3. *Баъзе хосиятҳои пайдарпайҳои наздикшаванда.*

1⁰. Агар ҳаман аъзоҳои пайдарпайи x_n ба адади a баробар бошанд, онгоҳ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$\blacktriangle$ Адади $\varepsilon > 0$ —ро мегирем. Барои $\forall n \in \mathbb{N}$ нобаробарии $|x_n - a| = 0 < \varepsilon$ иҷрошаванда мебошад, пас $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. $\blacktriangle$

ЭЗОҲ. Агар аъзоҳои пайдарпай аз ягон рақам сар карда ба адади дониш баробар бошад, онгоҳ хосияти 1⁰ низ иҷрошаванда аст.

2⁰. Ягонагии ҳудуд. Як пайдарпайи x_n ду ҳудуди гуногун дошта наметавонад.

$\blacktriangle$ Баръакс фарз менамоем. Бигузор $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ ва $a \neq b$ бошад, онгоҳ атрофҳои яқингарро набуранди $u(a)$ ва $u(b)$ нуқтаҳои a ва b ёфт мешаванд $u(a) \cap u(b) = \emptyset$. Масалан

$$u_a(a) = (a - \sigma, a + \sigma), \quad u_b(b) = (b - \sigma, b + \sigma), \quad \text{ки дар ин ҷо } 0 < \sigma < |a - b|/2;$$

ададҳои p_1 ва p_2 —ро тавре мегирием, ки шартҳои зерин иҷро шавад:

$$(\forall n > p_2 \Rightarrow x_n \in U(a)) \wedge (\forall n > p_2 \Rightarrow x_n \in U(b))^*$$

Чунин ададҳо мувофиқи таърифи 7.3 ҳудуди пайдарпай, ҳама вақт вуҷуд доранд. Барои $n > \max\{p_1, p_2\}$ ҷой дорад: $x_n \in U(a) \cap U(b) \neq \emptyset$. Ин эҳдиёт тасдиқотро анҷом медиҳад. ♦

СУПОРИШ:

1) Аз таърифи 7.2 истифода бурда хосияти 2^0 —ро исбот намоед;

2) Тасдиқоти зерин ҳақонӣ аст ё не?

«Агар ду пайдарпанҳо як ҳудудро дошта бошанд, он гоҳ ҳамаи аъзоҳои он аз ягон рақам сар карда ҳамҷояанд». Мисолҳо оред.

ТАЪРИФИ 7.4. пайдарпани x_n аз боло маҳдуд ном дорад, агар $\exists M \in \mathbb{R}$, ки барои $\forall n \in \mathbb{N}$ ҳамаи аъзоҳои пайдарпай шартҳои $x_n \leq M$ —ро қаноат кунанд; аз поён маҳдуд ном дорад, агар $\exists m \in \mathbb{R}$, ки барои $\forall n \in \mathbb{N}$ ҳамаи аъзоҳои пайдарпай шартҳои $x_n \geq m$ —ро қаноат кунанд; маҳдуд ном дорад, агар вай аз боло ва аз поён маҳдуд бошад.

Нишон медиҳем, ки маҳдудияти пайдарпани x_n ба мавҷудияти чунин адади $c > 0$ баробарқувва аст, ки барои $\forall n \in \mathbb{N}$ шартҳои $|x_n| \leq c$ иҷрошаванда аст.

Дар ҳақиқат, агар чунин адади $c > 0$ мавҷуд бошад, онгоҳ айён аст, ки x_n маҳдуд. Агар вай аз боло ва аз поён маҳдуд бошад, онгоҳ ба сифати сифоя аст, ки $c \geq \max\{|M|, |m|\}$ —ро интихоб кунем. Ададҳои M , m —ро ҳама вақт тавре интихоб карда метавонем, ки дар таърифи 7.4 нобаробарӣҳои қатъӣ ҷой дошта бошанд.

3^0 . Пайдарпани назрешшаванда маҳдуд аст.

♦ Бигузор $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, бошад. Аз таърифи 7.2 барои $\varepsilon = 1 > 0$ чунин p_1 , ёфт мешавад, ки барои $\forall n > p_1$ муносибати $|x_n - a| < 1 \Leftrightarrow a - 1 < x_n < a + 1$, иҷрошаванда аст. Аммо, барои $\forall n \in \mathbb{N}$ нобаробарии

$$\min\{x_1, x_2, \dots, x_n, a - 1\} \leq x_n \leq \max\{x_1, x_2, \dots, x_n, a + 1\}$$

* Рамзи $\wedge$ маънои «ва» —ро дорад.

Тасдиқоти баръакс ҷой надорад. Масалан, пайдарпайи $x_n = (-1)^n$ маҳдуд аст, аммо вай назидикшаванда нест. Ҳамин тариқ, маҳдудияти пайдарпай шарти зарурӣ назидикшавии пайдарпай буда, шарти кифоягӣ шуда наметавонад.

4⁰. Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ва $a < b$ бошад, онгоҳ аз ягон рақам сар карда ҳамаи аъзоҳои пайдарпайи x_n аз b хурд мебошанд, яъне

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a < b) \Rightarrow (\exists n_0, \forall n > n_0: x_n < b).$$

♣ Бигузор $\varepsilon = b - a > 0$ бошад, онгоҳ чуқури адади $\exists n_0$, ки барои $\forall n > n_0$ шарти зерин ҷой дорад.

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < b - a \Leftrightarrow -b + a < x_n - a < b - a \Leftrightarrow x_n < b \quad \clubsuit$$

СУПОРИШ: Искот намоед, ки агар $a > b$ бошад, онгоҳ аз ягон рақам сар карда ҳамаи аъзоҳои пайдарпайи x_n аз b калонанд.

5⁰. Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ва аз ягон рақам сар карда ҳамаи аъзоҳои пайдарпайи $x_n \geq b$ бошанд, онгоҳ $a \geq b$ яъне

$$[(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a) \wedge (\forall n > n_1: x_n \geq b)] \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq b).$$

♣ Агар a аз b хурд мешуд, онгоҳ мувофиқи хосияти 4⁰ аз ягон рақам сар карда ҳамаи аъзоҳои пайдарпай аз b хурд мешуданд, яъне $x_n < b$, ки ин ба шарт зид аст. ♣

ЭЗОҲ: Аз нобаробарии қатъии $x_n > b$ дар шарт 5⁰ нобаробарии $a > b$ намебарояд.

$$\text{Мисол. } x_n = 1/n, x_n > 0. \text{ Аммо } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

6⁰. Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, бошад ва барои ҳамаи n аз ягон рақам сар карда нобаробарии $x_n \leq y_n$ иҷро шавад, онгоҳ $a \leq b$.

♣ Бигузор $a > b$ бошад. Мувофиқи хосияти зичигии маҷмӯи $\mathbb{R}$ адади $c \in \mathbb{R}$ ёфт мешавад, ки $a > c > b$ мебошад. Дар асоси хосияти 4⁰:

$$(\exists n_1, \forall n > n_1: x_n > c) \wedge (\exists n_2, \forall n > n_2: y_n > c).$$

Бигузор $x_n \leq y_n$ барои $\forall n > n_3$ бошад, онгоҳ $\forall n > \max\{n_1, n_2, n_3\}$ дар як маҷмӯи нобаробарииҳон $x_n > c > y_n$ ва $x_n \leq y_n$ ҳисл мешавад. Ин ба шарти қардашуда зид аст. ♣

Агар аз ягон рақам сар карда нобаробарии $x_n \geq y_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ва $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ иҷро шавад, онгоҳ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

ЭЗОХ: Иҷрои нобаробарии қатъии $x_n < y_n$ ($x_n > y_n$) барои ҳамаи қиматҳои n , аз ягон рақам сар карда нобаробарии қатъии $a < b$ ($a > b$) —ро намендиҳад.

Мисол. $x_n = 0$, $y_n = 1/n$. Аммо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

7⁰. Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ ва барои ҳамаи n аз ягон рақам сар карда нобаробарии $x_n \leq z_n \leq y_n$ иҷро шавад, онгоҳ пайдарпаии z_n наздиқшаванда буда ҳудуди a —ро дорад, яъне $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

$$\clubsuit (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_1, \forall n > n_1: -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon),$$

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_2, \forall n > n_2: -\varepsilon < y_n - a < \varepsilon). \text{ Бигузор барои}$$

$\forall n > n_3$ нобаробарии $x_n \leq z_n \leq y_n$ иҷро шавад, онгоҳ $\forall n > \max\{n_1, n_2, n_3\}$ нобаробарии $a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$ иҷрошаванда аст. Аз ин ҷо мавҷудияти ҳудуди z_n мебарояд, яъне $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ $\clubsuit$.

4. Маҷмӯи $\bar{R}$. Ба маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ $\bar{R}$ ду рамаҳои « $+\infty$ » ва « $-\infty$ » —ро ҳамроҳ намуда маҷмӯи $\bar{R}$ —ро ҳосил мекунем, яъне

$\bar{R} = R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Рамаҳои $+\infty$, $-\infty$ шартҳои зеринро қаноат меномоянд:

$$a) \text{ барои } \forall x \in R: +\infty < x < -\infty, x + (+\infty) = +\infty, x + (-\infty) = -\infty$$

$$b) \text{ агар } x \in R \text{ ва } x > 0 \text{ бошад, онгоҳ } x + (+\infty) = +\infty, (-x) + (+\infty) = -\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, (-\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty.$$

Ифодаҳои $+\infty + (-\infty)$, $0 \cdot (+\infty)$, $0 \cdot (-\infty)$ —ро номуайян ҳисоб мекунем.

Маҷмӯи $\bar{R}$ —ро тирӣ ададии васеъшуда, рамаҳои $+\infty$, $-\infty$ —ро элементҳои беохирӣ маҷмӯи $\bar{R}$ ё нуқтаҳои беохирӣ тирӣ ададии васеъшуда меноманд. Маҷмӯи $\{x \in R \mid c < x < +\infty, c \in R\}$ —ро атрофи нуқтаи беохирӣ $+\infty$ номида бо $u(+\infty)$ ва маҷмӯи $\{x \in R \mid -\infty < x < c, c \in R\}$ —ро атрофи нуқтаи беохирӣ $-\infty$ номида бо $u(-\infty)$ ишорат меномоянд.

§8. ПАЙДАРПАИҲОИ БЕОХИР ХУРД ВА БЕОХИР КАЛОН

Сумма (фарқ), зарб, тақсим (нисбат)-и ду пайдарпаиҳои x_n, y_n гуфта пайдарпаиҳои $x_n \pm y_n, x_n \cdot y_n, x_n / y_n$ ($y_n \neq 0$) -ро меномем.

1. Хосиятҳои пайдарпаиҳои беохир хурд. Пайдарпаи α_n пайдарпаи беохир хурд (п.б.х) ном дорад, агар ҳудуди он мавҷуд буда ба сифр баробар бошад, яъне $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

1⁰. Суммаи ду п.б.х боз п.б.х аст.

▲ Бигузор α_n, β_n -п.б.х бошанд. Адади $\varepsilon > 0$ -ро мегирем. Аз таърифи п.б.х мебарояд, ки $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$, яъне

$$(\forall \varepsilon/2, \exists n_1, \forall n > n_1: |\alpha_n| < \varepsilon/2),$$

$$(\forall \varepsilon/2, \exists n_2, \forall n > n_2: |\beta_n| < \varepsilon/2)$$

$n_\varepsilon > \max\{n_1, n_2\}$ мегузорем, онгоҳ барои $\forall n > n_\varepsilon$ ҳосил мекунем:

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \text{ яъне } \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0. \blacktriangle$$

2⁰. Ҳосили зарби п.б.х ба пайдарпаи маҳдуд п.б.х аст.

▲ Бигузор α_n -п.б.х, β_n -пайдарпаи маҳдуд бошанд, онгоҳ барои $\forall n \in \mathbb{N}$ шарти $|\beta_n| < c$ иҷро мешавад. Адади $\varepsilon > 0$ -ро мегирем. Аз рӯи адади $\varepsilon/c > 0$ адади n_ε -ро ҳамин тавр меёбем, ки барои $\forall n > n_\varepsilon$ нобаробарии $|\alpha_n| < \varepsilon/c$ иҷро шавад. Барои ҳамаи $n > n_\varepsilon$ ҳосил мекунем:

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| \leq |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon \cdot c / c = \varepsilon. \blacktriangle$$

НАТИҶА. Зарби п.б.х ба п.б.х боз п.б.х аст.

2. Хосиятҳои пайдарпаиҳои беохир калон.

ТАЪРИФИ 8.2. Агар барои адади ихтиёрии пешакӣ додашудаи $E > 0$, ҳамаи аъзоҳои пайдарпаи β_n аз ягон рақам сар карда аз рӯи модули аз E калон бошанд, онгоҳ β_n -ро пайдарпаи беохир калон (п.б.к) меноманд, яъне $(\beta_n \text{ -п.б.к}) \Leftrightarrow (\forall E > 0, \exists n_E, \forall n > n_E: |\beta_n| > E)$.

Ин шартро мухтасар чунин: $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \infty$ менависанд. Агар ҳамаи аъзоҳои п.б.к β_n аз ягон рақам сар карда мусбат (манфӣ) бошанд, онгоҳ

пайдарпаиро наздикшаванда (дар $\bar{R}$) ба ҳудуди беохир $+\infty$ ($-\infty$) меноманд ва чунин менависанд: $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = -\infty$).

СУПОРИШ. Исбот кунед, ки ҳар гуна п.б.к дар R дуришаванда аст. Ҳаргуна пайдарпаи дар R наздикшаванда дар $\bar{R}$ низ наздикшаванда мебошад, чунки ҳудуди он ба маҷмӯи $\bar{R}$ таалуқдор аст.

Мисолҳо. $\beta_n = (-1)^n n$ - п.б.к аст, чунки $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot n = \infty$; п.б.к $\beta_n = \sqrt{n}$ дар $\bar{R}$ наздикшаванда буда ба $+\infty$ наздик мешавад. ($\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$). Айён аст, ки ҳаргуна п.б.к маҳдуд нест. Баръаксаш на ҳама вақт ҷой дорад. Масалан, пайдарпаи $1, 4, 1, 4^2, 1, 6^2, 1, 8^2, \dots, n^{1+(-1)^n}, \dots$ номаҳдуд аст, аммо вай п.б.х нест.

3⁰. Агар β_n - п.б.к бошад, онгоҳ $1/\beta_n$ п.б.х аст.

♣ Адади $\varepsilon > 0$ -ро мегирем. Бигузор $E = 1/\varepsilon$ бошад. Азбаски β_n - п.б.к аст, пас чунин адади $\exists p_E$, ки барои $\forall n > p_E$ нобаробарии $|\beta_n| > E \Leftrightarrow |1/\beta_n| < 1/E = \varepsilon$, иҷрошаванда аст. Аз ин ҷо мебарояд, ки барои $\forall n > p_E$ нобаробарии $|1/\beta_n| < \varepsilon$ иҷрошаванда аст. ♣

СУПОРИШ. Исбот кунед, ки нисбати пайдарпаи маҳдуд ба п.б.к пайдарпаи беохир хурд мебошад.

§9. ГУЗАРИШИ ҲУДУДИ ВА АМАЛҲОИ АРИФМЕТИКИ

ЛЕММА. Барои он, ки пайдарпаи x_n ба адади $a \in R$ наздик шавад, зарур ва кифоя аст, ки пайдарпаи $\alpha_n = x_n - a$ беохир хурд бошад, яъне

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \right) \Leftrightarrow (x_n - a = \alpha_n \text{ - п.б.х}).$$

♣ **Зарури.** Бигузор $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ бошад, $\alpha_n = x_n - a$ гузошта исбот мекунем, ки $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ аст. Азбаски $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, пас рақами p_ε ёфт мешавад, ки $\forall n > p_\varepsilon$ нобаробарии $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |\alpha_n| < \varepsilon$ иҷрошаванда аст. Ин маънии онро дорад, ки $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ аст.

Кифояти Бигузур $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ бошад ва пайдарпайи x_n —ро доро бошем. Искот мекунем, ки $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ мебошад. Адади $\varepsilon > 0$ —ро мегирем. Азбаски $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, пас рақами p_ε ёфт мешавад, ки $\forall n > p_\varepsilon$ нобаробарии $|\alpha_n| < \varepsilon$ ё $|x_n - a| < \varepsilon$ ҷишаванда аст. Ин чунин маъно дорад, ки $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ аст. $\blacktriangle$

1. Худуди сумма (фарқ), зарб, тақсими пайдарпайҳо.

ТЕОРЕМА. Бигузур ду пайдарпайҳои x_n ва y_n дар $\mathbb{R}$ назардоштаванд бошанд, онгоҳ

$$a) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$б) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$в) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad \left(\text{азар} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0 \right)$$

$\blacktriangle$ Бигузур $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ бошад. Мувофиқи лемма $\alpha_n = x_n - a$ ва $\beta_n = y_n - b$ пайдарпайҳои беохир хурд мебошанд.

$$a) x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

Мувофиқи хосияти 1⁰ (§8) пайдарпайи $\alpha_n \pm \beta_n$ —п.б.х аст. Бинобарин, аз лемма мебарояд, ки $a \pm b$ худуди пайдарпайи $x_n \pm y_n$ мебошанд.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = (a \pm b) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

$$б) x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = (a \cdot b) + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n).$$

Пайдарпайҳои $a\beta_n$, $b\alpha_n$, $\alpha_n\beta_n$ мувофиқи хосияти 2⁰ (§8) —п.б.х мебошанд. Мувофиқи хосияти 1⁰ (§8) пайдарпайи $(a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$ —п.б.х аст.

Аз ин ҷо мувофиқи лемма хулоса мебарояд, ки

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

НАТИҶА. Агар $x_n = c$ пайдарпайи доимӣ бошад, онгоҳ $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, яъне доимиро аз зери аломати ҳудуд баровардан мумкин аст.

в) фарқи зеринро дида мебароем.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b + \beta_n} (\alpha_n - \frac{a}{b} \beta_n)$$

Дар ин ҷо $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$. Дар асоси хосияти 1^0 , 2^0 (§8) пайдарпаи

$(\alpha_n - (a/b)\beta_n)$ — п.б.х аст. Нишон медиҳем, ки пайдарпаи $1/(b + \beta_n)$

маҳдуд аст. Азбаски $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0 < \frac{|b|}{2}$, пас мувофиқи хосияти 4^0 , (§7) чузун

адади n_1 , ки $\forall n > n_1$ нобаробарии $|\beta_n| < |b|/2$ ҷой дорад. Бинобар ин $\forall n > n_1$,

$$\left| \frac{1}{b + \beta_n} \right| = \frac{1}{|b + \beta_n|} \leq \frac{1}{|b| + |\beta_n|} < \frac{1}{|b| - \frac{|b|}{2}} = \frac{2}{|b|};$$

яъне пайдарпаи $1/(b + \beta_n)$ маҳдуд аст. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки мувофиқи хосияти 2^0 , (§8) пайдарпаи $(1/(b + \beta_n))(\alpha_n - a\beta_n)$ — п.б.х аст.

Дар асоси лемма ҳулоса мебарорем, ки

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad \blacktriangle$$

2. Ифодаҳои номуайян.

Теоремаи дар банди 1 овардашуда дар $\bar{R}$ нодуруст аст, агар

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty \right)$$

ва фарқи пайдарпаиҳо дида шаванд

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \right)$$

ва суммаи пайдарпаиҳо дида шавад.

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, y_n \text{ — п.б.к ва зарби пайдарпаиҳо дида шавад.}$$

$$4) x_n \text{ — п.б.х (п.б.к), } y_n \text{ — п.б.х (п.б.к) ва нисбати пайдарпаиҳо дида шавад.}$$

Дар ин маъридҳо мегуянд, ки мувофиқан номуайявҳои зерин ҷой доранд: « $\infty - \infty$ »; « $0 \cdot \infty$ »; « $0/0$ »; « ∞/∞ ».

Аз ин ру ёфтани ҳудудро «кушодани номуайявҳои» меноманд. Якчанд мисол меорем.

$$1) x_n = 3n, y_n = 3n + 1; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1.$$

$$2) x_n = n, y_n = n \cdot (-1)^n; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty.$$

Пайдарпаии $x_n \cdot y_n = (-1)^n$ дуршаванда аст.

$$3) x_n = n + 1/n^5, y_n = 2n; \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n + \frac{1}{n}) = -\infty;$$

$$4) x_n = (-1)^n n + 2n, y_n = 2n; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n = \infty.$$

Дар ин ҷо мисолҳои «кушодани номуайяниҳо» —и « $\infty \cdot \infty$ » -ро овардем. Барои маъриди «кушодани номуайяниҳо» —и « $0 \cdot \infty$ », « $0/0$ », « ∞/∞ » мисолҳо оред.

Аз дигар ифодаҳои номуайяниҳо номуайяниҳои намуни « 0^0 », « ∞^0 », « 1^∞ » -ро қайд менамоем.

§10. ПАЙДАРПАҲОИ МОНОТОН. АДАДИ e .

Бигузор n' ва n'' —ададҳои ихтиёри аз N бошанд.

ТАЪРИФ. Пайдарпаии x_n —ро афзуншаванда (камшаванда) меноманд, агар ҳангоми $n' > n''$ нобаробарии $x_{n'} > x_{n''}$ ($x_{n'} < x_{n''}$), камнашаванда (афзуннашаванда) меноманд, агар ҳангоми $n' > n''$ нобаробарии $x_{n'} \geq x_{n''}$ ($x_{n'} \leq x_{n''}$) иҷро шавад.

Пайдарпаиҳои ягон аз шартҳои нобаршударо қаноаткунанда монотон ном доранд. Пайдарпаиҳои афзуншаванда (камшаванда) -ро қатъи монотон (монотон бо маънои қатъи) меноманд. Пайдарпаиҳои афзуннашаванда (камнашаванда) —ро монотон «дар маънои васеъ» меноманд. Пайдарпаиҳои монотон баъзан хосиятҳои шоянро доро мебошанд.

ТЕОРЕМА(онди ҳудуди пайдарпаии монотон). Ҳаргуна пайдарпаии монотон камнашаванда (азуннашаванда) —и аз боло (поён) маҳдуди x_n наздикшаванда буда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n | n \in N\} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n | n \in N\} \right) \text{ аст.}$$

▲ Бигузор пайдарпаии x_n камнашаванда бошад. Маҷмуи $\{x_n | n \in N\}$ мувофиқи шарт аз боло маҳдуд аст. Пас $\sup\{x_n | n \in N\} = a \in \mathbb{R}$ мавҷуд аст. Адади $\varepsilon > 0$ -ро мегирем. Аз хосияти сарҳади дақиқи болои мебарояд:

1) $x_n < a + \varepsilon$ барои $n \in N$, 2) чунон адади n_ε ёфт мешавад, ки $x_n > a - \varepsilon$. Барои ихтиёри $n > n_\varepsilon$ нобаробарии $x_n \geq x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$ иҷро мешавад, чунон пайдарпай

камнашаваанда аст. Бинобар ин, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, ҳангоми $\forall n > n_\varepsilon$. Аз ин ҷо хулоса мебарояд, ки $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. ▲

СУҶОРИШ: 1. Барои маърифи пайдарпайи афзуннашаваанда теорема-ро исбот намоед; 2. Исбот кунед, ки агар пайдарпайи камнашаваанда (афзуннашаваанда) аз боло (поён) маҳдуд набояд, онгоҳ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$)

Ба сифати мисол пайдарпайи $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ -ро дида мебароем ва нишон медиҳем, ки вай наздиқнашаваанда аст. Бо формулаи бинуми Нютон кушода ҳисла мекунем:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1) \dots [n-(k-1)]}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \\ &+ \dots + \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right); \\ x_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \\ &\dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Азбаски $1 - m/n < 1 - m/(n+1)$ барои $m=1, 2, \dots, n-1$, пас аъзоҳои x_n аз аъзоҳои мувофиқи x_{n+1} хурд мебошанд. Ба ғайр аз ин, x_{n+1} нисбат ба x_n як аъзои мусбат зиёд дорад. Азбаски

$$\left(1 - \frac{m}{n}\right) < 1, \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ пас,}$$

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Ин нишон медиҳад, ки пайдарпайи x_n монотон афзуннашаваанда ва аз боло маҳдуд аст. Мувофиқи теорема онди ҳудуди пайдарпайҳои монотон хулоса ҳисла мекунем, ки $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Ин ҳудудро бо e ишорат мекунамд, яъне

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \text{ Адади } e \text{ иррационалӣ буда ба } e=2,71828182845904\dots \text{ ба-}$$

роҳбар аст. Логарифмҳоро бо асоси e натураля меноманд. Мо дар ин ҷо номуайивии « 1^∞ » -ро кушоем.

§11. БАЪЗЕ ХОСИЯТҲОИ МАЌМУЪҲОИ АДАДИ.

Як натиҷа ро аз теорема онди ҳудуди пайдарпаҳон монотон дида мебароем.

ЛЕММА «ОНДИ ПОРЧАҲОИ ДАР ДОХИЛИ ЯҚДИГАР ХОБИДА» (ПРИНЦИПИ КОШЬ).

Бигузор пайдарпаҳии беохирӣ порчаҳон дар дохили яқдигар хобида дода шуда бошанд: $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots (a_n < b_n)$. Агар пайдарпаҳии дарозини ин порчаҳо $(b_n - a_n)_{n=1}^\infty$ ба сифр наздик шаванд, онгоҳ ягона нуқтаи c ёфт мешавад, ки ба ҳамаи ин порчаҳо таалуқдор аст.

Ҳамчун далели геометрия ин лемма пештар (§3 6.7) ба сифати аксиома



қабул намуда будем. Дар таҳлили математикӣ он дар асоси натиҷаҳои гузашта исбот карда мешавад.

▲ Бигузор $m < n$ бошад, онгоҳ $([a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]) \Leftrightarrow (a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m) \Rightarrow (a_m \leq a_n) \wedge (b_m \geq b_n)$.

Бинобар ин муносибати $(a_m \leq b_n) \wedge (b_m \geq a_n)$ низ иҷрошаванда аст. Ҳамин тариқ пайдарпаҳии камнашавандан a_n аз боло бо адади b_m (m -иштиёри) ва пайдарпаҳии афзуншавандан b_m аз поён бо адади a_n (n -иштиёри) маҳдуд мебошанд. Мувофиқи теорема онди ҳудуди пайдарпаҳон монотон:

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c = \sup\{a_n | n \in N\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = d = \inf\{b_n | n \in N\}$ ва барои $\forall n \in N$, $a_n \leq c$, $b_n \geq d$. Азбасон $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = d - c = 0$, онгоҳ $d = c$. Ягонагии нуқтаи c -ро аз баръақс исбот мекунем.

Бигузор боз як нуқтаи дигар $c' \neq c$ мавҷуд бошад, ки ба ҳамаи порчаҳо таалуқдор бошад. Барои муайяни, $c' > c$ ҳисоб мекунем, онгоҳ барои $\forall n \in N$ нобаробарии $a_n \leq c < c' \leq b_n$ ҷой дорад. Аз ин ҷо $c' < c \leq b_n - a_n$. Дар ин нобаробарии ба ҳудуд гузашта ҳисоб мекунем: $c' - c \leq 0$. Аммо $c' - c > 0$ аст. Ин зиддият леммаро исбот мекунад. ▲

СУПОРИШ. Оё лемма "онди порчаҳои дар дохили якдигар хобида" дуруст аст, агар ба ҷои порчаҳо интервал (ниминтервал) — ҳо гирифта шавад. Мисолҳо оред.

Функсияи f — ро мегирем, ки дар ягон маҷмӯи I муайян буда қиматҳояшон ягон зермаҷмӯи маҷмӯи E бошад, яъне $f: \alpha \in I \rightarrow x_\alpha \in E$. Маҷмӯи $\{x_\alpha | \alpha \in I\}$ — онлаи зермаҷмӯиҳои маҷмӯи E , ки индексҳои он аз маҷмӯи I мебошанд, ном дорад.

ТАЪРИФИ 11.1. Онлаи $\{x_\alpha | \alpha \in I\}$ — ро пушандан маҷмӯи X меноманд, агар $X \subset \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ бошад. Зерпушандан пушанда гуфта пушандан маҷмӯи X — ро меноманд, ки аз зермаҷмӯиҳои пушанда ташкил ёфтааст.

ЛЕММАИ ГЕЙНЕ-БОРЕЕЛ-ЛЕБЕГ ОИДИ ПУШАНДАИ ОХИРНОК

Ҳаргуна пушандан порчаи $[a, b]$ бо маҷмӯи беозори интервалҳо мавҷдори охирноки интервалҳо дорад, ки $[a, b]$ — ро мепушонад, яъне зерпушандан охирноқ дорад.

▲ Баръакс шарт мегузорем, яъне ҷуяни пушандан порчаи $[a, b]$ бо маҷмӯи беохори интервалҳо вуҷуд дорад, ки аз онҳо зерпушандан охирноки ин порчаро ҷудо намудан мумкин нест. Ин пушандаро дида мебароем. Порчаи $[a, b]$ — ро ба ду қисм тақсим мекунем. Аққалан барои яке аз порчаҳои ҳосилшуда зерпушандан охирноқ вуҷуд надорад. Бо $[a_1, b_1]$ он аз порчаеро ишора мекунем, ки барои он зерпушандан охирноқ мавҷуд нест. Порчаи $[a_1, b_1]$ — ро ба ду ҳисаи баробар тақсим намуда бо $[a_2, b_2]$ он аз порчаеро ишорат мекунем, ки барои он зерпушандан охирноқ вуҷуд надорад. Ин амалиётро номаҳдуд давом медиҳем, онгоҳ пайдарпаии порчаҳои дар дохили якдигар хобидан

$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_{n-1}, b_{n-1}] \supset \dots$ — ро ҳосил мекунем, ки дарозии порчаи n — уми он ҳангоми $n \rightarrow \infty$ ба сифр майл мекунад, яъне $|b_n - a_n| = (b - a) / 2^n \rightarrow 0$. Мувофиқи созиш барои $\forall n \in \mathbb{N}$ зерпушандан охирноки порчаи $[a_n, b_n]$ вуҷуд надорад. Дар асоси лемма «онди порчаҳои дар дохили якдигар хобида» ҷуяни адади $c \in \mathbb{R}$ ёфт мешавад, ки барои

$\forall n \in \mathbb{N}, c \in [a_n, b_n]$ ва $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$. Азбаски $c \in [a, b]$, пас интервали $(\alpha; \beta)$ ёфт мешавад, ки ба пушандан тадриқ шавандан порчаи $[a, b]$ таалуқдор аст ва $c \in (\alpha; \beta)$. Азбаски ҳангоми $n \rightarrow \infty$, $a_n \rightarrow c$ ва $b_n \rightarrow c$, хулоса мебарояд, ки $(\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: [a_n, b_n] \subset (\alpha; \beta))$, яъне порчаи $[a_n, b_n]$ бо як интервали $(\alpha; \beta)$ пушида шуда аст. Мувофиқи созиш, порчаи $[a_n, b_n] \rightarrow \rho$ бо миқдори охиёнок интервалҳои пушандан тадриқшаванда пушидан мумкин аст. Зиддияти ҳосилшуда леммаро исбот мекунад. ♣

СУПОРИШ. Оё лемма барои интервали $(a; b)$ дуруст аст? Оё дар шарти лемма маҷмӯи интервалҳоро ба маҷмӯи порчаҳо иваз намудан мумкин аст? Мисолҳо оред.

ТАЪРИФИ 11.2. Нуқтаи $c \in E$ нуқтаи дохилии маҷмӯи E ном дорад, агар вай ба маҷмӯи E бо ягон атрофи $U(c)$ -и ҳамин нуқта таалуқдор бошад. Маҷмӯе, ки ҳаман нуқтаҳояш дохиланд, маҷмӯи кушод ном дорад. Интервал мисоли оддитарини маҷмӯи кушод мебошад. сн

Пушандан $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ маҷмӯи X кушод ном дорад, агар ҳаман X_α -ҳо маҷмӯи кушод бошанд. Маҷмӯи X компакт ном дорад, агар аз ҳар қадом пушандан X аққалан як зерпушандан охиёнок ҷудо намудан мумкин бошад. Аз теоремаи Гейне-Борелл-Лебег мебарояд, ки порчаи $[a, b]$ маҷмӯи компакт аст.

СУПОРИШ. Исбот кунед, ки $(a; b)$, $(a; b]$, $[a; b)$ маҷмӯёҳои компакт нестанд.

ТАЪРИФИ 11.3. Нуқтаи c нуқтаи ҳудудии маҷмӯи X ном дорад, агар дар ихтиёри атрофи он аққалан як нуқтаи аз нуқтаи c фарқшунандан ин маҷмӯъ мавҷуд бошад.

Мисол. $X = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Нуқтаи $c = 0$ — нуқтаи ҳудудии ин маҷмӯъ буда, $c = 0 \notin X$.

СУПОРИШ. 1) Исбот кунед, ки нуқтаҳои ҳудудии маҷмӯи $X = (a, b)$ ҳаман нуқтаҳои порчаи $[a, b]$ мебошанд. 2) Исбот кунед, ки агар c нуқтаи ҳудудии маҷмӯи X бошад, онгоҳ дар ихтиёри атрофи $U(c)$ маҷмӯи беохир нуқтаҳои гуногуни X мебошад. 3) Бигузор c — нуқтаи ҳудудии

маҷмӯи X бошад. Исбот кунед: пайдарпаии нуқтаҳои аз c фарқсунандан x_n ($x_n \in X$) ёфт мешавад, ки ҳудуди c —ро дорад.

ЛЕММА ОИДИ НУҚТАИ ҲУДУДӢ (ПРИНЦИПИ БОЛЦАНО-ВЕЕРШТРАСС).

Барои ҳар кадом маҷмӯи беохирӣ маҳдуди ададии X аққалан як нуқтаи ҳудудӣ вуҷуд дорад.

♣ Азбаски X — маҷмӯи маҳдуд, чунин ададҳои $a, b \in X$ ёфт мешаванд, ки $X \subset [a, b]$. Нишон медиҳем, ки аққалан як нуқтаи порчаи $[a, b]$ барои X нуқтаи ҳудудӣ аст. Баръакс фарз мекунем. Шарт мекунем, ки ягон нуқтаи порчаи $[a, b]$ барои маҷмӯи X нуқтаи ҳудудӣ нест. Онгоҳ барои ҳар кадом нуқтаи x порчаи $[a, b]$ атрофи $u(x)$ —ро нишон додан мумкин аст, ки $\bar{e}$ ягон нуқтаи маҷмӯи X —ро надорад $\bar{e}$ миқдори охиринок нуқтаҳоро дорад. Маҷмӯи интервалҳои $\{u(x) \mid a \leq x \leq b\}$ —ро дида мебароем. Айён аст, ки ҷай пушандан $[a, b]$ —ро ташкил медиҳад. Мувофиқи лемма оиди пушандан охиринок зерпушандан охиринок

$\{u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)\}$ порчаи $[a, b]$ ёфт мешавад, ки

$$X \subset [a, b] \subset \bigcup_{k=1}^n u(x_k) \Rightarrow \left(X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} u(x_k) \right)$$

Азбаски дар ҳар кадом интервали $u(x_k)$ на зиёда аз миқдори охиринок нуқтаҳои маҷмӯи X ҷойгир аст, пас яҷоявуни онҳо $\bigcup_{k=1}^{\infty} u(x_k)$ низ ҳамин хосиятро дорад. Бинобар ин, X — маҷмӯи охиринок ва ин зиддият дурустии леммаро нишон медиҳад. ♣

ТАЪРИФИ 11.4. Нуқтаи $c \in X$ нуқтаи изолятсияшудаи маҷмӯи X ном дорад, агар атрофи ин нуқта маҷмӯд бошад, ки ба ғайр аз нуқтаи c ягон нуқтаи ин маҷмӯро надошта бошад. Нуқтаи c нуқтаи сарҳади маҷмӯи X ном дорад, агар ихтиёри атрофи он нуқтаҳои ба X таалуқдор ва ба X таалуқдор набударо дошта бошад. Масалан, нуқтаи a ва b барои $[a, b]$ нуқтаҳои сарҳадӣ мебошанд. Нуқтаҳои сарҳадӣ метавонад ба X таалуқ дошта бошанд ва метавонанд таалуқдор набошанд.

Маҷмӯи сарбаст гуфта маҷмӯеро меноманд, ки ҳамаи нуқтаҳои худди-аширо дар худ дорад.

Бе исбот қайд менамоем, ки ҳаргуна маҷмӯи сарбастии маҳдуд маҷмӯи компакт аст. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки ҳаргуна маҷмӯи охиринок маҷмӯи компакт аст.

§12. ЗЕРПАЙДАРПАИҶО. КРИТЕРИЯИ КОШӢ.

Бигузор $f: N \rightarrow N$ -функсияи афзуншаванда бошад, яъне $f: k \in N \rightarrow n_k \in N$ ҳамин тавр ифтиконост, ки агар $k < k_1$ бошад, онгоҳ $n_k < n_{k_1}$ аст.

Пайдарпаи $y_k = x_{n_k} (k \in N)$ зерпайдарпаи пайдарпаи x_n ном дорад. Масалан, ададҳои содда, ки бо тартиби афзуншавӣ гирифта шудаанд, зерпайдарпаи пайдарпаи ададҳои натуралӣ мешавад.

ЛЕММАИ 1. Агар пайдарпаи x_n ба адади $a \in R$ наздик шавад, онгоҳ ҳаргуна зерпайдарпаи он n_k ба a наздик мешавад:

▲ $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \right) \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, |x_n - a| < \varepsilon)$. Адади k_0 —ро чунон калон мегирем, ки $n_{k_0} > n_0$ монад, онгоҳ барои $\forall k > k_0$ нобаробарии $n_k > n_{k_0} > n_0$ иҷро мешавад. Аз ин ҷо $|n_k - a| < \varepsilon$, яъне $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. ▲

СУҶОРИШ. 1) Исбот кунед, ки агар зерпайдарпаи ихтиёрии n_k пайдарпаи x_n ба адади $a \in R$ наздик шавад, онгоҳ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$; 2) Исбот кунед, ки леммаи 1 дар он мавриде ниса дуруст аст, ки пайдарпаи x_n дар R ба $+\infty$ ($-\infty$) наздикшаванда аст.

ЛЕММАИ 2. Аз ҳаргуна пайдарпаи маҳдуди x_n зерпайдарпаи дар R наздикшавандаро ҷудо намудан мумкин аст.

▲ Агар маҷмӯи $\{x_n | n \in N\}$ мавҷудии охиринокӣ ададҳои гуногунро дар худ дошта бошад, онгоҳ асосан яке аз онҳо (масалан b) дар пайдарпаи x_n беохир маротиба такрор меёбад. Азъохон пайдарпаи аз (b) фарқкунандаро партофта зерпайдарпаи ба b наздикшавандан $x_{n_k} = b (k \in N)$ —ро ҳосил мекунем. Бигузор $\{x_n | n \in N\}$ маҷмӯи беохирӣ ададҳои гуногунро дошта бошад, азбаски $\{x_n | n \in N\}$ маҳдуд аст, онгоҳ аз рӯи принципи Болтсано-Вейерштрасс нуқтаи ҳудуди ин маҷмӯъ $a \in R$ вуҷуд дорад. Бинобар ин

маҷмӯи $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cap u_{1/1}(a)$ маҷмӯи беохирӣ аъзоҳои гуногуни пайдарпаи x_n —ро дар худ дорад. Бигузӯр x_{n_1} —ягон аъзон пайдарпаи x_n , ки дар маҷмӯи $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cap u_1(a)$ меҳобад, бошад. Азбаски $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cap u_{1/2}(a)$ маҷмӯи беохирӣ ададҳои гуногуни пайдарпаиро дар худ дорад, онгоҳ чунин аъзон пайдарпаи $x_{n_2} \in \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cap u_{1/2}(a)$ —ро интихоб намудан мумкин аст, ки $x_{n_1} \neq x_{n_2}$, $n_2 > n_1$.

Айнан бо ҳамин сабаб, дар маҷмӯи $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cap u_{1/3}(a)$ аъзон пайдарпай x_{n_3} аз x_{n_1} ва x_{n_2} фарқунандаро ҳамин тавр ҷудо намудан мумкин аст, ки $n_3 > n_2 > n_1$ бошад. Ин амалиётро барои $\forall k \in \mathbb{N}$ гузаронида зерпайдарпаи x_{n_k} —ро ҳосил менамоем, ки аъзоҳои он нобаробарии $|x_{n_k} - a| < 1/k$ (мувофиқи созиш) —ро қаноат менамоянд. Айён аст, ки x_{n_k} ба a наздик мешавад. ♣

СУПОРИШ. Искот намоед, ки аз ҳаргуна пайдарпай зерпайдарпаи дар $\bar{R}$ наздикшавандаро, ҷудо намудан мумкин аст.

ТАЪРИФ. Пайдарпаи x_n фундаменталӣ ном дорад, агар барои $\forall \varepsilon > 0$ чунин адади n_ε мавҷуд бошад, ки барои $\forall m, n > n_\varepsilon$ нобаробарии $|x_n - x_m| < \varepsilon$, иҷро шавад. Пайдарпаиҳои фундаменталиро пайдарпаиҳои Кошӣ низ меноманд. Шартӣ зарурӣ ва кифояи (критерии Кошӣ) —и наздикшавии пайдарпаиро оварда искот менамоем.

КРИТЕРИЯИ КОШӢ

Пайдарпаи ададӣ дар R ҳамон вақт ва фақат ҳамон вақт наздикшаванда, агар вай фундаменталӣ бошад.

♣ **Зарурӣ.** Бигузӯр $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in R$ бошад. Адади $\varepsilon > 0$ —ро гирифта аз n -и адади $\varepsilon/2$ адади n_ε —ро ҳамин тавр меёбем, ки барои $\forall n > n_\varepsilon$ ва $\forall m > n_\varepsilon$ нобаробариҳои $(|x_n - a| < \varepsilon/2 \wedge |x_m - a| < \varepsilon/2)$ иҷро шаванд, онгоҳ барои $\forall n, m > n_\varepsilon$ ҳосил мекунем: $|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Кифояи. Бигузӯр x_n пайдарпаи фундаменталӣ бошад Искот мекунем, ки $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in R$. Нишон медиҳем, ки пайдарпаи x_n маҳдуд аст.

Ҳақиқатан, $\varepsilon = 1$ гирифта аз n -и он адади n_1 —ро меёбем, ки барои $\forall n, m > n_1$ нобаробарии $|x_n - x_m| < 1$ иҷро шавад. $m = n_1 + 1$ гузошта барои $\forall n > n_1$ ҳосил мекунем: $x_{n_1+1} - 1 < x_n < 1 + x_{n_1+1}$. Бинобар ин, барои $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\min\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}-1\} \leq x_n \leq \max\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}+1\}$. Яъне пайдаргани x_n маҳдуд аст. Мувофиқи леммаи 2 эрпайдаргани x_{nk} ба $a \in \mathbb{R}$ наздикшаванда вуҷуд дорад. Адади $\varepsilon > 0$ -ро гирифта аз ρ_n адади $\varepsilon/2$ ададҳои k_ε ва p_ε -ро ҳамин тавр меёбем, ки нобаробариҳои $|x_{nk}-a| < \varepsilon/2$, ба-
рон $\forall k > k_\varepsilon$ ва $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ барои $\forall n, m > p_\varepsilon$ иҷро шавад. Ба ин ном шудан мувофи аст, чунон эрпайдаргани x_{nk} ба a наздик шуда пайдаргани x_n фундаменталӣ мебошад. Бигзор $n > p_\varepsilon$, $p_k < \max\{p_\varepsilon, p_{\varepsilon/2}\}$ бошад, онгоҳ $|x_n - a| = |x_n - x_{nk} + x_{nk} - a| \leq |x_n - x_k| + |x_{nk} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, яъне

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists p_\varepsilon, \forall n > p_\varepsilon: |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \blacktriangle$$

Мисоли 1. Аз критерии Коши истифода бурда наздикшавини пайдар-
гаиро бо аъзои умумии $x_n = \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{\cos n}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$ нишон диҳед.

ҲАА. $n \geq m$ ҳисобида меёбем:

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \left(\frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\cos m}{m(m+1)} + \frac{\cos(m+1)}{(m+1)(m+2)} + \dots + \frac{\cos n}{n(n+1)} \right) - \left(\frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\cos m}{m(m+1)} \right) \right| = \\ &= \left| \frac{\cos(m+1)}{(m+1)(m+2)} + \dots + \frac{\cos n}{n(n+1)} \right| \leq \frac{|\cos(m+1)|}{(m+1)(m+2)} + \dots + \frac{|\cos n|}{n(n+1)} \leq \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{m+1}; \end{aligned}$$

барои $\varepsilon > 0$, $1/(m+1) \leq \varepsilon \Leftrightarrow m+1 \geq 1/\varepsilon \Leftrightarrow m \geq 1/\varepsilon - 1$. Ба сифати $p_\varepsilon = 1/\varepsilon - 1$ қабул мекунем:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_\varepsilon = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq p_\varepsilon, \quad n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \frac{\cos(m+1)}{(m+1)(m+2)} + \dots + \frac{\cos n}{n(n+1)} \right| \leq \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{m+1} \leq \\ &\leq \frac{1}{p_\varepsilon + 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + 1} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ҳамин тариқ, пайдаргани додашуда дар $\mathbb{R}$ наздикшаванда будааст.

Мисоли 2. Наздиковшаванда будани пайдарпани $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}$;

-ро исбот намоед.

ҲАЛ: Аз критерии Кошӣ истифода мебарем.

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\sin m}{2^m} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon. \quad \frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > -\log_2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Агар ба сифати n_ε адади $-\log_2 \varepsilon$ -ро гизем, онгоҳ, барои $\forall n, m > n_\varepsilon$ нобаробарии $|x_n - x_m| < \varepsilon$ ҷой дорад. Мувофиқи критерии Кошӣ пайдарпани додашуда дар $\mathbb{R}$ ҳудуд дорад. Аммо критерии Кошӣ ба қиямати адади ин ҳудуд ҷавоб дода наметавонад.

Мисоли 3. Аз критерии Кошӣ истифода бурда дуршаванда будани пайдарпани $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, -ро исбот намоед.

ҲАЛ: Искотро аз баръаксӣ мегузаронем. Бигузор пайдарпани x_n наздиковшаванда бошад, онгоҳ мувофиқи критерии Кошӣ барои $\varepsilon = 1/4 > 0$ чуни $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, ки барои $\forall m \geq n_\varepsilon$ ва $n = 2m$, $\Rightarrow |x_{2m} - x_m| \leq 1/4$. Аз тарафи дигар

$$\begin{aligned} |x_{2m} - x_m| &= \left| \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} \right| \geq \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} \geq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \dots + \frac{1}{2m} = \\ &= m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

зиддияти ҳосил шуда нисшон медиҳад, ки пайдарпани додашуда дуршаванда аст.

§13. ҲУДУДИ БОЛОЙ (ПОЁНИ)-И ПАЙДАРПАЙ

Бигузор x_n пайдарпани истиёри буда x_{nk} ягон зерпайдарпани он бошад. Агар x_{nk} дар $\bar{R}$ наздиковшаванда бошад, онгоҳ ҳудуди онро ҳудуди хусусии пайдарпани x_n меноманд. Ақсун маҷмӯи ҳаман зерпайдарпаҳои x_{nk} пайдарпани x_n -ро, ки дар $\bar{R}$ наздиковшавандаанд дида мебароем. Маҷмӯи ҳаман ҳудудҳои хусусиро бо A ишорат мекунем. Нисшон медиҳем, ки ҳаргуна пайдарпай ақсалан як ҳудуди хусусӣ (охиринок ё беохир) дорад. Ҳақиқатан,

агар пайдарпайи x_n аз боло номаҳдуд бошад, онгоҳ аз вай зерпайдарпайи ба $+\infty$ наздикшавандаро ҷудо намудан мумкин аст ва $+\infty$ ҳудуди хусусии он мешавад. Агар пайдарпай аз поён номаҳдуд бошад, онгоҳ ҳудуди хусусии он $-\infty$ мешавад. Пайдарпайи маҳдуд аққалан як ҳудуди хусусии охирик дорад (леммаи 2). Аз ин ҷо хулоса мебарояд, ки маҷмӯи $A \neq \emptyset$. Бинобар ин, $\exists \sup A \in \bar{R}$, $\exists \inf A \in \bar{R}$.

ТАЪРИФ. Ҳудуди болоӣ (поёни)-и пайдарпайи x_n гуфта

$$\sup A = \overline{\lim} x_n, \quad \left(\inf A = \underline{\lim} x_n \right) \text{ -ро меноманд.}$$

ЛЕММА. Барои истиёри пайдарпай ягона ҳудуди болоӣ ва ягона ҳудуди поёни мавҷуд буда онҳо бо нобаробариҳои зерин алоқаманд мебошанд. $-\infty \leq \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n \leq +\infty$.

Исбот аз ҳоля набудани маҷмӯи ҳудудҳои хусусӣ ($A \neq \emptyset$) ва ҳосиятҳои ҳудуди болоӣ ва поёни мебарояд.

Тасдиқоти зерин ҷой дорад:

ТЕОРЕМА. Пайдарпайи x_n дар $\bar{R}$ наздикшавандан ҳамон вақт ва фақат ҳамон вақт, агар $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$ бошад.

▲ Бигузор $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$ бошад. нишон медиҳем, ки $\exists \lim x_n = a \in \bar{R}$ аст.

Баръакс, фарз менамоем. Агар x_n дар $\bar{R}$ наздикшаванда набошад, онгоҳ аққалан ду зерпайдарпайҳои x'_{n_k} ва x''_{n_k} мавҷуд аст, ки ба ду ҳудудҳои гуногун наздик мешаванд: $\lim x'_{n_k} \neq \lim x''_{n_k}$. Бигузор $\lim x'_{n_k} < \lim x''_{n_k}$ бошад, онгоҳ $\underline{\lim} x_n < \lim x'_{n_k} < \lim x''_{n_k} \leq \overline{\lim} x_n$, ки ин ба шарти теорема зид аст. Шарти заруриро мустақилона исбот намоед.

Мисол. Пайдарпайи $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ дуршаванда аст, чунки

$$\overline{\lim} x_n = 1, \quad \underline{\lim} x_n = -1.$$

Машғо барои боби III

- 1) Оё адади n ёт мешавад, ки барои он $\sqrt[n]{n} < 1.001$, $\sqrt[n]{n^2 + n} - n < 0.5$ бошад.
- 2) Муқарар намоед, ки оё аъзоҳои калонтарин ва хурдтарин пайдарпайҳои $x_n = \frac{n^2}{3^n}$, $x_n = n + 3 \sin \frac{\pi n}{2}$ вуҷуд дорад ё не?
- 3) Оё пайдарпайи маҳдуди адади калонтарин ва хурдтарин надоста вуҷуд дорад ё не?
- 4) Иббот намоед, ки ҳаман аъзоҳои пайдарпайи $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ аз ягон рақам сар карда дар порчаи $[2, 7; 2, 8]$ меҳобанд.
- 5) Чунин адади p_ϵ -ро ёбед, ки $\forall n > p_\epsilon$ нобаробарии $\frac{2}{n!} < 0.01$; $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < 0.1$ иҷро шавад.
- 6) Навишти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq a$ чӣ маъно дорад.
- 7) Бузургии касри $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}} = a$ -ро ёбед.
- 8) Иббот кунед, ки $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a\right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|\right)$.
- 9) Иббот кунед, ки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{a^n} = 0$ ($a > 1$).
- 10) Нишон диҳед, ки $\lim \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} n}{n} \right) = \frac{1}{2}$.
- 11) Бо забони « ϵ - n » муқаррар намоед, ки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Худуди пайдарпайи зеринро ёбед:

$$12) \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+2}}}, \dots$$

12) Исбот намоед, ки пайдарпайи монотон наздиқшаванда аст, агар он ғайрипайдарпайи он наздиқшаванда бошад.

13) Оё суммаи пайдарпайҳои монотон ҳама вақт монотон мебошанд?

14) Бигузор $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = a$ бошад. Шарти зарурӣ ва кифояти наздиқшавии пайдарпайи x_n —ро ёбед.

15) Бо забони «Е-и» тасдиқоти «пайдарпайи б.к. нест» —ро диҳед.

16) Ҳисоб кунед $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

17) Исбот намоед, ки пайдарпайи $(\sin n)_{n=1}^{\infty}$ дуршаванда аст.

18) Худудҳоро ёбед:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}}; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

19) Аз критерияи Коши истифода бурда нишон диҳед, ки пайдарпайи $x_n = \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n}{n(n+1)}$ дар $\mathbb{R}$ наздиқшаванда аст.

20) Ёбед: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, агар $x_n = -n(2+(-1)^n)$;

$$x_n = 1 + \frac{n}{1+n} \cos \frac{\pi}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots$$

21) Исбот кунед, ки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

22) Мегӯянд, ки пайдарпайи x_n тағйирёбии маҳдудро дорад, агар $\exists \epsilon > 0$, ки худро $|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$ ($n=2, 3, 4, \dots$) бошад. Исбот намоед, ки пайдарпай бо тағйирёбии маҳдуд наздиқшаванда аст. Таърифи баръаксш ҷой надорад. Мисолҳо оред.

23) Исбот намоед, ки агар α_n —п.б.х бошад, онгоҳ $1/\alpha_n$ —п.б.к аст.

БОБИ IV. ҲУДУДИ ФУНКСИЯҲО

Дар ин боб яке аз мафҳумҳои муҳимтарини таҳлили математикӣ-таърифи ҳудуди функция дар нуқта ва хосиятҳои аз ин мафҳум барои функция ҳосилшуда оварда мешавад.

§14. ТАЪРИФҲОИ ГУНОГУНИ ҲУДУДИ ФУНКСИЯ
ВА БАРОБАРҚУВВАГИИ ОНҲО.

Атрофи сурӯшудани $\dot{u}(a)$ нуқтан $a \in \mathbb{R}$ гуфта ҳар гуна атрофи $u(a)$ —ро меноманд, ки аз он ҳуди нуқта партофта шудааст. Атрофҳои сурӯшудани нуқтан a дорон ду хосиятҳои муҳим мебошанд. $\alpha)$ $\dot{u}(a) \neq \emptyset$ (атроф маҷмӯи ғайрихоля аст); $\beta) \forall \dot{u}_1(a), \forall \dot{u}_2(a), \exists \dot{u}(a) : \dot{u}(a) \subset \dot{u}_1(a) \cap \dot{u}_2(a)$ (буриши ду атрофҳои ихтиёри атрофи сурӯшударо дорад). Дар ин боб шарт мекунем, ки функцияҳои тадқиқшаванда дар ягон атрофи $\omega(a)$ нуқтан a , мумкин аст ба ғайр аз нуқтан a , муайян бошанд.

ТАЪРИФИ 14.1. (Таърифи ҳудуди функция бо забони атрофҳо). Адади A ҳудуди функцияи f ҳангоми ба a майл намудани $x(x \rightarrow a)$ ном дорад, агар барои ҳар як атрофи $v(A)$ нуқтан A атрофи сурӯшудани $u(a)$ нуқтан a мавҷуд аст, ки образи он дар $v(A)$ меҳобад, яъне

$$(\forall v(A), \exists \dot{u}(a) : f(\dot{u}(a)) \subset v(A)).$$

* К.Ф.Гаусс (1777-1855) — математикни бузургӣ олмонӣ

ТАЪРИФИ 14.2. Агар $\forall \varepsilon > 0$ чунин атрофи суроҳшудаи $u_+(a)$ нуқтаи a мавҷуд бошад, ки $\forall x$ аз $u_+(a)$ нобаробарии $|f(x) - A| < \varepsilon$ иҷрошаванда бошад, онгоҳ адади A —ро ҳудуди функсияи f ҳангоми $x \rightarrow a$ меноманд.

ТАЪРИФИ 14.3. (Таърифи ҳудуди функсия бо забони « ε - δ »). Адади A ҳудуди функсияи f ҳангоми $x \rightarrow a$ ном дорад, агар $\forall \varepsilon > 0$ чунин адади $\delta > 0$ мавҷуд бошад, ки $\forall x$, ки шарти $0 < |x - a| < \delta$ —ро қаноат менамоянд, нобаробарии $|f(x) - A| < \varepsilon$ иҷрошаванда аст.

ТАЪРИФИ 14.4. (Таърифи ҳудуди функсия бо забони пайдарпаиҳо). Агар барои ихтиёри пайдарпаии ба a наздикшавандан $x_n (x_n \in \omega(a))$, ҳангоми $\forall n \in \mathbb{N}$ пайдарпаии қиматҳои мувофиқи функсияҳо $(f(x))_{n=1}^{\infty}$ ба A наздик шавад, онгоҳ A ҳудуди функсияи f ҳангоми $x \rightarrow a$ ном дорад.

Далели он, ки адади A ҳудуди функсияи f ҳангоми $x \rightarrow a$ ном дорад, чунин навишта мешавад: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $f(x) \rightarrow A$, ҳангоми $x \rightarrow a$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$.

Баробарқуввагии се таърифи аввалин аз он ҷо ҳосил мешавад, ки дар ихтиёри атрофи суроҳшудаи нуқта, атрофи суроҳшудаи симметрия ва баръакс ҷойгир мебошад. Исбот мекунем, ки таърифи 14.4 бо таърифҳои дигар баробарқувва аст. Барои ин, нишон медиҳем, ки агар A ҳудуди функсияи f ҳангоми $x \rightarrow a$ мувофиқи таърифи 14.3 бошад, онгоҳ вай ҳудуди ин функсия дар маънои таърифи 14.4 ва баръакс мебошад. Бигузор барои $\forall \varepsilon > 0$ чунин адади $\delta > 0$ мавҷуд бошад, ки $\forall x$ -и шарти $0 < |x - a| < \delta$ —ро қаноаткунанда нобаробарии $|f(x) - A| < \varepsilon$ иҷро шавад. Пайдарпаии ба a наздикшавандаи ихтиёрии $x_n (x_n \in \omega(a), \forall n \in \mathbb{N})$ —ро гирифта нишон медиҳем, ки пайдарпаии қиматҳои функсияҳо $(f(x))_{n=1}^{\infty}$ ба A наздик мешавад. Рақами $n_0 \in \mathbb{N}$ —ро

ҳамин тавр мегирем, ки $\forall n > n_\epsilon$ шарт $|x_n - a| < \delta$ иҷро шавад, онгоҳ барои $\forall n > n_\epsilon$ нобаробарии $|f(x_n) - A| < \epsilon$ иҷрошаванда аст, яъне пайдарпайи қиматҳои функция ба A наздик мешавад. Баръаксаш низ дуруст аст.

▲ Исроботро аз баръакс мегузаронем:

Бигузор A худуди функцияи дар маънои таърифи 14.3 набояд. Ин чунин маъно дорад: чунин адади $\epsilon_0 > 0$ ёфт мешавад, ки барои $\forall \delta > 0$ нуқтаи x_δ шарт $0 < |x_\delta - a| < \delta$ -ро қаноаткунанда мавҷуд аст, ки барои онҳо нобаробарии $|f(x_\delta) - A| \geq \epsilon_0$ иҷрошаванда аст.

Пайдарпайи $\delta_n = 1/n$ -ро мегирем, онгоҳ барои ҳар кадом δ_n чунин нуқтаи x_{δ_n} мавҷуд, ки барои онҳо $|f(x_{\delta_n}) - A| \geq \epsilon_0$ аст. Азбаски

$$0 < |x_{\delta_n} - a| < \delta_n = 1/n;$$

пас мувофиқи хосияти пайдарпайи фишурда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\delta_n} = a$. Аммо пайдарпайи $(f(x_{\delta_n}))_{n=1}^{\infty}$ ба адади A наздик намешавад. Ин зиддият тасдиқотро исбот мекунад. ▲

МИСОЛҲО: 1) Исробот кунад, ки $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ аст.

ҲАЛ: Функцияи $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ дар нуқтаи $x=0$ муайян нест. Адади ихтиёрии $\epsilon > 0$ -ро мегирем. Аз рӯи ϵ -и додашуда чунин адади $\delta > 0$ -ро меёбем, ки ҳангоми $|x - 0| < \delta$ нобаробарии $|f(x) - 0| = |x \sin(1/x)| < \epsilon$ иҷро шавад. Аз ин нобаробарӣ меёбем: $|x \sin(1/x)| = |x| \cdot |\sin(1/x)| \leq |x| < \epsilon$ ($|\sin(1/x)| \leq 1, \forall x \neq 0$). Агар $\delta \leq \epsilon$ интихоб кунем, онгоҳ нобаробарии $|x \sin(1/x)| < \epsilon$ иҷро мешавад. Бинобар ин мувофиқи таърифи 14.3 ҳулоса мебарояд, ки $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ аст.

2. Исробот кунад, ки $\lim_{x \rightarrow x_0} (kx + b) = kx_0 + b$, ($k = \text{const} \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$) $x \rightarrow x_0$.

ҲАЛ: Адади $\epsilon > 0$ -ро гирифта аз рӯи он чунин адади $\delta > 0$ -ро меёбем, ки ҳангоми $|x - x_0| < \delta$ нобаробарии $|f(x) - (kx_0 + b)| < \epsilon$ иҷро шавад. Нобаробарин охириро табдил дода меёбем:

$$|f(x) - (kx_0 + b)| = |kx + b - kx_0 - b| = |k||x - x_0| < \varepsilon.$$

Агар $\delta \leq \varepsilon/|k|$ гузорем, онгоҳ нобаробарии $|f(x) - (kx_0 + b)| < \varepsilon$ иҷро мешавад. Ин чунин маъно дорад, ки $\lim_{x \rightarrow x_0} (kx + b) = kx_0 + b$ аст.

3. Исробот кунед, ки $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ аст.

ҲАЛ: Аз рӯи адади $\varepsilon > 0$ чунин адади δ —ро меёбем, ки ҳангоми $0 < |x| < \delta$ нобаробарии $|\cos x - 1| < \varepsilon$ иҷро шавад. Аз нобаробарии охириин меёбем:

$$|\cos x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \cos x < \varepsilon \Leftrightarrow 2 \sin^2 x / 2 < \varepsilon \Leftrightarrow \sin^2 x / 2 < \varepsilon / 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \sin \frac{x}{2} \right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \Leftrightarrow \sin \frac{|x|}{2} < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \Leftrightarrow |x| < 2 \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}; \left(|x| < \frac{\pi}{2} \right)$$

ҳисоб менамоем. Агар $\delta = 2 \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ гузорем, онгоҳ ҳангоми $0 < |x| < \delta$ нобаробарии $|\cos x - 1| < \varepsilon$ ҳосил мешавад.

4. Исробот кунед, ки ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияи $\sin \frac{1}{x}$ ҳудуд надорад.

ҲАЛ: Аз таърифи 14.4 ҳудуди функсия «бо забони пайдарпаиҳо» истифода мебарем. Ду пайдарпаиҳои $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $x_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ -ро мегирем, ки ба сифр майл мекунам.

Пайдарпаи қиматҳои мувофиқи функсияҳо $\sin \frac{1}{x_n} = 0$, $\sin \frac{1}{x_n} = 1$ мувофиқан ба 0 ва 1 наздик мешаванд. Аз ин ҷо хулоса мебарояд, ки функсияи дода шуда, ҳангоми $x \rightarrow a$ ҳудуд надорад.

5. Исробот кунед, ки $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = 4$ аст.

ҲАЛ: Атрофи $v(4) = (4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon)$ —ро гирифта чунин атрофи $u(2)$ —ро меёбем, ки образи он дар инъикоси $\frac{x^2 - 2}{x - 2}$ дар $v(4)$ ҳобад.

Нобаробарии $\left| \frac{x^2 - 2}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$ -ро дида мебароем. Он ба нобаробарии $|x - 2| < \varepsilon$ ($x \in u(2)$) баробаркувва аст. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки ба сифати $u(2)$ кифоя аст, ки маҷмӯи нуқтаҳои $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) \setminus \{2\}$ -ро гирем. Аз таърифи 14.1 дурустии тасдиқот ҳосил мешавад. Қайд менамоем, ки функсияи додашуда ҳангоми $x = 2$ муайян нест.

СУПОРИШ: Шарҳи геометрии худуди функсияро дар нуқта диҳед.

§15. ХОСИЯТҲОИ УМУМИИ ХУДУДҲО.

1⁰. Агар дар ягон атрофи $\dot{u}(a)$ нуқтаи a функсияи $f(x)=A \in \mathbb{R}$ бошад, онгоҳ худуди он ҳангоми $x \rightarrow a$ мавҷуд ва ба A баробар аст.

▲ Барои ихтиёри атрофи $v(A)$ нуқтаи A , $f[u(a)] = \{A\} \subset v(A)$. Мувофиқи таърифи 14.1 ҳосил мекунем: $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ▲

2⁰. Агар функсияи f ҳангоми $x \rightarrow a$ ҳудуд дошта бошад, онгоҳ ин ҳудуд ягона аст.

▲ Баръакс фарз мекунем. Бигузор $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A_1$ ва $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A_2$, $A_1 \neq A_2$. Ду атрофҳои ҳамдигарро набурандаи $v(A_1)$, $v(A_2)$ —ро мегирем. Мувофиқи таърифи 14.1 чунин атрофҳои $\dot{u}_1(a)$ ва $\dot{u}_2(a)$ вуҷуд доранд, ки $f[\dot{u}_1(a)] \subset v(A_1)$, $f[\dot{u}_2(a)] \subset v(A_2)$. Атрофи сурохшудаи $\dot{u}(a) \subset \dot{u}_1(a) \cap \dot{u}_2(a)$ —ро мегирем, онгоҳ,

$\emptyset \neq f[\dot{u}_1(a)] \subset v(A_1) \cap v(A_2) = \emptyset$. Ин муқолифат тасдиқотро исбот менамояд. ▲

Функсияи $f: x \rightarrow \mathbb{R}$ дар маҷмӯи X аз боло (аз поён) маҳдуд ном дорад, агар маҷмӯи қиматҳои он $-\{f(x) \mid x \in X\}$ аз боло (поён) маҳдуд бошад. Функсияи f дар маҷмӯи X маҳдуд ном дорад, агар вай дар ин маҷмӯъ аз боло ва аз поён маҳдуд бошад. Маҳдуд будани функсияи f дар маҷмӯи X ба мавҷуд будани ҳамаин тағри адади $c > 0$ баробарҷувва мебошад, ки нобаробарии $|f(x)| \leq c$ барои ихтиёри $x \in X$ иҷрошаванда аст. Функсияи f ҳангоми $x \rightarrow a$ дар марра маҳдуд ном дорад, агар атрофи $\dot{u}(a)$ нуқтаи a мавҷуд бошад, ки f дар он маҳдуд бошад.

Мафҳуми функсияи маҳдуд ва дар марра маҳдуд мафҳумҳои гуногунанд. Мафҳуми функсияи маҳдуд вазъияти функсияро дар ҳамаи маҷмӯи дар он муайян буда тавсиф дода, мафҳуми функсияи дар марра маҳдуд бошад вазъияти функсияро танҳо дар атрофи ягон нуқта муайян месозад. Масалан, функсияи $y=x^{-1}$ дар фосилаи $(0, 1]$ маҳдуд набуда, ҳангоми $x \rightarrow a \in [0, 1]$ дар марра маҳдуд аст.

3⁰. Агар ҳудуди функсияи f ҳангоми $x \rightarrow a$ мавҷуд бошад, онгоҳ ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияи f дар марра маҳдуд аст.

▲ Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ бошад, онгоҳ барои $\varepsilon = 1$ атрофи сурохишдаи $u(a)$ нуқтаи a вуҷуд дорад, ки нобаробарии зерин иҷрошаванда аст:

$$|f(x) - A| < 1 \Leftrightarrow -1 < f(x) - A < 1 \Leftrightarrow A - 1 < f(x) < A + 1 \quad \blacktriangle$$

СУПОРИШ: Мисоле оред, ки тасдиқоти баръакси 3⁰, умуман, на ҳама вақт ҷой дорад.

2. Гузариши ҳудуд ба нобаробариҳо.

4⁰. Агар ҳудуди функсияи f ҳангоми $x \rightarrow a$ ба A баробар буда $A < B$ бошад, онгоҳ атрофи $u(a)$ нуқтаи a вуҷуд дорад, ки $f(x) < B$.

▲ Мувофиқи шарт: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Адади $\varepsilon = (B - A) > 0$ —ро гирифта атрофи $u(a)$ нуқтаи a —ро ҳамин тавр меёбем, ки $\forall x \in u(a)$ нобаробарии $|f(x) - A| < \varepsilon$ иҷро шавад. Аз ин ҷо $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon \Rightarrow f(x) < A + \varepsilon = B$.

Айнан исбот карда мешавад, ки агар $A > B$ бошад, онгоҳ дар ягон атрофи $u(a)$ нуқтаи a нобаробарии $f(x) > B$ иҷро мешавад. ▲

СУПОРИШ: Тасдиқоти баръакси 4⁰ —ро оред: Оё вай ҳаққонӣ аст ё не?

5⁰. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ буда дар ягон атрофи суроҳшудаи $\dot{u}(a)$ нуқтаи a нобаробарии $f(x) \leq B$ ҷой дошта бошад, онгоҳ $A \leq B$ аст.

♣ Искотро аз методи баръакс мегузаронем. Агар $A > B$ бошад, онгоҳ мувофиқи хосияти зичиги маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ, адади $c \in \mathbb{R}$ ёфт мешавад, ки $A > c > B$ аст. Аз ин ҷо $(\exists \dot{u}_1(a), \forall x \in \dot{u}_1(a) : f(x) > c)$. Бинобарин, $\forall x \in \dot{u}(a) \cap \dot{u}_1(a)$ нобаробарии $f(x) > c > B$ иҷро мешавад. Зиддияти ҳосил шуда дурустии тасдиқотро нишон медиҳад. ♣

СУПОРИШ: а) Искот намоед, ки агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ буда дар ягон атрофи $\dot{u}(a)$ нуқтаи a , $f(x) \geq B$ бошад, онгоҳ $A \geq B$ аст. б) тасдиқоти баръакс хосияти 5⁰ —ро дода дурустии онро муқаррар кунед.

ЭЗОҲ. Аз иҷро шудани нобаробарии қатъии $f(x) < B$ ($\bar{f}(x) > B$) дар ягон атрофи $\dot{u}(a)$ нуқтаи a , ҳулосаи $f(A) < B$ ($\bar{f}(A) > B$) баровардан хато аст. Масалан $x^4 > 0$ агар $x \neq 0$ бошад. Аммо $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$ аст.

6⁰. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$ буда дар ягон атрофи $\dot{v}(a)$ нуқтаи a нобаробарии $f(x) \leq g(x) \leq \varphi(x)$ иҷро шавад, онгоҳ ҳангоми $x \rightarrow a$ худуди функсияи $g(x)$ низ мавҷуд буда ба A баробар аст.

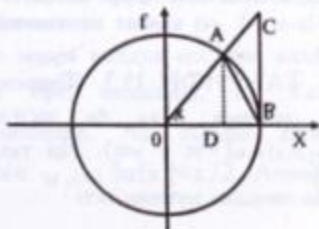
♣ Аз рӯи $\varepsilon > 0$ атрофҳои $\dot{u}_1(a)$ ва $\dot{u}_2(a)$ —ро ҳамин тавр меёбем, ки барои $\forall x \in \dot{u}_1(a)$ ва $\forall x \in \dot{u}_2(a)$ мувофиқан нобаробариҳои $|f(x) - A| < \varepsilon$, $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$ иҷро шавад. Атрофи $\dot{u}(a) \subset \dot{u}_1(a) \cap \dot{u}_2(a) \cap \dot{v}(a)$ —ро мегирем, онгоҳ, $\forall x \in \dot{u}(a)$ нобаробарии

$$A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq \varphi(x) < A + \varepsilon \Rightarrow$$

$$A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon \Leftrightarrow |g(x) - A| < \varepsilon$$

иҷро мешавад. Мувофиқи таърифи худуди функсия ҳулоса мебарояд, ки

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A. \clubsuit$$



Расми 59

Мисол. Искот кунед, ки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ аст. Доираи воҳидии марказаш дар ибтидои координатро гирифта $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ҳисоб мекунем. Аз нақша маълум аст, ки $S_{\triangle OAB} < S_{\text{қулла}} < S_{\triangle OAC}$ (расми 59).

Аз ин ҷо

$\left(\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot OA^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot OB^2 \cdot \tan x\right) \Leftrightarrow \left(1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}\right) \Leftrightarrow 1 < \frac{\sin x}{x} < \cos x$. Дар ин ҷо x — ро ба $-x$ иваз намоем боз нобаробарии $1 < \frac{\sin x}{x} < \cos x$ ҳосил мешавад. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки барои ихтиёри $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ нобаробарии $1 < \frac{\sin x}{x} < \cos x$ иҷрошаванда аст. Азбаски $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ пас мувофиқи ҳосияти 6^0 ҳулоса мебарорем, ки $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

3. Функцияҳои беохир хурд (б.х) ва беохир калон (б.к).

ТАЪРИФИ 15.1. Функцияи $\alpha(x)$ б.х ном дорад, агар ҳудуди он, ҳангоми $x \rightarrow a$ мавҷуд буда ба сифр баробар бошад, яъне $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$. Масалан, функцияҳои $x \cdot \sin \frac{1}{x}$ ҳангоми $x \rightarrow 0$, $(x-1)^3$, $(x-1)^2 \cdot \sin \frac{1}{x-1}$ ҳангоми $x \rightarrow 1$ б.х мебошанд. Ҳангоми $x \rightarrow \pm\infty$, $x \rightarrow a+0$, $x \rightarrow a-0$ таърифи функцияи б.х айнан муайян карда мешавад. Азбаски ҳудуди функцияи б.х ба сифр баробар аст, пас $|\alpha(x) - A| = |\alpha(x) - 0| = |\alpha(x)|$ буда бо забони « ε - δ » таърифи функцияи б.х чунин аст.

ТАЪРИФИ 15.2. Функцияи $\alpha(x)$ дар нуқтаи $x=a$ б.х ном дорад, агар $\forall \varepsilon > 0$ чунин адади $\delta > 0$ мавҷуд бошад, ки $\forall x$ ки шарти $0 < |x-a| < \delta$ —ро қаноат менамоянд, нобаробарии $|\alpha(x)| < \varepsilon$ иҷрошаванда аст.

ТАЪРИФИ 15.3. Функцияи $\beta(x)$ б.к ном дорад, агар ҳудуди он ҳангоми $x \rightarrow a$ ба $\infty (+\infty$ ё $-\infty)$ баробар бошад, яъне $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \infty (+\infty$ ё $-\infty)$. Ин таърифро бо забони атрофҳо бо тарзи зайл овардан мумкин аст:

Мегуянд, ки $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \infty (+\infty \text{ ё } -\infty)$, агар $\forall E > 0$ атрофи $u_1(a)$ нуқтаи a мавҷуд аст, ки нобаробарии $|\beta(x)| > E$ ($\beta(x) > E$ ё $\beta(x) < -E$) иҷро мешавад.

Мисол, функцияҳои $\frac{1}{x}$ ҳангоми $x \rightarrow 0$,

$$\frac{k}{x-3} (k \neq 0), \quad \frac{k}{(x-3)^5}, \quad \frac{1}{(x-3)^2} \sin(k-3) \text{ ҳангоми } x \rightarrow 3 \text{ функцияҳои б.к}$$

мебошанд. Қайд менамоем, ки ҳангоми ба нуқтаҳои гуногун майл намудани x як функция б.х ва б.к шуда метавонад. Масалан, функцияи $\frac{x-2}{x+3}$ ҳангоми $x \rightarrow 2$ б.х буда ҳангоми $x \rightarrow -3$ б.к мебошад.

СУПОРИШ: Таърифҳои функцияҳои б.х ва б.к — ро 1) «бо забони пайдарпаиҳо»; 2) Ҳангоми $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow a+0$, $x \rightarrow a-0$, дода мисолҳо оред.

7⁰. Суммаи ду функцияҳои б.х функцияи б.х аст.

▲ Бигузор $\alpha(x)$, $\beta(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ б.х бошанд. Аз таърифи худуди функция бармеояд: $\forall \varepsilon > 0$ атрофҳои $u_1(a)$ ва $u_2(a)$ вуҷуд доранд, ки $\forall x \in u_1(a)$, $\forall x \in u_2(a)$ мувофиқан нобаробариҳои $|\alpha(x)| < \varepsilon/2$ ва $|\beta(x)| < \varepsilon/2$ иҷро мешаванд. Бинобар ин, $\forall x \in u_1(a) \subset u_1(a) \cap u_2(a)$ ҳосил мекунем: $|\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, яъне $\lim_{x \rightarrow a} [\alpha(x) + \beta(x)] = 0$. ▲

СУПОРИШ. Тасдиқоти баръаксини **7⁰**, умуман ҷой надорад. Мисолҳо оред.

8⁰. Ҳосили зарби функцияи б.х $\alpha(x)$ ба функцияи дар марра маҳдуди $\beta(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ функцияи б.х аст.

▲ Азбаски $\beta(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ дар марра маҳдуд аст, пас адади $c > 0$ ва атрофи $u_1(a)$ нуқтаи a ёфт, мешаванд, ки $\forall x \in u_1(a)$ нобаробарии $|\beta(x)| < c$ иҷро мешавад. Аз тарафи дигар $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ аст, пас $\forall \varepsilon > 0$, $\exists u_2(a)$, $\forall x \in u_2(a) : |\alpha(x)| < \varepsilon/2$. Атрофи

$\dot{u}(a)$ —ро ҳамин тавр мегирем, ки $\dot{u}(a) \subset \dot{u}_1(a) \cap \dot{u}_2(a)$ бошад, онгоҳ $\forall x \in \dot{u}(a)$

$$|\alpha(x) \cdot \beta(x)| \leq |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| < c \cdot \varepsilon / c = \varepsilon. \blacktriangle$$

НАТИҶА. Ҳосили зарби ду функсияҳои б.х ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияи б.х аст.

9^0 . Агар $\beta(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияи б.к бошад, онгоҳ функсияи $1/\beta(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияи б.х аст.

$\blacktriangle$ Азбаски $\beta(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияи б.к аст, пас барои ихтиёри адади $E = 1/\varepsilon > 0$ атрофи $\dot{u}(a)$ нуқтани a ёфт мешаванд, ки $\forall x \in \dot{u}(a)$ нобаробарин $|\beta(x)| > E \Leftrightarrow |1/\beta(x)| < 1/E = \varepsilon$ иҷрошаванда аст. Аз ин ҷо мебарояд, ки $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\beta(x)} = 0. \blacktriangle$

СУПОРИШ. Иёсбот кунед, ки агар ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияи $\alpha(x)$ б.х бошад, онгоҳ $1/\alpha(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияи б.к аст. Қайд менамоем, ки функсияи б.к ҳангоми $x \rightarrow a$ дар атрофи ихтиёрии нуқтани a маҳдуд нест. Баръаксаш, умуман ҷой надорад. Мисоли ҷуғини функсияҳоро тартиб диҳед.

4. Амалиҳои арифметикӣ бо функсияҳое, ки ҳудуд доранд.

ЛЕММАИ 15.1. Барои он ки адади A ҳудуди функсияи $f(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ бошад, зарур ва кифоя аст, ки функсияи $\alpha(x) = f(x) - A$ ҳангоми $x \rightarrow a$ б.х бошад.

$\blacktriangle$ **Зарурӣ.** $\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \right] \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta, |f(x) - A| = |f(x) - A| < \varepsilon)$. Аз ин ҷо мебарояд, ки $\exists \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

Кифоягӣ. Агар $\alpha(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияи б.х бошад, онгоҳ $\left[\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \right] \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta: |f(x) - A| = |\alpha(x) + A| < \varepsilon)$. Аз ин ҷо мебарояд, ки $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

ТЕОРЕМАИ 15.1. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \in \mathbb{R}$ бошад,

онгоҳ:

$$а) \exists \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B;$$

$$б) \exists \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B;$$

$$в) \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (\text{азар } B \neq 0).$$

▲ Бигузор $\alpha(x) = f(x) - A$, $\beta(x) = g(x) - B$ бошад. Мувофиқи лемма $\alpha(x)$, $\beta(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияҳои б.х мебошанд.

а) $f(x) \pm g(x) = (A \pm B) + (\alpha(x) \pm \beta(x))$. Азбаски $[\alpha(x) \pm \beta(x)]$ ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияҳои б.х (хосияти 7^0) мебошад, онгоҳ

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

б) $f(x) \cdot g(x) = [A + \alpha(x)] \cdot [B + \beta(x)] = AB + [A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)]$ ифодаи $[A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)]$ функсияи б.х (хосияти 7^0 , 8^0) мебошад. Аз лемма бармеояд: $\exists \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

в) Азбаски $B \neq 0$ аст, пас атрофи $\mathcal{V}(a)$ нуқтаи а мавҷуд аст, ки он $\forall x \in \mathcal{V}(a)$, $g(x) \neq 0$ (хосияти 4^0) аст. Дар ин атроф, фарқи

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{1}{B + \beta(x)} \left[\alpha(x) - \frac{A}{B} \beta(x) \right] \text{ -ро дида мебароем.}$$

Азбаски $\beta(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияи б.х аст, пас атрофи $\mathcal{U}(a)$ нуқтаи а ёфт мешавад, ки мавҷуд $\mathcal{U}(a) \subset \mathcal{V}(a)$ ва $\forall x \in \mathcal{U}(a)$ нобаробарии $|\beta(x)| < \frac{|B|}{2}$ иҷрошаванда аст. Барои $\forall x \in \mathcal{U}(a)$ ҳосил

$$\text{мекунем:} \quad \frac{1}{|B + \beta(x)|} \leq \frac{1}{|B| - |\beta(x)|} < \frac{1}{|B| - \frac{|B|}{2}} = \frac{2}{|B|}.$$

яъне $\frac{1}{B + \beta(x)}$ ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияи дар марра маҳдуд мебошад.

Функсияи $[\alpha(x) - A/B \cdot \beta(x)]$ ҳангоми $x \rightarrow a$ мувофиқи хосиятҳои 7^0 , 8^0 функсияи б.х аст. Бинобар ин $\frac{1}{B + \beta(x)} \left[\alpha(x) - \frac{A}{B} \beta(x) \right]$ ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияи б.х мебошад. Леммаро истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}; \blacktriangle$$

Теоремаи исботшуда, умуман дар $\bar{R}$ ҷой надорад, агар

д) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$) буда фарқи

функсияҳо дида шавад;

ж) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$) буда сум-

маи функсияҳо дида шавад;

з) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ва ҳангоми $x \rightarrow a$, $g(x)$ функсияи б.к буда зарби

функсияҳо дида шавад;

е) Ҳангоми $x \rightarrow a$, $f(x)$ -функсияи б.х (б.к), $g(x)$ -функсияи б.х (б.к) буда нисбати функсияҳо дида шавад.

Дар мавриди д), ж), з), е) мегӯянд, ки мувофиқан номуайяниҳои намуни « $\infty - \infty$ », « $0 - \infty$ », « $0/0$ », « ∞/∞ » ҷой дорад.

Дар ин мавридҳо ёфтани ҳудудҳоро «кушодани номуайяниҳо» меноманд.

СУПОРИШ. Барои тасдиқи гуфторҳои боло мисолҳо оред.

§16. ҲУДУДИ ФУНКСИЯ АЗ РҶИ БАЗА

1. Мафҳуми база дар маҷмӯъ.

ТАЪРИФИ 16.1. Ҷамъбасти Z зермаҷмӯҳҳои B маҷмӯи X дар маҷмӯи X базаро ташкил медиҳад, агар шартҳои зерин иҷро шавад:

а) $(\forall B \in Z: B \neq \emptyset)$

б) $(\forall B_1, B_2 \in Z, \exists B \in Z: B \subset B_1 \cap B_2 \neq \emptyset)$

Ҷамъбасти ҳамаи атрофҳои суроҳшудан $u(a)$ нуқтаи a базаро ташкил медиҳад (иҷро шудани шартҳои а), б) — ро санҷед). Ин базаро бо « $x \rightarrow a$ » ишора мекунем. Ба сифати маҷмӯи X маҷмӯи N -ро гирифта ба ҳар кадом адади $p_0 \in N$ зермаҷмӯи $B_n = \{n \mid n \in N, n > p_0\}$ -ро дар мувофиқ мегузорем. Ҷамъбасти $Z = \{B_n \mid p_0 \in N\}$ базаро ташкил медиҳад. Ин базаро бо « $n \rightarrow \infty$ »

ишора мекунем. Он ҳангоми омӯзиши пайдарпаиҳо истифода бурда шуда буд. Азбӯи, маҷмӯи атрофҳои сурохнашудан $u(a)$ нуқтаи a —ро дида мебароем. Айён аст, ки ҳама вақт $u(a) \neq \emptyset$ буда буриши ҷуғи ду атрофҳои нуқтаи a атрофи сурохнашуда аст. Ин базаро бо рамзи « $x \rightarrow a$ » ишорат мекунем (Қавси квадрати маънон онро дорад, ки таъғирёбанди x ҳангоми таъғирёби қимати a —ро гирифта метавонад). Бо ин рама базан симметрии атрофҳои сурохнашудан a —ро низ ишорат мекунем.

Бигузур R_+ —маҷмӯи ададҳои ҳақиқии мусбат бошад. Бо ҳар кадом адади $c \in R_+$ маҷмӯи $B_c = \{x | |x| > c\}$ —ро дар мувофиқи мегузурем. Ҷамъбасти $Z = \{B_c | c \in R_+\}$ шартҳои α) ва β) таърифи 16.1 —ро қаноат менамояд (санҷед). Ин базаро бо « $x \rightarrow \infty$ » ишорат мекунем.

ЛЕММАИ 16.1. Бигузур Z —базаро дар маҷмӯи X ташвиқ диҳад. Агар E ҷуғи зермаҷмӯи маҷмӯи X бошад, ки $\forall B \in Z$ буриши $B \cap E \neq \emptyset$, онгоҳ $\{B \cap E | B \in Z\}$ —базаро ташвиқ медиҳад.

▲ Мувофиқи шарти лемма $B \cap E \neq \emptyset$ пас шарти α) аз таърифи 16.1 иҷро шуда мебошад. Азбаски Z базаро дар X ташвиқ медиҳад, онгоҳ

$$B \subset B_1 \cap B_2 \Rightarrow B \cap E \subset (B_1 \cap B_2) \cap E = (B_1 \cap E) \cap (B_2 \cap E).$$

Аз ин ҷо, маълум мешавад, ки $B \cap E = (B_1 \cap E) \cap (B_2 \cap E)$. Бинобар ин шарти β) низ иҷро мешавад. ▲

Тасдиқоти исботшуда манбаи тартиб додани базаҳои нав барои базаҳои дар боло ҷорӣ шуда мебошад. Масалан базан « $x \rightarrow a$ » —ро гирифта ба сифати E маҷмӯи беохирро мегирем, ки нуқтаи худудии он $a \in R$ бошад. Мувофиқи таърифи нуқтаи худудӣ: $u(a) \cap E \neq \emptyset$. Аз ин ҷо мувофиқи леммаи 16.1 хулоса мебарорем, ки маҷмӯи $u(a) \cap E$ базаро ташвиқ медиҳад. Ин базаро бо рамзи « $x \rightarrow a$, $x \in E$ » ишорат мекунем. Агар $E = (a, +\infty)$ бошад, онгоҳ базан атрофҳои рости сурохшудан нуқтаи « a » —ро ҳосил мекунем. Ин базаро бо рамзи « $x \rightarrow a+0$ » ишорат мекунем. Агар ба сифати E маҷмӯи $E = (-\infty, a)$ —ро гирем, онгоҳ базан атрофҳои чапи сурохшудан нуқтаи a —ро ҳосил мекунем, ки онро бо рамзи « $x \rightarrow a-0$ » ишорат менамоем. Базаҳои « $x \rightarrow a$ », $x \in E$ ($a \in E$), « $x \rightarrow a+0$ »; « $x \rightarrow a-0$ » ва ғайра айнан ҷорӣ карда мешаванд.

2. Ҷадвали базаҳои стандарт.

№	Ишораҳо	Шарҳи маҷмӯъҳои базаро ташкилдиханда
1	$x \rightarrow a$	Атрофҳои сурохшудаи $\bar{u}(a)$ нуқтаи $a \in \mathbb{R}$: $\bar{u}(a)$; $\bar{u}(a) = \{x \mid 0 < x-a < \delta\}$
2	$x \rightarrow a$, $x \in E$	Атрофҳои сурохшудаи нуқтаи a дар маҷмӯи E : $\dot{u}(a) \cap E$; $\dot{u}(a) \cap E$, a нуқтаи ҳудудии маҷмӯи E .
3	$x \rightarrow a+0$; $x \rightarrow a$, $x > a$	Атрофҳои рости сурохшудаи нуқтаи $a \in \mathbb{R}$: $\dot{u}_+(a) = \{x \mid 0 < x-a < \delta\}$
4	$x \rightarrow a-0$ $x \rightarrow a$, $x < a$	Атрофҳои чапи сурохшудаи нуқтаи $a \in \mathbb{R}$: $\dot{u}_-(a) = \{x \mid 0 < a-x < \delta\}$
5	$x \rightarrow a]$	Атрофҳои сурохнашудаи нуқтаи $a \in \mathbb{R}$: $u(a)$; $u_\delta(a) = \{x \mid 0 < x-a < \delta\}$
6	$x \rightarrow a]$, $x \in E$	Атрофҳои сурохнашудаи нуқтаи $a \in \mathbb{R}$ дар маҷмӯи E : $u(a) \cap E$, $a \in E$.
7	$x \rightarrow a+0]$, $x \rightarrow a]$, $x \geq a$	Атрофҳои рости сурохнашудаи нуқтаи a : $u_+(a) = \{x \mid 0 \leq x-a < \delta\}$
8	$x \rightarrow a-0]$, $x \rightarrow a]$, $x \leq a$	Атрофҳои чапи сурохнашудаи нуқтаи a : $u_-(a) = \{x \mid 0 \leq a-x < \delta\}$
9	$x \rightarrow \infty$	Атрофҳои сурохшудаи беохир: $\bar{u}(\infty) = \{x \mid x > c\}$ (атрофҳои симметрия)
10	$x \rightarrow \infty$, $x \in E$	Атрофҳои сурохшудаи беохир дар маҷмӯи E : $\bar{u}(\infty) \cap E$ маҷмӯи E аз боло ва аз поён маҳдуд нест
11	$x \rightarrow +\infty$, $x \in E$	Атрофҳои рости сурохшудаи беохир дар маҷмӯи E : $\dot{u}(+\infty) \cap E$, маҷмӯи E аз боло маҳдуд нест
12	$x \rightarrow +\infty$	Атрофҳои рости сурохшудаи беохир: $\dot{u}(+\infty)$
13	$n \rightarrow +\infty$	Атрофҳои рости сурохшудаи беохир дар маҷмӯи $E = \mathbb{N}$
14	$x \rightarrow -\infty$, $x \in E$	Атрофҳои чапи сурохшудаи беохир дар маҷмӯи E : $\dot{u}(-\infty) \cap E$. маҷмӯи E аз поён маҳдуд нест
15	$x \rightarrow -\infty$	Атрофҳои чапи сурохшудаи беохир: $\dot{u}(-\infty)$

2) Мафхуми худуд аз рӯи база.

Бигуздор функцияи $f: X \rightarrow R$ дар маҷмуи X муайян буда Z база дар X бошад.

ТАЪРИФИ 16.2. Адади A худуди f аз рӯи базаи Z ном дорад, агар барои ихтиёри атрофи $V(A)$, элементи B_v базаи Z вучуд дорад, ки образи он дар инъикоси f , дар атрофи $V(A)$ воқеъ бошад, яъне

$$\left(\lim_Z f(x) = A \right) \Leftrightarrow (\forall V(A), \exists B_v \in Z: f(B_v) \subset V(A))$$

Таърифи 16.2 мавридҳои $(A=\infty) \vee (A=+\infty) \vee (A=-\infty)$ ¹ —ро низ дар худ дорад. Агар $A \in R$ бошад, онгоҳ ба сифати $v(A)$, ε -атрофи сурохшудаи симметрии нуқтаи A —ро мегиранд. Дар ин маврид, таърифи 16.2 ба навишти зерин баробарқувва аст.

$$\left(\lim_Z f(x) = A \in R \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists B_\varepsilon \in Z, \forall x \in B_\varepsilon: |f(x) - A| < \varepsilon)$$

СУПОРИШ. Таърифи худуди функцияро аз рӯи база барои ҳар кадом базаҳои стандартӣ диҳед.

ТАЪРИФИ 16.3. Функцияи $f: X \rightarrow R$ аз рӯи базаи Z дар марра аз боло (поён) маҳдуд ном дорад, агар адади $c > 0$ ва маҷмуи $B_c \in Z$ мавҷуд бошад, ки $\forall x \in B_c$ нобаробарии $f(x) \leq c$, $(f(x) \geq c)$ иҷро шавад. Функцияи $f: X \rightarrow R$ аз рӯи базаи Z дар марра маҳдуд ном дорад, агар вай дар марра аз боло ва аз поён маҳдуд бошад. Аз рӯи базаи Z дар марра маҳдуд будани функцияи f ба мавҷуд будани чунин адади $c > 0$ ва $B_c \in Z$ баробарқувва аст, ки $\forall x \in B_c$ нобаробарии $|f(x)| \leq c$ иҷро мешавад.

Мафхуми маҳдуд будани функция дар маҷмуи X ва дар марра аз рӯи база маҳдуд будани функция мафҳумҳои гуногунанд (нигаред §15, 2⁰).

Хосиятҳои худуд, ки барои « $x \rightarrow a$ » (боби IV) исбот шуда буд, барои базаи ихтиёрии дигар дуруст мебошанд, чунки ҳангоми исбот

¹ $\vee$ -ишораи дизъюнксияи ду гуфторҳо

хосиятҳои α), β) таърифи 16.1 истифода бурда шуд. Мафҳуми база имконият медиҳад назарияи ҳудуд на танҳо дар маҷмӯҳои ададӣ, балки барои функсияҳои дар маҷмӯҳои ихтиёри муайян буда сохта шавад.

Баъзан тасдиқотҳои муҳимро, ки аз таърифи база мебарояд исбот мекунем.

ТЕОРЕМАИ 16.1. (Худуди функсияи мураккаб).

Бигзор ду инъикосҳои $f: X \rightarrow Y$ ва $g: Y \rightarrow D$ дода шуда $\lim_{Z_Y} g(y)$

мавҷуд бошад, ки дар ин ҷо Z_Y — база дар Y мебошад. Агар инъикоси f ҳамин тавр бошад, ки барои ихтиёри элементи $B_y \in Z_Y$ элементи B_x базаи Z_X дар маҷмӯи X ёфт шавад, ки образи он дар инъикоси f дар B_y воқеъ бошад, онгоҳ композитсияи $(g \circ f)(x)$ дар X муайян ва $\exists \lim_{Z_X} (g \circ f)(x) = \lim_{Z_Y} g(y)$.

♣ Бигузор $v(A)$ — атрофи A , $\lim_{Z_Y} g(y) = A$ бошад. Мувофиқи таърифи ҳудуд, чунин элементи $B_y \in Z_Y$ явҷуд дорад, ки $g(B_y) \subset v(A)$. Дар асоси шарти теорема, чунин элементи $B_x \in Z_X$ ёфт мешавад, ки $f(B_x) \subset B_y$ аст ва $(g \circ f)(x)(B_x) = g[f(B_x)] \subset g(B_y) \subset v(A)$. Бинобар ин, $\exists \lim_{Z_X} (g \circ f)(x) = A = \lim_{Z_Y} g(y)$. ♣

Ба сифати мисол адади e —ро ҳамчун ҳудуди функсия дида мебароем.

4. Адади e .

Исбот мекунем, ки $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ аст.

♣ Бигузор $Y = \mathbb{N}$, $n \rightarrow \infty$ —базаи Z_Y дар Y , $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$; $x \rightarrow +\infty$ базаи Z_X дар X , $x \in X \rightarrow [x] \in \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{R}$. Барои ихтиёри элементи $B_y = \{n \in \mathbb{N} \mid n > n_0\}$ базаи Z_Y элементи $B_x = \{x \in \mathbb{R} \mid x > n+1\}$ базаи Z_X мавҷуд аст, ки образи он, ҳангоми инъикоси f дар B_y меҳабад. Азбаски $g(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $r(n) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, $s(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ аз рӯи базаи $n \rightarrow \infty$ ҳудуди e —ро доранд, пас мувофиқи теоремаи ҳудуди функсияи

мураккаб хулоса мебарорем, ки функсияҳои $(g \cdot f)(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]}$,

$(r \cdot f)(x) = \left(1 + \frac{1}{1+[x]}\right)^{[x]}$, $(s \cdot f)(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$; аз рӯи базаи $n \rightarrow +\infty$, худуди

е —ро доранд. Нобаробарии ҳаққонии

$\left(1 + \frac{1}{1+[x]}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$ —ро дида мебароем. Мувофиқи хосияти

7^0 (нигаред боби III, §7.6.3), $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t \\ &\times \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e \end{aligned}$$

Аз ин ҷо, маълум мешавад, ки

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \spadesuit$$

5. Критерияи Коши (Мавҷудияти худуди охирноки функсия).

ТАЪРИФИ 16.4. Лапиши функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ дар маҷмӯи X гуфта бузургии $\sup_{x_1, x_2 \in X} |f(x_1) - f(x_2)| = \omega(x, f) = o\delta C f$ —ро меноманд, ки дар ин

ҷо сарҳади аниқӣ болоӣ аз рӯи ҷуфти нуқтаҳои имконпазири маҷмӯи X гирифта мешавад. Масалан, $\underset{[-1,2]}{o\delta C} x^2 = 4$, $\omega([0,2], \operatorname{sgn} x) = 1$, $\underset{\mathbb{R}}{o\delta C} \operatorname{sgn} x = 2$,

$$\underset{(0,1]}{o\delta C} \frac{1}{x} = +\infty.$$

ТЕОРЕМАИ 16.2. (Критерияи Коши). Барои он, ки функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ худуди охирнокро аз рӯи базаи Z (Z —база дар маҷмӯи X) дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки барои ихтиёри $\varepsilon > 0$ элементи B_ε базаи Z мавҷуд бошад, ки дар он лапиши функсияи f аз ε хурд монад.

