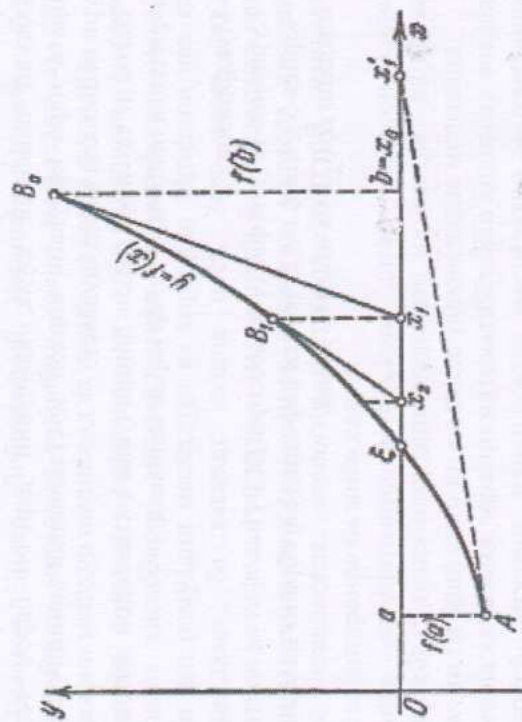


Kitob quyidagi ko'rsatilgan muddatda topshirilishi shart

Oldingi foydalanishlar miqdori

МЕТОДҲОИ ҲИСОБКУНӢ



ББК В193 Я73
УДК 51 (076.5)
Д – 243

Дастури таълими дар ҷаласаи Шӯрои илмӣ-методи ДДОТ ба номи Садриддин Айнӣ аз 22 июли соли 2022 фармони № 9/4 баррасӣ ва тасдиқ шудааст.

Ҳасанов Ю.Х., Одиназода С.О., Нетьматов Ғ.Н. Методҳои ҳисобкунӣ. Душанбе, 2022, ДДОТ ба номи С.Айнӣ, 228с.

Васонити таълими барои ташкил ва гузаронидани дарсҳои назариявӣ, лабораторӣ ва машғулиятҳои амалӣ аз ҷанбаи методҳои ҳисобкунӣ пешбинӣ шуда, ҳамчунин дар он барои ташкил ва назорати иҷро намудани корҳои мустақилонаи донишҷӯён маводи зарурӣ пешниҳод карда шудааст.

Васонити таълими барои донишҷӯёни ихтисосҳои математика ва информатика пешниҳод тайёр карда мешавад.

Муқарризон:

Курбонов И., д.и.ф.м., профессори ДСРТ.

Ҷориев У, н.и.ф.м., дотсенти кафедраи алгебра ва назарияи ададҳои ДДОТ ба номи С. Айнӣ.

ISBN 978-99985-54-89-4

© Ҳасанов Ю.Х., Одиназода С.О., Нетьматов Ғ.Н. 2022

МУҚАДДИМА

Пеш аз он ки ба баёни назарияи методҳои ҳисобкунӣ гузарем, мавқеъ ва нуфузи онро дар муҳити фанҳои дигар муайян карда, дар бораи масъалаҳои, ки ҳангоми истифодаи усулҳои тақрибии ин фан ба миён меоянд, равшанӣ андозем.

Ҳалли масъалаҳои амалӣ бо ёрии методҳои тақрибӣ аз давраҳои қадим мавриди муҳокимаи математикон буд. Дар гузашта олимони машҳури соҳаи математика тадқиқотҳои худро бо омӯзиши ҳодисаҳои табиат пайваста, тасвири математикӣ ин ҳодисаҳо (модели математикӣ) ва тадқиқ намудани онҳоро пеши худ мақсад мегузоштанд. Таҳлили моделҳои мураккаби пайдошуда коркарди усулҳои нави тақрибӣ ҳал намудани масъалаҳои талаб менамуд. Номгӯи як қатор методҳои тақрибии ҳалли масъалаҳо, ба монанди, методи Нютон, Эйлер, Лобачевский, Чебишёв, Эрмит – ғувоҳи онанд, ки бисёр методҳои тақрибии ҳалли масъалаҳо аз тарафи математикони машҳур пешниҳод ва истифода карда шудаанд.

Ба миён омадани ақидаҳои, ки ғуё пайдоиши мошинҳои электронии ҳисоббарор математиконро аз истифодаи методҳои тақрибии ҳал намудани масъалаҳо ва коркарди методҳои нав қариб озод намудааст, ба ҳақиқат наздик нест. Зеро васеъ шудани имкониятҳои истифодаи методҳои математикӣ, ба математика наздик намудани (математизатсия) химия, биология, иқтисод, география, геология, психология, экология, метеорология, тиб, масъалаҳои техникӣ ва дигаронро ба миён овард.