▲ *Зарура.* Бигузор $\exists \lim_{x \rightarrow A} f(x) = A \in R$ бошад. Мувофиқи таърифи худуд барои ихтиёри адади додшудан $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ чунин элементи $B_\varepsilon \in Z$ ёфт мешавад, ки $\forall x \in B_\varepsilon$ шарт $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3}$ иҷро мешавад, он-гоҳ $\forall x_1, x_2 \in B_\varepsilon$ нобаробарии $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{2\varepsilon}{3}$ иҷрошаванда аст. Аз ин ҷо

$$\omega(B_\varepsilon, f) = \sup_{x_1, x_2 \in B_\varepsilon} |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Кифоягӣ. Пайдарпаии ададҳои $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots$ -ро мегирем, ки $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ ва чунин пайдарпаии элементҳои $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_n, \dots$ базаи Z -ро меёбем, ки $\forall n \in N, \omega(\tilde{B}_n, f) < \varepsilon_n$ бошад. Аз рӯи пайдарпаиҳои ёфташуда пайдарпаии элементҳои базаи Z -ро меёбем, ки шарт $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$ -ро қаноат намуда барои ихтиёри $n \in N$ нобаробарии $\omega(B_n, f) < \varepsilon_n$ иҷро шавад. Бо ин мақсад:

$B_1 = \tilde{B}_1, B_2 \subset \tilde{B}_2 \cap B_1, B_3 \subset \tilde{B}_3 \cap B_2, \dots, B_n \subset \tilde{B}_n \cap B_{n-1}, \dots$ мегузорем. Инро мувофиқи хосияти β) таърифи база соҳиб шудан мумкин аст. Барои ихтиёри $n \in N$ нобаробарии $\omega(B_n, f) \leq \omega(\tilde{B}_n \cap B_{n-1}, f) \leq \omega(\tilde{B}_n, f) < \varepsilon_n$ иҷрошаванда аст. Азбаски $\forall n \in N, B_n \neq \emptyset$ аст, пас $\exists x_n \in B_n$. Нишон медиҳем, ки пайдарпаии $(f(x_n))^\infty$ фундаменталӣ аст. Аз шарт $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ ҳосил мешавад:

$(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0: \varepsilon_n < \varepsilon)$ онгоҳ $x_n, x_m \in B_{n_0+1}$ барои $\forall n, m > n_0$ ва

$$|f(x_n) - f(x_m)| \leq \sup_{x', x'' \in B_{n_0+1}} |f(x') - f(x'')| = \omega(B_{n_0+1}, f) < \varepsilon_n < \varepsilon, \quad \text{яъне пайдарпаии}$$

$(f(x_n))_{n=1}^\infty$ фундаменталӣ аст. Мувофиқи Критерияи Кошӣ барои пайдарпаиҳо, маълум мешавад, ки $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \in R$. Нишон медиҳем, ки

$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = A$. Адади $\varepsilon > 0$ -ро қайд намуда ε_n тавре интихоб мекунем, ки $\varepsilon_n < \varepsilon/2$ шавад. Азбаски $\omega(B_n, f) < \varepsilon_n < \varepsilon/2$, пас барои $\forall x \in B_n$

нобаробарии $|f(x) - A| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - A| < \omega(B_n, f) + |f(x_n) - A| < \varepsilon/2 + |f(x_n) - A|$, иҷрошаванда аст. Пайдарпаии $f(x_n)$ ба A наздик мешавад, бинобар ин барои қиматҳои ба қадри кифоя калони n шарти $|f(x_n) - A| < \varepsilon/2$ ҷой дорад ва $|f(x) - A| < \varepsilon/2 + |f(x_n) - A| < \varepsilon$, яъне $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. ♦

СУПОРИШ: 1) Барои ҳар кадом базаҳои стандартӣ тасдиқоти Критерияи Коши; 2) Инкори Критерияи Коширо оред.

ТЕОРЕМАИ 16.3. (Худуди функсияи монотон).

Агар функсия $f:(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ камнашаванда (афзуннашаванда) ва аз боло (поён) маҳдуд бошад, онгоҳ худуди охирироки $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ вучуд дорад. Агар вай камнашаванда (афзуннашаванда) ва аз боло (поён) маҳдуд набошад, онгоҳ $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty$, $\left(\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = -\infty \right)$

Исботи теорема монанди исботи теоремаи пайдарпаиҳои монотон (§10) иҷро карда мешавад. Ойро исбот намоед.

Машқҳо барои боби IV

1. Исбот намоед, ки ҳосили зарби миқдори охирироки функсияҳои дар марра маҳдуд (ҳангоми $x \rightarrow a$), ки аққалан яке аз онҳо б.х аст функсияи б.х мебошад.

2. Бигузор $f:(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дар ҳар кадом нуқтаи интервал функсияи дар марра маҳдуд бошад. Оё вай дар интервали (a, b) маҳдуд мешавад? Мисолҳо оред.

3. Оё функсияи $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ ҳангоми $x \rightarrow 0$ функсияи б.к аст?

4. Сарҳадҳои дақиқи маҷмӯи қиматҳои функсияҳои $f(x) = \sin x + \cos x$ ва $g(x) = 2 \sin x + 5 \cos x$ -ро дар порчаи $[0, 2\pi]$ ёбед.

5. Худудҳои функсияҳои зеринро ёбед.
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$; $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt{x}}$; $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{1}{x} \right]$.

6. Бо забони « ε - δ » исбот намоед, ки $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$.

7. Иббот кунед, ки $\lim_{x \rightarrow a} a^x = a^a$ ($a > 0$)

8. $\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a$. Иббот намоед.

9. Худудҳои зеринро ёбед:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ ($m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$); б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos x}}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x}}$; з) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$

е) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$; ё) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+1})$

10. Инкори таърифи ҳудуди функсияро оред (таърифи 14.1, 14.4).

11. Шарҳи геометрии ҳудуди функсияро диҳед.

12. Бо ёрии нобаробариҳо тасдиқотҳои зеринро таъриф диҳед:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

13. Лапиши функсияи $\arctg 1/x$ —ро дар порчаи $[-0.1; 0.1]$, $(-1, 1)$ ёбед.

14. Хосиятҳои умумии ҳудуди функсияро аз рӯи база барои ихтиёри базаҳои стандартӣ оварда онҳоро иббот намоед.

15. Инкори таърифи ҳудуди функсияро аз рӯи база барои базаҳои стандартӣ оред.

16. Худудҳои функсияҳоро ёбед:

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$; $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2+3x^2} - \sqrt{x^2-2x})$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) \dots (1-\sqrt{x})}{(1-x)^{x-1}}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin x \dots \sin x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]$; $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$; $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$

Тобиат бо забони мате-
матика гуфтугӯ мекунад.
Галилей

БОБИ V. ФУНКСИЯҲОИ БЕФОСИЛА

Мафҳум (класс) —и функсияҳоро ҳама мекушем, ки онҳо бо хосиятҳои муайяни ягона соҳибанд. Муҳимтарин хосияти ин класс функсияҳои бифосилагӣ мебошад. Бисёр процессҳои реалӣ бо ин класс функсияҳо ифода мешаванд.

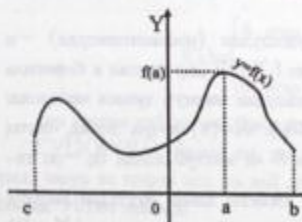
§17. МАФҲУМИ БЕФОСИЛАГИИ

ФУНКСИЯҲО.

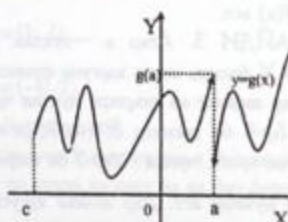
1. Таърифи гуногуни бифосилагии функсия дар нуқта.

Асоси мафҳуми бифосилагии функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ —ро дар тасаввуроти мо қариб надоштани графики он ташкил медиҳад. Ба сифати мисол, бигзор ду функсияҳои f ва g дар ягон фосилаи додашуда муайян буда, графики онҳо ҳама тасвир ёфта бошанд (расмҳои 60, 61).

Графики функсияи f аз як ҳама «ялғуст» иборат буда, графики функ-



Расм 60



Расм 61

сияи g аз ду ҳама «ялғуст» ва як нуқтаи $(a; g(a))$ иборат аст. Таби-

ист. ки гуем: функцияи f дар нуқтаи a бефосила буда, функцияи g дар ин нуқта қавиш дорад.

Аз шарҳи геометрии ҳудуди функция дар нуқта хулоса бароварда гуфтан мумкин аст, ки функцияи f дар нуқтаи a ҳудуди $f(a)$ —ро дошта функцияи g дар нуқтаи a ҳудуд надорад.

Таърифи умумии бефосилагии функцияро дар нуқта теорем.

ТАЪРИФИ 17.1. Функцияи $f: X \rightarrow R$ дар нуқтаи $a \in X$ бефосила ном дорад, агар ҳудуди ин функция аз a баъзан атрофҳои сурхнашуда дар маҷмӯи X мавҷуд бошад, яъне $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in X} f(x) \in R$. Ин чунин маъно дорад, ки $\exists A \in R, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X: |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Таърифи овардашударо бо қайдҳои зерин шарҳ медиҳем.

ҚАЙДИ 1. Дар бефосилагии функцияи $f: X \rightarrow R$ дар нуқтаи a шарт карда мешавад, ки $a \in X$ (дар таърифи ҳудуди функция ин шарт зарур набуд) аст: бо суҳанони дигар, агар $a \notin X$, яъне функцияи f дар нуқтаи a муайян намешуд, онгоҳ суҳанронӣ дар бораи бефосилагии функцияи f маъно надошт.

ҚАЙДИ 2. Таърифи 17.1 дар бораи бузургии ҳудуд ахбор надорад. Ибтот мекунем, ки адади A ба $f(a)$ баробар аст. Дар ҳақиқат нуқтаи a шартҳои зеринро қаноат мекунад: $a \in X, |a - a| < \delta \ (\forall \delta > 0)$. Бинобар ин, $\forall \varepsilon > 0$ бояд нобаробарии $|f(x) - A| < \varepsilon$ иҷро шавад. Ин маънои онро дорад, ки $A = f(a)$ аст.

ҚАЙДИ 3. Агар a — нуқтаи ҷудошудаи (изолятсияшуда) —и маҷмӯи X бошад, онгоҳ ҳаргуна функцияи $f: X \rightarrow R$ дар нуқтаи a бефосила аст. Дар ҳақиқат аз таърифи нуқтаи ҷудошудаи маҷмӯи X хулоса мебарояд: адади $\delta_0 > 0$ бо хосияти $\delta: \{x \in R \mid |x - a| < \delta_0\} \cap X = \{a\}$ вуҷуд дорад, онгоҳ $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in X} f(x) = f(a)$, чунки $\forall \varepsilon > 0$ ба сифати δ —и матлуб адади δ_0 —ро гирифтани мумкин аст. Дар ҳолати хусусӣ, азбаски ҳамаи нуқтаҳои маҷмӯи N ҷудошудаанд, пас ҳаргуна пайдарпаии адади (яъне функцияи $f: X \rightarrow R$) дар ҳар кадом нуқтаи $p \in N$ бефосила аст. Қайди 3-ро ба эътибор гирифта мибаъд мавридҳои дида мебароем, ки нуқтаи a — нуқтаи

ҷудонашуда (худуд) —и маҷмӯи X бошад. Дар ин мавридҳо ҳангоми таърифи бефосилагии функсия аз баъзан атрофҳои суроҳшудан нуқтаи a дар маҷмӯи X истифода мебарем.

ТАЪРИФИ 17.2. Функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтаи $a \in \mathbb{R}$ бефосила ном дорад, агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ бошад.

Азбаски $a = \lim_{x \rightarrow a} x$ аст, пас мувофиқи таърифи 17.2

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right)$. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки барои функсияҳои дар нуқтаи a бефосила амалҳои $(\lim)$ —гузариш ба ҳудуд ҳангоми $x \rightarrow a$ ва (f) —ҳисоб кардани қимати функсияи f дар нуқтаи a , хосияти ҷойивазкуниро дорад.

ҚАЙДИ 4. Ҳангоми a —нуқтаи дохилии маҷмӯъ будан, таърифи 17.2 содда мешавад, агар дар мавриди $x \rightarrow a$ ҳудуд гишем (яъне аз руи баъзан атрофҳои суроҳшуда).

ҚАЙДИ 5. Функсияи f дар нуқтаи $a \in X$ аз рост (чап) бефосила ном дорад, агар $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ ($\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$). Аз ин ҷо мебарояд:

агар атрофи $\dot{u} - (a)$ ($\dot{u} + (a)$) нуқтаи a мавҷуд бошад, ки дар он функсияи f муайян набошад, онгоҳ ин функсия аз чап (рост) дар нуқтаи a бефосила аст. Масалан: функсияи

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{агар } x \in [1; 2), \\ 0, & \text{агар } x \in (-4; -2), \end{cases}$$

дар нуқтаи $x=1$ аз чап (аз рост) бефосила аст.

СУПОРИШ. Барои он, ки функсияи f дар нуқтаи a бефосила бошад, зарур ва кифоя аст, ки вай дар ин нуқта аз рост ва аз чап бефосила бошад. Иббот намоед!

Шақлҳои гуногуни таърифи беосилагии функсияро дар нуқта меорем (баробаркувавгии онҳо аз баробаркувавгии таърифҳои пешовардашудаи ҳудуди функсия дар нуқта мебарояд).

ТАЪРИФИ 17.3. Функсияи f дар нуқтан $a \in X$ бефосила ном дорад, агар барои ҳар кадом атрофи $V(f(a))$ нуқтаи $f(a)$, атрофи $U(a)$ нуқтан a мавҷуд бошад, ки образи бурриши он бо X дар $V(f(a))$ ҳобад, яъне $f(U(a) \cap X) \subset V(f(a))$.

ТАЪРИФИ 17.4. Функсияи f дар нуқтан $a \in X$ бефосила ном дорад, агар барои ихтиёри $\varepsilon > 0$ адади $\delta > 0$ ёфт шавад, ки барои ҳама $x \in X$ нобаробарии $|x - a| < \delta$ -ро қаноаткунанда муносибати $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ иҷро шавад.

ТАЪРИФИ 17.5. Функсияи f дар нуқтан $a \in X$ бефосила ном дорад, агар барои ихтиёри пайдарпайи $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, ки ба a наздик мешавад, пайдарпайи қиматҳои мувофиқи функсия $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ҳама вақт ба $f(a)$ наздик шавад.

Ҳангоми тадқиқи беосилагии функсия дар нуқта он таърифе истифода бурда мешавад, ки тезтар ба мақсад орад.

СУҶОРИШ. Инқори беосилагии функсияро дар нуқта барои ҳар кадом таърифҳои 17.3-17.5 оред.

Аз таърифи 17.1 ва критерияи Коши онди мавҷудияти ҳудуди функсия дар нуқта натиҷа мебарояд, ки функсияи f дар нуқтан $a \in X$ фақат ҳамоно вақт ва фақат ҳамоно вақт бефосила, агар барои ихтиёри $\varepsilon > 0$ атрофи $U_\varepsilon^f(a)$ нуқтаи a дар X ёфт шавад, ки дар он лапиши функсия аз ε хурд монад, яъне $\omega(U_\varepsilon^f(a), f) = \sup_{x_1, x_2 \in U_\varepsilon^f(a)} |f(x_1) - f(x_2)| = \sup_{x_1, x_2 \in U_\varepsilon^f(a)} (f(x_1) - f(x_2)) < \varepsilon$.

ТАЪРИФИ 17.6. Бузургии $\omega(a, f) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(U_\delta^f(a), f)$ лапиши функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтан a ном дорад, ки дар ин ҷо, $U_\delta^f(a)$ - δ -атрофи нуқтан a дар маҷмӯи X мебошад.

Барои лапиши функсия дар нуқта ва лапиши функсия дар маҷмӯи рақамии яохела истифода мебарем. Бузургии $\omega(U_\varepsilon^f(a), f)$ функсияи камнаша-

ванда аз δ мебошад, яъне агар $U_x^{\delta}(a) \subset U_x^{\delta}(a)$ бошад онгоҳ $\omega(U_x^{\delta}(a), f) \leq \omega(U_x^{\delta}(a), f)$. Илова ба ин $\omega(U_x^{\delta}(a), f) \geq 0$ мебошад. Бинобар ин мувофиқи хосиятҳои функцияҳои монотон ё худуди охирирои $\omega(U_x^{\delta}(a), f)$, ҳангоми $\delta \rightarrow +0$ мавҷуд ё барои ҳамаи $\delta > 0$, $\omega(U_x^{\delta}(a), f) = +\infty$ аст (дар мавриди охириро $\omega(a, f) = +\infty$ меҳисобем). Ҳамин тариқ бузургии $\omega(a, f)$ ҳамавқт муайян аст. Мувофиқи қайди пеш аз таърифи 17.6 оварда ҳисла мекунем, ки функцияи f дар нуқтаи a ҳамон вақт ва фақат ҳамон вақт бефосила аст, агар лағвиши он дар ин нуқта ба сифр баробар бошад (яъне, $\omega(a, f) = 0$).

Бояд як таърифи бефосилагиро меорем, ки ба мафҳуми «афзонш» — и функция асос қарда шудааст. Мафҳуми «афзонш» ҷуғрафӣ муайян қарда мешавад.

ТАЪРИФИ 17.7. Бигузор $a \in X \subset \mathbb{R}$ нуқтаи худуди маҷмӯи X бошад. Фарқи $\Delta x = x - a$ афзонши таътирбанди $x \in X$ дар нуқтаи a ном дорад. Барои функцияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ фарқи $\Delta f(a) = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ афзонши функцияи f дар нуқтаи a , ки ба афзонши Δx мувофиқат мекунад, ном дорад.

Агар функцияи f дар нуқтаи a бефосила бошад, онгоҳ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{ва} \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0 \quad \text{ё} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(a) = 0. \quad \text{Аз ин ҷо ҳисла}$$

мекулем.

ТАЪРИФИ 17.8. Функцияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтаи $a \in X$ бефосила ном дорад, агар дар ин нуқта ба афзонши беохир хурди Δx ($\Delta x \rightarrow 0$), афзонши беохир хурди функция $\Delta f(a)$ мувофиқ ояд, яъне $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(a) = 0$ ё ҳангоми $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta f \rightarrow 0$.

ТАЪРИФИ 17.9. Функцияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ дар маҷмӯи X бефосила ном дорад, агар ваӣ дар ҳар кадом нуқтаи ин маҷмӯъ бефосила бошад. Классии функцияҳои дар маҷмӯи X бефосиларо бо рамзи $C(X)$ ишора мекунем.

ТАЪРИФИ 17.10. Бигузор $D \subset X$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ бошад. Функцияи дар маҷмӯи D муайянбудае, ки қиёматҳои дар нуқтаҳои маҷмӯи D бо қиёматҳои функцияи f дар ин нуқтаҳо ҳамоя мешаванд, функцияи аз нав

маъносида дар D ё фишурдаи функсия f ном дошта, бо рақсон $f|_D$ ё $f|_D$ ишора карда мешавад.

ҚАҶҶИ 6. Агар функсия f дар маҷмӯи X беросила бошад, онгоҳ фишурдаи он $f|_D$ дар ҳамаи маҷмӯи $D \subset X$ беросила аст.

2. Мисолҳои таҷрибаи функсия ба беросилагӣ

Мисоли 1. Функсияи доимои $f: \mathbb{R} \rightarrow M$ дар $\mathbb{R}$ беросила аст. Дар ҳақиқат $\forall a \in \mathbb{R}$, ва $\forall U(a)$ ҳосил мекунем $u(U(a), f) = 1$. Бинобар ин $u(a, f) = \lim_{x \rightarrow a} u(U(x), f) = 1$ ва аз ин сабаб f барои ҳамаи нуқтаи $a \in \mathbb{R}$ беросила аст.

Мисоли 2. Функсияи айнияти $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дар $\mathbb{R}$ беросила аст. Дар ин ҷо $\Delta f(a) = f(x) - f(a) = x - a = \Delta x$. Мувофиқи теоремаи 17.8 $\lim_{x \rightarrow a} \Delta f(x) = 0$. Бинобар ин функсия f барои ҳамаи нуқтаи $a \in \mathbb{R}$ беросила аст.

Мисоли 3. Функсияи $\sin x$ дар $\mathbb{R}$ беросила аст. Дар ҳақиқат $\forall a \in \mathbb{R}$ ҳосил мекунем $0 = \sin x - \sin a = \left| \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq |x-a|$. Барои $\forall \varepsilon > 0$ ба сифати δ адади $\delta = \varepsilon$ -ро гиравем, онгоҳ функсияи $\sin x$ мувофиқи теоремаи 17.4 дар нуқтаи ҳамаи нуқтаи $a \in \mathbb{R}$ беросила мешавад.

Мисоли 4. Функсияи $\ln x$ дар $(0, +\infty)$ беросила аст. ε -строфи $V_\varepsilon(\ln)$ -ро гирифта нобаробарии $|\ln x - \ln a| < \varepsilon$ -ро ҳал мекунем $(\ln a - \varepsilon < \ln x < \ln a + \varepsilon) \Rightarrow (a e^{-\varepsilon} < x < a e^{\varepsilon})$. Би сифати δ адади $\delta = \min\{a(e^\varepsilon - 1), a(1 - e^{-\varepsilon})\}$ -ро қабул мекунем, онгоҳ $U_\varepsilon(a) \subset (a e^{-\varepsilon}, a e^{\varepsilon})$, яъне $\ln(U_\varepsilon(a)) \subset V_\varepsilon(\ln)$.

Мувофиқи теоремаи 17.3 ин ҷуғири маълум дорад, ки функсияи $\ln x$ дар нуқтаи ҳамаи нуқтаи $a \in (0, +\infty)$ беросила аст.

Мисоли 5. Функсияи

$$f(x) = \begin{cases} \sin 1/x, & \text{агар } x \neq 0; \\ 0, & \text{агар } x = 0. \end{cases}$$

Барои ихтиёри $b \in \mathbb{R}$ дар нуқтаи $x=0$ бефосила нест. Дар ҳақиқат, ду пайдарпайи ададҳои $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $x'_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ -ро мепирем, ки ҳангоми $n \rightarrow \infty$ ба 0 наздик шаванд. Барои онҳо $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = -1$. Ин ба таърифи 17.5 зид аст.

§18. НУҚТАҲОИ КАНИШИ ФУНКСИЯ ВА КЛАССИФИКАТСИЯИ ОНҲО.

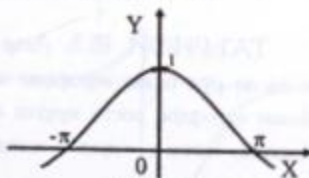
Дар ин ҷо шарт мекунем, ки $a \in X$ ва a — нуқтаи ҳудуди маҷмӯи X мебошад.

ТАЪРИФИ 18.1. Мегӯянд, ки функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтаи $a \in X$ каниш дорад, агар вай дар ин нуқта бефосила набошад, яъне ҳудуди он ҳангоми $x \rightarrow a$ аз руи базис атрофҳои сурӯшшуда дар X вуҷуд надорад ($\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$). Дар ин маврид, нуқтаи a —ро нуқтаи каниши функсияи f меноманд. Таърифи 18.1 инъони тасдиқоти «функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтаи $a \in X$ бефосила аст» —ро ифода мекунад. Бо суҳанони дигар, a — нуқтаи каниши функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, агар ҷуғи атрофи $V(f(a))$ қияматҳои $f(a)$ функсия дар нуқтаи a ёфт шавад, ки дар ихтиёри атрофи $u(a)$ нуқтаи a дар маҷмӯи X , нуқтаи $x \in u(a)$ мавҷуд аст, ки образаш дар $V(f(a))$ намеҳабд, яъне $X \ni a$ — нуқтаи каниши функсияи $f = \exists V(f(a)) \forall u(a) \exists x \in u(a) (f(x) \notin V(f(a)))$. Таърифи 18.1 —ро бо забони « ϵ - δ » мухтасар ҷуғи навиштан мумкин аст:

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in X (|x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| > \epsilon).$$

Нуқтаҳои каниши функсияро аз маҷмӯи ҳудудҳои яктарафа (худудҳои рост ва чап) истифода бурда классификатсия менамоем.

ТАЪРИФИ 18.2. Агар ҳудуди охириҳои функсияи f ҳангоми $x \rightarrow a$ аз руи базис атрофҳои сурӯшшудаи a дар



Расми 62

X мавҷуд буда аз $f(a)$ фарқ кунад, онгоҳ a нуқтаи қавиши бартарафшавандаи функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ном дорад.

Номи "қавиши бартарафшаванда" бо он алоқаманд аст, ки дар ин маърид функсияи нави $\bar{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$ —ро ҷузин сохтан мумкин аст:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{агар } x \neq a; \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x), & \text{агар } x = a, \end{cases}$$

ки дар нуқтаи a бефосила монад. Масалан, барои функсияи $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{агар } x \neq 0; \\ 0, & \text{агар } x = 0, \end{cases}$$

$x=0$, нуқтаи қавиши бартарафшаванда аст, ҷузин $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 0$.

Ин қавиш бартараф мешавад, агар мо функсияи

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{агар } x \neq 0; \\ 1, & \text{агар } x = 0, \end{cases}$$

—ро созем, ки дар нуқтаи $x=0$ бефосила аст (расми 62).

ТАЪРИФИ 18.3. Агар ҳудудҳои охирии функсияи f ҳангоми $x \rightarrow a$ аз рӯи базан атрофҳои чап нуқтаи суроҳшудан a дар X ва аз рӯи базан атрофҳои рост нуқтаи суроҳшудан a дар X мавҷуд буда гуногун бошанд, онгоҳ a —нуқтаи қавиши ҷанси якуми функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ном дорад:

$$\left(\exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0), \exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0), \text{ аммо } f(a-0) \neq f(a+0) \right)$$

МИСОЛҲО:

1) Функсияи

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

дар нуқтаи $x=0$ қаниши ҷанси яқумро дорад, ҷанси $\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn} x = -1, \lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn} x = 1$. Қайд менамоем, ки функсияи $\operatorname{sgn} x$ аз ҷап ва аз рост бефосила нест, ҷунки $-1 = f(-0) \neq f(0) = 0; 1 = f(+0) \neq f(0) = 0$;

2) функсияи $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ ҳангоми $x \rightarrow 0$ ҳудуди $\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$ -ро дорад, аммо $f(0) = |\operatorname{sgn} 0| = 0$ ва $1 = \lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn} x| \neq f(0) = 0$. Агар қимати функсияро дар нуқтаи 0 ва 1 баробар гуфта қабул кунем, функсия бефосила менамояд. Аз ин ҷо, маълум мешавад,

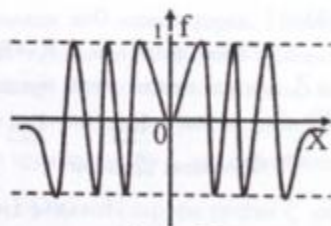
ки $x=0$ — нуқтаи қаниши бартарафшаванда барон функсияи $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ мебошад. Дар оянда нуқтаҳои қаниши бартарафшавандаро ба нуқтаҳои қаниши ҷанси яқум дохил мекунем;

3) Функсияи $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$ — қисми бутуни адади x , дар ҳама нуқтаҳои бутуни $n \in \mathbb{Z}$ қаниши ҷанси яқумро дорад (расми саҳ. 53).

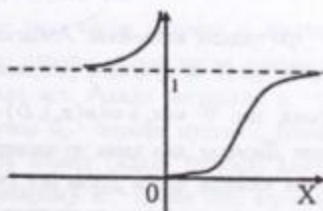
$$\lim_{x \rightarrow n-0} [x] = n-1; \quad \lim_{x \rightarrow n+0} [x] = n = [n] = f(n).$$

Баробарии охири натиҷа медиҳад, ки функсияи додашуда дар нуқтаҳои $n \in \mathbb{Z}$ аз рост бефосила аст.

ТАЪРИФИ 18.4. Нуқтаи қаниши ҷанси дулом гуфта ҳаргуна



Расми 63



Расми 64

нуқтаи қавшии ҷинси яқум набударо меноманд (яъне, ягон аз ҳудудҳои $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$ дар $\mathbb{R}$ вуҷуд надоранд). Яқинд мисолахое меорем, ки нуқтаҳои қавшии ҷинси дуҷум доранд:

4) Барои функсияи $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin 1/x$ ҳангоми $x \neq 0$ ва $f(0) = 0$ нуқтаи $x=0$ нуқтаи қавшии ҷинси дуҷум мебошад, ҷуғзи бо осоня нишон додан мумкин аст, ки $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ вуҷуд надоранд. Графики функсия дар расми 63 оварда шудааст.

5) Барои функсияи $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-1/x}$ ҳангоми $x \neq 0$ ва $f(0) = 0$ нуқтаи $x=0$ нуқтаи қавшии ҷинси дуҷум аст. Дар ҳақиқат, $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} e^{-1/x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} e^{-\infty} = 0 = f(0)$, яъне функсия дар нуқтаи $x=0$ аз рост бефосила аст. Аз тарафи дигар $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{-1/x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{-\infty} = +\infty$. Яъне ҳудуди функсия дар нуқтаи $x=0$ аз чап дар $\mathbb{R}$ вуҷуд надорад. Ҳамин тариқ, $x=0$ нуқтаи қавшии ҷинси дуҷум. Графики функсия ҷуғзин аст (расми 64).

6) Барои функсияи $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ҳангоми $x \neq \pi n$ ва $f(\pi n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$ ҳаргуна нуқтаи $x = \pi n$ нуқтаи қавшии нағзи дуҷум мебошад (расми 29). Дар ҳақиқат, $\lim_{x \rightarrow \pi n-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi n-0} \operatorname{ctg} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pi n+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi n+0} \operatorname{ctg} x = +\infty$.

7) Функсияи Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \text{ (ратсионал);} \\ 0, & x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ (ирратсионал),} \end{cases}$$

-ро тадриҷ менамоем. Азбаски дар ихтиёри атрофи $u(x_0)$ нуқтаи ихтиёрии $x_0 \in \mathbb{R}$ ҷа нуқтаҳои ратсионал ва ҷа нуқтаҳои ирратсионал вуҷуд доранд, пас $\forall u(x_0), \omega(u(x_0), D) = 1$. Бинобар ин, $\omega(x_0, D) = 1$ ва функсияи Дирихле дар ҳама ҷо қавш дошта ҳар қадом нуқтаи қавшии он нуқтаи қавшии ҷинси дуҷум аст (ҷуғзи дар ихтиёри атрофи $u(x_0)$ нуқтаи x_0 атрофҳои яқтарафани ин нуқтаҳо инз фаҳмидан мумкин аст).

8) Барои функсияи Риман

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{агар } x = p/q \text{ (касри ихтисоринашаванда, } q > 0); \\ 0, & \text{агар } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ (иррационалӣ),} \end{cases}$$

ҳаргуна нуқтаи раціоналия нуқтаи қавиши $\mathcal{R}(x)$ буда ҳамаи ин нуқтаҳо нуқтаҳои қавиши ҷинси дуҷум мебошанд. Нишон медиҳем, ки $\mathcal{R}(x)$ дар нуқтаи ихтиёрии раціоналии $x = p/q \neq 0$ қавиш дорад.

♣ Дар ҳақиқат, мувофиқи хосияти зигири маҷмӯи $\mathbb{R}$ дар ихтиёри атрофи $\mathcal{R}(p/q)$ адади раціоналии p/q адади иррационалия вуҷуд дорад, ки дар онҳо $\mathcal{R}(x) = 0$ аст. Бо суҳанони дигар, барои ихтиёри нуқтаи раціоналии $x = p/q \neq 0$, пайдарпайи ададҳои иррационалия $\xi_n (n=1, 2, \dots)$ ёфт мешавад, ки $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = x$ ва барои $\mathcal{R}(\xi_n) = 0$ аст. Бинобар ин

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}(\xi_n) = 0 \neq \mathcal{R}(x) = \frac{1}{q}. \text{ Илова бар ин } \omega(u(x), \mathcal{R}) \geq 1/q. \text{ Ҳамин тариқ, функсияи } \mathcal{R}(x) \text{ дар ҳамаи нуқтаҳои раціоналии } x \neq 0 \text{ қавиш дорад. Нишон медиҳем, ки функсияи } \mathcal{R}(x) \text{ дар ҳар гуна нуқтаи иррационалии } \xi \text{ бефосила аст. Дар ҳақиқат, бигузор } n \in \mathbb{N} \text{ бошад. Аввал нишон медиҳем, ки чунин атрофи нуқтаи } \xi \text{ ёфт мешавад, ки ягон нуқтаи раціоналии намууди } \dots -\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \text{ (*) -ро надорад. Адади иррационалии } \xi \text{ дар байни ягон аз ду ададҳои } \frac{\varepsilon}{n} < \xi < \frac{\varepsilon+1}{n} \text{ воқеъ мебошад. Бо } \mathcal{U}_n \text{ ягон атрофи нуқтаи } \xi \text{ -ро ишора мекунем, ки дар интервали } \left(\frac{\varepsilon}{n}, \frac{\varepsilon+1}{n}\right) \text{ меҳобада. Ин атроф ягон аз ададҳои намууди (*) -ро надорад, яъне ягон касри маҳраҷи } n \text{ доштаро надорад. Азбун, нишон медиҳем, ки дар атрофи қифоя хурди нуқтаи } \xi \text{ нобаробарии } |\mathcal{R}(x) - \mathcal{R}(\xi)| < \varepsilon \text{ иҷрошаванда аст. Адади натуралии } n \text{ -ро бо шарт } 1/n < \varepsilon \text{ иғтиҳоб мекунем. Бигузор } \mathcal{U}_\varepsilon \text{ -атрофи нуқтаи } \xi \text{ бошад, ки касрҳои маҳраҷи } k \text{ доштаро надошта бошад (адади бутунро ҳамчун касри маҳраҷи воҳид дошта истифода мебарем). } n \text{ -ҳамин тавр атрофҳои}$$

$u_1, u_2, \dots, u_n$ — ро дида мебароем. Бигузор u ягон атрофи ξ бошад, ки дар атрофҳои $u_1, u_2, \dots, u_n$ ҳобад. Атрофи u касрҳои махраҷи $1, 2, \dots, n$ доштаро надорад, бинобар ин, ҳаргуна нуқтаи ратсионалии x , ки дар ин атроф дохил аст, адади намууди p/q — ро дорад, ки $q > n$ мебошад. Аз ин сабаб, $\mathcal{R}(x) < 1/n < \varepsilon$. Азбаски $\mathcal{R}(\xi) = 0$ аст, пас $|\mathcal{R}(x) - \mathcal{R}(\xi)| = \mathcal{R}(x) < \varepsilon$. Агар x адади иратсионалӣ бошад, онгоҳ $\mathcal{R}(x) = 0$ ва барои ихтиёри x дар атрофи u нуқтаи ξ доро мешавем: $|\mathcal{R}(x) - \mathcal{R}(\xi)| < \varepsilon$. Ҳамин тариқ, функсияи $\mathcal{R}(x)$ дар нуқтаи ихтиёрии иратсионалии ξ бифосила аст. ♦

Қайд мекунем, ки графикои функсияи $\mathcal{R}$ — ро дар намууди хатҳои яклухт ё яҷоявунии хатҳои яклухт тасвир намуодан мумкин нест.

ТЕОРЕМАИ 18.1. Агар функсияи $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ дар порчаи $[a; b]$ монотон бошад, онгоҳ f дар ин порча назид аз маҷмӯи ҳисоби нуқтаҳои каниши ҷиси яқум дорад.

♦ Барои муайяни, бигузор f дар порчаи $[a; b]$ афзуншаванда бошад ва $(a; b) \ni x_0$ — нуқтаи каниши функсия бошад. Азбаски $\forall x \in [a; b]$ нобаробарии $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ иҷрошаванда аст, пас f дар порчаи $[a; b]$ маҳдуд мебошад. Мувофиқи теоремаи ҳудуди функсияи монотон, ҳудудҳои охириёки зерин вуҷуд доранд: $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$; $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ ва $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ мебошанд. Бинобар ин, x_0 — нуқтаи каниши ҷиси яқуми функсияи f мебошад.

Аққун нишон медиҳем, ки мавқори нуқтаҳои каниши функсияи f аз маҷмӯи ҳисобӣ зиёд нест. Киҷоя аст нишон диҳем, ки маҷмӯи нуқтаҳои дохилии каниш ($a \neq a, \neq b$) аз ҳисобӣ зиёд нест.

Бигузор $(a; b) \ni x_0$ — нуқтаи каниши функсияи f бошад, онгоҳ $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$ мувофиқи хосияти зичияти маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ адади ратсионалии $\eta(x_0)$ мавҷуд аст, ки: $f(x_0 - 0) < \eta(x_0) < f(x_0 + 0)$. Ба ҳар кадом нуқтаи каниши x функсияи f адади ратсионалии $\eta(x_0)$ — ро (барои нуқтаҳои гуногуни каниш ин ададҳо гуногунанд) дар мувофиқи мегузорем. Ҳамин тариқ, ба маҷмӯи нуқтаҳои каниши функсияи монотон ягон зермаҷмӯи маҷмӯи $\mathbb{Q}$ ададҳои ратсионалӣ мувофиқи меояд. Аммо маҷмӯи $\mathbb{Q}$

ҳисобя аст, пас маҷмӯи нуқтаҳои қавми функцияи монотон аз ҳисобя зиёд нест. ♣

ҚАЙД. Тасдиқоти теорема барои фосилаи ихтиёри дуруст мебошад.

§19. ХОСИЯТҲОИ ЛОКАЛИ ВА АМАЛҲО БО ФУНКЦИЯҲОИ БЕФОСИЛА

Хосиятиҳои локалии функцияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ чуқури хосиятҳоеро меноманд, ки вазъияти функция дар ягон атрофи нуқтаи додашудаи $a \in X$ муайян карда мешаванд. Масалан, бифосила будани функцияи f дар нуқтаи $a \in X$ хосияти локалии функция аст.

ТЕОРЕМАИ 19.1. Агар функцияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтаи $a \in X$ бифосила бошад, онгоҳ вай ҳангоми $X \ni x \rightarrow a$ дар марра маҳдуд аст.

♣ Азбаски функцияи f дар нуқтаи $a \in X$ бифосила аст, пас ҳудуди он ҳангоми $X \ni x \rightarrow a$ вуҷуд дошта ба $f(a)$ баробар аст. Аз ҳамин сабаб, теорема натиҷаи теоремаи дар марра маҳдуд будани функцияи ҳудуди охирик дошта мебошад (боби IV, §15) ♣

ТЕОРЕМАИ 19.2. (нигоҳдории аломат). Агар функцияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтаи $a \in X$ бифосила буда $f(a) \neq 0$ бошад, онгоҳ дар ягон атрофи $U_X(a) = U(a) \cap X$ нуқтаи a ҳаман қиматҳои f аломати $f(a)$ —ро доранд.

♣ Дурустии тасдиқоти теорема аз теоремаи мувофиқи банди «Ғузариши ҳудудӣ дар нобаробариҳо» (боби IV, §15) мебарояд ♣

ТЕОРЕМАИ 19.3. Агар функцияҳои $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ва $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтаи $a \in X \cap Y$ бифосила бошанд, онгоҳ:

- 1) Суммаи алгебравии $f \pm g$ дар нуқтаи a бифосила,
- 2) Ҳосили зарби $f \cdot g$ дар нуқтаи a бифосила,
- 3) Ҳосили тақсими f/g дар нуқтаи a бифосила, агар $g(a) \neq 0$ бошад.

♣ Барои исбот кифоя аст, ки теорема онди амалҳои арифметикӣ барои функцияҳои ҳудуд дошта ба хотир оварда шавад (боби IV, §15) ♣

ТЕОРЕМАИ 19.4. Бигузори функцияҳои додашудаи f ва g тавре бошанд, ки $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}$. Агар функцияи f дар нуқтаи $a \in X$ ва функци-

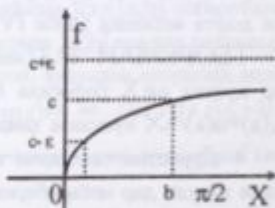
яи g дар нуқтаи $b=f(a) \in Y$ бифосила бошанд, онгоҳ композитсияи $(f \circ g): X \rightarrow R$ дар нуқтаи a бифосила аст.

▲ Теорема натиҷаи теоремаи ҳудуди функсияи мураккаб (композитсияи функсияҳо) (боби IV, §16) мебошад. Дар ҳақиқат, иҷрои шартҳои теоремаи натиҷадодаро месанҷем. Шарти бифосилагии функсияи g ва f — ро чунон навиштан мумкин аст: $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x); \exists \lim_{y \rightarrow b} f(y) = f(a) = b$. Аз ин ба-

робари чунон хулоса мебарояд, ки: $\forall V(b), \exists \delta(a): f(u(a) \cap X) \subset V(b) \cap Y$. Ин ифода муносибати матлуби байни элементҳои « $X \ni x \rightarrow a$ » ва « $Y \ni y \rightarrow b$ » мебошад. ▲

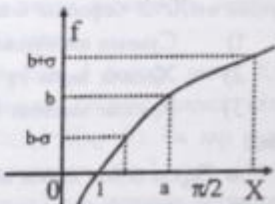
Мисол. Функсияи $f = \sin: \ln: (0; +\infty) \rightarrow R$ дар ихтиёри нуқтаи маҷмӯи $X = (0; +\infty)$ бифосила аст. Дар ҳақиқат барои ихтиёри $x \in (0; +\infty)$ қимати $\sin(\ln x)$ —ро ёфтан мумкин аст, яъне дар X композитсияи $\sin \circ \ln$ муайян аст. Бифосилагии функсияҳои $\ln$ дар нуқтаи x ва $\sin$ дар нуқтаи $\ln x$ аз маҷмӯи 3.4 §17 мебарояд, пас бифосилагии композитсияи онҳо натиҷаи теоремаи 19.4 мебошад. Ба ин қаноат накарда исботи ғурури онро меерем.

Бигзор $x=a$ нуқтаи ихтиёри маҷмӯи X бошад. $\ln a = b$ ва $\sin b = c$ мегузорем. Ҳисоб мекунем, ки $b \in (0; \pi/2)$ аст. Ягон атрофи $W_\varepsilon(c) = (c-\varepsilon; c+\varepsilon)$ —нуқтаи c —ро мегирием, онгоҳ атрофи $V_\sigma(b) = (b-\sigma; b+\sigma)$ нуқтаи b ёфт мешавад, ки $\sin(V_\sigma(b)) \subset W_\varepsilon(c)$ (расми 65).



Расми 65

Дар ин ҷо $\sigma = \min\{b - \arcsin(c-\varepsilon), \arcsin(c+\varepsilon) - b\}$, агар $|c \pm \varepsilon| \leq \pi/2$ бошад. Агар $c + \varepsilon (c - \varepsilon)$ аз $\pi/2$ калон (хурди $-\pi/2$) бошад, онгоҳ фарқи мувофиқро дар σ ба $\pi/2 - b$ ($b + \pi/2$) иваз намудан лозим аст. Онгоҳ образи атрофи $u_\delta(a): \delta = \min\{e^{b+\sigma}, a - e^{b-\sigma}\}$ дар ҷиғикос бо функсияи $\ln$ дар



Расми 66

$V_\sigma(b)$ мебошад (расми 66). Ҳамин тариқ, барои истиёри атрофи $W_\epsilon(c)$ нуқтаи c атрофи $U_\delta(a)$ нуқтаи a ёфт шуд, ки $(\sin \ln)(U_\delta(a)) \subset W_\epsilon(c)$. Ин бефосила будани функсияи тақсимашавандаро дар нуқтаи a ифода мекунад.

§20. ХОСИЯТҲОИ ГОЛОБАЛИИ ФУНКЦИЯҲОИ БЕ- ФОСИЛА. БЕФОСИЛАГИИ ФУНКЦИЯҲОИ ЭЛЕМЕН- ТАРӢ.

1. *Хосиятиҳои глобалии функсияи* $f: X \rightarrow R$ *дар маҷмӯи* $A \subset X$ *гур-*
та хосиятҳоро меноманд, ки функсияи f *дар ҳама маҷмӯи* A *доро аст.*
Бефосилагии функсия дар маҷмӯъ хосияти глобалии функсия мебошад.

ТЕОРЕМАИ 20.1. (Болтсано* -Кошя). Агар функсияи $f: [a; b] \rightarrow R$ дар порчаи $[a; b]$ бефосила буда дар охири он аломатҳои гуногунро қабул кунад, онгоҳ ақалан як нуқтаи $c \in (a; b)$ ёфт мешавад, ки дар он $f(c) = 0$ аст.

▲ Порчаи $[a; b]$ —ро ба ду хиссаи баробар тақсим менамоем. Агар қимати функсия дар нуқтаи тақсимкардашуда сифр бошад, онгоҳ вай нуқтаи матлубест, ки мавҷудияташ дар шарти теорема тасдиқ карда мешавад. Агар қимати функсия дар нуқтаи тақсимкардашуда аз сифр фарқ кунад, онгоҳ дар охири он яке аз порчаҳои ҳосилшуда (барои муайяни онро бо $[a_1; b_1]$ ишора мекунем) функсияи f қиматҳои аломатҳои гуногун доштара дорад. Бо порчаи $[a_1; b_1]$ ин амалиётро такрор менамоем, яъне онро бо ба ду хиссаи баробар тақсим мекунем. Агар дар нуқтаи тақсимои функсия сифр бошад, теорема исбот мешавад. Бо $[a_2; b_2]$ он аз порчаҳои ҳосилшударо ишора мекунем, ки дар нуқтаи тақсимои қимати функсия аз сифр фарқ кунад. Дар охири он функсияи f қиматҳои аломатҳои гуногун доштара дорад ва дарозии он $b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2 = (b - a)/2^2$ буда $[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2]$ аст. Дар натиҷа ё дар яке аз нуқтаҳои тақсимои $f(c) = 0$ мешавад ё амалиёт номаҳдуд такрор меёбад. Дар мавриди охири

* Б. Болтсано (1781-1848) —файласуф ва риёзidonи чех.

пайдарпайи порчаҳои дар дохили якдигар хобидаро бо хосиятҳои зерин ҳосил мекунем:

$$1) [a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - a_n}{2^n} = 0;$$

$$3) \text{ Барои ихтиёри } n \in \mathbb{N}, f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

Мувофиқи леммаи порчаҳои дар дохили якдигар хобида, нуқтаи $c \in (a_n; b_n)$ барои ҳамаи $n \in \mathbb{N}$ вуҷуд дорад, ки $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Дар нобаробарии $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ ба ҳудуд гузашта аз бефосилагии f дар нуқтаи c истифода бурда ҳосил мекунем: $[f(c)]^2 \leq 0$. Азбаски ҳама вақт $[f(c)]^2 \geq 0$ аст, пас $[f(c)]^2 = 0$ ва аз ин ҷо $f(c) = 0$. ♣

КАЙДҲО: 1) (Мазмуни геометрии теорема). Бо иҷро шудани шартҳои теорема графикҳои функсия тирӣ $0x$ —ро аққалан як бор мебурад;

2) Нуқтаи c решаи муодилаи $f(x) = 0$ аст. Ҳамин тариқ, агар f функсияи бефосила бошад, теоремаи Болтсано-Кошя алгоритми ёфтани решаи муодилаи $f(x) = 0$ —ро медиҳад.

3) Хулосаи теоремаи Болтсано-Кошя, барои маҷмӯҳои аз порча фа-

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0; 1]; \\ 1, & x \in [2; 3], \end{cases}$$

рекуананда, умуман ҷой надорад. Масалан, функсияи $f: [0; 1] \cup [2; 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

дар соҳаи муайяни худ бефосила аст, аммо дар ягон ҷо қимати сифрӣ қабул намекунад.

НАТИҶА. (теорема онди қиматҳои фосилавӣ). Агар функсияи f дар порчаи $[a; b]$ бефосила буда дар охириҳои қиматҳои гуногуни $A = f(a)$, $B = f(b)$, $A \neq B$ —ро гирад, онгоҳ барои ихтиёри адади c ки дар байни A ва B ҷойгир аст, нуқтаи $c \in (a; b)$ ёфт мешавад, ки $f(c) = C$ аст.

♣ Функсияи $\varphi: f(x) = f(x) - C$ дар порчаи $[a; b]$ бефосила аст ва $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = (A - C)(B - C) < 0$ (яъне, функсияи φ дар охириҳои порча ало-

матҳон гуногун дорад). Мувофиқи теоремаи Болтсано-Коши нуқтаи $c \in (a; b)$ ёфт мешавад, ки барои он $\varphi(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - C = 0 \Leftrightarrow f(c) = C$. ▲

Чун пештара бо $C[a; b]$ — маҷмӯи ҳамаи функсияҳои дар $[a; b]$ бефосила ва бо $M[a; b]$ маҷмӯи ҳамаи функсияҳои дар $[a; b]$ маҳдудро ишора мекунем.

Теоремаи 20.2. (Вейерштрасс). Агар функсияи $f \in C[a; b]$ бошад, онгоҳ:

$$1) \quad f \in M[a; b];$$

$$2) \quad \text{ақсаалан ду нуқтаҳои } x_*, x^* \in [a; b] \text{ ёфт мешавад, ки}$$

$$\exists \min_{[a; b]} f(x) = \inf_{[a; b]} f(x) = f(x_*) \in \mathbb{R}, \quad \exists \max_{[a; b]} f(x) = \sup_{[a; b]} f(x) = f(x^*) \in \mathbb{R}$$

(яъне, $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ барои ҳамаи $x \in [a; b]$).

▲ Бигузор $x \in [a; b]$. Азбаски функсияи f ҳангоми $t \rightarrow x$, $t \in [a; b]$ дар марра маҳдуд, пас $\exists u(x)$, $\exists K_x > 0$, $\forall t \in u(x) \cap [a; b]$: $|f(t)| \leq K_x$.

Оилаи ҳамаи атрофҳои $\{u(x) | x \in [a; b]\}$ — ро дида мебароем. Дар ин оила мувофиқи созиш атрофи нуқтаи ихтиёрии $x \in [a; b]$ аст. Бинобар ин, $[a; b] \subset \bigcup_{x \in [a; b]} u(x)$, яъне оилаи нишондодашуда пушандан порчаи $[a; b]$ бо интервали $u(x)$ мебошад. Мувофиқи леммаи Гейне-Борел онди пушандаҳо (боби III, §11) зерпушандан охириҳои $\{u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)\}$ вуҷуд дорад.

Агар бо $K := \sup\{K_{x_1}, K_{x_2}, \dots, K_{x_n}\}$ ишора намоем, онгоҳ $\forall x \in [a; b]$ рақами i ёфт мешавад, ки $x \in u(x_i)$ аст. Бинобар ин, $|f(x)| \leq K_{x_i} \leq K$ яъне барои ҳамаи қиматҳои $x \in [a; b]$ нобаробарии $|f(x)| \leq K$ иҷро мешавад (функсияи f дар $[a; b]$ маҳдуд). $M = \sup\{f(x) | x \in [a; b]\}$ гузошта шарт менамоям: нуқтаи $x^* \in [a; b]$ вуҷуд надорад, ки $f(x^*) = M$ бошад, онгоҳ $\forall x \in [a; b]$ ҳосил мекунем: $f(x) < M$. Функсияи $\varphi: \varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ дар порчаи $[a; b]$ бефосила

аст ва ба ғайр аз ин дар ин порча $\varphi(x) > 0$ аст. Аз қисми исботи теоремаи Вейерштрасс ҳосил мекунем: $\exists c > 0$, $\forall x \in [a; b]$: $0 < \varphi(x) \leq C$. Аз ин ҷо $\frac{1}{M - f(x)} \leq C \Leftrightarrow M - f(x) \geq \frac{1}{C} \Leftrightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{C}$. Агар дар нобаробарии охириин аз r и ҳамаи

$x \in [a; b]$ $\sup$ гирем, онгоҳ ҳосил мекунем: $M \leq M - 1/C \Leftrightarrow 0 \leq -1/C \Leftrightarrow C \leq 0$ — зиддият пайдо намудем. Аз ин ҷо, мебарояд, ки шарти кардан мо ноду-

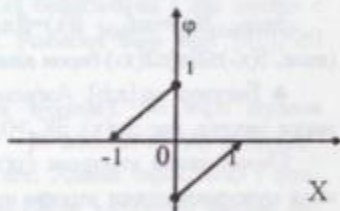
руст будааст, яъне $\exists x^* \in [a;b]: f(x^*)=M$. Тасдиқот дар бораи мавҷуд будани нуқтаи x^* айнан исбот карда мешавад. ♦

Агар функсияи $f(x)$ дар $[a;b]$ доимӣ бошад, онгоҳ барои ихтиёри нуқтаи порчаи додашуда $\sup_{[a,b]} f(x) = \inf_{[a,b]} f(x)$ аст. Барои функсияҳои дар сегмент бефосила набуда теорема дар бораи қиматҳои калонтарин ва хурдтарин ҷой надорад. Барои функсияҳои дар интервал бефосила теоремаи номбаршуда низ ҷой надорад.

МИСОЛҲО: 1) Дар порчаи $[-1;1]$ мегузорем:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x+1, & \text{агар } -1 \leq x < 0; \\ 0, & \text{агар } x=0; \\ x-1, & \text{агар } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Функсияи $\varphi(x)$ бефосила нест (расми 67), онгоҳ $\sup_{[-1;1]} \varphi(x)=1$, аммо $\forall x \in [-1;1], \varphi(x) \neq 1$. $\inf_{[-1;1]} \varphi(x)=-1$; $\forall x \in [-1;1], \varphi(x) \neq -1$;



Расми 67

2) Функсияи дар сегменти $[0;1]$ бефосилаи $f(x)=x$ қимати калонтарин $\left(\max_{[0;1]} f(x) = 1 \right)$ ва қимати хурдтарин $\left(\min_{[0;1]} f(x) = 0 \right)$ -ро дорад, аммо дар интервали $(0;1)$ қимати хурдтарин ва калонтаринро надорад. Сарҳадҳои аниқи болон $\left(\sup_{(0;1)} f(x) = 1 \right)$ ва поёни $\left(\inf_{(0;1)} f(x) = 0 \right)$ доранд, аммо барои ихтиёри $x \in (-1;1)$ функсияи $f(x) \neq 0$, $f(x) \neq 1$ мебошанд;

3) Функсияи $f(x)=1/x$ дар интервали $(0;\infty)$ бефосила буда қимати калонтарин ва хурдтарин надоранд, аммо $\sup_{(0;\infty)} f(x) = +\infty$, $\inf_{(0;\infty)} f(x) = 0$.

2. Мунтазам бефосилагӣ ва модули бефосилагии функсия

ТАЪРИФИ 20.1. Функсияи f дар маҷмуи X мунтазам бефосила ном дорад, агар барои ихтиёри $\varepsilon > 0$ адади $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ёфт шавад, ки барои ихтиёри $x', x'' \in X$ аз шарт $|x' - x''| < \delta$ нобаробарии $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ иҷрошаванда бошад:

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon) \quad (20.1)$$

Фарқ байни мафҳуми мунтазам бефосилагӣ ва бефосилагии функсияи f —ро дар маҷмӯи X қайд менамоем. Бо ин мақсад шарти бефосилагии функсияи f —ро дар маҷмӯи X бо забони мантиқӣ чунин ифода менамо-

$$x' \in X, \forall \varepsilon > 0; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x') > 0, \forall x'' \in X, |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad (20.2)$$

Дар ин ҷо $\delta = \delta(\varepsilon, x')$, яъне δ аз ε ва аз нуқтаи x' вобаста аст, ки дар функсияи f бояд бефосила бошад. Агар дар мавриди хусусӣ, барои ихтиёри $\varepsilon > 0$, адади матлуби δ яқбора барои ҳамаи нуқтаҳои $x' \in X$ мувофиқ ояд, онгоҳ шарти (20.2) ба (20.1) мегузарад. Ҳамин тариқ, агар функсияи f дар маҷмӯи X мунтазам бефосила бошад, онгоҳ вай дар маҷмӯи X бефосила аст, аммо баръаксаш умуман ҷой надорад.

МИСОЛҲО: 1) Функсияи $f(x) = x$ дар $\mathbb{R}$ мунтазам бефосила аст, зерон барои адади додашудан $\varepsilon > 0$ киёфоя аст, ки $\delta = \varepsilon$ гирем, онгоҳ аз шарти $|x'' - x'| < \delta$ нобаробарии $\Rightarrow |f(x'') - f(x')| = |x'' - x'| < \varepsilon$ ҳосил мешавад;

2) Функсияи $\sin \frac{1}{x}$ дар интервали $(0; 1)$ бефосила буда дар он мунтазам бефосила нест. Барои тасдиқоти ин фикр киёфоя аст нишон диҳем, ки барои ягон адади $\varepsilon > 0$ ва барои ихтиёри адади $\delta > 0$ аққалан як ҷуфти ададҳои $x'', x' \in (0; 1)$ ёфт мешавад, ки дар аснони $|x'' - x'| < \delta$ будан нобаробарии $|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon$ иҷро мешавад. Адади $\varepsilon = 1$ —ро гирифта ду пайдарпайи нуқтаҳои ба интервали $(0; 1)$ таалуқдорро бо элементҳои умумии $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ ва $x'_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$ (n —адади киёфоя калони натуралӣ) меёбем,

ки $f(x''_n) = 1$ ва $f(x'_n) = -1$ аст. Пайдарпайҳои x' ва x'' ва фарқи онҳо беохир зурд мебошанд. Бинобарин, барои ихтиёри адади ниҳоят хурди $\delta > 0$ рақами $n \in \mathbb{N}$ ёфт мешавад, ки $|x'' - x'| < \delta$ буда фарқи қиматҳои мувофиқии функсия $|f(x'') - f(x')| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) \right| = |1 - (-1)| = 2 > \varepsilon = 1$ мешавад.

Аз ин ҷо, мепайм мешавад, ки функсияи $\sin \frac{1}{x}$ дар маҷмӯи $X=(0;1)$ мушттакам бефосила нест.

3) Нишон медиҳем, ки функсияи $f:X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ дар ҳаман тирӣ ҳақиқӣ мушттакам бефосила нест. Адад $\varepsilon=1/2$ гирифта пайдарпайи нуқтаҳои $\{x_n\}$ ва $\{x'_n\}$ —ро бо элементҳои умумии $x_n=\sqrt{n}$ ва $x'_n=\sqrt{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ дида мебароем, онгоҳ ҳангоми $n \rightarrow \infty$ $|x'_n - x_n| = |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$ аммо $|f(x'_n) - f(x_n)| = |x'^2_n - x^2_n| = n+1 - n = 1$. Бинобар ин адади $\delta > 0$ —ро ҷа тавре хурд интихоб накунем, ҷафти нуқтаҳои x'_n ва x_n ёфт мешавад, ки $|x'_n - x_n| < \delta$ аст, аммо $|f(x'_n) - f(x_n)| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$ мебошад. Аҳақиқати муштрамо тасдиқоти ҷа-рин дорад.

ТЕОРЕМАИ 20.3. (Кантор). Агар функсияи f дар порчаи $[a;b]$ бефосила бошад, онгоҳ вай дар ин порча мушттакам бефосила аст.

▲ Адади $\varepsilon > 0$ —ро мегирем. Аз шарти бефосилагии функсияи f дар $[a;b]$ ҳосил мекунем: $\forall \varepsilon \in [a,b], \exists \eta = \eta(\varepsilon, c) > 0, \forall x \in [a,b], |x-c| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$ гузошта, онҳаи ҳаман ҷуви интервалҳо $\{c_i\} | c_i \in [a;b]\}$ $c_i(c_i) := (c_i - \eta/2; c_i + \eta/2)$ —ро дида мебароем. Ин пушандан порчаи $[a;b]$ аст. Мувофиқи леммаи Гейне-Баррел зерпушандан охирик $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ вуҷуд дорад. $\delta := \frac{1}{4} \inf\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ мегузорем ва бигузор x', x'' —ҷуви нуқтаҳои ихтиёрии порчаи $[a;b]$ бошад, ки $|x' - x''| < \delta$ шавад. Азбаски $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ —пушандан порчаи $[a;b]$, пас дар байни интервалҳои $c_i(c_i)$ ҷуви интервале ёфт мешавад, ки нуқтаи x' ба он таалулдор аст (яъне, $\exists i, 1 \leq i \leq n, x' \in c_i(c_i)$). Аз тарафи дигар, $|x' - c_i| < \frac{\eta}{2} < \eta$ ва $|x'' - c_i| \leq |x' - x''| + |x' - c_i| < \delta + \frac{\eta}{2} \leq \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{2} = \frac{3}{4}\eta < \eta$. Бинобар ин $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(c_i)| + |f(c_i) - f(x'')| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. ▲

Қайд менамоем, ки барои интервал тасдиқоти теорема ҷой надорад. Масалан, функсияи $f:(0;1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=1/x$ дар интервали $(0;1)$ бефосила

буда дар ин интервал мунтазам бефосила нест. Дар ҳақиқат: $x_n' = \frac{1}{n}$, $x_n'' = \frac{1}{2n}$ гирифта мебинем, ки модули фарқи $|x_n' - x_n''| = \frac{1}{2n}$, ҳангоми $n \rightarrow \infty$ f сифр майл карда, модули фарқи қиматҳои мувофиқи функсия $|f(x_n') - f(x_n'')| = n$, дар асоси $n \rightarrow \infty$ ба $+\infty$ майл мекунад.

СУПОРИШ. Нишон диҳед, ки функсияи дар интервали $(0;1)$ бефосилаи $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ дар ин интервал мунтазам бефосила нест.

Барои функцияҳои бефосила мафҳуми лағзиши функцияро дар маъмури бо баробарии $\omega_\delta(f) = \sup_{x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta} |f(x') - f(x'')|$, $x' \in X$, $x'' \in X$ дохил намуда, онро дар оянда **МОДУЛИ БЕФОСИЛАГИИ ФУНКСИЯИ** $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ меномем. Табиист, ки ҳамаи нуқтаҳои маъмури X —ро нуқтаҳои ҳудуди он ҳисоб кунем. Баъзан мафҳуми мунтазам бефосилагиро бо ёрии мафҳуми модули бефосилагии функция баён намудан қулайтар аст. Модули бефосилагии функцияи f ҳосилшуда зеринро дорад, ки беисбот меорем:

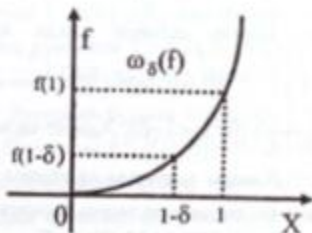
$$1^0. \omega_\delta(f) \geq 0;$$

2⁰. Модули бефосилагии функцияи f афзунешаванда аст, яъне аз $\delta_1 \leq \delta_2$ нобаробарии $\omega_{\delta_1}(f) \leq \omega_{\delta_2}(f)$ ҳосил мешавад.

МИСОЛҲО. 1) Барои функцияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $\omega_\delta(f)$ —ро меёбем.

$\omega_\delta(f) = \omega_\delta(x^2) = \sup_{x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta} (x'^2 - x''^2) \leq x_0^2 - (x_0 - \delta)^2 = 2x_0\delta - \delta^2$. Ин нобаробария барои ҳамаи қиматҳои x_0 ҳақиқатӣ буда, барои юмйери адади қайдшудаи δ , $\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} (2x_0\delta - \delta^2) = +\infty$ аст. Бинобар ин, $\omega_\delta(x^2) = +\infty$, $x \in \mathbb{R}$.

Амун модули бефосилагии $f(x) = x^2$ —ро дар порчаи $[0;1]$ меёбем. Модули бефосилагии $\omega_\delta(x^2)$ бо афзуншавии қалонтариини функция дар порчаи $[1-\delta;1]$ мувофиқ меояд (расми 68).



Расми 68

$\omega_2(f) = f(1) - f(1-\delta) = 1 - 1 - \delta = 2\delta - \delta^2$. $\omega_2(f)$ аналитик ҳақиқатан сифрда мешавад: Бигузор $0 \leq x'' - \delta \leq x' \leq x'' \leq 1$ бошад, онгоҳ муқофиди нобаробарии

$$x''^2 - x'^2 \leq x''^2 - (x'' - \delta)^2 = 2x''\delta - \delta^2 \leq 2\delta - \delta^2 \quad (20.3)$$

ҳосил мекунем:

$$\omega_2(x^2) = \sup_{x''-x'} (x''^2 - x'^2) \leq 1 - (1-\delta)^2 = 2\delta - \delta^2 \quad (20.4)$$

Аз баҳои (20.3) ва (20.4) пайдо карда барои $\omega_2(x^2)$ дар порчаи $[0;1]$ ҳосил мекунем: $\omega_2(x^2) = 2\delta - \delta^2$;

2) Функцияи $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ дида мебароем.

$$\omega_2\left(\sin \frac{1}{x}\right) = \sup_{x''-x'} \left| \sin \frac{1}{x''} - \sin \frac{1}{x'} \right| \leq \sup_{x''-x'} \left(\left| \sin \frac{1}{x''} \right| + \left| \sin \frac{1}{x'} \right| \right) \leq \sup_{x''-x'} 2 = 2 \quad (20.5)$$

Аз таърифи дигар $x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ ва $x''_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$ интихоб намуда $n \rightarrow \infty$

ҳамин тавр ба қайд мегирием, ки $|x'_n| \leq \delta/2$, $|x''_n| \leq \delta/2$ монад, онгоҳ барои $|x''_n - x'_n| \leq |x''_n| + |x'_n| \leq \delta$ ҳосил мекунем.

$$\omega_2\left(\sin \frac{1}{x}\right) \geq \sin \frac{1}{x''_n} - \sin \frac{1}{x'_n} = 1 - (-1) = 2 \quad (20.6)$$

Аз баҳоҳои ҳосилшудани (20.5) ва (20.6) натижа мебарояд, ки $\omega_2\left(\sin \frac{1}{x}\right) = 2$ аст.

3) Лағвиши функцияи $f(x) = \frac{1}{x}$ -ро дар интервали $(0;1)$ дида мебароем. Барои ҳақиқатан адади қайдшудани δ , $0 < \delta < 1$ пайдо мекунем: $\omega_2\left(\frac{1}{x}\right) = \sup_{x''-x'} \left(\frac{1}{x''} - \frac{1}{x'} \right) = \sup_{x''-x'} \left(\frac{1}{x''} - \frac{1}{x'_0} \right) \geq \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + \delta} = \frac{\delta}{x_0(x_0 + \delta)} \rightarrow +\infty$ ҳангоми $x_0 \rightarrow 0$ ($0 < x_0 < 1 - \delta$). Ҳамин тариқ, $\omega_2\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

Алоқани мафҳуми мултиазам бефосилагии функция бо модули бефосилагии бо таъсири зерин барқарор мешавад.

ТЕОРЕМАИ 20.4. Барои он, ки функцияи дар маҷмӯи X муайян будани f дар ин маҷмӯъ мултиазам бефосила бошад, зарур ва кифоя аст, ки $\lim_{x \rightarrow \infty} \omega_2(f) = 0$ бошад.

▲ *Зарурӣ* Бигузор функсияи f дар маҷмӯи X мунтазам бефосила бошад, пас шарти зерин мувофиқи таърифи 20.1. иҷро мешавад.

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in X, |x'' - x'| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \varepsilon/2).$$

Аз ин ҷо $\forall \delta < \delta_\varepsilon$ нобаробарии $\sup_{|x'' - x'| < \delta} |f(x'') - f(x')| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ иҷрошаванда аст, яъне агар $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ бошад, онгоҳ $\omega_\delta(f) < \varepsilon$ ҷой дорад. Ин ҷуғи маъно дорад, ки $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_\delta(f) = 0$.

▲ *Кифояӣ*. Иҷро шудани шарти $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_\delta(f) = 0$ ҷуғи маъно дорад:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$, агар $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ бошад, онгоҳ $\omega_\delta(f) < \varepsilon$ аст. Ягон аз δ иёшон-додашударо интихоб мекунем, онгоҳ ҳангоми $|x'' - x'| < \delta$, $x' \in X$, $x'' \in X$ ҳосил мекунем: $|f(x'') - f(x')| \leq \sup_{|x'' - x'| < \delta} |f(x'') - f(x')| = \omega_\delta(f)$, яъне функсияи f дар

X мунтазам бефосила аст. ▲

Дар боло (мисоли 1) дидем, ки дар порчаи $[0; 1]$, $\omega_\delta(f) = 2\delta - \delta^2$ бинобар ин $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_\delta(f) = 0$ ва функсияи x^2 дар ин порча мунтазам бефосила аст.

Модули бефосилагии функсияи x^2 дар R ҷун модулаҳои бефосилагии $\omega_\delta(\sin \frac{1}{x})$, $x \neq 0$ ва $\omega_\delta(\frac{1}{x})$, $0 < x < 1$, ҳангоми $\delta \rightarrow +0$ ба сифр майл намекунад. Бинобар ин, ҳаман ин функсияҳо дар маҷмӯҳои мувофиқ мунтазам бефосила нестанд.

3. Теоремаи мавҷудият ва бефосилагии функсияи баръакс.

ТЕОРЕМАИ 20.5. Агар функсияи $f: [a; b] \rightarrow R$, дар порчаи $[a; b]$ қатъи монотон ва бефосила бошад, онгоҳ функсияи $f^{-1}: f([a; b]) \rightarrow [a; b]$ мавҷуд буда, дар маҷмӯи $f([a; b])$ қатъи монотон ва бефосила аст.

▲ Аз монотон будани функсияи f биёктивия будани инъикоси $f: [a; b] \rightarrow \rightarrow f([a; b])$ мебарояд, пас инъикоси баръаксии $f^{-1}: f([a; b]) \rightarrow [a; b]$ вуҷуд дорад. Барои муайяния, бигузор f афзуншаванда бошад, яъне $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Аз сабаби яқинмати будани функсия, ба қияматҳои гуногуни функсия қияматҳои гуногуни аргументи он мувофиқат мекунад, яъне $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$ онгоҳ $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$; мегузорем $f(x_1) = y_1$ ва

$f(x_2)=y_2$, онгоҳ ҳосил мекунем: $y_1 > y_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$. Монотон будани функсияи баръакс исбот шуд. Барои исботи бифосилагии f^{-1} аввал қайд менамоем, ки $\inf_{(a,b)} f(x) = f(a)$, $\sup_{(a,b)} f(x) = f(b)$. Мувофиқи теорема онди

қисматҳои фосилавӣ (натيجан теоремаи (20.1) функсияи f қисмати ихтиёрии дар байни $f(a)$ ва $f(b)$ ҷойгиршуда мегарад. Бинобар ин, соҳан муайянои f^{-1} порчаи $[f(a); f(b)] = [c; d]$ мебошад. Бигузор $y_0 \in (c; d)$,

$x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a; b)$ ва адади $\varepsilon > 0$ дода шуда бошад. ε -ро ҷунон хурд интихоб мекунем, ки $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subset (a; b)$ бошад. $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$ мегузорем ва бигузор $\delta = \min(y_0 - y_1, y_2 - y_0)$ бошад. Мувофиқи монотон будани f^{-1} , агар $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$ бошад, онгоҳ $x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_0 - \delta) <$

$f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \delta) \leq f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon$, яъне дар ишораи $x = f^{-1}(y)$: $|x - x_0| < \varepsilon$ аст. Ин бифосила будани f^{-1} —ро дар нуқтаи ихтиёрии $y_0 \in (f(a); f(b))$ ишон медеҳад.

Барои исботи бифосилагии f^{-1} дар нуқтаҳои $c = f(a)$ ва $d = f(b)$ ба ҷои атрофҳои симетрики нуқта атрофҳои яктарафани нуқтаҳо дида баромадан кифоя аст, ки онро ба хонадагон месупорем.

СУПОРИШ. Бифосилагии f^{-1} —ро дар нуқтаи $f(a)$ аз рост ва дар нуқтаи $f(b)$ аз чап ишон диҳед. ♣

НАТИҶА. Дар шартҳои теоремаи 20.5. порчаи $[a; b]$ —ро ба интервали $(a; b)$ ё нивелтервалҳои $[a; b)$, $(a; b]$ иваз намудан мумкин аст.

♣ Дар ҳақиқат, исботи мавҷудияти функсияи баръакс ва монотон будани он дар теоремаи 20.5. аз намуди соҳан муайянои функсияи f вобаста нест.

Бифосилагии f^{-1} —ро дар нуқтаи ихтиёрии нуқтаи $\bar{y}_0 \in (f(a); f(b))$ исбот менамоем. Мувофиқи биективнокӣ ва монотон будани функсияи f нуқтаи $\bar{x} \in (a; b)$, $f(\bar{x}) = \bar{y}$ ($\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$) вуҷуд дорад. Порчаи $[\alpha; \beta]$ ёфт мешавад, ки дар $(a; b)$ ($\bar{x} \in [\alpha; \beta] \subset (a; b)$) мебошад, онгоҳ кифоя аст, ки бифосилагиро дар нуқтаи $f(\bar{x})$ ба ғайридан f дар порчаи $[\alpha; \beta]$ ($f|_{[\alpha; \beta]}$) баръакс аст, муқарар намоём. Ҷуғиби исботро дар теоремаи 20.5. ҳосил намуда будем. Агар яке аз охириҳои фосилаи $\langle a; b \rangle$ ба ин фосила таа-

луқдор бошад, онгоҳ бефосилагӣ аз рост ва аз чапро дар нуқтаи мувофиқи $f(a)$ ё $f(b)$ функсияи f^{-1} -ро исбот кардан мушвона нест. ♦

4. Бефосилагии функсияҳои элементарӣ.

Бефосилагии функсияҳои элементариро дида мебароем. Аввал таърифи функсияҳои элементариро ба хотир меорем.

ТАЪРИФИ 20.2. Функсияҳои элементарӣ гуфта, функсияҳоро меноманд, ки аз функсияҳои асосии элементарӣ бо ёрии маводҳои ҷузъӣ ва амалҳои арифметикӣ ва амалиётҳои ташкили композитсиёи онҳо ҳосил карда мешаванд. Ба функсияҳои асосии элементарӣ инҳо дохиланд:

$f_1: x \rightarrow M$, $f_2: x \rightarrow x$, $f_3(x) = a^x$ ($a > 0$), $\log_a x$ ($a > 0$), $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arccctg} x$.

Бефосилагии ин функсияҳоро дар соҳаи муайянваишон муққаддар мебароем. Бефосилагии функсияҳои f_1 ва f_2 дар банди 2 §17 (мисоли 1,2) нишон дода шуд.

2) Бефосилагии функсияи $\ln x$ низ дар банди 2 §17 (мисоли 4) исбот карда шудааст. Аммо $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, пас $\log_a x$ ҳамчун тақсими ду функсияҳои бефосила барои ҳамаи қиматҳои $x > 0$ бефосила мебошад.

3) Функсияи $f_3(x) = a^x$ ($a > 0$), ҳамчун функсияи баръакси $x = \log_a y$, ки монотон ва бефосила аст, дар $\mathbb{R}$ бефосила мебошад. Дар мавриди хусусӣ, функсияи $x \rightarrow e^x$ дар $\mathbb{R}$ бефосила аст.

4) Дар банди 2 §17 (мисоли 3) бефосилагии функсияи $\sin x$ нишон дода шуда буд. Мувофиқи формулаҳои мувофиқоварӣ функсияи $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ композитсиёи функсияҳои бефосила дар $\mathbb{R}$ мебошад. Функсияҳои $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ва $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ чун нисбати функсияҳои бефосила дар соҳаи муайянваишон $X_1 = \left\{\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ ва $X_2 = \{\pi n, \pi + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ мувофиқан бефосила мебошад.

5) Функсияҳои $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arccctg} x$, дар соҳаи муайянваишон (ду тои аввал дар порчаи $[-1; 1]$ ва ду тои дигар дар $\mathbb{R}$) барои он

бефосилаанд, ки функсияҳои баръакси онҳо мувофиқан $\sin x$ барои $x \in [-\pi/2; \pi/2]$; $\cos x$ барои $x \in [0; \pi]$, $\tan x$ барои $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, $\cot x$ барои $x \in [0; \pi]$ функсияҳои монотон ва бефосилаанд.

6) Ба функсияи асосии элементарӣ функсияи рационалӣ:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$$

низ дохил мешавад, ки он дар R ба ғайр аз нуқтаҳое, ки махраҷ ба сифр табдил меёбад, бефосила мебошад. Бефосилагии функсияи дараҷагии $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ бо истифодабарии $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, $x > 0$ ва теоремаи бефосилагии функсияи мураккаб (композиция) ҳосил мешавад. Ҳамин тариқ, бефосилагии функсияҳои номбаршуда дар соҳаи муайянишон барқарор карда шуд. Қайд менамоем, ки ҳаргуна функсияи элементариро бо формулаи ошкор додан мумкин аст. Маҷмӯи ҳамаи қиматҳои аргумент, ки барои онҳо ин формула маъно дорад ва дар натиҷаи ҳисобкунӣ аз ӯ он қимати ҳақиқии функсия ҳосил мегардад. **СОҲАИ МУАЙЯНИИ ТАБИИИ** функсияи элементарӣ ном дорад.

Аз теоремаҳои 19.3. ва 19.4. ва муҳокимаҳои овардашуда тасдиқоти зерин мебарояд.

ТЕОРЕМАИ 20.6. Ҳар кадом функсияи элементарӣ дар соҳаи муайяни табиии худ бефосила аст.

§21. НАТИҶАҲО АЗ ҲУДУДИ ШОЁНИ ДҶОМ. МУҚОИСАИ ФУНКЦИЯҲО ВА ТАДБИҚИ ОНҲО ДАР ҲИСОБ НАМУДАНИ ҲУДУДҲО.

1. Натиҷаҳо аз ҳудуди шоёни дҷом.

Дар §16 исбот намудем, ки $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{1/x}} = e$ аст ва онро

дар таҳлили математикӣ бо номи ҳудуди шоёни дҷом ё адади e машхуранд. Бефосилагии функсияҳои элементарӣ имконияти меҳроҳанд, ки аз ҳудуди шоёни дҷом баъзан натиҷаҳо ҳосил намоем.

НАТИҶАИ 1. Ҳангоми $a > 0$, $a \neq 1$ баробарии ҳудудии зерин ҷой дорад:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a} \quad (21.1)$$

▲ Дар ҳақиқат, функсияи

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x}, & \text{агар } x \neq 0; \\ e, & \text{агар } x = 0, \end{cases}$$

дар ягон атрофи нуқтаи $x=0$ муайян ва бефосила аст. Функсияи $\log_a f(x)$ ҳамчун композицияи функсияҳои бефосилаи $\log_a t$ ва $t=f(x)$ дар нуқтаи $x=0$ бефосила мебошад, бинобар ин ҳосил мекунем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a f(x) = \log_a \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \right) = \log_a e.$$

Азбаски ҳангоми $x \neq 0$, $\log_a f(x) = \frac{\log_a(1+x)}{x}$, онгоҳ ҳудуди матлуб ба $\log_a e$ баробар аст. ▲

Аз баробарии (21.1) ҳангоми $a=e$ ҳосил мекунем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad (21.2)$$

НАТИҶАИ 2. Агар $a > 0$, $a \neq 1$ бошад, онгоҳ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \quad (21.3)$$

▲ Функсияи $y=a^x-1$ дар $\mathbb{R}$ бефосила ва қатъи монотон (ҳангоми $a > 1$ афзуншаванда ва ҳангоми $0 < a < 1$ камшаванда) аст. Дар фосилаи $(1; +\infty)$ функсияи баръакси он: $x=\log_a(1+y)$ —бефосила ва қатъи монотон мебошад. Ҳангоми ба сифр майл кардани $x(x \rightarrow 0)$ функсияи y ба сифр майл мекунад ($y \rightarrow 0$). Формулаи (21.1) —ро истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \ln a. \quad \blacktriangle$$

Агар дар (21.3) $a=e$ гузорем, онгоҳ ҳосил мекунем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (21.4)$$

НАТИҶАИ 3. Барои истифодаи $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ ифодаи ҳудудии зерини қои дарол:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (21.5)$$

▲ **Функсияи** $y = (1+x)^\alpha \cdot 1 = e^{\alpha \ln(1+x)} \cdot 1$ —ро дида мебароем. Дар маҷмӯи $(-1; +\infty)$ функсияи баръаксии он $x = x(y)$ мавҷуд буда, ҳағмон ба сифр майл намудан $x(x \rightarrow 0)$, y низ ба сифр майл мекунад ($y \rightarrow 1$). Аз баробарии $(1+x)^\alpha = 1+y$ ҳосил мекунем: $\alpha \ln(1+x) = \ln(1+y)$. Бинобар ин, $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{y}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x}$ ва дар асоси $x \rightarrow 0$, мувофиқи (21.3) баробарии (21.5) —ро ҳосил мекунем. ▲

НАТИҶАИ 4. Бинобар $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ ва $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = b$, ($b \neq \infty$) бошад,

$$\text{онгоҳ } \lim_{x \rightarrow a} [1 + \varphi(x)]^{\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}} = e^b \quad (21.6)$$

▲ **Функсияи**

$$F(x) = \begin{cases} [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}, & \text{агар } x \neq a; \\ e, & \text{агар } x = a, \end{cases}$$

дар нуқтаи $x=a$ бефосила аст. **Функсияи**

$\Psi(x) = \left[[1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} \right]^{\psi(x)} = [F(x)]^{\psi(x)}$ —ро дида мебароем. Азбаски $F(x)$ ҳағмон $x=a$ бефосила, $F(a) = e \neq 0$ аст ва $\psi(x)$ дар нуқтаи $x=a$ бефосила мавҷуд, агар $\psi(a) = b$ гузорем, онгоҳ $\lim_{x \rightarrow a} \Psi(x) = \lim_{x \rightarrow a} [F(x)]^{\psi(x)} = e^b$. $F(x)$ —ро бо $\varphi(x)$ ифода карда ҳосил мекунем:

$$\lim_{x \rightarrow a} [1 + \varphi(x)]^{\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}} = e^b. \quad \blacktriangle$$

НАТИҶАИ 5. Агар дар ягон атрофи сурӯшудан $u(a)$ нуқтаи a $\alpha(x) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$ ва $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$ бошад, онгоҳ

$$\lim_{x \rightarrow a} [1 + a(x)]^{\frac{1}{a(x)}} = e^a \quad (21.7)$$

ва дар ҳолати хусусӣ,

$$\lim_{x \rightarrow a} [1 + \mu a(x)]^{\frac{1}{a(x)}} = e^\mu, \quad \mu = \text{const.} \quad (21.8)$$

МИСОЛҲО. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 4}{3x^2 - 5} \right)^{x^2}$ -ро ёбед.

▲ Азбаски $\left(\frac{3x^2 + 4}{3x^2 - 5} \right)^{x^2} = \frac{\left(1 + \frac{4}{3x^2} \right)^{x^2}}{\left(1 - \frac{5}{3x^2} \right)^{x^2}}$, пас мувофиқи (21.8) ҳудуди матлуб

ба $e^{4/3 - (-5/3)} = e^3$ баробар аст. ▲

2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\lg^2 x}}$ -ро ёбед.

▲ Азбаски $\cos x = 1 - 2\sin^2 x/2$, пас мувофиқи формулаи (21.7) ҳудуди матлуб ба e^λ баробар аст, ки дар ин ҷо

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{\lg^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \left(\frac{x}{\lg x} \right)^2 \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \text{ аст, яъне } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\lg^2 x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

▲

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x}}$ -ро ёбед.

▲ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(1 + \frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x} \right)^{\frac{\frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x}}{\frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x}}} \right\} = e^b$, ки дар ин ҷо

$$b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2}}{x \cdot x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Ҳамин тариқ, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{3}{2}}$. ▲

4) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$ -ро ҳисоб кунед.

▲ $x \rightarrow y$ гузошта меёбем: $\frac{\ln x - 1}{x - e} = \frac{\ln(y + \varepsilon) - \ln e}{y} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{e}\right)}{\frac{\varepsilon}{e}} = \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{e}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$.

Ҳангоми ба адади e майл намудани $x(x \rightarrow e)$ татқиқирёбанди y ба сифр майл мекунад ($y \rightarrow 0$), бинобар ин

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln\left[\left(1 + \frac{\varepsilon}{e}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right] = \ln\left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\varepsilon}{e}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right] = \frac{1}{e} \ln e = \frac{1}{e}. \blacktriangle$$

5) $\lim_{x \rightarrow a} y$ -ро ҳисоб кунед, агар $y = \frac{x^{\sqrt{z}} - a^{\sqrt{z}}}{x - a}$ бошад.

▲ $x \rightarrow a = z$ гузошта y -ро ҷуғиғи табдил медохем:

$$y = \frac{x^{\sqrt{z}} - a^{\sqrt{z}}}{x - a} = \frac{(a + z)^{\sqrt{z}} - a^{\sqrt{z}}}{z} = a^{\sqrt{z}} \frac{\left(1 + \frac{z}{a}\right)^{\sqrt{z}} - 1}{z/a}. \text{ Азбаски ҳангоми ба } a \text{ майл намудани } x(x \rightarrow a) \text{ татқиқирёбанди } z \text{ ба сифр } (z \rightarrow 0) \text{ майл мекунад, онгоҳ мувофиқи формулаи (21.5) ҳисоб мекунем:}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} y = a^{\sqrt{z}} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{z}{a}\right)^{\sqrt{z}} - 1}{z/a} = \sqrt{z} \cdot a^{\sqrt{z}-1} \blacktriangle$$

6) $\lim_{x \rightarrow a} y$ -ро ҳисоб кунед, агар $y = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, ($a > 0, b > 0$) бошад.

▲ татқиқирёбанди y -ро ҷуғиғи табдил медохем:

$$y = e^{\frac{1}{x} \ln \frac{a^x + b^x}{2}} = e^{\frac{z \ln(1+z)}{z}}, \text{ ки дар ин ҷо } z = \frac{a^x + b^x - 2}{2}. \text{ Азбаски}$$

$\lim_{x \rightarrow a} a^x = 1, \lim_{x \rightarrow a} b^x = 1$ аст, пас ҳангоми $x \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$ майл мекунад ва мувофиқи формулаи (21.3) меё-

$$\text{бем: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{z}{x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(a^x - 1) + (b^x - 1)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - 1}{x} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a} \frac{b^x - 1}{x} = \frac{1}{2} (\ln a + \ln b) = \ln \sqrt{ab}.$$

Мувофиқи баробарии (21.2) меёбем: $\lim_{x \rightarrow a} y = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$. Дар ҳолати

$$\text{хусусӣ } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} = \sqrt{ab}. \blacktriangle$$

2 Муқосисаи функсияҳо. Рамзи O ва o .

Аз §15 медонем, ки сумма, фарқ ва зарби функцияҳои б.х бо ҳама функцияҳои б.х мебошанд. Инро дар бораи тақсими ду функцияҳои б.х гуфта метавонист. Тақсими як функцияи б.х ба дигараш ба натиҷаҳои гуногун оварда мерасонад. Масалан, агар $\alpha(x)=x$ ва $\beta(x)=x^2$ ҳангоми $x \rightarrow 0$ функцияҳои б.х бошанд, онгоҳ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$.

Агар $\alpha(x)=x$ ва $\beta(x)=2x$ бошанд, онгоҳ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 2$ ва агар $\alpha(x)=x$ ва $\beta(x)=x \sin 1/x$ бошанд, онгоҳ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ вуҷуд надорад. Аз ин мисолҳо

маълум мешавад, ки қанҷи қувват мавридҳои имконпазир аст:

- 1) Нисбати ду функцияҳои б.х бо ҳама функцияи б.х аст;
- 2) Нисбати ду функцияҳои б.х функцияи б.х шуда метавонад;
- 3) Нисбати ду функцияҳои б.х ҳудуди охиринок дошта метавонад;
- 4) Нисбати ду функцияҳои б.х умуман ҳудуд надоштаниш мумкин аст.

Муқоисаи ду функцияҳо (функцияҳои б.х ва б.к) —ро дар атрофи ягон нуқтаи $a \in X \subset \mathbb{R}$ дида мебароем. Нуқтаи a —охиринок, $\infty, +\infty$ ё $-\infty$ шуда метавонад.

ТАЪРИФИ 21.1. Агар барои функцияҳои $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ва $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ қуввати адади доимии $c > 0$ мавҷуд бошад, ки дар ягон атрофи нуқтаи a барои нуқтаҳои $x \in X$ нобаробарии

$$|f(x)| \leq c|g(x)| \quad (21.9)$$

иҷро шавад, онгоҳ функцияи f —ро нисбат ба функцияи g дар атрофи нуқтаи a маҳдуд номиди муносибати байни ин функцияҳоро ҳангоми $x \rightarrow a$ бо рамзи $f(x) = O(g(x))$

$$(21.10)$$

нишона карда онро O —баҳри функцияи $f(x)$, ҳангоми $x \rightarrow a$ меноманд (ҳақиқатан мешавад: « $f(x)$, O —и калон аз $g(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ » ё « O —баҳри функцияи $f(x)$ нисбат ба $g(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ »).

Қайд менамоем, навбати $x \rightarrow a$ танҳо маънои онро дорад, ки ин хосияти функцияи танҳо дар ягон атрофи нуқтаи a иҷрошаванда аст ва дар бораи ягон ҳудуд суҳан намеравад.

ТЕОРЕМАИ 21.1. Агар $f(x)=\varphi(x)g(x)$, $x \in X$ ва ҳудуди охириҳои $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = k$ маънуд бошад, онгоҳ ҳангоми $x \rightarrow a$ $f(x)=O(g(x))$ аст.

▲ Аз маънудияти ҳудуди охириҳои $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = k$ (ба хосияти ҳудуди функсияҳои §15 илҳам) маънуд будани ҷуғи атрофи $U(a)$ нуқтаи a мебарояд, ки функсияи $\varphi(x)$ дар $X \cap U(a)$ маънуд аст, яъне адади доимии $c > 0$ маънуд аст, ки $\forall x \in X \cap U(a)$ нобаробарии $|\varphi(x)| \leq c$ ва бинобар ин, нобаробарии $|f(x)| = |\varphi(x)| |g(x)| \leq c |g(x)|$ иҷрошаванда аст. Ин, мувофиқи таърифи 21.1 маънои онро дорад, ки ҳангоми $x \rightarrow a$, $f(x)=O(g(x))$ аст. ▲

МИСОЛҲО: 1) $\frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ дар аснои $x \rightarrow 0$, $\left|\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ ҳангоми $|x| \leq 1$;

2) $\frac{1}{x^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$ дар аснои $x \rightarrow \infty$, ҷуғи $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x}$ ҳангоми $|x| \geq 1$.

3) $\sin x = O(x)$ дар аснои $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ҷуғи $|\sin x| \leq |x|$.

4) Барои функсияи $f(x)=x^3$ ва $g(x)=x$ дар интервали $X=(-2;2)$ нобаробарии $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{x^3}{x}\right| = x^2 < 4$ ҷуғ дорад. Аз ин ҷо $|x^3| \leq 4|x|$ ҳосил мешавад.

Бинобар ин, $x^3=O(x)$, ҳангоми $x \in (-2;2)$ ҳосил шуд.

Навишти $f(x)=O(1)$, $x \rightarrow a$ маънои онро дорад, ки функсияи f дар ягон атрофи нуқтаи a маънуд аст.

МИСОЛҲО: 1) $\frac{\lg 3x}{x} = O(1)$, ҷуғи $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lg 3x}{x} = 3$ ва аз ин ҷо маълум мешавад, ки функсияи $\frac{\lg 3x}{x}$ дар атрофи нуқтаи $x=0$ маънуд аст.

2) Функсияи $\sin x$ дар маҷмӯи $R=(-\infty; +\infty)$ нобаробарии $|\sin x| \leq 1$ —ро қаноат мекунонад, пас ҳангоми $x \in R$ $\sin x = O(1)$ дуруст мебошад.

3) Функсияи $f(x)=e^{-x}$ ҳангоми $x \rightarrow \infty$ маънуд аст, яъне $e^{-x}=O(1)$ ҳангоми $x \rightarrow \infty$. Дар ҳақиқат, агар a —ягон адади ҳақиқии ихтиёрӣ бошад, онгоҳ нобаробарии $x > a$ нобаробарии $e^x > e^a \bar{e}$ ин ки нобаробарии $e^{-x} > e^{-a} \cdot 1$ ҳосил мешавад. Дар ин мисол $g(x)=1$ ва $c=e^{-a} > 0$ аст.

ТАЪРИФИ 21.2. Агар функсияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ нуқта ба яқдигар маънуд бошанд, яъне $f=O(g)$ ва $g=O(f)$, онгоҳ онҳо ҳан-

гоми $x \rightarrow a$ тартиби яхсела дошта ном доранд ва бо рамзи $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow a$ ишора карда мешаванд. Масалан, функцияҳои $\alpha(x) = x$ ва $\beta(x) = x(2 + \sin 1/x)$ ҳангоми $x \rightarrow 0$ беохир хурдҳои тартиби яхсела дошта

$$\text{мебошанд: } \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \left| \frac{x}{x(2 + \sin \frac{1}{x})} \right| = \frac{1}{|2 + \sin \frac{1}{x}|} \leq \frac{1}{2 - |\sin \frac{1}{x}|} \leq 1; \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \left| 2 + \sin \frac{1}{x} \right| \leq 2 + \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 3.$$

ТЕОРЕМА 21.2. Агар ҳудуди охиринок $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$ вуҷуд дошта бошад, онгоҳ $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow a$.

▲ Ҳангоми $x \rightarrow a$ ҳудуди касрии $f(x)/g(x)$ муайян, бинобар ин ҷуғи атрофи $u(a)$ нуқтаи а мавҷуд, ки $\forall x \in X \cap u(a)$ нобаробарии $g(x) \neq 0$ иҷрошаванда аст. Барои ҳамаи қиматҳои x , $f(x)/g(x) = \varphi(x)$ мегузорем, онгоҳ $f(x) = g(x)\varphi(x)$ ва $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = k$ мувофиқи теоремаи 21.1. ҳангоми $x \rightarrow a$, $f(x) = O(g(x))$.

Аз шarti $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ мавҷудияти атрофи $u(a)$ нуқтаи а мебарояд, ки $\forall x \in X \cap u(a)$ нобаробарии $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ (ба хосияти в. §15 нигаред) ва бинобар ин, нобаробарии $f(x) \neq 0$ иҷрошаванда аст. Барои $\forall x \in X \cap u(a)$, $\varphi(x) = g(x)/f(x)$ мегузорем, онгоҳ $g(x) = \varphi(x)f(x)$ ва $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \frac{1}{k}$.

Боя мувофиқи теоремаи 21.1. ҳангоми $x \rightarrow a$, $g(x) = O(f(x))$. ▲

Мисол. $f(x) = 2x^3$ ва $g(x) = \sin x^3$. Азбаски $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x^3} = \frac{1}{2}$, пас мувофиқи теорема функцияҳои $2x^3$ ва $\sin x^3$ ҳангоми $x \rightarrow 0$ тартиби яхсела доранд.

ТАЪРИФИ 21.3. Функцияҳои $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ва $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ ҳангоми $x \rightarrow a$ эквивалент ном доранд, агар ҷуғи функцияи $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ вуҷуд дошта бошад, ки дар ягон атрофи нуқтаи а барои ҳамаи нуқтаҳои $x \in X$ баробарии

$$f(x) = \varphi(x)g(x) \quad (21.11)$$

$$\text{ва} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1 \quad (21.12)$$

ичро шавад.

Агар хосияти (21.12) иҷро шавад, онгоҳ атрофи $u(a)$ нуқтаи a ёфт мешавад, ки барои ҳамаи $x \in X \cap u(a)$ нобаробарии $\varphi(x) \neq 0$ иҷро мешавад. Барои ҳамаи $x \in X \cap u(a)$ $1/\varphi(x) = \psi(x)$ гузошта мебинем, ки шартҳои (21.11) ва (21.12) бо шартҳои зерин баробарқувваанд:

$$g(x) = \psi(x)f(x), \quad (21.11)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 1. \quad (21.12)$$

Ҳамин тариқ, агар ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияҳои g ва f низ эквивалент бошанд, онгоҳ функсияҳои g ва f низ эквивалентанд, яъне эквивалентнокии ду функсияҳо хосияти симметрии доро мебошанд.

Қайд менамоем, ки барои функсияҳои тартиби яхсела дошта хосияти симметрия низ хос буда барои функсияҳо, ки нисбат ба яқдигар «О — и калон» ҳастанд, хосияти симметрия ҷой надорад.

Функсияҳои байни худ эквивалентро функсияҳои асимптотикӣ баробар менаманд. Баробарҳои асимптотикӣ (эквивалентноки) — и функсияи f ва g ҳангоми $x \rightarrow a$ бо рамзи $f(x) \sim g(x)$ ишора карда мешавад. Аз гуфтаҳои боло маълум мешавад, ки агар ҳангоми $x \rightarrow a$, $f(x) - g(x)$ бошад, онгоҳ $g(x) \sim f(x)$ аст.

Қайд менамоем, ки агар дар шартҳои таърифи 21.3 функсияҳои f ва g дар нуқтаи a муайян бошанд, онгоҳ функсияи $\varphi(x)$ дар нуқтаи a низ муайян мебошад (яъне, $a \in X$) ва ҳудуди (21.12) аз рӯи маънӣ, ки нуқтаи a — ро дорад гирифта мешавад. Бинобар ин, функсияи φ дар нуқтаи a бифосила мебошад ва шартҳои (21.12), $\varphi(a) = 1$ мебарояд.

МИСОЛҲО: 1) Ҳангоми $x \rightarrow 0$ функсияҳои $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ва $g(x) = x^2$ эквивалентанд, чунки $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ гузошта мебинем, ки $\frac{x^2}{1+x^2} = \varphi(x) \cdot x^2$ ва $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$.

2) Ҳангоми $x \rightarrow \infty$ функцияҳои $f(x) = \frac{x^6}{1+x^4} \sim x^2 = g$ эквивалентанд. Дар ҳақиқат, агар $\varphi(x) = \frac{x^4}{1+x^4}$ гузорем, онгоҳ $\frac{x^6}{1+x^4} = \varphi(x) \cdot x^2$ ва $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{1+x^4} = 1$.

3) Ҳангоми $x \rightarrow 0$, $\sin x \sim x$ аст, чунки $\sin x = x \frac{\sin x}{x}$ ва $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

СУПОРИШ. Тасдиқоти зеринро исбот намоед:

Функцияҳои f ва g , ки дар атрофи суроҳшудаи $u(a)$ нуқтаи a нулҳо надоранд, ҳангоми $x \rightarrow a$ эквивалент ҳамон вақт ва фақат ҳамон вақт, агар $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g}{f} = 1$ бошад.

Акнун нишон медиҳем, ки муносибати эквивалентнокии функцияҳо хосияти транзитивиро низ доро мебошад, яъне ҳангоми $x \rightarrow a$ аз шарти $f \sim g$ ва $g \sim h \Rightarrow f \sim h$ аст.

♠ Дар ҳақиқат, аз шарти эквивалентнокии функцияҳои $f \sim g$ ва $g \sim h$ маълум мешавад: чунин атрофи $u = u(a)$ нуқтаи a ва функцияҳои $\varphi: X \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ ва $\psi: X \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ вучуд доранд, ки барои ҳамаи $x \in X \cap U$ баробариҳои зерин ҷой доранд:

$f(x) = \varphi(x)g(x)$, $g(x) = \psi(x)h(x)$ ва $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 1$. Бинобар ин, $f(x) = \varphi(x)\psi(x)h(x)$; дар ин ҷо $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)\psi(x) = 1$ ва баробарии асимптотикии $f \sim h$, ҳангоми $x \rightarrow a$ иҷро мешавад. Аз натиҷаҳои банди 1 ва хосияти транзитивии исботшуда дурустии эквивалент будани функцияҳои беохир хурди зерин ҳангоми $x \rightarrow 0$ мебароянд:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1. \quad (21.13)$$

Ин муносибатҳо ҳангоми $x \rightarrow a$ эквивалентнокиашонро нигоҳ медоранд, агар x —ро ба чунин функцияи $\alpha(x)$, ки $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ аст, иваз намоём: $\alpha \sim \sin \alpha \sim \operatorname{tg} \alpha \sim \arcsin \alpha \sim \operatorname{arctg} \alpha \sim \ln(1+\alpha) \sim e^\alpha - 1$ [4]. Масалан, агар ҳангоми $x \rightarrow 0$, $\sin x^2 \sim x^2$ бошад, онгоҳ ҳангоми $x \rightarrow 1$, $\sin(x-1)^3 \sim (x-1)^3$ аст.

Акнун муносибати

$$O(x) + O(x^2) = O(x), \quad (x \rightarrow 0) \quad (21.14)$$

-ро исбот мекунем:

▲ Муносибати (21.14) нишон медиҳад, ки агар муносибатҳои

$$f(x) = O(x), \quad (x \rightarrow 0) \quad (21.15)$$

$$g(x) = O(x^2), \quad (x \rightarrow 0) \quad (21.16)$$

ҷой дошта бошанд, онгоҳ муносибати $f(x) + g(x) = O(x)$, $(x \rightarrow 0)$ низ ҷой дорад. Аз муносибатҳои (21.15) ва (21.16) ҷуян ададҳои c_1, δ_1 ва c_2, δ_2 -ро мувофиқан ёфтан мумкин аст, ки нобаробариҳои

$$|f(x)| \leq c_1 |x|, \quad (-\delta_1 < x < \delta_1 < 1)$$

$$|g(x)| \leq c_2 |x|^2, \quad (-\delta_2 < x < \delta_2 < 1)$$

ҳосил мешавад. Агар $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ гузорем, онгоҳ нобаробарии зерин ҳосил мешавад: $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq (c_1 + c_2) \cdot |x|$, $(-\delta < x < \delta)$. ▲

Дар боло мафҳуми рамзи $O(f)$ -ро байён кардем, лезин ба ин рамз ягон қимати муайяно мувофиқ нагузоштем. Дар ҳақиқат, ба ин рамз қимат гузоштан ягон маъно надорад. Барои ҳама тарафа фаҳмидани ин рамз мисоли зеринро меорем: агар ҳангоми $x \rightarrow 0$, $f(x) = O(g(x))$ ҷой дошта бошад, онгоҳ ҳангоми $x \rightarrow 0$, $2f(x) = O(g(x))$ низ ҷой дорад. Агар мо рамзи $O(g(x))$ ягон қимати муайяно мувофиқ негузоштем, онгоҳ баробарии $2f(x) = f(x)$ ҳосил мегардад, ки ин нодуруст аст. Сабаби ба вуҷуд омадани ин муҳалифат дар он аст, ки ҳангоми $x \rightarrow 0$ муносибати $f(x) = O(g(x))$ на танҳо барои як функсия, балки барои як қатори беохирин функсияҳо иҷро мегардад. Маҷмӯи ин функсияҳо синфи муайяни функсияҳо ро ташкил медиҳад. Барои ҳамин, ифодае, ки дар он рамзи O дохил аст ба ягон синфи функсияҳо вобаста небошад. Дар ин маврид, масалан баробарии $f(x) = O(g(x))$, $(x \in X)$ -ро «функсияи $f(x)$ дохили функсияҳои $O(g(x))$ » гуфта фаҳмидан лозим аст. Баробарии $O(f(x)) + O(g(x)) = O(\varphi(x))$, $(x \in X)$ -ро «агар функсияи $f_1(x)$ дохили синфи функсияҳои $O(f(x))$ ва $g_1(x)$ дохили синфи функсияҳои $O(g(x))$ бошад, онгоҳ $f_1(x) + g_1(x)$ дохили синфи функсияҳои $O(\varphi(x))$ аст» гуфта фаҳмидан даркор аст.

ТАЪРИФИ 21.4. Агар барои функсияи $f(x)$ ҳангоми $x \rightarrow \infty$ баҳоҳои $f(x) = O(g(x))$, $f(x) = O(h(x))$ ҷой дошта баҳои $g(x) = O(h(x))$ дуруст буда, баҳои $h(x) = O(g(x))$ ҷой надошта бошад, онгоҳ муносибати $f(x) = O(g(x))$ —ро аниқтаркунии баҳои $f(x) = O(g(x))$ меноманд. Вале, агар ададҳои c_1 ва c_2 мавҷуд бошанд, ки барои онҳо нобаробарии $c_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq c_2|g(x)|$ ҳосил гардад, онгоҳ баҳои $f(x) = O(g(x))$ —ро баҳои беҳтарин меноманд.

МИСОЛҲО: 1) Азбаски баҳоҳои $x^2 = O(x^3)$, $x^2 = O(x^4)$, $x^3 = O(x^3)$ ҳангоми $x \rightarrow \infty$ дуруст буда муносибати $x^4 = O(x^3)$ ҷой надорад, пас $x^2 = O(x^3)$ ҳангоми $x \rightarrow \infty$ аниқтаркунии баҳои $x^2 = O(x^4)$ мебошад;

2) Беҳтарин будани баҳои $3x + 2x \sin x = O(x)$, ҳангоми $x \rightarrow \infty$ исбот карда шавад.

▲ Азбаски нобаробариҳои

$$|3x + 2x \sin x| \leq 3|x| + 2|x \sin x| \leq 3|x| + 2|x| = 5|x|,$$

$$|3x + 2x \sin x| \geq 3|x| - 2|x \sin x| \geq 3|x| - 2|x| = |x|,$$

дурустанд, пас $|x| \leq |3x + 2x \sin x| \leq 5|x|$ —ро навишта метавонем. Аз ҳамаи сабаб, баҳои $3x + 2x \sin x = O(x)$, ҳангоми $x \rightarrow \infty$ беҳтарин аст.

ТАЪРИФИ 21.5. Функцияи $\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$ нисбат ба функцияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ҳангоми $x \rightarrow a$, функцияи $b.x$ ном дорад, агар ҷуғи функцияи $\varepsilon: X \rightarrow \mathbb{R}$ мавҷуд бошад, ки дар ягон атрофи нуқтаи a барои ҳамаи $x \in X$ баробарии

$$\alpha(x) = \varepsilon(x)f(x), \quad (21.17)$$

$$\text{ва } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0. \quad (21.18)$$

иҷро шавад.

Агар функцияи $\alpha(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ нисбат ба функцияи $f(x)$ $b.x$ бошад, онгоҳ ҷуғи менависанд: $\alpha(x) = o(f(x))$, $x \rightarrow a$ (хонда шавад: « $\alpha(x)$ о хурд аз $f(x)$, ҳангоми $x \rightarrow a$ » ё « o -баҳои функцияи $\alpha(x)$ нисбат ба функцияи $f(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ » аст).

Мувофиқи таърифи 21.5 навишти « $\alpha(x) = o(1)$, $x \rightarrow a$ » маънои беохир хурд будани функцияи $\alpha(x)$ —ро мефаҳмонад.

Агар чуvin атрофи сурохшудан $y=i(a)$ нуқтаи a мавҷуд бошад, ки барои ҳамаи нуқтаҳои $x \in X \cap i$ нобаробарии $f(x) \neq 0$ иҷро шуда дар мавриди $a \in X$, функсияҳои α ва f дар ин нуқта бефосила бошанд, онгоҳ шартҳои (21.17) ва (21.18) ба шарти зерин баробарқувва аст:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X \cap i}} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = 0 \quad (21.19)$$

Дар назар доштан лозим аст, ки дар нaviшти $\alpha(x) = o(f)$ шарт нест, функсияҳои α ва f ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияҳои беохир хурд бошанд. Масалан, агар $x \rightarrow \infty$, онгоҳ $x^2 = o(x^4)$ буда функсияҳои x^2 ва x^4 ҳангоми $x \rightarrow \infty$ функсияҳои беохир калон мебошанд.

Дар мавриде, ки $f(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияи б.х аст, мегуянд, ки функсияи $\alpha(x) = o(f)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ нисбат ба f беохир хурди тартиби баланд дошта мебошад.

Масалан, агар беохир хурди α нисбат ба беохир хурди f тартиби n -ро ($n=1,2,\dots$) доро бошад, онгоҳ чуvin менависанд: $\alpha(x) = O(f(x)^n)$, $x \rightarrow a$.

МИСОЛҲО:

$$1) \quad x^3 = o(\sin x^2), \quad x \rightarrow 0 \quad \text{чуvin} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x^2} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Беохир хурди $\alpha(x) = x^3$ нисбат ба беохир хурди $f(x) = \sin x^2$ ҳангоми $x \rightarrow 0$ беохир хурди тартиби як аст.

$$2) \quad \alpha(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ҳангоми} \quad x \rightarrow \infty \quad \text{беохир хурди тартиби} \quad 3 \quad \text{нисбат ба бе-}$$

охир хурди $f(x) = \frac{1}{x}$ мебошад, чуvin $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Аз ин

$$\text{сабаб,} \quad \frac{1}{x^2} = o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

3) Ҳангоми $x \rightarrow 0$ функцияҳои $x^2, \cos x \cdot \sin^2 x, \operatorname{tg}^3 x \cdot \sin \frac{1}{x}$ нисбат ба x беохир хурди тартиби баландтар доранд. Бинобар ин, баробариҳои $x^2 = o(x), \cos x \cdot \sin^2 x = o(x), \operatorname{tg}^3 x \cdot \sin \frac{1}{x} = o(x), x \rightarrow 0$ дурустанд.

Талаботи таърифи 21.5. нисбат ба талаботи таърифи рамзи o (таърифи 21.1) ғуруқваттар, чунки аз баҳои $\alpha(x) = o(f(x))$ баҳои $\alpha(x) = O(f(x))$ ҳангоми $x \rightarrow \infty$ ҳосил мешавад. Лекин акси ин ҷумла умуман, нодуруст аст. Масалан, ҳангоми $x \rightarrow 0$, $\sin x = O(1)$ ҷой дорад, чунки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$. Бо ҳамин, ҳангоми $x \rightarrow 0$ баҳои $\sin x = o(x)$ иҷро намегардад, чунки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0$ аст.

Мувофиқи баробарии (21.17) нисбати $\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \varepsilon$ бузургии беохир хурд мебошад. Аз ин ҷо, баробарии $\alpha(x) = \varepsilon(x)f(x)$ ҳосил мегардад, ки функцияи $\alpha(x)$ баробари ҳосили зарби бузургии б.х ба функцияи $f(x)$ мебошад. Барои ҳамин, аломати $=0$ —ро «бузургии беохир хурд зарби» ғуфта фаҳмидан лозим аст.

Дигар хосиятҳои бо рамзи o вобаста буда, монанди хосиятҳои рамзи O мебошанд.

Баъзан хосиятҳои рамаҳои $o(f)$ ва $O(f)$ —ро ҳангоми $x \rightarrow a$ дар ҷадвали поён оварда баробариҳои ин рама доштаро аз ҷаҳат ба рост меҳонем (с-доимия):

№	Х о с и я т	№	Х о с и я т
1 ⁰	$o(cf) = o(f)$	6 ⁰	$o(f^n) \cdot o(f^m) = o(f^{n+m}), n, m \in \mathbb{N}$
2 ⁰	$C \cdot o(f) = o(f)$	7 ⁰	$f^{n-1} \cdot o(f) = o(f^n), n \in \mathbb{N}$
3 ⁰	$o(f) + o(f) = o(f)$ $O(f) + O(f) = O(f)$	8 ⁰	$(o(f))^n = o(f^n), n \in \mathbb{N}$

4^0	$\alpha(o(f))=o(f)$	9^0	$\alpha(f^n)/f=\alpha(f^{n-1}), n \in \mathbb{N}, f \neq 0 \text{ дар } \mathbb{R}_+(a)$
5^0	$\alpha(f+o(f))=o(f)$	10^0	$\alpha(f)=O(f)$

Яке аз ин хосиятҳо, масалан 1^0 —ро исбот менамоем.

▲ Нишон додан лозим аст, ки ҳаргуна функсияи ба синфи $o(f)$ таалуқдор ба синфи функсияҳои $o(f)$ низ таалуқдор аст, яъне ҳангоми $x \rightarrow a$, $\alpha=o(f)$ бошад, онгоҳ $\alpha=o(f)$ аст. Мувофиқи таъриф навишти $\alpha=o(f)$ маънои онро дорад, ки $\alpha(x)=f(x) \cdot \varepsilon(x)$ ва $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x)=0$. Аммо $\alpha(x)=f(x) \cdot \varepsilon(x)=f(x) \cdot \varepsilon_1(x)$; дар ин ҷо $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x)=0$, яъне $\alpha=o(f)$. ▲

СУПОРИШ. Исбот кунед, ки агар $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ ва $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x)=0$ бошад, онгоҳ:

а) $o(g^m)=o(g^m)$, агар $m \leq n$;

б) $o\left(\sum_{i=1}^n c_i g^i\right)=o(g)$, $c_1, c_2, \dots, c_n$ — ҳақиқатӣ.

Мафҳумҳои асосии дар ин банд овардари ҷамъбасти менамоем. Бигузор функсияҳои $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ва $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ дода шуда ҷуғи функсияи $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ вуҷуд дошта бошад, ки барои ҳамаи нуқтаҳои маҷмӯи X , ки дар ягон атрофи $u=u(a)$ нуқтаи a меҳабанд, баробарии зерин иҷро шавад: $f(x)=\varphi(x)g(x)$, онгоҳ:

- 1) агар функсияи $\varphi(x)$ дар u маҳдуд бошад, онгоҳ $f(x)=O(g(x))$;
- 2) агар $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)=1$ бошад, онгоҳ ҳангоми $x \rightarrow a$ $f(x) \sim g(x)$;
- 3) агар $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)=0$ бошад, онгоҳ ҳангоми $x \rightarrow a$ $f(x)=o(g(x))$.

3. Нишондиҳиши эквивалентияҳои функсияҳо.

Агар функсияи $f(x)$ бо функсияи $g(x)$ иваз карда шавад, онгоҳ фарқи $f(x)-g(x)$ —ро саҳи мутлақ ва нисбати $\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}$ —ро саҳи нисбӣ менаманд. Агар вазъияти функсияи $f(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ омӯхта шавад, онгоҳ иваз намудани он бо функсияи $g(x)$ мақсадинок аст, агар: 1) функсияи

$g(x)$ бо ягон маънои муайян аз функсияи $f(x)$ дида соддатар бошад; 2) саҳҳи мутлақи он ҳангоми $x \rightarrow a$ ба сифр майл намояд: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = 0$.

Дар ин маврид мегуянд, ки функсияи $g(x)$ дар атрофи нуқтан a ба функсияи $f(x)$ наздик ё аппроксиматсия мешавад.

Дар поён нишон медиҳем, ки дар байни онҳо функсияҳои байни худ эквивалент: $g(x) \sim f(x)$, $x \rightarrow a$ ҷуғи хосиятеро доро мебошанд, ки на танҳо саҳҳи мутлақ $f(x) - g(x)$, балки саҳҳи нисбии $\frac{f(x) - g(x)}{f(x)}$ ҳангоми $x \rightarrow a$ ба сифр майл мекунад:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} = 0.$$

Дар ин маъно, функсияҳои байни худ эквивалент нисбат ба функсияҳои дигар наздикшавии беҳтарин доранд. Масалан, функсияҳои $x, \frac{1}{3}x, 5x, 8x, 10x$, ҷун функсияи $\sin x$ ҳангоми $x \rightarrow 0$ беозор хурд мебошанд ва бинобар ин саҳҳи мутлақи онҳо дар мавриди иваз намудани $\sin x$ бо ҳар кадоме аз онҳо ба сифр майл мекунад:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin x - \frac{1}{3}x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - 5x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - 8x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - 10x) = 0$$

Вале, танҳо яке аз ин функсияҳо: $g(x) = x$ он хосиятеро доро аст, ки саҳҳи нисбии он ҳангоми иваз намудани $\sin x$ ба ин функсия дар асрон $x \rightarrow 0$ ба сифр майл мекунад.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{\sin x} \right) = 0.$$

Ба сифр майл кардани саҳҳи нисбии $\frac{f(x) - g(x)}{f(x)}$ -ро ҳангоми $x \rightarrow a$ бо рамзи "о хурд" истифода бурда ҷуғи менависем:

$$f(x) - g(x) = o(f(x)), \quad x \rightarrow a.$$

Ин хосияти муҳими функсияҳои байни худ эквивалентро бо таҳқиқоти зерин ҷамъбаст менамоем.

ТЕОРЕМАИ 21.3. Барои он, ки функсияҳои $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ ҳангоми $x \rightarrow a$ эквивалент бошанд зарур ва кифоя аст, ки шарт

$$f(x) = g(x) + o(f(x)), \quad x \rightarrow a \quad (21.20)$$

ичро шавад.

▲ **Заури.** Бигузор ҳангоми $x \rightarrow a$, $f(x) \sim g(x)$ бошад, онгоҳ мувофиқи таърифи 21.3 атрофи $u = u(a)$ нуктаи a ва функсияи $\varphi: X \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ вуҷуд дорад, ки барои ҳамаи нуктаҳои $x \in X \cap U$ шарти зерин иҷро мешавад:

$$f(x) = \varphi(x)g(x) \quad \text{ва} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1.$$

Фарқи $f(x) - g(x)$ —ро дида мебароем:

$$f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x) - g(x) = [\varphi(x) - 1]g(x) = \varepsilon(x)g(x),$$

ки дар ин ҷо $\varepsilon(x) = \varphi(x) - 1$, $x \in X \cap U$ ва $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. Ин ҷуғи маъно дорад, ки ҳангоми $x \rightarrow a$, $\varepsilon(x)g(x) = o(g(x))$, яъне шарт (21.20) иҷрошаванда аст.

Қиёсат. Агар шарт (21.20) иҷро шавад, онгоҳ мувофиқи таърифи функсияи б.х (таъриф 21.5) ҷуғи атрофи $u = u(a)$ нуктаи a ва функсияи $\varepsilon: X \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ вуҷуд дорад, ки барои ҳамаи нуктаҳои $x \in X \cap U$ шарти $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x)$ ва $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ иҷрошаванда аст, онгоҳ $f(x) = [1 + \varepsilon(x)]g(x) = \varphi(x)g(x)$, ки дар ин ҷо $\varphi(x) = 1 + \varepsilon(x)$, $x \in X \cap U$ ва бинобар ин $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$. Ин маънои онро дорад, ки $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow a$. ▲

СУҶОРИШ. Искот кунед, ки ҳангоми $x \rightarrow a$ эквивалентнокии функсияҳои f ва g ҳосилоти симетриро дорад, яъне

$$(f(x) \sim g(x), \quad x \rightarrow a) \Leftrightarrow \{g(x) = f(x) + o(f(x)), \quad x \rightarrow a\}.$$

Мисолҳо. $\operatorname{ctgx} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \rightarrow 0$, ҷуғи

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctgx}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

Айнан, иштон додан мумкин аст, ки

$$\sin x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\arcsin x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$e^x - 1 = x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\ln x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\ln(1+x) = x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$(1+x)^a - 1 = x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

НАТИҶА: Бигузор $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = c \neq 0$ бошад, онгоҳ ҳангоми $x \rightarrow a$, $g \sim cf$ ва $g(x) = cf(x) + o(f(x))$.

▲ Агар $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = c \neq 0$ бошад, онгоҳ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{cf(x)} = 1$ ва ҳангоми $x \rightarrow a$, $g \sim cf$ аст.

Аз ин ҷо, мувофиқи теоремаи 21.3 ва қадвали банди 2 овардашуда $g(x) = cf(x) + o(cf(x))$ ё ки $g(x) = cf(x) + o(f(x))$, $x \rightarrow a$. ▲

ТЕОРЕМАИ 21.4. Бигузор функсияҳои f , f_1 , g , g_1 дар маҷмӯи X дода шуда ҳангоми $x \rightarrow a$ $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$ бошанд. Агар $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ вуҷуд дошта бошад, онгоҳ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ низ вуҷуд дорад ва натиҷаҳои онҳо бо ҳамдигар баробаранд, яъне

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \quad (21.21)$$

▲ Шарти $f \sim f_1$ ва $g \sim g_1$, $x \rightarrow a$, $x \in X$ чуқури маъно дорад: атрофи $u = u(a)$ нуқтаи a ва функсияҳои φ ва ψ , ки дар $X \cap u$ муайян мебошанд бо чуқури хосият вуҷуд доранд: $f(x) = \varphi(x)f_1(x)$, $g(x) = \psi(x)g_1(x)$, $x \in X$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 1$. Бинобар ин,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)f_1(x)}{\psi(x)g_1(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \psi(x)} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g_1(x)}. \quad \blacktriangle$$

4. Методи ҷудо намудани қисми асосии функсия ва тадбири он дар ҳисоб намудани ҳудудҳо.

Бигузор функсияҳои $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ дода шуда бошад. Функсияи $f(x)$ қисми асосии функсияи $g(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ ном дорад, агар фарқи $g(x) - f(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ функсияи б.х бошад, яъне

$$g(x) - f(x) = o(f), \quad x \rightarrow a.$$

МИСОЛҲО: 1) қисми асосии функсияи $\sin x$ ҳангоми $x \rightarrow 0$ ба x баробар аст, чуқури дар асоси $x \rightarrow 0$, $\sin x - x = o(x)$ аст.

2) барои бисёрраҳои $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, функсияи $a_n x^n$ ҳангоми $x \rightarrow \infty$, қисми асосии бисёрраҳои $P_n(x)$ мебошад, ҷуви

$$P_n(x) - a_n x^n = o(x^n), \quad x \rightarrow \infty.$$

Агар функсияи $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ дода шуда бошад, онгоҳ ҳангоми $x \rightarrow a$ қисми асосии он зворимата муайян намебардад. Мувофиқи теоремаи 21.3 даргуна функсияи $f(x)$, ки ба $g(x)$ эквивалент аст, қисми асосии функсияи $g(x)$ ҳангоми $x \rightarrow a$ мебошад.

Масалан, биезур $g(x) = x + x^2 + x^3$ бошад. Азбаски $x^2 + x^3 = o(x)$, $x \rightarrow 0$, онгоҳ $g(x) - x = o(x)$, $x \rightarrow 0$. Аз тарафи дигар, $x^3 = o(x + x^2)$, $x \rightarrow 0$, биезур ин $g(x) - (x + x^2) = o(x + x^2)$, $x \rightarrow 0$. Дар маънидаи якум, ҳангоми $x \rightarrow 0$, $f(x) = x$ ва дар маънидаи дуум $f(x) = x + x^2$. Аммо, агар қисми асосии функсия бо андеша интихоб карда шавад, онгоҳ зворимата мешавад. Дар маънидаи хусусӣ, тасдиқоти зерин ҷой дорад, ки беисбот меорем.

ЛЕММА. Биезур $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ ва a — нуқтаи ҳудуди маҷмуи X бошад. Агар функсияи $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ ҳангоми $x \rightarrow a$ қисми асосии намуди $A(x - x_0)^k$, $A \neq 0$ (A ва k — доимӣҳо) — ро дошта бошад, онгоҳ дар байни ҳамаи қисмҳои асосии ҳамаи намуд вай ягона муайян карда мешавад.

Дар хотима тадбири методӣ ҷудо намудани қисмҳои асосиро ҳангоми ҳисоб намудани ҳудуди функсияҳо дар ҳалли яқинд машқҳо нишон медиҳем.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{2 \arctg x - \arcsin x} \text{ — ро ёбед.}$$

▲ Азбаски

$$e^x - 1 = x + o(x), \quad \sqrt{1+x} - 1 = (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2}x + o(x) \Rightarrow e^x - \sqrt{1+x} = \frac{2}{3}x + o(x), \quad x \rightarrow 0;$$

$$\arctg x = x + o(x), \quad \arcsin x = x + o(x) \Rightarrow 2 \arctg x - \arcsin x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

Бинобар ин, $\frac{e^x - \sqrt{1+x}}{2\arcsin x - \arcsin x} = \frac{\frac{2}{3}x + o(x)}{\frac{2}{3}x + \frac{o(x)}{2}} = \frac{\frac{2}{3}x + \frac{o(x)}{2}}{1 + \frac{o(x)}{x}}$, дар ин ҷо ҳангоми

$x \rightarrow 0$, $\frac{o(x)}{x} = o(1) \rightarrow 0$. Ҳангоми $x \rightarrow 0$ ба ҳудуд гузашта меёбем, ки ҳудуди матлуб ба $\frac{2}{3}$ баробар аст.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \arcsin 5x - 10x^3}{\sin 3x + 2tg^2 x + (e^x - 1)^3}$ -ро ҳисоб кунед. Азбаски

$\ln(1+x+x^2) - x + x^2$, $x \rightarrow 0$ пас $\ln(1+x+x^2) = x + x^2 + o(x+x^2)$
 аммо $o(x+x^2) = o(x)$ ва $x^2 = o(x)$, $x \rightarrow 0$: бинобар ин, а) $\ln(1+x+x^2) - x + x^2$, $x \rightarrow 0$; $\arcsin 5x - 5x$, пас б) $\arcsin 5x = 5x + o(5x) = 5x + o(x)$,
 $x \rightarrow 0$; в) $10x^3 = o(x)$, $x \rightarrow 0$. Аз ҷудокунии асимптотикии $\sin 3x - 3x$
 ҳосил мекунем: з) $\sin 3x = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$; аз шарт $tg^2 x - x^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2tg^2 x - 2x^2 \Rightarrow$ д) $2tg^2 x = 2x^2 + o(2x^2) = 2x^2 + o(x) = o(x)$, $x \rightarrow 0$;

аз шарт $(e^x - 1)^3 - x^3 \Rightarrow$ з) $(e^x - 1)^3 = x^3 + o(x^3) = o(x)$, $x \rightarrow 0$: Сурати каср
 ҷуған ҷудокунии асимптотикӣ дорад:

$\ln(1+x+x^2) + \arcsin 5x - 10x^3 = x + o(x) + 5x + o(x) - o(x) = 6x + o(x)$, $x \rightarrow 0$.

Айван барои маҳраҷи каср ҳосил мекунем:

$\sin 3x + 2tg^2 x + (e^x - 1)^3 = 3x + o(x) + o(x) = 3x + o(x)$, $x \rightarrow 0$. Бинобар ин,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \arcsin 5x - 10x^3}{\sin 3x + 2tg^2 x + (e^x - 1)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + o(x)}{3x + o(x)}$, аммо $6x + o(x) - 6x$; $3x + o(x) - 3x$, $x \rightarrow 0$.

Мувофиқи теоремаи 21.4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + o(x)}{3x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{3x} = 2$.

3) Ҳудудро ҳисоб намоед:

$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} + o(0) \right) = \frac{1}{4}$.

4) Худуди $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cosh x} \right)^{\frac{1}{\sin(1+x)}}$ -ро ёбед.

Аввал нишон медиҳем, ки ҳангоми $x \rightarrow 0$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\cosh x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$ аст.

Азбаски $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, $\sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$ пас ҳангоми $x \rightarrow 0$ ҳосил мекунем:

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \Rightarrow \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Айнан ҳамин тавр, $\cosh x - 1 = 2 \sinh^2 \frac{x}{2}$ ва $\sinh \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$ ҳангоми $x \rightarrow 0$ бинобар

ин $\cosh x - 1 \sim \frac{x^2}{2} \Rightarrow \cosh x \sim 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ Азбаски

$$\ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0 \text{ пас } x \ln(1+x) = x(x + o(x)) = x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

Ин таъдидиро ҳоро дар мисоли додашуда барои сурат ва маҳраҷ иҷро намуда меёбем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin(1+x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^{\frac{1}{x^2 + o(x^2)}} = e^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{чунон}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} = -\frac{1}{2}.$$

Айнан ҳосил мекунем: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cosh x)^{\frac{1}{\sin(1+x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^{\frac{1}{x^2 + o(x^2)}} = e^{\frac{1}{2}}.$

Бинобар ин, ҳудуди матлуб чунон ҳал мешавад:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cosh x} \right)^{\frac{1}{\sin(1+x)}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Машғур барои баён V

1. Агар функсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтаи $x \in X$ бефосила бошад, функсияи f^2 дар ин нуқта бефосила мешавад ё не? Акси ин тасдиқот чой дорад ё не?

2. Исрот кунед, ки функсияи

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x > 0; \\ x^2, & \text{агар } x = -m/n < 0, n=2k-1, k, m \in \mathbb{N}; \\ 1, & \text{агар } x=0. \end{cases}$$

дар нуқтан $x=0$ бефосила аст.

3. Иббот кунед, ки маҷмӯи қиматҳои дар порча муайян ва бефосила порча буда, функцияи дар интервал муайян ва бефосила интервал мебошад.

4. Бигузор функцияҳои $f:X \rightarrow R$ ва $g:X \rightarrow R$ дар нуқтан $x \in X$ бефосила ва $f(x) > 0$ бошад. Бефосилагии функцияи $h=[f]^g$ —ро дар ин нуқта муқарар кунед.

5. Бигузор $f:[a;b] \rightarrow [a;b]$ —иғъикоси бефосилаи порча дар ҳадаш бошад, онгоҳ афқадан як нуқтан $x \in [a;b]$ ёфт мешавад, ки барои он $f(x)=x$ аст (Ин нуқтаро нуқтан беҳаракати иғъикоси f меноманд). Ин тасдиқотро иббот намоед. Оё ин натиҷа дуруст мемонад, агар $[a;b]$ —ро ба интервали $(a;b)$ иваз намоем? Ба ҳаман маҷмӯи R ҷия?

6. Бигузор $f:X \rightarrow R$ дар маҷмӯи ихтиёрии маҳдуди X мунтазам бефосила бошад. Нишон диҳед, ки $f(x) \in M(X)$, яъне f дар M маҳдуд аст. Оё ҷуғра хулоса дуруст мемонад, агар шарт мунтазам бефосилагиро ба шарт бефосилагӣ иваз намоем.

7. Иббот кунед, ки модули бефосилагии функцияи $f(x)=\sin x^2$ дар маҷмӯи $X(0;+\infty)$ бузургия дония буда ба $\omega_5(f)=2$ аст.

8. Иббот кунед, ки агар функцияи $f:[a;b] \rightarrow R$ дар порчаи $[a;b]$ —монотон буда адади ихтиёрии c , ки дар байни $f(a)$ ва $f(b)$ ҳоб аст, қимати он бошад, онгоҳ f дар $[a;b]$ бефосила аст.

9. Иббот кунед, ки агар функцияи f дар нуқтан a бефосила буда функцияи g дар ин нуқта қавиш дошта бошад, онгоҳ функцияи $f+g$ дар ин нуқта қавиш дорад.

10. Нишон диҳед, ки ҳангоми $x \rightarrow +0$, $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt[4]{x}$ ва ҳангоми $x \rightarrow +\infty$, $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$.

11. Функцияи намуни $g(x)=cx^a$ —ро ёбед, ки ҳангоми $x \rightarrow a$ ба функцияи $f(x)$ эквивалент бошад, агар

$$a) f(x) = \frac{x^4}{2x^2 + x + 3}, \quad a = 0, \quad a = \infty;$$

$$б) f(x) = \sqrt{x^6 + 3\sqrt{x}}, \quad a = 0, \quad a = \infty;$$

$$в) f(x) = \frac{\ln(1 + x + x^2)}{x^2}, \quad a = 0;$$

$$г) f(x) = \frac{\cos^3 3x - \cos^2 5x}{x}, \quad a = 0.$$

$$a) f(x) = \frac{x^4}{2x^2 + x + 3}, \quad a = 0, \quad a = \infty;$$

$$12. \text{ Функсияҳои } f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, \quad g(x) = \frac{x^2-1}{x^2-1} \text{ дар атрофи нуқтаи } x_0=1$$

ба ғайр аз нуқтаи x_0 муайян ҳастанд. $f(x_0)$ ва $g(x_0)$ —ро тавре муайян кунед, ки функсияҳои нав сохта шуда дар нуқтаи $x_0=1$ бефосила шаванд.

13. Исбот кунед, ки решаи муодилаи $x^3 - 3x + 1 = 0$ дар порчаи $[0; 1]$ меҳобад. Яке аз решаҳои ин муодиларо то саҳеҳи 0,1 ҳисоб кунед.

14. исбот кунед:

$$a) 2x + \sin x = O(x), \quad x \rightarrow +\infty;$$

$$б) \sqrt{1+x^2} + x^2 \sin x = O(x^2), \quad x \rightarrow +\infty;$$

$$в) \sqrt{x^2+1} - x = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty;$$

Математика аз талаботи
одамон ба вуҷуд омадааст.

Ф. Энгелс

БОБИ VI. ҲИСОБИ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

Назарияи адаллҳои ҳақиқӣ, назарияи ҳудудҳо ва бифосилагӣ номи «муқаддимаи анализ» —ро дорад. Аյунун бевосита ба омӯзиши анализ математикӣ мегузарем. Омӯзиширо аз ҳисоби дифференциалии функсияҳои ҳақиқӣи яктангӣрбанда оғоз менамоем.

Ба ин мафҳум бисёр масъалаҳои амалӣ: масъала дар бораи ҳисоб кардани суръати ҳаракати ҷисм дар лаҳзаи вақти муайян, гузаронидани расанда ба ягон нуқтаи хити қавҷ ва дигарҳо меорад. Ҳисоб менамоем, ки ба ин намуди масъалаҳо, ҳанӯз аз курси математикӣи мактабӣ шавнос аст. Аз ин сабаб, ин бобро бевосита аз мафҳуми ҳисоби функсия оғоз менамоем.

§22. ҲОСИЛА ВА ҲОСИЯТҲОИ ОН.

1. Таърифи ҳосилии функсия дар нуқта

Функсияи $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ —ро дида мебароем.

Бигузор $x_0 \in (a;b)$ бошад. Нуқтаи ихтиёрии $x \in (a;b)$, $x \neq x_0$, гирифта ифодаи $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ —ро тартиб медиҳем.

ТАЪРИФИ 22.1. Агар дар $\bar{\mathbb{R}}$, ҳангоми $x \rightarrow x_0$ ҳудуди ифодаи $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ вуҷуд дошта бошад, онгоҳ ин ҳудудро ҳосилии функсияи $f(x)$

дар нуқтаи x_0 номида бо $f'(x_0)$ ишора менамоемд, яъне

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Қайд менамоем, ки мувофиқи таъриф $f'(x_0) \in \bar{R}$.

ТАЪРИФИ 22.2. Агар $f'(x_0) \in R$ бошад, онгоҳ мегуянд, ки функсияи f дар нуқтаи x_0 ҳосилаи охиринок дорад. Агар $f'(x_0) = +\infty$ ё $f'(x_0) = -\infty$ бошад, онгоҳ мегуянд, ки функсияи f дар нуқтаи x_0 ҳосилаи беохир дорад. Агар $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ дар R вуҷуд надошта бошад, онгоҳ ҳисоб карда мешавад, ки функсияи f дар нуқтаи x_0 ҳосила надорад.

ҚАЙД. Мо ҳосилаи функсияи f -ро дар нуқтаи дохилии $x_0 \in (a; b)$ дидем. Бигузор $f: X \rightarrow R$, онгоҳ ҳосилаи функсия дар ҳар кадом нуқтаи ҳудуди $x_0 \in X$ низ бо баробарии $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ муайян карда мешавад.

Қайд менамоем, ки агар $X = [a; b]$ бошад, онгоҳ ҳосила дар нуқтаи a (b), мувофиқи таъриф, чунин муайян карда мешавад:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}; \quad \left(f'(b) = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \right).$$

Азбаски $\Delta x = x - x_0 = h \Rightarrow x = x_0 + \Delta x = x_0 + h \Rightarrow \Delta x = h$ афзоиши аргумент ва $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ -афзоиши функсияи $f(x)$ -ро ифода мекунад, пас ҳосилаи функсияи $f: X \rightarrow R$ ин тавр низ ифода мешавад:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ҳамин тариқ, ҳосилаи функсияи $f: X \rightarrow R$ дар нуқтаи x_0 ҳудуди нисбати афзоиши функсия $\Delta f(x)$ ба афзоиши аргументи Δx -ро ҳангоми $\Delta x \rightarrow 0$ меноманд, агар ин ҳудуд вуҷуд дошта бошад. Амали ёфтани ҳосилаи функсияро амали дифференсиронӣ меноманд.

МИСОЛҲО: Бигузор $f: X \rightarrow R$, $X \subset R$ -маҷмуи кушода ва нуқтаи $x \in X$ бошад.

$$1) \quad f(x) = c, \quad c - \text{доимӣ, онгоҳ } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Ҳамин тариқ, барои $\forall x \in X$, $c' = 0$.

$$2) \quad \text{Агар } f(x) = ax, \quad X = R, a \in R \quad \text{бошад, онгоҳ}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) - ax}{h} = a \quad \text{яъне барои } \forall x \in R, \quad f'(x) = (ax)' = a.$$

$$3) \quad \text{Агар } f(x) = x^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad X = (0; +\infty) \text{ бошад, онгоҳ}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^a - x^a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^a \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^a - 1 \right]}{h} = x^a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^a - 1}{\frac{h}{x}} = x^{a-1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^a - 1}{t} = ax^{a-1}.$$

яъне барои $\forall x \in (0; +\infty)$, $f'(x) = (x^a)' = ax^{a-1}$.

4) Агар $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ бошад, онгоҳ

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x.$$

яъне барои $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$.

5) Айнан, қаноат ҳосил мекунем, ки агар $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ бошад, онгоҳ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$.

6) Агар $f(x) = a^x$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ бошад, онгоҳ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a$, яъне барои $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (a^x)' = a^x \ln a$. Дар

ҳолати хусусӣ, агар $a = e$ бошад, онгоҳ $f(x) = e^x = \exp(x)$ ва $f'(x) = (e^x)' = e^x$.

7) Агар $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in (0; +\infty)$, бошад, онгоҳ

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \frac{x+h}{x}}{\frac{h}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{x \cdot \frac{h}{x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Ҳамин тариқ, $f'(x) = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. Агар $a = e$ бошад, онгоҳ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

2. Ҳосилшави ақтарики.

Бигузор $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ бошад. Бурриши атрофи нуқтан $x_0 \in \mathbb{R}$ — ро бо нури $x \geq x_0$ ($x \leq x_0$), атрофи рост (чап) —и нуқтан x_0 номида онро бо рамзи $x \rightarrow x_0 + 0$ ($x \rightarrow x_0 - 0$) ё $x \rightarrow x_0^+$ ($x \rightarrow x_0^-$) ишора мекунем.

ТАЪРИФИ 22.3. Агар $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ дар $\bar{R}$ мавҷуд бошад, онгоҳ

натичаи ин ҳудудро ҳосилаи рости функсияи f дар нуқтан x_0 меноманд ва бо рамзи $f'_+(x_0)$ ё $f'(x_0+0)$ ишора менамоянд.

Агар $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ дар $\bar{R}$ мавҷуд бошад, онгоҳ ин ҳудудро ҳосилаи

чапи функсияи f дар нуқтан x_0 номида бо рамзи $f'_-(x_0)$ ё $f'(x_0-0)$ ишора

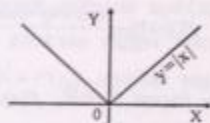
мекунад. Ҳосилаҳои рост ва чапи функсияи додашударо мухтасар, ҳосилаҳои яктаарафа меноманд. Барои нуқтаи ҳудудии $x_0=0$ ҳосилаҳои яктаарафа бо рамзи $f'(0+)$, $f'(0-)$ ё $f'_+(0)$, $f'_-(0)$ ишора карда мешаванд.

Аз тасдиқоти мавҷудияти ҳудуди функсия дар нуқта (§16) шартҳои зарурӣ ва кифояти мавҷудияти ҳосилаи функсияи $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтаи x_0 мебарояд:

ТЕОРЕМАИ 22.1. барои он, ки функсияи $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтаи x_0 ҳосила дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки ҳосилаҳои рост ва чапи он дар ин нуқта мавҷуд буда бо ҳамдигар баробар бошанд: $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$.

Дар ин маврид $f'(x_0)=f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$ аст.

МИСОЛҲО. 1) Агар $f(x)=|x|$, $x_0=0$ бошад (расми 69), онгоҳ



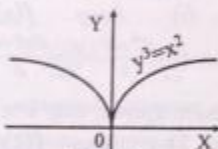
Расми 69

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Ҳамин тариқ, $\forall x \neq 0$ формулаи $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$ ҷой дорад.

2) Агар $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$, $x_0=0$ бошад (расми 70), онгоҳ

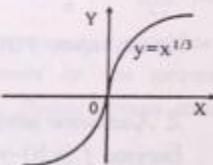


Расми 70

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

3) Агар $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=0$ бошад (расми 71), онгоҳ

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$



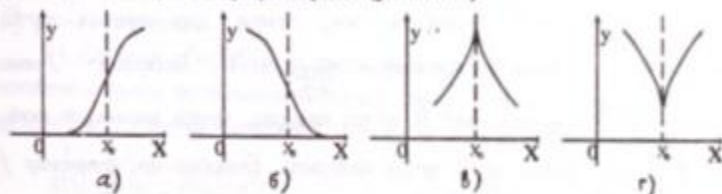
Расми 71

4) Агар $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sqrt{x-1}, & x > 0, \end{cases}$ $x_0=1$ бошад, онгоҳ

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0}{x-1} = 0.$$

5) Якчанд тасвири графики функсияҳоро меорем, ки дар нуқтаи x_0 ҳосилаҳои беохирӣ ястарафа доранд (расми 72):



Расми 72

Дар мавриди а) $f'(x_0) = +\infty$ ва дар б) $f'(x_0) = -\infty$.

Дар мавриди в) $f'_-(x_0) = +\infty$ буда $f'_+(x_0) = -\infty$.

Дар мавриди г) $f'_-(x_0) = -\infty$ буда $f'_+(x_0) = +\infty$.

3. Бефосилагии функсия, ки ҳосилаи охиринок дорад.

ТЕОРЕМАИ 22.2. Бигузор $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a; b)$. Агар функсияи f дар нуқтаи x_0 ҳосилаи охиринок дошта бошад, онгоҳ вай дар ин нуқта бефосила аст.

$$(\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}) \Rightarrow f(x_0) \in C(a; b).$$

Мувофиқи шарти теорема $f'(x_0)$ мавҷуд аст, пас

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[(x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \cdot f'(x_0) = 0.$$

Ҳамин тариқ, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0 \Rightarrow f \in C(a; b)$. Тасдиқоти теорема танҳо

шарти зарурӣ буда шарти кифояи ғайбӣ наметавонад. Масалан, функсияи $f(x) = |x|$, ки дар маҷмӯи $\mathbb{R}$ муайян ва бефосила аст, ки дар нуқтаи $x_0 = 0$

ҳосила надорад, ҷуғзи $f'_+(0)=1$ ва $f'_-(0)=-1$ (ба мисоли 1 банди 2 нига-ред).

Функсияи

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x); & x \neq 0 \\ 0; & x = 0. \end{cases}$$

дар нуқтаи $x_0=0$ бифосила аст, ҷуғзи дар нуқтаи $x_0=0$, $\Delta f(x) = \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}$ буда $|\Delta f(x)| \leq |\Delta x|$ ва $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$ мебошад. Аммо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{\Delta x}$ дар $\bar{R}$ вуҷуд надорад, ҷуғзи ҳосилаҳои яқта-рафани $f(x)$ дар нуқтаи $x_0=0$ вуҷуд надоранд. Бинобар ин, функсияи f дар нуқтаи $x_0=0$ ҳосила надорад.

ҚАЙД. Функсияҳои дар маҷмӯи R бифосилае вуҷуд доранд, ки дар ягон нуқта ҳосила надоранд. Математикан олмонӣ К.Вейерштрасс аввалин шуда ин далелро бо мисол нишон дод.

4. Ҳосилаи сумма, фарқ, зарб ва тақсим.

ТЕОРЕМАИ 22.3. Агар функсияҳои $f:(a;b) \rightarrow R$, $g:(a;b) \rightarrow R$ дар нуқтаи $x_0 \in (a;b)$ ҳосилаи охиринок дошта бошад, онгоҳ ҳосилаи функсияҳои $(f \pm g)'(x_0)$, $(f \cdot g)'(x_0)$, $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$ бо шарт $g(x_0) \neq 0$; $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)$ бо шарт $g(x_0) \neq 0$

дар нуқтаи x_0 мавҷуд буда баробариҳои зерин иҷрошаванда мебошанд:

- 1) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- 2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- 3) $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, $g(x_0) \neq 0$;
- 4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, $g(x_0) \neq 0$.

ИСБОТ: 1) Аз тасдиқоти ҳудуди сумма ва фарқи функсия дар нуқта мебарояд.

2) Ифодаи $\frac{f(x) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0}$ -ро гирифта $\frac{f(x_0) \cdot g(x)}{x - x_0}$ -ро ҷамъ ва тарҳ мекунем:

$$\frac{f(x) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot f(x_0).$$

Функцияи $g(x)$ дар нуқтаи x_0 бефосила аст, ҷунок вай дар ин нуқта ҳосилаи охиринок дорад. Бинобар ин, дар баробарии охиринок ба ҳудудгузашта мувофиқи теоремаи ҳудудӣ сумма ва ҳосилаи зарб тасдиқоти 2) -ро ҳосил мекунем.

3) Азбаски $g(x_0) \neq 0$ ва g дар нуқтаи x_0 бефосила аст, пас мувофиқи хосияти локалии функцияҳои бефосила атрофи нуқтаи x_0 ёфт мешавад, ки $g(x_0) \neq 0$ аст. Нуқтаи ихтиёрии x -ро аз ин атроф гирифта ифодаи

$$\frac{1}{\frac{g(x)}{x - x_0} - \frac{1}{g(x_0)}} = \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{\frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} - \frac{1}{g(x_0)}} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{\frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} - \frac{1}{g(x_0)}} \quad \text{-ро дида}$$

мебарем. Ҳангоми $x \rightarrow x_0$ ба ҳудуд гузашта хосиятҳои ҳудуд ба бефосилагии функцияе, ки ҳосилаи охиринок дорад, истифода мебарем ва тасдиқоти 3) -ро ҳосил мекунем.

4) И 4) аз тасдиқоти 2) ва 3) мебарояд:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g} \right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + \left(\frac{1}{g} \right)'(x_0) \cdot f(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} - f'(x_0) \cdot \frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} = \\ &= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}. \end{aligned}$$

НАТИҶА. Адади доимиро аз зери ишораи ҳосила баровардан мумкин аст, яъне $(cf)'(x_0) = c f'(x_0)$ ки дар ин ҷо $c \in \mathbb{R}$.

МИСОЛҲО. 1. $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $X = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}, \forall x \in X$ ҳосил мекунем:

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$2. f(x) = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}; \quad X = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\}, \forall x \in X;$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} \Rightarrow (\operatorname{cigt} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

5. Ифода кардани афзониш функсия бо ёрии дошта.

Дар байни ҳамаи функсияҳо хосиятҳои оддиро функсияе дорои мебошад, ки бо формулаи $l(x) = kx$ муайян мегардад. Ин функсияро функсияи хаттӣ меноманд. Графики он хати росте аст, ки аз ибтидои координата мегузарад. Яке аз хосиятҳои функсия, ки дар нуқтаи x_0 ҳосилаи охиринок дорад, он мебошад, ки афзониши вай дар ин нуқта аз функсияи хаттӣ $f'(x_0)\Delta x$ нисбатан кам фарқ мекунад.

Бигузор $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ ва $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМАИ 22.4. Агар функсияи f дар нуқтаи x_0 ҳосилаи охиринок дошта бошад, онгоҳ ҳангоми $x \rightarrow x_0$ афзониши он дар намуди

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x - x_0)$$
 ифода меёбад.

Бигузор $x \neq x_0$ ва $x_0 \in (a;b)$. $\alpha(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$ -мегузорем, онгоҳ

ҳангоми $x \rightarrow x_0$ функсияи $\alpha(x)$ беохир хурд мешавад, яъне $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Баробарии $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$ ҳосил мешавад, ки $\alpha(x)(x - x_0) = \alpha(x - x_0)$ аст, чунки $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$. Ҳамин тариқ, ҳангоми $x \rightarrow x_0$ $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x - x_0)$.

Баробарии охиринокро дар намудҳои гуногуни баробаркуна ифода кардан мумкин аст:

$$1) \quad f(x) - f(x_0) = (x - x_0)[f'(x_0) + \alpha(x)], \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0;$$

$$2) \quad x - x_0 = \Delta x \text{ гузорем, онгоҳ } x = x_0 + \Delta x \text{ ва ҳангоми } \Delta x \rightarrow 0, \\ f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x).$$

$$3) \quad \Delta x = h \text{ мегузорем, онгоҳ ҳангоми } h \rightarrow 0, \\ f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \alpha(h).$$

ХУЛОСА. Барои функсияҳои дар нуқтаи x_0 ҳосилаи охиринок дошта афзониши он $f(x_0 + h) - f(x_0)$ ҳангоми $h \rightarrow 0$ аз функсияи хаттӣ $f'(x_0)h$ ба

бузургини беозор хурди тартиби баланд нисбат ба h , яъне ба бузургини $\alpha(h)$, фарқ мекунад.

6. Ҳосилан функсияи мураккаб.

Бигузор $f: X \rightarrow Y$; $g: Y \rightarrow R$ ду функсияҳои додашуда X , Y — интервалҳои кушода бошанд. Композитсияи $g \circ f$ —ро дида мебароем.

ТЕОРЕМАИ 22.5. Агар функсияҳои f дар нуқтаи $x_0 \in X$ ва функсияи g дар нуқтаи $y_0 = f(x_0)$ ҳосилан охиринок дошта бошад, онгоҳ ҳосилан охириноки композитсияи $g \circ f$ дар нуқтаи x_0 вуҷуд дорад ва ҳосила аз он ба ҳосили зарби ҳосилаҳои ин композитсияро ташкилдиҳанда баробар аст: $(g \circ f)'(x_0) = (g' \circ f)(x_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

▲ Барои қуллан $y_0 = f(x_0)$, $y = f(x)$ мегузорем. Афзоиши $g \circ f$ —ро дар нуқтаи x_0 дида мебароем: $(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) = g(y) - g(y_0)$. Азбаски $g'(y_0) \in R$, пас мувофиқи теоремаи 22.4 афзоиши функсияи g —ро дар нуқтаи y_0 чуқур ифода мекунем: $g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y - y_0) + \alpha(y)(y - y_0)$, ки дар ин ҷо $\lim_{y \rightarrow y_0} \alpha(y) = 0$. Аз ин ҷо меёбем: $\frac{g(y) - g(y_0)}{x - x_0} = g'(y_0) \frac{y - y_0}{x - x_0} + \alpha(y) \frac{y - y_0}{x - x_0}$.

Мувофиқи шарти теорема $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in R$. Функсияи f дар нуқтаи x_0 бефосила аст, пас пас дар асоси $x \rightarrow x_0$, $y - y_0 = f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$.

Ҳамин тариқ, ҳангоми $x \rightarrow x_0$ бузургини $y \rightarrow y_0$ ва $\lim_{y \rightarrow y_0} \alpha(y) = 0$ аст. Бинобар ин $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{x - x_0}$ вуҷуд дорад:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{x - x_0} = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \blacktriangle$$

МИСОЛҲО. 1. Ҳосилан функсияи $G(x) = \cos x^4$ —ро дар нуқтаи $x \in R$ ҳисоб мекунем. Ин функсиявиро дар намуни композитсияи $g \circ f$ ифода мекунем, ки дар ин ҷо $f: x \rightarrow x^4$, $g: y \rightarrow \cos y$ аст. Функсия дар намуни $(g \circ f)(x) = G(x)$ ифода меёбад. Азбаски $g'(y) = -\sin y$, $f'(x) = 4x^3$ аст, пас мувофиқи теоремаи исботшуда $G'(x) = -\sin x^4 \cdot 4x^3$ аст;

2. Бинобар дар маҷмӯи $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ функсияи $G(x) = \log_a |x|$ дода шуда бошад. Ҳосилаи функсияи $f \mapsto |x|$ -ро меёбем. Агар $x > 0$ бошад, онгоҳ $|x| = x$ ва $f'(x) = 1$. Барои $x < 0$, $|x| = -x$ ва $f'(x) = -1$. Бинобар ин, барои $\forall x \neq 0$, $f'(x) = \operatorname{sign} x$ (дар нуқтаи $x=0$, ҷи тавре ки пештар нишон дода будем, ин функсия ҳосила надорад). Функсияи G -ро дар намуни $G = g \circ f$ ифода мекунем, ки дар ин ҷо $g: y \rightarrow \log_a y$ аст. Мувофиқи теоремаи исботшуда $G'(x) = \frac{1}{|x| \ln a} \cdot f'(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{|x| \ln a} = \frac{(\operatorname{sign} x)^2}{|x| \operatorname{sign} x \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$. Ҳамин тариқ, барои $\forall x \in X$, $G'(x) = \frac{1}{x \ln a}$. Дар ҳолати хусусӣ ҳангоми $a=e$ барои $\forall x \in X$ ҳосила мекунем; $G'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

3. «Функсияи дараҷа-нишондорандагӣ» -и $G(x) = (u(x))^{v(x)}$ -ро дида мебароем. Вай дар ҳамаҷиғи маҷмӯи $X = \{x \in \mathbb{R}, u(x) > 0\}$ муайян буда дар он функсияҳои u ва v ҳосилаҳои охиринок доранд. Барои ҳисоб кардани ҳосилаи он аз айёнияти логарифмики $u = e^{\ln u}$ ва теоремаи исботшуда истифода мебарем.

$$(u^v)' = \left[(e^{v \ln u})' \right] = e^{v \ln u} (v \ln u)' = u^v \left(v' \ln u + \frac{v u'}{u} \right)$$

Дар ҳолати хусусӣ, агар $G(x) = x^x$ ва $X = (0, +\infty)$ бошад, онгоҳ $G'(x) = x^x (\ln x + 1)$.

Боз ба як тараф дигари ҳисоб кардани ҳосилаи функсияи намуни додешуда шлюс мешавем. Ин тараз номи «ҳосилаи логарифмӣ» -ро дорад. $(\ln G)' = G'/G$. Дар мисоли мо $G = u^v$ аст, пас $\ln G = \ln u^v = v \ln u$ ва $(\ln G)' = G'/G = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}$. Аз ин ҷо $G' = G \left(v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right)$ ва $(u^v)' = u^v \left(v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right)$.

Теоремаи исботшуда барои композицияи мавқори охиринокӣ функсияҳои таърифшаванда аст. Масалан, агар функсияи f_1 дар нуқтаи x_0 , f_2 - дар нуқтаи $f_1(x_0)$ ва f_3 - дар нуқтаи $f_2(f_1(x_0))$ ҳосилаи охиринок дошта

бошад, онгоҳ функсияи $f = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x_0)$ дар нуқтаи x_0 ҳосилаи охиринок ба зеринро дорад:

$$f'(x_0) = f'_3(f_2(f_1(x_0))) \cdot (f_2 \circ f_1)'(x_0) = f'_3(f_2(f_1(x_0))) \cdot f'_2(f_1(x_0)) \cdot f'_1(x_0).$$

Мисол. Бигузор $f(x) = \cos^2 \frac{1}{x}$ бошад. Дар ин ҷо

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, f_2(y) = \cos y \text{ ва } f_3(z) = z^2;$$

Барои $\forall x \neq 0$ функсияҳои f_1, f_2, f_3 ҳосилаҳои охиринок доранд. Бинобар ин, f низ ҳосила дорад ва он ба зерин баробар аст.

$$\left(\cos^2 \frac{1}{x}\right)' = 2 \cos \frac{1}{x} \left(\cos \frac{1}{x}\right)' = -2 \cos \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x}\right)' = 2 \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x}.$$

7. Ҳосилаи функсияи баръакс.

ТЕОРЕМАИ 22.6. Агар функсияҳои $f: I = (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ дар фосилаи $I = (a; b)$ қатъи монотон ва бефосила буда ҳосилаи охиринок $f'(x_0) \neq 0$ дар нуқтаи $x_0 \in (a; b)$ дошта бошад, онгоҳ функсияи баръакси $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ дар нуқтаи $y_0 = f(x_0)$ ҳосила дорад ва он ба зерин баробар аст:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Қайд менамоем, ки барои функсияи дар фосилаи $I = (a; b)$ қатъи монотон ва бефосила функсияи баръакси он f^{-1} вуҷуд дошта дар $f(I)$ бефосила мебошад (ба §6 ва §20 нигаред).

▲ Функсияи $h(x) = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$; $x \in I, x \neq x_0$ -ро тартиб медиҳем. Мувофиқи шарти теорема $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ мавҷуд:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Исботи мавҷудияти ҳосилаи

функсияи f^{-1} дар нуқтаи y_0 ва баробарии матлуб чунон нишон дода мешавад.

Дар баробарии $\frac{1}{f'(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ тағйирёбандан x -ро ба $f^{-1}(y)$ иваз

$$\text{мекунем, онгоҳ } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} h(f^{-1}(y)) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = (f^{-1})'(y_0)$$

Ҳамин тариқ, $\frac{1}{f'(x_0)} = (f^{-1})'(y_0)$. Иккинчии иваз намудани

тағйирёбандаро асоснок менамоем, яъне иҷро шудани шарти теорема онди ҳудуди функсияи мураккабро месанҷем. Шарти аввали ин теорема иҷро мешавад, чунон $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \frac{1}{f'(x_0)} \in R$. Ақун иҷроиши шарти дууми теорема-

ро месанҷем: барои ҳар кадом аломатҳои B_x базаи $x \rightarrow x_0$ аломатҳои B_y ба-
заи $y \rightarrow y_0$ ёфт мешавад, ки $f^{-1}(B_y) \subset B_x$ аст. Мувофиқи таъриф, B_x —чу-
нон атрофи сурохшудан $\dot{V}(x_0)$ нуқтаи x_0 мебошад, ки $\dot{V}(x_0) \subset I$ ва B_y —чу-
нон атрофи сурохшудан $\dot{U}(y_0)$ нуқтаи y_0 аст, ки $\dot{U}(y_0) \subset f(I)$. Атрофи $V(x_0)$ -ро дида мебароем. Мувофиқи бифосилагии f^{-1} дар нуқтаи y_0 аз рӯи
атрофи $V(x_0) \subset I$ атрофи $U(y_0) \subset f(I)$ -ро ҳамин тавр меёбем, ки $f^{-1}(U(y_0)) \subset V(x_0)$ бошад. Азбаски $f^{-1}(y_0) = x_0$ ва f^{-1} қатъи монотон мебошад,
онгоҳ

$f^{-1}(U(y_0)) \subset \dot{V}(x_0)$. Ҳамин тариқ, шарти теоремаи ҳудуди функсияи му-
раккаб иҷро мешавад ва бинобар ин баробарии $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} h(f^{-1}(y))$ ду-
руст мебошад. ♦

МИСОЛҲО. Ҳосилҳои функсияҳои баръанкси тригонометриро ҳисоб менамоем.

1. $f^{-1} = \arcsin: (-1, 1) \rightarrow I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f = \sin: I \rightarrow (-1, 1)$. Бигузор $y = \sin x$,
 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x = \arcsin y$ бошад, ки дар ин ҷо $y \in (-1, 1)$ аст. Он-
гоҳ $f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$, $\forall y \in (-1, 1)$. Ҳамин тариқ $\forall y \in (-1, 1)$, баробарии
зерин иҷрошаванда аст: $(\arcsin)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$;

2. $f^{-1} = \arccos: (-1, 1) \rightarrow (0, \pi)$, $f = \cos: I = (0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$. Бигузор
 $y = \cos x$, $x \in (0, \pi)$, $x = \arccos y$ бошад, ки дар ин ҷо $y \in (-1, 1)$ аст,
онгоҳ $(\arccos)'(y) = \frac{1}{(\cos)'(x)} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$. Ҳамин тариқ,
 $\forall y \in (-1, 1)$ формулаи $(\arccos)'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$ ҷой дорад.

3. $f^{-1} = \arctg: (-\infty, \infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f = tg: I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty, \infty)$. Бигузор $y = tg x$ $x \in I$ бошад, онгоҳ $(\arctg)'(y) = \frac{1}{(tg)'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$.

Ҳамин тариқ, $\forall y \in (-\infty, \infty)$ формулаи $(\arctg)'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ иҷрошаванда аст.

4. $f^{-1} = \operatorname{arccctg}: (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \pi)$, $f = ctg: I = (0, \pi) \rightarrow (-\infty, \infty)$. Бигузор $y = ctg x$ $x \in (0, \pi)$ бошад, онгоҳ $(\operatorname{arccctg})'(y) = \frac{1}{(ctg)'(x)} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\frac{1}{1+ctg^2 x} = -\frac{1}{1+y^2}$.

Ҳамин тариқ, $\forall y \in (-\infty, \infty)$ формулаи $(\operatorname{arccctg})'(y) = -\frac{1}{1+y^2}$ ҷой дорад.

§23. ФУНКСИЯҲОИ ДИФФЕРЕНСИРОНИДАШАВАНДА ДИФФЕРЕНСИАЛ

1. Функцияҳои хаттӣ. Маҷмӯи $Z(R; R)$.

ТАЪРИФИ 23.1. Функцияи $l: R \rightarrow R$ хаттӣ ном дорад, агар вай шартҳои зеринро қаноат кунад:

- 1) $l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in R$;
- 2) $l(\lambda x) = \lambda l(x)$, $\forall \lambda, x \in R$,

шарти 1) —ро аддитивӣ ва 2) —ро шартӣ якҷинсагӣ меноманд.

ТЕОРЕМАИ 23.1. Ҳар кадом функцияи хаттӣ намуди $l(x) = Ax$ —ро дорад, ки дар ин ҷо $A = \operatorname{const}$.

♣ Бигузор x нуқтаи ихтиёрӣ аз R бошад. Мувофиқи хосияти 2) меёбем: $l(x) = l(x \cdot 1) = x l(1)$; $l(1) = A$ гузорем, теорема исбот мешавад.

Маҷмӯи ҳамаи функцияҳои хаттиро аз R ба R бо $Z(R; R)$ ишора мекунем. Ҳар кадом функцияи l аз $Z(R; R)$ намуди $l = Ax = l(1)x$ —ро дорад. Мувофиқати байни худ якҷинсатан $Z(R; R)$ ва R —ро барқарор мекунем. Бо ин мақсад, ба ҳар кадом функцияи $l \in Z(R; R)$, ки намуди $l(x) = Ax = l(1)x$ —ро дорад, адади $A = l(1)$ —ро дар мувофиқ мегузорем.

Баръакс, ба ҳар кадом адади $A \in R$ функцияи $l \in Z(R; R)$, ки намуди $l = Ax$ —ро дорад дар мувофиқ мегузорем. ♣

Аз ин рӯ, баъзан мавридҳо маҷмӯи $Z(R;R)$ —ро бо R ва баръакс илҳаз менамоянд. Маҷмӯи $Z(R;R)$ ҳосилҳои зеринро дорад:

- 1⁰. Агар $l_1 \in Z(R;R)$ ва $l_2 \in Z(R;R)$ бошад, онгоҳ $l_1 \pm l_2 \in Z(R;R)$;
- 2⁰. Функсияи $f=0: x \rightarrow R \rightarrow 0 \in R$ ҳатта мебошад, яъне $0 \in Z(R;R)$;
- 3⁰. Агар $l \in Z(R;R)$ ва λ —адади истиёрии маҷмӯи R бошад, онгоҳ $\lambda l \in Z(R;R)$.

2. Ду таърифи дифференсиронидашавандагии функсия дар нуқта. Дифференсима.

Бигузор $f: (a;b)X \rightarrow R$ ва $x_0 \in (a;b)$ бошад.

ТАЪРИФИ 23.2. Функсияи f дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда ном дорад, агар ҳудуди функсияи ҳаттии $l_{x_0} \in Z(R;R)$ ($l_{x_0}: h \rightarrow l(h)$) мавҷуд бошад, ки барои он шарти

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - l(h)}{h} = 0 \quad (22.1)$$

ифрошаванда бошад.

ТАЪРИФИ 23.3. Функсияи f дар нуқтаи x_0 мувофиқи таърифи 23.2 дифференсиронидашаванда ном дорад, агар ҳудуди функсияи ҳаттии $l_{x_0} \in Z(R;R)$ мавҷуд бошад, ки афзонини $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ —ро ҳангоми $h \rightarrow 0$ дар намуди

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = l(h) + \alpha(h), \quad (22.2)$$

ифода кардан мумкин бошад, ки дар ин ҷо $\alpha(h)$ —беохир хурди тартиби оя нисбат ба h дар асрон $h \rightarrow 0$ мебошад.

Таърифҳои 23.2 ва 23.3 баробарқувваанд. Дар ҳақиқат, бигузор f дар нуқтаи x_0 мувофиқи таърифи 23.2 дифференсиронидашаванда бошад,

онгоҳ функсияи $\alpha(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - l(h)}{h} \rightarrow 0$. Бинобар ин,

$f(x_0 + h) - f(x_0) = l(h) + \alpha(h)h$. Азбаски, ҳангоми $h \rightarrow 0$, $\alpha(h)h = o(h)$ онгоҳ функсияи f дар нуқтаи x_0 дар маънои таърифи 23.3 дифференсиронидашаванда мебошад. Тасдиқоти баръаксшро ба осоня ҳосил намудан мумкин аст, агар баробарии (22.2) —ро ба h тақсим намуда ҳангоми $h \rightarrow 0$ ба ҳудуд гузарем.

Дар аснои мувофиқати байни ҳам воқеаҳои маҷмӯи $Z(R;R)$ дар R дифференсиронидашавандагии функсияи f дар нуқтаи x_0 ба мавҷудияти чуқури адади $A=A_{x_0}$ баробарқувва аст, ки

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0$$

ҚАЙД. Индекси x_0 дар ишораҳои I_{x_0} , A_{x_0} маънои онро дорад, ки функсияи хаттии l ва доимии A аз ихтиёри нуқтаи x_0 вобаста аст.

ТЕОРЕМАИ 23.2. Агар f дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда бошад онгоҳ ягона функсияи хаттии $l=I_{x_0}$ баробарии (22.1) —ро қаноаткунанда ёфт мешавад.

▲ Искотро аз баръакс мегузаронем. Шарт мекунем, ки чуқури ду функсияҳои $l \in Z(R;R)$ ва $\mu \in Z(R;R)$ ёфт мешавад, ки ҳангоми $h \rightarrow 0$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = l(1)h + o(h);$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \mu(1)h + o(h),$$

бошад. Аз баробарии яқум дуомашро тарҳ карда муносибати ҳосилшударо ба h тақсим карда ҳосил мекунем:

$$\frac{(l(1) - \mu(1))h + o(h)}{h} = 0$$

ҳангоми $h \rightarrow 0$ ба ҳудуд гузашта, меёбем: $l(1) = \mu(1)$. Аз ин ҷо мебарояд, ки $l = \mu$ аст. ▲

ТАЪРИФИ 23.4. Агар дар нуқтаи x_0 функсияи f дифференсиронидашаванда бошад, онгоҳ функсияи хаттии $l=I_{x_0} \in Z(R;R)$, ки таърифи 23.1 —ро қаноат мекунад, дифференсиалӣ функсияи f дар нуқтаи x_0 ном дошта бо рамзи $df(x_0)=I_{x_0}$ ишора карда мешавад.

Ҳамин тариқ, мувофиқи таъриф, $df(x_0) \in Z(R;R)$ буда барои ихтиёри $h \in R$, $df(x_0): h \in R \rightarrow df(x_0)(h) = df(x_0)(1) \cdot h \in R$.

ХУЛОСА. Барои функсияи f дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда, қимати дифференсиал дар нуқтаи h , қисми нисбат ба h хаттии афзоиши функсияи f дар нуқтаи x_0 мебошад.

ҚАЙД. Барои соддагӣ, мо таърифи дифференсиронидашавандагии функсияро дар $(a;b)$ муайян кардем. Дифференсиронидашавандагии фун-

қсияи $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтаи ихтиёрии ҳудудии $x_0 \in X$ айнан муайян карда мешавад.

3. Баробарқуввагии дифференсиронидашавандагии функсия ва маҷҳудияти ҳосилаи охирик.

ТЕОРЕМАИ 23.3. Барои он ки функсия f дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда бошад зарур ва қифоя аст, ки функсияи f дар нуқтаи x_0 ҳосилаи охирик дошта баробарии $df(x_0)(1) = f'(x_0)$ иҷро шавад.

▲ **Зарурия.** Бигузор функсияи f дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда бошад, онгоҳ ҳангоми $h \rightarrow 0$ баробарии $f(x_0 + h) - f(x_0) = d(x_0)(1)h + o(h)$ иҷрошаванда аст. Ба h тақсим намуда ҳангоми $h \rightarrow 0$ ба ҳудуд гузашта шарти $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ -ро ба эътибор мегирем:

рем: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = df(x_0)(1)$. Ҳамин тариқ, $R\exists f'(x_0)$ мавҷуд буда шарти

$$f'(x_0) = df(x_0)(1) \quad (1)$$

иҷрошаванда аст.

▲ **Қифоя.** Бигузор ҳосилаи охирики f дар нуқтаи x_0 мавҷуд бошад. Нишон медиҳем, ки дар ин нуқта f дифференсиронидашаванда буда баробарии $df(x_0)(1) = f'(x_0)$ ҷой дорад. Мувофиқи теоремаи 22.4 афзоиши функсияи f дар нуқтаи x_0 ҳангоми $h \rightarrow 0$ чунин ифода меёбад:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h)$$

■ $\forall h: h \rightarrow f'(x_0)h$ мегузоре. Ин функсияи ҳатти буда таърифи 23.3 -ро қаноат менамояд. Бинобар ин, функсияи f дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда аст ва $l(1)h = f'(x_0)h$ мебошад. Мувофиқи таъриф $df(x_0) = l$ ва $\forall l \in \mathbb{R}$ баробарии $df(x_0)(1)h = f'(x_0)h$ иҷрошаванда аст. Аз ин ҷо, маълум мешавад, ки $df(x_0)(1) = f'(x_0)$. ▲

НАТИҶА. Агар f дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда бошад, онгоҳ $\forall h \in \mathbb{R}: df(x_0): h \in \mathbb{R} \rightarrow df(x_0)h = df(x_0)(1)h = f'(x_0)h$.

ҚАЙДҲО. 1) Функцияи $f(x_0+h)$ нисбат ба h , ҳатта набошад ҳам дар мавриди дифференсиронидашаванда будани он дар атрофи хурди нуқтаи x_0 (локаля) аз функцияи ҳаттии намуни $f(x_0) + f'(x_0)h$ кам фарқ мекунад. Ин фарқишти дар атрофҳои хурд боз ҳам хурдтар мешавад. Аз ин ру формулаи тақрибии $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$ манбаи ҳисобкуниҳои тақрибӣ шуда метавонад.

Масалан, барои $f(x) = \sin x$, формулаи $\sin(x_0+h) \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot h$, барои $f(x) = e^x$ формулаи $e^{x_0+h} \approx e^{x_0} + e^{x_0} \cdot h = e^{x_0}(1+h)$, барои $f(x) = x^n$ ҳангоми $x_0=1$ формулаи $(1+h)^n \approx f(1) + f'(1)h = 1 + nh$ ва ғайра, ҷой дорад.

2) Агар $h=\Delta x$ гузорем, онгоҳ барои дифференсиалӣ функцияи f дар нуқтаи x_0 ҳосил мекунем: $df(x_0): \Delta x \in \mathbb{R} \rightarrow df(x_0)(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x \in \mathbb{R}$.

Аз ин ру дар адабиётҳо ишораи $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ воমেҳурад.

Барои функцияи $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ки бо формулаи $f(x)=x$ дода мешавад, ҳосил мекунем: $df(x_0): \Delta x \in \mathbb{R} \rightarrow df(x)(\Delta x) = f'(x)\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, яъне $df(x)(\Delta x) = \Delta x$ ё $df(x) = dx = \Delta x$. Агар дар ишораи $dy = f'(x)\Delta x$, $\Delta x = dx$ гузорем, баробарии $dy = f'(x)dx$ —ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо, барои ҳосилаи функцияи $f'(x)$ ишораи $f'(x) = dy/dx$ ҳосил мешавад.

4. Функцияҳои дар интервал дифференсиронидашаванда.

ТАЪРИФИ 23.5. Мегуянд, ки функцияи $f: (a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ дар интервали $(a;b)$ дифференсиронидашаванда аст, агар вай дар ҳар кадом нуқтаи ин маҷмӯи дифференсиронидашаванда бошад.

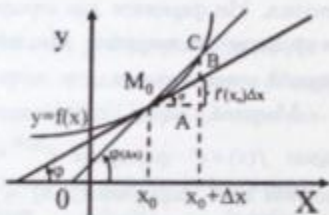
Аз далелҳои пештар исботшуда тасдиқотҳои зерин ҳосил мешавад.

ТЕОРЕМАИ 23.4. Барои он ки функцияи f дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда бошад, зарур ва кифоя аст, вай дар ҳар кадом нуқтаи $x \in (a;b)$ ҳосилаи охирироки $f'(x) \in \mathbb{R}$ —ро дошта бошад.

ТЕОРЕМАИ 23.5. Агар функцияи $f: (a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ дар интервали $(a;b)$ дифференсиронидашаванда бошад, онгоҳ вай дар $(a;b)$ бефосила аст.

5. Матрион геометрии ҳосила ва дифференциал.

Бигузур функсияи $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ ва $x_0 \in (a;b)$. Функсияи $g: x \rightarrow f(x_0) + k(x - x_0)$ —ро дида мебароем, ки дар ин ҷо $k = \text{const}$. Графики функсияи g , ҳангоми қайд карда шудани k , хати росте аст, ки аз нуқтаи $(x_0, f(x_0))$ мегузарад. Муодилаи ин хати рост $y = f(x_0) + k(x - x_0)$ мебошад. Коэффициенти k ба тангенсӣ кунҷе баробар аст, ки хати рост бо самти мусбати тирӣ Ox ташкил медиҳад, яъне $k = \text{tg } \varphi$ (расми 73).



Расми 73

ТАЪРИФИ 23.6. Хати рости бо муодилаи $y = f(x_0) + k(x - x_0)$ додашударо расанда ба графики функсияи f дар нуқтаи $(x_0, f(x_0))$ меномем, агар ҳангоми $x \rightarrow x_0$, $f(x) - f(x_0) - k(x - x_0) = o(x - x_0)$ бошад. $x - x_0 = \Delta x$ гузошта баробарии охириро ҳангоми $\Delta x \rightarrow 0$ дар шакли ба он баробарқувва менависем: $f(x) - f(x_0) - k\Delta x = o(\Delta x)$. Ҳамин тариқ, расанда ба графики функсияи f дар нуқтаи $(x_0, f(x_0))$ -ин ҳамоно хати рости аз ин нуқта гузаранда мебошад, ки дар ҳудуди атрофи нуқтаи x_0 аз графики функсияи f ба бузургии беозир хурди тартиби оя нисбат ба Δx (ҳангоми $\Delta x \rightarrow 0$) фарқ мекунад.

ТЕОРЕМАИ 23.6. Графики функсияи f дар нуқтаи $(x_0, f(x_0))$ расандан намуди $y = k(x - x_0) + f(x_0)$ —ро ҳамоно вақт ва фақат ҳамоно вақт дорад, агар функсияи f дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда бошад. Дар ин маврид, баробарии $k = f'(x_0)$ иҷрошаванда аст.

♣ Бигузур графики функсияи f дар нуқтаи $(x_0, f(x_0))$ расандан намуди $y = k(x - x_0) + f(x_0)$ —ро дошта бошад, онгоҳ мувофиқи таърифи расанда дар аснои $x \rightarrow x_0$, $f(x) - k(x - x_0) - f(x_0) = o(x - x_0)$. Бинобар ин, функсияи f дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда буда $k = f'(x_0)$ аст.

Баръакс, агар дар нуқтаи x_0 функсияи f дифференсиронидашаванда бошад, онгоҳ ҳангоми $x \rightarrow x_0$, $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$. Бинобар ин, хати рости $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ расанда ба графики функсияи f дар нуқтаи $(x_0, f(x_0))$ мебошад ва $k = f'(x_0)$ аст.

ХУЛОСА. (Маънои геометрии ҳосила). Ҳосила $f'(x_0)$ тангенс қутбӣ моилни расанда ба графики функсияи f дар нуқтаи $(x_0, f(x_0))$ бо самти мусбати тирӣ Ox мебошад.

Бигузор функсияи f дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда бошад. Геометрия ба афзониши $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, афзониши ордината, ҳангоми қад-қадди график ҷойивазкуния аз нуқтаи $(x_0, f(x_0))$ ба нуқтаи $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ мувофиқат мекунад. Дар нақша $\Delta f(x_0) = |AC|$ аст. Афзониши ординатан расандаро ба график дар нуқтаи f ки ба афзониши Δx мувофиқ меояд, меёбем. Ординатан расанда дар нуқтаи $x_0 + \Delta x$ ба зерин баробар аст:

$$f(x_0) + k(x + \Delta x - x_0) = f(x_0) + k\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки афзониши ординатан расанда ба зерин баробар аст: $f'(x_0)\Delta x = df(x_0)(\Delta x)$

ХУЛОСА. (Маънои геометрии дифференциал). Қимати дифференциал дар нуқтаи Δx ба афзониши ординатан расанда ба графики f дар нуқтаи $(x_0, f(x_0))$ баробар аст, агар x_0 афзониши Δx —ро гирад.

Қайд менамоем, ки бузургии $|\Delta f(x_0) - df(x_0)(\Delta x)| = |BC|$ модули фарқи ординатан графики функсия ва ординатан расанда дар нуқтаҳои мувофиқро муайян мекунад. Иваз кардани афзониши $\Delta f(x_0)$ ба дифференсиали он $df(x_0)\Delta x$ геометрия маънои иваз кардани қисми графикии функсияро бо порчаи расанда ба график дар нуқтаи f дорад. Ин ивазкуния дар атрофи нуқтаи x_0 гузаронида шуда, хатогин бузургии $|BC| = |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x|$ буда, ҳангоми $\Delta x \rightarrow 0$ нисбат ба Δx беохир хурд мебошад.

Аз нуқтаҳои M ва C графики функсияи хати рост гузаронида онро бурандаи графики функсияи f меномем. Тангенс қутбӣ моилни буранда бо самти мусбати тирӣ Ox ба зерин баробар аст:

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$$

Бинобар ин, расанда ба графики функсияи f дар нуқтаи $(x_0, f(x_0))$ -ро ҳамчун ваъияти ҳудудии буррандаи аз нуқтаҳои $(x_0, f(x_0))$ ва $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ гузаронида шуда дида баромадан мумкин аст, агар нуқтаи $(x_0, f(x_0))$ қад-қадӣ график ҷой иваз кунад. Ин усул тарзи муайян кардани расандаро ҳамчун ваъияти ҳудудии бурранда ифода мекунад. Агар расанда ба графики функсияи f дар мувофиқ ба тири Oy параллел набошад, онгоҳ вай маънои мавҷудияти ҳосилаи охиринокро дар нуқтаи мувофиқ, дорад. Агар расанда ба графики функсияи f дар нуқтаи мувофиқ ба тири Oy параллел бошад, онгоҳ функсияи f дар нуқта ҳосилаи бе-охири ($f'(x_0) = \infty$) ва муодилаи расандан он намуди $x = x_0$ -ро дорад.

Агар x -вақт, $f(x)$ -роҳи ростхата тайёкардаи нуқта дар лаҳзаи вақти x бошад, онгоҳ $f'(x)$ -суръати тағйирёбии ҷисмро дар лаҳзаи вақти x , $df(x)(h) = f'(x)h$ -роҳи тайёкардаи нуқта дар фосилаи вақти x то $x+h$ -ро ифода мекунад.

6. Қонунҳои дифференсироя.

ТЕОРЕМАИ 23.7. Агар функсияҳои f ва $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтаи x дифференсиронидашаванда бошанд, онгоҳ баробариҳои зерин иҷрошаванданд:

- 1) $d(f \pm g)(x) = df(x) \pm dg(x)$;
- 2) $d(f \cdot g)(x) = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$;
- 3) агар $g(x) \neq 0$ бошад, онгоҳ $d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{[g(x)]^2}$.

Қайд менамоем, ки дар ин ҷо $df(x)$, $dg(x)$ функсияҳо буда $f(x)$, $g(x)$ ададҳо мебошанд.

Баробарии 2) -ро исбот мекунем:



$$d(fg)(x)(h) = (fg)'(x)h = f'(x)g(x)h + f(x)g'(x)h = g(x)df(x) + f(x)dg(x). \blacktriangle$$

СУПОРИШ. Дурустии баробариҳои 1) ва 3) -ро мустақилона ишонин диҳед.

ТЕОРЕМАИ 23.8. Агар функсияҳои $f:(a;b) \rightarrow (c;d)$ дар нуқтаи $x \in (a;b)$, функсияи $g:(c;d) \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтаи $f(x)$ дифференсиронидашаванда бошад, онгоҳ дифференсиали композитсия ба композитсияи дифференсиалҳо баробар аст:

$$d(f \cdot g)(x) = dg(f(x)) \cdot df(x)$$

▲ Барои ихтиёри $h \in \mathbb{R}$ ифодаи

$d(f \cdot g)(x)(h) = (f \cdot g)'(x)h = g'(f(x))f'(x)h$ -ро дида мебароем. Мувофиқи таъриф

$$dg(f(x)): h \rightarrow dg(f(x))(h) = g'(f(x))h, \quad df(x): t \rightarrow df(x)(t) = f'(x)h.$$

Бинобар ин,

$$(dg(f(x)) \cdot df(x))(h) = dg(f(x))(df(x)(h)) = dg(f(x))f'(x)h = g'(f(x))f'(x)h.$$

▲ Агар $u = f(x)$ гузorem, онгоҳ дифференсиали $df(x)$ -ро бо қиямати он дар нуқтаи h дар мувофиқ гузошта ҳисла мекунем:

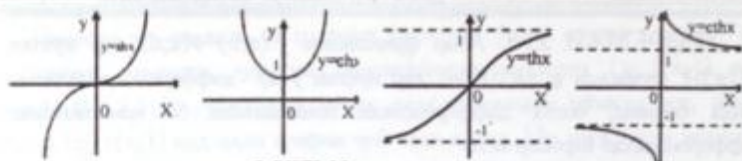
$$d(f \cdot g)(x)(h) = g'(f(x))f'(x)h = g'(f(x))df(x) = g'(u)du.$$

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки шакли дифференсиали функсияи мураккаб бо дифференсиали функсияи g дар нуқтаи $\Delta u = du$ яқинла мебошад, яъне $d(g \cdot f)(x)(\Delta u) = dg(u)(\Delta u)du$. Ин хосиятро шакли инварианти (бетағйир)-и дифференсиали тартиби якум меноманд.

§24. ФУНКСИЯҲОИ ГИПЕРБОЛА ВА ҲОСИЛАҲОИ ОНҲО. ҶАДВАЛИ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНСИАЛИ ФУНКСИЯҲО.

1. Функсияҳои гипербола ва ҳосилаҳои онҳо.

Функсияҳои зерин функсияҳои гипербола номида мешаванд:



$$1^0. \text{ Синуси гиперболя } shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$2^0. \text{ Косинуси гиперболя } chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$3^0. \text{ Тангенс гиперболя } thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

$$4^0. \text{ Котангенс гиперболя } cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Функцияҳои shx , chx , thx дар $\mathbb{R}$ ва функцияи $cthx$ дар $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ муайян ва бефосила мебошад. Функцияи chx — ҷуфт ва функцияҳои боқимонда тоқ мебошанд. Графики онҳо дар расмҳои 74 оварда шудаанд.

Функцияи $y = shx$ дар $\mathbb{R}$ афзуншаванда, чунки e^x — афзуншаванда e^{-x} — камшаванда мебошад. Ин функция интервали $-\infty < x < +\infty$ -ро ба интервали $-\infty < y < +\infty$ ҷамънок мекунад, чунки

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty.$$

Функцияи $y = cthx$ дар $[0; +\infty)$ афзуншаванда, чунки барои $0 < x_1 < x_2$ меёбем:

$$\begin{aligned} chx_2 - chx_1 &= \frac{e^{x_2} + e^{-x_2}}{2} - \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{2} = \frac{1}{2} [e^{x_1} (e^{x_2-x_1} - 1) + e^{-x_1} (1 - e^{x_1-x_2})] = \\ &= \frac{1}{2} (e^{x_1-x_1} - 1)(e^{x_2} + e^{-x_2}) > 0 \Rightarrow chx_2 > chx_1, \quad \text{ё } y_1 < y_2 \end{aligned}$$

Функцияи $y = thx$ дар $\mathbb{R}$ афзуншаванда буда

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} thx = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} thx = 1.$$

Азбаски функцияи $y = shx$ дар соҳан муайянваиш монотон ва бефосила, пас вай дорони функцияи баръакс аст. Ин функцияро бо рамзи $\text{ArcSh}x$ (хонда мешавад "арксинус"); аржа (лотинӣ) -масоҳат, ченак) ишора мекунем.

Барон муайян кардани функсияи ба $\sinh$ баръакс аз муодилаи $y = \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ истифода мебарем. Аз ин ҷо $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$, муодилаи квадратии нисбат ба e^x ҳосилшударо ҳал карда аз решаи мусбати он меёбем: $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x = \operatorname{Arcsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$. Аз ин ҷо, ҷойҳои x ва y —ро иваз намуда меёбем: $y = \operatorname{Arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Айнан, ҳамин тавр, нишон додан лозим аст, ки функсияҳои $y = \cosh x$, $y = \th x$ функсияҳои баръакс доранд ва онҳо ба зерин баробаранд: $y = \operatorname{Arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $y = \operatorname{Arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Функсияи $y = \operatorname{Arccosh} x$ дар нимсегменти $1 \leq x < +\infty$ афзуншаванда ва безосила буда ин нимсегментро ба нимсегменти $0 \leq y < +\infty$ итѓикос мекунад. Функсияи $y = \operatorname{Arctanh} x$ дар интервали $(-1; 1)$ афзуншаванда ва безосила буда онро ба интервали $-\infty < y < +\infty$ итѓикос мекунад.

Барои функсияҳои гиперболия баъзан ҳосилҳои ҷой доранд, ки онҳоро функсияҳои тригонометрия сохтанд:

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1; \quad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x; \quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x; \\ \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y; \quad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y; \\ \th(x+y) &= \frac{\th x + \th y}{1 + \th x \cdot \th y}; \quad \cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}, \quad \sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2} \end{aligned}$$

ва ғайра.

Номи функсияҳои гиперболия «ба он шахр дода мешавад, ки $y = \sinh x$ ва $y = \cosh x$ —ро аз муодилаи гиперболаи баробар паҳлу ($x^2 - y^2 = 1$) аз рӯи ҳамон қондаҳои муайян кардан мумкин аст, ки аз рӯи онҳо функсияҳои $y = \sinh x$ ва $y = \cosh x$ аз муодилаи давранӣ воҳидии ($x^2 + y^2 = 1$) муайян карда мешуд.

Азбаски $(e^x)' = e^x$ ва $(e^{-x})' = -e^{-x}$ аст, пас ҳосилаҳои функсияҳои гиперболия ба зерин баробаранд:

$$(\sinh)' = \cosh, \quad (\cosh)' = \sinh, \quad (\th)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad (cth)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}, \quad x \neq 0.$$

СУПОРИШ. Искот кунед, ки

$$(\operatorname{Arctg} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{Arctch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$$

$$(\operatorname{Arctth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1.$$

2. Қоидаҳо ва қадвали ҳосилаҳои функсияҳои элементарӣ —ро барои функсияҳои ҳосилаи охиринок доштаи $u=u(x)$, $v=v(x)$ меорем ва аз ёд донистани онҳоро ба хонандагон тавсия менамоем.

1	$c'=0, c=\text{const};$	13	$(\operatorname{tg} u)' = u'/\cos^2 u;$
2	$(u \pm v)' = u' \pm v';$	14	$(\operatorname{ctg} u)' = -u'/\sin^2 u;$
3	$(u \cdot v)' = u'v + v'u;$	15	$(\arcsin u)' = u'/\sqrt{1-u^2};$
4	$(u/v)' = (u'v - v'u)/v^2;$	16	$(\arccos u)' = -u'/\sqrt{1-u^2};$
5	$(cu)' = cu';$	17	$(\operatorname{arctg} u)' = u'/(1+u^2);$
6	$(e^u)' = e^u \cdot u';$	18	$(\operatorname{arctg} u)' = u'/(1+u^2);$
7	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u';$	19	$(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u';$
8	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u';$	20	$(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u';$
9	$(\log_a u)' = u'/(u \ln a);$	21	$(\operatorname{th} u)' = 1/\operatorname{ch}^2 u;$
10	$(\ln u)' = u'/u;$	22	$(\operatorname{ctg} u)' = -u'/\sin^2 u;$
11	$(\sin u)' = \cos u \cdot u';$	23	$(u^v)' = u^v (v' \ln u + v u'/u).$
12	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$		

3. Қоидаҳо ва қадвали дифференциал.

Агар функсияи $f(u)$ дар нуқтаи $u=u(x)$ ҳосила дошта бошад, онгоҳ формулаи $du=u'dx$, $df(u)=f'(u)du$ —ро истифода бурда қоидаҳо ва қадвали дифференциалро барои функсияҳои элементарии соддатарин тартиб додан мумкин аст.

1	$dc=0, c=\text{const};$	13	$d(\operatorname{tg} u) = du/\cos^2 u;$
2	$d(u \pm v) = du \pm dv;$	14	$d(\operatorname{ctg} u) = -du/\sin^2 u;$
3	$d(u \cdot v) = vdu + u dv;$	15	$d(\arcsin u) = du/\sqrt{1-u^2};$
4	$d(u/v) = (vdu - u dv)/v^2;$	16	$d(\arccos u) = -du/\sqrt{1-u^2};$

5	$d(cu)=cdu;$	17	$d(\arctgu)=du/(1+u^2);$
6	$d(e^u)=e^u \cdot du;$	18	$d(\operatorname{arctctgu})=du/(1+u^2);$
7	$d(a^u)=a^u \ln a \cdot du;$	19	$d(\operatorname{sh}u)=\operatorname{ch}u \cdot du;$
8	$d(a^u)=\alpha u^{\alpha-1} \cdot du;$	20	$d(\operatorname{ch}u)=\operatorname{sh}u \cdot du;$
9	$d(\log_a u)=du/u \ln a;$	21	$d(\operatorname{th}u)=du/\operatorname{ch}^2u;$
10	$d(\ln u)=du/u;$	22	$d(\operatorname{cth}u)=du/\operatorname{sh}^2u;$
11	$d(\sin u)=\cos u \cdot du;$	23	$d(u^v)=u^v (dv \ln u + du/v).$
12	$d(\cos u)=-\sin u \cdot du;$		

§25. ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНСИАЛҲОИ ТАРТИБИ ОЛӢ

1. Ҳосилаи тартиби ола.

Бигузор $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ функсияи дар интервали $(a;b)$ дифференсиронидашаванда бошад. Функсияи $f':x \in (a;b) \rightarrow f'(x) \in \mathbb{R}$ ҳосилаи функсия аз функсияи f дар $(a;b)$ ном дорад. Чунон савол мегузорем. Оё функсияи f' дар нуқтаҳои маҷмӯи $(a;b)$ ҳосила дорад?

ТАЪРИФИ 25.1. Агар функсияи f' дар нуқтаи $x_0 \in (a;b)$ ҳосила дошта бошад, онгоҳ онро ҳосилаи тартиби дуюми функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи x_0 номида бо рамзи зерин ишорат менамоянд:

$$f''(x_0)=(f')'(x_0)=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Барои ҳосилаи тартиби дуюми функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи x_0 ишораҳои $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)$, $(f'(x_0))'$, $D^2f(x_0)$, $f''(x_0)$, $y''(x_0)$ низ истифода мебаранд.

Маънои механикии ҳосилаи тартиби дуюмро медиҳем. Агар $y=f(t)$ қонуни ҳаракати нуқтаи материалиро тавсиф намояд, онгоҳ ҳосилаи якум $v(t)=f'(t)$ суръати лаҳзавии нуқтаи ҳаракаткунандаро дар лаҳзаи вақти t ва ҳосилаи дуюм $f''(t)=v'$ -суръати таътирбӯии суръат, яъне шитоби нуқтаи ҳаракаткунандаро дар лаҳзаи вақти t муайян мекунад.

Бигузюр $f''(x) \in R, \forall x \in (a; b)$ мавҷуд бошад. Саволи дар боло гузаштаре барои функсияи $f'' : x \in (a; b) \rightarrow f''(x) \in R$ тадбиқ намуда ба мафҳуми ҳосилаи тартиби сеюм меоем:

$$f'''(x_0) = (f'')'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f''(x_0 + \Delta x) - f''(x_0)}{\Delta x}.$$

Айнен ҳамин тавр, ҳосилаи тартиби n -ум чори карда мешавад, агар ҳосилаи тартиби $(n-1)$ аз функсияи f дар нуқтаи x_0 мавҷуд бошад:

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}.$$

Яъне ҳосилаи тартиби n аз функсияи f дар нуқтаи x_0 гуфта ҳосила аз ҳосилаи тартиби $(n-1)$ -ро дар нуқтаи x_0 меноманд.

Методи ҳисоб кардани ҳосилаи тартиби оля ба ҳисоб карда тавонишани ҳосилаи тартиби якум асос карда шудааст.

Ба сифати мисол ҳосилаи тартиби n -уми баъзе функсияҳои элементарии соддатаринро ҳисоб мекунем.

1) $f(x) = x^\alpha \quad (x > 0, x \in R) \Rightarrow (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$. Дар мавриди хусуси, агар $\alpha = m \in N$ бошад, онгоҳ $(x^m)^{(m)} = m!$, $(x^m)^{(n)} = 0$ ҳангоми $n > m$;

2) $f(x) = a^x \quad (0 < a \neq 1) \Rightarrow (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$. Аз ҷумла, ҳангоми $a = e$ будан $(e^x)^{(n)} = e^x$;

3) $f(x) = \sin x$,

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right).$$

$$4) f(x) = \cos x \Rightarrow f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

$$5) f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad a, b, c, d - \text{доимӣҳо}, \quad ad - bc \neq 0,$$

$$f'(x) = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{(ad-bc)}{(cx+d)^2}, \quad f''(x) = (ad-bc)(-2)(cx+d)^{-3}c, \dots$$

$$f^{(n)}(x) = (ad-bc)(-1)^{n-1}(cx+d)^{-n-1} \cdot c^{n-1}.$$

$$6) \quad f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{x^3}, \dots$$

$$\dots, \quad f^{(n)}(x) = (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

ТАЪРИФИ 25.2. Функция $f^n(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтаи $x_0 \in (a;b)$ ду бор дифференсиронидашаванда ном дорад, агар атрофи $U(X_0)$ нуқтаи x_0 ёфт шавад, ки дар $U(a;b)$ ҳосилаи охиринок $f'(x)$ мавҷуд буда, функцияи $f'(x)$ дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда бошад.

Айнан ҳамин тавр, дар нуқтаи x_0 функцияи p бор дифференсиронидашаванда муайян карда мешавад.

Аз таърифҳои 25.1 25.2. ва теоремаи 24.3. мебарояд, ки функцияи $f(x)$ дар нуқтаи $x_0 \in (a;b)$ фақат ва фақат ҳамагон вақт ду бор дифференсиронидашаванда аст, агар дар ин нуқта ҳосилаи охиринок тартиби дууми он мавҷуд бошад.

Чунин тасдиқот, барои функсияи дар нуқтаи x_0 p -бор дифференсиронидашаванда низ ҷой дорад.

2. Маҷмуъҳои $C^n(x)$ ва $C^\infty(x)$.

Бигузор $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, ки дар ин ҷо X маҷмӯи кушода аз $\mathbb{R}$ аст.

ТАЪРИФИ 25.3. Мегӯянд, ки дар маҷмӯи X функцияи $f(x)$ бефосила дифференсиронидашаванда ё ба синфи $C^1(x)$ таалуқдор аст, агар $f(x)$ дифференсиронидашаванда ва дар маҷмӯи X функцияи $f': x \in X \rightarrow f'(x) \in \mathbb{R}$ бефосила бошад.

ТАЪРИФИ 25.4. Мегӯянд, ки дар маҷмӯи X функцияи $f(x)$, p -бор бефосила дифференсиронидашаванда ё ба синфи $C^p(x)$ таалуқдор аст, агар функцияи $f(x)$, p -бор дифференсиронидашаванда ва дар маҷмӯи X функцияи $f^{(n)}: x \in X \rightarrow f^{(n)}(x) \in \mathbb{R}$ бефосила бошад.

ТАЪРИФИ 25.5. Мегӯянд, ки дар маҷмӯи X функцияи $f(x)$, бе-
охир бор бефосила дифференсиронидашаванда ё ба синфи $C^\infty(x)$ таа-
луқдор аст, агар барои ҳар кадом $p \in \mathbb{N}$ функцияи $f \in C^p(x)$ бошад.

ҚАЙД. Ба сифати X порчаи $[a; b]$ —ро дида баромада таърифҳои ба таърифҳои 25.3, 25.4, 25.5 монандро ҳосил кардан мумкин аст, агар барои нуқтаҳои a ва b мувофиқан ҳосилаҳои рост ва чапро ҷорӣ намоем.

3. *Формулаи Лейбниц* —ро барои ҳисоб кардани ҳосилаи тартиби n —ум аз ҳосилаи зарби ду функсияи $u(x)$, $v(x)$ истифода мебаранд. Дар оянда ҳосилаи тартиби нул, функсияи додашударо ҳисоб мекунем: $f^{(0)}(x) = f(x)$.

ТЕОРЕМАИ 25.1. (Формулаи Лейбниц). Бигузор функсияҳои $u(x)$ ва $v(x)$ ҳосилаҳои тартиби n —ро дошта бошанд, онгоҳ ҳангоми $n \geq 1$ формулаи зерин ҷой дорад:

$$(u \cdot v)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

Пеш аз исботи теорема қайд менамоем, ки тарафи рости формулаи охирин ба тарафи рости формулаи бинومي Нютон:

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k u^k v^{n-k}$$

табдил меёбад, агар тартиби ҳосилаҳои (k) ва $(n-k)$ —ро шартан бо нишондиҳандаҳои дараҷаҳои k ва $n-k$ мувофиқан иваз намоем.

♣ Исботи теорема ро бо методи индуксияи математикӣ мегузaronем. Барои $n=1$ ва $n=2$ ҳосил мекунем:

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u = u^{(1)}v^{(0)} + v^{(1)}u^{(0)}$$

$$(u \cdot v)'' = [(u \cdot v)']' = [u'v + v'u]' = u''v + 2u'v' + v''u$$

Шарт мегузorem, ки формулаи Лейбниц барои ҳосилаи n —ум дуруст бошад. Барои ҳосилаи $(n+1)$ —ум меёбем:

$$\begin{aligned}
(uv)^{(n+1)} &= [(uv)^{(n)}]' = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} \right)' = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k+1)} v^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k+1)} v^{(n-k-1)} = \\
&= u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k+1)} + \sum_{j=0}^{n-1} C_n^j u^{(j+1)} v^{(n-j-1)} + v^{(0)} u^{(n+1)} = \sum_{k=1}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k+1)} + \\
&+ u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} u^{(k)} v^{(n-k)} + v^{(0)} u^{(n+1)} = u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) u^{(k)} v^{(n-k+1)} + \\
&+ v^{(0)} u^{(n+1)} = u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k u^{(k)} v^{(n-k+1)} + v^{(0)} u^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(k)} v^{(n-k+1)}
\end{aligned}$$

Ҳангоми исбот аз баробарии

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = C_{n+1}^k \quad \text{исти-}$$

фода бурдем.

Мисол. Ҳосилаи тартиби n — уми функсияи $f(x) = x^3 e^x$ ($n \geq 3$) ёфта шавад.

Ҳал: $u = x^3$ ва $v = e^x$ мегузорем, онгоҳ $u' = (x^3)' = 3x^2$, $u'' = 6x$, $u''' = 6, \dots$, $u^{(n)} = 0$, $\forall n \geq 4$; $v^{(0)} = v' = \dots = v^{(n)} = (e^x)^{(n)} = e^x$. Мувофиқи формулаи Лейбниц:

$$\begin{aligned}
(x^3 e^x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k (x^3)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = e^x \sum_{k=0}^n C_n^k (x^3)^{(k)} = \\
&= e^x \left[(x^3)^{(0)} + n(x^3)' + C_n^2 (x^3)'' + C_n^3 (x^3)''' + 0 + \dots \right] = e^x [x^3 + 3nx^2 + C_n^2 x + 6C_n^3]
\end{aligned}$$

4. Дифференсиалҳои тартиби оля.

Агар функсия $y = f(x)$ дар ягон атрофи нуқтаи $x \in (a; b)$ дифференсиронидашаванда бошад, онгоҳ дифференсиали тартиби якуми он: $dy = f'(x)dx = y' dx$ аз ду тағйирёбанда: x ва dx вобаста аст. Агар дифференсиали dx бо афзоиши Δx яохела бошад ($dx = \Delta x$), онгоҳ дифференсиали функсия аз як тағйирёбандан x вобаста мебошад.

Агар функсия $y = f(x)$ дар нуқтаи $x \in (a; b)$ дифференсиронидашаванда буда бузургии $dx = \Delta x$ қайдишуда бошад, онгоҳ дифференсиали онро дифференсиали тартиби ду номида чунон ишора менамоянд:

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d[f'(x)dx] = (f'(x)dx)'dx = (f'(x))'dx dx = f''(x)dx^2 \text{ ё ки} \\ d^2y &= f''(x)dx^2 = y''dx^2 \end{aligned} \quad (25.1)$$

Дар ин ҷо, $dx^2 = (dx)^2$ аст. Аз формулаи (25.1) ҳосил мекунем

$$f''(x) = d^2y/dx^2$$

Айнан ҳамин тавр, агар функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи $x \in (a;b)$ ҳосилан тартиби n — умро дошта бошад, онгоҳ дифференсиали n — уми он: $d^n y$ ҳамгун дифференсиал аз дифференсиали тартиби $(n-1)$ — ум муайян карда мешавад:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = (f^{(n-1)}(x)dx^{n-1})'dx = f^{(n)}(x)dx^n \quad (25.2)$$

Аз ин ҷо, $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = d^n y/dx^n$ ва $dx^n = (dx)^n$ мебошад. Аз (25.2) мебарояд, ки ҳангоми $n > 1$ буда $d^n x = 0$ аст.

Қайд менамоем, ки дифференсиалҳои дуҷум ва минбаъд, умуман, дар мавриди таъғирёбанди новобаста будани x дурустанд ва ба ҳосияти шакли инварианти соҳиб нестанд. Барои ба ин бовари ҳосил намудан, масъалаи ҳисоби дифференсиали дуҷуми функсияи $y=f(x)$ -ро муоина мекунем. Бигузор $x=\varphi(t)$ бошад, онгоҳ $y=f(x)=f(\varphi(t))$. Агар $f''(x)$ ва $\varphi''(t)$ мавҷуд бошанд, онгоҳ мувофиқи таърифи дифференсиал, қонди дифференсиронидани ҳосил зарб ва функсияи мураккаб ҳосил мекунем:

$$dy = f'[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = f'(x)dx, \quad dx = \varphi'(t)dt;$$

$$d^2y = d[f'(x)dx] = d[f'(x)]dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x,$$

ё ки

$$d^2y = y''dx^2 + y'd^2x \quad (25.3)$$

Аз баробариҳои (25.1) ва (25.3) маълум мешавад, ки ҳангоми иваз кардани x ба функсияи $\varphi(t)$ намуди дифференсиали тартиби ду таъғир меёбад, яъне дифференсиали тартиби дуҷуми функсия шакли инвариантиро надорад. Ин ҳосиятро дифференсиалҳои тартиби $n \geq 2$ низ дорад.

КАЙД. Агар $x=\varphi(t)=at+b$ (a, b — доимӣҳо) бошад, онгоҳ $d^2x=0$ буда шакли дифференсиали тартиби ду таъғир намеёбад.

5. Дифференсиронидани функсияҳо, ки дар шакли параметрӣ дода шудаанд.

Бигузор функсияи $y=f(x)$ дар шакли параметрӣ бо муодилаҳои

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array} \right\} t_0 \leq t \leq T$$

дода шуда бошанд. Агар функсияи $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дар фосилаи $(t_0; T)$ ҳосилаҳои шумораашон ихтиёро соҳиб буда барои функсияи $x = \varphi(t)$ функсияи баръакси он $t = \varphi^{-1}(x) = \varphi(x)$ ва $t'_x = \varphi'(x)$ мавҷуд бошанд, онгоҳ функсияи $y = f(x)$ —ро ҳамчун функсияи мураккаби $y = \psi(t)$, $t = \varphi(x)$ ($y = \psi[\varphi(x)]$) дифференсиронидан мумкин аст:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \psi'(t) \cdot \varphi'(x). \quad (25.3)$$

Аз рӯи қонди дифференсиронидани функсияи баръакс:

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{\psi'(t)}; \quad \psi'(t) \neq 0.$$

Дар формулаи (25.3) гузошта ҳосил мекунем:

$$y'_x = \frac{\psi'(x)}{\varphi'(t)} \quad \text{ё} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \quad (25.4)$$

Ин формуларо ба осонӣ ҳосил кардан мумкин буд, агар аз ҳосияти инвариантии дифференсиали якум истифода барем:

$$dy = y'_t dt = \psi'(t) dt, \quad dx = x'_t dt = \varphi'(t) dt.$$

Ин ифодаҳоро дар формулаи $y'_x = \frac{dy}{dx}$ гузошта (25.4) —ро ҳосил мекунем. Ҳосилаи тартиби дууми y аз x чунон ёфта мешавад:

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right) \frac{dt}{dx} = \\ &= \frac{\psi''(t) \cdot \varphi'(t) - \psi'(t) \cdot \varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{x'^3_t}. \end{aligned} \quad (25.5)$$

Ҳосилаҳои тартиби $n > 2$, айнан ҳамин тавр ҳисоб карда мешаванд.

Машқҳо: Ҳосилаҳои якум ва дууми функсияҳо, ки ба таври параметрӣ дода шудаанд, ҳисоб карда шаванд:

$$1. \quad \left. \begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array} \right\} \quad -\infty < t < \infty.$$

Хатҳои қаче, ки ин муодилаҳо муайян мекунанд, циклонда ном дорад. (Циклонда траекторияи ягон нуқтаи қайдшудан давраест, ки он аз рӯи хати рост бе лағжиш мегарад).

$$2. \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

3. Маълумоти бори VI

Ҳосилати функсияро дар маълумоти 1-15 ёбед.

$$1. \quad y = \frac{5}{(x^2+1)^2} - \frac{\sqrt{5+x^2}}{x^2+1};$$

$$6. \quad y = \sqrt{\frac{2-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}};$$

11.

$$y = 5 \arcsin(x-1) - (3x+2)\sqrt{4x}$$

$$2. \quad y = \sqrt{\frac{a-bx}{a+bx}};$$

7.

$$y = \frac{3}{4} \operatorname{tg}^3 x + \ln^2 \cos x$$

$$12. \quad y = e^{-x^2} \cdot 2^{-\sin^2 x};$$

3.

$$y = (3-x)(4+x)(5+x);$$

8.

$$y = \arcsin \frac{3-x^2}{3+x^2}$$

13.

$$y = \arccos \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

9.

$$4. \quad y = \sqrt{\frac{4-x}{3+x}};$$

$$y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$

14.

$$y = \frac{1}{4} \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{3}{8} \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{3}{8} \ln \frac{1+\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

5.

$$y = \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}};$$

10.

$$y = x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \ln(x^2+1);$$

15.

$$y = e^{\arcsin x^2 + 1}, \quad (-1 < x < 0).$$

Ҳосилаҳои тартиби нишондодашударо дар маълумоти зерин ёбед.

$$16. \quad y = 8x^4 + 15x^3 - 19x^2 + 12x + 6, \quad y^{(n)} - ?$$

19.

$$y = \cos(ax - bx); \quad y^{(n)} - ?$$

17.

$$y = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x + \frac{1}{4} \arcsin x + \frac{3}{4} x \sqrt{1-x^2}, \quad y' - ?$$

20.

$$y = \sin^2 x; \quad y^{(n)} - ?$$

18.

$$y = ae^{bx}; \quad y^{(n)} - ?$$

21.

$$y = e^x \sin x; \quad y^{(n)} - ?$$

Дифференсиали функсияҳои зеринро ёбед.

$$22. \quad y = \sqrt{x^2+1} + \arcsin \frac{1}{x};$$

24.

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \ln \frac{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}{x}$$

*Математика забонест, ки
ҳамаи илмҳои дақиқ бо он гуф-
тугӯ мекунад.*

Ф. Энгелс

БОБИ VII. ТЕОРЕМАҲОИ АСОСИИ ҲИСОБИ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

Асоси тадбиқҳои гуногуни мафҳуми ҳосиларо якчанд теоремаҳо ташкил медиҳад, ки онҳо дар курси таҳлили математикӣ номи теоремаҳои асосии ҳисоби дифференциалиро гирифтаанд. Ба онҳо теоремаҳои Ферма, Рол, Лагранж, Коши дохил мешавад.

§26. ТЕОРЕМАҲОИ ҚИМАТИ МИЁНА.

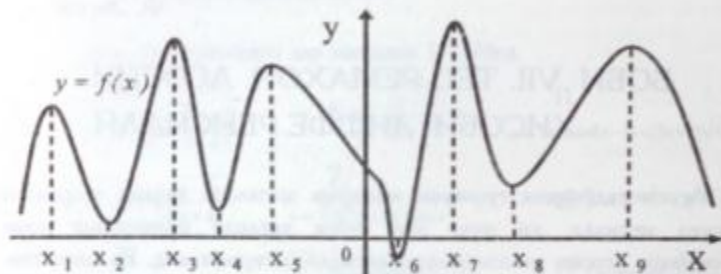
1. Мафҳуми экстремуми локалӣ ва теоремаи Ферма¹.

Бигузор функсия $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ дар ягон атрофи нуқтаи $x_0 \in (a;b)$ муайян бошад.

ТАЪРИФИ 26.1. Нуқтаи $x_0 \in (a;b)$ -нуқтаи максимум (минимум) -и локалии функсияи $y=f(x)$ ном дорад, агар δ -атрофи он $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ ёфт шавад, ки $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap (a;b)$ нобаробарии $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) иҷро шавад. Агар нобаробарии $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) иҷро шавад, онгоҳ нуқтаи x_0 -ро максимум (минимум) -и қатъи меноманд. Максимум ва минимуми локалӣ бо як номи умуми экстремуми локалӣ муттаҳид мешаванд. Масалан, функсияи $f(x)$, ки графики он дар расми 78 оварда шудааст, экстремуми локалиро дар нуқтаҳои $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ дорад. Дар байни

¹ Пьер Ферма (1601-1665) — рӯзандони машҳури франсавӣ.

онҳо x_1, x_3, x_5, x_7, x_9 , нуқтаҳои максимуми локалӣ ва x_2, x_4, x_6, x_8 , - нуқтаҳои минимуми локалӣ мебошанд.



Рисун 78

ТЕОРЕМА 26.1. (ФЕРМА)-ШАРТИ ЗАРУРИИ ЭКСТРЕМУМИ ЛОКАЛИИ ФУНКСИЯИ ДИФФЕРЕНСИРОВАНИДАШАВАНДА.

Агар функция $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтаи $x_0 \in (a;b)$ экстремуми локалӣ дошта дар ин нуқта дифференсиронидашаванда бошад, онгоҳ $f'(x_0)=0$ аст.

▲ Барои муайяни, бигузор $f(x)$ дар нуқтаи x_0 минимуми локалӣ дошта бошад, онгоҳ $\forall x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ нобаробарии $f(x) - f(x_0) \geq 0$ иҷрошаванда аст. Агар $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ бошад, онгоҳ $x - x_0 < 0$ ва $[f(x) - f(x_0)] / (x - x_0) \leq 0$ мешавад. Агар $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ бошад, онгоҳ $x - x_0 > 0$ ва $[f(x) - f(x_0)] / (x - x_0) \geq 0$ мебошад. Азбаски $f(x)$ дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда мебошад, пас $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ мавҷуд

буд.

$f'_-(x_0) = f'(x_0) \leq 0$ аст.

Айнан ҳамин тавр, аз нобаробарии $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ ҳангоми $x \rightarrow x_0 + 0$ ҳудуд гирифта ҳосил мекунем: $f'_+(x_0) = f'(x_0) \geq 0$. Нобароба-

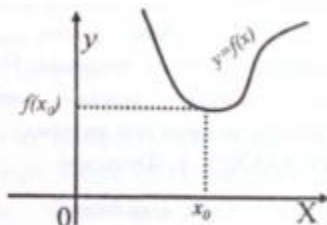
риҳои $f'(x_0) \leq 0$ ва $f'(x_0) \geq 0$ танҳо дар мавриди $f'(x_0) = 0$ ҷой дорад. ▲

Теоремаи Ферма мазмуни геометрии зеринро дорад: расанда ба графики функсияи $f(x)$ дар нуқтаи экстремуми локалӣ $(x_0; f(x_0))$ ба тири абсиса параллел аст (расми 79).

ТЕОРЕМАИ 26.2. (РОЛЛ*) Бигуздор барои функсияи $y=f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ шартҳои зерин иҷро шавад:

- 1) $y=f(x)$ дар $[a; b]$ бефосила;
- 2) $\forall x \in (a; b)$ $f(x)$ — дифференсиронидашаванда;

3) Дар охири порча $f(a)=f(b)$, онгоҳ дар байни a ва b аққалан як нуқтаи $\xi \in (a; b)$ ёфт мешавад, ки дар он $f'(\xi)=0$ аст. Байёни мухтасари теорема чунин аст: дар байни ду қиматҳои баробари функсияи дифференсиронидашаванда ҳатман нули ҳосилаи ин функсия воқеъ аст.



Расми 79

▲ Азбаски функсияи $y=f(x)$ дар $[a; b]$ бефосила аст, онгоҳ мувофиқи теоремаи Веерштрасс (теоремаи 20.2) дар порчаи $[a; b]$ нуқтаҳои c_1 ва c_2 ёфт мешаванд, ки дар онҳо функсия қиматҳои хурдтарин $f(c_1) = \inf_{x \in [a; b]} f(x) = m$ ва калонтарин $f(c_2) = \sup_{x \in [a; b]} f(x) = M$ мегирад. Агар $m=M$ бошад, онгоҳ $f(x)=\text{const}$ ва $f'(x)=0, \forall x \in [a; b]$. Ба сифати ξ нуқтаи ихтиёрии интервали $(a; b)$ —ро гирифтани мумкин аст. Агар $m \neq M$ бошад, онгоҳ $m < M$ ва $f(c_1) < f(c_2)$. Мувофиқи шартҳои $f(a)=f(b)$ аққалан яке аз нуқтаҳои c_1 ва c_2 нуқтаҳои дохилии порчаи $[a; b]$ мебошад; бигуздор $c_1 \in (a; b)$ бошад, онгоҳ адади $\delta > 0$ ёфт мешавад, ки $U_\delta(c_1) \subset (a; b)$. Азбаски $\forall x \in U_\delta(c_1)$ шартҳои $f(x) \geq f(c_1) = m$

* Мишел Ролл (1652-1719) — риёзондонии франсияӣ, Теоремаи овардашуда танҳо барои бисёрбаъзогиҳо гуфта шуда буд.

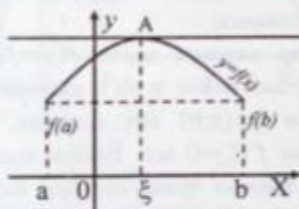
ичрошаванда аст, пас мувофиқи теоремаи Ферма $f'(c)=0$ ва тасдиқоти теоремаи Ҳангоми $\xi=c_1$ иҷро мешавад. Мавриди $c_2 \in (a;b)$ айнан монанди боло дида мешавад, ки онро ба хонанда тавсия мекунем. ▲

Шарҳи геометрии теоремаи Ролл чуноин аст: бо иҷро шудани шартҳои 1) – 3) қимати $\xi \in (a;b)$ ёфт мешавад, ки расанда ба графики функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи $A(\xi, f(\xi))$ ба тири Ox параллел аст (расми 80).

ҚАЙД. Агар ягон аз талаботҳои 1) – 3) теоремаи Ролл иҷро нашуда монад, онгоҳ тасдиқоти теорема ҷой надорад.

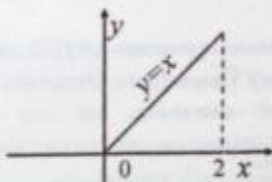
МИСОЛҲО. 1. Функсияи

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{агар } 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{агар } x=2 \end{cases}$$



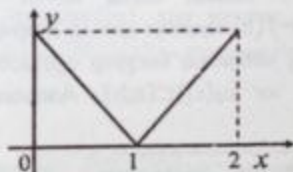
Расми 80

Дар охирҳои порчаи $[0;2]$ қимати $f(0)=f(2)$, дар ҳаман интервали $(0;2)$ ҳосилаи $f'(x)=1$ –ро дорад ва дар интервал ягон бор ба сифр табдил намеёбад, чунки шартҳои якуми теорема иҷро намешавад; $f'(x)$ дар нуқтаи $x=2$ қаниш дорад (расми 81).



Расми 81

2. Функсияи $f(x)=|x-1|$ дар порчаи $[0;2]$ бефосила буда дар охирҳои он қиматҳои $f(0)=f(2)=1$ –ро дорад, аммо ҳосилаи он $f'(x)$ дар ягон нуқтаи порчаи $[0;2]$ ба сифр баробар намешавад (нишон диҳед, ки ҳангоми $x<1$, $f'(x)=-1$ ва ҳангоми $x>1$, $f'(x)=1$), чунки $f(x)$ дар



Расми 82

нуқтаи $x=1$ ҳосила надорад (расми 82).

3. Барои функсияи $f(x)=x/2$ дар нуқтаҳои порчаи $[0;1]$ шартҳои 1) –2) теоремаи Ролл иҷро шуда шарти $f(0) \neq f(1)$ ҷой надорад, бинобар ин дар ягон нуқтаи интервали $(0;1)$ ҳосилаи он $(f'(x)=1/2)$ ба сифр табдил намеёбад.

ТЕОРЕМАИ 26.3. (ЛАГРАНЖ*). Агар функсияи $y=f(x)$ дар сегменти $[a;b]$ бефосила буда дар ҳар кадом нуқтаи интервали $(a;b)$ дифференсиронидашаванда бошад, онгоҳ дар интервали $(a;b)$ аққалан як нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки баробарии:

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), \quad a < \xi < b \quad (26.1)$$

иҷрошаванда аст.

▲ Функсияи ёридиҳандаи $\varphi(x)=f(x)+\lambda x$ гирифта λ -ро чуниин интихоб мекунем, ки шarti $\varphi(a)=\varphi(b)$ иҷро шавад: $f(a)+\lambda a=f(b)+\lambda b$.

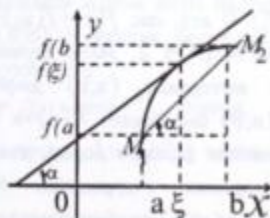
Аз ин ҷо $\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ва функсияи $\varphi(x)$ намуди

$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$ -ро мегирад. Азбаски $\varphi(x)$ дар порчаи $[a;b]$

бефосила, дар интервали $(a;b)$ дифференсиронидашаванда ва дар охири интервал қиматҳои баробарро дорад, пас мувофиқи теоремаи Ролл нуқтаи $\xi \in (a;b)$ ёфт мешавад, ки $\varphi(\xi)=f'(\xi)+\lambda=0$ аст. Аз ин ҷо ҳосил мекунем: $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. ▲

Шарҳи геометрии теоремаи Лагранжро меорем (расми 83). Бузургии $[f(b)-f(a)]/(b-a)$ коэффисиенти кунҷии бурандаи аз нуқтаҳои $M_1(a;f(a))$ ва $M_2(b;f(b))$ графики функсияи $y=f(x)$ гузарандаро ифода карда $f'(\xi)$ коэффитсиенти кунҷи расанда ба графики функсияро дар нуқтаи $(\xi, f(\xi))$ мефаҳмонанд.

Мувофиқи теоремаи Лагранж нуқтаи ξ ёфт мешавад, ки расанда ба



Расми 83

* Жозеф Лагранж (1736-1813) — риёзидони франсавӣ.

графики функсия дар нуқтан $(\xi, f(\xi))$ ба бурандаи M_1 M_2 параллел аст.

ҚАЙДИ 1. Баробарии $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$, $a<\xi<b$ формулаи Лагранж ё формулаи афзоишҳои охиринок ном дорад.

ҚАЙДИ 2. Азбаски нуқтан ξ дар байни нуқтаҳои a ва b ҷойгир аст, пас: $a<\xi<b \Rightarrow 0<\xi-a<b-a \Rightarrow 0<(\xi-a)/(b-a)<1$. Агар $\Theta=(\xi-a)/(b-a)$ гузорем, онгоҳ $0<\Theta<1$ ва $\xi=a+\Theta(b-a)$ мешавад. Аз ин рӯ формулаи (26.1)-ро дар намуди зерин низ вохӯрдан мумкин аст:

$$f(b)-f(a)=f'[a+\Theta(b-a)](b-a), \quad 0<\Theta<1.$$

ҚАЙДИ 3. Агар теоремаи Лагранжро барои порчаи $[x; x+\Delta x]$ тадбиқ намоем, онгоҳ формулаи (26.1) намуди $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\Theta\Delta x)\Delta x$, $0<\Theta<1$ -ро мегирад, ки бештар дар амалия истифода бурдани он қулай аст.

2. Натиҷаҳо аз теоремаи Лагранж.

НАТИҶАИ 1. Агар функсияи $y=f(x)$ дар интервали $(a;b)$ дифференсиронидашаванда буда барои ҳамаи $x \in (a;b)$, $f'(x) \neq 0$ бошад, онгоҳ $f(x)=c=\text{const}$, $x \in (a;b)$ аст.

▲ Бигузор x_0 -нуқтан қайдшудаи интервали $(a;b)$ ва x -нуқтан ихтиёрии он бошад. Теоремаи Лагранжро дар порчаи $[x_0; x]$ тадбиқ намуда, ҳосил мекунем: $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(\xi)$, ки дар ин ҷо $\xi \in (a;b)$, $f'(\xi) \neq 0$ аст, пас $f(x)=f(x_0)=c$. ▲

НАТИҶАИ 2. Агар функсияи $y=f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бефосила, дар интервали $(a;b)$ дифференсиронидашаванда ва барои ҳамаи $x \in (a;b)$ баробарии $f'(x)=k$ ($k=\text{const}$) иҷро шавад, онгоҳ $f(x)$ намуди функсияи хаттиро дорад, яъне $f(x)=kx+b$, $x \in [a;b]$

▲ Теоремаи Лагранжро барои функсияи $y=f(x)$ дар порчаи $[a;x]$, ($a \leq x \leq b$) тадбиқ намуда ҳосил мекунем: $f(x)-f(a)=k(x-a)$. Аз ин ҷо $f(x)=kx+B$, ки дар ин ҷо $B=f(a)$ -ка. ▲

НАТИҶАИ 3. Бигузор функсияи $y=f(x)$ дар интервали $(a;b)$, мумкин аст ба ғайр аз нуқтан $x_0 \in (a;b)$ дифференсиронидашаванда ва дар нуқтан x_0 бефосила бошад. Агар ҳудуди охиринок ё беохири

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x) = A \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = B \right)$$

мавҷуд бошад, онгоҳ дар нуқтаи x_0 ҳосилаи чап (рост) мавҷуд ва $f'_-(x_0)=A$, $(f'_+(x_0)=B)$.

♣ Бигузор $\Delta x \neq 0$ ҳамин тавр бошад, ки нуқтаи $x_0 + \Delta x \in (a; b)$. Барои порчаи $[x_0; x_0 + \Delta x]$ теоремаи Лагранжро тадбиқ намуда меёбем:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \Theta \Delta x), \quad 0 < \Theta < 1. \quad (*)$$

Агар $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(x_0 + \Delta x) = A$ мавҷуд бошад, онгоҳ тарафи рости баробарии (*) ҳудуди A —ро дорад, пас тарафи чапи он низ ҳамин ҳудудро соҳиб аст, яъне $f'_-(x_0)=A$. Айнан ҳамин тавр баробарии $f'_+(x_0)=B$ исбот карда мешавад. ♣

Шарт мекунем, ки функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи x_0 дифференсиронидашаванда аст, онгоҳ

$$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0). \quad (26.2)$$

Агар ҳудудҳои охириҳои $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = B$ мавҷуд бошанд, онгоҳ аз муносибатҳои $f'_-(x_0)=A$, $f'_+(x_0)=B$ ва (26.2) баробарии $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = f'(x_0)$ ҳосил мешавад. Ин маънои онро дорад, ки агар функсияи $y=f(x)$ дар интервали $(a; b)$ дифференсиронидашаванда бошад, онгоҳ ҳосилаи он $f'(x)$ нуқтаҳои каниши навъи якум надорад, бо таври дигар, ҳар кадом нуқтаи $x_0 \in (a; b)$ ё нуқтаи бефосилагии функсияи $f'(x)$ ё нуқтаи каниши навъи дуюм аст.

Мисоли 1. $f'_-(1)$ ва $f'_+(1)$ —ро ёбед, агар $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ бошад.

♣ Функсияи $f(x)$ дар $\mathbb{R}$ муайян аст, чунки $1+x^2 \geq 2|x|$ мебошад. Ҳосилаи $f'(x)$ —ро меёбем:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2)}, \quad |x| \neq 1.$$

Аз ин ҷо

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & \text{агар } |x| < 1, \\ -\frac{2}{1+x^2}, & \text{агар } |x| > 1. \end{cases}$$

Мувофиқи натиҷаи 3 ҳосил мекунем:

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{1+x^2} = 1, \quad f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{2}{1+x^2} \right) = -1. \blacktriangle$$

Мисоли 2. Нуқтаҳои қаниш $f'(x)$ —ро ёбед, агар

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ҳангоми } x \neq 0, \\ 0, & \text{ҳангоми } x = 0. \end{cases}$$

▲ Функцияи $x \neq 0$ бошад, онгоҳ $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ ва агар $x=0$ бошад, онгоҳ мувофиқи таърифи ҳосила

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = 0.$$

Бинобар ин функцияи $f'(x)$ дар $\mathbb{R}$ муайян аст ва ҳангоми $x \neq 0$ ин функция қаниши навъи дуюмро дорад, чунки ҳудуди функцияи $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, ҳангоми $x \rightarrow 0$ вуҷуд надорад. ▲

НАТИҶАИ 4. Агар функцияҳои $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ ҳангоми $x \geq x_0$ дифференсиронидашаванда буда шарти $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, $\varphi'(x) > \psi'(x)$ —ро ҳангоми $x > x_0$ қаноат кунанд, онгоҳ $\varphi(x) > \psi(x)$ аст.

▲ Теоремаи Лагранжро барои функцияи $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ дар порчаи $[x_0; x]$ ($x > x_0$) тадбиқ намуда, шарти $f(x_0) = \varphi(x_0) - \psi(x_0)$ —ро ба эътибор гирифта ҳосил мекунем: $f(x) = f'(\xi)(x - x_0)$, $x_0 < \xi < x$. Аз ин ҷо, мувофиқи шарти $\xi > x_0$, $f'(\xi) = \varphi'(\xi) - \psi'(\xi) > 0$ нобаробарии $f(x) > 0$ ё $\varphi(x) > \psi(x)$ —ро

ҳангоми $x > x_0$ ҳосил мекунем. ▲

Мисол. Исбот кунед, ки ҳангоми $x > 0$, $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ аст.

▲ Бигуздор $\varphi(x)=\ln(1+x)$, $\psi(x)=x-\frac{x^2}{2}$ бошад, онгоҳ $\varphi(0)=\psi(0)$, $\varphi'(x)=1/(1+x)$, $\psi'(x)=1-x$ ва ҳангоми $x>0$ нобаробарии $1/(1+x)>1-x$ ҳақонӣ, чунки ҳангоми $x>0$ ин нобаробарӣ ба нобаробарии $1>1-x^2$ баробарқувва аст. Натиҷаи 4 —ро барои функсияҳои $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ тадбиқ намуда дурустии нобаробарии дода шуда исбот мегардад.

ТЕОРЕМАИ 26.4 (Коши). Агар функсияҳои $y=f(x)$ ва $y=g(x)$ порчаи $[a;b]$ бефосила, дар интервали $(a;b)$ дифференсиронидашаванда буда $\forall x_0 \in (a;b)$ функсияи $g'(x) \neq 0$ бошад, онгоҳ дар ин интервал аққалан як нуқтаи $\xi \in (a;b)$ ёфт мешавад, ки баробарии зерин иҷрошаванда аст:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (26.3)$$

▲ Дар функсияи ёридиханди $\varphi(x)=f(x)+\lambda g(x)$ алади λ —ро тавре интихоб мекунем, ки $\varphi(a)=\varphi(b)$ бошад, он ба ифодаи

$$f(b)-f(a)+\lambda(g(b)-g(a))=0 \quad (26.4)$$

баробарқувва аст. Қайд менамоем, ки $g(b) \neq g(a)$ аст, вагарна мувофиқи теоремаи Ролл нуқтаи $\xi \in (a;b)$ ёфт мешуд, ки $g'(\xi)=0$ ва ин муқобили шarti теорема мебуд. Ҳамин тариқ, $g(b)-g(a) \neq 0$ ва аз (26.4) ҳосил мешавад:

$$\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \quad (26.5)$$

Азбаски барои ихтиёри λ функсияи $\varphi(b)$ дар порчаи $[a;b]$ бефосила, дар интервали $(a;b)$ дифференсиронидашаванда ва барои қиматҳои λ —и бо (26.5) муайян шуда дар нуқтаҳои a ва b қиматҳои якхела дорад, пас мувофиқи теоремаи Ролл нуқтаи $\xi \in (a;b)$ ёфт мешавад, ки $\varphi'(\xi)=0$ яъне $f'(\xi)+\lambda g'(\xi)=0$. Аз ин ҷо $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = -\lambda$. Аз ин баробарӣ ва

формулаи (26.5) тасдиқоти теорема ҳосил мешавад. ▲

ҚАЙДИ 4. Теоремаи Лагранж аз теоремаи Коши ҳангоми $g(x)=x$ будан ҳосил мешавад.

§27. ФОРМУЛАИ ТЕЙЛОР ВА БАЪЗЕ ТАДБИҚОТИ ОН.

1. Формулаи Тейлор бо бақияи шакли Лагранж.

ЛЕММАИ 27.1. Агар $y=f(x)$ дар нуқтаи x_0 ҳосилаи тартиби n -ро дошта бошад, онгоҳ бисёраъзогии $P_n(x)$ ёфт мешавад, ки

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad (k = \overline{1, n}). \quad (27.1)$$

Ин бисёраъзогӣ дар намуди зерин ифода меёбад.

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (27.2)$$

▲ Бигузор $\varphi(x) = (x-x_0)^m$, $m \in \mathbb{N}$ бошад, онгоҳ

$$\varphi(x_0) = 0, \quad \varphi^{(k)}(x_0) = \begin{cases} 0, & \text{агар } k \neq m, \\ k!, & \text{агар } k = m. \end{cases} \quad (27.3)$$

Аз (27.3), маълум мешавад, ки бисёраъзогии $P_n(x)$, ки бо формулаи (27.2) дода шудааст, шарти (27.1) -ро қаноат мекунад. Ин бисёраъзогиро бисёраъзогии Тейлори тартиби n барои функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи x_0 меноманд. ▲

ЛЕММАИ 27.2. Бигзор функсияҳои $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ дар δ атрофи $x_0(x_0)$ нуқтаи x_0 муайян буда шартҳои зеринро қаноат кунанд:

1) Барои ҳар кадом $x \in U_\delta(x_0)$ ҳосилаҳои $\varphi^{(n+1)}(x)$ ва $\psi^{(n+1)}(x)$ вуҷуд дошта:

$$2) \varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0, \quad \psi(x_0) = \psi'(x_0) = \dots = \psi^{(n)}(x_0) = 0 \quad (27.4)$$

3) $\psi(x) \neq 0$, $\psi^{(k)}(x) \neq 0$ барои $x \in U_\delta(x_0)$ ва $k = 1, 2, \dots, n+1$ бошанд.

Онгоҳ барои ҳар кадом $x \in U_\delta(x_0)$ нуқтаи $\xi \in (x_0; x)$ ёфта мешавад, ки

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}. \quad (27.5)$$

▲ Тасдиқотро барои $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ исбот мекунем. Мавриди $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ айнан гузаронида мешавад. Бигузор $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ бошад, онгоҳ барои функсияҳои $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ дар порчаи $[x_0; x]$ теоремаи Коширо тадбиқ намуда шарти $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = 0$ -ро ба эътибор гирифта мувофиқи (27.4), ҳосил мекунем:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}, \quad x_0 < \xi < x \quad (27.6)$$

Барои функсияҳои $\varphi'(x)$ ва $\psi'(x)$ дар порчаи $[x_0; \xi_1]$ боз теоремаи Коширо тадбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = \frac{\varphi'(\xi) - \varphi'(x_0)}{\psi'(\xi) - \psi'(x_0)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)}, \quad x_0 < \xi_2 < \xi. \quad (27.7)$$

Аз баробариҳои (27.6) ва (26.7) мебарояд:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)}, \quad x_0 < \xi_2 < \xi < x < x_0 + \delta.$$

Теоремаи Коширо пай дар пай барои функсияҳои $\varphi''(x)$ ва $\psi''(x)$, $\varphi^{(3)}(x)$ ва $\psi^{(3)}(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$ ва $\psi^{(n)}(x)$ дар порчаҳои мувофиқ тадбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \dots = \frac{\varphi^{(n)}(\xi_n)}{\psi^{(n)}(\xi_n)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)},$$

ки дар ин ҷо $x_0 < \xi < \xi_n < \dots < \xi_1 < x < x_0 + \delta$. Баробариҳои (27.5), барои мавриди $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ исбот шуд. $\blacktriangle$

СУПОРИШ. Баробариҳои (27.5) —ро барои мавриди $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ исбот кунед.

ТЕОРЕМАИ 27.1. Бигузор адади $\delta > 0$ ёфт шавад, ки функсияи $y = f(x)$ дар δ -атрофи $\zeta_0(x_0)$ нуқтаи x_0 ҳосилаҳои тартиби $(n+1)$ —ро дошта бошад, онгоҳ барои ихтиёри $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ нуқтаи $\xi \in \Delta = (x_0; x)$ ёфт мешавад, ки барои $y = f(x)$ ҷудокунин зерин ҷой дорад:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \quad (27.8)$$

$\blacktriangle$ Бигузор $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ ва $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ бисёраъзогии Теёлор барои функсияи $y = f(x)$ бошад. Ишораи зерин ҷорӣ мекунем:

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad (27.9)$$

Азбаски бисёраъзогии $P_n(x)$ мувофиқи леммаи 27.1 шарти (27.1) —ро қаноат мекунад, пас аз баробарин (27.9), ҳосил мешавад:

$$r_n(x_0) = r'_n(x_0) = \dots = r_n^{(n)}(x_0) = 0 \quad (27.10)$$

Функсияҳои $\varphi(x) = r_n(x)$, $\psi(x) = (x - x_0)^{n+1}$ шартҳои леммаи 27.2 -ро қаноат мекунад, пас барои онҳо баробарии (27.5), иҷрошаванда аст.

$$\frac{\alpha(x)}{\psi(x)} = \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in \Delta, \quad (f_n^{(n+1)}(\xi) = 0, \quad \psi^{(n+1)}(x) = (n+1)!). \quad (27.11)$$

Аз баробариҳои (27.11) ва (27.9), формулаи (27.8), ҳосил мешавад. ▲

Ифодаи $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ -ро аъзои боқимонда ё бақияи формулаи Тейлори шакли Лагранж меноманд.

НАТИҶА. Агар функсияҳои $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ ҳангоми $x \geq x_0$, n -бор дифференсиронидашаванда буда, ҳангоми $x > x_0$ шарти $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$, $k=0, 1, 2, \dots, n-1$, $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ -ро қаноат кунанд, онгоҳ дар ҳолати $x > x_0$, $\varphi(x) > \psi(x)$ аст.

▲ Барои мавриди $n=1$ ин тасдиқот дар §26 (натиҷаи 4 аз теоремаи Лагранж), исбот шуда буд. $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ мегузorem, онгоҳ $f^{(k)}(x_0) = 0$ ҳангоми $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ ва мувофиқи формулаи (27.8) ҳосил мекунем:

$$f(x) = \frac{1}{n!} (x - x_0)^n f^{(n)}(\xi).$$

Агар $x > x_0$ бошад, онгоҳ $\xi > x_0$, $f^{(n)}(\xi) = \varphi^{(n)}(\xi) - \psi^{(n)}(\xi) > 0$ ва бинобар ин $f(x) > 0$, яъне ҳангоми $x > x_0$, $\varphi(x) > \psi(x)$. ▲

Мисоли 1. Исбот кунед, ки барои $t \in \mathbb{R}$: $|\sin t - t| \leq \frac{t^2}{2}$.

▲ Формулаи (27.8) -ро ҳангоми $n=2$ ва $x_0=0$ барои функсияи $f(t) = \sin t$ тадбиқ намуда ҳосил мекунем: $\sin t = t - \frac{\sin \xi \cdot t^2}{2!}$. Аз ин ҷо $|\sin t - t| \leq \frac{t^2}{2}$, $t \in \mathbb{R}$. ▲

Мисоли 2. Исбот кунед, ки барои $x > 0$,

$$x - \frac{x^2}{2!} < \sin x < x - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{5!}. \quad (27.12)$$

▲ Агар $f(x) = \sin x$ бошад, онгоҳ

$$f(0) = f^{(2)}(0) = f^{(4)}(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f^{(3)}(0) = -1, \quad f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Формулаи (27.8) —ро ҳангоми $n=5$ ва $x_0=0$ тадбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \sin\left(\xi + 5 \cdot \frac{\pi}{2}\right). \text{ Аз ин ҷо } \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \text{ ҳосил мешавад, чунки } x > 0, \left| \frac{x^5}{5!} \sin\left(\xi + 5 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq \frac{x^5}{5!}.$$

Формулаи (27.8) —ро барои функсияи $f(x) = \sin x$ ҳангоми $n=3$ ва $x_0=0$ тадбиқ намуда дурустии тарафи чапи (27.12) —ро ҳосил мекунем. ▲

2. Формулаи Тейлор бо бақияи шакли Пеано*.

ТЕОРЕМАИ 27.2. Агар $f^{(n)}(x_0)$ мавҷуд бошад, онгоҳ барои функсияи $y=f(x)$ ҷудокунии зерин ҷой дорад:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0. \quad (27.13)$$

▲ Аз мавҷудияти $f^{(n)}(x_0)$ маълум мешавад, ки функсияи $y=f(x)$ муайян ва дар δ -атрофи нуқтаи x_0 ҳосилаҳои тартиби $(n-1)$ —ро дорад. $\varphi(x) = r_n(x)$, $\psi(x) = (x-x_0)^n$ мегузорем, ки $r_n(x)$ бо формулаи (27.9) муайян шудааст. Функсияҳои $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ шартҳои теоремаи 27.2 —ро қаноат мекунамд, агар рақами $(n+1)$ —ро ба $(n-1)$ иваз намоем (ба (27.10), нигаред). Леммаи 27.2 —ро истифода бурда шарти $r_n^{(n-1)}(x_0) = 0$ —ро ба эътибор гирифта ҳосил мекунем:

$$\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{r_n^{(n-1)}(\xi) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi-x_0)}, \quad (27.14)$$

ки дар ин ҷо $\xi = \xi(x)$ ва

$$x_0 < \xi < x < x_0 + \delta \text{ ё } x_0 - \delta < x < \xi < x_0 \quad (27.15)$$

ҳангоми $x \rightarrow x_0$ аз (27.15) мебарояд, ки $\xi \rightarrow x_0$ ва аз сабаби мавҷудияти $f^{(n)}(x_0)$ ва иҷро шудани шарти (27.10), ҳудуди зерин вуҷуд дорад.

* Пеано Жузеппе (1858-1932) — ринцандони италиявӣ.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_s^{(n-1)}(x) - r_s^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_s^{(n-1)}(\xi) - r_s^{(n-1)}(x_0)}{\xi - x_0} = r_s^{(n)}(x_0) = 0.$$

Ҳамин тариқ, тарафи рости формулаи (27.14), ҳангоми $x \rightarrow x_0$ ҳудуди сифрро дорад. Тарафи чапи (27.14) низ бояд ин ҳудудро дошта бошад. Ин чунин маъно дорад, ки ҳангоми $r_s(x) = o((x - x_0)^r)$, $f(x) - P_s(x) = o((x - x_0)^r)$ аст. Аз ин ҷо баробарии (27.13), мебарояд. ♣

ҚАЙД. Формулаи (27.13) — ро формулаи Тейлор бо аъзон боқимондаи шакли Пеано ё шакли локалии формулаи Тейлор меноманд.

ТЕОРЕМАИ 27.3. Агар $f^{(n)}(x_0)$ мавҷуд бошад ва ҳангоми $x \rightarrow x_0$ барои

$y = f(x)$ ҷудокунии

$$f(x) = \sum_{k=0}^n C_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (27.16)$$

ҷой дошта бошад, онгоҳ

$$C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (27.17)$$

♣ Дар аснои $x \rightarrow x_0$ теоремаи (27.2), формулаи (27.13) ва мувофиқи шарт баробарии (27.16), иҷрошаванда, пас ҳосил мекунем:

$$c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (27.18)$$

Ҳангоми $x \rightarrow x_0$ ба ҳудуд гузашта $c_0 = f(x_0)$ ҳосил мекунем. Дар тарафҳои рост ва чапи (27.18) ҷамъшавандаҳои якхелаи c_0 ва $f(x_0)$ — ро партофта ҳаман аъзоҳоро ба $x - x_0$ тақсим намуда ҳосил мекунем:

$$c_1 + c_2(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1})$$

Ҳангоми $x \rightarrow x_0$ ба ҳудуд гузашта $f'(x_0) = c_1$ ҳосил мекунем. Ин муҳокимарониҳоро пай дар пай такрор намуда баробарии (27.17) — ро ҳосил мекунем. ♣

3. *Ҷудо кардани функсияҳои элементарӣ бо формулаи Тейлор.*

Агар дар формулаи (27.13) $x_0=0$ гузорем, онгоҳ формулаи Маклорен* ҳосил мешавад:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0 \quad (27.19)$$

ҚАЙДИ 1. Бигузор $y=f(x)$ дар интервали $(-a;a)$ беохир бор дифференсиронидашаванда бошад. Агар $y=f(x)$ — функсияи ҷуфт бошад, онгоҳ ҳосилаи он $y'=f'(x)$ — функсияи тоқ ва баръакс, ҳосилаи функсияи тоқ-функсияи ҷуфт мебошад. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки барои функсияи тоқи $f(x)$ шарти $f^{(2k)}(0)=0$, $k \in N$ ва барои функсияи $f(x)$ — шарти $f^{(2k+1)}(0)=0$, $k \in N$ иҷро мешавад, чунки ҳаргуна функсияи бифосилаи тоқ ҳангоми $x=0$ қимати нулро мегирад. Аз ин сабаб, формулаи (27.19), барои функсияи беохир бор дифференсиронидашавандаи ҷуфт намуди:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n}), \quad x \rightarrow 0 \quad (27.20)$$

ва барои функсияи тоқ намуди зеринро дорад.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0 \quad (27.21)$$

Дар формулаи (27.20) аъзои боқимонда на дар намуди $o(x^{2n})$, балки дар намуди $o(x^{2n+1})$ навишта шудааст, чунки барои функсияи ҷуфти $f(x)$, $f^{(2k+1)}(0)=0$ аст ва бинобар ин, аъзои бисёраъзогии Тейлор, ки баъди ҷамъшавандаи $\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n}$ меояд ба сифр баробар аст.

Масъалаи навишти аъзои боқимонда формулаи (27.21), низ ба муҳокимарониҳои боло монанд аст.

Ақиқун ҷудокунини баъзе функсияҳои элементариро бо формулаи Маклорен меорем.

* Маклорен Колин (1698-1746) — риёсатдония шотландия.

а) Функсияи ниспониҳандагя. Агар $f(x) = e^x$ бошад, онгоҳ $f(0) = 1$ ва барои ихтиёри n , $f^{(n)}(0) = 1$. Формулаи (27.19), барои функсияи e^x намуди зеринро дорад:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0 \quad (27.22)$$

б) Функсияҳои гипербола. Азбаски $f(x) = \sinh x$ -функсияи тоқ аст, пас $f^{(2k+1)}(x) = \cosh x$, $f^{(2k+1)}(0) = 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) ва мувофиқи формулаи (27.21), ҳосил мекунем:

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0. \quad (27.23)$$

Айнан, бо формулаи (27.20) меёбем:

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0. \quad (27.24)$$

в) Функсияҳои тригонометрия. Функсияи $f(x) = \sin x$ -тоқ ва $f^{(2n+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}(2n+1)\right)$ аст. Аз ин ҷо $f^{(2n+1)}(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \cos n\pi = (-1)^n$.

Мувофиқи формулаи (27.21) меёбем:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0. \quad (27.25)$$

Айнан, $f(x) = \cos x$ функсияи ҷуфт, $f^{(2n)}(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2n\right) = (-1)^n$. Бо формулаи (27.20) ҳосил мекунем:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0. \quad (27.26)$$

г) Функсияи дараҷагя. Бигузор $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ бошад, онгоҳ $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdots [\alpha-(k-1)](1+x)^{\alpha-k}$ ва $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1) \cdots [\alpha-(k-1)]$. Ишораҳои зерин ҷоря менамоем: $C_\alpha^0 = 1$, $C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots [\alpha-(k-1)]}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$. Мувофиқи формулаи (27.19), ҳосил мекунем:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0. \quad (27.27)$$

Мавридҳои хусусии формулаи (27.27) —ро меомӯзем:

1) Агар $\alpha = -1$ гузошта x —ро ба $(-x)$ иваз намоем, онгоҳ ҳосил мекунем:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k + o(x^k), \quad x \rightarrow 0; \quad (27.28)$$

2) Дар ин ҷо x —ро ба $(-x)$ иваз менамоем, онгоҳ

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k + o(x^k), \quad x \rightarrow 0. \quad (27.29)$$

д) Функцияи логарифмӣ. Агар $f(x) = \ln(1+x)$ бошад, онгоҳ $f(0) = 0$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k}, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)! \quad \text{ва бо формулаи (27.19), меё-}$$

бем:

$$\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} + o(x^k), \quad x \rightarrow 0. \quad (27.30)$$

Дар (27.30), x —ро ба $(-x)$ иваз карда меёбем:

$$\ln(1+x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} + o(x^k), \quad x \rightarrow 0. \quad (27.31)$$

Ба сифати тадбиқи формулаҳои овардашуда якчанд мисолҳо меорем.

Мисолҳо. Функцияҳои зеринро бо формулаи Тейлор дар атрофи нуқтаи $x_0 = 0$ то саҳеҳии $o(x^n)$ ҷудо намоед.

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------|
| 1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}};$ | 2) $f(x) = \frac{1}{5x+3};$ |
| 3) $f(x) = \ln \frac{x-7}{x-5};$ | 4) $f(x) = (x+2)e^{-1/x}.$ |

1) Формулаи (27.27) —ро барои $\alpha = -1/2$ тадбиқ намуда меёбем:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^k x^k + o(x^k), \quad x \rightarrow 0,$$

ки дар ин ҷо,

$$C_{-\frac{1}{2}}^k = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}.$$

Агар $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) = (2k-1)!$ гузорем, онгоҳ ҳосил мекунем:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k \cdot k!} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0 \quad (27.32)$$

Аз ин ҷо барои $n=3$ меёбем:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0 \quad (27.33)$$

3) Баробарии $\ln \frac{x-7}{x-5} = \ln \frac{7}{5} + \ln \frac{1-x/7}{1-x/5}$ ва формулаи (27.31) —ро истифода

бурда меёбем, $\ln \frac{x-7}{x-5} = \ln \frac{7}{5} + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \left(\frac{1}{5^k} - \frac{1}{7^k} \right) + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$

4) Азбаски $f(x) = xe^{-3x} + 2e^{-3x}$ аст, формулаи (27.22) —ро истифода бурда ҳосил мекунем:

$$f(x) = x \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k 3^k}{k!} x^k + o(x^{n-1}) \right) + 2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 3^k}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0 \quad \text{ё ки}$$

$$f(x) = 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} 3^{k-1}}{(k-1)!} x^k + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k 3^k}{k!} x^k + o(x^n) =$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} 3^{k-1}}{k!} (k-6)x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0 \quad \blacktriangle$$

ҚАЙДИ 2. Баъзан мавридҳо, ҳангоми ҷудокунии функсияҳои бо формулаи Тейлор аз методи коэффисентҳои номуайяни истифода мекунанд.

Мисолҳо. Функсияҳои зеринро то саҳҳии $o(x^6)$ бо ёрии формулаи Маклорен ҷудо кунед.

1) $\operatorname{tg} x$; 2) $\operatorname{th} x$

▲1) Функсияи $\operatorname{tg} x$ тоқ аст, пас $\operatorname{tg} x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^6), x \rightarrow 0$. Дар ин ҷо $a_1 = 1$ аст, чунки ҳангоми $x \rightarrow 0$, $\operatorname{tg} x \sim x$ аст. Баробарии $\sin x = \cos x \operatorname{tg} x$ ва ҷудокунии (27.25) ва (27.26) —ро истифода бурда меёбем:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6) = (x + a_1 x^3 + a_3 x^5 + o(x^6)) \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4} + o(x^5) \right)$$

Коэффисентҳои назди дараҷаҳои мувофиқро баробар карда ҳосил мекунем:

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + a_1; \quad \frac{1}{5!} = \frac{1}{4!} - \frac{a^1}{2!} + a_5.$$

Аз ин ҷо, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_5 = \frac{2}{15}$. Ин қиматҳоро дар ҷудокунии $\operatorname{th} x$ мегузорем,

$$\text{онгоҳ } \operatorname{th} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6), \quad x \rightarrow 0 \quad (27.34)$$

2) Азбаски $\operatorname{th} x$ функсияи тоқ аст, пас $\operatorname{th} x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6)$, ки дар ин ҷо $a_1 = 1$ ($\operatorname{th} x \sim x$, агар $x \rightarrow 0$). Формулаҳои $\operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x \operatorname{th} x$ (27.23) (27.24) -ро истифода бурда ҳосил мекунем:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) = (1 + a_1x^3 + a_3x^5 + o(x^6)) \left(x + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} + o(x^6) \right)$$

Коэффициентҳои назди x^3 ва x^5 -ро баробар карда меёбем: $a_3 = -\frac{1}{3}$.

$a_5 = \frac{2}{15}$ ҳамин тариқ,

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6) \quad (27.35)$$

ҚАЙДИ 3. Ҷудокунии функсияи $y=f(x)$ бо формулаи Тейлор ҳангоми гузориши $x-x_0=t$ ба ҷудокунии функсияи $g(t)=f(x_0+t)$ бо формулаи Маклорен баробарқувва аст.

Мисол. Функсияи $f(x) = \frac{1}{x^2+6x}$ то саҳеҳи и $0((x+3)^n)$ дар атрофи нуқтаи $x_0=-3$ бо формулаи Тейлор ҷудо карда шавад.

▲ Азбаски $f(x) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+6} \right)$, пас $x=t-3$ гузошта ҳосил мекунем:

$$f(x) = g(x) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3} \right) = \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{3}} \right)$$

Аз ҷудокунии (27.28) ва (27.29) истифода мебарем, онгоҳ

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{6 \cdot 3^{k+1}} - \frac{1}{6 \cdot 3^{k+1}} \right) t^k + o(t^r), \quad t \rightarrow 0$$

ё ки

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{6 \cdot 3^{k+1}} - \frac{1}{6 \cdot 3^{k+1}} \right) (x+3)^k + o((x+3)^r) = -\frac{1}{18} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k + 1}{3^k} (x+3)^k + o((x+3)^r) \quad x \rightarrow -3 \quad \blacktriangle$$

ҚАЙДИ 4. Бигузор $f^{(n+1)}(0)$ мавҷуд буда ҷудокунни функсияи

$$f(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n), \quad b_k = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}$$

маълум бошад, онгоҳ

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n+1}) = f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)k!} x^{k+1} + o(x^{n+1}), \quad x \rightarrow 0,$$

яъне

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{(k+1)} x^{k+1} + o(x^{n+1}), \quad x \rightarrow 0. \quad (27.36)$$

МИСОЛҲО. Барои формулаи Маклорен то саҳеҳии $o(x^{2n+1})$ функсияҳои: 1) $\arctg x$; 2) $\arcsin x$; 3) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ҷудо карда шавад.

1) Азбаски $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$, пас формулаи (27.29) — ро истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

Аз ин ҷо

$$\arctg x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0. \quad (27.37)$$

ва ҳангоми $n=2$ меёбем:

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6), \quad x \rightarrow 0; \quad (27.38)$$

2) Азбаски $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ пас аз формулаи (27.32), меёбем:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

Аз ин ҷо

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{2^k k! (2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0. \quad (27.39)$$

Аз формулаи (27.39) ҳангоми $n=2$ меёбем:

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + o(x^6), \quad x \rightarrow 0; \quad (27.40)$$

3) Азбаски $\left(\ln(x+\sqrt{1-x^2})\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ аст, пас ҷудокунии (27.32) —ро истифода мебарем:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!}{2^k k!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

Аз ин ҷо

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!}{2^k k! (2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0. \quad (27.41)$$

Аз формулаи (27.41), ҳангоми $n=2$ меёбем:

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + o(x^6), \quad x \rightarrow 0. \blacktriangle \quad (27.42)$$

4. Тадбиқи формулаи Тейлор дар ҳисоб кардани ҳудудҳо.

Ҳангоми ҳисоб кардани $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ номуайянии $\frac{0}{0}$ ҳосил мешавад, агар $f(x)=g(x)=0$ бошад.

Шарт мекунем, ки

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\dots=f^{(n-1)}(0)=0, \quad f^{(n)}(0) \neq 0,$$

$$g(0)=g'(0)=g''(0)=\dots=g^{(n-1)}(0)=0, \quad g^{(n)}(0) \neq 0,$$

онгоҳ ҷудокунии функсияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ бо формулаи Маклорен намуди зеринро доранд:

$$f(x) = ax^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \quad a \neq 0; \quad (27.43)$$

$$g(x) = bx^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \quad b \neq 0; \quad (27.44)$$

Аз ин ҷо,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^n + o(x^n)}{bx^n + o(x^n)}, \quad x \rightarrow 0$$

ва

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{a}{b}, & \text{агар } m = n, \\ 0, & \text{агар } n > m, \\ \infty, & \text{агар } n < m. \end{cases}$$

МИСОЛҲО. Ҳудудҳои зеринро ёбед.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1+x}{2}}{\sin x - x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x^2 - 1}{x}.$$

1. Формулаҳои (27.23), (27.25), (27.29) ва (27.32) —ро истифода бурда ҳисоб мекунем:

$$e^x - \frac{1+x}{2} = x + \frac{x^2}{2} - \frac{1+x}{2} + o(x^2) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + o(x^2) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\sin x - x = x + \frac{x^3}{6} - \left(x + \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1+x}{2}}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = -4.$$

2. Аз баробарии $(1+x)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln(1+x)}$ истифода мекунем. Мувофиқи формулаи (27.30) $-\frac{1}{2}\ln(1+x) = -\frac{1}{2} + o(x)$ аст. Формулаи (27.22) —ро истифода бурда мекунем:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 = e^{\frac{1}{2}\ln(1+x)} - 1 = e^{-\frac{1}{2} + o(x)} - 1 = e^{-\frac{1}{2}} + o(x) - 1 = \frac{x}{2} + o(x).$$

Ҳамин тариқ, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2} + o(x)}{x} = \frac{1}{2}$. $\blacktriangle$

ҚАЙДИ 5. Агар $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ва $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$ бошад, формулаи Лопиталли Тейлорро ҳаққон ҳисоб кардани ҳудуди функсияҳои намунаи $0 \cdot \infty$ истифода мекунанд. Агар $x_0 \neq 0$ бошад, онгоҳ ҳудудҳои функсияи $f(x)$ намунаи (27.34) —ро дошта функсияи $g(x)$ —ро истифода бурда ҳисоб мекунанд:

$$g(x) = \frac{1}{bx^a + o(x^a)}, \quad b \neq 0, \quad a \in \mathbb{N}.$$

Дар ҳамаи формулаи (21.7), §21 мекунем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)g(x))^n = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x)g(x))^{\frac{1}{n-1}} = e^{\frac{1}{n-1}} \quad (27.4)$$

Мисол: Ҳудуди зеринро ёбед. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} + \ln(1-x))^{\frac{1}{\sin 3x - x}}$

Аз ҷудокунии функсияҳои $\lg x$, e^x , $\ln(1-x)$, $\arcsin x$ истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned}\arcsin 3hx - x &= \arcsin\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ e^{3x} + \ln(1-x) &= e^{3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \\ &\quad - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = 1 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\end{aligned}$$

Мувофиқи формулаи (27.45), ҳудуди матлуб ба $e^{\frac{1}{3}}$ баробар мешавад.

ҚАЙДИ 6. Агар гузориши $x-x_0=t$ —ро ҳангоми ҳисоб кардани ҳудудҳо дар нуқтаи охиринокӣ $x_0 \neq 0$ ҷорӣ намоем, онгоҳ масъала ба ҳисоб кардани ҳудуд ҳангоми $t=0$ иваз мешавад. Номуайяниҳои ∞/∞ , $0-\infty$, $\infty-\infty$ ба ҳудуди намуди $0/0$ оварда мешавад.

Мисол: Ҳудуди $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$ ёфта шавад.

♣ $f(x) = x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$ мегузорем, онгоҳ $f(x) = x^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)$ ва ҳангоми гузориши $\frac{1}{x}=t$ ҳосил мекунем: $f(x) = g(t) = \frac{1}{t^2}(\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1)$.

Дар формулаи (27.27), $\alpha = \frac{1}{2}$, $n=2$ гузошта меёбем:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+t} &= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2), \quad t \rightarrow 0 \\ g(t) &= \frac{1}{t^2}\left[1+t-\frac{t^2}{2}-2\left(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}\right)+o(t^2)+1\right] = \frac{1}{t^2}\left(-\frac{t^2}{4}+o(t^2)\right).\end{aligned}$$

Аз ин ҷо ҳангоми $t \rightarrow 0$ ҳудуд гирифта меёбем, ки ҳудуди матлуб ба $-\frac{1}{4}$ баробар аст.

5. Тадбиқи формулаи Тейлор дар ҳисоби тақрибӣ. Ҳисоб кардани адади e .

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \frac{x}{1+x^2}}{\sin x - shx}; 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1}}{x}.$$

1. Формулаҳои (27.23), (27.25), (27.29) ва (27.32) —ро истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\operatorname{tg} x - \frac{x}{1+x^2} = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{1+x^2} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} - x(1-x^2) + o(x^3) = \frac{4}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\sin x - shx = x + \frac{x^3}{6} - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \frac{x}{1+x^2}}{\sin x - shx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = -4.$$

2. Аз баробарии $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}$ истифода мебарем. Мувофиқи формулаи (27.30) $-\frac{1}{x}(1+x) = -1 + \frac{x}{2} + o(x)$ аст. Формулаи (27.22) —ро истифода бурда меёбем:

$$e^{(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1} = e \cdot e^{-1 + \frac{x}{2} + o(x)} - 1 = e^{\frac{x}{2} + o(x)} - 1 = \frac{x}{2} + o(x).$$

Ҳамин тариқ, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2} + o(x)}{x} = \frac{1}{2}.$ ♦

КАЙДИ 5. Агар $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ва $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$ бошад, формулаи локалии Тейлорро ҳангоми ҳисоб кардани ҳудуди функцияҳои намуни $(1+f(x))^{g(x)}$ истифода мебаранд. Агар $x_0=0$ бошад, онгоҳ ҷудокунии функцияи $f(x)$ намуни (27.34) —ро дошта функцияи $g(x)$ —ро ба намуни зерин ифода мекунанд:

$$g(x) = \frac{1}{bx^n + o(x^n)}, \quad b \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Дар асоси формулаи (21.7), §21 меёбем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax^n + o(x^n))^{\frac{1}{bx^n + o(x^n)}} = e^{\frac{a}{b}} \quad (27.45)$$

Мисол: Ҳудуди зеринро ёбед. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + \ln(1-x))$

Аз ҷудокунии функсияҳои $\operatorname{tg} x$, e^x , $\ln(1-x)$, $\arcsin x$ истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\arcsin x/x - x = \arcsin\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{6} + o(x^5) - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^{2x} + \ln(1-x) = e^{2x} - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = 1 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

Мувофиқи формулаи (27.45), ҳудуди матлуб ба $e^{\frac{1}{2}}$ баробар мешавад.

ҚАЙДИ 6. Агар гузориши $x-x_0=t$ —ро ҳангоми ҳисоб кардани ҳудудҳо дар нуқтаи охиринокӣ $x_0 \neq 0$ ҷоря намоем, онгоҳ масъала ба ҳисоб кардани ҳудуд ҳангоми $t=0$ иваз мешавад. Номуайяниҳои ∞/∞ , $0-\infty$, $\infty-\infty$ ба ҳудуди намуди $0/0$ оварда мешавад.

Мисол: Ҳудуди $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x+x})$ ёфта шавад.

◆ $f(x) = x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x+x})$ мегузорем, онгоҳ $f(x) = x^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-2\sqrt{1+\frac{2}{x}+1}\right)$ ва ҳангоми гузориши $\frac{1}{x}=t$ ҳосил мекунем: $f(x)=g(t)=\frac{1}{t^2}(\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t+1})$.

Дар формулаи (27.27), $\alpha=\frac{1}{2}$, $n=2$ гузошта меёбем:

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2), \quad t \rightarrow 0$$

$$g(t) = \frac{1}{t^2}\left[1+t-\frac{t^2}{2}-2\left(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}\right)+o(t^2)+1\right] = \frac{1}{t^2}\left(-\frac{t^2}{4}+o(t^2)\right)$$

Аз ин ҷо ҳангоми $t \rightarrow 0$ ҳудуд гирифта меёбем, ки ҳудуди матлуб ба $-\frac{1}{4}$ баробар аст.

5. Тадбиқи формулаи Тейлор дар ҳисоби тақрибӣ. Ҳисоб кардани адади e .

Бигузор дар ягон атрофи $u(x_0)$ нуқтаи x_0 функсияи $f(x)$, $(n+1)$ -бор дифференсиронидашаванда ва қиматҳои $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ маълум бошанд. Ёфтани қимати функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x \in u(x_0)$ талаб карда мешавад. Аз теоремаи 27.1 истифода мебарем. Агар дар формулаи (27.8)

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

гузорем, онгоҳ фарқи байни қимати аниқи $f(x)$ ва қимати тақрибии он ба

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \Theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

баробар мешавад, ки дар он ҷо $0 < \Theta < 1$ аст. Барои он қиматҳои $x \in u(x_0)$, ки $r_n(x) \rightarrow 0$, ифодаи

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

барои қиматҳои ниҳоят калони n аз қимати аниқи $f(x)$ кам фарқ мекунад.

Ба сифати мисол, ҳисоб кардани адади e —ро дида мебароем. Ҷудокунии функсияи e^x —ро бо бақияи шакли Лагранж дар намуди зерин ифода мекунем.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}. \quad (27.46)$$

Агар функсияи e^x —ро ба бисёрҷузғии Тейлори дараҷаи n иваз намоем, онгоҳ

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad (27.47)$$

ва ҳатогии мутлақи он чуниқ мешавад.

$$|r_n(x)| = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Агар e^x —ро дар порчаи $-1 \leq x \leq 1$ дида бароем, онгоҳ

$$|r_n(x)| \leq \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}. \quad (27.48)$$

Дар (27.47), $x=1$ гузошта қимати тақрибии адади e —ро меёбем:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Хатогии мутлақи он аз адади $\frac{3}{(n+1)!}$ хурд аст. Агар қимати e -ро то

саҳеҳии 0,001 ҳисоб кунем, онгоҳ адади n аз нобаробарии зерин

муайян мегардад: $\frac{3}{(n+1)!} < 0,001$ ё $(n+1)! > 3000$ ин нобаробарӣ барои $n=6$

ҳақонӣ буда $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{6!} = 2,718\dots$ аст.

§28. КУШОДАНИ НОМУАЙЯНИҲО БО ҚОИДАИ ЛОПИТАЛ*.

Аксар мавридҳо ҳангоми ҳисоб кардани ҳудуди функцияҳо «ифодаҳои номуайян» —и $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; +\infty - (+\infty); -\infty - (-\infty); 1^\infty; 0^0; 0^\infty; \infty^0$ пайдо

мешаванд. Методҳои ҳисоби дифференсиали имконияти кушодани ифодаҳои номуайянро дорад. Мо дар ин ҷо қоидаи Лопиталро барои кушодани ифодаҳои номуайян дар мавриде мебинем, ки ҳудудҳо бо ягон аз базаҳои: $x \rightarrow x_0 \pm 0$; $x \rightarrow x_0$; $x \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow \infty$ ҳисоб карда мешаванд.

ТЕОРЕМАИ 28.1 (Кушодани номуайянии $\frac{0}{0}$).

Бигуздор функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ дар ягон атрофи рости суроҳшудаи $x_0^+(x_0)$ нуқтаи $x_0 \in R$ муайян буда, шартҳои зеринро қаноат кунанд:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0+0} g(x) = 0;$$

* Лопитал Гилом Франсуа (1661-1704) —риёздони франсавӣ.

2) барои ҳар кадом $x \in \dot{U}^+(x_0)$ ҳосилаҳои $f'(x) \in R, g'(x) \in R$ мавҷуд буда $g' \neq 0$ бошад.

Агар $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in R$ мавҷуд бошад, онгоҳ $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ мавҷуд буда баробарии зерин ҷой дорад: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in R$.

▲ Функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ дар нуқтаи $x = x_0$ муайян нестанд. Агар дар ин нуқта $f(x_0) = g(x_0) = 0$ гузорем, онгоҳ функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ дар тарафи рости нуқтаи x_0 бефосила мешаванд. Ҳангоми $x \in \dot{U}^+(x_0)$ бефосилагии функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ аз дифференциронидашавандагии онҳо мебарояд.

Теоремаи Коширо дар порчаи $[x_0; x]$ тадбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}; \quad x_0 < \xi = \xi(x) < x.$$

Агар $x \rightarrow x_0 \pm 0$, онгоҳ $\xi \rightarrow x_0 \pm 0$ ва мувофиқи теорема $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A$, пас дар баробарии охирин ба ҳудуд гузашта, тасдиқоти теоремаро ҳосил мекунем. ▲

ҚАЙДИ 1. Агар $A = +\infty$ ё $A = -\infty$ бошад, тасдиқоти теоремаи 28.1 ҷой дорад, яъне агар $A \in \bar{R}$ бошад, шарти теорема иҷрошаванда аст.

ҚАЙДИ 2. Ибтидои теорема барои базан « $x \rightarrow x_0 - 0$ » айнан гузаронида мешавад.

СУПОРИШ. Теоремаи 28.1 —ро барои базан « $x \rightarrow x_0 - 0$ » исбот намоед.

ҚАЙДИ 3. Дурустии теоремаи 28.1 барои базан « $x \rightarrow x_0$ » аз дурустии он барои базаҳои « $x \rightarrow x_0 + 0$ » ва « $x \rightarrow x_0 - 0$ » ҳосил мешавад.

ҚАЙДИ 4. Мавридҳои $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$ мувофиқан ба мавридҳои $t \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow \infty$ бо гузориши $x = \frac{1}{t}$ ва истифода бурдани теорема дар бораи ҳудуди функцияи мураккаб гузаронида мешавад. Масалан:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ТЕОРЕМАИ 28.2 (Кушодани номуайянии $\frac{\infty}{\infty}$). Бигузор функсияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ ҳангоми $x > \alpha$ дифференсиронидашаванда буда $g'(x) \neq 0$ ва $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ бошад.

Агар ҳудуди охирноки $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ мавҷуд бошад, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ мавҷуд буда баробарии зерин ҷой дорад:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

♣ Аз шартҳои $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ мавҷудияти чунин адади $\alpha_1 > \alpha$ мебарояд, ки

$$\forall x > \alpha_1 \rightarrow |f(x)| > 1, |g(x)| > 1, \quad (28.1)$$

бинобар ин, ҳангоми $x > \alpha_1$, $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$. Мувофиқи таърифи ҳудуди $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, барои адади додашудаи $\varepsilon > 0$ чунин $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \geq \alpha_1$ -ро ёфтан мумкин аст, ки $\forall t > \delta_1$ нобаробарии зерин иҷрошаванда аст:

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < A + \frac{\varepsilon}{2} \quad (28.2)$$

Адади $x_0 > \delta_1$, (расми 84) -ро қайд намуда, мувофиқи шартҳои



Расми 84

$f(x) \rightarrow \infty$, $g(x) \rightarrow \infty$, адади $\delta_2 > x_0$ -ро тавре интихоб мекунем, ки $\forall x > \delta_2$ нобаробариҳои зерин иҷро шаванд.

$$\left| \frac{f(x_0)}{f(x)} \right| < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| < \frac{1}{2}. \quad (28.3)$$

Барои исботи тасдиқоти теорема, мавҷудияти чуқин адади δ -ро нишон додан лозим аст, ки $\forall x > \delta$ нобаробарии зерин иҷро шавад:

$$A - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A + \varepsilon. \quad (28.4)$$

Бигзор $x > \delta$ бошад, онгоҳ барои функсияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ дар порчаи $[x_0; x]$ теоремаи Коширо тадбиқ намуда нуқтаи $\xi \in [x_0; x]$ -ро меёбем, ки барои он

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}; \quad x_0 \leq \xi \leq x. \quad (28.5)$$

Аз шартҳои (28.1) ва (28.3) истифода бурда тарафи чапи (28.5) -ро чуқин табдил медиҳем:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot (\varphi(x))^{-1}, \quad (28.6)$$

ки дар ин ҷо

$$\varphi(x) = \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1 + \beta(x). \quad (28.7)$$

Мувофиқи шартҳои $f(x) \rightarrow \infty$, $g(x) \rightarrow \infty$ ҳангоми $x \rightarrow +\infty$ бузургии $\beta(x) \rightarrow 0$. Бинобар ин:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \geq \delta_1: \forall x > \delta \rightarrow |\beta(x)| < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{A + \frac{\varepsilon}{2}}. \quad (28.8)$$

Азбаски $\xi > x_0 > \delta_1$ аст, пас аз баробарии (28.6), (28.7) ва шартҳои (28.2) маълум мешавад, ки барои ҳамаи $x > \delta_2$ нобаробарии зерин иҷрошаванда аст:

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} (\varphi(x))^{-1} < A + \frac{\varepsilon}{2} \quad (28.9)$$

Агар $x > \delta$ бошад, онгоҳ мувофиқи шартҳои (28.7), (28.8), $\varphi(x) > 0$ аст ва бинобар ин, нобаробарии (28.9) ба нобаробарии зерин баробарқувва аст:

$$(A - \frac{\varepsilon}{2})(1 + \beta(x)) < \frac{f(x)}{g(x)} < (A + \frac{\varepsilon}{2})(1 + \beta(x)). \quad (28.10)$$

шарти (28.8)-ро истифода бурда, барои тарафи чапи ин нобаробарӣ ҳосил мекунем:

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)(1 + \beta(x)) = A - \frac{\varepsilon}{2} + \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\beta(x) \geq A - \frac{\varepsilon}{2} + \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\beta(x) > A - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = A - \varepsilon$$

Айнан, барои тарафи ростӣ (28.10) ҳосил мекунем:

Ҳамин тариқ, барои ҳамаи $x > \delta$ нобаробарии (28.2), иҷрошаванда буда тасдиқоти теорема исбот мешавад. ♦

ҚАЙДИ 5. Тасдиқоти теоремаи 28.2 ҳангоми $A = +\infty$ ё $A = -\infty$ будан иҷрошаванда аст.

ҚАЙДИ 6. Агар функцияҳои $f'(x), g'(x); f''(x), g''(x); \dots; f^{(m)}(x), g^{(m)}(x)$ шартҳои теоремаҳои (28.1) ва (28.2)-ро қаноат кунанд, онгоҳ қоидаи Лопиталро якчанд маротиба тадбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{(m)}(x)}{g^{(m)}(x)}$$

ҚАЙДИ 7. Номуайяниҳои намуи $0/0, \infty/\infty$ бо ёрии табдилдиҳиҳои

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, \\ f(x) - g(x) &= \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x) \cdot f(x)}} \end{aligned}$$

ба намуи номуайяниҳои $0/0$ ё ∞/∞ оварда мешаванд.

ҚАЙДИ 8. Номуайяниҳои $1^\infty, 0^0, \infty^0, 0^\infty$ бо логарифмиронидани ифодаи $y = [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ бо номуайяниҳои $0/\infty$ оварда мешавад.

Мисоли 1. Худуди зеринро ёбед: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^{10} - 2x^5 - 1}{x^3 - 4x^2 + 3}$.

♦ $f(x) = 3x^{10} - 2x^5 - 1$, $g(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ мегузорем, онгоҳ $f(1) = g(1) = 0$ ва $f'(x) = 30x^9 - 10x^4$, $f'(1) = 20$; $g'(x) = 3x^2 - 8x$, $g'(1) = -5$.

Мувофиқи теоремаи (28.1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{20}{-5} = -4$.

Мисоли 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg x}{\frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}}.$

♣ Азбаски $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$, $\ln 1 = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$ пас номуайяни $\frac{0}{0}$. Мувофиқи теоремаи 28.1 ҳосил мекунем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg x}{\frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \arctg x \right)'}{\left(\frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = -1. \clubsuit$$

Мисоли 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{a^x}$ ($n \in \mathbb{N}$, $a > 1$) —ро ёбед.

♣ Номуайяни $\frac{\infty}{\infty}$ —ро соҳибем. Теоремаи 28.2-ро n -бор тадбиқ намуда меёбем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x \ln^2 a} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1}{a^x (\ln a)^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{a^x (\ln a)^n} = 0$$

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки ҳаргуна функсияи дараҷагии x^n , ҳангоми $x \rightarrow +\infty$, нисбат ба функсияи нишондиҳандагии a^x ($a > 1$) суст меафзояд. ♣

Мисоли 4. Худуди $\lim_{x \rightarrow \infty} x^x$ —ро ёбед.

♣ Номуайяни намуди 0^0 —ро соҳибем. Аммо $x^x = e^{x \ln x}$ ва номуайяни $0 \cdot \infty$ -ро ҳосил карда онро ба номуайяни $\frac{\infty}{\infty}$ меорем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{x} \right)'}{\left(-\frac{1}{x^2} \right)'}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x}} = \frac{1}{e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x}}} = 1. \clubsuit$$

Мисоли 5. Худуди $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2-1}}$ —ро ёбед.

♣ Номуайяни намуди 1^∞ —ро соҳибем ва онро чунин табдил ме-диҳем:

$$(1+x^2)^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\ln(1+x^2) \cdot \frac{1}{x^2-1}}$$

Дар нишондиҳанда номуайянии намуди $\frac{0}{0}$ -ро ҳосил кардем. Қондаи Лопиталро ду бор тадбиқ карда меёбем:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{e^x-1} \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^2}{(1+x^2)(e^x-1)^2}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x(1+x^2)(e^x-1)^2}} = e^2\end{aligned}$$

Мисоли 6.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x - 1}{x}}{1-\cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + 2x \sin x \cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x + 2x \cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x + 2 \cos x - 2x \sin x}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}.\end{aligned}$$

Дар ҳалли мисол қондаи Лопитал се бор тадбиқ карда шуд.

ҚАЙДИ 9. Қондаи Лопиталро ҳамон вақт истифода бурдан аҳмиятнок аст, ки ҳудуди нисбати ҳосилаҳо мавҷуд бошад. Мавридҳои воমেхуранд, ки ҳудуди нисбати функсияҳо мавҷуд буда ҳудуди нисбати ҳосилаҳо вуҷуд надорад.

Мисоли 7. Ҳудуди $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x}$ -ро ёбед.

◆ Номуайянии $\frac{\infty}{\infty}$ -ро соҳибем. Аммо қондаи Лопиталь тадбиқнашаванда, чунки ҳудуди нисбати ҳосилаҳо $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)$ вуҷуд надорад. Ҳудудро бо усули муқарари ҳисоб мекунем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1 + 0 = 1$$

Ин мисол нишон медиҳад, ки мавҷудияти ҳудуди нисбати ҳосилаҳо барои мавҷудияти ҳудуди нисбати функсияҳо танҳо шарти кифоягӣ буда шарт зарурӣ шуда наметавонад.

Матқо барои боби VII

1. Дурустии теоремаи Роллро барои функсияҳои зерин санҷед.

а) $y=x^2-3x+2$ дар порчаи $[1;2]$.

б) $y=x^3+5x^2-6x$ дар порчаи $[0;1]$.

в) $y=\sin^2 x$ дар порчаи $[0;\pi]$.

г) $y=\cos^2 x$ дар порчаи $[-\pi/4;\pi/4]$.

2. Функсияи $f(x)=4x^3-x^2-4x-1$ решаҳои 1 ва -1 -ро дорад. Решаи ҳосилаи он $f'(x)$ -ро ёбед, ки дар теоремаи Ролл гуфта мешавад.

3. Формулаи Лагранжро барои функсияи $y=\sin x$ дар порчаи $[x_1;x_2]$ тартиб диҳед.

4. Дар кадом нуқта расанда ба хати қачи $y=\ln x$ ба хордаи нуқтаҳои $M_1(1;0)$ ва $M_2(e;1)$ —ро пайвастунанда параллел аст.

5. Теоремаи Лагранжро истифода бурда дурустии нобаробариҳои зерин исбот намоед:

а) $e^x \geq 1+x$; б) $\ln(1+x) < x$ ($x>0$); в) $b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$, агар $b>a$; г) $\arctg x < x$.

6. Формулаи Коширо барои функсияҳои $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$ дар порчаи $[1;2]$ тартиб дода нуқтаи ξ -ро ёбед.

7. Худудҳои зеринро ҳисоб кунед:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x}$.

8. Дар мисоли функсияҳои $f(x)=x^2 \sin(1/x)$, $g(x)=x$ қаноат ҳосил намоед, ки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ буда $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ вуҷуд надорад.

9. Бо ёрии формулаи Тейлор функсияҳои зеринро ҳудо намоед.

а) $f(x)=\sin^2 x$; б) $f(x)=\cos^2 x$.

БОБИ VIII. ТАДҚИҚИ ФУНКСИЯ БО МЕТОДҲОИ ҲИСОБИ ДИФФЕРЕНСИАЛИ

§29. ШАРТИ МОНОТОНИИ ФУНКСИЯҲОИ ДИФФЕРЕНСИРОНИДАШАВАНДА.

ТЕОРЕМАИ 29.1 (Шарти зарурӣ ва кифоятӣ). Барои он ки функсия дар интервали $(a;b)$ дифференциронидашавандаи $y=f(x)$ дар ҳамаи интервал камнашаванда (афзуннашаванда) бошад, зарур ва кифоя аст, ки барои ихтиёрии $x \in (a;b)$ шартҳои зерин иҷро шаванд:

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0). \quad (29.1)$$

♣ Ба исботи мавриди камнашаванда будани функсия маҳдуд мешавем.

Зарурӣ. Бигузор x_0 — нуқтаи ихтиёрии интервали $(a;b)$ бола $y=f(x)$ дар ҳамаи интервал камнашаванда бошад, онгоҳ

$$\forall x \in (a;b): x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0),$$

$$\forall x \in (a;b): x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Агар $x \in (a;b)$ ва $x \neq x_0$ бошад, онгоҳ нобаробарии

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (29.2)$$

иҷрошаванда аст. Азбаски тарафи чапи (29.2) ҳангоми $x \rightarrow x_0$ ҳудуди $f'(x_0)$ —ро дорад, пас аз нобаробарии (29.2) барои ихтиёрии $x_0 \in (a;b)$ ҳосил мекунем: $f'(x) \geq 0$.

Кифоятӣ. Бигузор шартҳои (29.1) $\forall x \in (a;b)$ иҷро шаванд. Ду нуқтаҳои гуногуни $x_1, x_2 \in (a;b)$ —ро мегирем, ки $x_1 < x_2$ бошад. Дар порчаи $[x_1; x_2]$ теоремаи Лагранжро барои функсияи $y=f(x)$ тадбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

ки аз ин ҷо маълум мешавад: $\forall x_1, x_2 \in (a;b), x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$. ♣

ТЕОРЕМАИ 29.2. (Шарти кифояти афзуншавӣ ва камшавӣи функсия). Агар барои ҳамаи $x \in (a;b)$ шарти $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) иҷро шавад, онгоҳ функсияи $y=f(x)$ дар интервали $(a;b)$ афзуншаванда (камшаванда) мебошад.

▲ Бо маъриди $f'(x) > 0$ маҳдуд мешавем. Бигузӯр x_1, x_2 нуқтаҳои ихтиёрии интервали $(a;b)$ буда барои онҳо шарти $x_1 < x_2$ ҷой дошта бошад. Формулаи Лагранжро барои функсияи $y=f(x)$ дар интервали $(a;b)$ тадбиқ карда меёбем:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad \xi \in (a;b).$$

Аз ин ҷо ва аз шарти $f'(\xi) > 0$ мебарояд, ки $f(x_2) > f(x_1)$ буда $y=f(x)$ дар интервали $(a;b)$ афзуншаванда аст. ▲

Мисол. Исбот кунед, ки функсияҳои $\sinh x$ ва $\tanh x$ дар $\mathbb{R}$ афзуншавандаанд.

▲ Азбаски барои $x \in \mathbb{R}$, $(\sinh)' = \cosh x > 0$ ва $(\tanh)' = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$, пас мувофиқи теоремаи (29.2) функсияҳои $\sinh x$ ва $\tanh x$ дар $\mathbb{R}$ афзуншавандаанд. ▲

ТЕОРЕМАИ 29.3. Агар функсияи $y=f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бефосила ва дар интервали $(a;b)$ дифференсиронидашаванда буда шарти $f'(x) < 0$ -ро қаноат кунад, онгоҳ ин функсия дар порчаи $[a;b]$ камшаванда аст.

Теоремаи 29.3, чун теоремаи 29.2 исбот мешавад.

Мисол. Исбот кунед, ки ҳангоми $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$$\sin x > \frac{2}{\pi} x \quad (29.3)$$

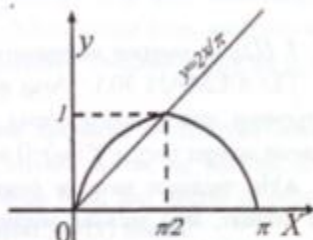
▲ Функсияи $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f(0) = 1$ -ро дида мебароем. Ин функсия дар порчаи $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ бефосила ва дар интервали $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ дифференсиронидашаванда буда, $f'(x) = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0$ мебошад, чунки дар интервали $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ нобаробарии $\cos x > 0$, $\tan x > x$ иҷрошаванда аст.

Мувофиқи теоремаи 29.3, $f(x)$ дар порчаи $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ камшаванда ва бинобар ин барои $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ нобаробарии $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ё $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$ ҷой дорад, ки ба нобаробарии (29.3) баробарқувва мебошад. ♣

Шарҳи геометрии нобаробарии (29.3). Дар интервали $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ графикҳои функсияи $y = \sin x$ аз графикҳои функсияи $y = \frac{2}{\pi}x$ боло мекушад (расми 84). Қайд менамоем, ки ҳангоми $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ нобаробарии

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x \quad (29.4)$$

иҷрошаванда буда дар маҳдиди $x=0$ ва $x=\frac{\pi}{2}$ нобаробарии (29.4) ба баробарӣ табдил меёбад.



Расми 84

ТЕОРЕМАИ 29.4. (Шарти афзуншавӣ ва камшавии функсия дар нуқта). Агар $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$) бошад, онгоҳ функсияи $y=f(x)$ дар нуқтани x_0 афзуншаванда (камшаванда) аст.

♣ Бигузор $f'(x_0) > 0$ бошад, онгоҳ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Аз ҷиҳати адади додашудани $\epsilon = f'(x) > 0$ чунон адади $\delta > 0$ — ро ёфтан мумкин аст, ки барои ҳамаи $x \in U_\delta(x_0)$ нобаробарии

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \epsilon = f'(x_0)$$

иҷрошаванда аст ва $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Аз ин ҷо, ҳангоми $|x - x_0| < \delta$ бузургии $x - x_0$ ва $f(x) - f(x_0)$ аломати якхела доранд. Бинобар ин, агар $x < x_0$ бошад, онгоҳ $f(x) < f(x_0)$ ва ҳангоми $x > x_0$ будан $f(x) > f(x_0)$ мешавад, яъне $f(x)$ дар нуқтани x_0 меафзояд. ♣

СУПОРИШ: Искот кунед, ки агар $f'(x_0) < 0$ бошад, онгоҳ $y=f(x)$ дар нуқтаи x_0 камшаванда аст.

§30. ШАРТҲОИ МАВҶУДИЯТИ ЭКСТРЕМУМҲОИ ЛОКАЛӢ.

Мафҳуми нуқтаҳои экстремуми локалӣ дар §26 ҷори шуда буд. Азбун ба ёфтани ҷуғи нуқтаҳо машғул мешавем.

1. Шартҳои зарурӣ ва мавҷудияти экстремуми локалӣ.

ТЕОРЕМАИ 30.1. Агар функсияи $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ дар нуқтаи $x_0 \in (a;b)$ экстремуми локалӣ дошта бошад, онгоҳ дар ин нуқта $\dot{e}$ ҳосилаи охиринокӣ функсия мавҷуд нест, $\dot{e}$ $f'(x_0)=0$ аст.

▲ Ин тасдиқот натиҷаи бевоситаи теоремаи Ферма (§26) мебошад. Дар ҳақиқат, агар ҳосилаи охиринокӣ функсия дар нуқтаи x_0 мавҷуд набошад, онгоҳ теоремаи искот мешавад. Агар $f'(x_0)$ мавҷуд бошад, онгоҳ мувофиқи теоремаи Ферма $f'(x_0)=0$ аст. ▲

Мувофиқи ин теорема нуқтаҳои экстремуми локалӣи функсияи $y=f(x)$ —ро дар байни он нуқтаҳои соҳаи муайянии функсия ҷустуҷӯ кардан лозим аст, ки дар онҳо ҳосилаи функсия $\dot{e}$ ба сифр баробар аст $\dot{e}$ вучуд надорад.

Мисол. Нуқтаи $x=0$ барои функсияҳои $f(x)=|x|$, $f(x)=x^2$, дар интервали $(-1;1)$ нуқтаи минимуми локалӣ аст. Функсияи $y=|x|$ дар нуқтаи $x=0$ ҳосила надорад, аммо ҳосилаи функсияи $y=x^2$ дар ин нуқта ба сифр баробар аст.

ҚАЙДИ 1. Шартҳои зарурӣ ва мавҷудияти экстремуми локалӣ шартҳои ғайбӣ нест. Масалан, функсияи $f(x)=x^3$ —ро дар фосилаи $(-1;1)$ дида мебароем. Ҳосилаи он $f'(0)=0$ бошад ҳам дар нуқтаи $x=0$ функсия экстремум надорад.

ТАЪРИФИ 30.1. Нуқтаҳои интервали $(a;b)$, ки дар онҳо ҳосилаи функсия ба сифр баробаранд, нуқтаҳои стационарӣ ва нуқтаҳои, ки дар онҳо функсия бефосила буда ҳосилаи он $\dot{e}$ ба сифр баробар буда $\dot{e}$ вучуд надоранд нуқтаҳои критикӣ ном доранд.

Аз таъриф маълум мешавад, ки ҳаман нуқтаҳои экстремуми функсия дар байни нуқтаҳои критикӣи он мебошанд, аммо на ҳаргуна нуқтаи

критикӣ нуқтани экстремуми функсия мебошад. Масалан барои функсияҳои $y=x^3$ ва $y=x^{1/3}$ нуқтани $x=0$ нуқтани экстремум нест.

2. Шартҳои киҷияти мавҷудияти экстремуми локалӣ.

Мафҳуми ивазшавии аломати функсияро ҷорӣ мекунем. Агар ягон функсия $y=\varphi(x)$ дар атрофи сурохишудани нуқтани x_0 муайян буда $\forall x \in (x_0-\delta; x_0)$ нобаробарии $\varphi(x) < 0$ ва $\forall x \in (x_0; x_0+\delta)$ нобаробарии $\varphi(x) > 0$ иҷро гардад, онгоҳ мегуянд, ки ҳангоми гузаштани аз нуқтани x_0 $y=\varphi(x)$ аломаташро аз минус («-») ба плюс («+») иваз кард. Айнан ҳамин тавр, мафҳуми ивазшудани аломати функсия аз «+» ба «-» ҳангоми гузаштани аз нуқтани x_0 ҷорӣ карда мешавад.

ТЕОРЕМАИ 30.2. (Шарти якуми киҷияти экстремуми локалӣ). Бигузор функсияи $y=f(x)$ дар ягон δ -атрофи нуқтани x_0 , мумкин аст ба ғайр аз нуқтани x_0 дифференсиронидашаванда буда, дар нуқтани x_0 бифосила бошад ва x_0 нуқтани критикӣ ё стационарии $y=f(x)$ бошад.

а) агар $f'(x)$ аломаташро ҳангоми гузаштани нуқтани x_0 аз минус ба плюс иваз кунад, яъне $\forall x \in (x_0-\delta; x_0) \rightarrow f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0; x_0+\delta) \rightarrow f'(x) > 0$, онгоҳ x_0 нуқтани минимуми қатъии функсияи $f(x)$ аст;

б) агар $f'(x)$ аломаташро ҳангоми гузаштани нуқтани x_0 аз плюс ба минус иваз кунад, яъне $\forall x \in (x_0-\delta; x_0) \rightarrow f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0; x_0+\delta) \rightarrow f'(x) < 0$, онгоҳ x_0 -нуқтани максимуми қатъии функсияи $f(x)$ аст;

в) агар $f'(x)$ дар ҳамаи δ -атрофи нуқтани x_0 аломати якхела дошта бошад, яъне

$$\forall x \in (x_0-\delta; x_0) \rightarrow f'(x) < 0 \quad (f'(x) > 0),$$

$$\forall x \in (x_0; x_0+\delta) \rightarrow f'(x) < 0 \quad (f'(x) > 0),$$

онгоҳ дар нуқтани x_0 функсияи $f(x)$ экстремум надорад.

▲ б) Бигузор $f'(x)$ ҳангоми гузаштани нуқтани x_0 , аломаташро аз «+» ба «-» иваз намояд ва $x \in (x_0-\delta; x_0)$ бошад. Барои $y=f(x)$ теоремаи Лагранжро дар порчаи $[x; x_0]$ тадбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x), \quad c \in (x; x_0),$$

Азаски $f'(x) > 0$ дар $(x_0-\delta; x_0)$, пас $f'(c) > 0$ ва $x_0 - x > 0$ аст. Бинобар

$$\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \rightarrow f(x_0) - f(x) > 0 \text{ ё } f(x_0) > f(x). \quad (30.1)$$

Алгун интервали тарафи рости нуқтаи x_0 , яъне $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ — ро мебинем. Дар порчаи $[x_0; x]$ формулаи Лагранжро барои $y = f(x)$ тадбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \quad c \in (x_0; x).$$

Азбаски дар $(x_0; x_0 + \delta)$, $f'(x) < 0$ аст, пас $f'(c) < 0$ ва $x - x_0 > 0$, бинобар ин

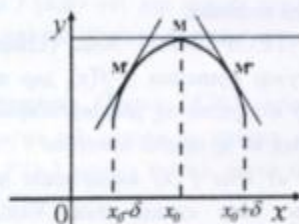
$$\forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \text{ ё } f(x_0) > f(x). \quad (30.2)$$

Аз нобаробариҳои (30.1) ва (30.2) маълум мешавад, ки дар атрофи нуқтаи x_0 нобаробарии $f(x) < f(x_0)$ ҳангоми $x \neq x_0$ иҷрошаванда аст. Ин чунин маъно дорад, ки дар нуқтаи x_0 функсияи $f(x) < f(x_0)$ максимуми локалӣ дорад.

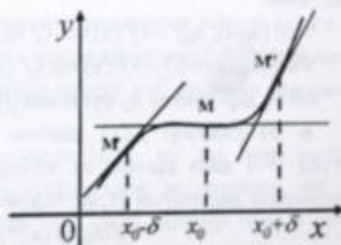
Шарҳи геометрии мавриди б) дар расми 85 дода шудааст. Дар атрофи нуқтаи x_0 : $f'(x_0 - \delta) > 0$, $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0 + \delta) < 0$ аст, ки онро аз рӯи монили расандаҳои M' , M ва M'' мушоҳида намудан мумкин аст.

Мавриди а) айнан монанди ҳолати б) исбот карда мешавад ва онро ҳамгун машқ ба хонанда пешниҳод менамоем. Барои мавриди а) шарҳи геометрӣ диҳед.

Мавриди в)-ро дида мебароем. Бигзор дар ягон атрофи $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ ҳосилаи функсияи $f'(x) > 0$ бошад, онгоҳ мувофиқи теоремаи 29.2 функсияи $y = f(x)$ афзуншаванда аст, яъне $\forall x < x_0$ нобаробарии $f(x) < f(x_0)$ ва $\forall x > x_0$ шарти $f(x) > f(x_0)$ иҷро мешавад. Ин чунин маъно дорад, ки x_0



Расми 85



Расми 86

нуқтаи экстремуми локалӣ нест, яъне ҳангоми гузаштан аз ин нуқта дар атрофи он аломати $f(x)-f(x_0)$ нигоҳ дошта намешавад.

Шарҳи геометрии мавриди в) дар расми 86 оварда шудааст, ки x_0 — нуқтаи критикӣ буда, барои функсияи тасвир ёфта экстремум нест:

$$f'(x_0)=0, f'(x_0-\delta)>0 \text{ ва } f'(x_0+\delta)>0. \blacktriangle$$

Мисол. Нуқтаҳои экстремуми функсияи $y=\sqrt[3]{(x-4)(x-7)^2}$ —ро ёбед.

▲ Ҳосилии функсияро меёбем.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(x-4)^{\frac{1}{3}}(x-7)^{\frac{2}{3}} \right]' = \frac{(x-7)^{\frac{2}{3}}}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}} + \frac{2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{3(x-7)^{\frac{1}{3}}} = \frac{x-7+2(x-4)}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}(x-7)^{\frac{1}{3}}} = \\ &= \frac{3x-15}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}(x-7)^{\frac{1}{3}}} = \frac{x-5}{\sqrt[3]{(x-4)^2(x-7)}}. \end{aligned}$$

Аз ин ҷо маълум аст, ки $f'(5)=0$ буда ҳангоми $x=4$ ва $x=7$ будан $f'(x)$ вуҷуд надорад. Ҳамин тариқ, 3 нуқтаҳои критикӣ дорем: $x_1=4$, $x_2=5$, $x_3=7$.

Бигузор $0<\varepsilon$ —адади ниҳоят хурд бошад, онгоҳ $f(4-\varepsilon)>0$ ва $f(4+\varepsilon)>0$. Дар атрофи нуқтаи $x_1=4$ ҳосила аломаташро иваз накард, пас дар ин нуқта функсия экстремум надорад.

Барои нуқтаи $x_2=5$ ҳосил мекунем: $f(5-\varepsilon)>0$ ва $f(5+\varepsilon)<0$. Дар нуқтаи $x_2=5$ функсияи $y=f(x)$ дорони максимум аст: $f_{\max}(5)=\sqrt[3]{4}$.

Барои нуқтаи $x_3=7$ ҳосил мекунем: $f(7-\varepsilon)<0$ ва $f(7+\varepsilon)>0$. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки нуқтаи $x_3=7$ нуқтаи минимуми функсияи $y=f(x)$ буда қимати минималии он $f_{\min}(7)=0$ аст. ▲

ТЕОРЕМАИ 30.3. (Шарти дуҷонибӣ қароргириши экстремуми локалӣ).

Бигузор дар нуқтаи статсионарии $x_0 \in (a,b)$ функсияи $y=f(x)$ ҳосилаи охиринокӣ тартиби дуру дошта $f''(x_0) \neq 0$ бошад, онгоҳ дар нуқтаи x_0 функсияи $y=f(x)$ максимум дорад, агар $f''(x_0)<0$ ва минимумро дорад, агар $f''(x_0)>0$ бошад.

▲ Азбаски x_0 —нуқтаи статсионарӣ аст, пас $f'(x_0)=0$ мебошад. Бигузор $f''(x_0)<0$ бошад. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки ҳосилаи тартиби якуми функсия $f'(x)$ дар нуқтаи x_0 камшаванда аст, яъне чунин атрофи $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ нуқтаи x_0 мавҷуд аст, ки $\forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$ нобаробарии $f'(x) > f'(x_0)=0$

ва $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ нобаробарии $f'(x) < f'(x_0) = 0$ иҷрошаванда аст. Ҳамин тариқ, ҳангоми гузаштани нуқтаи x_0 функсияи $f'(x)$ аломаташро аз плюс ба минус иваз мекунад. Бинобар ин функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x_0 максимум дорад.

Айнан, ҳамин тавр, муҳокима ронда нишон додан мумкин аст, ки агар $f'(x_0) = 0$ ва $f''(x_0) > 0$ бошад, функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x_0 минимум дорад. ♣

Мисол. Нуқтаҳои экстремуми функсияи зеринро ёбед:

$$f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 36x + 60.$$

♣ Меёбем $f'(x) = 12x^2 - 8x - 36$, $f''(x) = 24x - 8$. Муодилаи

$f'(x) = 0$ -ро ҳал мекунем:

$$12x^2 - 8x - 36 = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3.$$

Аломати $f''(x)$ -ро дар ин нуқтаҳо меёбем: $f''(0) < 0$, $f''(-2) > 0$, $f''(3) > 0$.

Бинобар ин, функсияи додашуда дар нуқтаи $x_1 = 0$ максимум ва дар нуқтаҳои $x_2 = -2$ ва $x_3 = 3$ дорои минимум аст. ♣

ҚАЙДИ 2. Агар $f'(x_0) = 0$ ва $f''(x_0) = 0$ бошад, онгоҳ функсияи $y = f(x)$, экстремум дошта (масалан, $f(x) = x^4$, $x_0 = 0$) ва надоштани (масалан, $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$), ҳам мумкин аст. Тасдиқоти зерин шартҳои қиёсӣ экстремуми функсияро барои мавриди $f''(x_0) = 0$ ҳал менамояд.

ТЕОРЕМАИ 30.4. (Шарти сеюми қиёсӣ экстремуми локалӣ). Агар функсияи $y = f(x)$ ҳосилаҳои тартиби n -ро, ($n > 2$) доро буда барои онҳо шартҳои

$$0 = f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) \quad \text{ва} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0 \quad (30.3)$$

иҷро шаванд, онгоҳ:

а) ҳангоми тоқ будани n функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x_0 экстремум надорад;

б) агар n -ҷуфт бошад, онгоҳ ҳангоми $f^{(n)}(x_0) < 0$ функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи x_0 дорон максимум ва ҳангоми $f^{(n)}(x_0) > 0$ дорон минимум мебошад.

♣ Функсияи $y=f(x)$ —ро дар атрофи нуқтаи статсионарии x_0 бо ёрии формулаи локалии Тейлор ҷудо намуда шартҳои (30.3) —ро ба эътибор мегирем, онгоҳ

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \right) (x - x_0)^n,$$

ки дар ин ҷо $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$. Азбаски ҳангоми $x \rightarrow x_0$, $\alpha(x) \rightarrow 0$, пас ҷуғи атрофи $u(x_0)$ нуқтаи x_0 ёфт мешавад, ки $\forall x \in u(x_0)$ нобаробарии $|\alpha(x)| < \frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!}$ иҷрошаванда аст. Бинобар ин, барои ҳамаи x аз $u(x_0)$ аломати ифодаи $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)$ бо аломати $f^{(n)}(x_0)$ яқсела мебошад.

Ифодаи $(x - x_0)^n$ ҳангоми гузоштани нуқтаи x_0 ва тоқ будани n аломаташро дигар мекунад, онгоҳ фарқи $f(x) - f(x_0)$ низ ҳангоми гузоштан аз ин нуқта аломаташро таъғир медиҳад. Бинобар ин функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи x_0 экстремум надорад. Агар n -ҷуфт бошад, онгоҳ барои $\forall x \in u(x_0)$ ифодаи $(x - x_0)^n > 0$ ва $\forall x \in u(x_0)$ ҳангоми $f^{(n)}(x_0) > 0$ нобаробарии $f(x) - f(x_0) > 0$ иҷрошаванда аст, яъне функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи x_0 минимум дорад. Айнан, ҳамин тавр, муҳокимаи ронда ҳангоми $f^{(n)}(x_0) < 0$ қаноат ҳосил кардан мумкин аст, ки функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи x_0 максимум дорад. ♣

Мисол. Экстремуми функсияи зеринро ёбед.

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1.$$

♣ $f'(x)$ —ро ёфта муодилаи $f'(x) = 0$ —ро ҳал мекунем:

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0 \quad x^2(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$$

$f''(x)$ —ро ёфта қимати онро дар нуқтаҳои статсионарӣ ҳисоб мекунем:

$$f''(1) < 0, f''(3) > 0, f''(0) = 0.$$

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки функсияи додашуда дар нуқтаи $x_2=1$ дорoi максимум ва дар нуқтаи $x_3=3$ минимум дорад. Барои дар нуқтаи $x_1=0$ экстремум доштан ё надоштани функсия ҳосилаи тартиби ояндан

$y=f(x)$ -ро меёбем:

$f'''(x)=60x^2-120x+30$. Аз ин ҷо $f'''(0)\neq 0$

Азбаски p -тоқ аст, пас мувофиқи шарти теорема дар нуқтаи $x_1=0$ функсияи $y=f(x)$ экстремум надорад. ♣

ҚАЙДИ 3. Масъалаи муайян намудани экстремуми функсия ҳангоми ба эътибор гирифтани шартҳои зерин осон мегардад.

1) Агар доимии $C>0$ бошад, онгоҳ $Cf(x)$ экстремумро танҳо барои он қиматҳои x доро мешавад, ки онро $y=f(x)$ дорад.

2) Агар доимии $C<0$ бошад, онгоҳ функсияи $Cf(x)$ максимум (минимум)-ро фақат ва фақат барои он қиматҳои x доро аст, ки онро минимум (максимум)-и функсияи $y=f(x)$ дорад.

3) Функсияи $f(x)=\sqrt[n]{\varphi(x)}$ ($n\in N$) экстремумро барои он қиматҳои x доро мешавад, ки онро функсияи $\varphi(x)$ мегирад.

4) Агар $f(x)=1/\psi(x)$ бошад, онгоҳ $f(x)$ максимум (минимум)-ро барои он қиматҳои x дорад, ки дар онҳо функсияи $\psi(x)$ минимум (максимум) дорад. Дар ин ҷо $\psi(x)$ дар соҳаи муайявнаш функсияи бифосила буда барои ихтиёри x аз соҳаи муайявнии $f(x)$ ба сифр табдил намеёбад.

Мисал. Функсияи зеринро ба экстремум тадқиқ кунед.

$$f(x) = \frac{25}{37\sqrt{24x^7 - 70x^5 + 10x^4 - 56x^3 + 47}}$$

♣ Мувофиқи қайдҳои зикрдодашуда ба экстремум функсияи $\varphi(x) = 24x^7 - 70x^5 + 10x^4 - 56x^3 + 47$ -ро тадқиқ мекунем:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 168x^2 \left[(x^4 - 1) - \frac{5}{2}x(x^2 - 1) \right] = 168x^2(x^2 - 1) \left(x^2 + 1 - \frac{5}{2}x \right) = \\ &= 168x^2(x^2 - 1) \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 2).\end{aligned}$$

Решаҳои $\varphi'(x)=0$ нуқтаҳои $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1/2$, $x_4=1$, $x_5=2$, мебошанд. Бо ин қиматҳои x маҳраҷи $f(x)$ адади ҳақиқӣ буда ба сифр табдил намеёбад. Бинобар ин, онҳо ҷа барои $\varphi(x)$ ва ҷа барои $f(x)$ ба экстремум шубҳаноканд. $\varphi'(x)$ ҳангоми гузаштани нуқтаи $x_1=-1$ аломаташро аз «+» ба «-» иваз мекунад, пас функсияи $\varphi(x)$ дар ин нуқта дорони максимум ва функсияи $f(x)$ дорони минимум аст. Барои нуқтаҳои критикӣ бо қиматҳои $x_2=0$ ва $x_3=1/2$ ҳама ду функсияи $\varphi(x)$ ва $f(x)$ минималӣ (максималӣ) мебошанд, ки $\varphi(x)$ дар нуқтаи $x=1/2$ минималӣ ($f(x)$ дар ин нуқта максимум), дар нуқтаи $x=1$ максимум ($f(x)$ дар ин нуқта минималӣ) ва дар нуқтаи $x=2$ минималӣ ($f(x)$ дар ин нуқта максимум) дорад. ▲

3. Экстремуми функсияҳои дар шакли параметрӣ додашуда —ро меомӯзем. Агар функсияи $y=f(x)$ дар шакли параметрӣ бо системаи муодилаҳои $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ дода шуда, функсияҳои $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ дар ягон фосилаи тағйирёбии аргументи t ҳосилан тартиби як ва дуру дошта $\varphi'(t)\neq 0$ бошад, онгоҳ ҳангоми тадқиқи функсия ба экстремум аз теоремаи 30.3 истифода мебарем. Мувофиқи §26 банди 5, ҳосилан тартиби як ва ду аз функсияи додашуда ба зерин баробар аст:

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}; \quad y''_{xx} = \frac{\psi''(t) \cdot \varphi'(t) - \varphi''(t) \cdot \psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Қиматҳои ба экстремум шубҳанокӣ t —ро аз муодилаи $y'_x=0$ ё $\psi'(t)=0$ муайян карда мешаванд. Бигузор $t=t_0$ яке аз ин қиматҳо бошад, онгоҳ бо ин қимати параметри t қимати ҳосилан тартиби дууми функсияи $y=f(x)$ ба зерин баробар аст: $y''_{xx} = \frac{\psi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$. Аз ин ҷо маълум аст, ки функсияи $y=f(x)$ ҳангоми $x=x_0=\varphi(t_0)$ максимум (минимум) дорад, агар $\psi''(t_0)<0$ ($\psi''(t_0)>0$).

Агар $\psi''(t_0)=0$ бошад, онгоҳ ҳосилаҳои тартиби баланди ($n>2$) функсияи $y=f(x)$ ёфта аз теоремаи 30.4 истифода бурдан мумкин аст.

Мисол. Функсияи $y=f(x)$, ки бо ёрии системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = t^3 - 5t^2 - 20t + 7, \\ y = \psi(t) = 4t^3 - 3t^2 - 18t + 3, \end{cases} \quad (-2 < t < 2)$$

дода шудааст ба экстремум тадриқ карда шавад.

▲ Функцияҳои $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ҳосилаҳои тартиби ихтиёриро доранд. Азбаски $\varphi'(x) = 5x^4 - 15x^2 - 20$, $\psi'(t) = 12t^2 - 4t - 18$, $\psi''(t) = 24t - 4$ ва $\varphi'(t)$ дар интервали $(-2; 2)$ ба сифр табдил намеёбад, пас системаи додашуда дар ин интервал функцияи $y=f(x)$ —ро муайян мекунад.

Ҳосилаи $\psi'(t)$ решаҳои $t_1 = -1$ ва $t_2 = 3/2$ —ро дорад, ки ба интервали $(-2; 2)$ таалуқ доранд. Азбаски $\psi''(-1) < 0$ ва $\psi''(3/2) > 0$, пас функцияи $y=f(x)$ максимумро ҳангоми $t = -1$ (яъне, барои қимати $x = 31$) ва минимумро ҳангоми $t = 3/2$ (яъне, барои қимати $x = -1033/32$) дорад.

4. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функция. То ҳол масъалаи ёфтани экстремумҳои функцияро дар нуқтаи додашуда, яъне ёфтани қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функцияро дар ягон атрофи нуқтаи додашуда омӯхтем. Аммо ин қиматҳо дар ҳаман соҳаи муайянии функция қиматҳои калонтарин ва хурдтарин нестанд. Дар амалия бештар ёфтани қиматҳои калонтарин ва хурдтарин дар тамоми соҳаи муайянии функция талаб карда мешавад.

Агар функцияи $y=f(x)$ дар сегменти $[a; b]$ бефосила бошад, онгоҳ мувофиқи теоремаи Вейерштрасс (теоремаи 20.2), функция $y=f(x)$ дар порчаи додашуда қимати калонтарин ва хурдтарин дорад. Дар мавриде, ки функцияи $y=f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ бефосила буда дар нуқтаҳои $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ максимуми локалӣ ва дар нуқтаҳои $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{m-1}, \tilde{x}_m$ минимуми локалӣ дошта дигар нуқтаҳои экстремуми локалӣ надорад, қимати калонтарини функцияи $y=f(x)$ дар порчаи $[a; b]$, калонтарин аз ададҳои $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$ ва қимати хурдтарини он дар ин порча хурдтарин аз ададҳои $f(a), f(\tilde{x}_1), \dots, f(\tilde{x}_m), f(b)$ ҳисоб меёбад. Дар ҳалли масъалаҳои амалӣ ҳангоми муайян намудани қимати калонтарин (хурдтарин) —и функцияи $y=f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ ё дар интервали $(a; b)$, аксар маърид, ба ҳолате вомерхурем, ки функцияи $y=f(x)$ дар интервали $(a; b)$ дифференциронивадашаванда ва дар порчаи $[a; b]$ бефосила буда муодилаи $f'(x) = 0$ ягона решаи $x_0 \in (a; b)$ —ро тарае дорад, ки $\forall x \in (a; x_0)$, $f'(x) > 0$ ва $\forall x \in (x_0; b)$, $f'(x) < 0$ ё $\forall x \in (a; x_0)$, $f'(x) < 0$ ва $\forall x \in (x_0; b)$, $f'(x) > 0$ аст. Дар

ин маврид адади $f(x_0)$ на танҳо экстремуми локалии функсияи $y=f(x)$, балки қимати калонтарин (хурдтарин) —и функсия дар порчаи $[a;b]$ ё дар интервали $(a;b)$ мебошад.

Мисолҳо. 1. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияи $y=f(x)$ —ро дар маҷмӯи X ёбед, агар

$$a) f(x)=(x-2)^2(x+1)^3, X=[0;3];$$

$$б) f(x)=|x^2-4|e^{-|x|}, X=\mathbb{R}.$$

Бигузор M ва m мувофиқан қимати калонтарин ва хурдтарини функсияи $y=f(x)$ дар маҷмӯи X бошад.

а) аз муодилаи $f'(x)=(x-2)(x+1)^2(5x-4)=0$ меёбем, ки барои функсияи додашуда $x=5/4$ нуқтаи максимум, $x=2$ нуқтаи минимум мебошад ва $f(5/4)=3^8/45$, $f(2)=0$ буда қиматҳои функсия дар охириҳои порчаи $[0;3]$ ба $f(0)=4$, $f(3)=4^3$ аст. Дар байни ададҳои $f(0)$, $f(5/4)$, $f(2)$, $f(3)$ муқоиса нишон медиҳад, ки $M=f(3)=64$ ва $m=f(2)=0$ аст.

б) функсия дар $\mathbb{R}$ бифосила ва ба ғайр аз нуқтаҳои $-2, 0, 2$ дар $\mathbb{R}$ дифференсиронидашаванда буда функсияи ҷуфт аст. Агар $x>0$ бошад,

$$f(x)=-(x^2-4)e^{-x}, \text{ ҳангоми } x \in [0;2],$$

$$f(x)=\begin{cases} -(x^2-4)e^{-x}, & \text{ҳангоми } x \in [0;2], \\ (x^2-4)e^{-x}, & \text{ҳангоми } x > 2. \end{cases}$$

онгоҳ муодилаи $f'(x)=(-x^2+2x+4)e^{-x}=0$ дар фосилаи $(0;+\infty)$ ягона решаи $x_1=1+\sqrt{5}$ —ро дар ҳолати $x>2$ дорад ва аломаташро ҳангоми гузаштани нуқтаи x_1 аз “+” ба “-” иваз мекунад. Бинобар ин, x_1 —нуқтаи максимуми қатъи функсияи $f(x)$ аст. Ҳангоми гузаштани нуқтаи $x_2=2$ функсияи $f'(x)$ аломаташро аз минус ба плюс иваз мекунад, ҷуғи дар қиматҳои $x \in (0;2)$, $f'(x)=-(x^2-4)e^{-x}$ аст. Бинобар ин, $x_2=2$ нуқтаи минимуми қатъи функсияи $f(x)$ аст. Азбаски функсияи $f(x)$ дар $(0;2)$ камшаванда ва ҷуфт мебошад, ҳулоса мебарояд, ки $x=0$ нуқтаи максимуми $f(x)$ аст. Натиҷаҳои ҳисобшуда ва ҷуфт будани $f(x)$ —ро истифода бурда меёбем, ки $x=-2$ ва $x=2$ нуқтаҳои минимуми қатъи ва $x_1=-(1+\sqrt{5})$, $x=0$ ва $x_1=1+\sqrt{5}$ —нуқтаҳои максимуми қатъи функсияи $f(x)$ мебошад. Функсия ҳангоми $x_1>1+\sqrt{5}$ камшаванда ва

чуфт буда $f(0)=4$, $f(2)=2$, $f(1+\sqrt{5})=2(1+\sqrt{5})e^{-(1+\sqrt{5})}<2$ аст, чулки ҳангоми $t>0$, $e^t<1$ аст. Бинобар ин дар байни ададҳои $f(0)$, $f(2)$, $f(1+\sqrt{5})$ қимати калонтарин ва хурдтарин инҳоянд:

$$M=f(0)=4, m=f(2)=0.$$

Мисоли 2. Нисбати радиуси асоси цилиндро ба баландии он муайян намоед, агар ҳангоми маълум будани ҳаҷми цилиндр, масоҳати сатҳи пурраи он хурдтарин бошад.

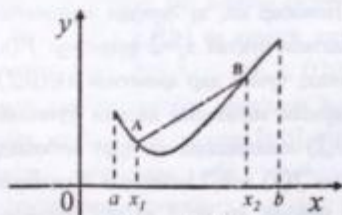
Бигузор x , h , v , s — мувофиқан радиуси асос, баландия, ҳаҷм ва масоҳати сатҳи пурраи цилиндр, бошад онгоҳ $s=2\pi xh+2\pi x^2$, $v=\pi x^2 h$ буда ҳангоми $x>0$, $h=v/\pi x^2$ ва $s=s(x)=2(v/x+\pi x^2)$, $s'(x)=2(2\pi x-v/x^2)$.

Муодилаи $s'(x)=0$ ягона решаи $x_0=\sqrt[3]{v/2\pi}$ дошта, ҳангоми $x\in(0;x_0)$, $s'(x)<0$ ва ҳангоми $x>x_0$ $s'(x)>0$ аст. Бинобар ин, x_0 -нуқтаи минимуми функсияи $s(x_0)$ аст, яъне масоҳати сатҳи пурраи цилиндр хурдтарин аст, агар баландии он ба x_0 баробар бошад. Барои ин қимат, $h=v/\pi x_0^2=2x_0$; яъне цилиндр бо ҳаҷми додашуда масоҳати сатҳи хурдтаринро ҳамон вақт дорад, агар баландии он аз радиусаш 2 бор зиёд бошад.

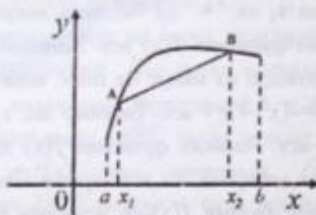
§31. ФУНКСИЯҲОИ БАРЧАСТА. НУҚТАҲОИ ҚАТЫШАВИ

1.Таърифи функсияи барчаста. Омӯзиши функсияҳои барчастаро аз дида баромадани графикаи ду функсияро оғоз менамоем.

Дар ҳар кадом график ихтиёри ду нуқтаҳо гирифта онҳоро бо хати рост



Рисун 87(а)



Рисун 87(б)

(хорда) пайваст мекунем, онгоҳ маълум мешавад, ки дар интервали $(x_1;x_2)$

камони $\widehat{AB}$ ё аз поён (расми 87(а)) —и хордаи AB ё аз боло (расми 87(б)) —и ҳамин хорда ҷойгир аст. Ин хосияти асоси мафҳуми функсияҳои барҷастаро ташвиҳ мекунад.

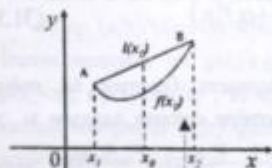
Бигзор функсияи $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ дода шуда бошад. Ду қиматҳои $x_1, x_2 \in (a;b)$ —ро мегирем, ки $x_1 < x_2$ бошад. Аз нуқтаҳои $A(x_1; f(x_1))$ ва $B(x_2; f(x_2))$, ки дар графики функсияи $f(x)$ мебошанд, хати рост (хорда) мегузаронем. Муодилаи он $y = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) + \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1)$ мебошад. Тарафи

рости ин муодилоро бо $l(x)$ ишорат мекунем, онгоҳ вай мухтасар намуни $y=l(x)$ —ро мегирад. Айён аст, ки $l(x_1)=f(x_1)$, $l(x_2)=f(x_2)$ аст.

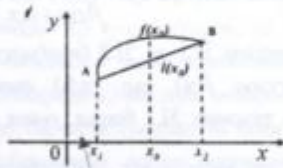
ТАЪРИФИ 31.1. Мегӯянд, ки графики функсияи $f(x)$ дар интервали $(a;b)$ барҷастан самташ ба поён (боло) —ро сохтб аст, агар барои сегонии нуқтаҳои $x_0, x_1, x_2 \in (a;b)$, ки $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$ аст, нобаробарии зерин иҷро шавад:

$$f(x_0) \leq l(x_0) \quad (f(x_0) \geq l(x_0)) \quad (31.1)$$

Ҳангоми иҷро шудани нобаробарии қатъии $f(x_0) < l(x_0)$ ($f(x_0) > l(x_0)$).



Барҷастан самташ
ба поён



Расми 88

Барҷастан самташ
ба боло

функсияи f —ро дар интервали $(a;b)$ қатъи барҷастан самташ ба поён (боло) меноманд.

Шарҳи геометрии ин нобаробариҳо дар расми 88 оварда шудааст.

Барои соддагӣ, функсияҳои барҷастан самташ ба поёнро омӯхта дар онҳо онро, мухтасар, барҷаста мегӯем.

ТАЪРИФИ 31.2. Функцияи $f(x)$ дар интервали $(a;b)$ барҷастан самташ ба поён ном дорад, агар барои истиёри сегонан ададҳои x_1, x, x_2 , ки бо шартин $x_1 < x < x_2$ алоқаманд мебошанд, нобаробарини зерин иҷро шавад:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \quad (31.2)$$

Баробаркушаватин таърифҳои 31.1 ва 31.2 аз баробаркушаватин нобаробарини $f(x) \leq \lambda(x)$ ва (31.2) мебарояд. Дар ҳақиқат бигузор нобаробарини $f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$ иҷро шавад. Мувофиқи баробарини $(x_2 - x_1) = (x_2 - x) + (x - x_1)$ нобаробарини охириин ба нобаробарини

$(x_2 - x)(f(x_1) - f(x)) + (x - x_1)(f(x_2) - f(x)) \geq 0$ баробаркушва аст. Ҳаман аъзоҳоро ба $(x_2 - x)(x - x_1) > 0$ тақсим намуда нобаробарини ба (31.2) баробаркушваро ҳосил мекунем.

ТАЪРИФИ 31.3. Функцияи $f(x)$ дар интервали $(a;b)$ барҷаста (самташ ба поён) ном дорад, агар $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$, ки $x_1 < x_2$ аст ва истиёри ададҳои $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$, ки $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ аст, нобаробарини зерин иҷро шавад:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \quad (31.3)$$

Таърифҳои 31.1. ва 31.3 баробаркушваанд.

▲ Бигузор $f(x)$ дар $(a;b)$ функцияи барҷаста (самташ ба поён) мувофиқи таърифи 31.1 бошад, онгоҳ барои истиёри сегонан ададҳои $x_1, x, x_2 \in (a;b)$, ки $x_1 < x < x_2$ аст, нобаробарини $f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$ иҷро мешавад. Мегузорем: $\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1)$, $\alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$ Айён аст, ки $\alpha_1 > 0$,

$\alpha_2 > 0$ ва $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Безосита ҳисоб карда меёбем, ки $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ аст. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки функцияи $f(x)$ дар интервали $(a;b)$ барҷаста (самташ ба поён), мувофиқи таърифи 31.3, мебошад. Муҳимваро бо тартибн баръакс гузаронида дурустии тасдиқоти болоро ҳосил мекунем. ▲

Нобаробарини 31.3 нобаробарини Йенсен ном дошта барои мавқори охиринокӣ ҷамъшаванда низ ҷой дорад:

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) \leq a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \dots + a_nf(x_n),$$

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b; \quad a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0; \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1.$$

▲ Исроти ин нобаробарӣ бо методи индуксияи математикӣ гузаронанда мешавад. Барои $n=2$ онро исбот намудем. Шарт мекунем, ки он барои $(n-1)$ дуруст аст. $\beta_1 = a_2 + \dots + a_n > 0$ мегузорем, онгоҳ $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$ буда ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} f(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) &= f\left[\alpha_1x_1 + \beta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\beta_n}x_n\right)\right] \leq \\ &\leq \alpha_1f(x_1) + \beta_1f\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\beta_n}x_n\right) \leq \alpha_1f(x_1) + \alpha_2f(x_2) + \dots + \alpha_nf(x_n). \end{aligned}$$

2. *Ҳосилати функсияҳои барҷаста.* Бигзор $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ функсияи барҷаста (самташ ба поён) бошад. Нуқтаи ихтиёрии $(a;b) \ni x_0$ -ро қайд намуда дар интервали $(a;b)$ нуқтаи x -ро мегирием, ки аз x_0 фарқ кунад. Функсияи $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ -ро дида мебароем.

ЛЕММАИ 31.1 Функсияи $g(x)$ дар $(a;b) \setminus \{x_0\}$ афзуншаванда аст.

▲ Дар $(a;b) \setminus \{x_0\}$ ду нуқтаҳои ихтиёрии x_1, x_2 -ро мегирием, ки $x_1 < x_2$ аст. Нишон медиҳем, ки $g(x_1) \leq g(x_2)$. Се мавридҳои зерин имконпазир аст: а) $x_1 < x_2 < x_0$; б) $x_1 < x_0 < x_2$; в) $x_0 < x_1 < x_2$. Мавриди а)-ро дида мебароем. Азбаски дар интервали $(a;b)$ функсияи $f(x)$ барҷаста (самташ ба поён) аст, пас барои сегонаи адалҳои $x_1 < x_2 < x_0$ нобаробарии зерин иҷрошаванда аст:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \quad \text{ки он ба нобаробарии} \quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

баробаркувва мебошад. Аз нобаробарии ҳосилшуда $g(x_1) \leq g(x_2)$ мебарояд. Дар мавриди б) аз шартҳои барҷастагии функсияи $f(x)$ нобаробарии

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

ҳосил мешавад, ки аз он шартҳои $g(x_1) \leq g(x_2)$ мебарояд. Дар мавриди в) аз шартҳои барҷастагии функсияи $f(x)$ нобаробарии

$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ ҳосил мекунем, ки он ба нобаробарии

$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ баробарқувва буда шарти $g(x_1) \leq g(x_2)$ мебарояд. ▲

ТЕОРЕМАИ 31.1. Функсияи барҷастан $f(x)$ дар ҳар қадом нуқтаи интервали $(a;b)$ ҳосилаҳон ястарафои охиринок дорад.

▲ Сегонаи $x_1, x_0, x_2 \in (a;b)$ -ро тавре интихоб мекунем, ки $x_1 < x_0 < x_2$ бошад. Шарти барҷастанги функсияи f -ро ҷуғиҷи ифода менамоем:

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

Нуқтаи x_2 -ро қайд намуда дар нобаробарии охиринок ҳағтоми $x_1 \rightarrow x_0$ ба ҳудуд мегузарем. Азбаски функсияи $g(x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ мувофиқи леммаи

31.1 монотон ағзунишаванда ва аз боло маҳдуд аст, пас ҳудуди охиринок вуҷуд дорад, яъне

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} g(x_1) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f'(x_0-0).$$

Айнан, нуқтаи x_1 -ро қайд намуда ҳағтоми $x_2 \rightarrow x_0$ ба нобаробарии охиринок ба ҳудуд мегузарем. Азбаски қимати $g(x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$ монотон камшаванда ва аз поён маҳдуд аст, пас ҳудуди охириноки он вуҷуд дорад:

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_0+0} g(x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow x_0+0} \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} = f'(x_0+0). \blacktriangle$$

ҚАЙДИ 1. Функсияи барҷаста дар интервали $(a;b)$ ҳосила надошта-наш ҳам мумкин аст. Масалан, функсияи $f(x) = |x|$ дар нуқтаи $x=0$ интервали $(-1;1)$ ҳосила надорад, аммо вай функсияи барҷаста самташ ба поён мебошад, ҷуғиҷи барои функсияи барҷаста мувофиқи теоремаи 31.1 ҳосилаҳон ястарафои охиринок ҳама вақт вуҷуд доранд.

ТЕОРЕМАИ 31.2. Ҳағруна функсияи барҷастан $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ дар 1 интервали $(a;b)$ беҳосила мебошад.

♣ Дар ҳақиқат аз мавҷудияти ҳосилаҳои яктарафаи функсия дар ҳар кадом нуқтаи $x \in (a; b)$ бефосилагии функсияи $f(x)$ дар ин нуқта аз чап ва аз рост ҳосил мешавад. Аз ин ҷо бефосилагии функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x мебарояд. ♣

3. Шартҳои барҷастагии функсияҳои дифференцируидашаванда.

ТЕОРЕМАИ 31.3. Агар функсияи $f(x)$ дар интервали $(a; b)$ дифференцируидашаванда бошад, онгоҳ вай барҷаста бо самти поён (боло) фақат ва фақат ҳамон вақт аст, ки агар ҳосилаи тартиби якуми он функсияи камшаванда (афзуншаванда) бошад.

♣ Бигузор $f(x)$ дар интервали $(a; b)$ функсияи барҷастаи самташ ба поён бошад, онгоҳ мувофиқи таърифи 31.2 барои нуқтаҳои ихтиёрии $x_1, x, x_2 \in (a; b)$, ки $x_1 < x < x_2$ аст, нобаробарии (31.2) иҷрошаванда аст. Ҳангоми $x \rightarrow x_1$ дар (31.2) ба ҳудуд гузашта ҳосил мекунем:

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Айнан, x -ро ба x_2 майлқунонӣда ($x \rightarrow x_2$) меёбем:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq f'(x_2)$$

Аз ҳарду нобаробариҳои охирии ҳосилшуда нобаробарии $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ мебарояд.

Баръакс, бигузор $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ барои $\forall x_1 < x_2$ аз $(a; b)$ иҷро шавад. Барои исботи барҷаста ба самти поён доштани функсияи $f(x)$ кифоя аст, нишон диҳем, ки барои қиматҳои $x_1 < x < x_2$ нобаробарии (31.2) иҷрошаванда аст. Мувофиқи теоремаи Лагранж:

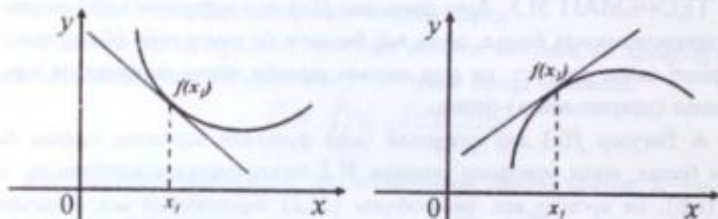
$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \quad \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = f'(c_2),$$

ки дар ин ҷо $x_1 < c_1 < x$, $x < c_2 < x_2$, мебошад. Азбаски $c_1 < c_2$, пас $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ ва нобаробарии (31.2) ҷой дорад. ♣

Супориш. Теоремаи 31.3-ро барои функсияи барҷастаи самташ ба боло исбот кунед.

НАТИҶА. Агар $f'(x)$ дар интервали $(a;b)$ қатъи афзуншаванда (камшаванда) бошад, онгоҳ $f(x)$ функсияи қатъи барҷастан самташ ба поён (боло) мебошад.

ТЕОРЕМАИ 31.4. (Ҷойгиршавии графики функсияи барҷаста нисбат ба расанда). Бигузор функсияи $f(x)$ дар интервали $(a;b)$ дифференцирондашаванда бошад. Функсияи $f(x)$ қатъи барҷастан самташ ба поён (боло)



Рисун 89

фақат ва фақат ҳамон вақт аст, агар $\forall x \in (a;b)$ ҳамаи нуқтаҳои графики функсияи $f(x)$ (ба ғайр аз нуқтаи $(x_1; f(x_1))$) дар боло (поён)-и расандан ба график дар нуқтаи $(x_1; f(x_1))$ гузаронанда шуда хобанд.

▲Зарурӣ. Бигузор $f(x)$ -функсияи қатъи барҷастан самташ ба поён ва $g(x) = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ муодилан расанда ба графики функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $(x_1, f(x_1))$ бошад. Иқтиёри x -ро аз $(a;b)$ мегирем. Барои муайяни, бигузор $x > x_1$ бошад. Фарқи $f(x) - g(x) = f(x) - f(x_1) - f'(x_1)(x - x_1)$ -ро меомӯзем. Мувофиқи теоремаи Лагранж

$$f(x) - g(x) = (f'(c) - f'(x_1))(x - x_1),$$

ки дар ин ҷо $x_1 < c < x$ мебошад. Мувофиқи теоремаи 31.1 $f'(x_1) \leq f'(c)$, бинобар ин, $f(x) - g(x) \geq 0$. Нишон медиҳем, ки агар $x \neq x_1$ бошад, онгоҳ $f(x) - g(x) > 0$ аст. Аз баръакс сар карда, шарт мекунем, ки $\exists x_2 \neq x_1$ аст, ва $f(x_2) = g(x_2)$ мебошад. Барои функсияи $f(x) - g(x)$ дар порчаи $[x_1; x_2]$ мувофиқи теоремаи Ролл нуқтаи $d \in [x_1; x_2]$ ёфт мешавад, ки $f'(d) - g'(d) = 0$. Баробарии $g'(d) = f'(x_1)$ -ро ба эътибор гирифта меёбем: $f'(d) = f'(x_1)$. Азбаски $f'(x)$ камшаванда аст, пас $\forall x \in [x_1; d]$ нобаробарии $f'(x_1) \leq f'(x) \leq f'(d) = f'(x_1)$. Аз ин ҷо $\forall x \in [x_1; d]$ шарти $f'(x) = f'(x_1)$ ва

$(f(x)-g(x))' = 0$ мебарояд, яъне дар порчаи $[x_1, d]$, $f(x)-g(x) = \text{const}$ мебошад. Аммо аз баробарии $f(x_1)=g(x_1)$ натиҷа мебарояд, ки $f(x)=g(x)$ аст. Ҳамин тариқ, барои ҳамаи $x \in [x_1, d]$ баробарии $f(x)=f'(x)(x-x_1)+f(x_1)$ иҷрошаванда аст. Азбаски барои ихтиёри $x \in (x_1, d)$ функсия қатъи бар-ҷаста аст, пас ҳосил мекунем:

$$f(x) < L(x) = \frac{d-x}{d-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{d-x_1} f(d) = \frac{d-x}{d-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{d-x_1} [f'(x_1)(d-x_1) + f(x_1)] = f(x)$$

индидиоти ҳосилшуда дурустии тасдиқотро исбот менамояд.

Қиёсат. Бигузор барои ихтиёри $x_1 \neq x \in (a; b)$ нобаробарии $f(x) > f'(x_1)(x-x_1) + f(x_1)$ иҷро шавад. Ба сифати x нуқтаи $x_2 > x_1$ -ро мегирем, онгоҳ нобаробарии охириин ба нобаробарии баробарқувваи зерин табдил меёбад.

$$f'(x_1) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Азгун дар ҳамон нобаробарии номбурда ба ҷои x_1 қимати x_2 ва x -ро ба x_1 иваз карда ҳосил мекунем: $f(x_1) > f'(x_2)(x_1-x_2) + f(x_2)$. Азбаски $x_2 > x_1$ аст, пас ҳосил мекунем:

$$f'(x_2) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Ҳамин тариқ, барои ихтиёри $x_1 < x_2$ аз интервали $(a; b)$ нобаробарии $f'(x_1) < f'(x_2)$ иҷрошаванда аст, пас ҳосили $f'(x)$ дар интервали $(a; b)$ қатъи афзуншаванда буда, функсияи қатъи бар-ҷаста ба самти поён мебошад. ♣

ТЕОРЕМАИ 31.5. Агар функсияи $f(x)$ дар интервали $(a; b)$ ду бор дифференсиронидашаванда бошад, онгоҳ вай бар-ҷаста бо самти поён (боло) фақат ва фақат ҳамон вақт, агар $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) бошад.

♣ Агар $f(x)$ бар-ҷаста ба самти поён бошад, онгоҳ мувофиқи теоремаи 31.1 функсияи $f'(x)$ камшаванда аст. Дар асоси теоремаи 29.1 барои $\forall x \in (a; b)$, $f''(x) \geq 0$. Баръакс, агар барои ихтиёри $x \in (a; b)$, $f''(x) \geq 0$ бошад, онгоҳ функсияи $f'(x)$ камшаванда ва функсияи $f(x)$ бар-ҷаста бо самти поён аст. ♣

ТЕОРЕМАИ 31.6. (шарти кифоягии қатъи барҷастигии функсия). Агар $\forall x \in (a; b)$, $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) бошад, онгоҳ функсияи $f(x)$ қатъи барҷаста ба самти поён (боло) мебошад.

▲ Бигузор $f''(x) > 0$ бошад, онгоҳ $f'(x)$ дар интервали $(a; b)$ қатъи меафзояд. Мувофиқи натиҷа аз теоремаи 31.3 функсияи $f(x)$ қатъи барҷастан самташ поён аст.

4. Мисолҳо (Барҷастигии функсияҳои элементарӣ).

1) Барҷастигии функсияи $f(x) = x^\alpha$ -ро дар маҷмӯи $x > 0$ меомӯзем. Азбаски $f'(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-1}$ пас ҳангоми $\alpha < 0$ ё $\alpha > 1$, $f'(x) > 0$, яъне x^α қатъи барҷаста (самташ ба поён) аст. Ҳангоми $0 < \alpha < 1$, $f'(x) < 0$ буда x^α қатъи барҷастан самташ ба боло мебошад. Масалан, графики параболани $f(x) = x^2$ -ро мо ҳама вақт барҷастан самташ ба поён мекашем. Дар ҳолати $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ графики функсия нур мебошад.

2) Функсияи $f(x) = a^x$, ки $0 < a$, $a \neq 1$ аст, барои ихтиёри қимати имконидашаванда дар $\mathbb{R}$, $f'(x) = a^x \ln^2 a > 0$ мебошад, пас вай қатъи барҷаста (самташ ба поён) аст (расми 22,23)

3) Барои функсияи $f(x) = \log_a x$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2 \ln a}$ аст, пас ҳангоми $0 < a < 1$, $\log_a x$ қатъи барҷастан самташ ба поён ва қатъи барҷастан самташ ба боло мебошад, агар $1 < a$ бошад (расмҳои 24,25).

4) Функсияи $f(x) = \ln x$ ҳангоми $x > 0$ барҷастан самташ ба боло аст, чунин $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ мебошад. Барои ин функсия нобаробарии Йенсен ҷой дорад. $\forall x_1 < x_2 < \dots < x_n \in (0; +\infty)$ ва $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ нобаробарии зерин иҷрошаванда аст.

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n}.$$

Потенсиронда нобаробарии маълуми

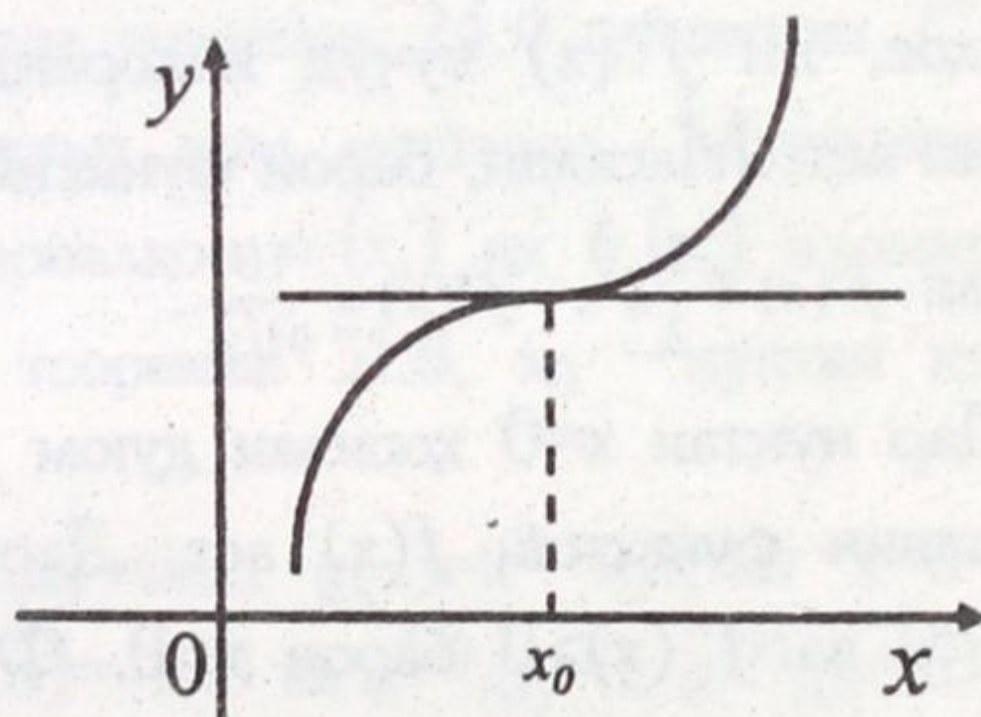
$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

-ро ҳосил мекунем. Он алоқамандии миёни арифметикӣ ва геометрикӣ пайвастагии мусбатро ифода мекунад.

5) Барои функсияи $f(x) = \sin x$ дар интервалҳои $\pi 2k < x < \pi(2k+1)$, ки $k \in \mathbb{Z}$ аст, $f''(x) = -\sin x < 0$ ва дар интервалҳои $\pi(2k-1) < x < \pi 2k$, $f''(x) > 0$ мебошад. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки камони графикаи функсияи $\sin x$ дар порчаи $0 \leq x \leq \pi/2$ дар болои хордаи онро кашанда ба ғайр аз нуқтаҳои сарҳадӣ меҳобад, бинобар ин ҳангоми $0 < x < \pi/2$, $\sin x > (2/\pi)x$ аст (расми 26).

5. Нуқтаҳои ҳамӣ (қатышавӣ) —и графикаи функсия. Ҳангоми созиши графикаи функсияҳо ёфтани нуқтаҳои қатышавии функсияҳо аз аҳмият холи нест.

ТАЪРИФИ 31.4. Бигузор $f: \mathcal{U}(x_0) = \{x | x < x_0\}$ функсияи дар атрофи $\mathcal{U}(x_0)$ нуқтаи $x_0 \in \mathbb{R}$ муайян ва дифференсиронидашаванда бошад. Агар дар маҷмӯи $\mathcal{U}_-(x_0) = \{x | x < x_0\}$ функсияи барҷастаи самташ поён (боло) ва дар маҷмӯи



Расми 90

$\mathcal{U}_+(x_0) = \{x | x_0 < x\}$ барҷастаи самти боло (поён) дошта бошад, онгоҳ x_0 -ро нуқтаи қатышавии функсияи $y=f(x)$ ва $(x_0; f(x_0))$ —ро нуқтаи қатышавии графикаи функсияи $y=f(x)$ меноманд. Агар дар нуқтаи $(x_0; f(x_0))$ расанда ба графикаи функсияи $f(x)$ вуҷуд дошта бошад, онгоҳ мувофиқи теоремаи 31.4 графикаи функсияи $f(x)$ дар маҷмӯҳои $\mathcal{U}_-(x_0)$ ва $\mathcal{U}_+(x_0)$ дар тарафҳои гуногун аз расанда ҷойгиранд, яъне ҳангоми гузаштан аз нуқтаи x_0 , графикаи функсия самти барҷастагиашро дигар мекунад (расми 90).

ТЕОРЕМАИ 31.7 (шарти зарурии нуқтаи қатышавии функсияи ду бор дифференсиронидашаванда). Агар функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи $x_0 \in (a; b)$ ҳосилаи дуҷуми бефосилаи $f''(x)$ —ро дошта x_0 нуқтаи қатышавии функсияи $f(x)$ бошад, онгоҳ $f''(x_0) = 0$ аст.

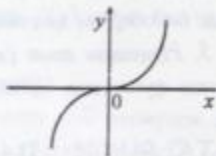
♠ Исботро аз баръаксӣ мегузаронем. Бигузор $f''(x_0) \neq 0$ бошад. Аз сабаби дар нуқтаи x_0 бефосила будани функсияи

$f''(x)$, $\exists \delta > 0: \forall x \in \mathcal{U}_\delta(x_0) \rightarrow \text{sign} f''(x) = \text{sign} f''(x_0)$, яъне $\forall x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$, $f''(x) > 0$ ё $f''(x) < 0$

аст. Мувофиқи теоремаи 31.6 дар интервали $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ функсияи $f(x)$ ё қатъи барҷастаи самташ ба поён (агар $f''(x) > 0$) қатъи барҷастаи самташ ба боло

(агар $f''(x) < 0$) мебошад. Ин ба таърифи нуқтаи қатъшавии функсия зид аст, пас $f''(x) = 0$. ♦

ҚАЙДИ 2. Теоремаи 31.7 барои нуқтаи қатъшавии функсия шарти кифоягӣ нест. Масалан, нуқтаи $x_0 = 0$ барои функсияи $f(x) = x^4$ нуқтаи қатъшавии нест, гарчанде $f''(0) = 0$ бошад. Илова бар ин функсияи $f(x)$ нуқтаҳои қатъшавиро дар он нуқтаҳое, ки $f''(x)$ вуҷуд надорад доштаниш мумкин аст. Масалан, барои функсияи $f(x) = \sqrt[3]{x}$ меёбем: $f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$.



Дар нуқтаи $x=0$ ҳосилаи дуюм $f''(x)$ вуҷуд надорад. Аммо ин нуқтаи қатъшавии функсияи $f(x)$ аст. Дар ҳақиқат, ҳангоми $x < 0$ ҳосилаи дуюм $f''(x) < 0$ ва $f''(x) > 0$ барои $x > 0$. Функсияи дар тарафи чапи нуқтаи $x=0$ қатъи барҷастан самташ боло ва дар тарафи рости нуқтаи x_0 қатъи барҷастан самташ поён мебошад, яъне ҳангоми гузаштани ин нуқта функсия барҷастанашро таъғир медиҳад.

Ҳамин тариқ нуқтаҳои қатъшавии функсияи $y=f(x)$ -ро дар байни он нуқтаҳое ҷустан лозим меояд, ки дар онҳо $f''(x)=0$ ё вуҷуд надорад. Чунин нуқтаҳоро нуқтаҳои ба қатъшавии шубҳанок меноманд.

ТЕОРЕМАИ 31.8. (Шарти якуми кифоягӣ). Бигузор дар ягон атрофи сурӯшудаи $\dot{x}(x_0)$ нуқтаи x_0 функсияи $f(x)$ ду бор дифференсиронидашаванда буда дар $\dot{x}(x_0)$ ва $\dot{x}(x_0)$ аломати муайян дошта, бошад. Агар ҳангоми гузаштан аз нуқтаи x_0 ҳосилаи $f''(x)$ аломаташро дигар кунад, онгоҳ x_0 нуқтаи қатъшавии функсияи $f(x)$ аст. Агар ҳосилаи дуюм $f''(x)$ ҳангоми гузаштан аломаташро янгоҳ дорад, онгоҳ x_0 нуқтаи қатъшавии функсия нест.

♦ Бигузор, барои муайяни, функсияи $f''(x)$ ҳангоми гузаштан нуқтаи x_0 аломаташро аз «+» ба «-» иваз кунад (дар нуқтаи x_0 , мумкин аст, $f''(x)$ вуҷуд надошта бошад). Ин маънои онро дорад, ки адади $\delta > 0$ мавҷуд аст, ки дар интервали $\dot{x}(x_0) = (x_0 - \delta; x_0)$ нобаробарии $f''(x) > 0$ ва дар интервали

$\dot{u}_\delta(x_0) = (x_0; x_0 + \delta)$ нобаробарии $f'''(x) < 0$ иҷро мешавад. Мувофиқи теоремаи 21.6 функсияи $f(x)$ дар интервали $\dot{u}_\delta(x_0)$ қатъи барҷастан самташ поён ва дар интервали $\dot{u}_\delta(x_0)$ қатъи барҷастан самташ болоро дорад. Бинобар ин, нуқтаи x_0 ҳаман талаботҳои таърифи 31.4 -ро дорад ва он нуқтаи қатъшавии функсия мебошад. ♦

ТЕОРЕМАИ 31.9. (шарти дуҷони кифоя). Агар $f^{(n)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ бошад, онгоҳ x_0 — нуқтаи қатъшавии функсияи $y = f(x)$ мебошад.

♦ Азбаски $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, пас мувофиқи теоремаи 24.4 функсияи $f'''(x)$ дар нуқтаи x_0 ё қатъи меафзоёд ё қатъи кам мешавад. Мувофиқи шарт $f^{(2)}(x_0) = 0$, бинобар $f^{(2)}(x)$ дар интервалҳои $\dot{u}_\delta(x_0)$ ва $\dot{u}_\delta(x_0)$ аломатҳои гуногун дорад. Аз ин ҷо, мувофиқи теоремаи 31.8, x_0 — нуқтаи қатъшавии функсияи $y = f(x)$ аст. ♦

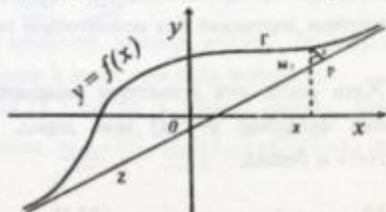
Масалан, барои функсияҳои $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^3$ нуқтаи $x = 0$ нуқтаи қатъшавӣ аст, чунки $f^{(2)}(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1 < 0$ ва $g^{(2)}(0) = 0$, $g^{(3)}(0) = 6 > 0$.

§32. АСИМПТОТҲО ВА СХЕМАИ ТАДҚИҚИ ФУНКСИЯ.

1. **Таърифи асимптот ва намунаҳои он.** Ҳангоми таҳлили рафтори функсия дар атрофи нуқтаҳои кавиш ва $x \rightarrow \pm\infty$ графикҳои функсия ба ягон хати рост ниҳоят наздик мешавад. Чунин хати рост асимптот ном гирифтааст.

ТАЪРИФИ 32.1 Бигузор хати қатъи Γ бо муодилаи $y = f(x)$ ва хати рости Z бо муодилаи $y = kx + b$ (k, b — ададҳои доимӣ) дода шуда бошад, ки дар ин ҷо $f(x)$ барои ихтиёри $x > n$ ($x < n$) функсияи бефосила аст.

Агар масофаи (r) аз нуқтаи $M = (x; f(x))$ хати қатъи Γ то хати рости Z , дар маънидаи номаҳдуд афзудани x ба сифр майл кунад (яъне $\lim_{x \rightarrow \infty} r = 0$), онгоҳ ҳангоми $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow -\infty$) хати Z асимптотани хати қатъи Γ ном дорад, яъне $\lim_{x \rightarrow \infty} r = 0$. Агар асимптота ба



Расми 91

тири Oy (Ox) параллел бошад онро асимптоти вертикалӣ (горизонталӣ) меноманд. Агар асимптот тири абсисаро дар зери кунҷи $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ бурад, онгоҳ онро асимптоти моил меноманд (расми 91).

Асимптотҳои вертикалӣ. Ҳангоми ҷустуҷӯи ин намууди асимптотҳо ба нуқтаҳои кавиши функсияи додашуда диққат додан лозим аст.

Бигузор x_0 — нуқтаи кавиши функсияи $y=f(x)$ бошад. Агар

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = +\infty \text{ ё } -\infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = +\infty \text{ ё } -\infty \right),$$

онгоҳ хати рости $x=x_0$ асимптоти вертикалӣ барои он қисми графиги функсияи $y=f(x)$ аст, ки дар тарафи рост (чап) —и хати рости $x=x_0$ мебошад. Масалан функсияи

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (32.1)$$

дар нуқтаи $x_0=0$ кавиш дорад. Азбаски

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty,$$

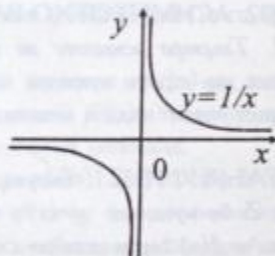
$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty,$$

пас хати рости $x=0$, яъне тири Oy асимптоти вертикалӣ барои қисмҳои рост ва чапи графиги функсияи додашуда мебошад (расми 92).

Асимптотҳои горизонталӣ. Графиги функсияи беохир муайяншуда ба ғайр аз асимптотҳои вертикалӣ боз асимптотҳои горизонталӣ ва моил дошта метавонад.

Хати рости $y=a$ асимптоти горизонталӣ барои қисми рост (чап) —и графиги функсияи $y=f(x)$ ном дорад, агар ҳангоми $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$ бошад.

Масалан барои функсияи (32.1) хати рости $y=0$ (тири абсиса), асимптоти горизонталӣ аст, чунки



Расми 92

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Асимптоти моил. Агар ҳангоми $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), функсияи $y=f(x)$ худуди беохирӣ аломати муайян доштаро соҳиб бошад, онгоҳ графикӣ функсияи $y=f(x)$ асимптоти моил дорад. Аз таърифи 32.1 маълум мешавад, ки хати $y=kx+b$ ($k \neq 0$) асимптоти моили графикӣ функсияи $y=f(x)$ нэм дорад, агар ҳангоми $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) шартӣ зерин иҷро шавад:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx - b] = 0$$

Аз ин ҷо мебарояд, ки $y=f(x)$ намуди

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \quad (31.2)$$

-ро дорад, ки ҳангоми $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), $\alpha(x) \rightarrow 0$. Мазмуни геометрии асимптоти моилро ҳангоми $x \rightarrow +\infty$ дида мебароем (мавриди $x \rightarrow -\infty$ айнан, дида мешавад).

Бигзор $M(x, y)$ — нуқтаи графикӣ функсияи $y=f(x)$ ва хати рости $y=kx+b$ асимптоти графикӣ функсия, ҳангоми $x \rightarrow +\infty$ бошад (расми 91). Бо $MP \perp$ перпендикуляри аз нуқтаи M ба хати рости $y=kx+b$ фароварда шуда, бо $\bar{y}$ -ординатаи ҷорӣ ва бо $M_1(x, \bar{y})$ нуқтаро дар асимптот ишора мекунем, онгоҳ $|MM_1| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|$ ва ҳангоми $x \rightarrow \infty$, $|MM_1| = |\alpha(x)| \rightarrow 0$.

Аз тарафи дигар, $r = MP = |MM_1| \cos \varphi$, ки дар ин ҷо φ -куҷаи байни асимптот ва тири Ox . Айён аст, ки $\lim_{x \rightarrow +\infty} r = \lim_{x \rightarrow +\infty} |MP| = 0$. Ҳамин тариқ, масофа аз нуқтаи M графикӣ функсия то асимптот, ҳангоми $x \rightarrow +\infty$ ба сифр майл мекунад. Ақнун тарзи ёфтани ададҳои k ва b —ро дида мебароем.

Бо ин мақсад баробарии (32.2) —ро ба x тақсим намуда, ҳангоми $x \rightarrow +\infty$ ба ҳудуд мегузарем, онгоҳ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k$, чунки

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0 \text{ ва } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{x} = 0.$$

Ҳамин тариқ,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad (32.3)$$

Аз муносибати (32.2) ҳосил мекунем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} [b + \alpha(x)] = b, \text{ яъне}$$

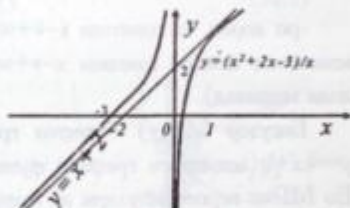
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] \quad (32.4)$$

Исбот намудем, ки агар хати рости $y=kx+b$ асимптоти монн бошад, онгоҳ аддҳои k ва b бо формулаҳои (32.3) ва (32.4) ёфта мешаванд.

Баръакс, агар ҳар ду ҳудудҳои (32.3) ва (32.4) вуҷуд дошта $k \neq 0$ бошад, онгоҳ хати рости $y=kx+b$ асимптоти графиги функсияи $y=f(x)$, ҳангоми $x \rightarrow +\infty$ мебошад. Дар ҳақиқат, $\alpha(x) = f(x) - kx - b$ гузошта дар асоси (32.4) муносибати $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$ ҳосил мекунем. Бинобар ин, баробарии (32.2) иҷрошаванда аст, яъне хати рости $y=kx+b$ асимптоти графиги функсия ҳангоми $x \rightarrow +\infty$ мебошад.

Натиҷаи ҳосилшударо дар шакли тасдиқот ҷамъбаст менамоем.

ТЕОРЕМА. Барои он, ки графиги функсияи $y=f(x)$, ҳангоми $x \rightarrow +\infty$ асимптоти монн $y=kx+b$ — ро дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки ду ҳудудҳои $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ ва $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b$ мавҷуд бошанд.



Расм 93

СУПОРИШ. Теорема ро барои мавриди $x \rightarrow -\infty$ исбот намоед.

Мисол. 1) барои функсия $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x}$ асимптотҳоро муайян намоед.

Асимптотҳои вертикалиро меёбем: $x=0$ — нуқтаи қавши ҷинси дутом, ҷуғзи ҳангоми $x \rightarrow 0^-$, $y \rightarrow +\infty$ ва ҳангоми $x \rightarrow 0^+$, $y \rightarrow -\infty$, пас $x=0$ асимптоти вертикалӣ мебошад.

Асимптоти горизонталӣро меёбем:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 2 - \frac{3}{x} \right) = +\infty(-\infty); \quad \text{функсия} \quad \text{асимптоти}$$

горизонталӣ надорад.

Асимптотҳои моноро меёбем:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 3}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 3}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{x} = 2.$$

Хати рости $y = x + 2$ асимптоти монӣ аст. Графики функсия дар расми 93 оварда шудааст.

2) Ибтот кунед, ки хатҳои рости $y = \pm \frac{b}{a}x$ асимптотҳои гиперболан $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ мебошанд.

♣ Азбаски $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, пас

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\pm \frac{b}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x} \right)^2} \right] = \pm \frac{b}{a}.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\pm \frac{a}{b} \sqrt{x^2 - a^2} - x \right] = \pm \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0.$$

Дар хати рости $y = kx + b$, қиматҳои k ва b —ро гузошта $y = \pm \frac{b}{a}x$ ҳосил

мекунем. ♣

2. Нақшаи созиши графики функсия. Ҳангоми созиши графики функсияи $y = f(x)$ роия намудани нақшаи зерин мувофиқи мақсад аст:

1) Соҳан муайяни, ҷуфт (тоқ), даврӣ будани функсияро тадқиқ намоед;

2) Нуқтаи бӯриши графики функсияро бо тирҳои координати ёбед, яъне системаи муодилаҳоро

$$\begin{cases} y = f(x), \\ x = 0; \end{cases}$$

ва

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = 0; \end{cases}$$

-ро ҳам намоед;

3) Асимптотҳои графиви функсияро ёбед;

4) Ҳосилаи $f'(x)$ -ро ҳисоб намуда дар нуқтаҳои критикӣ (аз ҷумла дар нуқтаҳои канорӣ), экстремумҳо, фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавӣи функсияро ёбед;

5) Ҳосилаи $f''(x)$ -ро ҳисоб намуда дар нуқтаҳои қатъшавӣ, фосилаҳои барҷастагии функсияро ёбед;

6) Дар ҷадвал ҳаман маълумотҳои ҳосилшударо ҷой диҳед;

7) Графики функсияро созад.

Мисол. Графики функсияи $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ -ро созад.

1. Соҳаи муайяни функсия $X=\mathbb{R}$ буда дар $\mathbb{R}$ бифосила аст.

$f(-x) = \frac{(-x-1)^2}{(-x)^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \neq f(x)$. Функсия ҷуфт, тоқ, дуврӣ нест;

2. Графики функсия тирӣ Ox -ро дар нуқтаҳои мебурад, ки $(x-1)^2=0$ аст, яъне дар нуқтаи $x=1$. Тирӣ Oy -ро дар нуқтаи ординатаи $y=1$ дошта мебурад;

3. Функсия асимптоти вертикалӣ надорад, ҷуви дар $\mathbb{R}$ бифосила

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + x} = 0$$

аст.

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x-1)^2}{x^2+1} - 0 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x} = 1.$$

График асимптоти монӣ надошта, хатти рости $y=1$ асимптоти горизонталӣ аст;

4. $f'(x)$ -ро меёбем: $f'(x) = \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$. Муодилаи $x^2 - 1 = 0$

-ро ҳам намуда ду нуқтаҳои имконпазирӣ экстремум: $x_1 = -1$ ва $x_2 = 1$ -ро ҳосил мекунем. Дар фосилаи $(-\infty; -1)$, функсия афзуншаванда ($f'(x) > 0$), дар $(-1; 1)$ -камшаванда ($f'(x) < 0$) ва дар $(1; +\infty)$ -афзуншаванда ($f'(x) > 0$) мебошад. Ҳангоми гузаштани нуқтаи $x_1 = -1$ ҳосила аломаташро аз «+» ба «-» ва ҳангоми гузаштани $x_2 = 1$ ҳосила аломаташро аз «-» ба «+» иваз мекунад. Бинобар ин, дар нуқтаи $x_1 = -1$ функсия максимум ва дар нуқтаи $x_2 = 1$ -минимум дошта $f_{\max}(-1) = 2$, $f_{\min}(1) = 0$ аст.

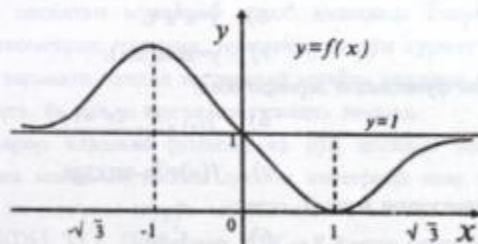
5. $f''(x)$ —ро ҳисоб мекунем: $f''(x) = \frac{4x(3-x^2)}{(x^2+1)^2}$. Муодилаи $x(3-x^2)=0$

—ро ҳал намуда ду нуқтаҳои критикӣи $f''(x)$ —ро меёбем: $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{3}$. Дар фосилаи $(-\infty; -\sqrt{3})$, графיקи барҷастан самти поён, дар $(-\sqrt{3}; 0)$ —барҷастан самти боло, дар $(0; \sqrt{3})$ —барҷастан самти поён ва нӯхоят дар $(\sqrt{3}; +\infty)$, графיקи барҷастан самти боло дорад. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки нуқтаҳои $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{3}$ —абсисаҳои нуқтаҳои қатъшавӣ буда $f(-\sqrt{3})=1+\sqrt{3}/2$, $f(0)=1$, $f(\sqrt{3})=1-\sqrt{3}/2$ аст;

6. Дар ҷадвали зерин маълумотҳои ҳосилшударо мегузаронем:

X	$-\infty < x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
y	/	$1+\sqrt{3}/2$	/	$\frac{2}{\max}$	\	1	\	$\frac{0}{\min}$	/	$1-\sqrt{3}/2$
y'	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+
y''	+	0	-	-1	-	0	+	1	+	0
Эҳсас		н. таъриф		н. эк.		таъриф		н. эк.		таъриф

7. Графיקи функсияро месозем (расми 94).



Расми 94

Матриҷаи бори боби VIII

1. Фосилаҳои афруншавӣ ва камшавии функсияҳои зеринро ёбед:

а) $y=3x^2-2x$;

б) $y=2-3x+x^3$;

$$в) y = \frac{x^3 + x - 1}{x^2 - x + 1};$$

$$г) y = 3\cos^5 x - 5\cos^3 x.$$

2. Экстремуми функсияҳои зеринро ёбед:

$$а) y = x^3 - 9x^2 + 27x - 7;$$

$$б) y = x^3(1 - 2x)^4;$$

$$в) y = (x^2 - 2x + 3)\sqrt{(x+1)^2};$$

$$г) y = \sqrt[3]{(x^2 - x - 2)^2};$$

$$д) y = \cos x + \frac{1}{2\cos x};$$

$$е) y = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$ж) x = t^7 + t^5 + 2t - 3, y = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 5, (-\infty < t < +\infty);$$

$$з) x = t + e^{-t}, y = 2t + e^{-2t}, (-\infty < t < 0);$$

3. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияҳои зеринро ёбед:

$$а) f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2}{x^2}, & \text{агар } -2 \leq x < 0, 0 < x \leq 2; \\ 1, & \text{агар } x = 0. \end{cases}$$

$$б) f(x) = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x, x \in (0; \pi/2).$$

4. Самти барҷастагӣ ва нуқтаҳои қатъшавии функсияҳои зеринро ёбед:

$$а) y = x - \sqrt{(x-3)^2};$$

$$б) y = x^4 e^{-x};$$

$$в) y = x - \cos x;$$

$$г) y = x \cos(\ln x).$$

5. Асимптотҳои функсияҳои зеринро ёбед:

$$а) f(x) = x + 1/x;$$

$$б) f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{2 + x - x^2};$$

$$в) f(x) = x e^{2/x};$$

$$г) f(x) = 3x - \operatorname{arccot} x.$$

6. Графики функсияҳои зеринро созад:

$$а) y = \frac{\ln x}{x};$$

$$б) y = \frac{x^2 + 1}{x - 1};$$

$$в) y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1};$$

$$г) y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}.$$

Илм ҳамон вақт ба камол ме-
расад, агар аз математика истифода
да бурда тавонад.

В.И. Ленин

БОБИ IX. ИНТЕГРАЛИ НОМУАЙЯН.

§33. МАФҲУМИ ФУНКСИЯИ ИБТИДОЙ: ТАЪРИФ ВА ХОСИЯТҲОИ ИНТЕГРАЛИ НОМУАЙЯН. ҶАДВАЛИ ИНТЕГРАЛҲО.

1. Мафҳуми функсияи ибтидоӣ. То ҳол, аз рӯи функсияи до-
дашудан $y=f(x)$ ҳосилан он $y'=f'(x)$ ёфта мешуд, ки ҳақиқат он ном
маънаван асосин ҳисоби дифференсалиро дошт. Акнун маънаван
баръакс он: аз рӯи ҳосилан маълуми функсия барқарор кардани
худӣ функсияро меомӯзем. Ёфтани функсия аз рӯи ҳосилан
маълуми он нисбат ба ҳисоб кардани ҳосилан функсияи додашуда,
маънаван нисбатан мураккаб ҳисоб мешавад. Бисёр маънаван
физика, геометрия, техника, ҷунонӣ, аз рӯи суръат ё шитоби до-
дашудан ҳаракати нуқтаи маънаван муайян кардани қонуни ҳаракат
ти ин нуқта, ба ҳақиқат маънаван мушоҳида меорад.

Барқарор кардани функсия аз рӯи ҳосилан маълуми он дар
математика маънаван асосин ҳисоби интеграл ном гирифтааст. Ба
омӯзиш ин маънаван шурӯъ мекунем.

ТАЪРИФИ 33.1. Функсияи $F:X \rightarrow R$ барои функсияи $y=f(x)$ дар
маънаван X функсияи ибтидоӣ ё аввал ном дорад, агар дар ҳар ка-
дом нуқтаи $x \in R$ ҳосилан $F'(x) \in R$ мавҷуд буда ба $f(x)$ баробар
бошад, яъне

$$F'(x)=f(x), \forall x \in X. \quad (33.1)$$

МИСОЛҲО: 1) Функцияи $F(x) = \arccos x$ барои функцияи $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ дар маҷмӯи $X = (-1, 1)$ функцияи ибтидоӣ аст, чунки $\forall x \in X, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ аст.

2) Функцияи $F(x) = \sin x$ барои функцияи $f(x) = \cos x$ дар маҷмӯи $X = \mathbb{R}$ функцияи ибтидоӣ аст, чунки $\forall x \in X$ шарти (33.1): $(\sin x)' = \cos x$ иҷро мешавад.

3) Функцияи $F(x) = \operatorname{tg} x$ барои функцияи $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ дар маҷмӯи $X = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ функцияи ибтидоӣ мешавад.

Масъалаи ёфтани функцияи ибтидоӣ аз руи функцияи додашуда $y = f(x)$ яққимата нест. Дар ҳақиқат, барои функцияи $\cos x$ дар маҷмӯи $\mathbb{R}$ функцияҳои $\sin x \pm \frac{1}{2}, \sin x \pm 3, \dots, \sin x \pm 5, \dots$, ё умуман функцияҳои намуди $F(x) = \sin x + c$ (дар ин ҷо $c = \text{const}$), функцияҳои ибтидоӣ шуда метавонанд: $(\sin x + c)' = \cos x$.

ТЕОРЕМАИ 33.1. Ҳаргуна ду функцияҳои ибтидоӣ барои $f(x)$ дар маҷмӯи охирик X аз ҳамдигар бо адади доимӣ фарқ меkunанд.

▲ Бигузор $F_1(x)$ ва $F_2(x)$ — функцияҳои ибтидоӣ барои $f(x)$ дар маҷмӯи X бошанд. Функцияи $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ — ро мемӯзем. Дар ҳар кадом нуқтаи $x \in X$ ҳосилаи $\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x)$ вучуд дошта $\varphi'(x) = f(x) - f(x) = 0$ аст. Аз шарти $\varphi'(x) = 0$ маълум мешавад, ки $\varphi(x)$ дар X адади доимӣ мешавад. Дар ҳақиқат теоремаи Лагранжро дар маҷмӯи X барои функцияи бефосила ва дифференсиронидашавандаи $\varphi(x)$ тадбиқ намуда меёбем:

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 \leq \xi \leq x_2.$$

Азбаски $\varphi'(\xi) = 0$, пас $\varphi(x_2) = \varphi(x_1)$, яъне қимати функцияи $\varphi(x)$ барои ҳамаи қиматҳои фосилаи X якхела аст, бинобар ин, $\varphi(x) = C$ ($C = \text{const}$), ё ки $F_1'(x) - F_2'(x) = C$. ▲

НАТИҶА: Агар $F(x)$ — ягон функсияи ибтидоии $f(x)$ дар маҷмӯи X бошад, онгоҳ ҳамаи функсияҳои ибтидоии имконпазири ин функсия бо формулаи $F(x)+C$ ифода мешаванд.

2. Мафҳуми интеграл номуайян. Маҷмӯи ҳамаи функсияҳои ибтидоии $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ — ро интеграл номуайян аз функсияи $f(x)$ номида бо рамзи $\int f(x)dx$ ишора мекунанд, яъне

$$\int f(x)dx = \{ F(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \}.$$

Дар ин ҷо $F(x)$ — ягон функсияи ибтидоии $f(x)$, C — адади доимӣ мебошад. Дар оянда, мухтасар ишораи

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (33.2)$$

истифода мекунем. $f(x)$ — функсияи таҳти интеграл, $f(x)dx$ — ифодаи таҳти интеграл, $\int$ — рамзи интеграл ном доранд. Рамзи $\int f(x)dx$ — маҷмӯи ҳамаи функсияҳои ибтидоии $f(x)$ — ро ифода мекунад. Барқарор кардани функсия аз рӯи ҳосилаи он ё муайян кардани интеграл номуайян аз рӯи функсияи таҳти интеграл, интегронидани ин функсия номида мешавад. Интегронидан амали баръакси дифференсиронӣ мебошад. Барои дуруст иҷро шудани амали интегронӣ кифоя аст, ки натиҷаи ҳосилшуда дифференсиронида шуда, функсияи таҳти интеграл ҳосил карда шавад.

Мисол. Санҷед, ки $\int 4x^3 dx = x^4 + C$ аст.

▲ Натиҷаи интегрониро дифференсиронида $(x^4 + C)' = 4x^3$ функсияи таҳти интегралро ҳосил мекунем, пас интегронӣ дуруст иҷро шуда аст. ▲

Ақнун саволи зеринро мегузорем. Оё барои ҳаргуна функсияи $y=f(x)$ функсияи ибтидоӣ ё интеграл номуайян вуҷуд дорад ё не? Қайд менамоем, ки на ҳама функсияҳо, функсияи ибтидоӣ (интеграл номуайян) доранд. Аммо бе исбот қайд менамоем, ки агар дар маҷмӯи X функсияи $y=f(x)$ бефосила бошад, онгоҳ вай функсияи ибтидоӣ (интеграл номуайян) дорад. Дар оянда ҳисоб менамоем, ки ҳама функсияҳои таҳти интеграл дар маҷмӯи X бефосилаанд ва формулаи (32.2) маъно дорад. Барои функсияҳои дар ягон

нуқта каниш дошта интегронириро танҳо дар он фосилаҳо мегузаронем, ки дар онҳо $y=f(x)$ бефосила аст.

Масалан, функсияи $f(x)=\frac{1}{x}$ дар нуқтаи $x=0$ каниш дошта дар фосилаҳои $(-\infty, 0)$ ва $(0, +\infty)$ бефосила аст. Агар $x>0$ бошад, онгоҳ яке аз функсияҳои ибтидоии $f(x)=\frac{1}{x}$ функсияи $F(x)=\ln x$ аст, чунки $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. Бинобар ин, барои қиматҳои $x>0$, $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.

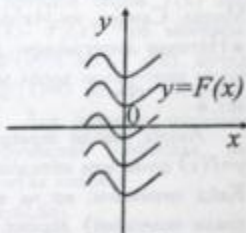
Агар $x<0$ бошад, онгоҳ яке аз функсияҳои ибтидоӣ барои $f(x)=\frac{1}{x}$ функсияи $F(x)=\ln(-x)$ аст, чунки $[\ln(-x)]' = \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Бинобар ин барои қиматҳои $x<0$, $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$.

Ҳар ду мавридҳоро якҷоя намуда ҳосил мекунем:

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x + C, & \text{агар } x > 0, \\ \ln(-x) + C, & \text{агар } x < 0, \end{cases} = \ln|x| + C. \quad (32.3)$$

Интегралҳои номуайян, геометрия маҷмӯи хатҳои қачеро ифода менамоянд, ки онҳо графики функсияҳои ибтидоии $y=F(x)+C$ мебошанд. Агар $y=F(x)$ — ягон хати қач бошад, ҳаман хатҳои қачи боқимонда аз он бо кучониши паралелӣ қад-қадитири 0 ҳосил карда мешаванд (расми 95) ва онҳо онлаи хатҳои қачи интегралҳои функсияи $y=f(x)$ номида мешаванд.



Расми 95

3. Хосиятҳои интегралҳои номуайян.

Аз таърифи интегралҳои номуайян бевосита хосиятҳои зерин мебарояд.

1⁰. Ҳосила аз интегралҳои номуайян ба функсияи таҳти интеграл ба-баробар аст. Дифференциал аз интегралҳои номуайян ба ифодаи таҳти

интеграл баробар аст, яъне $(\int f(x)dx)' = f(x)$;

$$(\int f(x)dx)' = f(x); \quad d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

♣ Дар ҳақиқат,

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)dx;$$

$$d\int f(x)dx = (\int f(x)dx)' dx = f(x)dx. \clubsuit$$

2⁰. Интеграл номуайян аз дифференсиали ягон функсия ба худи ин функсия ва доимии ихтиёрия баробар аст, яъне $\int dF(x) = F(x) + C$.

♣ Дар ҳақиқат, азбаски $dF(x) = F'(x)dx$, онгоҳ

$$\int F'(x) dx = \int f(x)dx = F(x) + C. \clubsuit$$

3⁰. Зарбашавандан доимиро аз тахти аломати интеграл баровардан мумкин аст, яъне агар $k = \text{const} \neq 0$ бошад, онгоҳ $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

♣ Дар ҳақиқат, агар $F(x)$ функсияи ибтидоӣ барои $f(x)$ бошад, яъне $F'(x) = f(x)$, онгоҳ $kF(x)$ -функсияи ибтидоӣ барои $kf(x)$ аст: $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$. Аз таъриф мебарояд, ки $\int kf(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + C_1 = k\int f(x)dx$, дар ин ҷо, $C_1 = kC$. ♣

4⁰ Интеграл номуайян аз суммаи алгебравии ду ё якчанд функсияҳо ба суммаи алгебравии интегралҳои ҳар кадом функсияҳо баробар мебошад:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \dots \pm \int f_n(x) dx.$$

♣ Бигузур $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ мувофиқан функсияҳои ибтидоӣ $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ бошанд: $F_1'(x) = f_1(x)$, $F_2'(x) = f_2(x)$, $\dots$, $F_n'(x) = f_n(x)$, онгоҳ функсияи $F_1(x) \pm F_2(x) \pm \dots \pm F_n(x)$, функсияи ибтидоӣ барои $f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)$ мебошад. Бинобар ин,

$$\begin{aligned} \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \dots \pm \int f_n(x) dx &= [F_1(x) + c_1] \pm [F_2(x) + c_2] \pm \dots \pm [F_n(x) + c_n] = \\ &= [F_1(x) \pm F_2(x) \pm \dots \pm F_n(x)] + [c_1 \pm c_2 \pm \dots \pm c_n] = [F_1(x) \pm F_2(x) \pm \dots \pm F_n(x)] + C = \\ &= \int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)] dx. \end{aligned}$$

Дар ин ҷо, $C = c_1 \pm c_2 \pm \dots \pm c_n$ аст. ♣

4. *Ҷавали интегралҳои асосӣ.* Ҳаргуна формулаи намуна $F'(x) = f(x)$ бо интеграл номуайян дар шакли $\int f(x)dx = F(x) + C$ на-

ништа мешавад. Ин имконият медуҳад, ки ҷадвали ҳосилаҳои функсияҳои элементарии оддитариро доништа ҷадвали интегралҳои асосиро тартиб диҳем.

Ҳар формулаи навишта шуда бевосита дар натиҷаи дифференциронидан санҷида мешавад.

$$1. \int c \cdot dx = C;$$

$$2. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C;$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C;$$

$$8. \int \lg x dx = -\ln|\cos x| + C;$$

$$9. \int \operatorname{ctg} x dx = -\ln|\sin x| + C;$$

$$10. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

$$11. \int e^x dx = e^x + C;$$

$$12. \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \arctg x + C, \\ -\operatorname{arccotg} x + C, \end{cases}$$

$$13. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$14. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad (a \neq 0, x \neq \pm a)$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\operatorname{arccos} x + C, \end{cases} \quad (|x| < 1)$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C;$$

$$18. \int \sinh x dx = \cosh x + C;$$

$$19. \int \cosh x dx = \sinh x + C;$$

$$20. \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C;$$

$$21. \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C.$$

Мегӯянд, ки интегралҳои номӯайяни $\int f(x) dx$ бо функсияҳои элементарӣ ифода меёбад, агар функсияи элементарӣ $F(x)$ мавҷуд

бошад, ки барои функсияи тахти интеграл $f(x)$ функсияи ибтидоӣ шавад. Азбаски ҳосилаи ҳаргуна функсияи элементарӣ бо функсияи элементарӣ аст, пас маънаи ифода кардани $\int f(x)dx$ бо функсияҳои элементарӣ ҳамон вақте маъно дорад, ки функсияи тахти интеграл $f(x)$ функсияи элементарӣ бошад. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки қадвали интегралҳои 1-21 бо функсияҳои элементарӣ ифода меёбанд. Аммо нишон дода шудааст, ки на ҳаргуна интеграл аз функсияҳои элементарӣ бо функсияҳои элементарӣ ифода меёбад.

§34. МЕТОДҲОИ ИНТЕГРОНИЙ.

Баъзе усулҳои муайян кардани интеграл номуайяно меорем. Моҳияти ин усулҳо ба яке аз интегралҳои қадвали овардани интеграл додашуда мебошад.

1. Интегронии бевосита — ҳисоб кардани интеграл бо ёрии интегралҳои қадвалӣ ва ҳосиятҳои интеграл номуайян мебошад.

Мисолҳо: 1) Интеграл $\int \left(3\cos x - 4 + 5x^3 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} \right) dx$ ҳисоб карда шавад.

▲ Ҳосиятҳои 3^0 ва 4^0 — ро тадбиқ намуда меёбем:

$$\int \left(3\cos x - 4 + 5x^3 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} \right) dx = \int 3\cos x dx - \int 4 dx + 5 \int x^3 dx - \int \frac{1}{x^2} dx + 3 \int \frac{1}{x} dx.$$

Мувофиқи формулаҳои 5, 2, 3 қадвали интегралҳо меёбем:

$$\int 3\cos x dx = 3(\sin x + C_1) = 3\sin x + 3C_1;$$

$$-4 \int dx = -4(x + C_2) = -4x - 4C_2;$$

$$5 \int x^3 dx = 5 \left(\frac{x^4 + 1}{4} + C_3 \right) = \frac{5}{4}x^4 + 5C_3;$$

$$- \int \frac{1}{x^2} dx = - \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C_4 \right) = \frac{1}{x} - C_4;$$

$$3 \int \frac{1}{x} dx = 3(\ln|x| + C_5) = 3\ln|x| + 3C_5.$$

Ҳамин тариқ

$$\int \left(3 \cos x - 4 + 5x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} \right) dx = 3 \sin x - 4x + \frac{5}{3} x^3 + \frac{1}{x} + 3 \ln|x| + (3C_1 - 4C_1 + 5C_1 - C_1 + 3C_1).$$

Натиҷаи қавси охирини боз ягон адади доимиро ифода мекунад, бинобар ин, онро бо $C = 3C_1 - 4C_1 + 5C_1 - C_1 + 3C_1$ ишора намуда ҳосил мекунем:

$$\int \left(3 \cos x - 4 + 5x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} \right) dx = 3 \sin x - 4x + \frac{5}{3} x^3 + \frac{1}{x} + 3 \ln|x| + C. \blacktriangle$$

2) Интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ — ро ҳал намоед:

$$\blacktriangle \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C. \blacktriangle$$

3) Интеграл $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$ — ро ҳал намоед.

$\blacktriangle$ Азбаски $1+2x^2 = (1+x^2) + x^2$ аст, пас $\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} = \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}$. Аз ҳарду тараф интеграл гирифта мувофиқи формулаҳои 2 ва 12 — ӯни ҷадвали интегралҳо ҳосил мекунем:

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C. \blacktriangle$$

4) Интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ ҳисоб карда шавад.

$\blacktriangle$ Интеграл ҷадвали нест. Азбаски $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, пас интегралро ба

интегралҳои ҷадвалии 5 ва 6 ҷуғун овардан мумкин аст.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \blacktriangle$$

5) Интеграл $\int \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ҳал карда шавад.

$\blacktriangle$ Маҳраҷи функсияи таҳти интегралро дар намуди

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}$ ифода намуда суратро ба маҳраҷ тақсим карда, мувофиқи формулаҳои 15 ва 17 ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}} + \int \frac{\sqrt{1+x^2} dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + \operatorname{arcsin} x + C. \end{aligned}$$

Ҳамин тариқ, ҳалли машқҳои оварда шуда нишон медиҳад, ки барои ҳал намудани интеграл донишдони таҷриба чадвали интегралҳои кифоя нест. Таҷриба низ зарур аст, ки вай дар натиҷаи ҳалли машқҳои зиёд ҳосил мешавад.

2. Методи гузориш - ба тасдиқоти зерин асос дорад.

ТЕОРЕМАИ 34.1. Бигузор функсияи $\varphi: X \rightarrow T$ дар фосилаи X дифференциронидашаванда ва $F(x)$ функсияи ибтидоии $f(x)$ дар фосилаи T (яъне, $\int f(t)dt = F(t) + C$) бошад, онгоҳ функсияи мураккаби $(f \circ \varphi)(x) \varphi'(x)$ дар X интегронидашаванда буда баробарии $\int (f \circ \varphi)(x) \varphi'(x) dx = (F \circ \varphi)(x) + C$ иҷрошаванда аст.

▲ Функсияи $(f \circ \varphi)(x)$ дар фосилаи X муайян аст. Мувофиқи теоремаи ҳосилаи функсияи мураккаб $\forall x \in X$ ҳосилаи

$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \varphi'(x) = (f \circ \varphi)(x) \varphi'(x)$ вуҷуд дорад, ки дар ин ҷо $F'(t) = f(t)$ мебошад. Бинобар ин, $\int (f \circ \varphi)(x) \varphi'(x) dx = \int (f \circ \varphi)(x) d\varphi(x) = (F \circ \varphi)(x) + C = \int f(t) dt + C$, ки дар ин ҷо $t = \varphi(x)$ аст. ▲

Усули гузоришро ҳамон мавриде истифода бурдан қулай аст, ки нисбати тахти интеграл дар интеграл мутлаб бо намуди $(f \circ \varphi)(x) \varphi'(x) dx = (f \circ \varphi)(x) d\varphi(x)$ оварда шавад. Онгоҳ гузориш $t = \varphi(x)$ ба интеграл $\int f(t) dt$ меорад. Муваффақияти интегрон аз он вобаста аст, ки таъғирёбандаи нави дохил намуда интегралро содда намояд. Интиҳоби гузориши дуруст ба андозаи зиёд аз таҷриба ва санъати ҳисоббарор вобаста аст. Якчанд мисол меорем, ки дар онҳо методи байёншуда истифода шудаанд. Аввал мавридҳои хусусиро қайд менамоем.

а) Бигузор $F(x)$ - функсияи ибтидоии $f(x)$, яъне $\int f(t) dt = F(x) + C$ бошад, онгоҳ ҳангоми $a \neq 0$,

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b) + C. \quad (34.1)$$

Дар ин ҷо, $\varphi(x) = ax+b$ мебошад.

$$б) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{d'f(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C; \quad f(x) \neq 0 \quad (34.2)$$

Дар ин ҷо, баробарин $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$ истифода шуд, ки $t=f(x)$ мебошад.

в) Азбаски

$$\int t^a dt = \frac{t^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1, \quad t > 0,$$

$t=f(x)$ гузошта меёбем:

$$\int [f(x)]^a f'(x) dx = \int [f(x)]^a df(x) = \frac{[f(x)]^{a+1}}{a+1} + C. \quad (34.3)$$

Мисолҳо. 1) Интеграл $\int \frac{dx}{(x+b)^r}$ ҳисоб карда шавад.

▲ Азбаски $dx=d(x+b)$ аст, пас ҳангоми $m=1$ мавриди б) ва ҳангоми $m \neq 1$ мавриди в)-ро ҳосил мекунем:

$$\int \frac{dx}{(x+b)^r} = \int \frac{d(x+b)}{(x+b)^r} = \begin{cases} \ln(x+b) + C, & \text{агар } m=1; \\ \frac{1}{(1-m)(x+b)^{m-1}} + C, & \text{агар } m \neq 1. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

2) $\int \cos ax dx$ ҳисоб карда шавад. Барои ҳисоб кардани ин аз гузориши $t=ax$, $dt=adx$ истифода мебарем ва натиҷаи зерин ҳосил мекунем:

$$\int \cos ax dx = (1/a) \int \cos t dt = (1/a) \sin ax + C.$$

3) $\int \frac{dx}{x \pm a}$ ҳисоб карда шавад. Азбаски $dx=d(x \pm a)$, пас $t=x \pm a$ гузошта меёбем: $\int \frac{dx}{x \pm a} = \int \frac{d(x \pm a)}{x \pm a} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x \pm a| + C \quad (x \neq \mp a)$

4) $\int e^{mx} \cos ax dx$ ҳисоб карда шавад. Таъғирёбандан $t=\sin x$, $dt=\cos x dx$ ҷоря намуда меёбем: $\int e^{mx} \cos ax dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{mx} + C.$

5) $\int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx$ ёфта шавад. Агар $t=\arctg x$ $dt=\frac{dx}{1+x^2}$ гузорем онгоҳ

$$\blacktriangle \int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\arctg^3 x}{3} + C. \quad \blacktriangle$$

6) $\int \frac{dx}{\sin x}$ ёфта шавад. Аввал интегралро табдил дода баъд $t=\tg \frac{x}{2}$ мегузорем онгоҳ

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\cos \frac{x}{2} dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.\end{aligned}$$

7) $\int \frac{dx}{\cos x}$ ёфта шавад. $\cos x$ -ро дар намуди $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ифода карда аз ҳалли машқи 5 истифода мебарем:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = - \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

8) $\int \frac{x dx}{81x^4 + 1}$ ёфта шавад. Чунин табдилдиҳи кулай аст: $t = 9x^2$, $dt = 18x dx$.

$$\int \frac{x dx}{81x^4 + 1} = \int \frac{x dx}{(9x^2)^2 + 1} = \frac{1}{18} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\operatorname{arctg} t}{18} + C = \frac{\operatorname{arctg}(9x^2)}{18} + C.$$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}$ -ро ёбед. Аз гузориш тригонометрии

$t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$, $x = a \operatorname{tg} t$, $dx = a \frac{dt}{\cos^2 t}$ истифода мебарем, онгоҳ интеграл намуди зеринро мегирад:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} = \frac{1}{a^2} \int \cos^3 t dt = \frac{\sin t}{a^2} + C = \frac{\operatorname{tg} t}{a^2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} + C = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C.$$

10) Барои интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}$ гузориши тригонометрии

$t = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a}$, $x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$ беҳтар аст:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{a^2} + C = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\sin t}{\sqrt{1+\sin^2 t}} + C = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

10) Барои интеграл $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$ гузориши тригонометрии

$2t = \arccos \frac{x}{a}, x = a \cos 2t, dx = -2a \sin 2t dt$ бехтар аст:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= -4a \int \cos^2 t dt = -4a \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = -2at - 2a \int \cos 2t dt = \\ &= -2at - a \sin 2t + C = -a \left[\arccos \frac{x}{a} + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \right] + C. \end{aligned}$$

12) Интеграл $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ -ро ёбед, агар $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$ бошад.

▲ Дар сеаъзогин x^2+px+q "квадрати пурра", ҷудо намуда гузориши

$t = x + \frac{p}{2} > 0$ -ро мегузаронем, онгоҳ $\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$

$$= \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{2\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C. \blacktriangle$$

13) Ҳангоми $M \neq 0$ барои интеграл $\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q}$ монанди ҳалли

масъала 11) амал менамоем: ▲ $\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q} =$

$$\begin{aligned} &= M \int \frac{\left(x + \frac{p}{2} - \frac{p}{2} + \frac{N}{M}\right) d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \frac{M}{2} \int \frac{2tdt}{t^2+a^2} + \frac{2N-pM}{2} \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \\ &+ \frac{2N-pM}{2} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} = \frac{M}{2} \ln|t^2+a^2| + \frac{2N-pM}{2\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C = \\ &= \frac{M}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2N-pM}{2\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C. \end{aligned}$$

2. *Интеграл бо ҳиссаҳо* - ба қатори методҳои самарабахшии интеграл тааллуқ дошта ба тасдиқоти зерин асос меёбад.

ТЕОРЕМАИ 34.2. Агар функсияҳои $u(x)$ ва $v(x)$ дар фосилаи X дифференсиронидашаванда буда $u'(x)v(x)$ дар фосилаи X функсияи ибтидоӣ дошта бошад, онгоҳ $u(x)v'(x)$ дар фосилаи X функсияи ибтидоӣ дорад ва баробарии зерин иҷрошаванда аст:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \quad (34.4)$$

ин формуларо формулаи интеграл бо ҳиссаҳо меноманд.

♣ Мувофиқи шарт, ҳосилаҳои $u'(x)$ ва $v'(x)$ дар маҷмӯи X вуҷуд доранд, бинобар ин

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \Leftrightarrow u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x). \quad (34.5)$$

Тарафи ростии баробарии охири функсияи ибтидоӣ дорад, чунки $u(x)v(x)$ функсияи ибтидоии $[u(x)v(x)]'$ буда, функсияи $u'(x)v(x)$, мувофиқи шарт, функсияи ибтидоӣ дорад. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки интегралҳои номуайян аз функсияи $u(x)v'(x)$ дар маҷмӯи X вуҷуд дорад. Баробарии (34.5) -ро ба dx зарб намуда, аъзо ба аъзо интегралгирифта, доимии C -ро ба интегралҳои $\int u'(x)v(x)dx$ ҳамроҳ намуда, формулаи (34.4)-ро ҳосил мекунем. ♣

Қайд. Ҳангоми ҳисоб намудани $\int f(x)dx$ бо формулаи (34.4), интегралҳои додашударо дар намуни $\int u(x)v'(x)dx$ оварда функсияҳои $u(x)$ ва $v(x)$ -ро тавре интихоб менамоем, ки интегралҳои $\int v(x)u'(x)dx$ дар муқоиса содда шавад ва агар лозим шавад, формулаи (34.4)-ро якчанд бор истифода мебаранд. Дар баъзан мавридҳо, тадбиқи формулаи (34.4), барои муайян кардани интегралҳои матлуб ба ҳал кардани муодила оварда мерасонад. Дар истифодаи амалии формулаи (34.4) функсияҳои $u(x)$ ва $v'(x)$ маълум ҳисобида шуда аз рӯи $v'(x)$ функсияи $v(x)$ яққимата ёфта намешавад. Ба сифати $v(x)$ функсияи намуни соддатар интихоб карда мешавад.

Мисолҳо. 1) Интегралҳои $\int (5x+2)e^{4x} dx$ ёфта шавад.

▲ Мегузорем: $u(x)=5x+2$, $dv=e^{4x}dx$. Аз ин ҷо $du=5dx$, $v=\frac{1}{4}e^{4x}$.

Мувофиқи формулаи (34.4), ҳосил мекунем:

$$\int (5x+2)e^{4x} dx = \left(\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}\right)e^{4x} - \frac{5}{4} \int e^{4x} dx = \left(\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}\right)e^{4x} - \frac{5}{16}e^{4x} + C = \left(\frac{5}{4}x - \frac{3}{16}\right)e^{4x} + C. \blacktriangle$$

2) Интеграл $A = \int e^m \cos bx dx$ ёфта шавад. Бигузор $u=e^{ax}$,

$\cos bx = dv$, онгоҳ $du = ae^m dx$, $v = \frac{1}{b} \sin bx$. Формулаи (34.4) -ро тадбиқ

намуда меёбем: $A = \frac{1}{b} \sin bx e^m - \frac{a}{b} \int e^m \sin bx dx$. Барои интегралҳои охириин формулаи интегралӣ бо ҳиссаҳоро боз тадбиқ мекунем:

$$\int e^m \sin bx dx = \left[\begin{array}{l} e^m = u \Rightarrow du = ae^m dx \\ \sin bx dx = dv \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{b} \cos bx \end{array} \right] = -\frac{1}{b} e^m \cos bx + \frac{a}{b} \int e^m \cos bx dx.$$

Натиҷаи ҳосилшударо дар ифодаи A гузошта барои ёфтани интегралҳои матлуб нисбат ба A муодилаи зерин ҳосил мекунем.

$$A = \frac{1}{b} \sin bx e^m + \frac{a}{b^2} e^m \cos bx - \frac{a^2}{b^2} A.$$

Аз ин ҷо A -ро меёбем:

$$A = \int e^m \cos bx dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^m + C.$$

3. Интеграл $B = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ёфта шавад.

▲ $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ ва $dv = dx$ мегузорем, онгоҳ $du = \frac{-xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ва $v = x$

ҳосил мекунем. Мувофиқи формулаи (34.4)

$$\begin{aligned} B &= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \\ &+ a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - B. \end{aligned}$$

нисбат ба B муодила ҳосил намудем. В-ро ба тарафи чапи муодила гузаронида ҳамаи аъзоҳоро ба 2 тақсим мекунем:

$$B = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C. \blacktriangle$$

ЭЗОХ. Бо гузориши $x=asint$ интегралҳои В ба ҳамин натиҷа ноил мешавад. Иҷрои онро ба хонанда тавсия менамоем.

4) Интегралҳои $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ ёфта шавад.

▲ $u=(x^2+a^2)^{-n}$ ва $dv=dx$ мегузорем, онгоҳ $du = \frac{-2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$ ва $v=x$ ҳосил мекунем. Аз формулаи (34.4) истифода мебарем, онгоҳ

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^n} dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2J_{n+1}.$$

Аз ин ҷо, формулаи рекурентии зерин мебарояд:

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} J_n.$$

Агар $n=1$ бошад, интегралҳои қадвалӣ $J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ ҳосил мешавад. J_1 —ро доништа пай ҷар пай $J_2, J_3, \dots, J_n$ —ро муайян мекунем. ▲

5) Интегралҳои $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx$, $M \neq 0$, $n > 1$, $\Delta^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$ ёфта шавад.

Интегралро чуноин табдил медиҳем:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx &= \int \frac{M \left(x + \frac{p}{2} - \frac{p}{2} + \frac{N}{M} \right) dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \Delta^2 \right]^n} = \left[t = x + \frac{p}{2} \right] = M \int \frac{t dt}{(t^2 + \Delta^2)^n} + \\ &+ \frac{2N-pM}{2} \int \frac{dt}{(t^2 + \Delta^2)^n} = \frac{M}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(t^2 + \Delta^2)^{n-1}} + \frac{2N-pM}{2} J_n = \\ &= \frac{M}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{2N-pM}{2} J_n(x) \end{aligned}$$

Интегралҳои $J_n(x)$ монанди ҳалли машқи 4 ёфта мешавад. Мавриди $M=0$, интеграл бо гузориш $t=x+\frac{p}{2}$ ба намуди J_n оварда мешавад. ▲

Қондан интегрони бо ҳиссаҳо дар ҳисоб кардани интегралҳое, ки функсияи таҳти интегралӣ аз ҳосили зарбе яке аз функсияҳои

$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arccotg} x$, $\ln \psi(x)$ (ё ягон дараҷаи он) ба функсияе, ки функсияи ибтидоинаш маълум аст бо муваффақият истифода бурда мешавад. Дар ин маврид, ба сифати $u(x)$ яке аз функсияҳои номбаршуда гирифта мешавад.

Формулаи (34.4) дар ҳисоб кардани интегралҳои

$$\int P_n(x) \cos^m bx dx \quad \int P_n(x) \sin^m bx dx \quad \int P_n(x) e^{ax} dx \dots$$

васеъ истифода бурда мешавад. Ба сифати $u(x)$ бисёрёраъзогии $P_n(x)$ қабул карда шуда қондаи интегрония бо ҳиссаҳоро n -бор истифода мебаранд. Тадбиқи формулаи (34.4) барои интегралҳои $\int e^{ax} \cos bx dx$, $\int \cos(\ln x) dx \dots$ ба ҳал намудани муодила меорад (Ба мисоли 2 нигаред).

б) $\int (\arccos x)^2 dx$ ҳал карда шавад.

▲ $u = (\arccos x)^2$ ва $dv = dx$, қабул менамоем, онгоҳ $du = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x dx$ ва $v = x$ мешавад. Мувофиқи формулаи (34.4) меёбем:

$$\int (\arccos x)^2 dx = x(\arccos x)^2 + 2 \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x dx = x(\arccos x)^2 - 2 \int \arccos x d(\sqrt{1-x^2})$$

Барои интегралҳои охирини $u = \arccos x$ ва $dv = d(\sqrt{1-x^2})$ қабул намуда $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ва $v = \sqrt{1-x^2}$ ҳосил мекунем, онгоҳ

$$\begin{aligned} \int (\arccos x)^2 dx &= x(\arccos x)^2 + 2 \left[\sqrt{1-x^2} \arccos x + \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] = \\ &= x(\arccos x)^2 - 2\sqrt{1-x^2} \arccos x - 2x + C. \end{aligned}$$

§ 35. ИНТЕГРОНИИ КАСРҲОИ РАТСИОНАЛӢ.

Касри ратсионӣ нисбати ду бисёрёраъзогӣҳои алгебравиро меноманд. Дар ин ҷо, бисёрёраъзогӣҳои алгебравӣ бо коэффисентҳои ҳақиқӣ омехта мешавад. Касри ратсионии $\frac{P(x)}{Q(x)}$ дуруст ном дорад, агар дараҷаи бисёрёраъзогии $P(x)$ аз дараҷаи бисёрёраъзогии $Q(x)$

хурд бошад. Дар ҳолати баръакс касрро нодуруст меноманд. Касри ратсионалини нодурустро ҳамма вақт дар намуди суммаи ягон бисъёраъзогӣ ва касри ратсионалини дуруст ифода кардан мумкин аст, агар суратро ба махраҷ аз руи қоидаи тақсими бисъёраъзогӣҳо иҷро намоем. Оддитарин касрҳои ратсионалӣ касрҳои намуди зеринро меноманд:

$$I. \frac{A}{x-a}; II. \frac{A}{(x-a)^n}, (n>1); III. \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \left(\frac{p^2}{4}-q<0\right); IV. \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^r}, \left(\frac{p^2}{4}-q<0, n>1\right).$$

Дар поён нишон дода мешавад, ки ҳаргуна касри дуруст дар намуди суммаи охириҳои оддитарин касрҳои ратсионалӣ ифода мешавад.

1. Ифодаи намудани касри ратсионалини дуруст дар намуди суммаи касрҳои оддитарини. Аз алгебра маълум аст, ки ҳаргуна бисъёраъзогии дараҷаи n бо коэффисиентҳои ҳақиқӣ $Q(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_{n-1}x + c_n$ ба намуди ҳосили зарби бисъёраъзогӣҳои оварданашаванда дар майдони R бо таври ягона ифода меёбад:

$$Q(x) = c_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \dots (x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}.$$

Дар ин ҷо, $k_1+k_2+\dots+k_r+2(l_1+l_2+\dots+l_s)=n$, $q_i - \frac{p_i^2}{4} > 0$ ($i=1,2,\dots,s$).

ЛЕММАИ 35.1. Агар $a \in R$ решаи k -каратаи ($k \geq 1$) бисъёраъзогии $Q(x)$ бошад, яъне $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$, $Q_1(a) \neq 0$, онгоҳ адади $A \in R$ ва бисъёраъзогии $P_1(x)$ бо коэффисиентҳои ҳақиқӣ ёфт мешаванд, ки касри ратсионалини дурусти $\frac{P(x)}{Q(x)}$ бо таври ягона дар намуди

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}, \text{ ифода меёбад, ки дар ин ҷо } \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)} - \text{ касри ратсионалини дуруст.}$$

♣ Барои ихтиёри A , $\frac{[P(x) - A Q_1(x)]}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ касри ратсионалини дуруст мебошад, чунки дараҷаи $P(x)$ аз дараҷаи $Q(x)$ ва дараҷаи $Q_1(x)$ аз да-

раҷан $Q(x)$ хурд аст, ки ин аз баробарии $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$ бармеояд.

Адади A -ро тавре интихоб мекунем, ки адади a барои бисёраъзогии $P(x) - AQ_1(x)$ реша бошад, яъне $P(a) - AQ_1(a) = 0 \Leftrightarrow A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$. Бо чунин A касри додасударо ба $(x-a)$ тақсим намуда касри ратсионали дурусти $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ ҳосил намудан мумкин аст. Ягонагии он аз ягонагии адади A , ки $P(x) - AQ_1(x) = 0$ аст, мебарояд. ♣

ЛЕММАИ 35.2. Агар $Q(x) = (x^2 + px + q)Q_1(x)$, $p, q \in \mathbb{R}$, $q - \frac{p^2}{4} > 0$, $l \geq 1$, $Q_1(x)$ — бисёраъзогӣ бо коэффисиентҳои ҳақиқие, ки решаҳои $x^2 + px + q$ фарқкунанда бошад, онгоҳ касри ратсионали дурусти $\frac{P(x)}{Q(x)}$ вуҷуд дорад, ки онро бо таври ягона дар намуди касри $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(Mx + N)}{(x^2 + px + q)^l} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{l-1}Q_1(x)}$ ифода кардан мумкин аст, ки дар ин ҷо $M, N \in \mathbb{R}$, $P_1(x)$ — бисёраъзогӣ бо коэффисиентҳои ҳақиқӣ, $\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)Q_1(x)}$ — касри ратсионали дуруст мебошад.

♣ Касри $\frac{P(x)}{Q(x)}$ -ро чунин табдил медиҳем:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{(Mx + N)}{(x^2 + px + q)^l} + \left[\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{(Mx + N)}{(x^2 + px + q)^l} \right] = \frac{(Mx + N)}{(x^2 + px + q)^l} + \\ &+ \left[\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^l Q_1(x)} - \frac{(Mx + N)}{(x^2 + px + q)^l} \right] = \frac{(Mx + N)}{(x^2 + px + q)^l} + \frac{[P(x) - (Mx + N)Q_1(x)]}{(x^2 + px + q)^l Q_1(x)}. \end{aligned}$$

Бигузор $z_1 = a + bi$ ва адади ҳамроҳшудаи он $\bar{z}_1 = a - bi$ ($b \neq 0$) — решаҳои муодилаи $x^2 + px + q = 0$ бошанд. Ададҳои M ва N —ро тавре интихоб менамоем, ки бисёраъзогии $P(x) - (Mx + N)Q_1(x)$ ба $x^2 + px + q$ тақсим шавад. Барои ин кифоя аст, ки z ва $\bar{z}$ решаҳои муодилаи $P(x) - (Mx + N)Q_1(x) = 0$ бошад. Бо интихоби M ва N ба он муваффақ мешавем, ки $P(z_1) - (Mz_1 + N)Q_1(z_1) = 0$ шавад, онгоҳ $P(\bar{z}_1) - (M\bar{z}_1 + N)Q_1(\bar{z}_1) = 0$ мешавад. Бигузор $P(z_1) - (Mz_1 + N)Q_1(z_1) = 0$ бошад,

онгоҳ $Mz_1 + N = \frac{P(z_1)}{Q(z_1)} = c + di$ ва аз ин ҷо

$M(a+bi) + N = c + di \Rightarrow Ma + N = C, Mb = d$. Хамин тариқ, $M = d/b$, $N = C - ad/b$ ва бо ин қиматҳои M ва N бисёрёраъзогии номбурда ба $x^2 + px + q$ тақсим мешавад.

Касри ратсионалии $\frac{P(x) - (Mx + N)Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^i Q_1(x)}$ -ро ба $x^2 + px + q$ тақсим намуда касри $\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{i-1} Q_1(x)}$ -ро ҳосил мекунем. Ягонагии он аз ягонагии ададҳои M ва N мебарояд. ♣

ТЕОРЕМАИ 35.1. Бигузор $\frac{P(x)}{Q(x)}$ -касри ратсионалии дуруст $P(x)$,

$Q(x)$ -бисёрёраъзогиро бо коэффисентҳои ҳақиқӣ бошад. Агар $Q(x) = c_0(x-a_1)^{h_1}(x-a_2)^{h_2} \cdots (x-a_r)^{h_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2} \cdots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$,

(a_i -решаҳои ҳақиқии гуногуни $Q(x)$, $x^2+p_ix+q_i$ бисёрёраъзогии оварданашавандани майдони R бо коэффисентҳои ҳақиқӣ, ки решаҳои ҳақиқии яхела надоранд), бошад, онгоҳ касри ратсионалии дурусти $\frac{P(x)}{Q(x)}$ -ро ба таври ягона дар намуди зерин ифода кардан

мумкин аст:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1^{(0)}}{(x-a_1)^{h_1}} + \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{h_1-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(h_1-1)}}{x-a_1} + \frac{A_2^{(0)}}{(x-a_2)^{h_2}} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_2)^{h_2-1}} + \cdots + \frac{A_2^{(h_2-1)}}{x-a_2} \\ & + \cdots + \frac{A_r^{(0)}}{(x-a_r)^{h_r}} + \frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{h_r-1}} + \cdots + \frac{A_r^{(h_r-1)}}{x-a_r} + \frac{M_1^{(0)}x + N_1^{(0)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}} + \cdots + \frac{M_1^{(l_1-1)}x + N_1^{(l_1-1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}} \\ & + \cdots + \frac{M_s^{(0)}x + N_s^{(0)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}} + \frac{M_s^{(1)}x + N_s^{(1)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s-1}} + \cdots + \frac{M_s^{(l_s-1)}x + N_s^{(l_s-1)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s-1}} \end{aligned} \quad (35.1)$$

Дар ин ҷо A_i, M, N бо индексҳои мувофиқашон ба R таалуқдор мебошанд.

♣ $Q(x)$ -ро дар намуди $Q(x) = (x-a_1)^{h_1} Q_1(x)$ менависем, ки дар ин ҷо, $Q_1(x) = (x-a_2)^{h_2} \cdots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$, буда $Q_1(a_1) \neq 0$ аст. Мувофиқи леммаи 35.1

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(0)}}{(x-a_1)^{h_1}} + \frac{P_1^{(0)}(x)}{(x-a_1)^{h_1-1} Q_1(x)}$$

ва $\frac{P_1^{(1)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}Q_1(x)}$ -касри ратсионалии дуруст аст. Ба он боз леммаи

35.1-ро тадбиқ менамоем, онгоҳ

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \frac{P_1^{(1)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}Q_1(x)}.$$

Ҳамин тавр, k_1 -маротиба леммаи 35.1 -ро тадбиқ намуда меёбем:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(k_1)}}{x-a_1} + \frac{P_1^{(k_1)}(x)}{Q_1(x)}.$$

Акнун $Q_1(x)$ -ро дар намуди $Q_1(x) = (x-a_2)^{k_2}Q_2(x)$ ($Q_2(a_2) \neq 0$) навишта ба касри $\frac{P_1^{(k_1)}(x)}{Q_1(x)}$ леммаи 35.1-ро k_2 маротиба тадбиқ намуда ҳосил

мекунем:

$$\frac{P_1^{(k_1)}(x)}{Q_1(x)} = \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_2)^{k_2}} + \frac{A_2^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2-1}} + \dots + \frac{A_2^{(k_2)}}{x-a_2} + \frac{P_2^{(k_2)}(x)}{Q_2(x)}.$$

Ҳамин тавр, дар $Q(x)$ пай дар пай $(x-a_1)^{k_1}, (x-a_2)^{k_2}, \dots, (x-a_r)^{k_r}$ -ро ҷудо намуда леммаи 35.1 -ро мувофиқан $k_1, k_2, \dots, k_r$ -бор тадбиқ карда ҳосил мекунем:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_1^{(k_1)}}{x-a_1} + \dots + \frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{k_r}} + \dots + \frac{A_r^{(k_r)}}{x-a_r} + \frac{P_r^{(k_r)}(x)}{Q_r(x)},$$

ки дар ин ҷо, $Q_r(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}$. $Q_r(x)$ -ро дар намуди $Q_r(x) = (x^2 + px + q)Q_{r+1}(x)$ менависем ва ба касри $\frac{P_r^{(k_r)}(x)}{Q_r(x)}$ леммаи 35.2-ро

l_1 -бор тадбиқ мекунем, онгоҳ

$$\frac{P_r^{(k_r)}(x)}{Q_r(x)} = \frac{M_1^{(0)}x + N_1^{(0)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \dots + \frac{M_1^{(l_1-1)}x + N_1^{(l_1-1)}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{P_{r+1}^{(l_1)}(x)}{Q_{r+1}(x)}.$$

Акнун $Q_{r+1}(x)$ -ро дар намуди $Q_{r+1}(x) = (x^2 + p_2x + q_2)^{l_2}Q_{r+2}(x)$ навишта ба касри $\frac{P_{r+1}^{(l_1)}(x)}{Q_{r+1}(x)}$ леммаи 35.2 -ро боз тадбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$\frac{P_{r+1}^{(l_1)}(x)}{Q_{r+1}(x)} = \frac{M_2^{(0)}x + N_2^{(0)}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2}} + \dots + \frac{M_2^{(l_2-1)}x + N_2^{(l_2-1)}}{x^2 + p_2x + q_2} + \frac{P_{r+2}^{(l_2)}(x)}{Q_{r+2}(x)}.$$

ва ғайра. Ҳамаи касрҳои ратсионалии оддитарини ҳосилшударо ҷамъ намуда тасвири касри $\frac{P(x)}{Q(x)}$ -ро меёбем. Ягонагии он аз яго-

нагии коэффисцентҳои A , M , N бо индексҳои мувофиқ ҳосил мешавад. ♠

ТЕОРЕМАИ 35.2 (*Оиди интегронидаҳои касрҳои ратсионалӣ*).

Интегралҳои номуайян аз ҳаргуна касри ратсионалӣ $\frac{P(x)}{Q(x)}$, дар ихтиёри фосолае, ки решаҳои бисёрраъзогии $Q(x)$ -ро надорад, вучуд дорад ва бо ёрии функсияҳои элементарӣ (касри ратсионалӣ, логарифм, арктангенс) ифода меебад.

♠ Касри ратсионалӣ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ -ро дар намуди суммаи ягон бисёрраъзогии $R(x)$ ва касри ратсионалӣ дурусти $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ ифода мекунем.

Ин амалиётро ҳама вақт иҷро намудан мумкин аст, агар $P(x)$ —ро ба $Q(x)$ аз рӯи қоидаи тақсими бисёрраъзогиҳо тақсим намоем. Бояд қайд намуд, ки $R(x) \equiv 0$, агар $\frac{P(x)}{Q(x)}$ касри ратсионалӣ дуруст бошад. Теоремаи 35.1 -ро ба касри $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ тадбиқ намуда онро дар намуди суммаи охириноки касрҳои ратсионалӣ оддитарин ифода менамоем:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^{k_i} \frac{A_i^{(l)}}{(x-a_i)^{k_i-l+1}} + \sum_{i=1}^s \sum_{l=1}^{l_i} \frac{M_i^{(l)}(x) + N_i^{(l)}}{(x^2 + p_i x + q_i)^{l_i-l+1}}.$$

Аъзо ба аъзо интегронида ҳосил мекунем:

$$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx = \int R(x) dx + \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^{k_i} A_i^{(l)} \int \frac{dx}{(x-a_i)^{k_i-l+1}} + \sum_{i=1}^s \sum_{l=1}^{l_i} \int \frac{(M_i^{(l)}(x) + N_i^{(l)}) dx}{(x^2 + p_i x + q_i)^{l_i-l+1}}.$$

Дар ин ҷо, $\int R(x) dx$ -бисёрраъзогӣ аст. Дар тарафи ростии баробарии охирин қимати интегралҳоро аз касрҳои ратсионалӣ оддитарин гузошта (онҳо дар мисолҳои 1, 2, 3, 12, 13 банди 2 ва мисоли 5.6.3, §34 ҳал шуда ба касрҳои ратсионалӣ, логарифм, арктангенс ифода ёфтаанд), исботи теоремаро ба анҷом мерасонем. ♠

2. Методи коэффисцентҳои номуайян. Методҳои гуногуни ҷудо намудани касрҳои ратсионалӣ дуруст ба касрҳои оддитарин вучуд дорад. Яке аз онҳо дар исботи теоремаҳои 35.1 ва 35.2 маълум

шуд. Дар амалия бештар методи коэффисцентҳои номуайян, ки ҳоло ба шарҳи он мегузарем, вомехурад. Моҳияти ин метод аз зерин иборат аст. Дар асоси теоремаи 35.1 ҷудокунии (35.1) -ро барои касри $\frac{P(x)}{Q(x)}$ бо коэффисцентҳои номаълуми A, M, N бо индексҳои мувофиқ менависанд. Баъд баробарии (35.1) ба махраҷи умуми оварда шуда коэффисцентҳои дараҷаҳои якхелаи x дар сурати каср муқоиса карда мешаванд.

Дар натиҷа системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ нисбат ба коэффисцентҳои номуайян, ҳосил мешавад, ки он мувофиқи теоремаи 35.1 ва 35.2 ҳалли ягона дорад. Тадбиқи ин методро дар ёфта-ни чанд интегралҳо дида мебароем.

Мисол. 1) Интеграли $\int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx$ ёфта шавад.

♣ Махраҷи таҳти интегралро ба зарбшавандаҳо ҷудо менамоем

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2).$$

Ошкор аст, ки дар махраҷи касри ратсионали зарбшавандаҳои дараҷаи як иштирок доранд ва ягонтаи онҳо такрор намешаванд. Аз методи коэффисцентҳои номуайян истифода бурда, касри дурусти таҳти интегралро ба суммаи касрҳои оддитарин ҷудо мекунем:

$$\frac{x^2 - x + 2}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2} + \frac{D}{x - 2}.$$

Ҳамаи аъзоҳои баробарию ба $x^4 - 5x^2 + 4$ зарб мекунем:

$$x^2 - x + 2 = A(x - 1)(x - 2)(x + 2) + B(x + 1)(x - 2)(x + 2) + C(x + 1)(x - 1)(x - 2) + D(x + 1)(x - 1)(x + 2).$$

Ин баробари барои ихтиёри қиматҳои x дуруст аст, бинобар ин чунин чор қиматҳои x -ро мегирем, ки ҳар кадоми онҳо ягон аз зарбшавандаҳои тарафи ростии баробарию ба сифр табдил диҳад. Чунин қиматҳо $x = -1$, $x = 1$, $x = -2$, $x = 2$ мебошад. Пай дар пай ин қиматҳоро дар баробарии охирин гузошта ҳосил мекунем:

$$x = -1 \Rightarrow A = \frac{2}{3}; \quad x = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}; \quad x = -2 \Rightarrow C = -\frac{2}{3}; \quad x = 2 \Rightarrow D = \frac{1}{3}.$$

Ҳамин тариқ, касри ратсионалии тахти интеграл ба суммаи касрҳои оддитарин чунин ҷудо шуд:

$$\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4} = \frac{2}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-2)}; \text{ онро интегронида меёбем:}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4} dx &= \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-2} = \\ &= \frac{1}{3} [2\ln(x+1) - \ln(x-1) - 2\ln(x+2) + \ln(x-2) + C] = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2} \right| \end{aligned}$$

2) Интеграл $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$ -ро ёбед.

Махраҷи касри тахти интеграл зарбшавандаи дукаратаи $(x+1)$ -ро дорад, бинобар ин ба суммаи касрҳои оддитарин чунин ҷудо мешавад:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Баробариро ба $(x+1)^2(x^2+x+2)$ зарб мезанем:

$$\begin{aligned} x^2+1 &= A(x^2+x+1) + B(x+1)(x^2+x+1) + (Mx+N)(x+1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (B+M)x^3 + (A+2B+N+M)x^2 + (A+2B+2N+M)x + A+B+N = x^2+1 \end{aligned}$$

Коеффициентҳои назди дараҷаҳои якхелаи x -ро баробар карда, барои ёфтани коеффициентҳо системаи зерин ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} B+M &= 0, \quad A+2B+N+M=1, \\ A+2B+2N+M &= 0, \quad A+B+N=1. \end{aligned}$$

Ин системаро ҳал карда $A=2$, $B=M=0$, $N=-1$ ҳосил мекунем. Ҳамин тариқ,

$$\int \frac{(x^2+1)dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3. *Методи Остроградский** — ба ҷудо кардани қисми ратсионалии интеграл аз касри ратсионалӣ бахшида мешавад. Ҳангоми интегронидани касрҳои, ки махраҷи онҳо дуаъзогии x -а ва сеъзо-

* М.В. Остроградский (1801-1861) — рӯзидони рус.

гии x^2+px+q -ро бо дараҷаи як доранд, (намуди I ва III) функсияҳои логарифм ва арктангес (машқҳои 2, II, банди 2 §34), ҳосил мешавад. Натиҷаи интегронии касрҳои намуди II, яъне маҳраҷи намуди $(x-a)^k$, ($k>1$) дошта, касри дуруст бо маҳраҷи $(x-a)^{k-1}$ ва интегронидаи касрҳои намуди IV, ки маҳраҷи $(x^2+px+q)^l$, ($l>1$) -ро доранд касри дуруст бо маҳраҷи $(x^2+px+q)^{l-1}$ медиҳанд (машқҳои 4, 5 банди 3 §34).

Ҳамин тариқ, агар

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \cdots (x-a_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} (x^2+p_2x+q_2)^{l_2} \cdots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

бошад, онгоҳ қисми ратсионалии интеграл аз касри ратсионалии дурусти $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ба суммаи касрҳои ратсионалии дурусти маҳраҷи

$$(x-a_1)^{k_1-1}, (x-a_2)^{k_2-1}, \dots, (x-a_r)^{k_r-1}, (x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}, (x^2+p_2x+q_2)^{l_2-1}, \dots, (x^2+p_sx+q_s)^{l_s-1}$$

дошта баробар мебошад.

Ошкор аст, ки вақт касри ратсионалии дуруст мебошад. Ойро бо $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ ишора менамоям, ки дар ин ҷо

$$Q_1(x) = (x-a_1)^{k_1-1}(x-a_2)^{k_2-1} \cdots (x-a_r)^{k_r-1} (x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1} (x^2+p_2x+q_2)^{l_2-1} \cdots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s-1}.$$

Суммаи ҳамаи касрҳои оддӣ, ки интегралашон функсияи логарифмӣ ва арктангес медиҳанд, касри ратсионалии дурусти намуди $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ -

ро медиҳад, ки

$$Q_2(x) = (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2) \cdots (x^2+p_sx+q_s)$$

Ҳамин тариқ, формулаи зерин ҳосил мекунем, ки ойро Остроградский М.В., аввалин шуда ҳосил карда буд.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx \quad (35.2)$$

Ин баробарӣ **ФОРМУЛАИ ОСТРОГРАДСКИЙ** ном дорад. Агар маҳраҷи касри додашуда $Q(x)$ ба зарбшавандаҳо ҷудо шуда бошад, онгоҳ маҳраҷҳои $Q_1(x)$ ва $Q_2(x)$, ки дар тарафи ростӣ (35.2) ҷойгиранд, бо осонӣ навишта мешаванд: дар $Q_2(x)$ ҳамаи он зарб-

шавандаҳоро аз $Q(x)$ гирифтаи лозим аст, ки ба дараҷаи як ишти-
рок доранд ва дар $Q_1(x)$ он зарбшавандаҳои $Q(x)$ -ро гирифтаи
лозим аст, ки дар $Q_2(x)$ дохил нашуда буданд, чунки
 $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$ аст.

Дар формулаи (35.2) бисёрраъзогиҳои $Q_1(x)$ ва $Q_2(x)$ -ро бе
ҷудо намудани бисёрраъзогии $Q(x)$ ба зарбшавандаҳо низ ҳисоб
намудан мумкин аст. Дар курси алгебра исбот карда мешавад, ки
 $Q_1(x)$ калонтарин тақсимкунандани умуми (КТУ) -и бисёрраъзо-
гиҳои $Q(x)$ ва $Q'(x)$ мебошад ва бо усули алгоритми Евклид ёфта
мешавад. $Q_2(x)$ дар натиҷаи тақсим намудани бисёрраъзогии $Q(x)$
ба $Q_1(x)$ муайян карда мешавад.

Барои ёфтани бисёрраъзогиҳои $P_1(x)$ ва $P_2(x)$ аз методи ко-
эффисиентҳои номуайян истифода бурдан кифоя аст.

Формулаи Остроградскийро дифференсиронида ба маҳраҷи
умумӣ оварда коэффисиентҳои назди дараҷаҳои яхселаи x -ро баро-
бар карда, системаи муодилаҳоро барои муайян кардани коэффиси-
ентҳои номуайяни бисёрраъзогиҳои $P_1(x)$ ва $P_2(x)$ ҳосил мекунем.
Баъд, системаро ҳал намуда, коэффисиентҳои ёфташударо дар ин-
теграл (35.2), гузошта ба ҳал кардани интеграл $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$, ки нис-
бат ба интеграл додашуда содда аст, мегузарем.

Қайд менамоем, ки методи Остроградский барои он маврид
самарабахш аст, агар решаҳои $Q(x)$ қаратя бошанд ё ёфтани ре-
шаҳои $Q(x)$ мушқият орад.

Мисолҳо. 1) Интеграл $I = \int \frac{x^3 + x + 1}{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1} dx$ ёфта шавад.

▲ Дар ин ҷо, $Q(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1$, $Q'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 8x + 3$. $Q_1(x)$ —ро
ҳамчун КТУ бисёрраъзогиҳои $Q(x)$ ва $Q'(x)$ бо усули алгоритми
Евклид ҷустуҷӯ мекунем. $Q(x)$ —ро ба 4 зарб карда ба $Q'(x)$ аз
руи қонди тақсими бисёрраъзогиҳо тақсим мекунем:

$$4x^4 + 12x^3 + 16x^2 + 12x + 4 \quad | \quad 4x^3 + 9x^2 + 8x + 3$$

$$4x^4 + 9x^3 + 8x^2 + 3x$$

x

$$3x^3 + 8x^2 + 9x + 4$$

Бисъёраъзогии $3x^3 + 8x^2 + 9x + 4$ -ро ба 4 зарб намуда ба $4x^3 + 9x^2 + 8x + 3$ тақсим мекунем:

$$12x^3 + 32x^2 + 36x + 16$$

$$4x^3 + 9x^2 + 8x + 3$$

3

$$12x^3 + 27x^2 + 24x + 9$$

$$5x^2 + 12x + 7$$

Ҳамин тариқ, $5x^2 + 12x + 7$ бақияи аввал. Акиун бисъёраъзогии $4x^3 + 9x^2 + 8x + 3$ -ро ба 5 зарб карда ба бақияи аввал $5x^2 + 12x + 7$ тақсим мекунем:

$$20x^3 + 45x^2 + 40x + 15$$

$$5x^2 + 12x + 7$$

4x

$$20x^3 + 48x^2 + 28x$$

$$3x^2 + 12x + 15$$

Бисъёраъзогии $-3x^2 + 12x + 15$ -ро ба -5 зарб намуда ба $5x^2 + 12x + 7$ тақсим мекунем:

$$15x^2 - 60x - 75$$

$$5x^2 + 12x + 7$$

3

$$15x^2 + 36x + 21$$

$$-96x - 96$$

$$x+1$$

Бисъёраъзогии $5x^2+12x+7$ -ро ба $x+1$ тақсим намуда бақияи $5x+1$ ҳосил мекунем. Ҳамин тариқ, бақияи аввал ба $x+1$ бутун тақсим мешавад, пас $Q_1(x)=x+1$ -КТУ бисъёраъзогиҳои $Q(x)$ ва $Q'(x)$ мебошад. Ақнуи $Q(x)$ -ро ба $Q_1(x)$ тақсим намуда $Q_2(x)$ -ро меёбем:

$$\begin{array}{r}
 4x^4+3x^3+4x^2+3x+1 \quad | \quad \begin{array}{r} x+1 \\ x^3+2x^2+2x+1 \end{array} \\
 \underline{4x^4+x^3} \\
 2x^3+4x^2+3x+1 \\
 \underline{2x^3+4x^2} \\
 2x^2+3x+1 \\
 \underline{2x^2+2x} \\
 x+1 \\
 \underline{x+1} \\
 0 \quad 0
 \end{array}$$

Ҳамин тариқ, $Q(x)=x^3+2x^2+2x+1$.

Формулаи Остроградскийро барои I менависем:

$$I = \frac{A}{x+1} + \int \frac{Mx^2+Nx+F}{x^3+2x^2+2x+1} dx$$

ин баробариро дифференсиронида ҳосил мекунем:

$$\frac{x^2+x+1}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1} = -\frac{A}{(x+1)^2} + \frac{Mx^2+Nx+F}{x^3+2x^2+2x+1}$$

Ба махраҷи умумӣ оварда коэффисиентҳои дараҷаҳои якхелаи x -ро дар сурат баробар карда системаи зерин ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned}
 M=1, \quad N \cdot A + 2M=1, \quad F + 2N + M \cdot A=1, \\
 2F + N - 2A=2, \quad F \cdot A=1.
 \end{aligned}$$

Аз ин ҷо меёбем: $M=1, A=1, N=0, F=2$. Бинобар ин,

$$I = \frac{1}{x+1} + \int \frac{x^2+2}{x^3+2x^2+2x+1} dx$$

Азбаски $x^3+2x^2+2x+1=(x+1)(x^2+x+1)$ аст, пас

$$\frac{x^2+2}{x^3+2x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Коэффициентҳоро бо методҳои маълум меёбем: $A=2$, $B=-1$, $C=-1$.

Ҳамин тариқ,

$$\int \frac{x^2+2}{x^3+2x^2+2x+1} dx = 2 \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx = 2 \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

ва дар охир ҳосил мекунем: $I = \frac{1}{x+1} + \ln \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \blacktriangle$

2) Интеграл $\int \frac{6x+6}{x^3(2x+3)^2} dx$ -ро бо методи Остроградский ёбед.

▲

$$Q(x) = x^2(2x+3)^2, Q'(x) = x^2(2x+3)(10x+9), Q(x) = x^2(2x+3),$$

$$Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q'(x)} = \frac{x}{10x+9}, P_1(x) = Ax^2+Bx+C, P_2(x) = Mx+N$$

$$\int \frac{6x+6}{x^3(2x+3)^2} dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^2(2x+3)} + \int \frac{Mx+N}{x(2x+3)} dx$$

Ёфтани коэффициентҳо ва ҳалли интегралҳои охириро ба ҳонанда пешниҳод менамоем.

§36. ИНТЕГРОНИИ ИФОДАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ.

Интегронидани баъзе функсияҳои иррационалӣ ва трансцендентӣ баъди гузоришҳои мувофиқ ба интегронидани касрҳои раціоналӣ оварда мешавад. Дар муҳокимаҳои оянда роли муҳими функсияи раціоналӣ аз ҷиҳати таъғирёбанда мебошад.

ТАЪРИФИ 36.1. Функсияе, ки дар натиҷаи тадбириқӣ миқдори охиринокӣ амалҳои арифметикӣ ба миқдори охиринокӣ таъғирёбандаҳои $x, y, z, \dots, u, v$ ҳосил мешавад, функсияи раціонали таъғирёбандаҳои $x, y, z, \dots, u, v$ ном дорад. Оғро бо $R(x, y, z, \dots, u, v)$ ишора менамоем. Дар маънидаи хусусӣ, функсияи раціонали таъғирёбандаҳои x ва y намуди

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \text{ -ро дорад, ки дар ин ҷо}$$

$$P_n(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots + a_{n0}x^n$$

$$Q_m(x, y) = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \dots + b_{m0}x^m$$

-бисёрраъзогиҳои мувофиқан дараҷаҳои n ва m аз ду таъғирёбандаҳои x ва y дар майдонҳои ададҳои ҳақиқӣ мебошад.

1. Интегралҳои функсиҳои иррационали касриво ҳаттӣ. Интеграл аз касрҳои намуни $R\left[x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^s, \dots, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^n\right]$ -ро меомӯзем, ки дар ин ҷо $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ ададҳои раціоналия, $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$ ($\alpha, \delta, \gamma, \beta$ -доимӣҳо) аст. Агар $\alpha\delta - \gamma\beta = 0$ бошад, онгоҳ коэффисиентҳои α, β ва γ, δ мутаносуб буда касри $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ аз x новобаста мешуд. Дар ин ҳолат, функсиҳои таҳти интеграл ба касри раціоналия аз як таъғирёбанда табдил меёфт, ки масъалаи интегралҳои онро дар §35 омӯхтем.

ТЕОРЕМАИ 36.1. Агар $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ ададҳои раціоналия бошанд, онгоҳ интеграл $\int R\left[x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^s, \dots, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^n\right] dx$ бо функсиҳои элементарӣ ифода меёбад.

♣ Бигузор n -маҳраҷи умумии касрҳои $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ бошад. Гузориш $t^n = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ -ро мегузаронем, онгоҳ

$$x = \frac{\delta t^n + \beta}{-\gamma t^n + \alpha} = r(t), \quad dx = r'(t) dt$$

Дар ин ҷо, $r(t), r'(t)$ -касрҳои раціоналия. Ин қавматҳоро дар интеграл мегузаронем, онгоҳ

$$\int R\left[x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^s, \dots, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^n\right] dx = \int R[r(t), t^s, t^n, \dots] r'(t) dt = \int R_1(t) dt,$$

ки дар ин ҷо $R_1(t)$ -касри раціоналия аст. Аз теоремаи 35.2 мебарояд, ки $\exists \int R_1(t) dt$, пас интегралҳои матлуб бо функсиҳои элементарӣ ифода меёбад. ♣

Мисол. Интеграл $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1} \sqrt{x}}$ ёфта шавад.

Маҳраҷи умумии касрҳои $\frac{3}{2}$ ва $\frac{4}{3}$ адади 6 мебошад, пас гузориши $t^6 = x$ мегузаронем, онгоҳ $dx = 6t^5 dt$; $\sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{t^6} = t$ ва $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{t^{12}} = t^4$ ҳосил мекунем. Ин қияматҳоро дар интегрални додашуда гузошта ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{\sqrt{x^3 - \sqrt{x^2}}} &= \int \frac{t^6 \cdot 6t^5 dt}{t^3 - t^4} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3 - t^4} = 6 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t^3 - t^4} dt = 6 \int (t^2 + t + 1) dt + 6 \int \frac{dt}{t-1} = \\ &= 6 \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) + C = 6 \left(\frac{1}{3} \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x} - 1| \right) + C = \\ &= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C.\end{aligned}$$

2. *Гузоришҳои Эйлер** - ба интегронивдани баъзе ифодаҳои иррационалнокиҳои квадратии намуни $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ бахшида мешавад, ки дар ин ҷо a, b, c - доимӣҳо.

ТЕОРЕМАИ 36.2. Интегралҳои намуни $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ бо функсияҳои элементарӣ ифода мешавад.

▲ Ҳангоми $a=0$ гузориши $t = \sqrt{bx+c}$ интегрални додашударо ба ҳисоб кардани интегрални функсияи раціоналя (мавриди I) меорад. Агар $a \neq 0$, $b^2 - 4ac = 0$ бошад, ифодаи таҳти интеграл касри раціоналя аст, ҷуваби соатзабони $ax^2 + bx + c$ решаҳои баробар дорад. Барои мавридҳои боқимонда гузоришҳои Эйлер интегрални додашударо ба ҳисоб кардани интеграл аз касрҳои раціоналя меорад.

Гузориши якум. - ҳангоми $a > 0$ истифода бурда мешавад, ки ҷуваби аст:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{ax} \Rightarrow x = \frac{t^2 - c}{b^2 \pm 2\sqrt{at}} = r(t).$$

Дар ин ҷо, $r(t)$, $r'(t)$ - касрҳои раціоналя. Ин қияматҳоро дар интегрални додашуда гузошта ҳосил мекунем:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R(r(t), t \pm \sqrt{ar(t)}) r'(t) dt$$

$R_1(t)$ - касри раціоналя. Аз теоремаи 35.2 мебарояд, ки интеграл ба интегронивдани касрҳои раціоналя табдил ёфта ба функсияҳои элементарӣ ифода мешавад.

Гузориши дуҷум. - ҳангоми $c > 0$ истифода мешавад, ки ҷуваби аст:

* Леонардо Эйлер (1707-1783) — риёзондон швецсиягӣ.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}\pm tx.$$

Ҳар ду тарафи ин баробарино ба квадрат бардошта меёбем:

$$x = \frac{b^2 \pm 2\sqrt{ct}}{t^2 - a} = r(t), \Rightarrow dx = r'(t)dt.$$

Ин қиматҳоро дар интеграл мегузорем:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R(r(t), \sqrt{c} \pm tr(t))r'(t)dt = \int R_1(t)dt.$$

Интеграл додашуда ба функсияҳои элементарӣ ифода меёбад, чунки $R_1(t)$ - касри ратсионалӣ аст.

Гузориши сеюм - ҳангоме истифода бурла мешавад, ки сегазгони ax^2+bx+c решаҳои ҳақиқӣ дорад. Бигузор решаҳои он α_1 ва α_2 бошад, онгоҳ гузориш чунин аст: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} = t(x-\alpha_1)$. Аз ин ҷо меёбем:

$$x = \frac{\alpha_1 t^2 - a\alpha_2}{t^2 - a} = r(t), \Rightarrow dx = r'(t)dt.$$

Ин қиматҳоро дар интеграл мегузорем, онгоҳ

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R(r(t), t(r(t)-\alpha_1))r'(t)dt = \int R_1(t)dt$$

Дар ин ҷо, $R_1(t)$ - касри ратсионалӣ. Ҳамин тариқ, ҳар се гузоришҳои интеграл додашударо бо интегронидани касриҳои ратсионали табдил дода ба функсияҳои элементарӣ ифода меёбанд. ▲

Мисол. Интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+4}}$ ёфта шавад.

▲ Ифодан таҳти интеграл - функцияи ратсионалӣ аз x ва $\sqrt{x^2+2x+4}$ буда $a=1>0$ аст. Мувофиқи гузориши якуми Эйлер:

$$\sqrt{x^2+2x+4} = t-x \Rightarrow x = \frac{t^2-4}{2t+2}, \quad dx = \frac{t^2+2t+4}{2(t+1)^2} dt, \quad \sqrt{x^2+2x+4} = \frac{t^2+2t+4}{2t+2}.$$

Дар интеграл гузошта меёбем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+4}} &= \int \frac{t^2+2t+4}{2(t+1)^2} \cdot \frac{2t+2}{t^2-4} \cdot \frac{2t+2}{t^2+2t+4} = \int \frac{dt}{t^2-4} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+\sqrt{x^2+2x+4}-2}{x+\sqrt{x^2+2x+4}+2} \right| + C \end{aligned}$$

3. *Интегронидани дифференсиалҳои биномӣ.* Ифодаи $x^a(a+bx^r)^p dx$ бо ададҳои раціоналии m, n, p ($n \neq 0, p \neq 0, a \neq 0, b \neq 0$) дифференсиали биномӣ ном дорад.

ТЕОРЕМАИ 36.3. Интеграли намуни $\int x^a(a+bx^r)^p dx$ бо ёрии функсияҳои элементарӣ танҳо дар се ҳолатҳои зерин ифода меёбад:

$$\text{I. } p \in \mathbb{Z}; \text{ II. } \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}; \text{ III. } \left(\frac{m+1}{n} + p\right) \in \mathbb{Z}.$$

♣ **Маъриди I.** Бигузур p -бутун ё нул бошад. Агар $p=0$ бошад, онгоҳ $x^a(a+bx^r)^p dx = x^a dx$ ва интеграл ҳаққи ҳисоб мекунем. Агар p ва ададҳои m, n — бутун бошад, онгоҳ $x^a(a+bx^r)^p$ — функсияи раціоналия буда бо тарзи маълум интегронидани мешавад. Агар p — бутун ва ақалан яке аз ададҳои m ва n касрӣ бошад, онгоҳ $x^a(a+bx^r)^p$ — функсияи ирационалия буда бо усули дар бақди 1 нишон додашуда интегронидани мешавад ва гузориши x^{m+1} интегралро ба интегронидани функсияҳои раціоналии меорад, ки дар ин ҷо q -маҳраҷи умумии касрҳои m ва n мебошад.

Маъриди II. Бигузур адади $p = \frac{r}{s}$ — касрӣ бошад.

$$\text{Мегузорем: } a+bx^r = t^s \Rightarrow x = b^{-\frac{1}{r}}(t^s - a)^{\frac{1}{r}} \Rightarrow dx = \frac{st^{s-1}}{nb^{\frac{1}{r}}} (t^s - a)^{\frac{1}{r}-1} dt, \quad (a+bx^r)^p = t^p.$$

$$\text{Интеграл намуни зеринро мегирад: } \int (a+bx^r)^p dx = \frac{s}{nb^{\frac{1}{r}}} \int t^{p+s-1} (t^s - a)^{\frac{m+1}{s}-1} dt.$$

Агар $\frac{m+1}{n}$ бутун ё сифр бошад, онгоҳ функсияи тахти интеграл раціоналия буда бо усули маълум интегронидани мешавад. Агар $\frac{m+1}{n}$ — касрӣ бошад, онгоҳ интеграл ҳисобшуда аз интеграл додашуда беҳтар нест. Ҳамин тариқ, интеграл додашуда бо гузориши $a+bx^r = t^s$ интегронидани мешавад, агар $\frac{m+1}{n}$ бутун бошад.

Маъриди III. Бигузур $p = \frac{r}{s}$ ва $\frac{m+1}{n}$ — касрӣ бошанд, онгоҳ гузориши $a+bx^r = t^s x^n$ интеграл додашударо ба интеграл $\int x^a(a+bx^r)^p dx = -\frac{sa}{n} \int t^{p+s-1} (t^s - b)^{\left(\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s}\right)-1} dt$ табдил медиҳад. Ифодаи

таҳти интегралҳои тарафи ростии баробарии охирии функсияи ратсионалӣ аст, агар $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s}$ адади бутун ё сифр бошад. Ҳангоми иҷро шудани ин шарт интегралҳои ҳосилшударо бо қондаҳои маълуми интегронидани касрҳои ратсионалӣ иҷро карда шуда бо функсияҳои элементарӣ ифода меёбад. ▲

Ҳамин тариқ, интегралҳои дифференсиали биноми $x^m(a+bx^p)^r dx$ бо гузориши $a+bx^p = t^s x^r$ ба интегронидани функсияҳои ратсионалӣ табдил ёфта бо функсияҳои элементарӣ ифода меёбад, агар $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s}$ адади бутун ё сифр бошад.

Тасдиқоти зерин муҳим аст, ки онро беисбот меорем.

ТЕОРЕМАИ 36.4. Интегралҳои дифференсиалҳои биноми $x^m(a+bx^p)^r dx$ бо функсияҳои элементарӣ ифода намеёбад, агар яке аз ададҳои p , $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ адади бутун набошад.

Ин теорема аз тарафи риёзидони бузурги рус П.Л. Чебишев (1821-1894), исбот карда шудааст.

Мисол. Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ ёфта шавад.

▲ Интегралро дар шакли $\int (1+x^3)^{-\frac{1}{3}} dx$ навишта меёбем, ки $m=0$, $p=-\frac{1}{3}$, $n=4$ ва $\frac{m+1}{n} + p=0$ аст. Мувофиқи теоремаи 36.3 мавриди III ҷой дорад, пас гузориши $1+x^3=t^4 x^4$ мувофиқи мақсад аст. Аз ин ҷо, $t^4=1+x^3 \Rightarrow \Rightarrow 4t^3 dt = 3x^2 dx$ ва $x^4=(t^4-1)^{-\frac{1}{3}}$. Ин қиматҳоро дар интеграл мегузорем:

$$\begin{aligned} \int (1+x^3)^{-\frac{1}{3}} dx &= \int \left(\frac{t^4}{t^4-1} \right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{(-t^3)}{(t^4-1)^{\frac{1}{3}}} dt = \int \frac{(t^4-1)^{\frac{1}{3}}}{(t^4)^{\frac{1}{3}}} \cdot (t^4-1)^{-\frac{1}{3}} (-t^3) dt = \int \frac{t^3 dt}{1-t^4} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^3}+x}{\sqrt[4]{1+x^3}-x} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+x^3}}{x} + C. \end{aligned}$$

4. Интегралҳои намуни $\int \frac{P_1(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Гардчанде гузоришҳои Эйлер интегралҳои намуни $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ ро ба интегронидани функсияҳои рат-

сионалӣ таъдиди диханд ҳам, лекин онҳо ба ҳисобкутиҳои дуру дароз ме-
оранд. Дар амалия тарзҳои дигари интегронидани функсияи
 $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ -ро вохурдан мумкин аст. Бо ин мақсад, $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$
гузошта ва бисёрҷузъӣ будани y^2 -ро ба эътибор гирифта $R(x, y)$ -ро
дар намуни $R(x, y) = R_1(x) + \frac{R_2(x)}{y}$ менависем, ки дар ин ҷо $R_1(x)$ ва $R_2(x)$
функсияҳои ратсионалӣ мебошанд. Азбаски интегралҳои $R_1(x)$ бо фун-
ксияҳои элементарӣ ифода меёбад, пас интегралҳои функсияи $\frac{R_2(x)}{y}$ -ро
ҳисоб намудан кифоя аст. Азбаски ҳагуна касри ратсионалии $R_2(x)$ -ро
ба намуни суммаи бисёрҷузъӣ $P_n(x)$ ва касри ратсионалии дурусти
 $R_3(x)$ навиштан мумкин аст, пас маънаи интегронидани функсияи
 $\frac{R_2(x)}{y}$ -ро ба ҳисоб кардани интегралҳои се намуни зерин иваз намудан
мумкин аст:

$$a) \int \frac{P_1(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}; \quad (36.1)$$

$$b) \int \frac{dx}{(x-a)^r \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad r \in \mathbb{N}; \quad (36.2)$$

$$r) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad p^2 - 4q < 0. \quad (36.3)$$

Ҳангоми ёфтани интегралҳои (36.1) аз формулаи

$$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = P_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (36.4)$$

истифода мебарем, ки дар ин ҷо $P_{n-1}(x)$ -бисёрҷузъӣ дараҷан на зиё-
да аз $n-1$ ва λ -ягон адад. Дар амалия бисёрҷузъӣ $P_{n-1}(x)$ -ро бо
коэффисиентҳои номуайян менависанд. Айвнияти (36.4)-ро дифференси-
ронивда ҳарду тарафи муносибати ҳосилшударо ба $2\sqrt{ax^2 + bx + c}$ зарб зада
меёбем:

$$2P_n(x) = 2P_{n-1}(x)(ax^2 + bx + c) + P_{n-1}(x)(2ax + b) + 2\lambda. \quad (36.5)$$

Коэффисиентҳои назди дараҷаҳои яхшекаи x -ро дар (36.5), баробар на-
муда барои муайян намудани коэффисиентҳои бисёрҷузъӣ $P_{n-1}(x)$ ва
адади λ система ҳосил менамоем. Систекаи ҳосилшударо ҳал намуда ин-

теграл охирини тарафи рости (36.4)-ро бо ёрии гузориши хаття ба интеграл чадвала табдил дода ба мақсад ноил мегардем.

Мисал. Интеграл $J = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ -ро ёбед.

♣ Мувофиқи формулаи (36.5), $P_n(x) = x^2$, $P_{n-1}(x) = Ax + B$ буда айнияти $2x^2 = 2A(x^2 + x + 1) + (Ax + B)(2x + 1) + 2\lambda$ ҳосил мекунем. Аз ин ҷо, $2 = 2A + 2A$, $0 = 2A + A + 2B$, $0 = 2A + B + 2\lambda$. Бинобар ин, $A = 1/2$, $B = -3/4$, $\lambda = -1/8$.

Азбаски
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + C,$$

пас
$$J = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{8}\ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + C. \clubsuit$$

Интеграл (36.2) бо гузориш $t = \frac{1}{x-a}$ ба интеграл намуди (36.1), оварда мешавад. Ба омузиши интеграл (36.3), мегузарем. Агар чуқин адади ω ёфт шавад, ки $\forall x \in \mathbb{R}$ баробарии $ax^2 + bx + c = a(x^2 + px + q)$, яъне $b = ap$, $c = aq$ иҷро шавад, онгоҳ интеграл (36.3) -ро дар намуди комбинатсияи хаттии интегралҳои $J_1 = \int \frac{(ax+p)dx}{(x^2+px+q)^{\frac{1}{2}}}$ ва $J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\frac{1}{2}}}$ ифода кардан мумкин аст. Интеграл J_1 ба интеграл чадвала ва интеграл J_2 бо гузориши Абел

$$u = \left(\sqrt{x^2 + px + q}\right)^{-1} = \frac{2x + p}{2\sqrt{x^2 + px + q}} \quad (36.6)$$

ба интеграл аз бисёрбаъзогӣ оварда мешавад. Агар $b \neq ap$ бошад, гузориши

$$x = \frac{at + \beta}{t + 1} \quad (36.7)$$

истифода бурда мешавад, ки дар ин ҷо α ва β ҳамин тавр интихоб карда мешавад, ки коэффисинентҳои назади t дар себаъзогиҳои квадратии функсияи тахти интеграл ба сифро табдил ёбанд. Дар ин ҳолат, интеграл (36.3) намуди зеринро мегирад:

$$\int \frac{P(t)dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\mu t^2 + \gamma}} \quad (36.8)$$

Дар ин ҷо $P(t)$ — бисёрраъзогии дараҷаи $2k-1$, $\lambda > 0$. Қайд менамоем, ки агар $b=a$, аммо $c \neq a$ бошад, онгоҳ ба ҷои гузориши (36.7), гузориши $x = t - \frac{p}{2}$ — ро истифода бурдан мумкин аст. Барои ҳисоб кардани интеграл (36.3) касри ратсионалии дурустро ба касрҳои содда ҷудо намуда интеграл (36.8) — ро дар намуди комбинатсияи ҳамаи интегралҳои наму-

$$J' = \int \frac{tdt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\mu t^2 + \gamma}} \quad \text{ва} \quad J'' = \int \frac{dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\mu t^2 + \gamma}} \quad m \in \mathbb{N},$$

ифода мекунем. Интеграл J' бо гузориши $u^2 = \mu t^2 + \gamma$ ва интеграл J'' бо гузориши Абел: $v = \frac{\mu t}{\sqrt{\mu t^2 + \gamma}}$ ҳисоб карда мешавад.

§37. ИНТЕГРОНИДАНИ БАЪЗЕ ИФОДАҲОИ ТРИГОНОМЕТРИ.

1. ТЕОРЕМАИ 37.1. Интеграл намуди $\int R(\sin x, \cos x) dx$ бо ёрии функсияҳои элементарӣ ифода меёбад, ки дар ин ҷо $R(u, v)$ — функсияи ратсионалии истиёри аз таъғирёбандаҳои $u = \sin x$, $v = \cos x$ мебошад.

◆ Интеграл додашударо бо гузориши универсалии $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$ ба интегронидани касрҳои ратсионалӣ ҷуғиҷ табдил медиҳем:

$$\begin{aligned} x = 2 \operatorname{arctg} t &\Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Ин қиматҳоро дар интеграл мегузорем:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1 dt.$$

Дар ин ҷо, $R_1(x)$ -касри раціоналия буда интеграл аз он ва ингунаин интегралҳои матлуб бо функсияҳои элементарӣ (теоремаи 35.2) ифода меёбад. ♣

Гузориши $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$, гарчанде барои интегралҳои намуди муоиннашаванда, «универсал»-я бошад ҳам аксар ҳолатҳо ба ҳисоббарориҳои дурудароз меорад. Аз ин рӯ, онро танҳо дар мавриде истифода мебаранд, ки дигар роҳи ҳисоб кардани интегралҳои намуди $\int R(\sin x, \cos x) dx$ -ро наёбанд.

Мисол. Интегралҳои $I = \int \frac{dx}{1+a \cos x}$ ($a \neq 1, a > 0$) ёфта шавад.

♣ Гузориши $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ -ро истифода мебарем, онҳо

$$I = 2 \int \frac{dt}{(a+1)+t^2(1-a)} = \frac{2}{a+1} \int \frac{dt}{1+\frac{1-a}{(a+1)}t^2}$$

Агар $0 < a < 1$ бошад, онҳо

$$I = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \arctg\left(t \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \arctg\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C$$

Дар мавриди $a > 1$ будан

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} t}{1 - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} t} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C$$

2. Интегралҳои намуди $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$ ва $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$ бевосита ҳисоб карда мешаванд, агар функсияҳои тахти интегралро бо формулаҳои зерин табдил диҳем:

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x],$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)].$$

3. Агар функсияи тахти интеграл R яке аз шартҳои

a) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x);$

б) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x);$

в) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

-ро қаноат кунад, онгоҳ мувофиқан гузоришҳои

$$t = \cos x, \quad x \in (0, \pi) \quad t = \operatorname{tg} x \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \bar{t} = \cos 2x, \quad t = \sin x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Интеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$ -ро табдил медиҳад.

4. Дар амалия аксар мавридҳо интегралҳои намуди

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (37.1)$$

вомехуранд ва ҳангоми ҳалли онҳо аз қоидаи зерин истифода мебаранд:

a) агар $m+n$ -ҷуфт бошад, онгоҳ гузориши $t = \operatorname{tg} x$ ё $t = \cos 2x$;

б) агар $m+n$ -тоқ бошад, онгоҳ гузориши $t = \sin x$ ё $t = \cos x$ тадбиқ карда мешавад.

Мисал. Барои $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$, $m=0$, $n=-5$ буда $m+n=-5$ ҷуфт аст, пас $t = \operatorname{tg} x$ мегузорем.

Азбаски $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$, $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + t^2$,

пас ҳосил мекунем:

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \int (1+t^2)^{-2} dt = t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = \operatorname{tg} x \left(1 + \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^4 x \right) + C$$

§38. ҚАЙДҲО ОИДИ ИНТЕГРАЛҲОЕ, КИ БО ФУНКЦИЯҲОИ ЭЛЕМЕНТАРӢ ИФОДА НАМЕЊБАНД

Интеграл номуайян на ҳама вақт бо функсияҳои элементарӣ ифода меѡбанд. Масалан, интеграл аз дифференциалҳои бинумӣ дар мавриде, ки ҳеҷ кадом аз ададҳои p , $\frac{m+1}{n}$, $p + \frac{m+1}{n}$ бутун нестанд бо функсияҳои

элементарӣ ифода намеребад. Ба интегралҳои бо функсияҳои элементарӣ ифода намерефтагӣ интегралҳои зерин дохиланд:

- 1) $\int e^{-x^2} dx$ Интегралҳои Пуассон;
- 2) $\int \sin x^2 dx$ ва $\int \cos x^2 dx$ Интегралҳои Френель;
- 3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ Интегралҳои логарифм;
- 4) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ Интегралҳои синус;
- 5) $\int \frac{\cos x}{x} dx$ Интегралҳои косинус;
- 6) $\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}) dx$ ва $\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}) dx$ Интегралҳои эллипсӣ
(a, b, c, d, e — ададҳои ҳақиқӣ)

ва ғайра. Номин интеграл эллипсӣ ҳангоми ҳал намудани масъалаҳои ро-
стқувии эллипс пайдо шудааст.

Ҳаргуна интегралҳои эллипсӣ бо ёрии гузориши мувофиқ ба ягон аз
интегралҳои зерин оварда мешавад:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{Интегралҳои эллипсӣи чёис 1}$$

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad \text{Интегралҳои эллипсӣи чёис 2}$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{Интегралҳои эллипсӣи чёис 3}$$

дар ин ҷо $0 < k < 1$, h — параметри ихтиёрӣ.

Машҳур барои боби IX

1. Ибтот намоед, ки функсияи $y = \operatorname{sgn} x$ дар $\mathbb{R}$ функсияи ибтидоӣ надорад.
2. Ибтот намоед, ки агар функсияҳои u ва v , $(n+1)$ бор дифференсиро-
нидашаванд бошанд, онгоҳ формулаи умумии интегралӣ аз руи ҳиссаҳо
намуди зеринро дорад:

$$\int u v^{(n-1)} dx = u v^{(n)} - u' v^{(n-1)} + u'' v^{(n-2)} - \dots + (-1)^n [u^{(n)} v - \int u^{(n-1)} dv]$$

3. Бо роҳи табдилдиҳии мувофиқи ифодаҳои таҳти интегралӣ, интегралҳои зеринро ёбед: $\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$.

4. Бо ёрии гузоришҳои тригонометрия (гипербола) интегралҳои зеринро ёбед:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx, \int \sqrt{(x+a)(x+b)} dx, \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx.$$

5. Интегралҳои зеринро ёбед:

$$\int (\arctg x)^2 dx, \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx, \int x^* \sin \alpha x dx.$$

6. Интегралҳои зеринро ёбед:

$$\int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 dx, \int \frac{(x^3 + x + 1) dx}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)^2}, \int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^4 - 1}.$$

7. Бо методи Остроградский интегралҳоро ҳал намоед:

$$\int \frac{x^5 + 2x^4 + 2x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} dx, \int \frac{dx}{(x^4 + 1)^2(1 + x^2)^2}, \int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1}{(1-x)^2(1+x^2)^2} dx.$$

8. Интегралҳоро ёбед:

$$\int \frac{x + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx, \int \frac{3 - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^2 \sqrt{x^2 + x + 1}} dx, \int x \sqrt{x^2 - 2x - 2} dx.$$

9. Нишон диҳед, ки интегралҳои $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ҳангоми $m, n \in \mathbb{Q}$ ба интегралҳои дифференциалҳои бинамӣ оварда мешавад.

10. Искот намоед, ки барои интегралҳои

$$J_{n,m} = \int \sin^n x \cos^m x dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}$$

формулаи рекуррентии зерин ҷой дорад.

$$J_{n,m} = \frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} J_{n-2,m}.$$

11. Интегралҳои зеринро ёбед:

$$\int e^x \cos^2 bx dx, \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}, \int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx, \int x^2 dx, \int \max(1, x^2) dx, \int (1+x) - |1-x| dx$$

Математика ҳамчун назм ва санъати
таъвирӣ зебогии худро дорад.

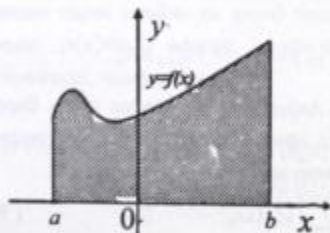
Жуковский

БОБИ X. ИНТЕГРАЛИ МУАЙЯН.

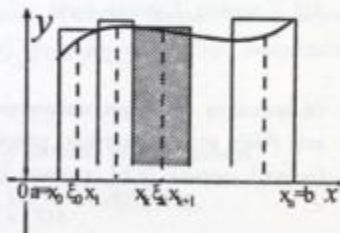
§39. МАФҲУМИ ИНТЕГРАЛИ РИМАН* ВА БАӢЗЕ ШАРТҲОИ ИНТЕГРОНИДАШАВАНДАГИИ ФУНКСИЯҲО.

1. БаӢзе масъалаҳое, ки ба мафҳуми интеграл муайян меоянд.

Ба мафҳуми интеграл муайян аксар масъалаҳои математикӣ, физикӣ, табиатшиносӣ ва ғайра оварда мерасонад. Ҳамаи онҳо ба муайян кардани бузургҳои матлуб бо ёрии гузариши ҳудуди асос карда шудааст. Дар ин



Расми 96



Расми 97

ҷо, мухтасар, методи ҳамаи яқинанд масъалаҳоро меомӯзем.

1) Масъалаи масоҳати трапетсияи қатъата. Бигузор масоҳати фигураи ҳамворӣ

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

ҳисоб карда шавад, ки дар ин ҷо $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ҳамвории координатӣ ва $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ -функсияи ғайри манфӣ. Чуни фигураи трапетсияи қатъата меноманд (расми 96). Масоҳати фигураи $A \subset \mathbb{R}^2$ -ро бо $S(A)$ ишора меку-

* Бернгард Риман (1826-1866) - риёзидони бузурги Олмонӣ.

нем. Ин мафҳумро ҳамин тавр муайян мекунем, ки ҳосилҳои маълуми масоҳат:

1⁰. $S(A) \geq 0$ (ғайри манфӣ будани масоҳат);

2⁰. $S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$ (аддитивия);

3⁰. Агар $A \subset B$ бошад, онгоҳ $S(A) \leq S(B)$ (монотония);

нигоҳ дошта шаванд.

Барои муайян кардани масоҳати трапетсияи T , порчаи $[a; b]$ - ро бо таври ихтиёрӣ ба n қисмҳо бо нуқтаҳои x_k ($k=0, 1, \dots, n-1$) чунон тақсим менамоем:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b,$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad \text{ва} \quad \lambda = \sup\{\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}\}$$

мегузорем. Дар ҳар кадом порчаи $[x_k; x_{k+1}]$ нуқтаи $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$ -ро бо таври ихтиёрӣ гирифта ҳосили зарбҳои $f(\xi_k) \Delta x_k$ -ро тартиб медиҳем, ки масоҳати росткунҷаеро ифода менамоянд, ки асоси $[x_k; x_{k+1}]$ ва баландии $f(\xi_k)$ доранд. Суммаи онҳо

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = f(\xi_0) \Delta x_0 + f(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + f(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1}$$

ба масоҳати «фигураи зинамонанд»-и дар расми 97 оварда шуда баробар аст. Айён аст, ки ҳангоми ихтисот зиёд намудани адади нуқтаҳои тақсимот ($n \rightarrow \infty$) -порчаи $[a; b]$, дарозии λ ба сифр майл мекунад ва ҳудуди

$$S(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \quad (39.1)$$

ро ба сифати масоҳати трапетсияи қарҳата қабул намудан мумкин аст.

2) Масъала онди қори қушваҳои таъғиребанди. Бигузор дар ҳар кадом нуқтаи $x \in [a; b] \subset \mathbb{R}$ қушваи $F(x)$, ки қад-қадн тирн $0x$ равона аст таъсир намояд. Талаб карда мешавад, ки қори қушваи дар қисми роҳи $[a; b]$ муайян шуда ҳисоб карда шавад. Аз қурси физика маълум аст, ки агар F доимӣ бошад, онгоҳ қори матлуб ба $F \cdot (b-a)$ баробар аст. Дар мавридҳои бокимонда ҷудокунии

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$$

гузаронида шуда, нуқтаҳои $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$ -ро ихтиёри интихоб намуда, суммаи

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \Delta x_k = F(\xi_0) \Delta x_0 + F(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + F(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1}$$

-ро дида мебароянд, ки он қимати тақрибии кори матлубро ифода менамоянд.

Ба сифати қимати аниқи кори матлуби A , бузургии зерин қабул карда мешавад:

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \Delta x_k, \quad (39.2)$$

ки дар ин ҷо $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ва $\lambda = \sup\{\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}\}$.

3) Масъала оиди массаи тираки ғайри якҷинса. Бигуздор тираки ростхаттаи борики дарозии l дошта вазъияти порчаи $[0; l]$ -ро дар тире адади гирифта, зичии хаттии он бо функсияи $\rho(x)$ дода шавад. Талаб карда мешавад, ки массаи тирак муайян ва ҳисоб карда шавад. Ҳангоми доими будани зичӣ (яъне $\rho(x) \equiv \rho$), массаи тирак ба $\rho \cdot l$ баробар аст. Дар мавридҳои боқимонда, ҷудокунии

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = l$$

-ро гузаронида, нуқтаҳои $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$ -ро интихоб намуда, суммаи

$$\sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k) \Delta x_k = \rho(\xi_0) \Delta x_0 + \rho(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + \rho(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1}$$

-ро тартиб медиҳем, ки қимати тақрибии массаи матлубро ифода мекунад. Табиист, ки ба сифати қимати аниқи массаи матлуб бузургии зеринро гиравем:

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k) \Delta x_k. \quad (39.3)$$

4) Масъала оиди роҳи ҳаракат. Бигуздор нуқтаи материалӣ дар порчаи $[0; t]$ ҳаракати ростхатаро бо суръати $v(t)$, $t \in [0; t]$ иҷро намояд. Талаб карда мешавад, ки роҳи s -и тайкардаи нуқта дар фосила вақти нишондодашуда ёфта шавад. Ҳангоми доимӣ будани суръат ($v(t) \equiv v$) ин роҳ ба $v \cdot t$ баробар аст. Дар мавридҳои боқимонда ҷудокунии

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n = t$$

-ро гузаронада, нуқтаҳои $\Theta_k \in [x_k; x_{k+1}]$

-ро интихоб наму-

да, суммаи

$$\sum_{k=0}^{n-1} v(\Theta_k) \Delta x_k = v(\Theta_0) \Delta x_0 + v(\Theta_1) \Delta x_1 + \dots + v(\Theta_{n-1}) \Delta x_{n-1}$$

-ро тартиб медиҳем, ки қимати тақрибии роҳи тайкардари ифода менамояд.

Ба сифати қимати аниқи роҳ, ҳудуди зерин қабул карда мешавад:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} v(\Theta_k) \Delta x_k. \quad (39.4)$$

Баробариҳои (39.1)-(39.4) ҳудуди сумаҳоеро ифода менамоянд, ки бо қонуни яохела сохта шудаанд. Таърифи шартҳои мавҷудияти чунин сумаҳо, тараҳҳои ҳисобкунӣ ва ҳосилотҳои онҳо мазмуни назарияи интегралӣ муайяни Риманро ташвиш медиҳад.

2. *Таърифи интегралӣ муайян.* Бигузор $-\infty < a < b < +\infty$ бошад.

ТАЪРИФИ 39.1. Чудокунӣ порчаи $[a; b]$ гуфта маҷмӯи нуқтаҳои $T = \{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\}$ -ро меноманд, ки нобаробариҳои зеринро қаноат менамояд:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$$

Порчаҳои

$$\Delta_0 = [x_0; x_1], \Delta_1 = [x_1; x_2], \dots, \Delta_k = [x_k; x_{k+1}], \dots, \Delta_n = [x_n; x_n]$$

порчаҳои чудокунӣ ном доранд. Дарозии порчаи k -уми чудокуниро бо $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ишора намуда адади мусбати $\lambda = \lambda(T) = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}\}$ -ро қорӣ менамоем, ки параметр ϵ λ -чудокунӣ ниҳоят хурди T ном дорад.

ТАЪРИФИ 39.2. Чудокунӣ порчаи $[a; b]$ бо нуқтаҳои қайд шуда гуфта ҷуфти (T, ξ) -ро меноманд, ки дар ин ҷо $T = \{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\}$ -чудокунӣ, $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n\}$ -маҷмӯи нуқтаҳои $\xi_k \in \Delta_k = [x_k; x_{k+1}]$, $(k=0, 1, \dots, n-1)$ мебошанд. Чудокунӣ ниҳоят хурд бо нуқтаҳои қайдшудаи (T, ξ) гуфта λ -чудокунӣ ниҳоят хурди T -ро мегуянд.

Маҷмӯи ҳамаи ҷуфтҳои (T, ξ) -порчаи $[a; b]$ -ро бо P ишора мекунем. Дар маҷмӯи P ягон базаи B -ро муайян мекунем, ки дар он ҷа аз руи он ҳудуд мегирем.

ЛЕММАИ 39.1. Чамгъи $B = \{B_\alpha | \alpha > 0\}$ -и маҷмуи $B_\alpha = \{(T, \xi) \in P | \lambda(T) < \alpha\}$ -база мебошад.

▲ Дар ҳақиқат, $\forall \alpha > 0$; $B_\alpha \neq \emptyset$, ҷунки бо параметри аз d хурд вучуд дорад. Барои $0 < \alpha < \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ муносибати $B_\alpha \subset B_{\alpha_1} \subset B_{\alpha_2}$ иҷрошаванда аст. Дар оянда ин базаро бо рамзи " $\lambda(T) \rightarrow 0$ " ё " $\lambda \rightarrow 0$ " ишора мекунем. ▲

ТАЪРИФИ 39.3. Бигузор функсияи $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ ва (T, ξ) -ҷудокунини порчаи $[a; b]$ бо нуқтаҳои қайдшуда бошад. Суммаи

$$\sigma(f; T, \xi) = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \quad (39.5)$$

-ро суммаи интегралӣи функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a; b]$, ки аз рӯи ҷудокунини (T, ξ) сохта шудааст, меномем.

Дар ин таъриф, бо $\mathbb{C}$ -маҷмуи ададҳои комплексӣ ишора карда шудааст. Ҳамин тариқ, шарт карда мешавад, ки функсияи $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ қиматҳои комплексӣ дорад. Азбаски $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ аст, пас дар таърифи 39.3 мавриди $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ низ дохил аст, яъне мавриде, ки $f(x)$ -функсияи ҳақиқӣ аст. Таърифи 39.3 барои функсияҳои намуни $f: [a; b] \rightarrow A$ маъно дорад, ки дар ин ҷо A -фазои векторӣ хатин ихтиёрӣ дар майдони $\mathbb{R}$ мебошад. Бинобар ин, таърифи интегралӣ Риман барои баъзе классҳои функсияҳо, ки қиматҳои векторанд, маъно дорад.

Барои соддагӣ, мо дар ин ҷо, танҳо барои функсияҳои ададӣ (ҳақиқӣ ё комплексӣ) маҳдуд мешавем.

Ҳангоми қайд шудани функсияи $f(x)$ суммаи интегралӣи $\sigma(f; T, \xi)$ функсияи аз ҷудокунини $(T, \xi) \in \mathbb{R}$ мебошад. Азбаски дар маҷмуи P базаси $\lambda(T) \rightarrow 0$ вучуд дорад, пас дар бораи ҳудуди функсияи $\sigma(f; T, \xi)$ аз рӯи ин база суҳан рондан мумкин аст.

ТАЪРИФИ 39.4. Функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ бо маънои Риман интегровидашаванда ном дорад, агар ҳудуди функсияи $\sigma(f; T, \xi)$ аз рӯи базаси $\lambda(T) \rightarrow 0$ мавҷуд буда ба ягон адади J баробар бошад:

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(f; T, \xi) = J \quad (39.6)$$

Аз ин ҷо рақам $\int_a^b f(x)dx$ ишора шуда интеграл миайини Рюман функсия $f(x)$ аз ҳудудҳои a то b ном дорад:

$$J = \int_a^b f(x)dx$$

Агар ҳудуди (39.6) вуҷуд надошта бошад, ғайри вуҷуд буда адад набошад, онгоҳ функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a,b]$ бо маънои Рюман интегрониданашаванда ҳисобида мешавад. Таърифи ҳудуди (39.6)-ро бо «забони ϵ - δ » менависем. Аз ин ҷо вуҷуд дорад ($\epsilon \in \mathbb{C}$ $\epsilon \in \mathbb{R}$), ки

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (T, \xi) \in P: \sigma(f; T, \xi) < \delta \Rightarrow |\sigma(f; T, \xi) - J| < \epsilon. \quad (39.7)$$

Ҳамин тарик, мувофиқи таъриф:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(f; T, \xi) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \quad (39.8)$$

ҚАЙД. Аз таърифи интеграл миайини маълум мешавад, ки қимати он ҳамагун ҳудуди суммаи интеграл аз тарзи ҷудокунӣи фосилаи интегронӣ ва аз интиҳоби нуқтаҳои ξ_k дар дохили ҳар қадам порчаҳои ҷудокунӣи вобастагӣ надорад.

Ақсуни яқинд машҳорои меорем, ки таърифи интеграл миайинро мукаммали метардонанд.

Мисоли 1. Бигузор дар порчаи $[a,b]$ функсияи $f(x) = C = \text{const}$ бошад. Нишон медиҳем, ки ин функсия дар порчаи $[a,b]$ интегрониданашаванда буда

$$\int_a^b C dx = C \cdot (b-a) \quad (39.9)$$

▲ Барои ихтиёри ҷудокунӣ бо нуқтаҳои (T, ξ) ҳисна мекунем:

$$\begin{aligned} \sigma(f; T, \xi) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} C \Delta x_k = C \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \\ &= C(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_n - x_{n-1}) = C(x_n - x_0) = C(b-a) \end{aligned}$$

Аз ин ҷо, дар асоси теорема онди ҳудуди дониш меёбем:

$$\int_a^b C dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(C; T, \xi) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} C(b-a) = C \cdot (b-a) \quad \blacktriangle$$

Дар ҳолати хусусӣ, агар $c=1$ бошад, онгоҳ

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(1; T, \xi) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (b-a) = b-a.$$

Мисоли 2. Аз таърифи интегралӣ муайян истифода бурда интегралӣ $\int_a^b x dx$ ҳисоб карда шавад.

Бигузор $T = \{x_k, k=0, 1, 2, \dots, n-1\}$ - ҷӯдоқунӣ иштиёри порчаи $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$$

ва $\xi_k = [x_k + x_{k+1}]/2$ бошад, онгоҳ $\xi_k \in \Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$ ва барои $k=0, 1, 2, \dots, n$ баробарии зерин иҷрошаванда аст:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma(x; T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_k + x_{k+1})(x_k - x_{k+1})}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) = \\ &= \frac{1}{2} [(x_1^2 - x_0^2) + (x_2^2 - x_1^2) + (x_3^2 - x_2^2) + \dots + (x_n^2 - x_{n-1}^2)] = \\ &= \frac{1}{2} (x_n^2 - x_0^2) = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \end{aligned}$$

Ҳангоми $\lambda \rightarrow 0$ ҳудуд гирифта ҳосил мекунем:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \Delta x_k = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

ё ки

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2} (b^2 - a^2). \blacktriangle$$

Мисоли 3. Интегралӣ $\int_a^b x^\alpha dx$ ($\alpha \neq -1, a > 0, b > a$) ҳисоб карда шавад.

$\blacktriangle T = \{x_k, k=0, 1, 2, \dots, n-1\}$ - ҷӯдоқунӣ порчаи $[a, b]$ -ро тавре мегузаронем, ки нуқтаҳои тақсимои x_k прогрессияи геометрии зеринро ташкил диҳанд:

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^k, aq^{k+1}, \dots, aq^n = b.$$

Маҳраҷи прогрессия ба зерин баробар аст:

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} > 1.$$

Дарозии сегментҳои $\Delta x_k = [x_k, x_{k+1}] = [aq^k, aq^{k+1}]$ барои қиматҳои $k=0, 1, 2, \dots, n$ ба зери баробар аст.

$$aq^{k+1} - aq^k = aq^k(q-1)$$

Ба сифати нуқтаҳои ξ_k нуқтаҳои тарафи рости сегментҳои Δx_k ($\xi_k = aq^{k+1}$) - ро интихоб карда қимати функсияи $f(x) = x^\alpha$ -ро дар ин нуқтаҳо ҳисоб мекунем:

$$(aq)^{\alpha}, (aq^2)^{\alpha}, \dots, (aq^n)^{\alpha}, (aq^{n+1})^{\alpha}, \dots, (aq^n)^{\alpha}.$$

Суммаи интегралиро тартиб медиҳем:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (aq^{k+1})^{\alpha} aq^k (q-1) = (aq)^{\alpha} a(q-1) + (aq^2)^{\alpha} aq(q-1) + \\ &+ \dots + (aq^n)^{\alpha} aq^{n-1}(q-1) = (q-1)a^{\alpha+1}q^{\alpha} [1 + q^{\alpha+1} + \dots + q^{(n-1)(\alpha+1)}] = \\ &= a^{\alpha+1}q^{\alpha}(q-1) \frac{q^{(n-1)(\alpha+1)} - 1}{q^{\alpha+1} - 1} = a^{\alpha+1}q^{\alpha} \frac{(q^{n-1})^{\alpha+1} - 1}{q^{\alpha} + q^{\alpha-1} + \dots + 1} = \\ &= a^{\alpha+1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha+1} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\alpha}{n}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\alpha-1}{n}} + \dots + 1}.\end{aligned}$$

Ҳангоми $\lambda \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ҳудуд мегирем:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\alpha+1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha+1} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\alpha}{n}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\alpha-1}{n}} + \dots + 1} = \\ &= a^{\alpha+1} \cdot \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1} = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha + 1}.\end{aligned}$$

Ҳамин тариқ:

$$\int_a^b x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \quad \blacktriangle$$

Мисоли 4. Интеграли $\int_a^b \sin x dx$ ҳисоб карда шавад.

♠ Порчаи $[a, b]$ -ро ба n қисмҳои баробар:

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, \dots, x_n = a + n\Delta x = b$$

тақсим мекунем, онгоҳ $\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \Delta x$.

Ба сифати нуқтаҳои ξ_k нуқтаи охири ростии порчаи $[x_k; x_{k+1}] = [a + k\Delta x; a + (k+1)\Delta x]$ -ро интихоб намуда қимати функсияро дар ин нуқта ҳисоб мекунем:

$$f(\xi_k) = \sin \xi_k = \sin[a + (k+1)\Delta x]$$

Суммаи интегралро тартиб медиҳем:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sin[a + (k+1)\Delta x] \Delta x = \\ &= \Delta x [\sin(a + \Delta x) + \sin(a + 2\Delta x) + \dots + \sin(a + n\Delta x)] \end{aligned}$$

Азбаски

$$\sin(a + k\Delta x) = \frac{1}{2\sin \frac{\Delta x}{2}} \left[\cos\left(a + \frac{2k-1}{2}\Delta x\right) - \cos\left(a + \frac{2k+1}{2}\Delta x\right) \right],$$

пас барои σ ҳосил мекунем:

$$\sigma = \frac{\Delta x}{2\sin \frac{\Delta x}{2}} \left[\cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right) - \cos\left(a + n\Delta x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right] = \frac{\Delta x}{2\sin \frac{\Delta x}{2}} \left[\cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right) - \cos\left(b + \frac{\Delta x}{2}\right) \right].$$

Ҳангоми $\Delta x \rightarrow 0$ ба ҳудуд гузашта меёбем:

$$\int_a^b \sin x dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{2\sin \frac{\Delta x}{2}} \left[\cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right) - \cos\left(b + \frac{\Delta x}{2}\right) \right] = \cos a - \cos b. \spadesuit$$

3. Баъзе шартҳои интегронидашавандагии функсияҳо.

Бо $\mathcal{R}[a; b]$ -маҷмуи ҳамаи функсияҳои дар порчаи $[a; b]$ бо маъноси Риман интегронидашаванада ва бо $\mathcal{M}[a; b]$ -маҷмуи ҳамаи функсияҳои дар порчаи $[a; b]$ маҳдудро ишора мекунем.

ТЕОРЕМАИ 39.1 (шарти зарури). Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бо маънои Риман интегронидашаванда бошад, онгоҳ вай дар ин порча маҳдуд аст, яъне

$$f(x) \in \mathcal{R}[a;b] \Rightarrow f(x) \in M[a;b]$$

♣ Бигузор $f(x) \in \mathcal{R}[a;b]$, яъне ҳудуди (39.6) (адади J) вучуд дошта бошад. Аз ин ҷо аз руи хосиятҳои умумии ҳудудҳо ҳулоса мебарояд, ки суммаи интегралҳои $\sigma(f; T, \xi)$, ҳангоми $\lambda(T) \rightarrow 0$ дар марра маҳдуд аст, яъне

$$\exists \delta > 0, \exists M > 0, \forall (T, \xi) \in P: \lambda(T) < \delta \Rightarrow |\sigma(f; T, \xi)| \leq M \quad (39.10)$$

Ададҳои дар ин ҷо дохилбудаи σ ва M -ро қайд намуда, шарт мекунем, ки функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ маҳдуд нест. Онгоҳ барои ихтиёри ҷудокунии $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ аққалан як порчаи $[x_k; x_{k+1}]$ ин ҷудокуния ёфт мешавад, ки дар он $f(x)$ маҳдуд нест. Ҷудокунии T -ро ҳамин тавр ба қайд мегирем, ки $\lambda(T) < \delta$ монда нуқтаҳои қайдшудаи $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$ -ро ба ғайр аз як нуқтаи $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$ мегирем. Азбаски функсияи $f(x)$ дар порчаи $[x_k; x_{k+1}]$ маҳдуд нест, пас нуқтаи ξ_k -ро тавре мегирем, ки

$$|f(\xi_k)| > \frac{1}{\Delta x_k} \left(M + \left| \sum_{\substack{i=0 \\ (i \neq k)}}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \right| \right) \quad (39.11)$$

Бо чунин интихоби нуқтаи $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$ мувофиқи нобаробарии (39.11) ба модули суммаи интегралҳои $\sigma(f; T, \xi)$ аз поён баҳо медиҳем:

$$|\sigma(f; T, \xi)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \right| = \left| f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{\substack{i=0 \\ (i \neq k)}}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \right| \geq |f(\xi_k)| \Delta x_k - \left| \sum_{\substack{i=0 \\ (i \neq k)}}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \right| > M$$

Ҳамин тариқ, $|\sigma(f; T, \xi)| > M$ ҳосил намудем, ки ба нобаробарии (39.10) муқобил аст. ♣

ТЕОРЕМАИ 39.2. (Критерияи Коши) интегронидашавандагии функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бо маънои Риман ба шарти зерин баробарқувва аст:

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0, \exists M > 0, \forall (T, \xi), (T', \xi') \in P: \lambda(T) < \delta, \lambda(T') < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow |\sigma(f; T, \xi) - \sigma(f; T', \xi')| < \varepsilon \end{aligned} \quad (39.12)$$

♣ Барои исбот критерияи Коширо онди мавҷудияти ҳудуди охирноки $\sigma(f; T, \xi)$ аз руи базаи « $\lambda(T) \rightarrow 0$ » тадбиқ намудан кифоя аст. ♣

Критерияи Коширо мстифода бурда нишон медиҳем, ки функцияҳои дар порча маҳдуд вучуд доранд, ки дар ин порча бо маънои Риман интегронидашаванда нестанд.

Масалан, функцияи Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ ратсионалӣ,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ ирратсионалӣ,} \end{cases}$$

ро дида мебароем.

Адади $\varepsilon \in [0; b-a]$, яъне $0 < \varepsilon < b-a$ -ро гирифта ҷудокунӣ ихтиёрии

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$$

-ро қайд менамоем. Нуқтаҳои қайдшудаи ξ -ро гуногун интихоб мекунем.

Бигузор $\xi' = \{\xi'_0, \xi'_1, \dots, \xi'_{n-1}\}$ - аз нуқтаҳои ратсионалӣ ва $\xi'' = \{\xi''_0, \xi''_1, \dots, \xi''_{n-1}\}$ аз нуқтаҳои ирратсионалӣ иборат бошанд, онгоҳ

$$|\sigma(f; T, \xi') - \sigma(f; T, \xi'')| = \left| \sum_{i=1}^{n-1} (D(\xi'_i) - D(\xi''_i)) \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

Азбаски $b-a > \varepsilon$ пас нобаробарии (39.12) барои ихтиёри ҷуфтҳои (T, ξ') , (T, ξ'') иҷро шуда наметавонад. Бинобар ин интеграл $\int_a^b D(x) dx$ вучуд надорад.

§40. ШАРТИ КИФОЯГИИ ИНТЕГРОНИДАШАВАНДАГИ ВА МУҲИМТАРИН КЛАССИ ФУНКЦИЯҲОИ ИНТЕГРОНИДАШАВАНДА

1. *Шарти кифоягии интегронидашавандагӣ.* Бигузор

$$T = \{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\} \quad (40.1)$$

ҷудокунӣ порчаи $[a; b]$ бошад. Агар барои ҷудокунӣҳои T' ва T шарти $T' \supset T$ иҷро шавад, онгоҳ мегуем, ки ҷудокунӣи T' давоми ҷудокунӣи T аст. агар $T' \neq T$ бошад, онгоҳ ҷудокунӣи T' -ро аз ҷудокунӣи T бо илова

кардани нуқтаҳои нави порча $[a;b]$ ҳосил кардан мумкин аст. Ҳангоми созиши ҷудокунии T' , ки давоми ҷудокунии T аст, баъзе порчаҳои $\Delta_i \in [x_i; x_{i+1}]$ -ро чунин ҷудо намудан лозим меояд:

$$x_i = x_{i0} < x_{i1} < x_{i2} < \dots < x_{in_i} = x_{i+1}$$

Бинобар ин, нуқтаҳои ҷудокунии $T' \supset T$ -ро бо ду индексҳои x_{ik} ишора намудан қулай аст. Дар ин ҷо, индекси якуми i рақами порчаи Δ_i , ки нуқтаи x_{ik} дар он ҳабида, индекси дуюм k тартиби рақами нуқтаи x_{ik} -ро дар порчаи Δ_i ифода мекунад. Ҳамин тариқ,

$$T' = \{x_{ik} \mid 0 \leq i \leq n-1; 0 \leq k \leq n_i-1\} \quad (40.2)$$

ва $\Delta_{ik} \in [x_{ik}; x_{i,k+1}]$, $\Delta x_{ik} = x_{i,k+1} - x_{ik}$, гузошта ҳосил мекунем:

$$\Delta x_i = \Delta x_{i0} + \Delta x_{i1} + \dots + \Delta x_{i,n_i-1} \quad (40.3)$$

Мисоли ҷудокуние, ки давоми ҳар кадом аз ҷудокуниҳои T' ва T'' порчаи $[a;b]$ аст, ҷудокунии $\tilde{T} = T' \cup T''$ мебошад, ки аз якҷоякунии маҷмуҳои T' ва T'' ташкил ёфтааст. Чун пештара, бо рамзи $\omega(f; E)$ -лапиши функсияи $f(x)$ -ро дар маҷмуи E ишора менамоем:

$$\omega(f; E) := \sup_{x' \in E} f(x') - \inf_{x'' \in E} f(x'') = \sup_{x' \in E} f(x') - \inf_{x'' \in E} f(x'') \quad (40.4)$$

ТЕОРЕМАИ 40.1. (Шарти кифоягии интегронидашавандагӣ). Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ маҳдуд буда, шарти зерин иҷро шавад:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (T, \xi) \in P: \lambda(T) < \delta \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i < \varepsilon, \quad (40.5)$$

онгоҳ функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бо маънои Риман интегронидашаванда аст.

♠ Барои исбот, қаноат ҳосил намудан кифоя аст, ки ҳангоми иҷро шудани шарти теорема, шарти критерияи Коши иҷрошаванда аст:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (T, \xi), (\tilde{T}, \tilde{\xi}) \in P: \lambda(T) < \delta, \lambda(\tilde{T}) < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow |\sigma(f; T, \xi) - \sigma(f; \tilde{T}, \tilde{\xi})| < \varepsilon \end{aligned} \quad (40.6)$$

Бо ин мақсад, адади $\varepsilon > 0$ -ро гирифта мувофиқи (40.5) аз руи адади $\varepsilon/2$, адади $\delta > 0$ -ро тавре меёбем, ки барои ихтиёри ду ҷудокуниҳои (T, ξ) ва $(\tilde{T}, \tilde{\xi})$, ки барои онҳо $\lambda(T) < \delta, \lambda(\tilde{T}) < \delta$ аст, нобаробарии зерин иҷро шавад.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f; \tilde{\Delta}_i) \tilde{\Delta} x_i < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (40.5^1)$$

Дар ин ҷо, барои ҷудокунии T ишораҳои муқарарӣ, ва барои $\tilde{T}$ нуқтаҳо бо $\tilde{x}_i$ порчаҳо бо $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}] = \tilde{\Delta}_i$ ва дарозии онҳо бо $\tilde{\Delta} x_i$ ишора шудаанд.

Бигузор (T', ξ') -ҷудокунии ихтиёрии дигаре бошад, ки шартҳои $T' \supset T$ -ро қаноат кунад. Барои ҷудокунии T' ишораҳои дар формулаҳои (40.2) ва (40.3) нишон додашударо иҷро намуда ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} |\sigma(f; T, \xi) - \sigma(f; T', \xi')| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n_i-1} f(\xi_{ik}) \Delta x_{ik} \right| = \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \sum_{k=0}^{n_i-1} \Delta x_{ik} - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n_i-1} f(\xi_{ik}) \Delta x_{ik} \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n_i-1} (f(\xi_i) - f(\xi_{ik})) \Delta x_{ik} \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n_i-1} |f(\xi_i) - f(\xi_{ik})| \Delta x_{ik} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n_i-1} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_{ik} = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_i) \sum_{k=0}^{n_i-1} \Delta x_{ik} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Дар ин ҷо, нобаробарии $|f(\xi_i) - f(\xi_{ik})| \leq \omega(f; \Delta_i)$ истифода шуд, ки дурустии он аз шартҳои $\xi_i, \xi_{ik} \in \Delta_i$ мебарояд. Ҳамин тариқ, баҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$|\sigma(f; T, \xi) - \sigma(f; T', \xi')| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (40.7)$$

Айнан, агар $T' \supset \tilde{T}$ ва $\lambda(\tilde{T}) < \delta$ бошад, онгоҳ

$$|\sigma(f; \tilde{T}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; T', \xi')| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (40.7^1)$$

Акнун, ба сифати ҷудокунии T' ҷудокунии $T' = T \cup \tilde{T}$ -ро мегирем, онгоҳ $T' \supset T$ ва $T' \supset \tilde{T}$ ва ҳангоми $\lambda(T) < \delta$ ва $\lambda(\tilde{T}) < \delta$ ҳар ду нобаробариҳои (40.7) ва (40.7¹) иҷрошаванда мебошанд ва дар асоси онҳо ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned}
& |\sigma(f; T, \xi) - \sigma(f; \tilde{T}, \tilde{\xi})| \leq \\
& \leq |\sigma(f; T, \xi) - \sigma(f; T', \xi')| + |\sigma(f; T', \xi') - \sigma(f; \tilde{T}, \tilde{\xi})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Аввал ва охири онро гирифта ба дурустии (40.6) қаноат ҳосил мекунем. ♣

2. *Мухимтарин классии функцияҳои интегронидашаванда* -ро бо якчанд натиҷаҳо аз теоремаи 40.1 медиҳем.

Натиҷаи 40.1. Агар функцияи $f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ бефосила бошад, онгоҳ вай дар ин порча бо маънои Риман интегронидашаванда аст.

ҚАЙД. Агар бо $C[a; b]$ -маҷмуи ҳамаи функцияҳои бефосиларо дар $[a; b]$ ишора намоем, онгоҳ натиҷаи 40.4 -ро, мухтасар, чунин навиштан мумкин аст:

$$f \in C[a; b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a; b]$$

Акнун ба исботи натиҷаи 40.1 мегузарем.

♣ Агар функцияи $f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ бефосила бошад, онгоҳ дар ин ҷо маҳдуд аст ва шарти зарурии интегронидашавандагӣ иҷро мешавад. Мувофиқи теоремаи Кантор функцияи $f(x)$ дар $[a; b]$ мунтазам наздикшаванда аст, яъне

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in [a, b]: |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

аз ин ҷо, барои ҳамаи қиматҳои $x', x'' \in [a, b]$, ки $|x' - x''| < \delta$ аст, $\sup$ гирифта шарт мунтазам бефосилагиро дар шакли зерин менависем:

$$\omega(f; \Delta) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \text{ ки дар ин ҷо } \Delta \subset [a; b] \text{ -порчаи ихтиёриест, ки дарозииаш}$$

аз δ зиёд нест.

Бигузор $(T; \xi)$ -ҷудокунии ихтиёрии порчаи $[a; b]$ бо шарт $\lambda(T) < \delta$ бошад, онгоҳ

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Аввал ва охири ин нобаробари дурустии (40.5) -ро нишон медиҳад. ♣

Натиҷаи 40.2. Агар функцияи $f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ маҳдуд буда, дар

ҳамаи порчаи $[a;b]$ ба ғайр аз миқдори охиноки нуқтаҳо бифосила бошад, онгоҳ вай дар порчаи $[a;b]$ интегронидашаванда аст.

♠ Бигузур k -миқдори нуқтаҳои каниши функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бошад. $M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ мегузорем. Айён аст, ки $0 < M < +\infty$ ва $k \geq 1$ аст.

Адади $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{16MK}$ гирифта, атрофи $(x_\mu - \delta_1; x_\mu + \delta_1)$ радиуси δ_1 доштаи ҳар кадом k нуқтаҳои каниши x_μ функсияи $f(x)$ -ро месозем. Агар аз порчаи $[a;b]$ якчоякунии ҳамаи ин атрофҳоро гирифта партоем, онгоҳ маҷмуи сарбастае боқи мемонад, ки аз миқдори охиноки порчаҳои ҷуфт-ҷуфт якдигарро набуранда иборат аст. Дар ҳар кадом аз ин порчаҳо функсияи $f(x)$ бифосила буда мувофиқи теоремаи Кантор мунтазам бифосила низ мебошад. Азбаски порчаҳо миқдорашон охинок мебошад, пас дар якчоякунии онҳо $f(x)$ мунтазам бифосила мебошад. Бинобар ин,

$$\exists \delta_2 : \omega(f; \Delta) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

ки дар ин ҷо Δ порчаи ихтиёрие, ки дарозияш аз δ_2 хурд аст. $\delta := \inf\{\delta_1, \delta_2\}$ гузошта, ихтиёри ҷудокунии $(T; \xi)$ порчаи $[a;b]$ -ро бо шартти $\lambda(T) < \delta$ мегирем. Барои он ҳосил мекунем:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i = \sum' \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i + \sum'' \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i, \quad (40.9)$$

ки дар ин ҷо, суммаи $\sum'$ -он ҷамъшавандаҳоеро дар худ дорад, ки барои онҳо порчаҳои Δ_i бо δ_1 -атрофҳои нуқтаҳои каниши сохташуда, бурриш надоранд, суммаи $\sum''$ -ҳамаи ҷамъшавандаҳои боқимондари дар худ дорад. Барои суммаи $\sum'$ баҳои зерин ҳосил мекунем:

$$\sum' \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum' \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} \quad (40.10)$$

Барои баҳои суммаи дуюм шартти $\omega(f; \Delta_i) < 2M$ -ро ба эътибор гирифта ба суммаи дарозии порчаҳои Δ_i , ки бо δ_1 -атрофҳои нуқтаҳои каниш, нуқтаҳои умумӣ доранд, баҳо медиҳем. Вай аз адади зерин зиёд нест.

$$2\delta_1 k + 2\delta k \leq 4k\delta_1 < 4k \cdot \frac{\varepsilon}{16MK} = \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Аз ин ҷо

$$\sum'' \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i \leq 2M \sum'' \Delta x_i < 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (40.10)$$

Аз нобаробарии (40.10) ва (40.11) мебарояд:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i < \varepsilon. \spadesuit$$

Аз тарзи исботи натиҷа маълум мешавад, ки таъғирёбии қимати функсияи дар миқдори охиноки нуқтаҳо ба мавҷудият ва бузургии интеграл таъсир надорад. Аз ин ҷо, хулоса баровардан мумкин аст, ки функсияи дар порча, ба ғайр аз миқдори охиноки нуқтаҳо, бефосила интегронидашаванда аст, агар вай дар худ ин нуқтаҳо муайян набошад. Масалан,

интеграл $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} dx$ вуҷуд дорад.

Натиҷаи 40.3. Агар функсияи $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ дар порчаи $[a; b]$ монотон бошад, онгоҳ вай дар ин порча интегронидашаванда аст.

♠ Бигузор $a \leq x \leq b$ бошад, онгоҳ мувофиқи шарти монотония $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ ё $f(a) \geq f(x) \geq f(b)$ мебошад. Дар ҳама ҳолатҳо, $|f(x)| \leq \sup\{|f(a)|, |f(b)|\}$, бигузори $f(x)$ дар $[a; b]$ маҳдуд аст. Агар $|f(b) - f(a)| = 0$ бошад, онгоҳ функсияи $f(x)$ доимӣ буда интегронидашаванда аст. Бигузор $|f(b) - f(a)| > 0$.

Адади $\varepsilon > 0$ -ро гирифта $\delta = \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|}$ мегузорем. Дар асоси монотон будани функсияи $f(x)$, барои $(T; \xi)$ -ҷудокунии порчаи $[a; b]$ бо шарти $\lambda(T) < \delta$, ҳосил мекунем:

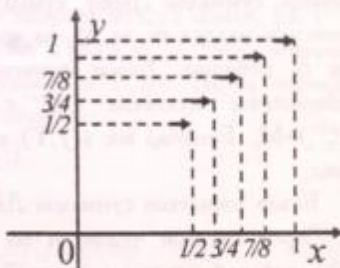
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_k) \Delta x_k &= \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \\ &= \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \\ &= \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|} |f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})| = \\ &= \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|} |f(b) - f(a)| = \varepsilon \end{aligned}$$

Ҳамин тариқ, $\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_k) \Delta x_k < \varepsilon$ ва иҷрон нобаробарии (40.5)-ро

таъмин менамоянд. ♣

ҚАЙД. Функцияи дар порча монотон, маҷмун беохирӣ нуқтаҳои қаниш низ дошта метавонад. Масалан, функцияи $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ки бо баробариҳои зерин

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{агар } 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ \frac{3}{4}, & \text{агар } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}; \\ \frac{7}{8}, & \text{агар } \frac{3}{4} \leq x < \frac{7}{8}; \\ \frac{2^n - 1}{2^n}, & \text{агар } \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} \leq x < \frac{2^n - 1}{2^n}; \\ 1, & \text{агар } x = 1, \end{cases}$$



Расми 98

муайян шудааст (расми 98), дар порчаи $[0; 1]$ камнашуда дар нуқтаҳои $2^{-i}/2^n$, $n \in \mathbb{N}$ қаниш дорад ва мувофиқи натиҷаи 40.3 дар $[0; 1]$ интегронидашаванда аст.

§41. СУММАҲОИ ДАРБУ*. БАЪЗЕ КРИТЕРИЯҲОИ ИНТЕГРОНИДАШАВАНДАГӢ.

1. Мафҳуми суммаҳои Дарбу ва хосиятҳои он. Бигузор $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ функцияи ҳақиқии маҳдуд ва $T = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ -ҷудокунини порчаи $[a; b]$ бошад. Ишораҳои

$$m_i := \inf_{x \in \Delta_i} \{f(x)\}, \quad M_i := \sup_{x \in \Delta_i} \{f(x)\} \quad (41.1)$$

* Г. Дарбу (1842-1917) — резиденти франсия.

чорӣ намуна таърифи зеринро меорем:

ТАЪРИФИ 41.1. Суммаҳои поёни ва болои Дарбу-и функсияи маҳдуди $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ барои ҷудокунии T гуфта мувофиқан суммаҳои зеринро меноманд:

$$s(f, T) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad S(f, T) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i, \quad (41.2)$$

Умуман, суммаҳои Дарбу, суммаҳои интегралӣ нестанд, чунки барои функсияи маҳдуд m_i ва M_i на ҳама вақт қимати функсияҳо дар порчаи Δ_i мебошад. Барои функсияҳои бефосила мувофиқи теоремаи Бейерштрасс нуқтаҳои $\xi'_i, \xi''_i \in \Delta_i$ вуҷуд доранд, ки $f(\xi'_i) = m_i$, $f(\xi''_i) = M_i$. Бинобар ин, $s(f, T)$ ва $S(f, T)$ суммаҳои интегралӣ мебошанд.

Баъзе хосиятҳои суммаҳои Дарбуро меомӯзем.

1^0 . Барои ихтиёри ҷудокунӣ бо нуқтаҳои қайдшудаи $(T; \xi)$ порчаи $[a; b]$, нобаробарии зерин иҷрошавандаанд.

$$s(f, T) \leq \sigma(f; T, \xi) \leq S(f, T), \quad (41.3)$$

ки дар ин ҷо

$$s(f, T) = \inf_{\xi} \sigma(f; T, \xi), \quad S(f, T) = \sup_{\xi} \sigma(f; T, \xi). \quad (41.3)$$

Воқеан, $\inf$ ва $\sup$ аз руи ҳаман нуқтаҳои қайдшуда гирифта мешавад.

▲ Нобаробарии $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ -ро ба Δx_i зарб намуда аз руи индекси i аз 0 то $(n-1)$ суммиронида (41.3) -ро ҳосил мекунем. Адади $\varepsilon > 0$ -ро гирифта барои ҳар кадом i нуқтаи $\xi_i \in \Delta_i$ -ро тавре интихоб мекунем, ки нобаробарии зерин иҷро шавад.

$$f(\xi_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} \Leftrightarrow M_i - f(\xi_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Бо чунин интихоби нуқтаҳои қайдшуда нобаробарии зерин иҷро мешавад:

$$S(f, T) - \sigma(f; T, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - f(\xi_i)) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon,$$

яъне $\sigma(f; T, \xi) > S(f, T) - \varepsilon$. Бинобар ин

$$S(f, T) = \sup_{\xi} \sigma(f; T, \xi).$$

Айнан, нишон додан мумкин аст, ки

$$s(f, T) = \inf_{\xi} \sigma(f; T, \xi). \spadesuit$$

2⁰ Ҳангоми ба ҷудокунии T илова намудани миқдори охири нуктаҳои нав суммаи поёнии Дарбу танҳо зиёд шуда, суммаи болои танҳо кам мешавад, яъне агар $T' \supset T$, онгоҳ

$$s(f, T') \geq s(f, T), S(f, T') \leq S(f, T)$$

♠ Барои исбот, кифоя аст, танҳо ба мавриде маҳдуд шавем, ки T' аз T бо илова кардани танҳо як нуктаи $x'_k \in (x_k; x_{k+1})$ ҳосил мешавад. Дар ин ҷо $\Delta_k = [x_k; x_{k+1}]$ -порчаи ҷудокунии T аст. Барои порчаҳои ҷудокунии T' ишораҳои зерин ҷорӣ мекунем:

$$\Delta'_k = [x_k; x'_k], \quad \Delta''_k = [x'_k; x_{k+1}]$$

$$\Delta x'_k = x'_k - x_k, \quad \Delta x''_k = x_{k+1} - x'_k.$$

Айён аст, ки $\Delta x'_k + \Delta x''_k = \Delta x_k$,

$$m'_k := \inf_{x \in \Delta'_k} \{f(x)\} \geq \inf_{x \in \Delta_k} \{f(x)\} = m_k,$$

чунки $\Delta'_k \subset \Delta_k$ ва барои $\Delta''_k \subset \Delta_k$,

$$m''_k := \inf_{x \in \Delta''_k} \{f(x)\} \geq \inf_{x \in \Delta_k} \{f(x)\} = m_k, \quad (41.4)$$

суммаи поёнии Дарбу $s(f, T')$ аз суммаи поёнии $s(f, T)$ бо иваз кардани ҷамъшавандаи $m_k \Delta x_k$ ба суммаи $m'_k \Delta x'_k + m''_k \Delta x''_k$ ҳосил мешавад (ҳамаи ҷамъшавандаҳои боқимондаи ҳарду сумма якхелаанд). Нобаробарии (41.4) -ро истифода бурда ҳосил мекунем:

$$m'_k \Delta x'_k + m''_k \Delta x''_k \geq m_k (\Delta x'_k + \Delta x''_k) = m_k \Delta x_k. \quad (41.5)$$

Аз нобаробарӣ маълум мешавад, ки $s(f, T') \geq s(f, T)$. ♠

Айнан, нишон додан мумкин аст, ки $S(f, T') \leq S(f, T)$.

Исботи онро ба хонанда тавсия менамоем.

3⁰. Агар ҷудокунии T' аз ҷудокунии T бо илова кардани l нуктаҳои нав ҳосил шуда бошад, онгоҳ

$$s(f, T') - s(f, T) \leq (M - m)l \cdot \lambda(T), \quad S(f, T) - S(f, T') \leq (M - m)l \cdot \lambda(T). \quad (41.6)$$

Дар ин ҷо,

$$m = \inf_{x \in [a; b]} \{f(x)\}, \quad M = \sup_{x \in [a; b]} \{f(x)\}$$

♣ Барои соддагӣ, шарт менамоем, ки T' аз T бо илова намудани як нуқтаи $x'_k \in (x_k; x_{k+1})$ ҳосил шудааст. Фарқи байни суммаҳои Дарбу $s(f, T)$ ва $s(f, T')$ -ро дар ишораҳои хосияти 2^0 ба эътибор гирифта, меёбем:

$$s(f, T') - s(f, T) = m'_k \Delta x'_k + m''_k \Delta x''_k - m_k \Delta x_k \leq M(\Delta x'_k + \Delta x''_k) - m \Delta x_k = (M - m)l \cdot \lambda(T)$$

Нобаробарии дуюм (41.6), айнан исбот карда мешавад, ки онро ба хонанда тавсия менамоем. ♣

4⁰. Барои ихтиёри ҷудокуниҳои T' ва T'' порчаи $[a; b]$, ҳаргуна суммаи поёнии Дарбу аз суммаи болоии он зиёд нест, яъне

$$s(f, T') \leq S(f, T'') \quad (41.7)$$

♣ $T = T' \cup T''$ мегузorem, онгоҳ $T \supset T'$ ва $T \supset T''$ мувофиқи хосиятҳои 1⁰ ва 2⁰ ҳосил мекунем:

$$s(f, T') \leq s(f, T) \leq S(f, T) \leq S(f, T'').$$

Аз ин ҷо, $s(f, T') \leq S(f, T'')$. ♣

2. Интегралҳои поёния ва болоии Дарбу.

ТАЪРИФИ 41.2. Интегралҳои поёния (болои) -и Дарбу барои функсияи $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ гуфта сарҳади аниқи болои (поён) -и маҷмуи ҳамаи суммаҳои поёни (болои) -и Дарбуно меноманд, ки аз рӯи ҷудокуниҳои имконопазири T порчаи $[a; b]$ гирифта шудаанд, яъне

$$\begin{aligned} \sup_T \{s(f, T)\} &:= \int_a^b f(x) dx = I, \\ \inf_T \{S(f, T)\} &:= \int_a^b f(x) dx = I^* \end{aligned} \quad (41.8)$$

ТЕОРЕМАИ 41.1. Барои ихтиёри функсияи маҳдуди $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегралҳои поёния I_* ва болои I^* мавҷуд ва бо нобаробариҳои зерин алоқаманд мебошанд:

$$m(b-a) \leq I_* \leq I^* \leq M(b-a), \quad (41.9)$$

ки дар ин ҷо,

$$m = \inf_{x \in [a; b]} \{f(x)\}, \quad M = \sup_{x \in [a; b]} \{f(x)\}$$

Маҷмуи ҳамаи суммаҳои поёнии Дарбуно, ки ба ҷудокуниҳои имконопазири порчаи $[a; b]$ мувофиқ меояд, дида мебароем. Мувофиқи

хосияти 4⁰, ин маъмуъ аз боло (бо ягон суммаи болоии Дарбу) маҳдуд аст. Бинобар ин, дар асоси теоремаи сарҳадҳои аниқ, хулоса мебарояд, ки $\exists \sup_T \{s(f, T)\} = I. \in R.$

Айнан, $\exists \inf_T \{S(f, T)\} = I^* \in R$ ва ҳосил мекунем:

$$s(f, T) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \geq m \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = m(b-a) \quad (S(f, T) \leq M(b-a))$$

Аз ин ҷо ва хосияти 4⁰ барои ихтиёри ҷудокунииҳо T' ва T'' ҳосил мешавад:

$$m(b-a) \leq s(f, T') \leq S(f, T') \leq M(b-a)$$

$\sup$ барои, ҳамаи ҷудокунииҳо T' ва $\inf$ барои ҳамаи ҷудокунииҳо T'' гирифта нобаробарии (41.9)-ро ҳосил мекунем. ♠

ТЕОРЕМАИ 41.2. (Леммаи асосии Дарбу). Барои ихтиёри функсияи маҳдуди $f: [a; b] \rightarrow R$ муносибатҳои зерин ҷой дорад.

$$I. = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} s(f, T), \quad I^* = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(f, T) \quad (41.10)$$

Агар дар порчаи $[a; b]$ функсияи $f(x) \equiv \text{const} = C$ бошад, онгоҳ

$$\forall t, s(f, T) = S(f, T) = c(b-a) = I. = I^*$$

ва бинобар ин, баробарии (41.10) иҷро мешавад. Бигузор $f(x) \neq \text{const}$ бошад.

$$m = \inf_{x \in [a; b]} \{f(x)\}, \quad M = \sup_{x \in [a; b]} \{f(x)\}$$

гузошта шарти $m < M$ ё $(M-m) > 0$ ҳосил мекунем. Адади $\varepsilon > 0$ -ро мегирем. Азбаски $I^* = \inf_T S(f, T)$ аст, пас чунин ҷудокунии T_0 порчаи $[a; b]$ вучуд дорад, ки $S(f, T_0) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}$ аст. Бигузор ҷудокунии T_0 дар худ $l \geq 1$ нуқтаҳо дошта бошад.

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$$

мегузорем ва бигузор T ҷудокунии ихтиёрии порчаи

$[a; b]$ бо шарт $\lambda(T) < \delta$ бошад.

Аз ҷудокунии $T' = T \cup T_0$ ҳосил мекунем: $T' \supset T$ ва $T' \supset T_0$ бинобар ин, $S(f, T') \leq S(f, T_0)$ ва $S(f, T') \leq S(f, T)$. Ҷудокунии T' аз ҷудокунии T бо иловаи k ($< l$) нуқтаҳои нав ҳосил мешавад, пас мувофиқи хосияти 3⁰ меёбем:

$$S(f, T) - S(f, T') \leq (M - m)k \cdot \lambda(T) < (M - m)k \cdot \lambda(T) < \frac{(M - m)k \cdot \varepsilon}{2(M - m)k} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Аз ин ҷо,

$$S(f, T) < S(f, T') + \frac{\varepsilon}{2} \leq S(f, T_0) + \frac{\varepsilon}{2} < I^* + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = I^* + \varepsilon.$$

Ҳамин тариқ, исбот шуд, ки

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall T \Rightarrow \lambda(T) < \delta \Rightarrow |S(f, T) - I^*| < \varepsilon,$$

яъне баробарии дуюми (41.10) барқарор шуд.

Баробарии якуми (41.10), айнан исбот карда мешавад, ки онро ба хонанда тавсия менамоем. ♣

3. Баъзе критерияҳои интегронидашавандагии функсия — ро, ки барои сумма ва интегралҳои Дарбу ифода меёбанд, дида мебароем.

ТЕОРЕМАИ 41.2. Барои он ки функсияи маҳдуди $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ дар порча $[a; b]$ бо маънои Риман интегронидашаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки шарти зерин иҷро шавад:

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S(f, T) - s(f, T)) = 0. \quad (41.11)$$

♣ Бигузур $f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ интегронидашаванда бошад, онгоҳ шарти критерияи Коши иҷро мешавад:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (T, \xi), (T', \xi'): \lambda(T) < \delta, \lambda(T') < \delta \Rightarrow |\sigma(f; T, \xi) - \sigma(f; T', \xi')| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (41.12)$$

Дар ин ҷо, $T' = T'' = T$ гузошта аввал барои ҳамаи ξ' , $\sup$ ва баъд барои ҳамаи ξ'' , $\inf$ гирифта ҳосил мекунем:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall T \Rightarrow \lambda(T) < \delta \Rightarrow |S(f, T) - s(f, T)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ки он ба баробарии (41.11) баробарқувва аст.

Баръакс, бигузур баробарии (41.11) иҷро шавад. Аз нобаробарии $s(f, T) \leq I_* \leq I^* \leq S(f, T)$ нобаробарии зерин ҳосил мешавад:

$$0 \leq I_* - I^* \leq S(f, T) - s(f, T)$$

Ҳангоми $\lambda(T) \rightarrow 0$ ба ҳудуд гузашта, теорема «онди функсияҳои фишурда» — ро тадбиқ намуда ҳосил мекунем: $I^* - I_* = 0$ яъне $I^* = I_* = I$.

Аммо барои ихтиёри ҷудокунии (T, ξ)

$$s(f, T) \leq \sigma(f; T, \xi) \leq S(f, T),$$

$$S(f, T) \geq I \geq s(f, T)$$

аст.

Ин нобаробариҳоро тарҳ карда меёбем:

$$0 \leq |\sigma(f; T, \xi) - I| \leq S(f, T) - s(f, T).$$

Аз ин ҷо, мувофиқи шарти (41.11) ва теорема «онди функцияҳои фишурда», хулоса мебарояд, ки $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(f; T, \xi) = I$, яъне функцияи $f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ интегронидашаванда аст.

Шарти (41.11)-ро чунин табдил медиҳем:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} [S(f, T) - s(f, T)] &= \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \right) = \\ &= \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i = 0. \end{aligned} \quad (41.13)$$

Баробарии (41.13) нишон медиҳад, ки теоремаи 41.3 теоремаи 40.1 -ро пурқувват намуда на танҳо шарти кифоягӣ, балки шарти зарурӣ

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i = 0 \quad (41.14)$$

-ро барои функцияи интегронидашавандаи $f(x)$ низ тасдиқ менамояд.

ТЕОРЕМАИ 41.4. Функцияи маҳдуди $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ дар порчаи $[a; b]$ интегронидашаванда ҳамон вақт ва фақат ҳамон вақт, агар интегралҳои пойёний I_* ва болои I^* -и Дарбу бо ҳамдигар баробар бошанд, яъне

$$I^* = I_* = I = \int_a^b f(x) dx \quad (41.15)$$

♠ Шарт менамояд, ки агар $f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ бо маънои Риман интегронидашаванда ва $I = \int_a^b f(x) dx$ бошад, онгоҳ

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (T, \xi): \lambda(T) < \delta \Rightarrow |\sigma(f; T, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Дар ин баробариҳо, аз руи ξ , $\sup$ ва $\inf$ гирифта ҳосил мекунем:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall T: \lambda(T) < \delta \Rightarrow |S(f, T) - I| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall T: \lambda(T) < \delta \Rightarrow |s(f, T) - I| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ин тасдиқотҳо ба зерин баробарқувваанд:

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(f, T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} s(f, T) = I \quad (41.16)$$

Ин мувофиқи леммаи асосии Дарбу маънои зеринро дорад:

$$I^* = I_* = I$$

Баръакс, шарт мекунем, ки интегралҳои поёни ва болоии Дарбу баробар бошанд, яъне $I^* = I_* = I$. Мувофиқи леммаи асосии Дарбу баробарии (41.16) бояд иҷро шавад. онҳоро истифода бурда, ба нобаробарии $s(f, T) \leq \sigma(f; T, \xi) \leq S(f, T)$ теорема «онди функцияҳои фишурда»-ро тадбиқ намуда хулоса мебарорем, ки

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(f; T, \xi) = I. \blacktriangle$$

4. Критерияи Лебег. Баъзе мафҳумро аз назарияи маҷмӯъ меорем.

ТАЪРИФИ 41.3. Маҷмуи A охирик ном дорад, агар барои ягон $n \in \mathbb{N}$ инъикоси биективии маҷмуи A ба маҷмуи $\{1, 2, \dots, n\}$ маҷуд бошад. Маҷмуи A ҳисобӣ ном дорад, агар инъикоси биективии маҷмуи A ба маҷмуи $\mathbb{N}$ -ҳамаи ададҳои натуралӣ вучуд дошта бошад.

Мисоли маҷмӯҳои ҳисобӣ, маҷмуи $\mathbb{Z}$ -ҳамаи ададҳои бутун ва зермаҷмӯҳои беохирӣ он маҷмуи $\mathbb{Q}$ -ҳамаи ададҳои ратсионалӣ ва зермаҷмӯҳои беохирӣ он шуда метавонад.

ТАЪРИФИ 41.4. Маҷмуи ададии $A \subset \mathbb{R}$ маҷмуи ченаки нуль ном дорад, агар барои ихтиёри $\varepsilon > 0$ пушандаи охирик ё ҳисобии $\{u_1, u_1, \dots, u_n, \dots\}$ маҷмуи A -и интервалҳои $u_1, u_1, \dots, u_n, \dots$ вучуд дошта бошад, ки суммаи дарозиҳои онҳо аз ε хурд бошад.

Ба мафҳуми суммаи дарозии миқдори беохир (ҳисоби)-и интервалҳо шарҳ додан лозим меояд. Бигузор $\mu(u_k)$ дарозии интервали u_k бошад. Мувофиқи таъриф, мегузорем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(u_k) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(u_k)$$

Мисоли маҷмуи ченаки нуль, ихтиёри маҷмуҳои ададии охирнок ё ҳисоби, шуда метавонад. Дар ҳақиқат, агар $\{x_1, x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}$ маҷмуи охирнок ё ҳисобӣ бошад, онгоҳ ҳар кадом нуқтаи x_k -ро бо интервали u_k дарозии аз $\varepsilon/2^k$ хурд буда пушида ҳосил мекунем:

$$\sum_{k=1}^n \mu(u_k) < \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right) = \varepsilon.$$

Дар ҳолати хусусӣ, маҷмуи ҳамаи ададҳои ратсионалӣ $\mathbb{Q}$ маҷмуи ҳисобӣ буда ченаки нуль дорад. Бе исбот, тасдиқоти зеринро меёбем.

ТЕОРЕМАИ 41.5 (Критерияи Лебег). Барои он ки функсияи маҳдуди $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ дар порчаи $[a; b]$ бо маънои Риман интегронидашаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки маҷмуи ҳамаи нуқтаҳои каниши он ченаки нуль дошта бошад. Ба сифати мисол тадбиқи критерияи Лебегро дар интегронидашавандагии функсияи Риман меорем.

Азбаски $0 \leq R(x) \leq 1$ ва $R(x)$ танҳо дар нуқтаҳои ратсионали каниш дошта, маҷмуи онҳо ченаки нулро дорад, пас ин функсия дар ихтиёри

$$R(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \text{ — ирратсионалӣ,} \\ 1/q, & \text{агар } x = p/q \text{ (қасри ихтисор нашаванда)} \end{cases}$$

порчаи $[a; b] \subset \mathbb{R}$ бо маънои Риман интегронидашаванда аст ва интеграли он ба нул (нишон диҳед!) баробар аст:

$$\int_a^b R(x) dx = 0.$$

§ 42. ХОСИЯТҲОИ ФУНКСИЯҲОИ ИНТЕГРОНИДАШАВАНДА ВА ИНТЕГРАЛИ МУАЙЯН.

1. Хосиятҳои функсияҳои интегронидашаванда.

10. ТЕОРЕМАИ 42.1. Агар $f, g \in \mathcal{R}[a; b]$ бошад, онгоҳ

а) $(f+g) \in \mathcal{R}[a; b]$;

$$б) (\alpha \cdot f) \in \mathcal{R}[a; b];$$

$$в) |f| \in \mathcal{R}[a; b];$$

$$г) f|_{[c; d]} \in \mathcal{R}[a; b], \text{ ки дар ин ҷо } [c; d] \subset [a; b];$$

$$д) (f \cdot g) \in \mathcal{R}[a; b].$$

♠ а) Агар (T, ξ) -чудокунӣ $a = x_0 < x_1 < \dots < \xi_i < \xi_{i+1} < \dots < x_n = b$ бо нуқтаҳои қайдшудаи $\xi_i \in \Delta_i$, $i=0, 1, 2, \dots, n-1$ бошад, онгоҳ ҳосил мекунем:

$$|(f(x') + g(x')) - (f(x'') + g(x''))| \leq |f(x') - f(x'')| + |g(x') - g(x'')|.$$

Барои ҳамаи ҷуфти нуқтаҳои $x', x'' \in \Delta_i$, дар ин ҷо $\sup$ гирифта ҳосил мекунем:

$$\omega(f + g; \Delta_i) \leq \omega(f; \Delta_i) + \omega(g; \Delta_i)$$

Аз ин ҷо,

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f + g; \Delta_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1} \omega(g; \Delta_i) \Delta x_i, \quad (42.1)$$

Азбаски $f, g \in \mathcal{R}[a; b]$, пас мувофиқи теоремаи 41.2 тарафи ростии баробарии (42.1) ҳангоми $\lambda(T) \rightarrow 0$ ба сифр майл мекунад. Бинобар ин,

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f + g; \Delta_i) \Delta x_i = (f + g) \in \mathcal{R}[a; b].$$

$$б) \sigma(\alpha f; T, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha(\xi_i) \Delta x_i = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} (\xi_i) \Delta x_i = \alpha \sigma(f; T, \xi).$$

Азбаски $f \in \mathcal{R}[a; b]$, пас ҳангоми $\lambda(T) \rightarrow 0$ тарафи рост ҳудуд охирикдор дорад. Бинобар ин, ҳудуди охирикоки $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(\alpha f; T, \xi)$ вуҷуд дорад, яъне $(\alpha \cdot f) \in \mathcal{R}[a; b]$.

в) Модули фарқи $f(x)$ -ро дар нуқтаҳои $x', x'' \in [a; b]$ дида мебароем:

$$|f(x') - f(x'')| \geq ||f(x')| - |f(x'')||.$$

Аз ин ҷо, мебарояд, ки $\omega(|f|; \Delta_i) \leq \omega(f; \Delta_i)$. Бинобар ин,

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i = 0 \Rightarrow \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega(|f|; \Delta_i) \Delta x_i = 0$$

ва $|f| \in \mathcal{R}[a; b]$.

г) Нишон медиҳем, ки $\forall \varepsilon > 0$ чунин ҷудокунии T порчаи $[c; d]$ вучуд дорад, ки $S(f, T) - s(f, T) < \varepsilon$ бошад. Азбаски $f \in \mathcal{R}[a; b]$ пас $\forall \varepsilon > 0$ чунин ҷудокунии T_1 порчаи $[a; b]$ вучуд дорад, ки барои он $S(f, T_1) - s(f, T_2) < \varepsilon$ мешавад. дар ин ҷо, ҷудокунии T_2 дар натиҷаи ба ҷудокунии T_1 илова кардани нуқтаҳои c ва d ҳосил шудааст. Барои он, $S(f, T_2) - s(f, T_2) < \varepsilon$ аст.

Ҷудокунии T_2 порчаи $[c; d]$ -ро ба амал меорад.

Айён аст, ки

$$S(f, T) - s(f, T) \leq S(f, T_2) - s(f, T_2) < \varepsilon \Rightarrow f|_{[c; d]} \in \mathcal{R}[c; d].$$

д) Бигузур $M = \sup_{x \in [a; b]} |f(x)|$ бошад, онгоҳ

$$|(f(x'))^2 - (f(x''))^2| = |(f(x') + f(x''))(f(x') - f(x''))| \leq 2M|f(x') - f(x'')|.$$

Аз ин ҷо, $\omega(f^2, \Delta_i) \leq 2M\omega(f, \Delta_i)$ ва бинобар ин,

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f^2, \Delta_i) \Delta x_i \leq 2M \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_i) \Delta x_i. \quad (42.2)$$

Азбаски $f \in \mathcal{R}[a; b]$ пас тарафи рости нобаробарии (42.2) ҳангоми $\lambda(T) \rightarrow 0$ ба сифр майл мекунад. Бинобар ин, $f^2 \in \mathcal{R}[a; b]$ аст.

Бигузур $f, g \in \mathcal{R}[a; b]$ бошад, онгоҳ

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{4} [(f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2]. \quad (42.3)$$

Мувофиқи хосиятҳои а), б) ва қисми исботшудаи хосияти д), тарафи рости айнияти (42.3) дар порчаи $[a; b]$ бо маънои Риман интегронидашаванда буда $f, g \in \mathcal{R}[a; b]$ аст. ♣

2. Хосиятҳои интеграл, ки бо баробарии ифода шудаанд.

20. ТЕОРЕМАИ 42.2 (Хатигии интеграл). Агар $f, g \in \mathcal{R}[a; b]$ бошад, онгоҳ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$: $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}[a; b]$ ва баробарии зерин иҷрошаванда аст.

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \quad (42.5)$$

♣ Интегронидашавандагии функсияи $(\alpha f + \beta g)$ аз тасдиқоти а) ва б) теоремаи 42.1 мебарояд. Барои исботи баробарии (42.5) ҷудокунии $(T; \xi)$ порчаи $[a; b]$ -ро гирифта суммаи интегралиро табдил медиҳем:

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha f + \beta g; T, \xi) &= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \Delta x_i = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i + \beta \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \alpha \sigma(f; T, \xi) + \beta \sigma(g; T, \xi).\end{aligned}$$

Аввал ва охири онро гирифта ҳосил мекунем:

$$\sigma(\alpha f + \beta g; T, \xi) = \alpha \sigma(f; T, \xi) + \beta \sigma(g; T, \xi).$$

Ҳангоми $\lambda(T) \rightarrow 0$ ҳудуд гирифта баробарии (42.5)-ро ҳосил мекунем. ♣

3⁰. ТЕОРЕМАИ 42.3 (Аддитивии интеграл). Агар $f \in \mathcal{R}[a; b]$ ва $a < c < b$ бошад, онгоҳ

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (42.6)$$

♣ Мавҷудияти интегралҳои дар тарафи ростии (42.6) истода дар теоремаи 42.1. исбот шуда буд. Барои исботи (42.6), ҳангоми тартиб додани суммаи интегралӣ, чунин ҷудокунии $(T; \xi)$ порчаи $[a; b]$ -ро мегирем, ки нуқтаи c яке аз нуқтаҳои тақсимот бошад:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = c = x_{k+1} < \dots < x_n = b.$$

Барои ин ҷудокуния, ҳосил мекунем:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=k}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (42.7)$$

Дар тарафи чапи ин баробарии суммаи интегралӣ дар порчаи $[a; b]$ ва дар тарафи ростии он суммаи интегралӣ дар порчаҳои $[a; c]$ ва $[c; b]$ мувофиқан истодааст. Ҳангоми $\lambda(T) \rightarrow 0$ ҳудуд гирифта баробарии (42.7)-ро ҳосил мекунем.

Супориш. Нишон диҳед, ки агар $f \in \mathcal{R}[a; c]$ ва $f \in \mathcal{R}[c; b]$ бошад, онгоҳ $f \in \mathcal{R}[a; b]$ ва баробарии (42.7) ҷой дорад.

Дар интеграл $\int_a^b f(x) dx$ ҳама вақт $a < b$ ҳисоб мекардем ва ҳангоми тартиб додани суммаи интегралӣ $\Delta x_i > 0$ буд. Агар $a > b$ шарт кунем,

онгоҳ ҷудокунӣ $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$ -ро сохтан мумкин аст, ки дар суммаи интегралӣ

$$\sigma(f; T, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

дарозии порча $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i < 0$ аст. Ин фарқиятро ба эътибор гирифта таърифи зеринро ҷори менамоем:

ТАЪРИФИ 42.1. Дар мавриди $a > b$,

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (42.8)$$

ва ҳангоми $a=b$

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (42.9)$$

мегузоранд.

Мувофиқи ин таъриф, ҳангоми иваз намудани самти порчаи интегралӣ (иваз намудани ҷойҳои a ва b) интеграл аломаташро дигар мекунад. Дурустии теоремаҳои 42.1 ва 42.2 новобаста аз муносибатҳои байни a ва b (барои ихтиёри $a, b \in \mathbb{R}$) боқӣ мемонад. Нишон медиҳем, ки тасдиқоти теоремаи 42.3 барои ин ҳолат низ дуруст мемонад.

4⁰. ТЕОРЕМАИ 42.3'. Бигузор $a, b, c \in \mathbb{R}$ бошад. Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи калонтарини се нуқтаҳои a, b, c -ро дар худ дошта интегронидашаванда бошад, онгоҳ

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = 0 \quad (42.10)$$

♣ Шаш мавриди байни худ ҷойгиршавии се нуқтаҳои a, b, c дар тире адади имконпазир аст: $a \leq c \leq b$, $a \leq b \leq c$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$, $c \leq b \leq a$.

Мавриди якум $a \leq c \leq b$ -ро дида мебароем.

Агар $a < c < b$ бошад, онгоҳ мувофиқи теоремаи 42.3 баробарии зерин иҷрошаванда аст:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_c^a f(x) dx - \int_b^c f(x) dx. \quad (42.6)$$

Ин муносибат дар он мавридҳое, низ ҷой дорад, ки аққалан яке аз нобаробарии $a < c < b$ ба баробарии табдил меёбад, чунки дар ин ҳолатҳо (42.9) -ро истифода бурдан мумкин аст. Дар тарафи рости (42.6) ҳудудҳои интегралро иваз намуда мувофиқи (42.8) ҳосил мекунем:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

Ҳамаи аъзоҳоро ба тарафи чап гузаронида баробарии (42.10) -ро ҳосил мекунем. ♠

Панҷ мавридҳои боқимонда, айнан исбот карда мешаванд, ки иҷрои онро ба хонанда месупорем.

НАТИҶАИ 42.1. Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи калонтарини ҳамаи нуқтаҳои $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ -ро дар худ дошта интегронидашаванда бошад, онгоҳ

$$\int_{a_0}^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \dots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx + \int_{a_n}^{a_n} f(x)dx = 0$$

Исботи ин баробарӣ бо истифода бурдани баробарии (42.10) ва тадбиқи индуксия аз руи нуқтаҳои a_i гузаронида мешавад. Исботро мустақилона иҷро намоед.

3. Хосиятҳои интегралҳои муайян, ки бо нобаробарӣ ифода шудаанд. Дар ин ҷо ва дар бандҳои оянда шарт мекунем, ки $a < b$ аст.

50. ТЕОРЕМАИ 42.4. (Монотонии интеграл). Агар $f, g \in \mathcal{R}[a; b]$ ва $f(x) \leq g(x)$ барои ҳама $x \in [a; b]$ бошад, онгоҳ

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (42.11)$$

♠ Бигуздор (T, ξ) -чудокунӣ иштиёри бо нуқтаҳои қайдшудаи порчаи $[a; b]$ бошад. Суммаҳои интегралро тартиб дода нобаробарии $f(x) \leq g(x)$ -ро истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\sigma(f; T, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \Delta x_i = \sigma(g; T, \xi)$$

яъне $\sigma(f; T, \xi) \leq \sigma(g; T, \xi)$. Ҳангоми $\lambda(T) \rightarrow 0$ ҳудуд гирифта баробарии (42.11)-ро ҳосил мекунем. ♣

6⁰. НАТИҶАИ 42.2. (Баҳон модули интеграл). Агар $f \in \mathfrak{R}[a; b]$ бошад, онгоҳ нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (42.11)$$

♣ Интегронидашавандагини функсияи $|f|$ дар теоремаи 42.1. в) нишон дода шуд. Азбаски $\forall x \in [a; b]: -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ аст, пас мувофиқи теоремаи 42.4 ҳосил мекунем:

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Аз ин ҷо

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad \clubsuit$$

7⁰. Натиҷаи 42.3. (баҳон интеграл). Агар $f, g \in \mathfrak{R}[a; b]$ ва $\forall x \in [a; b], g(x) \geq 0$, $m := \inf_{x \in [a; b]} \{f(x)\}$, $M := \sup_{x \in [a; b]} \{f(x)\}$ бошад, онгоҳ

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx \quad (42.13)$$

♣ Нобаробарии $m \leq f(x) \leq M$ -ро ба $g(x) \geq 0$ зарб намуда меёбем: $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Аз ин нобаробария, мувофиқи теоремаи 42.4, интеграл гирифта нобаробарии (42.13)-ро ҳосил мекунем. ♣

ҚАЙД 1. Дар (42.13), $g(x) \equiv 1$ гузошта баробарии $\int_a^b dx = b - a$ -ро ба эътибор гирифта ҳосил мекунем:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \quad (42.13')$$

4. Теоремаҳои «қимати миёна».

8⁰. НАТИҶАИ 42.4. (Теоремаи якуми «қимати миёна»).

Бигузор $f, g \in \mathfrak{R}[a; b]$ ва $\forall x \in [a; b], g(x) \geq 0$, $m = \inf_{x \in [a; b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x)$ бошад, онгоҳ адади $\mu \in [m, M]$ вуҷуд дорад, ки баробарии зерин иҷрошаванда аст:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx. \quad (42.14)$$

▲ Агар $f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ бефосила бошад, онгоҳ чунин нуқтан $\xi \in [a; b]$ ёфт мешавад, ки барои он баробарии зерин иҷро мешавад:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx. \quad (42.15)$$

Агар $\int_a^b g(x)dx = 0$ бошад, онгоҳ аз (42.13) мебарояд, ки

$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ ва дар ин ҳолат ҳар ду баробариҳои (42.14) ва (42.15)

иҷро мешаванд. Шарт мекунем, ки $\int_a^b g(x)dx > 0$ бошад, онгоҳ аз (42.13) маълум мешавад, ки $m \leq \mu \leq M$ аст, ки дар ин ҷо,

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

Аз ин ҷо, баробарии (42.14) ҳосил мешавад. Агар $f \in C[a; b]$ бошад, онгоҳ мувофиқи теорема оиди қиматҳои фосилавӣ, нуқтан $\xi \in [a; b]$ ёфт мешавад, ки $\mu = f(\xi)$ аст. Ин қиматро дар (42.14) гузошта баробарии (42.15)-ро ҳосил мекунем. ▲

ҚАЙДИ 2. Дар баробарии (42.14) ва (42.15), $g(x) \equiv 1$ гузошта, ҳангоми $f \in \mathfrak{R}[a; b]$ адади $\mu \in [m; M]$ -ро ёфтан мумкин аст, ки барои он

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a), \quad (42.14')$$

ва дар ҳолати $f \in C[a;b]$ адади $\xi \in [a;b]$ вучуд дорад, ки барои он баробарии зерин иҷро мешавад:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \quad (42.15')$$

Ин мавридҳои хусусии теоремаи якуми «қимати миёна» дар амал бештар истифода бурда мешаванд.

Акнун тасдиқоти ёридиҳандаи зеринро барқарор мекунем, ки бо номи интегралӣ муайяни ҳудуди болоиаш таъғирёбанда машҳур аст.

ЛЕММАИ 42.1. Агар $f \in \mathcal{R}[a;b]$ бошад, онгоҳ функсияи

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

дар порчаи $[a;b]$ бефосила аст.

♠ Мавҷудияти функсияи F аз теоремаи 42.1. г) мебарояд. Фақат бефосилагии онро месанҷем. $M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ мегузорем. Бигузор $x \in [a;b]$,

$x + \Delta x \in [a;b]$ бошад. Хосияти аддитивӣ ва баҳои модули интегралро истифода бурда ба афзоиши функсияи F дар нуқтаи x баҳо медиҳем:

$$\begin{aligned} |F(x + \Delta x) - F(x)| &= \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \\ &= \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \right| \leq M|\Delta x| \end{aligned}$$

аввал ва охири он, нобаробарии зеринро медиҳад.

$$0 \leq |F(x + \Delta x) - F(x)| \leq M|\Delta x|$$

Аз ин ҷо, ҳангоми $\Delta x \rightarrow 0$ ҳосил мекунем: $F(x + \Delta x) - F(x) \rightarrow 0$, яъне $\forall x \in [a;b]$ функсияи $F(x)$ бефосила аст. ♠

9⁰. ТЕОРЕМАИ 42.5. (Теоремаи дуҷуми «қимати миёна»). Агар $f \in \mathcal{R}[a;b]$, $f, g: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x)$ — монотон бошад, онгоҳ нуқтаи $\xi \in [a;b]$ вучуд дорад, ки барои он

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx. \quad (42.16)$$

♠ Таъмини мавҷудияти интегралӣ дар тарафи чапи баробарии (42.16) истода аз интегронидашаванда будани функсияи монотон ва зарби функсияҳои интегронидашаванда дар порчаи $[a;b]$ мебарояд. Барои содда шудани исботи баробарии (42.16), бо таври илова, шарт мекунем, ки функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ аломаташро иваз намекунад. Барои муайяни шарт менамоем, ки $\forall x \in [a;b]: f(x) \geq 0$ буда $\forall x \in [a;b]$ функсияи $g(x)$ камнашаванда аст:

$$g(a) \leq g(x) \leq g(b)$$

Ин нобаробарию ба $f(x) \geq 0$ зарб карда меёбем:

$$g(a)f(x) \leq f(x)g(x) \leq g(b)f(x)$$

Аз ин ҷо, мувофиқи теоремаи 42.4 ҳосил мекунем:

$$g(a) \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq g(b) \int_a^b f(x) dx. \quad (42.17)$$

Функсияи зеринро дида мебароем:

$$\Phi(x) = g(a) \int_a^x f(t) dt + g(b) \int_x^b f(t) dt$$

Мувофиқи леммаи 42.1 функсияи $\Phi(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бефосила ва

$$\Phi(a) = g(b) \int_a^b f(t) dt, \quad \Phi(b) = g(a) \int_a^b f(t) dt$$

аст. Аз ин ҷо ва аз (42.17), мувофиқи теоремаи қиматҳои фосилавӣ, чунин нуқтаи $\xi \in [a;b]$ бо ҳосияти

$$\Phi(\xi) = \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad \Phi(b) = g(a) \int_a^b f(t) dt$$

ёфт мешавад, ки ба (42.16) баробарқувва аст. ♠

§43. ФОРМУЛАИ НЬУТОН-ЛЕЙБНИТС. МАВҶУДИЯТИ ФУНКЦИЯҲОИ ИБТИДОӢ.

1. *Формулаи асосии ҳисоби интегралӣ* — ро исбот намуда тадбиқи онро дар ҳалли якчанд мисолҳо дида мебароем.

ТЕОРЕМАИ 43.1. (формулаи Ньютон-Лейбнитс). Агар функсияи $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ дар порчаи $[a;b]$ интегронидашаванда буда функсияи ибтидоии $F(x)$ -и функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ мавҷуд бошад, онгоҳ формулаи зерин ҷой дорад:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (43.1)$$

♠ Т-ҷудокунии ниҳоят хурди $\lambda(T)$ порчаи $[a;b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad (43.2)$$

ро гузаронида айнияти зеринро дида мебароем.

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) = \\ &= [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \dots + [F(x_n) - F(x_{n-1})] = \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k)] \end{aligned} \quad (43.3)$$

Ба ҳар кадом ҷамъшавандаи $F(x_{k+1}) - F(x_k)$ суммаи (43.3) теоремаи Лагранжро тадбиқ намуда баробарии $F'(x) = f(x)$ -ро ба эътибор гирифта ҳосил мекунем:

$$\exists \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]: F(x_{k+1}) - F(x_k) = f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Аз баробарии (43.3) меёбем:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \quad (43.4)$$

Суммаи охирин дар (43.4) суммаи интегралӣ интегралӣ $\int_a^b f(x)dx$ мебошад. Азбаски ин интеграл мавҷуд, пас ҳангоми $\lambda(T) \rightarrow 0$ суммаи дар (43.4) мавҷуд буда новобаста аз интихоби нуқтаҳои ξ_k ба интегралӣ номбурдашуда майл мекунад. Бинобар ин, ба баробарии (43.4) ҳангоми $\lambda(T) \rightarrow 0$ ба ҳудуд гузашта (43.1)-ро ҳосил мекунем. ♠

ҚАЙД. Формулаи (43.1), ки алоқамандии интегралӣ номуайяно ба интегралӣ муайян ифода мекунад, аз тарафи И. Ньютон ва Г.В. Лейбнитс новобаста аз якдигар ёфта шуда номи онҳоро дорад. Онро формулаи асосии ҳисоби интегралӣ меноманд ва аксар мавридҳо онро дар намуди

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b \quad (43.1)$$

ифода менамоянд, ки дар ин ҷо $F(x)$ -ихтиёри функсияи ибтидоии $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ аст. Ин формула барои мавриди $a > b$ низ иҷрошаванда мебошад.

Мисолҳо:

$$1) \int_a^b x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_a^b = \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad (\alpha \neq -1);$$

$$2) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6};$$

$$3) \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{(e^x)^2 + 1} = \arctg e^x \Big|_0^1 = \arctg e - \arctg 1 = \arctg e - \frac{\pi}{4}.$$

2. Мавҷудияти функсияҳои ибтидоӣ.

ЛЕММАИ 43.1. Агар функсияи $f \in \mathcal{R}[a;b]$ дар нуқтаи $x \in [a;b]$ бефосила бошад, онгоҳ функсияи

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a;b] \quad (43.6)$$

дар нуқтаи x дифференсиронидашаванда буда $F'(x) = f(x)$ аст.

♠ Бефосилагии функсияи $F(x)$ ҳангоми $f \in \mathcal{R}[a;b]$ дар леммаи 42.1 барқарор шуда буд. Дар ин ҷо, иловагӣ шарт карда мешавад, ки $f(x)$ дар нуқтаи $(x+\Delta x)$ бефосила аст. Афзоиши $\Delta x \neq 0$ -ро медиҳем, ки нуқтаи $(x+\Delta x) \in [a;b]$ монад. Хосияти аддитивии интеграл ва теоремаи якуми қимати миёнаро истифода бурда афзоиши функсияи $F(x)$ -ро дар нуқтаи x табдил медиҳем:

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi) \Delta x \quad (43.7)$$

ки дар ин ҷо, ξ -ягон нуқтаи байни x ва $(x+\Delta x)$. Аз баробарии (43.7) ҳасил мекунем:

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(\xi) \quad (43.8)$$

ки дар ин ҷо $x \leq \xi \leq x+\Delta x$ ҳангоми $\Delta x > 0$ ва $x+\Delta x \leq \xi \leq x$, ҳангоми $\Delta x < 0$. Айён аст, ки ҳангоми $\Delta x \rightarrow 0$ муносибати $\xi \rightarrow x$ ҷой дорад. Аз бефосила будани $f(x)$ маълум мешавад, ки $f(\xi) \rightarrow f(x)$.

Бинобар ин, ҳудуди тарафи чапи (43.8), ҳангоми $\Delta x \rightarrow 0$ мавҷуд буда ба $f(x)$ баробар аст:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x). \spadesuit$$

ТЕОРЕМАИ 43.2. (мавҷудияти функсияи ибтидоӣ). Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ бефосила бошад, онгоҳ дар ин порча функсияи ибтидоии $F(x)$ барои функсияи $f(x)$ мавҷуд аст.

♠ Ба сифати функсияи ибтидоӣ барои $f(x)$ дар $[a; b]$ функсияи $F(x)$ - ро, ки бо баробарии (43.6) ифода шудааст, гирифтани мумкин аст. Дар ҳақиқат, мувофиқи леммаи 43.1 функсияи $F(x)$ дар порчаи $[a; b]$ дифференсиронидашаванда буда барои $\forall x \in [a; b]$, $F'(x) = f(x)$ аст. ♠

ҚАЙД. Дар назарияи интегралӣ номуайян функсияҳои ибтидоӣ ба шарте омехта шуда буданд, ки онҳо вуҷуд доштанд. Теоремаи 43.2 мавҷудияти функсияҳои ибтидоиро аз ҳаргуна функсияи дар порча бефосила таъмин менамояд. Дар ҳолати хусусӣ аз ин теорема мавҷудияти функсияи ибтидоӣ аз ҳаргуна функсияи элементарӣ дар порчаи ихтиёрии дар соҳаи муайянии функсияи додашуда хобида мебарояд.

Барои тадбиқи оянда, васеъ намудани мафҳуми функсияи ибтидоӣ зарур аст.

Таъриф. функсияи дар фосилаи адади бефосилаи $F(x)$ барои функсияи дар ҳамон фосила додашудаи f функсияи ибтидоии умумишуда ном дорад, агар барои ҳамаи нуқтаҳои фосила, мумкин аст, ба ғайр аз миқдори охириноки нуқтаҳо, баробарии $F'(x) = f(x)$ иҷро гардад.

ТЕОРЕМАИ 43.3. (Мавҷудияти функсияи ибтидоии умумишуда). Агар $f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ маҳдуд буда дар он миқдори охириноки нуқтаҳои каниш дошта бошад, онгоҳ дар ин порча функсияи ибтидоии умумишудан $F(x)$ барои $f(x)$ вуҷуд дорад. Маҷмӯи ҳамаи функсияҳои ибтидоии умумишуда барои $f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ бо формулаи $F(x) + C$ дода мешавад, ки дар ин ҷо, C — доимии ихтиёрий аст.

♣ Агар $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ гузорем, онгоҳ дар порчаи $[a;b]$ функсияи бефосилаи $F(x)$ -ро ҳосил мекунем, ки мувоиқи леммаи 43.1 дар порчаи $[a;b]$ барои $f(x)$ функсияи ибтидоии умумишуда мешавад. Бигузор $F_1(x)$ -боз як функсияи ибтидоии умумишуда барои $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бошад, онгоҳ $(F_1(x)-F(x))$ -дар дохили фосилаи ихтиёрие, ки нуқтаҳои каниши $f(x)$ порчаи $[a;b]$ -ро ҷудо мекунад, ба адади доимӣ баробар аст. Азбаски функсияи $(F_1(x)-F(x))$ дар порчаи $[a;b]$ бефосила аст, пас вай дар ҳамаи порчаи $[a;b]$ доимӣ аст, яъне

$$F_1(x) - F(x) = C \Rightarrow F_1(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C. \spadesuit$$

§44. МЕТОДҲОИ ҲИСОБ НАМУДАНИ ИНТЕГРАЛИ МУАЙЯН

1. Иваз намудани таъғирёбанда (Методи Гузориш).

ТЕОРЕМАИ 44.1 Бигузор функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бефосила ва функсияи $\varphi:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ дар $[\alpha;\beta]$ бефосила дифференсиронидашаванда буда $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ бошад, онгоҳ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \quad (44.1)$$

♣ Бигузор $a < b$ бошад. Азбаски функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бефосила аст, пас мувофиқи теоремаи 43.2 функсияи ибтидоии $F(x)$ барои $f(x)$ дар $[a;b]$ вуҷуд дорад. Бинобар ин $F \circ \varphi$ барои $(f \circ \varphi)\varphi'$ дар $[a;b]$ функсияи ибтидоӣ мебошад. Мувофиқи формулаи Ньютон-Лейбнитс ҳосил мекунем:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(\varphi(t)) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = \int_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Аввал ва охири ин баробариҳо гирифта (41.1)-ро ҳосил мекунем. ♣

ТЕОРЕМАИ 44.2. Бигузор функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ интегронидашаванда, функсияи $\varphi:[\alpha;\beta] \rightarrow \mathbb{R}$ -бефосила дифференсиронидашаванда ва қатъи монотон буда $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ бошад, онгоҳ $(f \circ \varphi)\varphi' \in \mathcal{R}[a;b]$ ва формулаи зерин ҷой дорад:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \quad (44.1)$$

♠Шарт мекунем, ки $\alpha < \beta$ ва $a < b$ аст. Бигузор $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ ҷудокунии порчаи $[\alpha; \beta]$, $\Delta_i = [t_i; t_{i+1}]$ порчаҳои ҷудошуда $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ дарозии порчаи Δ_i , $\tau \in [t_i; t_{i+1}]$ -нуқтаҳои қайдшуда бошанд. Ҷудокунии сохташударо бо (p, τ) ва бо $\lambda(p)$ -ҷудокунии хурди онро ишора намуда суммаи интегралро барои функсияи $(f \cdot \varphi)\varphi'$ аз руи порчаи $[\alpha; \beta]$ тартиб медиҳем:

$$\sigma((f \cdot \varphi)\varphi'; p, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\varepsilon_i)\Delta t_i \quad (44.2)$$

$x_i = \varphi(t_i)$, $\xi_i = \varphi(\tau_i)$ гузошта, ҷудокунии $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ -и порчаи $[a; b]$ -ро бо нуқтаҳои қайдшудаи $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$ ҳосил мекунем. Аз ин ҷудокуни, суммаи интегралӣ функсияи $f(x)$ -ро дар порчаи $[a; b]$ тартиб медиҳем ва мувофиқи теоремаи Лагранж $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\Theta_i)\Delta t_i$ мегузорем:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\Theta_i)\Delta t_i \quad (44.2)$$

Азбаски $\varphi' \in C[\alpha; \beta]$, пас мувофиқи теоремаи Веерштрасс вай дар ин порча маҳдуд аст, яъне $\exists M \in \mathbb{R}, \forall t \in [\alpha; \beta]: |\varphi'(t)| \leq M$. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки ҳангоми $\lambda(P) \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda(T) \rightarrow 0$. Дар ҳақиқат,

$$\Delta x_i = \varphi'(\Theta_i)\Delta t_i \leq M\Delta t_i.$$

Ҳамин тариқ, $0 \leq \lambda(T)\Delta t_i \leq M\Delta t_i$ ва ҳангоми $\lambda(P) \rightarrow 0$ параметри $\lambda(T) \rightarrow 0$. Азбаски $f \in \mathcal{R}[a; b]$, пас ҳангоми $\lambda(P) \rightarrow 0$ параметри

$\lambda(T) \rightarrow 0$ ва тарафи чапи (44.3) (тарафи рост низ) ҳудуди $\int_a^b f(x)dx$ -

ро дорад. Акнун ба фарқи байни тарафҳои рости баробариҳои (44.2)

ва (44.3) баҳо медиҳем: $k = \sup_{x \in [a; b]} |f(x)|$ гузошта бо назардошти

$\tau_i, \Theta_i \in \Delta_i$ ҳосил мекунем:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta_i - \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\Theta_i)\Delta_i \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))(\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\Theta_i))\Delta_i \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\varphi(\tau_i))| |\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\Theta_i)| \Delta_i \leq K \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\Theta_i)| \Delta_i \leq K \sum_{i=0}^{n-1} \omega(\varphi'; \Delta_i) \Delta_i, \quad (44.4)$$

Азбаски $\varphi' \in C[\alpha; \beta]$, пас $\varphi' \in \mathcal{R}[a; b]$ ва мувофиқи критерияи интегро-нидашавандаги

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} \omega(\varphi'; \Delta_i) \Delta_i = 0.$$

Аз ин ҷо ва аз нобаробарии (44.4) маълум мешавад, ки тарафҳои рости (44.2) ва (44.3) ҳангоми $\lambda(P) \rightarrow 0$ аз якдигар бо функцияи беохир хурд фарқ мекунанд. Аз сабаби мавҷуд будани ҳудуди охирик ҳар ду тарафи баробарии (44.3), ин ҳудудро ҳангоми $\lambda(P) \rightarrow 0$ суммаи интегралӣ (44.2) низ дорад. Ин чунин маъно дорад, ки $(f \cdot \varphi)\varphi' \in \mathcal{R}[\alpha; \beta]$. Дар баробарии (44.3) ба ҳудуд гузашта (44.1)-ро ҳосил мекунем. Якчанд мисолҳоро бо тадбиқ намудани методи иваз намудани таъғирёбанда ҳал менамоем

1. Интеграл $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$ -ро ҳисоб кунед.

♣ $x = R \sin t$ мегузорем, онгоҳ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ва $\sqrt{R^2 - x^2} = R \cos t$, $dx = R \cos t dt$ мешавад. Мувофиқи формулаи (44.1) ҳосил мекунем:

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi R^2}{4}. \quad \clubsuit$$

2. Интеграл $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ -ро ҳисоб кунед:

♣ Гузориши $x = \varphi(t) = \cos t$ иҷро мекунем. Нишон медиҳем, ки чунин гузориш ба талабот мувофиқ аст. Дар ҳақиқат:

1) функцияи $x=\cos t$ дар порчаи $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \subset R$ муайян ва бефосила буда,

ҳангоми таъғирёбии $t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ қиматҳои он дар ҳудуди фосилаи

$$\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \text{ меҳобад; } 2) \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

3) ҳосилаи бефосилаи он $x'=\varphi'(t)=-\sin t$ дар $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ вучуд дорад.

Меёбем:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\cos t}{1-\cos t} = \frac{2\cos^2 \frac{t}{2}}{2\sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}, \quad dx = -\sin t \, dt.$$

Дар интегралӣ додашуда мегузорем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} (-\sin t) dt = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg} \frac{t}{2} 2\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \frac{t}{2} dt = \\ &= -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos t}{2} dt = -(t+\sin t) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

3. Исбот намоед, ки ҳангоми дар порчаи $[-a; a]$ бефосила будани функцияи $f(x)$ баробарии зерин ҷой дорад:

♠ Бигузор $f(x)$ - функцияи тоқ, яъне $\forall x \in [-a; a], f(-x) = -f(x)$ бошад.

: 0, ҳангоми тоқ будани $f(x)$;

$$\int_{-a}^a f(x) dx =$$

$$2 \int_0^a f(x) dx, \text{ ҳангоми ҷуфт будани } f(x).$$

$x=-t$ гузошта ҳосил мекунем:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = - \int_a^0 f(x) dx$$

Мувофиқи хосиятҳои интегралӣ муайян:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

Агар $f(x)$ -функсияи ҷуфт, яъне $\forall x \in [-a; a]$, $f(-x) = f(x)$ бошад, онгоҳ

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx.$$

Бинобар ин,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \spadesuit$$

4. Исробот намоед, ки агар $f(x)$ дар $\mathbb{R}$ -функсияи бефосилаи даврӣ бо даврӣ T бошад, онгоҳ барои ихтиёри $a \in \mathbb{R}$ баробарии

$$\int_0^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

ҷой дорад.

♣ Мувофиқи хосиятҳои интегралӣ муайян

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx \quad (*)$$

Таъғирёбандаи нави $x = t + T$ -ро гузаронида бо назардошти муайян будани $f(x)$ дар $\mathbb{R}$ ва $\forall t \in \mathbb{R}$ иҷро шудани шарт $f(t+T) = f(t)$ ҳосил

мекунем:

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(t+T) dt = \int_0^a f(t) dt = -\int_a^0 f(x) dx$$

ин қиматро дар (*) гузошта ҳосил мекунем:

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx. \spadesuit$$

2. Интегрони бо ҳиссаҳо.

ТЕОРЕМАИ 44.3. Агар функсияҳои $u = u(x)$, $v = v(x)$ дар фосилаи $[a; b]$ ҳосилаҳои бефосила (интегронидашаванда)-ро дошта бошанд, онгоҳ баробарии зерин ҷой дорад:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \quad (44.5)$$

♠ Мувофиқи шарт ҳама функцияҳои u , u' , v , v' дар порчаи $[a;b]$ интегронидашавандаанд, бинобар ин, айнияти $uv'=(uv)'-u'v$ -ро дар порчаи $[a;b]$ интегронида ҳосил мекунем:

$$\int_a^b uv'dx = \int_a^b (uv)' dx - \int_a^b vu'dx \quad (44.6)$$

Мувофиқи формулаи Нютон-Лейбнитс $\int_a^b (uv)' dx = (uv) \Big|_a^b$ буда формулаи

(44.6) намуди (44.5)-ро мегирад. ♠

Мисолҳо:

1. Интеграли $J = \int_1^2 x \ln x dx$ ҳисоб карда шавад.

♠ $u = \ln x$, $dv = x dx$ интихоб намуда меёбем: $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$, формулаи (44.5)-ро татбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$J = \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx = 2 \ln 2 - \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}. \quad \spadesuit$$

2. Интеграли $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ -ро ҳисоб кунед.

♠ Ҳангоми $n=0$, $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ ва ҳангоми $n=1$, $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$. Бигузор $n \geq 2$

бошад, онгоҳ $u = \sin^{n-1} x \Rightarrow du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx$, $dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$.

Формулаи (44.5)-ро татбиқ намуда меёбем:

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n$$

Аввал ва охири ин формуларо гирифта формулаи рекурентии

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} \text{ -ро ҳосил мекунем.}$$

Аз ин ҷо, ҳангоми $n=2k$ ва $n=2k+1$ будан мувофиқан ҳосил мекунем:

$$J_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} J_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2};$$

$$J_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} J_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \spadesuit$$

3. Интегралҳои $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ -ро ҳисоб кунед.

♠ Интегралҳои I_n бо гузориши $x = \frac{\pi}{2} - t$ ба интегралҳои J_n оварда мешавад:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - t \right) (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = J_n \spadesuit$$

3. Формулаи Тейлор бо бақияи шакли интегралӣ.

ТЕОРЕМАИ 44.4. Бигуздор функцияҳои $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ дар порчаи $[a; x]$ бефосила ва функцияи $f^{(n+1)}(x)$ дар ин порча интегронидашаванда бошад, онгоҳ, аъзои боқимондаи $r_n(x)$ формулаи Тейлор

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x) \quad (44.7)$$

ро дар намуди интегралҳои муайян бо формулаи

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (44.8)$$

ифода кардан мумкин аст.

♠ Мувофиқи формулаи Нютон-Лейбнитс

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

Ба интегралҳои охирин формулаи интегронӣ бо ҳиссаҳоро чунон тадбиқ намуда $u = f'(t) \Rightarrow du = f''(t) dt, dv = dt \Rightarrow v = t - x$ ҳосил менамоем:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(a) + (t-x)f'(x) \Big|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x (t-x)f''(t)dt = \\
 &= f(a) + (a-x)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt
 \end{aligned}
 \tag{44.9}$$

Формулаи (44.7) барои $n=1$ исбот шуд.

Ба интегралҳои охири (44.9) формулаи интегрони бо ҳиссаҳоро бо тариқи зайл тадбиқ намуда

$$u = f''(t) \Rightarrow du = f'''(t)dt, \quad dv = (x-t)dt \Rightarrow v = -\frac{1}{2!}(x-t)^2$$

ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{f''(t)}{2!}(t-x)^2 \Big|_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{2!} \int_a^x (x-t)^2 f'''(t)dt = \\
 &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{2!} \int_a^x (x-t)^2 f'''(t)dt
 \end{aligned}$$

Формулаи (44.7) барои $n=2$ низ исбот шуд.

Индуксияро тадбиқ намуда, шарт мекунем, ки

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

Ба интегралҳои охирин методи интегрони бо ҳиссаҳоро бо тариқи зайл тадбиқ намуда

$$u = f^{(n)}(t) \Rightarrow du = f^{(n+1)}(t)dt, \quad dv = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \Rightarrow v = -\frac{(x-t)^n}{n!}$$

ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k - \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x-t)^n \Big|_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt
 \end{aligned}$$

ҚАЙД. Шарт мекунем, ки $f^{(n+1)}(t)$ дар порчаи $[a; x]$ бефосила аст. Ба интеграл (44.8) теоремаи қимати миёнаро тадбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt = \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} \Big|_{t=a}^{t=x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \end{aligned}$$

ки дар ин ҷо ξ -ягон нуқтаи дар байни a ва x хобида мебошад. Ҳамин тариқ, аъзои боқимондаи (44.8) дар ҳолати хусусӣ дар худ аъзои боқимондаро дар шакли Лагранж дорад.

Машқҳо барои боби X.

1. Интегралҳои зеринро ҳисоб кунед: $\int_a^b \frac{|x|}{x} dx$; ($a < b$)

2. Нобаробариҳои зеринро исбот намоед:

$$\text{а) } 0 < \int_0^1 \frac{x^7 dx}{\sqrt[3]{1+x^8}} < \frac{1}{8}; \quad \text{б) } 1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e.$$

3. Исбот намоед, ки барои ихтиёри функсияҳои дар порчаи $[a; b]$ интегронидашавандаҳои $f(x)$ ва $g(x)$ нобаробарии Швартс-Буняковский ҷой дорад:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx}$$

4. Аз теоремаи қимати миёна ва ҳалли машқи 3 истифода бурда ба интеграл $\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$ баҳо диҳед.

5. Исбот намоед, ки ҳангоми дар $\mathbb{R}$ бефосила будани функсияи $f(x)$ ва дифференсиронидашаванда будани функсияҳои $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ дар $\mathbb{R}$ формулаи зерин ҷой дорад:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right) = \psi'(x)f[\psi(x)] - \varphi'(x)f[\varphi(x)]$$

6. Аз машқи 5 истифода бурда ҳосила аз интегралҳои зеринро ёбед:

$$\text{а) } F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \ln t dt, \quad (x > 0);$$

$$\text{б) } F(x) = \int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt, \quad (x > 0);$$

$$\text{в) } F(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin t}{t} dt.$$

7. Бо гузоришҳои мувофиқ интегралҳои зеринро ҳисоб кунед:

$$\text{а) } \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx;$$

$$\text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x};$$

$$\text{г) } \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

8. Бисъёраъзогии Лежандр $P_n(x)$ бо $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ ифода меё-

бад. Исбот намоед, ки агар $f(x)$ — бисъёраъзогии дараҷаи $m < n$ бо-
шад, онгоҳ

$$\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = 0$$

Нишондод: Аз формулаи интегрони бо ҳиссаҳо истифода баред.

9. Формулаи интегрони бо ҳиссаҳоро якчанд бор истифода бурда ин-
теграли Эйлерро ҳисоб намоед:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+$$

Табиатан шоир набошя математик
шуда наметавонй.

Галилей

БОБИ ХІ. ИНТЕГРАЛҲОИ ҒАЙРИХОС

§45 МАФҲУМИ ИНТЕГРАЛҲОИ ҒАЙРИХОС. НАЗДИКШАВИ ВА ДУРШАВИИ ОНҲО

1. Ҳангоми омузиши назарияи интегралӣ муайяни Риман барои функсияи $f(x)$ дар фосилаи $[a;b]$ ҳама вақт шартҳои зерин иҷро мешуд:

1. Фосилаи интегралӣ охиринок, яъне $[a;b] \subset \mathbb{R}$;
2. дар фосилаи додашуда функсияи $f(x)$ маҳдуд буд.

Агар шартҳои 1) иҷро намешуд, яъне фосилаи интегралӣ намуди $[a;+\infty)$; $(-\infty;b]$ ё $(-\infty;+\infty)$ —ро медошт, онгоҳ суммаи интегралӣ

$\sigma(f; T, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ маъно надошт, чунки аққалан яке аз Δx_i адад на-

мешуд (ба $+\infty$ баробар). Агар шартҳои 2) иҷро намешуд, онгоҳ вай бо маънои Риман интегронидашаванда (мувофиқи шартҳои зарурии интегронидашавандагӣ) мебуд. Аммо дар таҳлили математикӣ ва татбиқи он омузиши интеграл аз функсияҳои аққалан яке аз шартҳои 1) ё 2) иҷронамешудагӣ, зарур мешавад. Омузиши ин намуди интегралҳо дар асоси назарияи интегралӣ Риман ҷори карда шуда номи интегралҳои ғайрихосро дорад. Қайд менамоем, ки интегралҳои ғайри хоси ҳудудҳои беохирдоштаро интегралҳои ғайрихоси ҷинси якум ва интегралҳои аз функсияҳои номаҳдудро интегралҳои ғайри хоси ҷинси дуюм меноманд. Ба омузиши ин намуди интегралҳо мегузарем.

ТАЪРИФИ 45.1. Бигузор $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ва $f: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{C}$ функцияи дар интервали охирик $[a; \omega)$ муайян бо маънои Риман дар фосилаи ихтиёрии $[a; b] \subset [a; \omega)$ интегронидашаванда бошад.

Агар ҳудуди охирики интеграл

$$\lim_{\eta \rightarrow \omega - 0} \int_a^{\eta} f(x) dx \quad (45.1)$$

мавҷуд бошад, онгоҳ функцияи $f(x)$ дар маънои ғайри хос дар фосилаи $[a; \omega)$ интегронидашаванда ва ҳудуди нишондодашуда интеграл ғайри хос ном дошта бо рамзи

$$\int_a^{\omega} f(x) dx \quad \text{ё} \quad \int_a^{\rightarrow \omega} f(x) dx \quad (45.2)$$

ишорат карда мешавад.

Тирча пеш аз ҳудуди болоии фосилаи интеграл бо мақсади нишон додани интеграл ғайрихос бо нуқтаи махсуси ω гузошта шудааст. Ҳамин тариқ,

$$\int_a^{\rightarrow \omega} f(x) dx := \lim_{\eta \rightarrow \omega - 0} \int_a^{\eta} f(x) dx \quad (45.3)$$

Агар ҳудуди (45.3) мавҷуд буда охирик барояд, онгоҳ интеграл ғайри хос наздикшаванда номида шуда натиҷаи ҳудуд қимати интеграл ғайри хос ҳисобида мешавад.

Дар мавридҳои боқимонда интеграл ғайри хос дуршаванда ном дорад. Барои интеграл ғайри хоси дуршаванда ягон қимати адади вуҷуд надорад. Дар мавриде, ки ҳудуди (45.1) ё (45.3) мавҷуд буда ададҳои $+\infty$, $-\infty$ ё ∞ мебарояд, ба интеграл ғайри хоси дуршавандаи $\int_a^{\rightarrow \omega} f(x) dx$ қиматҳои беохир $+\infty$, $-\infty$ ё ∞ мувофиқан дода мешавад.

Дар баробарии (45.3), $\omega = +\infty$ гузошта барои қимати интеграл ғайри хос дар фосилаи беохир $[a; +\infty)$ баробарии зерин ҳосил мекунем:

$$\int_a^{\omega} f(x) dx := \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt \quad (45.4)$$

Агар дар баробарии (45.3), $\omega \in \mathbb{R}$ бошад, онгоҳ вай қимати интегралӣ ғайри хосро барои охириноки $[a; \omega)$ аз функсияи дар атрофи нуқтаи махсуси ω номаҳдуди $f(x)$ медиҳад:

$$\int_a^{\omega} f(x) dx := \lim_{x \rightarrow \omega-0} \int_a^x f(t) dt \quad (45.4')$$

Агар дар атрофи нуқтаи ω функсияи $f(x)$ маҳдуд ҳисобида шавад, онгоҳ интегралӣ $\int_a^{\omega} f(x) dx$ дар маънои Риман вуҷуд ме-дошт ва баробарии (45.4') хосияти бефосилагии интегралӣ $\int_a^x f(t) dt$ -ро дар нуқтаи $x=\omega$ ифода мекард.

Интегралҳои ғайрихос бо ягона нуқтаи махсуси дар охири ча-пи фосилаи интегралӣ ҷойгир буда, айнан монанди боло, ҷорӣ карда мешавад Бигуздор $-\infty \leq \omega < b < +\infty$ ва $f: (\omega; b) \rightarrow \mathbb{C}$ -функсияи бо маънои Риман дар порчаи ихтиёрии $[a; b] \subset [\omega; b]$ ин-тегронидашаванда бошад.

Монанди баробарии (45.3), мафҳуми интегралӣ ғайрихоси наздикшавандаи намуди

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^{\omega} f(x) dx$$

-ро ҷорӣ намуда ба он қимати адади ро мувофиқи баробарии зерин медиҳем:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\xi \rightarrow \omega-0} \int_a^{\xi} f(x) dx. \quad (45.5)$$

Агар ҳудуди охири адади охиринок набошад, онгоҳ баробарии (45.5) интегралӣ ғайрихоси дуршавандаи $\int_a^b f(x) dx$ -ро муайян мекунад. Дар баробарии (45.5), $x=-\omega$ гузошта интегралӣ ғайрихосро дар фосилаи беохирӣ $(-\infty; b]$ ҳосил мекунем:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^b f(t)dt. \quad (45.5')$$

Агар $\omega \in \mathbb{R}$ ҳисобида шавад, онгоҳ қимати интеграли ғайрихосро дар фосилаи охиринок аз функсияи дар атрофи нуқтаи махсуси ω номаҳдуди $f(x)$ ҳосил мекунем:

$$\int_{-\omega}^b f(x)dx = \lim_{x \rightarrow \omega+0} \int_x^b f(t)dt. \quad (45.5'')$$

Агар дар атрофи нуқтаи ω функсияи $f(x)$ маҳдуд бошад, онгоҳ интегралҳои (45.5) бо маънои Риман вучуд дошта баробарии (45.5'') дар атрофи нуқтаи ω бефосилагии интегралро бо ҳудуди таъғирёбандаи поёни ифода мекунад.

Акнун, бигузор $-\infty \leq \omega_1 < \omega_2 \leq +\infty$ ва функсияи $f(x)$ бо маънои Риман дар ихтиёри порчаи $[a; b] \subset (\omega_1; \omega_2)$ интегронидашаванда бошад. Хосияти аддитивии интегралро истифода бурда, мафҳуми наздикшави ва дуршавии интегралҳои ғайрихосро дар фосилаи $(\omega_1; \omega_2)$ аз функсияи $f(x)$ бо нуқтаҳои махсуси дар охириҳои фосилаи интегронӣ воқеъ буда, бо баробарии зерин ҷори менамоем:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)dx := \int_{\omega_1}^c f(x)dx + \int_c^{\omega_2} f(x)dx, \quad (45.6)$$

ки дар ин ҷо, $c \in (\omega_1; \omega_2)$ мебошад.

Интегралҳои ғайрихоси дар тарафи чапи (45.6) истода наздикшаванда мебошад, агар ҳар ду интегралҳои тарафи ростии (45.6) наздикшаванда бошанд. Дар ҳолатҳои боқимонда интеграл дуршаванда ҳисобида мешавад. Қайд менамоем, ки баробарии (45.6) аз интихоби нуқтаи $c \in (\omega_1; \omega_2)$ вобастагӣ надорад.

Агар дар баробарии (45.6):

- | | | | |
|----|---|----|---|
| а) | $\omega_1; \omega_2 \in \mathbb{R},$ | б) | $\omega_1 = -\infty, \omega_2 = \omega \in \mathbb{R},$ |
| в) | $\omega_1 = \omega \in \mathbb{R}, \omega_2 = +\infty,$ | г) | $\omega_1 = -\infty, \omega_2 = +\infty$ |

қабул намоем, онгоҳ баробарии (46.6) мувофиқан, таърифи наздикшави интегралҳои ғайрихоси намудҳои зеринро медиҳад:

$$a) \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) dx; \quad б) \int_{-\infty}^{\omega} f(x) dx; \quad в) \int_{\omega}^{+\infty} f(x) dx; \quad г) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx. \quad (45.7)$$

Хосияти аддитивиро истифода бурда, айнан монанди боло, мафҳуми наздикшавии интегралӣ гайрихосро бо миқдори охиноки нуқтаҳои махсуси $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, ки $-\infty \leq \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n \leq +\infty$ аст, қорӣ намудан мумкин аст. Бигузор функцияи $f(x)$ дар ҳамаи интервали $(\omega_0; \omega_n)$ ба гайр аз нуқтаҳои $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ муайян ва дар порчаи ихтиёрии $[a; b] \subset (\omega_0; \omega_{n-1})$ ки нуқтаҳои ω_k ($k = \overline{1, n-1}$) -ро дар худ надорад, бо маънои Риман интегронидашаванда бошад Мувофиқи таъриф мегузорем:

$$\int_{\omega_0}^{\omega_n} f(x) dx := \int_{\omega_0}^{\omega_1} f(x) dx + \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) dx + \dots + \int_{\omega_{n-1}}^{\omega_n} f(x) dx. \quad (45.8)$$

Дар тарафи рост интегралҳои намуди (45.7) қойгиранд, ки наздикшавии онҳо бо баробарии (45.6) муайян карда шудааст. Интегралӣ дар тарафи чапи баробарии (45.8) истода наздикшаванда ҳисобида мешавад, агар ҳамаи интегралҳои тарафи ростӣ (45.8) наздикшаванда бошанд (дар мавридҳои боқимонда, дуршаванда ҳисоб карда мешавад:

аққалан яке аз интегралҳои тарафи ростӣ (45.8) дуршаванда бошад.

Қисми зиёди тадқиқотҳое, ки дар ин боб оварда мешаванд танҳо барои интегралҳои дар охири ростӣ фосилаи интегралӣ нуқтаҳои махсус дошта (яъне барои интегралҳои (45.4), (45.4')) исбот карда мешаванд.

Мисолҳо:

1. Наздикшавии интегралӣ $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, ($\alpha > 0$) тадқиқ карда шавад.

♣ Агар $\alpha \neq 1$ бошад, онгоҳ

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \int_a^x t^{-\alpha} dt = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_a^x = \frac{x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Мувофиқи таърифи (45.4) ҳосил мекунем:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} \right) =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \text{агар } 1-\alpha > 0 \quad (\text{интеграл дуршаванда}) \\ -\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{агар } 1-\alpha < 0 \quad (\text{интеграл наздикшаванда}) \end{cases}$$

Агар $\alpha=1$ бошад, онгоҳ $F(x) = \int_a^x \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_a^x = \ln x - \ln a$.

Мувофиқи таърифи (45.4) меёбем:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \ln a) = +\infty \quad (\text{интеграл дуршаванда})$$

Ҳамин тариқ, интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ ҳангоми $\alpha > 1$ наздикшаванда ва ҳангоми $\alpha \leq 1$ дуршаванда мебошад. ♠

2. Бигузор $-\infty < a < b < +\infty$ бошад. Вобаста аз бузургии параметри α интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ ба наздикшавӣ тадқиқ карда шавад.

♠ Агар $\alpha \neq 1$ бошад, онгоҳ ҳангоми $a < x < b$ ҳосил мекунем:

$$F(x) = \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \int_x^b (t-a)^{-\alpha} dt = \frac{(b-a)^{1-\alpha} - (x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Мувофиқи таърифи (45.5) меёбем:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{(b-a)^{1-\alpha} - (x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{1}{(1-\alpha)} \lim_{x \rightarrow a+0} (x-a)^{1-\alpha} =$$

$$= \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}, & \text{агар } 1-\alpha > 0 \quad (\text{интеграл наздикшаванда}) \\ +\infty, & \text{агар } 1-\alpha < 0 \quad (\text{интеграл дуршаванда}) \end{cases}$$

Агар $\alpha=1$ бошад, онгоҳ

$$\int_a^b \frac{dt}{t-a} = \ln|t-a| \Big|_{t=x}^{t=b} = \ln(b-a) - \ln(x-a)$$

ва

$$\int_{-a}^b \frac{dt}{t-a} = \lim_{x \rightarrow a+0} [\ln(b-a) - \ln(x-a)] = +\infty \quad (\text{интеграл дуршаванда}).$$

Ҳамин тариқ, интеграл $\int_{-a}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, ҳангоми $\alpha < 1$ наздикшаванда ва ҳангоми $\alpha \geq 1$ дуршаванда мебошад. ♠

ҚАЙД. Ба фарқияти маҳдудияти параметри α дар мисолҳо 1) ва 2) диққат додан қобили қайд аст. Интеграл бо ҳудуди беохир (мисоли 1) ҳангоми $\alpha > 1$ ва интеграл бо ҳудуди охирик (мисоли 2), ҳангоми $\alpha < 1$ наздикшаванда аст.

СУПОРИШ. Исбот намоед, ки натиҷаи дар ҳалли мисолҳои 1) ва 2) ёфташуда, барои интегралҳои

$$\int_{-\infty}^a \frac{dx}{|x|^\alpha}, \quad (-\infty < a < 0) \quad \text{ва} \quad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \quad (-\infty < a < b < +\infty)$$

низ дуруст мебошад.

3. Нишон диҳед, ки интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ барои $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ дуршаванда аст.

♠ Интегралро дар намуди суммаи интегралҳо чунин тасвир менамоем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

интеграл $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^\alpha}$ дар тарафи рости ин баробари танҳо ҳангоми $\alpha < 1$ ва интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ дуҷум танҳо ҳангоми $\alpha > 1$ наздикшаванда мебошад. Бинобар ин, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ аққалан яке аз ин интегралҳо дуршаванда аст, пас интеграл матлуб дуршаванда мебошад. ♠

4. Нишон диҳед, ки интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}$, ($a > 0$) наздикшаванда аст:

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} \Big|_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

мувофиқи таъриф (45.4) меёбем

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} = \frac{\pi}{2a}. \spadesuit$$

5. Нишон диҳед, ки интеграл $\int_0^a \ln x dx$ ҳангоми $0 < a < +\infty$ наздикшаванда ва ҳангоми $a = +\infty$ дуршаванда мебошад.

♠ Бигузор $0 < a < +\infty$ бошад, онгоҳ интеграл ягона нуқтаи махсуси $x=0$ -ро дорад ва дар ҳолати $0 < x < a$ меёбем:

$$F(x) = \int_x^a \ln t dt = (t \ln t - t) \Big|_x^a = (a \ln a - a) - (x \ln x - x)$$

$$\text{Аз ин ҷо } \int_0^a \ln x dx = \lim_{x \rightarrow +0} F(x) = a \ln a - a \quad (\text{наздикшаванда})$$

Барои мавриди $a = +\infty$ меёбем:

$$\int_0^{+\infty} \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x) - \lim_{x \rightarrow +0} (x \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x}{e} = +\infty$$

(дуршаванда). ♠

6. Наздикшаванда будани интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2 - 1|}}$ тадқиқ карда шавад.

♠ Функцияи зерин интеграл дар нуқтаи $x=1$ номаҳдуд аст, пас мувофиқи хосиятҳои интеграл номуайян ҳосил мекунем:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2 - 1|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \arcsin x \Big|_0^{1-0} + \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \Big|_{1+0}^2;$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2 - 1|}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \arcsin x + \ln(2 + \sqrt{3}) - \lim_{x \rightarrow 1+0} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3}). \spadesuit$$

7. Интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}$ ба наздикшави тадқиқ карда шавад:

♠ Ҳар ду нуқтаҳои охири фосилаи интегралӣ (0 ва 1) барои функсияи зерин интегралӣ нуқтаҳои махсусанд онро дар шакли зерин ифода мекунем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}.$$

Гузориши $\sqrt{x} = t$ гузаронида функсияи ибтидоиро меёбем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} = 2 \int \frac{dt}{t^2-1} = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| + C$$

Аз ин ҷо, мувофиқи баробарии (45.5) меёбем:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} = \ln \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}-1}{\sqrt{\frac{1}{2}}+1} \right| \quad (\text{наздиқшаванда}),$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} = \ln \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| \Big|_{\frac{1}{2}}^{1-0} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}-1}{\sqrt{\frac{1}{2}}+1} \right| = -\infty \quad (\text{дурша-}$$

ванда).

Ҳамин тариқ, интегралӣ додашуда дуршаванда мебошад.

§46. ХОСИЯТҲО ВА МЕТОДҲОИ ҲИСОБ НАМУДАНИ ИНТЕГРАЛҲОИ ҒАЙРИХОС.

1. ТЕОРЕМАИ 46.1 (Хатти). Барои ихтиёри ададҳои α ва β баробарии

$$\int_a^{\omega} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^{\omega} f(x) dx + \beta \int_a^{\omega} g(x) dx \quad (46.1)$$

иҷрошаванда буда аз наздиқшавии интегралҳои тарафи рост наздиқшавии интегралӣ тарафи чап мебарояд.

♠ Бигузор $[a; x] \subset [a; \omega]$ бошад. Мувофиқи хосияти хаттии интегралӣ Риман ҳосил мекунем:

$$\int_a^x (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^x f(t) dt + \beta \int_a^x g(t) dt. \quad (46.1')$$

Наздиқшавии интегралҳои тарафи рости баробарии (46.1) маънои мавҷудияти ҳудуди охиноки тарафи рости баробарии (46.1') -ро ҳангоми $x \rightarrow \omega$; $x < \omega$ дорад.

Бинобар ин, тарафи чап бояд ҳудуди охинок дошта бошад, яъне интеграл дар тарафи чапи баробарии (46.1) истода наздиқшаванда аст.

Ба баробарии (46.1'), ҳангоми $x \rightarrow \omega$, $x < \omega$ ба ҳудуд гузашта (46.1) -ро ҳосил мекунем. ♠

Мисол: Наздиқшавии интеграл $\int_2^{+\infty} \left(4e^{-x} + \frac{5}{x^3} \right) dx$ -ро бо ёрии хосияти хаттӣ тадқиқ менамоем.

$$\int_2^{+\infty} \left(4e^{-x} + \frac{5}{x^3} \right) dx = 4 \int_2^{+\infty} e^{-x} dx + 5 \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) \Big|_2^x + 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x^2} \right) \Big|_2^x = \frac{4}{e^2} + \frac{5}{2}.$$

ҚАЙДИ 46.1. Хосияти исботшуда барои интегралҳои ғайри хоси аз миқдори охиноки нуқтаҳои махсус дошта низ иҷрошаванда аст.

2. ТЕОРЕМАИ 46.2. (Аддитивӣ). Барои ихтиёри $c \in [a; \omega)$ баробарии

$$\int_a^{\omega} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{\omega} f(x) dx \quad (46.2)$$

иҷрошаванда буда аз наздиқшавии яке аз интегралҳои ғайри хоси дар (46.2) дохил буда, наздиқшавии интеграл дигар мебарояд.

♠ Бигузор $a \leq c \leq x < \omega$ бошад. Мувофиқи хосияти аддитивии интеграл Риман ҳосил мекунем:

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^x f(t) dt. \quad (46.3)$$

Шарт мекунем, ки яке аз интегралҳои $\int_a^{\rightarrow\omega} f(x)dx$ ё $\int_c^{\rightarrow\omega} f(x)dx$ наздикшаванда аст. Дар баробарии (46.3) ҳангоми $x \rightarrow \omega$, $x < \omega$ ба ҳудуд гузашта баробарии (46.2) -ро ҳосил мекунем. $\blacktriangle$

ҚАЙДИ 46.2. а) Айнан нишон додан мумкин аст, ки хосияти аддитиви барои интегралҳои ғайри хоси намуди $\int_{\rightarrow\omega}^b f(x)dx$ ҷой до-
рад ва бо баробарии

$$\int_{\rightarrow\omega}^b f(x)dx = \int_{\rightarrow\omega}^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (46.2')$$

ифода меёбад.

б) Таърифи интегралҳои ғайрихос бо нуқтаҳои махсус дар ҳарду охири ҳосилаҳои интеграл

$$\int_{\rightarrow\omega_1}^{\rightarrow\omega_2} f(x)dx := \int_{\rightarrow\omega_1}^c f(x)dx + \int_c^{\rightarrow\omega_2} f(x)dx \quad (*)$$

аз интихоби нуқтаи C вобастаги надорад. Дар ҳақиқат, бигуз-
зор $\omega_1 < c_1 < c_2 < \omega_2$ бошад, онгоҳ

$$\begin{aligned} \int_{\rightarrow\omega_1}^{\rightarrow\omega_2} f(x)dx &= \int_{\rightarrow\omega_1}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{\rightarrow\omega_2} f(x)dx = \int_{\rightarrow\omega_1}^{c_1} f(x)dx + \left(\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{\rightarrow\omega_2} f(x)dx \right) = \\ &= \left(\int_{\rightarrow\omega_1}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx \right) + \int_{c_2}^{\rightarrow\omega_2} f(x)dx = \int_{\rightarrow\omega_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{\rightarrow\omega_2} f(x)dx. \end{aligned}$$

Аз ин ҷо,

$$\int_{\rightarrow\omega_1}^{\rightarrow\omega_2} f(x)dx = \int_{\rightarrow\omega_1}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{\rightarrow\omega_2} f(x)dx = \int_{\rightarrow\omega_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{\rightarrow\omega_2} f(x)dx.$$

Ҳамин тариқ, аз наздикшавии интегралҳои (*) бузургии он, аз нуқтаи C вобастаги надорад.

в) аз таърифи интегралҳои ғайри хос бо миқдори охириҳои ихтиёрии нуқтаҳои махсус маълум мешавад, ки хосияти аддитивӣ ба-
рои онҳо иҷрошаванда аст, яъне $\forall a \neq \omega_k, k = \overline{1, n}$

$$\int_{\rightarrow a_0}^{\rightarrow a_1} f(x) dx = \int_{\rightarrow a_0}^a f(x) dx + \int_a^{\rightarrow a_1} f(x) dx,$$

ки дар ин ҷо, $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n$ -нуқтаҳои махсус.

г) Барои интегралҳои ғайри хоси наздикшаванда чун интегралҳои Риман баробарии зерин ҷой дорад:

$$\int_{\rightarrow a_1}^{\rightarrow a_2} f(x) dx = - \int_{\rightarrow a_2}^{\rightarrow a_1} f(x) dx$$

д) Мувофиқи теоремаи (46.2) (формулаҳои (46.2), (46.2')) наздикшавии интегралҳои ғайрихос бо ягона нуқтаи махсус дар яке аз ҳудудҳои интеграл аз ҳудуди дигар вобастагӣ надорад. Бинобар ин, ҳангоми тадқиқи наздикшавӣ, баъзе мавридҳо, интегралҳои

$$\int_{\rightarrow \omega} f(x) dx \text{ ё } \int_{\rightarrow \omega} f(x) dx$$

-ро бо нишондоди танҳо яке аз ҳудудҳои интеграл дида мебароянд.

3. ТЕОРЕМАИ 46.3. (Иваз намудани таъғирёбандаҳо).

Агар интеграл $\int_a^b f(x) dx$ наздикшаванда, $x = \varphi(t)$ функсияи дар фосилаи $(\alpha; \beta)$ бефосила-дифференсиронидашаванда ва қатъи монотон $(-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty)$ буда $\varphi(\alpha) := \lim_{\substack{t \rightarrow \alpha \\ (t > \alpha)}} \varphi(t) = a$, $\varphi(\beta) := \lim_{\substack{t \rightarrow \beta \\ (t < \beta)}} \varphi(t) = b$ бошад, онгоҳ баробарии

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (46.4)$$

ҷой дошта, интегралҳои охирин наздикшаванда аст.

♠ Мувофиқи хосияти аддитивӣ ба мавриде маҳдуд шудан кифоя аст, ки интегралҳои додашуда нуқтаи махсусро танҳо дар тарафи рости фосилаи интеграл дошта $\alpha \in \mathbb{R}$, $\exists \varphi'(\alpha) \in \mathbb{R}$ аст. Нуқтаи

$\tau \in (\alpha; \beta)$ гирифта теоремаи иваз намудани таъғирёбандаҳоро барои интегралҳои Риман тадбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$\int_a^{\varphi(\tau)} f(x) dx = \int_a^{\tau} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Аз ин ҷо, ҳангоми $\tau \rightarrow \beta$; $\tau < \beta$ муносибати $\varphi(\tau) \rightarrow b$, иҷро шуда дар ҳудуд баробарии (46.4) -ро ҳосил мекунем. ♠

ҚАЙДИ 46.3. Бо ёрии гузориши мувофиқ а) интегралҳои наздикшавандаи ғайри хосро ба интегралҳои Риман ва баръакс: б) интегралҳои ғайри хос аз функцияи номаҳдудро ба интегралҳои фосилаҳои беохир ва баръакс, табдил додан мумкин аст.

Мисолҳо:

$$1. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi, \quad (\text{гузориш } t = \arcsin x);$$

$$2. \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^a} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-a}} = \pi, \quad \left(\text{гузориш } t = \frac{1}{x-a} \right);$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi, \quad (\text{гузориш: } t = \arctg x).$$

4. ТЕОРЕМАИ 46.4. (интегронӣ бо ҳиссаҳо). Бигузор $-\infty \leq \alpha < \omega \leq +\infty$ бошад. Агар функцияҳои u ва v дар ихтиёри порча $[a; x] \subset [a; \omega]$ бо ҳосилаҳояшон $u', v' \in \mathcal{R}[a; b]$ буда, ҳудуди охириноки $u(\omega)v(\omega) := \lim_{\substack{t \rightarrow \omega \\ (t < \omega)}} u(t)v(t)$ вуҷуд дошта бошад, онгоҳ баробарии

$$\int_a^{\rightarrow \omega} u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^{\omega} - \int_a^{\rightarrow \omega} v(x) du(x), \quad (46.5)$$

иҷро шуда аз наздикшавии яке аз интегралҳои (46.5) наздикшавии интегралҳои дигар ҳосил мешавад.

♠ Бигузор $a < t < \omega$ бошад. Мувофиқи формулаи интегронӣ бо ҳиссаҳо барои интегралҳои Риман ҳосил мекунем:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

Дар ин ҷо, ҳангоми $t \rightarrow \omega$, $t < \omega$ бо ҳудуд гузашта формулаи (46.5) -ро ҳосил мекунем. ♠

ҚАЙДИ 46.4 а) Теоремаи (46.4) -ро барои интегралҳои ғайрихоси дар ҳудуди поёни ва ҳатто дар ҳар ду охири фосилаи интегрони нуқтаҳои махсус дошта ҷорӣ намудан мумкин аст. Ин корро мустақило-на иҷро намоед. б) Агар функсияи $f(x)$ дар $(a;b)$ муайян ва бефосила (ба ғайр аз маҷмӯи охири нуқтаҳо)

буда интегралҳои ғайрихоси $\int_a^b f(x)dx$ наздикшаванда бошад, онгоҳ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоии умумишудаи $F(x)$ вуҷуд дошта дар порчаи $[a;b]$ бефосила мебошад. Маҷмӯи ҳамаи функсияҳои ибтидоии умумишуда намуди

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C \quad (46.6)$$

-ро дорад, ки дар ин ҷо C -доими иختиёри. Дар (46.6) $x=a$ ва баъд $x=b$ гузошта аз баробарии дуҷуми ҳосилшуда якумро тарҳ намуда, ҳосил мекунем:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \quad (46.7)$$

Ҳамин тариқ, интегралҳои ғайрихоси наздикшавандаро бо формулаи Ньютон-Лейбнитс ҳисоб намудан мумкин аст, агар барои онҳо функсияи ибтидоии умумишуда маълум бошанд.

в) На ҳамаи хосиятҳои интегралҳои муайяни Риман барои интегралҳои ғайри хос тадбиқшаванда аст. Масалан, ҳосили зарби ду функсияҳои бо маънои Риман дар ягон порча интегронидашаванда боз функсияи дар он порча интегронидашаванда аст, аммо барои интегралҳои ғайри хос ин тасдиқот на ҳама вақт ҷой дорад.

Функсияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ вуҷуд доранд, ки интегралашон дар ягон фосила наздикшаванда буда интеграли ҳосили зарби онҳо дар ҳамон фосила дуршаванда аст. Масалан, $f(x)=g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Маълум

аст, ки $\int_{-0}^1 \frac{dt}{\sqrt{x}}$ наздикшавандаи буда интеграл аз ҳосили зарби онҳо

$$\int_{-0}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-0}^1 \frac{dt}{x}$$

дуршаванда аст.

Акнун якчанд мисолҳоро дида мебароем.

Мисоли 1. $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ —ро ёбед. Бо гузориши $x=\frac{1}{t}$ ҳосил ме-
кунем:

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Мисоли 2. $J_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$ ($n=0,1,2,\dots$) —ро ёбед:

♠ Формулаи интегронӣ бо ҳиссаҳоро тадбиқ ($n>0$) намуда меёбем:

$$J_n = x \ln x \Big|_0^1 - n \int_0^1 (\ln x)^{n-1} dx = -n J_{n-1},$$

чунки $\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^n = 0$ аст. Ин баробариҳо бо n бор истифода бурдани қоидаи Лопитал ҳосил намудан мумкин аст:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)^n}{\frac{1}{x}} = -n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)^{n-1}}{\frac{1}{x}} = \dots = (-1)^{n+1} n! \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = 0$$

Дар баробарии $J_n = -nJ_{n-1}$, n -ро пай дар пай ба $(n-1)$, $(n-2)$, ..., 2 , 1 иваз намуда барои $J_0 = \int_0^1 dx = 1$ ҳосил мекунем ва дар натиҷа $J_n = (-1)^n n!$ ҳосил мешавад, ки дар ин ҷо $0! = 1$ аст. ♠

Мисоли 3. $J_n = \int_{\rightarrow 0}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$ (интегралҳои Эйлер) -ро ёбед.

♠ Гузориши $x=2t$ мегузаронем, онгоҳ

$$J_n = 2 \int_{\rightarrow 0}^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2t dt = 2 \int_{\rightarrow 0}^{\frac{\pi}{4}} \ln(2 \sin t \cos t) dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_{\rightarrow 0}^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt + 2 \int_{\rightarrow 0}^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt$$

дар интегралҳои охирин $t = \frac{\pi}{2} - y$ мегузаронем, онгсҳ

$$J_n = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_{\rightarrow 0}^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin y dy = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_{\rightarrow 0}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt,$$

яъне $J_n = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2J$

Аз ин ҷо $y = -\frac{\pi}{2} \ln 2$. ♠

Мисоли 4. $J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ ($n=0,1,2,\dots$) -ро ёбед:

♠ Интегрони бо ҳиссаҳоро, ҳангоми $n>0$ истифода бурда ҳосил мекунем:

$$J_n = x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = nJ_{n-1}.$$

Дар формулаи рекурентии ҳосилшуда монанди мисоли 3 амал менамоем.

Азбаски

$$J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1,$$

пас

$$J_n = n! \cdot \spadesuit$$

§47. БАЪЗЕ НИШОНАҲОИ НАЗДИКШАВИИ ИНТЕГРАЛҲОИ ҒАЙРИХОС АЗ ФУНКСИЯҲОИ ҒАЙРИ МАНФИ.

Дар ин ҷо, шарт карда мешавад, ки $-\infty < a < \omega$ буда дар порчаи ихтиёрии $[a; b] \subset [a; \omega)$ ҳамаи функсияҳо бо маънои Риман интегро-нидашавандаанд.

ТЕОРЕМАИ 47.1. Агар функсияи $f: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ғайриманфӣ, яъне барои $\forall x \in [a; \omega)$ функсияи $f(x) \geq 0$ бошад, онгоҳ

$\lim_{\substack{x \rightarrow \omega \\ (x < \omega)}} F(x) = M \leq +\infty$, ки дар ин ҷо $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ буда наздикшавии ин-

теграл $\int_a^{\omega} f(t) dt$ ба маҳдуд будани функсияи $F(x)$ баробарқувва аст.

♠ Бигузор $a \leq x_1 < x_2 < \omega$ бошад, онгоҳ мувофиқи шарти ғайриманфӣ будани функсияи $f(x)$ интеграл $\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \geq 0$ мебошад.

Бинобар ин,

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t) dt \leq \int_a^{x_1} f(t) dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt = \int_a^{x_2} f(t) dt \leq F(x_2).$$

Ҳамин тариқ, $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$, яъне функсияи $F(x)$ камнашаванда мебошад. Бигузор $M = \sup_{x \in [a; \omega)} F(x)$ бошад, онгоҳ $M \leq \infty$ ва

барои ихтиёри $E < M$ нуқтаи $x_E \in [a; \omega)$ ёфт мешавад, ки $F(x_E) > E$. Аз тарафи дигар, $\forall x > x_E$ шарти $F(x) \geq F(x_E) > E$. Ҳамин тариқ, $\forall E < M$, $\exists x_E \in [a; \omega): F(x) > E$, яъне $\lim_{\substack{x \rightarrow \omega \\ (x < \omega)}} F(x) = M \leq +\infty$. Агар $F(x)$

маҳдуд бошад, онгоҳ M -адад ва шарти $\lim_{\substack{x \rightarrow \omega \\ (x < \omega)}} F(x) = M$ наздикшавии

интегралро ифода мекунад. Агар $M=+\infty$ бошад, онгоҳ интеграл ба $+\infty$ дур мешавад. Баръакс, агар интеграл наздикшаванда бошад, онгоҳ функсияи $F(x)$ аз боло-бо бузургии интеграл маҳдуд аст. Агар интеграл ба $+\infty$ дуршаванда бошад, онгоҳ функсияи $F(x)$ аз боло номаҳдуд аст. ♠

ТЕОРЕМАИ 47.2. (нишонаи муқоиса). Агар барои функсияҳои ғайриманфии $f, g: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ нобаробарии $0 \leq f(x) \leq g(x)$ барои ҳамаи x аз ягон атрофи суроҳшудаи чапи нуқтаи ω иҷро шавад, онгоҳ:

а) $\int_a^{\omega} f(x) dx$ наздикшаванда, агар $\int_a^{\omega} g(x) dx$ наздикшаванда;

б) $\int_a^{\omega} g(x) dx$ дуршаванда, агар $\int_a^{\omega} f(x) dx$ дуршаванда бошад.

♠ Ҳисоб менамоем, ки $\forall x \in [a; \omega)$ нобаробарии $0 \leq f(x) \leq g(x)$ иҷрошаванда аст, онгоҳ

$$0 \leq \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt \leq \int_a^{\omega} g(t) dt \leq +\infty. \quad (47.1)$$

Агар $\int_a^{\omega} g(t) dt = M < +\infty$ бошад, онгоҳ аз нобаробарии (47.1),

шарти $\int_a^x f(t) dt \leq M < +\infty$ барои ихтиёри $x \in [a; \omega)$ ҳосил мешавад.

Бинобарин, мувофиқи теоремаи (47.1) интеграл $\int_a^{\omega} f(t) dt$ наздикшаванда аст.

Тасдиқоти а) исбот шуд, аммо тасдиқоти б) натиҷаи он аст. ♠

Ба сифати мисол наздикшавии интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ -ро дида

мебароем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^1 e^{-x^2} dx + 2 \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad (47.2)$$

ҳангоми $x \geq 1$ меёбем:

$$x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad (47.3)$$

Азбаски интеграл $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ наздикшаванда буда шарт (47.3)

ичрошаванда аст, пас интеграл (47.2) наздикшаванда мебошад.

ТЕОРЕМАИ 47.3. (нишонаи муқоиса). Бигузор барои функцияҳои ғайриманфии $f, g: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ баҳои асимптотикии $f = O(g)$ ҳангоми $t \rightarrow \omega$, $t < \omega$ ҷой дошта бошад, онгоҳ

а) $\int_a^{\omega} f(x) dx$ наздикшаванда, агар $\int_a^{\omega} g(x) dx$ наздикшаванда;

б) $\int_a^{\omega} g(x) dx$ дуршаванда, агар $\int_a^{\omega} f(x) dx$ дуршаванда бошад.

♠ Мувофиқи таърифи $f = O(g)$ ва ҳангоми $t \rightarrow \omega$, $t < \omega$ ҳосил мекунем:

$$\exists c < \omega, \exists M > 0, \forall x \in [c; \omega): 0 \leq f(x) \leq M g(x). \quad (47.4)$$

Агар интеграл $\int_a^{\omega} g(x) dx$ наздикшаванда бошад, онгоҳ инте-

грал $\int_c^{\omega} M g(x) dx$ наздикшавандаи аст. Бинобар ин, аз нобароба-

рии (47.4) мувофиқи теоремаи 47.2, наздикшавии интеграл

$\int_c^{\omega} f(x) dx$ мебарояд, ки он ба наздикшавии интеграл $\int_a^{\omega} f(x) dx$ ба-

робарқувва мебошад.

Тасдиқоти б) натиҷаи тасдиқоти а) мебошад. ♠

Якчанд мисолҳо дида мебароем:

Мисоли 1. Наздикшавии интеграли $\int_2^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x^\alpha} dx$, ҳангоми $\alpha > 1$ тадқиқ карда шавад.

♠ Адади $\varepsilon > 0$ -ро мегирем, ки $\alpha - \varepsilon > 1$ бошад, онгоҳ мувофиқи қоидаи Лопитал нишон дода мумкин аст, ки $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^p x}{x^\varepsilon} = 0$ аст. Бинобар ин, ҳангоми $x \rightarrow +\infty$, $\ln^p x = O(x^\varepsilon)$ ва $\frac{\ln^p x}{x^\alpha} = O\left(\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}\right)$ мебошад. Азбаски $\alpha - \varepsilon > 1$ пас интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x^{\alpha-\varepsilon}} dx$ наздикшаванда. Бинобар ин, мувофиқи теоремаи (47.3) интеграл додашуда низ наздикшаванда мебошад. ♠

СУПОРИШ. Исбот намоед, ки ҳангоми $\alpha < 1$ интеграл додашуда дуршаванда, ҳангоми $\alpha = 1$ наздикшавии он аз p (ҳангоми $p < -1$ наздикшаванда ва ҳангоми $p \geq -1$ дуршаванда) вобаста аст.

Мисоли 2. Наздикшавии интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|x - [x] + \sin x|}{x^2 + x + 1} dx$ тадқиқ карда шавад.

♠ Ба функцияи зери интеграл, ҳангоми $x \rightarrow +\infty$ баҳо медиҳем:

$$\frac{|x - [x] + \sin x|}{x^2 + x + 1} \leq \frac{x - [x] + |\sin x|}{x^2 + x + 1} \leq \frac{2}{x^2},$$

яъне ҳангоми $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{|x - [x] + \sin x|}{x^2 + x + 1} = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Азбаски $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ наздикшаванда, пас интеграл додашуда наздикшаванда мебошад. ♠

ТЕОРЕМАИ 47.4. (шакли ҳудудии нишонаи муқоиса). Агар $f, g: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ функцияҳои ғайриманфӣ ва

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \omega \\ (x < \omega)}} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in [\alpha; +\infty)$$

бошад, онгоҳ

а) ҳангоми $0 \leq k < +\infty$ аз наздикшавии $\int_a^{\omega} g(x)dx$ наздикшавии $\int_a^{\omega} f(x)dx$;

б) ҳангоми $0 < k \leq +\infty$ аз наздикшавии $\int_a^{\omega} f(x)dx$ наздикшавии $\int_a^{\omega} g(x)dx$ мебарояд.

♠ Дар ин мавриди а) ҳангоми $x \rightarrow \omega$, $x < \omega$ баробарии $f = O(g)$ ва дар ҳолати б) ҳангоми $x \rightarrow \omega$, $x < \omega$ баробарии асимптотики $g = O(f)$ ҳосил мешавад. Ҳамин тариқ, теоремаи 47.4 натиҷаи теоремаи 47.3 мебошад. ♠

НАТИҶАИ 47.1. Агар барои функсияҳои ғайриманфии $f, g: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$, ҳангоми $x \rightarrow \omega$; $x < \omega$ муносибати $f \sim g$ ҷой дошта бошад, онгоҳ наздикшавии интегралҳои $\int_a^{\omega} f(x)dx$ ба наздикшавии интегралҳои $\int_a^{\omega} g(x)dx$ баробарқувва аст.

♠ Азбаски муносибати $f \sim g$ ба шарти $\lim_{\substack{x \rightarrow \omega \\ (x < \omega)}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ баробарқувва аст, пас тасдиқот аз теоремаи 47.4 мебарояд. ♠

НАТИҶАИ 47.2. Агар $f: [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ функсияи ғайриманфӣ буда ададҳои $\alpha, A \in \mathbb{R}$ бо хосияти $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\alpha f(x)) = A > 0$ мавҷуд бошад, онгоҳ интегралҳои $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, ҳангоми $\alpha > 1$ наздикшаванда ва ҳангоми $\alpha \leq 1$ дуршаванда мебошад.

♠ Дар ҳақиқат, шарти додашуда, ҳангоми $x \rightarrow +\infty$ ба шарти $f(x) \sim \frac{A}{x^\alpha}$ баробарқувва аст. Бинобар ин, дар асоси тасдиқоти на-

тиҷаи 47.1 хулоса мебарояд, ки наздикшавии интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ аз наздикшавии интеграл $A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$ вобаста аст. ♠

Ба сифати мисол, наздикшавии интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$ -ро тадқиқ менамоем, ки дар ин ҷо, $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ -бисёрраъзогиҳои мувофиқан дараҷаҳои n ва m :

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$Q_m(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m.$$

Азбаски, ҳангоми $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{x^n \left(1 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right)}{x^m \left(1 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m} \right)} \sim \frac{x^n}{x^m} = \frac{1}{x^{m-n}},$$

пас ҳангоми $m-n \geq 2$ интеграл додашуда наздикшаванда ва ҳангоми $m-n \leq 1$ -дуршаванда мебошад.

НАТИҶАИ 47.3. Агар $f: [a; \omega] \rightarrow \mathbb{R}$ функсияи ғайри манфӣ, $\omega < +\infty$ буда, ададҳои $\alpha, A \in \mathbb{R}$ бо хосияти $\lim_{x \rightarrow \omega-0} (\omega-x)^\alpha f(x) = A > 0$ ма-

вҷуд бошад, онгоҳ интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$, ҳангоми $\alpha < 1$ наздикшаванда ва ҳангоми $\alpha \geq 1$ дуршаванда мебошад.

♠ Дар ҳақиқат, шарт додашуда, ҳангоми $x \rightarrow \omega-0$ ба муносибати $f(x) \sim \frac{A}{(\omega-x)^\alpha}$ баробарқувва аст. Бинобар ин, мувофиқи на-

тиҷаи 47.1 хулоса мебарорем, ки наздикшавии интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$

ба характери наздикшавии интеграл $A \int_a^\omega \frac{dx}{(\omega-x)^\alpha}$ якхела аст. ♠

Мисолҳо.

1. Интеграл $\int_{-0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x + \cos x)}$ дар нуқтаҳои $x=0$ ва $x=+\infty$ нуқтаҳои махсус дорад. Азбаски, ҳангоми $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x}(x + \cos x)} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \quad \left(\frac{3}{2} > 1\right);$$

ва ҳангоми $x \rightarrow +0$

$$\frac{1}{\sqrt{x}(x + \cos x)} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}, \quad \left(\frac{1}{2} < 1\right),$$

пас интеграл додашуда наздикшаванда аст.

2. Интеграл $\int_{-0}^{+1} \frac{x+1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ дар нуқтаҳои $x=0$ ва $x=1$ нуқтаҳои махсус дорад. Азбаски, ҳангоми $x \rightarrow +0$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}, \quad \left(\frac{1}{2} < 1\right),$$

ва ҳангоми $x \rightarrow 1-0$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{3}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}, \quad \left(\frac{1}{2} < 1\right),$$

пас интеграл додашуда наздикшаванда аст.

§48. МУТЛАҚ ВА ШАРТАН НАЗДИКШАВИИ ИНТЕГРАЛҲОИ ҒАЙРИХОС. НИШОНАҲОИ АБЕЛ ВА ДИРИХЛЕ.

Дар ин банд масъалаи наздикшавӣ ва дуршавии интегралҳои ғайри хосро дида мебароем, ки функсияи зерини интеграл аломаташро дигар мекунад.

ТЕОРЕМАИ 48.1 (критерияи Коши). Барои наздикшавии интегралҳои ғайри хоси $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ зарур ва кифоя аст, ки шартҳои зерин иҷро шаванд:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c_\varepsilon \in [a, \omega), \forall x', x'' \in (c_\varepsilon; \omega): \left| \int_{x'}^{x''} f(t) dt \right| < \varepsilon \quad (48.1)$$

♣ Мувофиқи таъриф наздикшавии интеграл $\int_a^{\omega} f(t) dt$ ба мавҷудияти ҳудуди охиноки $\lim_{\substack{x \rightarrow \omega \\ (x < \omega)}} F(x)$ баробарқувва мебошад, ки дар ин ҷо

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (48.2)$$

Критерияи (Кош)-и мавҷудияти ҳудуди охиноки функцияи $F(x)$ -ро аз руи базаи $x \rightarrow \omega, x < \omega$ тадбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c_\varepsilon \in [a, \omega), \forall x', x'' \in (c_\varepsilon; \omega): |F(x') - F(x'')| < \varepsilon. \quad (48.3)$$

Тасвири функцияи $F(x)$ -ро дар шакли (48.2) ба назар гирифта меёбем:

$$|F(x') - F(x'')| = \left| \int_a^{x'} f(t) dt - \int_a^{x''} f(t) dt \right| = \left| \int_{x''}^{x'} f(t) dt \right|$$

Ҳамин тариқ, шарти (48.3) ба шарти (48.1) баробарқувва аст. ♣

ТАЪРИФИ 48.1. Интегралҳои ғайрихоси $\int_a^{\omega} f(x) dx$ мутлақ наздикшаванда ном дорад, агар интеграл $\int_a^{\omega} |f(x)| dx$ наздикшаванда бошад.

ТЕОРЕМАИ 48.2. Агар интегралҳои ғайрихоси $\int_a^{\omega} f(x) dx$ мутлақ наздикшаванда бошад, онгоҳ вай наздикшаванда аст.

♣ Мувофиқи шарт, интеграл $\int_a^{\omega} f(x) dx$ наздикшаванда аст, пас барои он шарти критерияи Коши иҷрошаванда мебошад:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in (a, 0), \forall x', x'' \in (x_0, 0): \left| \int_{x'}^{x''} f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Шарти критерияи Коши барои интеграл $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ низ иҷрошаванда аст:

$$\left| \int_{x'}^{x''} f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x'}^{x''} f(t) dt \right| < \varepsilon. \blacktriangle$$

Барои муқарраи намунаи мушак наздиқшавии интегралро аз нишондорон

Наздиқшавии интегралрои функсияҳои тайри ҷанбӣ (§47) низ истифода мебаранд. Масалан, интегралрои

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^\lambda} dx \quad \text{ва} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x^\lambda} dx, \quad (\lambda \neq 1), \quad (48.4)$$

қантоми $\lambda > 1$ мушак наздиқшаванда мебошанд. Ин аз иҷрошудани нобаробариҳои

$$\left| \frac{\cos \lambda x}{x^\lambda} \right| \leq \frac{1}{x^\lambda} \quad \text{ва} \quad \left| \frac{\sin \lambda x}{x^\lambda} \right| \leq \frac{1}{x^\lambda}$$

ва аз наздиқшавии интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ қантоми $\lambda > 1$ мебарояд.

ТАЪРИФИ 48.2. Интеграл тайриқос парти наздиқшаванда ном дорад, агар вай наздиқшаванда буда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ҳақиқатан бошад.

Бояд нишондорон наздиқшавии интегралрои тайриқосро аз функсияҳо меҷӯем, ки тайриманфӣ буданишон парти нест.

ТЕОРЕМАИ 48.3 (Нипонан Дирхле). Агар функсияи $g: [a, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ арзуншаванда, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ ва функсияи $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

дар $[a, 0)$ маҳдуд бошад, онгоҳ интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ наздиқшаванда аст.

♠ $M = \sup_{x \in [a; \omega)} |F(x)|$ гузошта аз руи $\varepsilon > 0$ адади $c_\varepsilon \in [a; \omega)$ -ро тавре

меёбем, ки $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}$, $x > c_\varepsilon$ монад, онгоҳ $\forall x', x'' \in [c_\varepsilon; \omega)$ теоремани

дуюми қимати миёнаро тадбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{x'}^{x''} f(t)g(t)dt \right| &= \left| g(x') \int_{x'}^{\xi} f(t)dt + g(x'') \int_{\xi}^{x''} f(t)dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{4M} \left(\left| \int_{x'}^{\xi} f(t)dt \right| + \left| \int_{\xi}^{x''} f(t)dt \right| \right) = \\ &= \frac{\varepsilon}{4M} \left(\left| \int_a^{\xi} f(t)dt - \int_a^{x'} f(t)dt \right| + \left| \int_a^{x''} f(t)dt - \int_a^{\xi} f(t)dt \right| \right) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4M} (|F(\xi)| + |F(x')| + |F(x'')| + |F(\xi)|) \leq \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 4M = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ҳамин тариқ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c_\varepsilon \in [a; \omega), \forall x', x'' \in [c_\varepsilon; \omega): \left| \int_{x'}^{x''} f(t)g(t)dt \right| < \varepsilon,$$

яъне барои интегралҳои додашуда шартҳои критерияи Коши иҷро шуд. ♠

Ба сифати мисол интегралҳои (48.4)-ро ҳангоми $\lambda > 0$ дида мебароем. Бо ин мақсад, $g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$, $f(x) = \cos ax$ ё $f(x) = \sin ax$ гузошта мебинем, ки $g(x)$ монотон камшаванда, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ ва

$$\left| \int_1^x \cos at dt \right| = \left| \frac{\sin ax - \sin a}{a} \right| \leq \frac{2}{|a|} \text{ аст. Айнан меёбем, ки } \left| \int_1^x \sin at dt \right| \leq \frac{2}{|a|} \text{ ме-}$$

бошад. Ҳамин тариқ, ҳангоми $\lambda > 0$ интегралҳои (48.4) наздикшаванда мебошанд. Муқарар намуда будем, ки ҳангоми $\lambda > 1$ ин наздикшави мутлақ аст. Ҳангоми $0 < \lambda \leq 1$ интегралҳои (48.4) шартан наздикшавандаанд.

Инро нишон медиҳем. Аз ифодакуниҳои

Математика ақро ба

тартиб медарсрад

М.В.Ломоносов

БОБИ XII. БАЪЗЕ ТАДБИҚҲОИ ҲИСОБИ ИНТЕГРАЛӢ.

§49. ҲИСОБ НАМУДАНИ МАСОҲАТИ ФИГУРАИ ҲАМВОР ВА ҲАҶМИ БАЪЗЕ ҚИСМҲОИ ФАЗОӢ.

1. *Элементҳои топология дар ҳамвора.* Бигузор A -мачмуи нуқтаҳои ихтиёрии ҳамвори координатии R^2 ва CA -иловаи мачмуи A то R^2 , яъне $CA=R^2\setminus A$, бошад. Айён аст, ки $C\emptyset=R^2$, $CR^2=\emptyset$. Нуқтаи $(x_0;y_0)\in A$ -нуқтаи дохилии мачмуи A ном дорад, агар доираи кушоди $U_{r_0}(x_0;y_0):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r_0^2$ мавҷуд бошад, ки $U_{r_0}(x_0;y_0)\subset A$ бошад. Мачмуи ҳамаи нуқтаҳои дохилии мачмуи A -ро бо рамзи A^0 ишора менамоем. Нуқтаи $(x_1;y_1)\in CA$ -нуқтаи берунии мачмуи A ном дорад, агар доираи кушоди $U_{r_1}(x_1;y_1):(x-x_1)^2+(y-y_1)^2<r_1^2$ мавҷуд бошад, ки $U_{r_1}(x_1;y_1)\subset CA$. Мачмуи $N\subset R^2$ дар R^2 кушод ном дорад, агар ҳамаи нуқтаҳои он дохилӣ бошанд, яъне $N^0=N$. Якҷоякунии ихтиёрии оилаи мачмуъҳои кушод, мачмуи кушод мебошад (исбот намоед). Мачмуъҳои $\emptyset$ ва R^2 кушод ҳисобида мешаванд. Дохили A^0 ва беруни $(CA)^0$ —и ҳаргуна мачмуи $A\subset R^2$, мисолҳои мачмуи кушод шуда метавонанд. Мачмуи $B\subset R^2$ сарбаст ном дорад, агар онро дар намуди $B=CA=R^2\setminus A$ ифода кардан мумкин бошад, ки дар ин ҷо A —мачмуи кушод аст.

Бурриши оилаи ихтиёрии мачмуъҳои сарбаст мачмуи сарбаст мебошад (исбот намоед). Якҷоякунии миқдори охирноки оилаи мачмуъҳои сарбаст мачмуи сарбаст мебошанд (исбот намоед!). Мачмуи $\emptyset$ ва R^2 низ сарбаст ҳисобида мешаванд. Бигузор $A\subset R^2$ мачмуи ғайри холя бошад. Нуқтаи $(x_r;y_r)\in R^2$ нуқтаи сарҳадии

маҷмуи A ном дорад, агар вай на нуқтаи дохилӣ ва на нуқтаи берунии он бошад, яъне дар ихтиёри доираи $U_r(x_r; y_r)$ чӣ нуқтаҳои маҷмуи A ва чӣ нуқтаҳои маҷмуи CA бошанд. Маҷмуи ҳамаи нуқтаҳои сарҳадии маҷмуи A -ро сарҳади он номида ба ∂A ишора менамоем. Азбаски $\forall A \subset \mathbb{R}^2, A^0 \cup \partial A \cup (CA)^0 = \mathbb{R}^2$, пас $\partial A = \mathbb{R}^2 \setminus (A^0 \cup (CA)^0)$. Ҳамин тариқ, сарҳади ∂A ҳаргуна маҷмуи $A \subset \mathbb{R}^2$, маҷмуи сарбаст аст (ҳамчун иловаи маҷмуи кушод). Сарба-сткунандаи маҷмуи A гуфта хурдтарин маҷмуи сарбастии $\bar{A}$ -ро ме-номанд, ки маҷмуи A -ро дар худ дорад. Айён аст, ки $\bar{A} = A \cup \partial A$. Ҳамин тариқ, барои ихтиёри маҷмуи A дар ҳамворӣ муносибатҳои зерин ҷой дорад:

$$\emptyset \subset A^0 \subset A \subset \bar{A} = A^0 \cup \partial A \subset \mathbb{R}^2.$$

Маҷмуи сарбастии F алоқанок ном дорад, агар онро дар намуди якҷоякунии ду маҷмуҳои сарбастии ғайрихолии бурриш надошта ифода кардан мумкин набошад. Нишон додан мумкин аст, ки $\mathbb{R}^2$ алоқанок аст.

ЛЕММАИ 49.1. Ҳаргуна порчаи ростхатаи $I \in \mathbb{R}^2$ алоқанок аст.

♠ Порчаи I -ро дар тири ададӣ ҷойгир намуда масшоби мувофиқ интихоб менамсем, онгоҳ ҳисоб намудан мумкин аст, ки вай ваъзияти порчаи $[0;1]$ -и тири ададиро мегирад. Шарт менамоем, ки тасдиқоти лемма иҷро нашуд, яъне порчаи $[0;1]$ алоқанок нест, онгоҳ ду маҷмуҳои $E_1 \neq \emptyset, E_2 = \emptyset$ ёфт мешаванд, ки $E_1 \cap E_2 = \emptyset, E_1 \cup E_2 = [0;1]$. Функцияи $f: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ -ро чунин ҷорӣ менамоем:

$$f(x) = \begin{cases} +1, & \text{агар } x \in E_1, \\ -1, & \text{агар } x \in E_2. \end{cases} \quad (49.1)$$

Барои он меёбем: $\emptyset = f^{-1}(\emptyset), f^{-1}(+1) = E_1, f^{-1}(-1) = E_2, f^{-1}(\{-1;1\}) = [0;1]$. Азбаски ҳамаи маҷмуҳои $\emptyset, E_1, E_2, [0;1]$ сарба-ста мебошанд, пас барои функцияи f прообрази ҳаргуна маҷмуи сарба-баста боз сарбаста мебошад. Аз ин ҷо мувофиқи критерияи бефоси-лагӣ хулоса мебарояд, ки функция дар порчаи $[0;1]$ бефосила мебо-шад. Теорема оиди қиматҳои фосилавиро барои он тадбиқ намуда ҳосил мекунем, ки функцияи $f(x)$ дар порчаи $[0;1]$ ҳамаи қиматҳои

дар байни -1 ва 1 бударо қабул мекунад. Ин зиддияти ҳосилшуда дурустии Леммаро ифода менамояд. ♠

2. *Фигураҳои бисъёркунҷа дар ҳамворӣ ва масоҳати онҳо.*

Маҷмуи $A \subset R^2$ маҳдуд ном дорад, агар квадрати $K \subset R^2$ ёфт шавад, ки $A \subset K$ бошад. Ҳар гуна зермаҷмуи маҳдуди ҳамвориро фигурҳои ҳамвор меномем. Фигураи A -ро фигурҳои бисъёркунҷа меноманд, агар сарҳади он (∂A) -ро дар намуди якҷоякунии миқдори охирноки порчаҳои ростхатта ифода кардан мумкин бошад.

СУПОРИШ. Исбот намоед, ки якҷоякунии ва бурриши миқдори охирноки бисъёркунҷа фигурҳои бисъёркунҷа мебошад. Сарҳади ∂A фигурҳои бисъёркунҷа боз фигурҳои бисъёркунҷа мебошад, чунки айён аст, ки $\partial(\partial A) = A$ аст. Аз формулаҳои геометрияи элементарӣ истифода бурда масоҳати $\mu(A)$ -и ихтиёри фигурҳои бисъёркунҷаи A -ро дар ҳамворӣ ҳисоб намудан мумкин аст. Дар мавриде ки фигурҳои бисъёркунҷа нуқтаҳои дохили надорад, яъне $A \subset \partial A$, $\mu(A) = 0$ мегузорем. Дар мавриде, ки A нуқтаҳои дарунӣ дорад, фигурҳои A -ро ба бисъёркунҷаҳои барҷаста бо хатҳои рост нуқтаҳои умумии дохили надоштае ҷудо мекунем, ки порчаҳои онҳоро пайваस्तкунанда, сарҳади ∂A фигурҳои A -ро ташкил диҳад. Ҳар кадом бисъёркунҷаи барҷастаро дар намуди якҷоякунии миқдори охирноки секунҷаҳо бе нуқтаҳои умумии дохилӣ бо пайваस्त намудани яке аз қуллаҳои боқимонда, тасвир менамоем. Масоҳати ҳар кадом бисъёркунҷаро бо формулаҳои маълум ҳисоб намуда масоҳати $\mu(A)$ фигурҳои A -ро чун суммаи масоҳатҳои ҳамаи секунҷаҳои онро ташкилдиҳанда меёбем.

Масоҳати фигураҳои бисъёркунҷа хосиятҳои зеринро доро аст, ки дар оянда аз онҳо истифода мебарем.

1^0 (ғайриманфӣ): Барои ихтиёри фигурҳои бисъёркунҷаи $A \subset R^2$ адади $\mu(A) \geq 0$ аст;

2^0 (аддитивӣ): $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)$;

3^0 (монотонӣ): $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \mu(A_1) \leq \mu(A_2)$;

4^0 (инварианти): Фигураҳои конгруэнт масоҳатҳои баробар доранд, яъне $A_1 \sim A_2 \Rightarrow \mu(A_1) = \mu(A_2)$

5⁰ Барои фигураи бисъёркунҷаи ихтиёрии A , баробарии зерин ҷой дорад: $\mu(\partial A)=0$

Хосияти 5⁰ маънои онро дорад, ки масоҳати фигураи бисъёркунҷаи A_1 аз он вобастагӣ надорад, ки ҳама ё баъзе нуқтаҳои сарҳади ба фигураи A таалуқдор ҳастанд ё не. Дар ҳолати хусусӣ, баробариҳои зерин ҷой доранд: $\mu(A^0)=\mu(A)=\mu(\bar{A})$

3. Мафҳуми фигураҳои квадриронидашуда.

Ба мақсади мафҳуми масоҳати фигураҳоро барои фигураҳои умумӣ нисбат ба фигураҳои бисъёркунҷа ҷори намудан, фигураи (маҳдуди) ихтиёрии $A \subset \mathbb{R}^2$ -ро дида мебароем. Бигузори P ва Q фигураҳои бисъёркунҷае бошанд, ки $P^0 \subset A \subset Q$.

Агар фигураи A нуқтаҳои дохилӣ надошта бошад, бошад, яъне $A^0 = \emptyset$, онгоҳ $P = P^0 = \emptyset$; $\mu(\emptyset) = 0$ мегузорем. Азбаски $P^0 \subset Q$, пас $\mu(P) \leq \mu(Q)$. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки маҷмуи масоҳатҳои дар дохили фигураи A кашидашуда ("дарункашидашуда") -и P аз боло ва маҷмуи масоҳатҳои дар беруни фигураи A кашида шуда ("берункашидашуда") -и Q аз поён маҳдуд аст. Бинобар ин, мувофиқан сарҳади дақиқи поёнӣ ва болоии ин маҷмуъҳо вучуд доранд.

ТАЪРИФИ 49.1. Масоҳати поёнии фигураи $A \subset \mathbb{R}^2$ гуфта адади $\mu_*(A) = \sup_{P^0 \subset A} \mu(P)$ ва масоҳати болои адади $\mu^*(A) = \inf_{Q \supset A} \mu(Q)$ -ро меноманд.

Азбаски $\mu(P) \leq \mu(Q)$ аст, пас $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$.

ТАЪРИФИ 49.2. Фигураи A квадриронидашаванда ном дорад, агар масоҳати болоӣ ва поёнии он бо ҳамдигар баробар бошанд. Қимати умумии масоҳати болоӣ ва поёнӣ, масоҳати фигураи A ном дорад:

$$\mu(A) = \mu_*(A) = \mu^*(A)$$

ҚАЙД. Маълум аст, ки ҳамаи фигураҳои бисъёркунҷа квадриронидашаванда мебошанд, аммо бузургии масоҳати фигураи бисъёркунҷа дар маънои таърифи 49.2, бо бузургии масоҳати он дар маънои аввал ҷоришуда якхела мебошад. Ҳамин тариқ, таърифи 49.2 мафҳуми масоҳатро барои класси умумитари фигураҳо, нисбат

ба фигураҳои бисъёркунча, паҳн менамояд. Вале, умуман на ба ҳар гуна фигураи ҳамвор маҳуми масоҳатро ҷорӣ намудан мумкин аст.

Масалан мисоли фигураи квадриронидашаванда маҷмуи

$$A = \{(x, y) \in Q^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

ки аз ҳамаи нуқтаҳои квадратӣ

воҳидии ҳар ду координатаҳояшон ратсионалӣ буда иборат мебошад.

Барои ин фигура $\mu^*(A)=1$, $\mu_*(A)=0$ аст, чунки маҷмуи A нуқтаҳои дохилӣ надорад, пас дар дохили A фигураи бисъёркунчаи ғайрихоли кашидан мумкин нест.

Акнун якчанд критерияҳои квадриронидашавандагии фигураҳоро меорем.

ТЕОРЕМАИ 49.1. Барои квадриронидашавандагии фигураи A зарур ва кифоя аст, ки барои ихтиёрий $\varepsilon > 0$ фигураҳои бисъёркунчаи P ва Q бо

хосияти $P^0 \subset A \subset \bar{Q}$ мавҷуд буда $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$ бошад.

♠ Бигузор A - квадриронидашаванда ва $\mu(A)$ - масоҳати он бошад, онгоҳ $\mu(A) = \mu_*(A) = \mu^*(A)$ ва фигураҳои бисъёркунча P ва Q бо хосияти $P^0 \subset A \subset \bar{Q}$ ёфт мешаванд, ки барои онҳо нобаробариҳои зерин иҷрошавандаанд: $\mu_*(A) - \mu(P) < \varepsilon/2$, $\mu(Q) - \mu^*(A) < \varepsilon/2$.

Онҳоро ҳамчун намуда нобаробариҳои $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$ ҳосил мекунем. Баръакс, бигузор $\forall \varepsilon > 0$ фигураҳои бисъёркунчаи P ва Q бо хосияти $P^0 \subset A \subset \bar{Q}$ ёфт шаванд, ки барои онҳо $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$ бошад. Азбаски $\mu(P) \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A) \leq \mu(Q)$ аст, пас нобаробариҳои $\mu^*(A) - \mu_*(A) < \varepsilon$ иҷрошаванда аст. Аз сабаби ихтиёри будани ε , баробариҳои $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ ҷой дорад. ♠

ТЕОРЕМАИ 49.2. Барои квадриронидашавандагии фигураи A зарур ва кифоя аст, ки барои ихтиёри $\varepsilon > 0$ фигураҳои квадриронидашавандаи $\tilde{P}$ ва $\tilde{Q}$ бо хосияти $\tilde{P}^0 \subset A \subset \tilde{Q}$ ёфт шаванд, ки $\mu(\tilde{Q}) - \mu(\tilde{P}) < \varepsilon$ бошад.

♠ Агар A - квадриронидашаванда бошад, онгоҳ мувофиқи теоремаи 49.1 бисъёркунчаҳо, пас фигураҳои квадриронидашаванда, бо хосиятҳои лозимӣ, ёфт мешаванд. Баръакс, бигузор шартҳои теорема

ичро шавад. Азбаски фигураҳои $\bar{P}$ ва $\bar{Q}$ квадриронидашавандаанд, пас фигураҳои бисъёркунҷаи $\bar{P}$ ва $\bar{Q}$ бо хосияти $P^0 \subset \bar{P}$, $\bar{Q} \supset \bar{Q}$ ёфт мешавад, ки $\mu(\bar{P}) - \mu(P) < \varepsilon$, $\mu(Q) - \mu(\bar{Q}) < \varepsilon$ мебошад. Илова бар он $\mu(\bar{Q}) - \mu(\bar{P}) < \varepsilon$ аст. Ҳар сеи ин нобаробариҳоро ҳамчун намуда нобаробарии $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$ -ро ҳосил менамоем, яъне шарти теоремаи 49.1 иҷро шуд, пас фигураи A квадриронидашаванда аст. ♠

Мавриди хусусии фигураҳои квадриронидашаванда фигураҳое мебошанд, ки масоҳати нул доранд. Онҳоро алоҳида меомӯзем.

ТАЪРИФИ 49.3. Фигураи A -ро фигураи масоҳати нул дошта меноманд, агар $\mu(A) = 0$ бошад, яъне $\forall \varepsilon > 0$ фигураи бисъёркунҷаи $Q \supset A$ бо хосияти $\mu(Q) < \varepsilon$ мавҷуд бошад. Ҳаргуна зермаҷмуи фигураи масоҳати нул дошта худ фигураи масоҳати нул дошта мебошад. Якҷоякунӣ ва буриши миқдори охириноки фигураҳои масоҳаташон нул боз фигураи масоҳаташ нул мебошад.

ТЕОРЕМАИ 49.3. Барои квадриронидашавандагии фигураи A зарур ва кифоя аст, ки сарҳади он ∂A , масоҳати нул дошта бошад.

♠ Бигузори фигураи A квадриронидашаванда бошад. $\varepsilon > 0$ -ро гирифта фигураҳои бисъёркунҷаи $\bar{P}$ ва $\bar{Q}$ -ро меёбем, ки хосиятҳои $P^0 \subset A \subset \bar{Q}$ ва $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$ -ро доранд. Барои фигураи бисъёркунҷаи $F := \bar{Q} \setminus P^0$ муносибати зерин ҳосил мекунем: $F = \bar{Q} \setminus P^0 \supset \bar{A} \setminus A^0 = \partial A$ ва $\mu(F) = \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$, яъне $F \supset \partial A$ ва $\mu(F) < \varepsilon$. Аз ин ҷо, маълум мешавад, ки A масоҳати нул дорад. Баръакс, бигузори $\mu(\partial A) = 0$. Ҳосил мекунем: $A \subset \bar{A} = A^0 \cup \partial A$. Агар фигураи A нуқтаҳои дохилӣ надошта бошад, яъне $A^0 = \emptyset$, онгоҳ $A \subset \partial A$ ва $\mu(A) = \mu(\partial A) = 0$. Ҳамин тариқ, дар мавриди $A^0 = \emptyset$ фигураи A квадриронидашаванда. Бигузори $A^0 \neq \emptyset$, яъне A нуқтаҳои дохили дошта бошад, онгоҳ квадрати $K_0 \subset A^0$ вуҷуд дорад. Бигузори $\mu(K_0) = \varepsilon > 0$ бошад. $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ -ро гирифта фигураи бисъёркунҷаи F -ро бо хосият $F^0 \supset \partial A$ ва $\mu(F) < \varepsilon$ меёбем. Фигураҳои P ва Q -ро чунин месозем: $P^0 := A^0 \setminus \bar{F} = A^0 \cap C\bar{F}$ (кушода) ва $\bar{Q} := A^0 \cup \bar{F} = \bar{A} \cup \bar{F}$ (сарбаста).

Фигураи P^0 холя нест, чунки, агар шарт кунем, ки $P^0 = 0$ онгоҳ $\bar{F} \supset A^0 \supset K_0 \Rightarrow \mu(F) \geq \mu(K_0) = \varepsilon_0 > \varepsilon$ аст, аммо мувофиқи созиш $\mu(F) < \varepsilon$ мебошад (зиддият).

Ҳамин тариқ, $\emptyset = P^0 \subset A^0$. Бинобар ин, $\partial P \neq \emptyset$ ва $\partial P \subset \partial F$. Айнан муҳокима ронда меёбем, ки $\partial Q \neq \emptyset$ ва $\partial Q \subset \partial F$.

Ба ғайр аз ин, $\partial F = \partial P \cup \partial Q$ ва ∂F алоқанок нест. Азбаски, фигураи A бисъёркунча аст, пас ∂F -ро дар намуди якҷоякунии миқдори охириноки порчаҳои ростхата ифода кардан мумкин аст.

Бигузор l яке аз ин порчаҳо $l \subset \partial F = \partial P \cup \partial Q$ бошад, онгоҳ $l \cap \partial P = \emptyset$ ё $l \cap \partial Q = \emptyset$, пас $l \subset \partial Q$ ё $l \subset \partial P$.

Баръакс, яъне $l \cap \partial P \neq \emptyset$ ва $l \cap \partial Q \neq \emptyset$, фарз намуда ҳосил мекунем: $L = l \cap \partial F = l \cap (\partial P \cup \partial Q) = (l \cap \partial P) \cup (l \cap \partial Q)$, яъне порчаи l дар намуди якҷоякунии ду маҷмӯъҳои сарбасти якдигарро набурранда (алоқанок нест) ифода шуд, ки ин муқобили леммаи 49.1 аст. Ҳамин тариқ, $l \subset \partial P$ ё $l \subset \partial Q$, яъне фигураҳои ∂P ва ∂Q -ро дар намуди якҷоякунии порчаҳо тасвир намудан мумкин аст. Аз ин ҷо, маълум мешавад, ки фигураҳои P ва Q -бисъёркунчаанд ва $\mu(Q) - \mu(P) = \mu(F) < \varepsilon$ буда мувофиқи теоремаи 49.1 фигураи A квадриронидашаванда мебошад. ♠

Барои масоҳатҳои фигураҳои квадриронидашаванда хосиятҳои барои масоҳатҳои фигураҳои бисъёркунча дар 2 овардашуда иҷрошавандаанд.

Масалан, хосияти аддитивиро исбот мекунем:

ТЕОРЕМАИ 49.4. Агар фигураҳои $A, B \subset \mathbb{R}^2$ квадриронидашаванда бошанд, онгоҳ фигураҳои $A \cup B$ ва $A \cap B$ квадриронидашаванда буда баробарии зерин ҷой дорад:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B). \quad (49.2)$$

♠ Мувофиқи теоремаи 49.3 ҳосил мекунем:

$$\mu(\partial A) = \mu(\partial B) = 0 \Rightarrow \mu(\partial A \cup \partial B) = 0.$$

Аз тасдиқоти он ки дохили M^0 маҷмуи M калонтарин маҷмуи кушоди дар M ҷой гирифта ва сарбасти $\bar{M}$ хурдтарин маҷмуи сарбасти M -ро дар баргиранда мебошад, истифода бурда меёбем:

$$(A \cup B)^0 \cup (\partial A \cup \partial B) = \overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B} = \\ = A^0 \cup B^0 \cup \partial A \cup \partial B \subset (A \cup B)^0 \cup (\partial A \cup \partial B)$$

Аввал ва охири ин баробариҳо гирифта ҳосил мекунем: $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$. Азбаски $\mu(\partial A \cup \partial B) = 0$, пас $\mu(\partial(A \cup B)) = 0$ ва мувофиқи теоремаи 49.3, $A \cup B$ квадриронидашаванда мебошад.

Айнан меёбем:

$$(A \cap B)^0 \cup (\partial A \cap \partial B) = \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B} = (A^0 \cup \partial A) \cap (B^0 \cup \partial B) = \\ = (A^0 \cup B^0) \cup (\partial A \cap \bar{B}) \cup (\partial B \cap \bar{A}) \subset (A \cap B)^0 \cup (\partial A \cup \partial B).$$

Аввал ва охири ин нобаробариҳо гирифта ҳосил мекунем: $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$ ва бинобар ин, $\mu(\partial(A \cap B)) = 0 \Rightarrow$ маҷмуи $A \cap B$ низ квадриронидашаванда мебошад.

Барои исботи баробарии (49.2), аввал шарт менамоем, ки $A \cap B = \emptyset$ яъне $\mu(A \cap B) = 0$. Адади $\varepsilon > 0$ -ро гирифта фигураҳои бисёркунҷаи P_1, Q_1, P_2, Q_2 -ро меёбем, ки муносибатҳои зеринро қаноат кунанд:

$$P_1^0 \subset A \subset \bar{Q}_1, \quad P_2^0 \subset B \subset \bar{Q}_2, \quad \mu(A) - \mu(P_1) < \varepsilon, \quad \mu(B) - \mu(P_2) < \varepsilon, \\ \mu(Q_1) - \mu(A) < \varepsilon, \quad \mu(Q_2) - \mu(B) < \varepsilon$$

ки дар ин ҷо $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Азбаски

$$\mu(P_1) + \mu(P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2) - \mu(P_1 \cap P_2) = \mu(P_1 \cup P_2) \leq \mu(A \cup B) \leq \\ \leq \mu(Q_1 \cup Q_2) = \mu(Q_1) + \mu(Q_2) - \mu(Q_1 \cap Q_2) \leq \mu(Q_1) + \mu(Q_2),$$

пас $\mu(A) + \mu(B) - 2\varepsilon \leq \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) + 2\varepsilon$. Аз сабаби ихтиёри будани ε баробарии $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ ҳосил мешавад.

Бигузор $A \cap B \neq \emptyset$ бошад. Маҷмуҳои $A \setminus B, B \setminus A, A \cap B$ ҷуфт-ҷуфт якдигарро намебуранд ва мувофиқи исбот шуда меёбем.

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B),$$

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \Rightarrow \mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B),$$

$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B) \Rightarrow \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B).$$

Аз тарафи рости ин баробариҳо $\mu(A \setminus B)$ ва $\mu(B \setminus A)$ -ро хориҷ карда

Баробарии (49. 2)-ро ҳосил мекунем $\blacktriangle$.

4. *Ҳисоб кардани масоҳати трапетсияи каҷхата.*

ТЕОРЕМАИ 49.5. Агар функсияи ғайриманфии $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ дар порчаи $[a;b]$ интегронидашаванда бошад, онгоҳ трапетсияи каҷхатаи

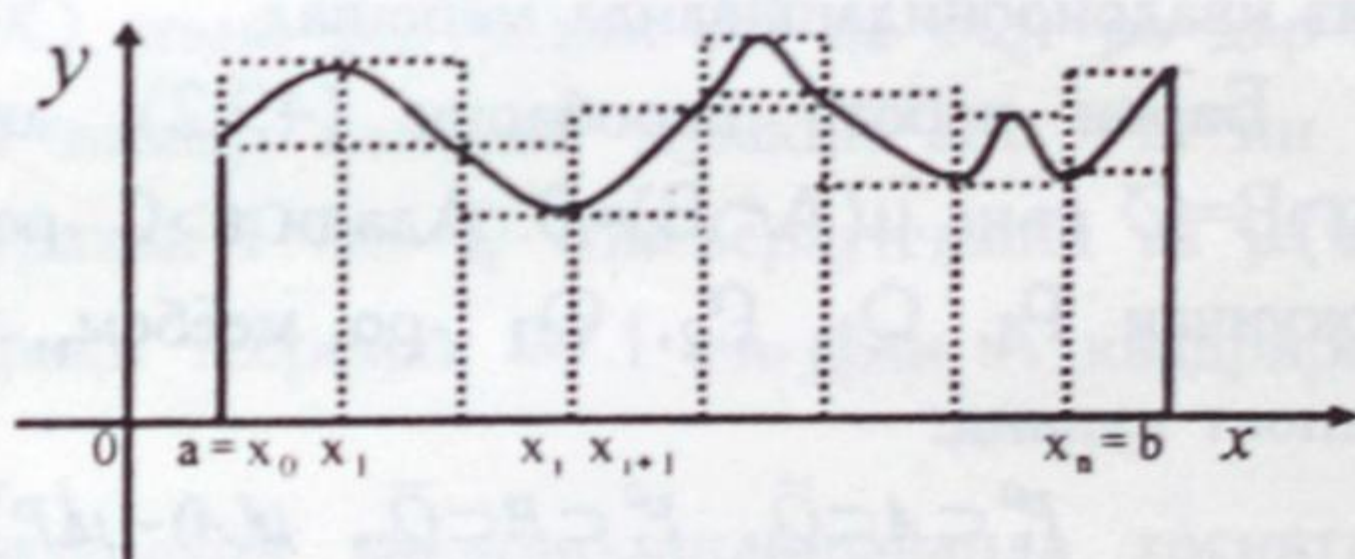
$A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ квадриронидашаванда буда масоҳати он

$\mu(A)$ бо зерин ифода меёбад:

$$\mu(A) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx \quad (49.3)$$

$\blacktriangle$ Чудокунии Т:

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ -ро гузаронида дар он фигураҳои зинамонанди дарункашидашуда ва берункашидашуда месозем (расми 99).



Расми 99

Масоҳатҳои онҳо

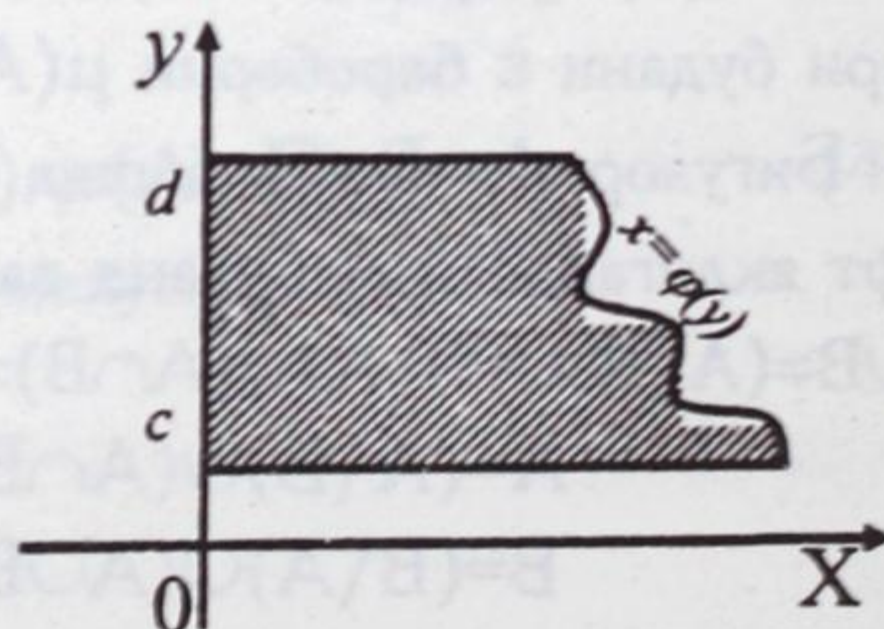
мувофиқан бо суммаҳои Дарбу ифода меёбанд:

$$s(f; T) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad S(f; T) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i, \quad (49.4)$$

ки дар ин ҷо

$$m_i = \inf_{x \in \Delta_i} \{f(x)\}, \quad M_i = \sup_{x \in \Delta_i} \{f(x)\}$$

Азбаски функсияи $f(x)$ интегронидашаванда, пас мувофиқи критерияи интегронидашавандагӣ бояд $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} [S(f; T) - s(f; T)] = 0$ шавад. Дар ҳолати хусуси



Расми 100

$\forall \varepsilon > 0, \exists T; S(f; T) - s(f; T) < \varepsilon$. Аз ин ҷо, мувофиқи теоремаи 49.1 хулоса меояд, ки трапетсияи қатъатаи A квадриронидашаванда аст. Дар нобаробарии $s(f; T) \leq \mu(A) \leq S(f; T)$, ҳангоми $\lambda(T) \rightarrow 0$, ба ҳудуд гузашта баробарии (49.3)-ро ҳосил мекунем. ♠

МИСОЛ. Масоҳати фигурае, ки бо параболаи $y = x(4-x)$ ва тире Ox маҳдуд аст, ёфта шавад.

$$\text{ҲАЛ: } \mu(A) = \int_0^4 x(4-x) = \int_0^4 4x dx - \int_0^4 x^2 dx = \frac{32}{3} \text{ в.м.}$$

ҚАЙДҲО: 1. Масоҳати трапетсияи қатъатаи (расми 100)

$A = \{(x, y) \in R^2 \mid c \leq y \leq d; 0 \leq x \leq \varphi(y)\}$ ки дар ин ҷо хати қатъи $x = \varphi(y)$ дар сегменти $[c; d]$ интегронидашаванда мебошад, бо формулаи $\mu(A) = \int_c^d \varphi(y) dy = \int_c^d x dy$ ифода меёбад.

2. Агар функсияи ғайри мусбати $f: [a; b] \rightarrow R$ дар порчаи $[a; b]$ интегронидашаванда бошад, онгоҳ масоҳати трапетсияи қатъатаи

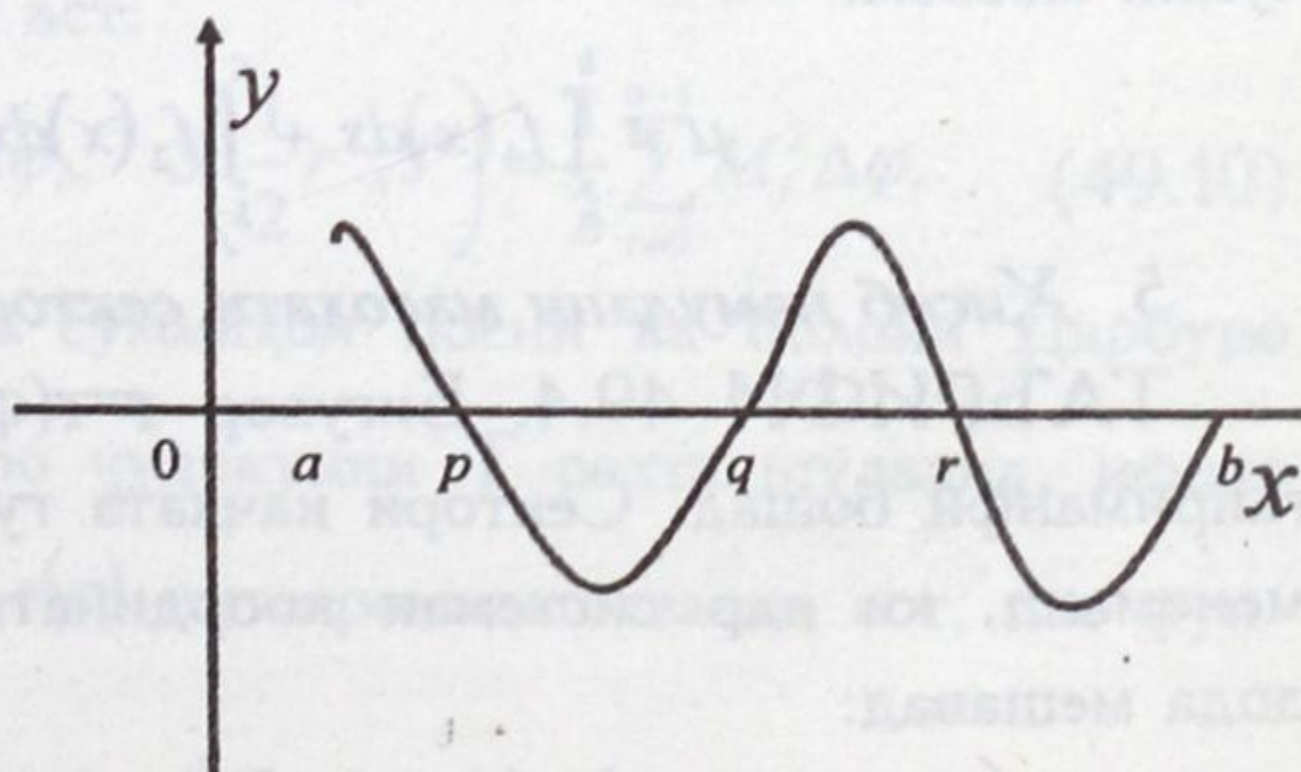
$$B = \{(x, y) \in R^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\},$$

бо формулаи

$$\mu(B) = - \int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \quad (49.5)$$

ифода меёбад.

3. Агар функсияи дар $[a; b]$ интегронидашавандаи $f(x)$ аломатшро тағйир диҳад (масалан, дар нуқтаҳои $x=r$, $x=q$ ва $x=t$ ба нул табдил ёбад), онгоҳ баъзе қисми графикаи он дар тарафҳои гуногуни тире Ox меҳобад (расми 101). Масоҳати он чун суммаи масоҳатҳо бо тадбиқи формулаҳои



Расми 101

(49.3)-(49.5) ифода меёбад:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b f(x) dx + \left| \int_a^b f(x) dx \right| \quad (49.6)$$

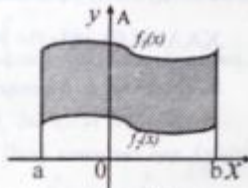
4. Агар функцияҳои $f_1: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ дар порчаи $[a; b]$ интегронидашаванда бошанд, онгоҳ масоҳати трапетсияи қатъатаи (расми 102)

$$A'' = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b; \\ 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq y\}$$

бо формулаи

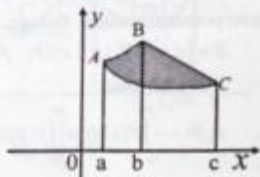
$$\mu(A'') = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (49.7)$$

ифода меёбад.



Расми 102

5. Агар фигураи ҳамвор трапетсияи қатъата набошад, онгоҳ масоҳати матлубро чун суммаҳои масоҳатҳои трапетсияҳои қатъатаи ифодакардашуда дида мебароянд. Масалан, агар хатҳои қатъи АВ, ВС ва АС (расми 103) мувофиқан бо муодилаҳои $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $y=f_3(x)$ дода шуда бошад, онгоҳ абсисаҳои нуқтаҳои буриши ин хатҳо муайян карда масоҳати онро чунин меёбем:



Расми 103

$$\mu = \int_a^b f_1(x) dx + \int_b^c f_2(x) dx - \int_a^c f_3(x) dx \quad (49.8)$$

5. Ҳисоб намудани масоҳати сектори қатъата.

ТАЪРИФИ 49.4. Бигузор $r=r(\varphi)$ ($\varphi \in [\alpha; \beta] \subset [0; 2\pi)$) функцияи гайриманфӣ бошад. Сектори қатъата гуфта, фигураи ҳамвори А -ро меноманд, ки дар системаи координати қутбӣ бо баробарии зерин дода мешавад:

$$A: \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 | \alpha \leq \varphi \leq \beta; 0 \leq r \leq r(\varphi)\}$$

ТЕОРЕМАИ 49.6. Агар функсияи $r=r(\varphi)$ дар порчаи $[\alpha;\beta]$ интегронидашаванда бошад, онгоҳ сектори қачхатаи

$$A=\{(r;\varphi)\in R^2|\alpha\leq\varphi\leq\beta; 0\leq r\leq r(\varphi)\}$$

квадриронидашаванда буда, масоҳати он бо формулаи зерин

ифода меёбад:

$$\mu(A)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2d\varphi, \quad (49.9)$$

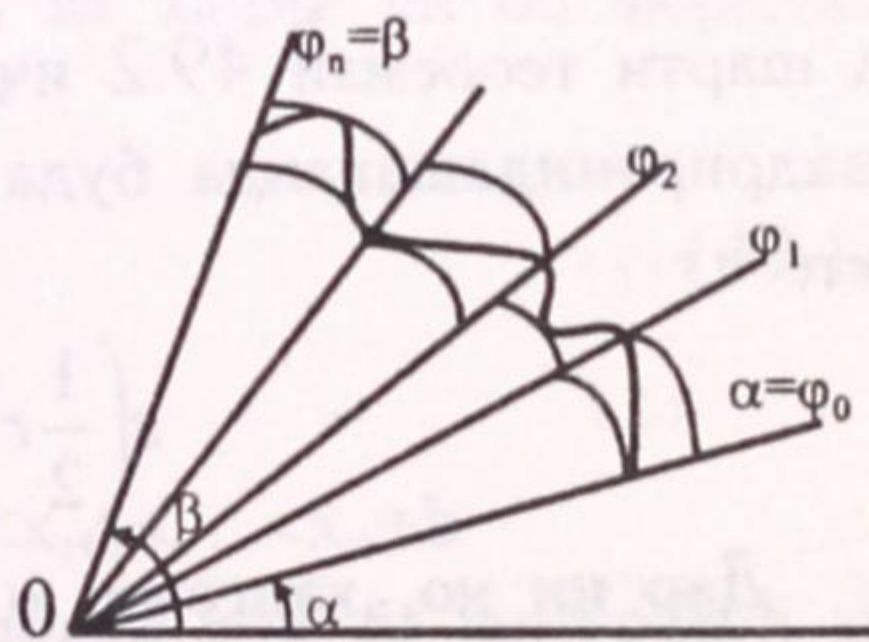
♠ Чудокунии порчаи $[\alpha;\beta]$ -ро чунин мегузаронем:

$$T:\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\varphi_2<\dots<\varphi_n=\beta$$

Ишораҳои зерин қабул мекунем (расми 104)

$$\Delta_i=[\varphi_i;\varphi_{i+1}], \Delta\varphi_i=\varphi_{i+1}-\varphi_i$$

$$m_i=\inf_{\varphi\in\Delta_i}\{r(\varphi)\}, \quad M_i=\sup_{\varphi\in\Delta_i}\{r(\varphi)\}$$



Расми 104

Секторҳои доиравии дарункашидашуда $\{(r;\varphi)\in R^2|\varphi\in\Delta; 0\leq r\leq m_i\}$ ва берункашидашудаи $\{(r;\varphi)\in R^2|\varphi\in\Delta; 0\leq r\leq M_i\}$ -ро дар атрофи сектори қачхатаи i -уми $\{(r;\varphi)\in R^2|\varphi\in\Delta; 0\leq r\leq t(\varphi)\}$ месозем. Секторҳои доиравии сохташуда квадриронидашаванда буда масоҳати онҳо мувофиқан ба зерин баробар аст:

$$\frac{1}{2}m_i^2\Delta\varphi_i \text{ ва } \frac{1}{2}M_i^2\Delta\varphi_i$$

Барои сектори қачхатаи A фигураҳои квадриронидашавандаи дарункашидашуда ва берункашидашуда сохта шуд, ки масоҳатҳои онҳо мувоиқан бо зерин баробар аст:

$$s\left(\frac{1}{2}r^2;T\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}m_i^2\Delta\varphi_i, \quad S\left(\frac{1}{2}r^2;T\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}M_i^2\Delta\varphi_i. \quad (49.10)$$

Ин масоҳатҳо мувофиқан суммаҳои поёни ва болоии Дарбуро барои функсияи $\frac{1}{2}(r(\varphi))^2$ ки бо чудокунии T сохта шудаанд, ифода менамояд. Азбаски функсияи $r(\varphi)$ интегронидашаванда аст, пас фун-

қсияи $\frac{1}{2}(r(\varphi))^2$ низ интегронидашаванда мебошад ва мувофиқи критерияи интегронидашавандагӣ

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \left(S\left(\frac{1}{2}r^2; T\right) - s\left(\frac{1}{2}r^2; T\right) \right) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists T : S\left(\frac{1}{2}r^2; T\right) - s\left(\frac{1}{2}r^2; T\right) < \varepsilon \quad (49.11)$$

Шарти (49.11) маънои онро дорад, ки барои сектори қачхатаи A шарти теоремаи 49.2 иҷро шуд. Бинобар ин, сектори қачхатаи A квадронидашаванда буда барои масоҳати он баҳои зерин ҳаққони аст:

$$s\left(\frac{1}{2}r^2; T\right) \leq \mu(A) \leq S\left(\frac{1}{2}r^2; T\right).$$

Дар ин ҷо, ҳангоми $\lambda(T) \rightarrow 0$ бо ҳудуд гузашта (49.9)-ро ҳосил мекунем. ♠

Мисол. Масоҳати фигураи A , ки бо хати қачи $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемнискатаи Бернулӣ) маҳдуд аст, ёфта шавад.

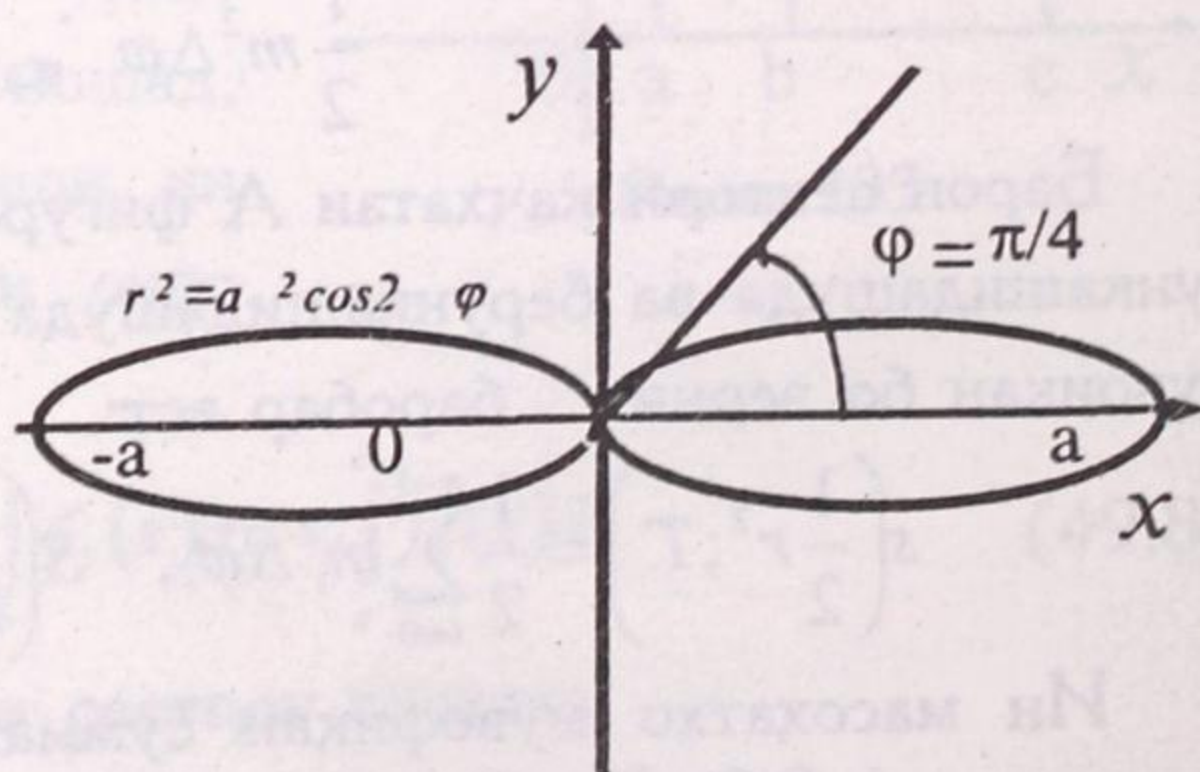
ҲАЛ. Фигураи A нисбат ба тирҳои координати симметрӣ аст (расми 105). Масоҳати он қисми фигураи A , ки дар квадранти якум меҳобад мувофиқи формулаи (49.9) ба зерин баробар аст

$$\frac{1}{4}\mu(A) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}.$$

Аз ин ҷо, $\mu(A) = a^2$.

6. Ҳисоб кардани ҳаҷми ҷисмҳо. Мафҳуми назарияи кубиронидашавандагии фигураҳои фазоиро чун назарияи квадронидашавандагии фигураҳои ҳамвор ҷорӣ наму-

дан мумкин аст. Ба созиши он наистода танҳо он далелро қайд ме-
намом, ки цилиндри ростии баландии h доштае, ки асосаш A -



Расми 105

квадриронидашаванда аст, кубиронидашаванда мебошад ва ҳаҷми он ба $V=\mu(A)h$ баробар аст (Расми 106).

ТЕОРЕМАИ 49.7. Бигузор $B \subset \mathbb{R}^3$ —фигураи фазоии маҳдуд буда бурриши он бо ҳаргуна ҳамвори $x=x_0$, ки бо тири x перепендикуляр аст, квадриронидашаванда буда масоҳати $s(x_0)$ -ро дошта бошад. Агар функсияи $s=s(x)$ интегронидашаванда бошад, онгоҳ фигураи B кубиронидашаванда мебошад, ва ҳаҷми он бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (49.12)$$

♣ Чудокунии T -ро ба тариқи зайл

$$T: a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n=b$$

гузаронида фигураи B -ро бо ҳамвориҳои $x=x_i$ ба фигураҳои хусусӣ табдил медиҳем. Қисми фигураи дар байни ҳамвориҳои $x=x_i$ ва $x=x_{i+1}$ (расми 107) воқеъбударо ба цилиндре иваз менамоем, ки баландии он Δx_i ва асосаш масоҳати $S(\xi_i)$ -ро доро бошад, ки дар ин ҷо $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$. Суммаи

$$\sum_{i=0}^{n-1} S(\xi_i) \Delta x_i = S(\xi_0) \Delta x_0 + S(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + S(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1} \quad (49.13)$$

-ро тартиб дода ҳудуди онро ҳангоми $\lambda(T) \rightarrow 0$ ба сифати қимати саҳеҳи ҳаҷми матлуб қабул менамоем. Азбаски, (49.13) суммаи интегрاليин интеграл (49.12) мебошад, онгоҳ аз интегронидашавандагии функсияи $s(x)$ мавҷудияти ҳудуди суммаи (49.13)), ҳангоми $\lambda(T) \rightarrow 0$ ва формулаи (49.12) мебарояд. ♣

Натиҷа. Агар $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ функсияи ғайриманфии интегронидашаванда дар порчаи $[a;b]$ бошад, онгоҳ ҷисми чархзании трапетсияи қачхатаи

$$\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

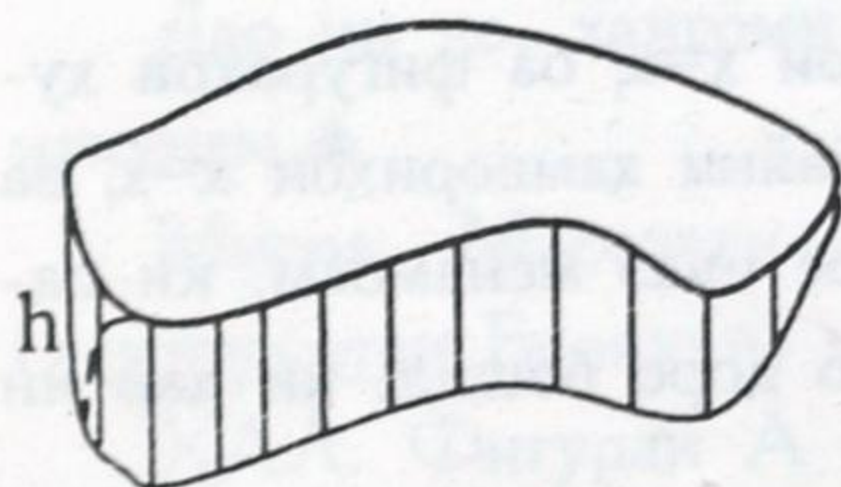
дар атрофи тири x кубиронидашаванда буда ҳаҷми он ба зерин баробар аст:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \int_a^b y^2 dx. \quad (49.14)$$

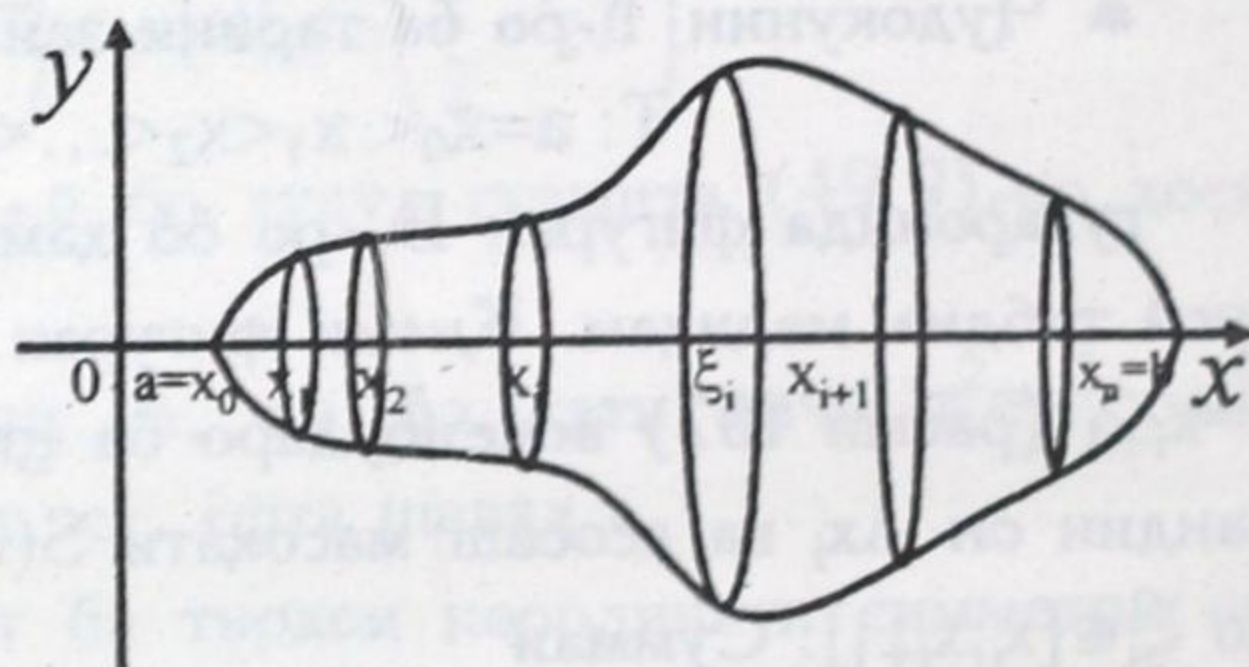
Дар ҳақиқат, $S(x) = \pi[f(x)]^2$ ҳамчун квадрати функцияи интегронидашавандаи $f(x)$ интегронидашаванда мебошад.

Ба сифати мисол, ҳаҷми ҷисми чархзании трапетсияи қатъата (астроида) -- и $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a; x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\}$ -- ро дар атрофи тири Ox ҳисоб мекунем. Формулаи (49.14) -- ро тадбиқ намуда меёбем:

$$V = \pi \int_a^b \left(a^{2/3} - x^{2/3} \right)^3 dx = \frac{32}{105} \pi a^3.$$



Расми 106



Расми 107

§50. ДАРОЗИИ ХАТИ КАЧ ВА МАСОҲАТИ САТҲИ ЧАРХЗАНИЙ.

1. *Дарозии камони хати қатъ.* Инъикоси порчаҳоро дар ҳамвории координатии $\mathbb{R}^2$ дида мебароем. Бигузор $[a; b]$ -- ягон порча, $\vec{r}$ -- инъикоси он дар $\mathbb{R}^2$ (вектор-функсия), яъне инъикосе бошад, ки ҳар кадом нуқтаи $t \in [a; b]$ -- ро бо нуқтаи $\vec{r}(t)$ фазои $\mathbb{R}^2$ дар мувофиқ гузорад. Мухтасар онро дар намуди $\vec{r}: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ишора менамоем. Дода шудани нуқта дар $\mathbb{R}^2$ бо дода шудани ду координатаҳои он баробарқувва аст:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}.$$

Координатаҳои $\vec{r}(t)$ -ро ҷудо намуда навишти баробарқувваи вектор-функсиرو дар намуди системаи ду функсияҳои скаляри ҳосил мекунем:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad a \leq t \leq b. \end{cases} \quad (50.1)$$

Бефосилагии вектор-функсия ҳамчун бефосилагии координатаҳои он фаҳмида мешавад. Дифференциронидашавандагӣ ва дигар хосиятҳо низ ба ҳамин маъно фаҳмида мешавад. Ҳосилаи вектор-функсиаро бо баробарии

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$$

муайян мекунем.

ТАЪРИФИ 50.1. Хати қатро дар шакли параметрия додашуда (ё роҳи ҳамвор) меномем, агар инъикоси $\vec{r}: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (t -параметр) бефосила бошад.

ТАЪРИФИ 50.2. Роҳи $\vec{r}: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ суфта ном дорад, агар вектор-функсияи $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ дар порчаи $[a; b]$ ҳосилаи бефосиларо дошта бошад ва барои ҳамаи $t \in [a; b]$ нобаробарии зерин иҷро шавад:

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \neq 0.$$

Бо мақсади ҳисоб намудани дарозии роҳ, ҷудокунии T -и порчаи $[a; b]$ -ро чунин мегузаронем:

$$T: a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b.$$

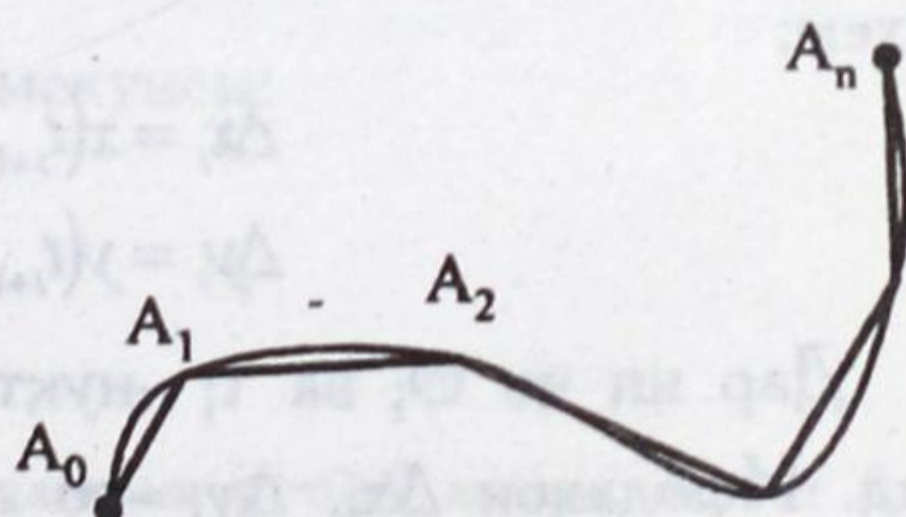
Онҳоро бо нуқтаҳои

$$A_0(x(t_0); y(t_0)), A_1(x(t_1); y(t_1)), \\ A_2(x(t_2); y(t_2)), \dots, A_n(x(t_n); y(t_n))$$

пайваст намуда хати шикастаи дар графикаи роҳ хобидаро (расми 108)

ҳосил мекунем. Ишораҳои

$$\Delta_i = [t_i; t_{i+1}], \quad \Delta_i = t_{i+1} - t_i$$



Расми 108

қабул намуда дарозии хати шикаста $l(T)$ -ро бо формулаи

$$l(T) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \quad (50.2)$$

меёбем, ки дар ин ҷо:

$$\Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i), \quad \Delta y_i = y(t_{i+1}) - y(t_i)$$

ТАЪРИФИ 50.3. Роҳи

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

ростшаванда ном дорад, агар $\{l(T)\}$ -маҷмуи дарозиҳои ҳамаи хатҳои шикастаи дар он кашидашуда аз боло маҳдуд бошад.

Сарҳади дақиқи болоии маҷмуи $\{l(T)\}$ дарозии роҳ ном дорад.

Бо l дарозии роҳро ишора намуда таърифи 50.3 -ро мухтасар чунин менависем:

$$l = \sup_T \{l(T)\} \quad (50.3)$$

ТЕОРЕМАИ 50.1. Агар роҳи

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

суфта бошад, онгоҳ вай ростшаванда буда дарозиаш бо формулаи зерин ҳисоб мешавад:

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (50.4)$$

♣ Чудокунии T -ро гузаронида, теоремаи Лагранж, оиди афзоишҳои охиринокро истифода бурда Δx_i ва Δy_i -ро табдил медиҳем:

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\Theta_i) \Delta t_i; \\ \Delta y_i &= y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(\tau_i) \Delta t_i. \end{aligned} \quad (50.5)$$

Дар ин ҷо Θ_i ва τ_i -нуқтаҳои гуногуни порчаи $\Delta = [t_i; t_{i+1}]$ мебошад. Ифодаҳои Δx_i , Δy_i -ро аз (50.5) ба баробарии (50.2) гузошта барои $l(t)$ ҳосил мекунем:

$$I(T) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\Theta_i))^2 + (y'(\tau_i))^2} \Delta_i, \quad (50.6)$$

аз сабаби гуногун будани нуқтаҳои Θ_i ва τ_i суммаи (50.6), суммаи интегралӣ (50.4) шуда наметавонад. Суммаи интегралӣ матлубро месозем, агар $\Theta_i \in \Delta_i$ -ро ба сифати нуқтаҳои қайдшуда гирем:

$$\sigma(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}; T, \Theta) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\Theta_i))^2 + (y'(\Theta_i))^2} \Delta_i, \quad (50.7)$$

Ба назардошти он, ки барои ихтиёри ададҳои мусбати a , b , c нобаробарии*

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c|, \quad (50.8)$$

ҳаққонӣ аст, пас $a = |x'(\Theta_i)|$, $b = |y'(\tau_i)|$, $c = |y'(\Theta_i)|$ гузошта ба модули фарқи байни суммаҳои (50.6) ва (50.7) баҳо медиҳем:

$$\begin{aligned} & \left| I(T) - \sigma(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}; T, \Theta) \right| = \\ & = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\Theta_i))^2 + (y'(\tau_i))^2} \Delta_i - \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\Theta_i))^2 + (y'(\Theta_i))^2} \Delta_i \right| = \\ & = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sqrt{(x'(\Theta_i))^2 + (y'(\tau_i))^2} - \sqrt{(x'(\Theta_i))^2 + (y'(\Theta_i))^2} \right) \Delta_i \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \sqrt{(x'(\Theta_i))^2 + (y'(\tau_i))^2} - \sqrt{(x'(\Theta_i))^2 + (y'(\Theta_i))^2} \right| \Delta_i \leq \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} |y'(\tau_i) - y'(\Theta_i)| \Delta_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} |y'(\tau_i) - y'(\Theta_i)| \Delta_i \leq \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(y'; \Delta_i) \Delta_i. \end{aligned}$$

Аввал ва охирашро гирифта ҳосил мекунем:

* Нобаробарии (50.8) аз он ҷо мебарояд, ки ҳангоми $b > c > 0$ ҳосилаи инсибат ба a аз функсияи $\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}$ гайри манфӣ аст, пас ин функсия ҳангоми $a=0$ максимуми ба $b-c$ баробарро дорад.

$$0 \leq \left| l(T) - \sigma \left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}; T, \Theta \right) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(y'; \Delta_i) \Delta_i. \quad (50.9)$$

Азбаски функцияи y' дар порчаи $[a; b]$ бефосила буда дар ин порча интегронидашаванда аст, пас мувофиқи критерияи интегронидашавандагӣ

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega(y'; \Delta_i) \Delta_i = 0.$$

Аз ин ҷо ва аз нобаробарии (50.9) маълум мешавад, ки ҳудуди зерин вучуд дорад:

$$\tilde{e}: \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} l(T) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (50.10)$$

Танҳо нишон додан лозим аст, ки $\tilde{e} = l$ яъне

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} l(T) = \sup_T \{l(T)\}$$

Азбаски $\forall T: l(T) \leq e$, пас ҳудуд гирифта $\tilde{e} \leq l$ ҳосил мекунем. Адади $\varepsilon > 0$ -ро гирифта чунин ҷудокунии T_0 -ро меёбем, ки $l(T_0) > l - \varepsilon$ бошад, онгоҳ $\forall T \supset T_0$ нобаробарии

$$l(T) \geq l(T_0) > l - \varepsilon$$

-ро ҳосил мекунем. Дар ин нобаробарӣ аз руи базаи « $\lambda(T) \rightarrow 0, T \supset T_0$ » бо ҳудуд гузашта шарти $\tilde{e} \geq l - \varepsilon$ ва аз сабаби ихтиёри будани ε , $\tilde{e} \geq l$ мебарояд. Ҳамин тариқ, $\tilde{e} = l$ ҳосил шуд, яъне аз (50.10) баробарии (50.4) мебарояд. ♠

ҚАЙД а) Дар мавриде, ки роҳи суфта бо муодилаи $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$ (яъне ба сифати параметр таъғирёбандаи x -ро гирем) дода мешавад, формулаи (50.4) намуди зеринро мегирад:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (50.4')$$

Агар роҳи суфта бо муодилаи $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$ (яъне ба сифати параметр таъғирёбандаи y -ро гирем) дода шавад, формулаи (50.4') намуди зайл дорад:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy \quad (50.4'')$$

б) Ҳамаи созишҳои барои хат(роҳ)-и ҳамворӣ дар боло иҷрошуда барои хат(роҳ)-и суфтаи фазои

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \quad a \leq t \leq b \end{cases}$$

низ маъно дорад. Дар ҳолати хусуси вай ростшаванда буда дарозии он бо формулаи зерин ифода меёбад:

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \quad (*)$$

Супориш. Дурустии (*) -ро мустақилона исбот намоед.

Ба сифати мисол дарозии камони $y = \frac{x^2}{2}$ -ро, ки дар байни нуқтаҳои $(0;0)$ ва $(1; \frac{1}{2})$ воқеъ аст, ҳисоб мекунем: ба сифати параметр x -ро қабул намуда формулаи (50.4') -ро истифода мебарем:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = \int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Big|_0^1 + \int_0^1 x \cdot \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Мувофиқи формулаи интегронӣ бо ҳиссаҳо

$$u = x \Rightarrow du = dx, \quad dv = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow v = \sqrt{1+x^2}$$

меёбем:

$$l = \ln(x + \sqrt{2}) + x\sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \ln(x + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - l.$$

Аз ин ҷо

$$l = \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \sqrt{1 + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ба сифати параметр таъғирёбанди y -ро қабул намуда дарозии камони додашударо ҳисоб менамоем, меёбем:

$$x = \sqrt{2}y \Rightarrow x' = \frac{1}{\sqrt{2}y}$$

Мувофиқи формулаи (50.4'') ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2y}} dy = - \int_{-\infty}^{\sqrt{2}} \frac{t^2 dt}{(t^2 - 1)^2} = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2t^2 dt}{(t^2 - 1)^2} = \left[\begin{aligned} &\sqrt{1 + \frac{1}{2y}} = t \Rightarrow y = \frac{1}{2(t^2 - 1)} \Rightarrow dy = -\frac{t dt}{(t^2 - 1)^2} \\ &u = t \Rightarrow du = dt, dv = \frac{2t dt}{(t^2 - 1)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{t^2 - 1} \end{aligned} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{t}{t^2 - 1} \Big|_{\sqrt{2}}^{+\infty} + \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 1} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{t-1}{t+1} \Big|_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}+1) + \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \sqrt{1 + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Айён аст, ки барои дарозии камони $y = \frac{1}{2}x^2$ формулаҳои (50.4') ва (50.4'') натиҷаҳои якхела дод. Ин натиҷа табиист ва он моро ба далеле мебарад, ки дарозии камони хати каҷ аз тарзи ҷори намудани параметр вобастагӣ надорад. Барои ба ин фикр қаноат ҳосил намудан аввал баъзе мафҳумҳоро ҷорӣ менамоем. Гомеоморфизми ду маҷмуъҳои ададии X ва Y гуфта инъикоси биективии $\tau: X \rightarrow Y$ -ро меномем, ки он дар X бефосила буда инъикоси баръаксии он $\tau^{-1}: Y \rightarrow X$ - инъикоси бефосила аст.

Агар, бо тариқи илова, шарт кунем, ки ҳар ду инъикосҳои τ ва τ^{-1} ҳосилаҳои бефосиларо мувофиқан дар X ва Y дошта бошанд, онгоҳ чунин мавриди хусусии гомеоморфизмро диффеоморфизм меноманд.

ТАЪРИФИ 50.4. Ду роҳҳои $\bar{r}: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ва $\bar{\rho}: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ байни худ баробарқувва ном доранд, агар чунин гомеоморфизми

$\bar{r}: [a; b] \rightarrow [\alpha; \beta]$ вуҷуд дошта бошад, ки $\bar{\rho} \circ r = \bar{r}$, яъне барои ҳамаи $t \in [a; b]$ баробарии $\bar{\rho}(\tau(t)) = \bar{u}(t)$ иҷрошаванда бошад.

Муносибати баробарқувваги ($\sim$)-и ҷорӣ кардашуда хосиятҳои рефлексивӣ ($\bar{r} \sim \bar{r}$), симметрия ($\bar{r} \sim \bar{\rho} \Rightarrow \bar{\rho} \sim \bar{r}$) ва транзитивӣ ($\bar{r}_1 \sim \bar{r}_2, \bar{r}_2 \sim \bar{r}_3 \Rightarrow \bar{r}_1 \sim \bar{r}_3$)-ро дорад. Бинобар ин, маҷмуи ҳамаи роҳҳо ба синфи баробарқуввагии ҷуфт-ҷуфт якдигарро намебуридагӣ ҷудо мешавад.

ТАЪРИФИ 50.5. Хати қачи бифосила гуфта синфи роҳҳои байни худ баробарқувва ва мувофиқан, хати қачи суфта гуфта, синфи роҳҳои ба ягон роҳи суфта баробарқувваро меноманд.

Шарт мекунем, ки баробарқуввагии роҳҳои суфта дар маънои таърифи 50.4, ки калимаи “гомеоморфизм” ба калимаи “диффеоморфизм” иваз карда мешавад, фаҳмида мешавад.

ТАЪРИФИ 50.6. Дарозии хати қачи суфта гуфта, дарозии роҳи суфтаи ихтиёрии ифодакунандаи онро меноманд.

ТЕОРЕМАИ 50.2. Агар ду роҳҳои суфта байни худ баробарқувва бошанд, онҳо дарозии онҳо баробар аст.

♠ Бигузор

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x = \xi(\tau), \\ y = \eta(\tau), \end{cases} \quad \alpha \leq \tau \leq \beta$$

-ду роҳҳои суфта байни худ баробарқувва бошанд. Дарозии онҳо l ва λ

бо формулаҳои (50.4) ҳисоб карда мешаванд:

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad \lambda = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\xi'(\tau))^2 + (\eta'(\tau))^2} d\tau. \quad (*)$$

Бигузор $\tau = \tau(t)$ диффеоморфизм порчаи $[a; b]$ ба порчаи $[\alpha; \beta]$, ки баробарқуввагии онро (яъне барои ҳамаи $t \in [a; b]$, $\xi(\tau(t)) = x(t)$, $\eta(\tau(t)) = y(t)$) таъмин менамояд, бошад. Ин баробари ро дифференсиронида ҳосил мекунем:

$$\xi'(\tau(t))\tau'(t)dt = x'(t)dt, \quad \eta'(\tau(t))\tau'(t)dt = y'(t)dt$$

Бо ин назардошт, дар интегралҳои дуҷуми баробарии (50.II) гузориши $\tau = \tau(t)$ -ро гузаронида меёбем:

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_a^b \sqrt{(\xi'(\tau))^2 + (\eta'(\tau))^2} d\tau = \int_a^b \sqrt{[\xi'(\tau(t))]^2 + [\eta'(\tau(t))]^2} |\tau'(t)| dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{[\xi'(\tau(t))\tau'(t)]^2 + [\eta'(\tau(t))\tau'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = l \end{aligned}$$

Ҳамин тариқ, интегралҳои (50.II) ба ҳамдигар баробаранд.

1. Масоҳати сатҳи чархзанӣ. Шарт мекунем, ки роҳи суфтаи $y=y(x)$, $a \leq x \leq b$, $y(x) \geq 0$ дар атрофи тири x чарх мезанад. Талаб карда мешавад, ки масоҳати сатҳи чархзанӣ ҳисоб карда шавад.

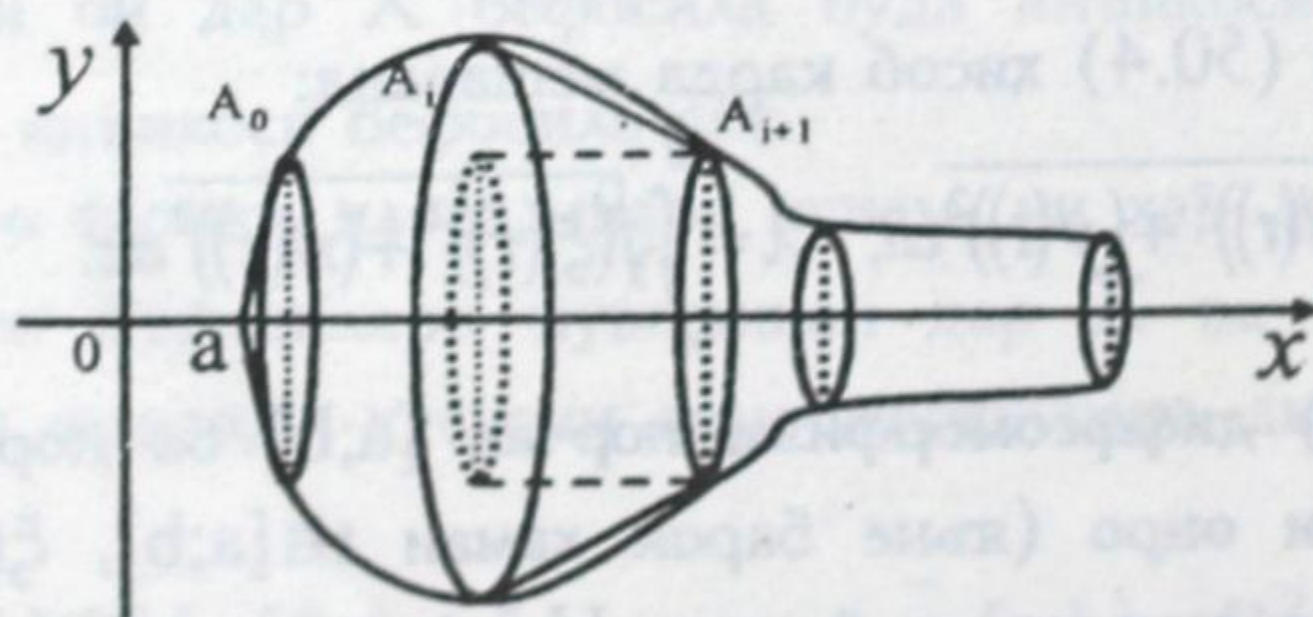
Бо ин мақсад T —ҷудокунии порчаи $[a; b]$ -ро мегузаронем:

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Бо $y_i = y(x_i)$ -ро ишора намуда бо хатҳои рост, пайдарпай нуқтаҳои

$$A_0(x_0; y_0), A_1(x_1; y_1), A_2(x_2; y_2), \dots, A_n(x_n; y_n)$$

-ро пайваست намуда хати шикастаи дар графיקи функсияи $y(x)$ кашидашударо ҳосил мекунем: (расми 109). Аввал масоҳати сатҳи чархзанӣ, ки дар натиҷаи чархзании хати шикаста дар атрофи тири x ҳосил шудааст, ҳисоб менамоем. Масоҳати сатҳи паҳлуии конуси сарбурида (цилиндр, ҳангоми $y_i = y_{i+1}$), ки ҳангоми чархзании порчаи $[A_i; A_{i+1}]$ ҳосил мешавад, ба зерин баробар аст:



Расми 109

$$2\pi \cdot \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}. \quad (50.12)$$

Дар ин ҷо $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

Теоремаи Лагранж оиди афзоишҳои охирноқро тадбиқ намуда хулоса мебарорем, ки нуқтаи $\xi_i \in \Delta_i$ ёфт мешавад, ки барои он шарти зерин иҷрошаванда аст:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = y(x_{i+1}) - y(x_i) = y'(\xi_i) \Delta x_i. \quad (50.13)$$

Азбаски адади $\frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})$ дар байни y_i ва y_{i+1} воқеъ аст, пас мувофиқи теорема оиди қиматҳои фосилавӣ нуқтаи $\eta_i \in \Delta_i$ бо хосияти

$$\frac{y_i + y_{i+1}}{2} = \frac{y(x_i) + y(x_{i+1})}{2} = y(\eta_i) \quad (50.14)$$

ёфт мешавад. Сатҳи паҳлуии конусҳои сарбуридаи (50.12)-ро суммирониди бо назардошти (50.13) ва (50.14) сатҳи чархзании хатҳои шикастаро дар атрофи тири Ox ҳосил мекунем:

$$S(T) = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi \cdot \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = 2\pi \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y(\eta_i) \sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2} \Delta x_i. \quad (50.15)$$

ТАЪРИФИ 50.7. Сатҳи чархзании графики функсияи $y=y(x)$, $a \leq x \leq b$ дар атрофи тири x квадриронидашаванда ном дорад, агар $\{S(T)\}$ - маҷмуи ҳамаи сатҳҳои чархзании хатҳои шикастаи дар графики функсияи $y(x)$ кашидашуда, аз боло маҳдуд бошад. Ба сифати бузургии сатҳи чархзанӣ, сарҳади дақиқи болоии маҷмуи $\{S(T)\}$, ки барои ҳамаи T -ҷудокуниҳои порчаи $[a;b]$ тартиб дода шудааст, қабул карда мешавад:

$$S := \sup_T \{S(T)\} \quad (50.16)$$

ТЕОРЕМАИ 50.3. Агар дар порчаи $[a;b]$ функсияи ғайриманфии $y=y(x)$ ҳосилаҳои бифосиларо дошта бошад, онгоҳ сатҳи чархзании графики он дар атрофи тири x , квадриронидашаванда буда, масоҳати сатҳи онро бо формулаи зерин ҳисоб кардан мумкин аст:

$$S = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1+(y'(x))^2} dx \quad (50.17)$$

♠ Т- ҷудокунии порчаи $[a;b]$ -ро гузаронида масоҳати $S(T)$ сатҳи ҷарҳзании хати шикастани дарункашидашударо бо намуди (50.15) табдил медиҳем:

$$S(T) = 2\pi \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y(\eta_i) \sqrt{1+(y'(\xi_i))^2} \Delta x_i \quad (50.15)$$

бо сифати нуқтаҳои қайдшудаи ҷудокунии дар (50.15) дохил буда нуқтаҳои $\xi_i \in \Delta_i$ -ро қабул намуда суммаи интегралиро барои интеграл (50.17)) месозем:

$$\sigma(y\sqrt{1+(y')^2}; T, \xi) = 2\pi \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y(\xi_i) \sqrt{1+(y'(\xi_i))^2} \Delta x_i \quad (50.18)$$

Функсияи $\sqrt{1+(y')^2}$ дар $[a;b]$ бефосила (чун композитсияи функсияҳои бефосила) аст, пас вай маҳдуд аст. $M = \sup_{x \in [a;b]} \sqrt{1+(y'(x))^2}$ гузошта бо фарқи байни суммаҳои (50.16) ва (50.18) баҳо медиҳем.

$$\begin{aligned} |S(T) - \sigma(y\sqrt{1+(y')^2}; T, \xi)| &= \left| 2\pi \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (y(\eta_i) - y(\xi_i)) \sqrt{1+(y'(\xi_i))^2} \Delta x_i \right| \leq \\ &\leq 2\pi \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |y(\eta_i) - y(\xi_i)| \sqrt{1+(y'(\xi_i))^2} \Delta x_i \leq 2\pi M \sum_{i=0}^{n-1} \omega(y; \Delta_i) \Delta x_i. \end{aligned}$$

ҳамин тариқ,

$$0 \leq |S(T) - \sigma(y\sqrt{1+(y')^2}; T, \xi)| \leq 2\pi M \sum_{i=0}^{n-1} \omega(y, \Delta_i) \Delta x_i. \quad (50.19)$$

Азбаски функсияи $y(x)$ интегронидашаванда аст, пас мувофиқи критерияи интегронидашавандагӣ

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega(y, \Delta_i) \Delta x_i = 0.$$

Худуди суммаи (50.18) ҳангоми $\lambda(T) \rightarrow 0$ ба интеграл (50.17) баробар аст, пас аз нобаробарии (50.19) натиҷа меояд, ки худуди он мавҷуд буда ба зерин баробар аст:

$$\tilde{S} = \lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} S(T) = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (50.20)$$

Нишон медиҳем, ки $S = \tilde{S}$, яъне $\sup_T \{S(T)\} = \lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} S(T)$. Барои ихтиёри T —чудокунӣ $S(T) \leq S$ аст. Дар ин ҷо, ба ҳудуд гузашта ҳосил мекунем: $\tilde{S} \leq S$.

Адади $\varepsilon > 0$ -ро гирифта чудокунии T_0 -ро меёбем, ки $S(T_0) > S - \varepsilon$ монад, онгоҳ ҳангоми $T \supset T_0$ нобаробарии $S(T) \geq S(T_0) > S - \varepsilon$ ҳосил мекунем. Дар ин ҷо аз рӯи базаи « $\lambda(T) \rightarrow 0$, $T \supset T_0$ » бо ҳудуд гузашта $\tilde{S} \geq S - \varepsilon$ ҳосил мекунем. Аз сабаби ихтиёри будани ε , ҳулоса мебарояд, ки $\tilde{S} \geq S$. Ҳамин тариқ, исбот карда шуд, ки $\tilde{S} = S$ аст. ▲

ҚАЙД. 1) Агар функцияи $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$ гайриманфӣ ва бефосила дифференсиронидашаванда бошад, онгоҳ масоҳати сатҳи чархзании графיקи ин функция дар атрофи тири y -ро бо формулаи зерин ҳисоб кардан мумкин аст.

$$S = 2\pi \int_c^d |x| \sqrt{1 + (x')^2} dy. \quad (50.21)$$

2) Агар шартӣ гайриманфӣ будани $y = y(x)$ -ро дар порчаи $[a; b]$ ($\bar{c} \leq x = x(y)$ -ро дар $[c; d]$) партоем, онгоҳ дар формулаи (50.17) ё ((50.21)) $y(x)$ -ро ба $|y(x)|$ ($\bar{c} \leq x(y)$ -ро ба $|x(y)|$) иваз намудан лозим аст.

Ба сифати мисол масоҳати сатҳи чархзании камони параболан $y = \frac{1}{2}x^2$ дар атрофи тири x , ки байни нуқтаҳои $(0; 0)$ ва $(\frac{1}{2}; \frac{1}{8})$ ҷойгир аст, ҳисоб мекунем:

$$S_x = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2} \sqrt{1 + x^2} dx = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \sqrt{1 + x^2} dx$$

Барои ҳисоб кардани интегралҳои охирин аз гузоришҳои Эйлер истифода мебарем:

$$\left[\sqrt{1+x^2} = t+x \Rightarrow x = \frac{1}{2t} - \frac{t}{2} \Rightarrow dx = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \right]$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \pi \int_1^{\sqrt{2}-1} \frac{(1-t^2)^2}{4t^2} \left(t + \frac{1}{2t} - \frac{t}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{\pi}{16} \int_{\sqrt{2}-1}^1 \frac{(1-t^2)^2}{t^3} dt = \frac{\pi}{16} \int_{\sqrt{2}-1}^1 \left(t^{-5} - \frac{2}{t} + t^3 \right) dt = \\ &= \frac{\pi}{16} \left(\frac{(\sqrt{2}-1)^{-4} - (\sqrt{2}-1)^{-4}}{4} + 2 \ln(\sqrt{2}-1) \right) \end{aligned}$$

Масоҳати сатҳи чархзании ҳамин камони хати қабро дар атрофи тире у ҳисоб мекунем:

$$S_2 = 2\pi \int_1^{\frac{1}{2}} \sqrt{2y} \sqrt{1 + \frac{1}{2y}} dy = 2\pi \int_1^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+2y} dy = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2}-1)$$

Машқҳо барои боби XII.

1. Масоҳати фигураҳои бо хатҳои қаб маҳдудро ёбед:

а) $y^2=4x$ ва $x^2=4y$; б) $a(y^2-x^2)+x^3=0$; в) $y=2x^3$, $y=1+x^2$, $x=-2$, $x=3$ ва тире x ; г) $y^2=2x$ ва $y^2=4x-x^2$; д) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ (астроида).

2. Дарозии камони хатҳои қабӣ зеринро ҳисоб кунед:

а) $y=1-\ln\cos x$ аз нуқтаи $(0;1)$ то $\left(\frac{\pi}{4}; \ln e\sqrt{2}\right)$; б) $x=e^t \sin t$,

$y=e^t \cos t$ аз $t=0$ то $t=\pi/2$; в) $\rho=a\sin^3 \frac{\varphi}{3}$, $0 \leq \varphi \leq 3\pi$; г)

$\rho=a(1+\cos\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$; г) (кардиоида).

3. Ҳаҷми ҷисмҳои, ки бо хатҳои қаб маҳдуданд, ҳисоб карда шаванд:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ -эллипсоид; б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ва ҳамвориҳои $z=0$,

$z=1$.

4. Ҳаҷми ҷисмҳои, ки ҳангоми чархзании хатҳои қаб дар атрофи ягон тир ҳосил мешавад, ҳисоб карда шаванд:

- а) $x^2 - y^2 = a^2$ ва $x = a + h$, $x = -(a + h)$ дар атрофи тири x ;
 б) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ дар атрофи тири x ;
 в) $y = x^2$ ва $x = y^2$ дар атрофи тири Oy ;
 г) $y^2 = x^3$, $x + y = 2$ ва $x = 0$.

5. Масоҳати сатҳи чархзании фигураҳои зерин, ки ҳангоми чархзании хатҳои қач дар атрофи ягон тир ҳосил мешавад, ҳисоб карда шавад.

- а) $y^2 = 2x$ аз $x = 0$ то $x = 2$ дар атрофи тири x ;
 б) $x^2 + y^2 = R^2$ дар атрофи тири x ;
 в) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ дар атрофи тири x ;
 г) $x = t^2$, $y = t/3$ ($t^2 - 3$) дар атрофи тири x .

АДАБИЁТ

1. Г.М. Фихтенгольц. "Курс дифференциального и интегрального исчисления", т. I-III, М., "Наука", 1969г.
2. Г.М. Фихтенгольц. "Основы математического анализа", т. I-II, М., "Гостехиздат", 1975г.
3. С.М. Никольский. "Курс математического анализа", т. I-II, М., "Наука", 1975г.
4. Л. Д. Кудрявцев. "Математический анализ", т. I-III, М., Высшая школа" 1973г.
5. Г.П. Толстой. "Элементы математического анализа", т. I-II, М., "Наука", 1974г.
6. Н.Н. Лузин. "Дифференциальное исчисление", «Интегральное исчисление», М., "Высшая школа", 1960г.
7. М.К. Гребенча, С.И. Новоселов "Курс математического анализа" т. I-II, М., "Высшая школа" 1960г.
8. Р. Курант. "Курс дифференциального и интегрального исчисления", т. I-II. М., "Наука", 1976г.
9. В.И. Смирнов. "Курс высшей математики", т. I-V, М., "Гостехиздат", 1956г.
10. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. "Основы математического анализа", М., "Наука", 1967г.
11. Г.Е. Шилов "Математический анализ", ч. I-II, М., "Наука", 1969г.
12. У. Рудин. "Основы математического анализа". М., "Мир", 1966г.
13. Г. Грауэрт, И. Либ, В. Фишер "Дифференциальное и интегральное исчисление". М., "Мир", 1971г.
14. Л. Шварц "Анализ". т. I-II, М., "Мир", 1972г.
15. М. Спивак "Математический анализ на многообразиях", М., "Мир", 1968г.
16. Ж. Дьедонне "Основы современного анализа", М., "Мир", 1964г.
17. Б. Гелбаум, Дж. Олстед "Контрпримеры в анализе", М., "Мир", 1967.
18. С. Банах "Дифференциальное и интегральное исчисление" М., "Наука", 1972г.
19. П.П. Коровкин "Математический анализ", ч. I-II, М., "Просвещение", 1974г.
20. И.И. Уваренков, М.З. Малер "Курс математического анализа", т. I-II, "Просвещение", 1966г.

21. Н.С.Пискунов "Дифференциальное и интегральное исчисление", т. I,II, М., "Наука", 1972г.
22. А.Ф.Бермант, И.Г.Араманович "Краткий курс математического анализа", М., "Наука", 1973г.
23. Л.Берс "Математический анализ" М., "Высшая школа", 1975г.
24. Б.П.Демидович "Сборник задач и упражнений по математическому анализу". М. "Гостехиздат", 1956г.
25. Г.Н.Берман "Сборник задач по курсу математического анализа". М. "Наука", 1967г.
26. В.П.Минорский "Сборник задач по высшей математике". М. "Наука", 1964г.
27. П.Е.Данко, А.Г.Попов "Высшая математика в упражнениях и задачах" М., "Высшая школа". т.I-III.
28. Н.М.Гюнтер, Р.О.Кузьмин "Сборник задач по высшей математике" т. I-II. М., "Физматгиз", 1958г.
29. Н.А. Давыдов, П.П.Коровкин, В. Никольский, "Сборник задач по математическому анализу" М., "Просвещение", 1973г.
30. Н.Я.Виленкин и др. "Задачник по курсу математического анализа". ч. I, М., "Просвещение"
31. Г.Лефор "Алгебра и анализ" Задачи. М., "Наука", 1973г.
32. И.А.Марон "Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах" М., "Наука", 1973г.
33. Я.И.Ривкинд "Задачи по математическому анализу", "Высшейшая школа", 1973г.
34. Я.И. Ривкинд "Дифференциальное и интегральное исчисление в задачах" М., "Высшейшая школа", 1971г.
35. В.А. Зорич "Математический анализ" т. I-II, М., "Наука", 1981г.
36. А.М. Тер-Крикоров, М.И.Шабунин, "Курс математического анализа", М., "Наука", 1988г.
37. В.С.Шипачев "Основы высшей математики" М., "Высшая школа", 1989г.
38. Д.А.Райков "Одномерный математический анализ" М., "высшая школа", 1982
39. Н.Б. Хаимов "Анализ математики" т. I-III, "Ирфон", 1966с.
- Э.Р. Рузметов ва Н.Б.Хаимов. "Курси махсуси анализи математики" т. I-II, "Ирфон", 1996с.

МУНДАРИЧА

Пешгуфтор.....	4
Боби I. Ададҳои Ҳақиқӣ.....	5
§1. Маҷмӯъ ва амалҳои он.....	5
§2. Адад ва мафҳуми васеъкунии он.....	9
§3. Ададҳои ҳақиқӣ ва хосиятҳои он.....	17
§4. Маҷмӯъҳои ададӣ ва сарҳади онҳо. Бузургии мутлақи адад ва хосиятҳои он. Методи индуксияи математикӣ ва биноми Ньютон.....	26
Боби II. Маълумотҳои аввалини инъикосҳо ва функсияҳо.....	45
§5. Инъикос ва хосиятҳои оддитарини он.....	45
§6. Функсияҳои таъғирёбанди ҳақиқӣ. Мухимтарин синфҳои функсияҳо	50
Боби III. Пайдарпаиҳо.....	79
§7. Пайдарпаиҳои ададӣ ва ҳудудҳои онҳо.....	79
§8. Пайдарпаиҳои беохир хурд ва беохир калон.....	86
§9. Гузариши ҳудуди ва амалҳои арифметикӣ.....	87
§10. Пайдарпаиҳои монотон. Адади e	90
§11. Баъзе хосиятҳои маҷмӯъҳои ададӣ.....	92
§12. Зерпайдарпаиҳо. Критерияи Коши	96
§13. Ҳудуди болои (поён)-и пайдарпай.....	99
Боби IV. Ҳудуди функсияҳо.....	103
§14. Таърифҳои гуногуни ҳудуди функсия ва баробарқуввагии онҳо.....	103
§15. Хосиятҳои умумии ҳудудҳо.....	107
§ 16. Ҳудуди функсияи аз руи база.....	114
Боби V. Функсияҳои бефосила.....	123
§17. Мафҳуми бефосилагии функсияҳо.....	123
§18. Нуқтаҳои каниши функсия ва классификатсияи онҳо.....	129
§19. Хосиятҳои локалии функсияҳои бефосила.....	135

§20. Хосиятҳои глобалии функцияҳои бефосила.....	137
§21. Натиҷаҳо аз ҳудуди шоёни дуюм. Муқоисаи функцияҳо ва тадқиқи онҳо дар ҳисоб намудани ҳудудҳо.....	148
Боби VI. Ҳисоби дифференсиалӣ.....	171
§22. Ҳосила ва хосиятҳои он.....	171
§23. Функцияҳои дифференсиронидашаванда. Дифференсиал.....	183
§24. Функцияҳои гипербола ва ҳосилаҳои онҳо. Ҷадвали ҳосила ва дифференсиали функцияҳо.....	191
§25. Ҳосила ва дифференсиалҳои тартиби ола.....	195
Боби VII. Теоремаҳои асосии ҳисоби дифференсиалӣ.....	203
§26. Теоремаҳои қимати миёна.....	203
§27. Формулаи Тейлор ва баъзе тадқиқоти он.....	212
§28. Кушодани номуайяниҳо бо қоидаи Лопитал.....	227
Боби VIII. Тадқиқи функция бо методҳои ҳисоби дифференсиалӣ.....	235
§29. Шартҳои монотонии функцияҳои дифференсиронидашаванда...	235
§30. Шартҳои мавҷудияти экстремумҳои локалӣ.....	238
§31. Функцияҳои барҷаста. Нуқтаҳои қатъшавӣ	248
§32. Асимптотаҳо ва схемаи тадқиқи функция.....	259
Боби IX. Интегралҳои номуайян.....	267
§33. Мафҳуми функцияи ибтидоӣ. Таъриф ва хосиятҳои интегралҳои номуайян. Ҷадвали интегралҳо	267
§34. Методҳои интегронӣ.....	273
§35. Интегрони касрҳои ратсионалӣ.....	282
§36. Интегрони ифодаҳои иратсионалӣ.....	294
§37. Интегронидани баъзе ифодаҳои тригонометрӣ.....	302
§38. Қайдҳо оиди интегралҳои, ки бо функцияҳои элементарӣ ифода намеёбанд.....	304
Боби X. Интегралҳои муайян.....	307
§39. Мафҳуми интегралҳои Риман ва баъзе шартҳои интегронидашавандагии функцияҳо.....	307
§40. Шартҳои қифоягии интегронидашавандагӣ ва муҳимтарин классҳои функцияҳои интегронидашаванда.....	317
§41. Суммаҳои Дарбу. Баъзе критерияҳои интегронидашавандагӣ.....	323
§42. Хосиятҳои функцияҳои интегронидашаванда ва интегралҳои	

муайян.....	331
§43. Формулаи Нютон-Лейбнитс Мавҷудияти функсияҳои ибти- дой	340
§44. Методҳои ҳисоб кардани интегралҳои муайян.....	344
Боби XI. Интегралҳои ғайрихос.....	354
§45. Мафҳуми интегралҳои ғайрихос наздикшавӣ ва дуршавии онҳо.....	354
§46. Хосиятҳо ва методҳои ҳисоб намудани интегралҳои ғайрихос	362
§47. Баъзе нишонаҳои наздикшавии интегралҳои ғайрихос аз функсияҳои ғайри манфӣ.....	370
§48. Мутлақ ва шартан наздикшавии интегралҳои ғайрихос. Нишонаҳои Абел ва Дирихле	376
Боби XII. Баъзе тадбиқҳои ҳисоби интегралӣ.....	382
§49. Ҳисоб намудани масоҳати фигураи ҳамвор ва ҳаҷми баъзе ҷисмҳои фазоӣ.....	382
§50. Дарозии хати қавҷ ва масоҳати сатҳи чархзанӣ.....	396
Адабиёт	410