Маънои математизатсияи соҳаҳои дигар – барои ҳодисаву воқеаҳои табиат таҳия намудани моделҳои математикӣ ва коркарди методҳои, ки бо ёрии онҳо ин моделҳо тадқиқ карда мешаванд.

Аммо на ҳама вақт ҷараёни математизатсияи ҳодисаву воқеаҳо ба таври зарурӣ мегузашт, чунки ҳалли масъалаҳои математикӣ ба миёномада на ҳама вақт имконпазир буданд ва бо гузаронидани тадқиқи модели соддатарини математикӣ маҳлуд мешуданд.

Истифодаи мошинҳои электронии ҳисоббарори замонавӣ ва пешрафти илми математика имкониятҳои таҳия ва тадқиқи моделҳои математикӣ мураккабро зиёдтар намуд. Акнун ҳангоми ҳисобкунии натиҷаҳои ба даст меомаданд, ки дар бораи онҳо ягон маълумоте мавҷуд набуд, ба ягон ҳодисаҳои табиат монандӣ надоштанд, яъне мутахассисон ба озмоишҳои (экспериментҳои) математикӣ рӯ оварданд. Ҳангоми гузаронидани баъзе

хисобкуниҳои тақрибӣ ҳеле боварибахш мешуданд ва фарқияти байни натиҷаҳои хисобкуниҳои тақрибӣ ва озмоишхоро бо муайян намудани ҳамаи баъзеи онҳо аниқ мекардагӣ шуданд.

Талабот ба истифодаи методҳои тақрибии ҳалли масъалаҳо ба он оварда расонд, ки миклори зиёди методҳои нав ба нав дар ин соҳа ба миён омадан гирифтанд. Акнун имконияти васеи истифодаи методҳои тақрибии ҳалли масъалаҳо бо ёрии мошинҳои электронии ҳисоббарор пайдо шуда буд.

Комебиҳои калони истифодаи мошинҳои электронии ҳисоббарор дар соҳаҳои гуногуни ҳисоббарорӣ бо як қатор омилҳои муҳими зерин вобастагии зиёд доранд:

1. Суръати баланди иҷрои амалҳои математикӣ, зиёдтар шудани хотира барои маҳфузи маълумотҳо, тақмил ёфтани қисмҳои дохилии мошинҳо, торафт паст шудани ҳаҷми амалҳои арифметикӣ ва воҳидҳои хотираи мошинҳои электронии ҳисоббарор;
2. Таҳия намудани барномаҳои диалогӣ, ки дар худ системаҳои оператсионӣ, забонҳои барномасозӣ, библиотека ва пакетҳои барномаҳои қолибӣ (стандартӣ) доранд, талаботи камтарин ба маълумотнокӣ математикӣ ва барномасозии истифодабарандагон;
3. Боло рафтани дараҷаи азхудкунии чароёнҳо ва ҳодисаҳои табиату ҷамъият ва таҳия намудани моделҳои математикӣ онҳо;
4. Мукамал намудани методҳои ҳалли масъалаҳои анъанавии математикӣ ва амалӣ ва қоркарди методҳои ҳалли масъалаҳои нав;
5. Баланд бардоштани дараҷаи фаҳмишу қабули оммаи васеъ доир ба имкониятҳои мошинҳои электронии ҳисоббарор дар соҳаҳои гуногун; фаҳмонда додани амалиёти саводнокии компютерӣ (компьютерная грамотность) дар ҷамъият; муттаҳид намудани кушишу ғайрати мутахассисони соҳаҳои гуногун бо мақсади пурсамар истифода бурдани воситаҳои техникӣ ҳисоббарор.

Ҳангоми иҷро намудани хисобкуниҳои мураккаб зарур аст, ки қоидаҳои оддитарини дар амалия санҷидашуда ба назар гирифта шаванд. Аз рӯи ин қоидаҳо рафтор кардан қори ҳисобкунандаро осон намуда, имконият медиҳад, ки воситаҳои техникӣ ҳисоббарори мавҷуда муфид ва қулай истифода бурда шаванд. Ғайр аз ин, зарур аст, ки барои дастрас намудани натиҷаҳои дилхоҳ ва ғаноатбахш ба қоидаҳои зерин эътибор дода шаванд.

1. Пеш аз ҳама, ҳисобкунанда схемаи аниқ пурраи хисобкуниро тартиб диҳад, ки дар он тартиби амалҳои нишондодашуда ва имкониятҳои ба даст овардани натиҷаҳои лозимӣ аниқ содда ва бо

усулҳои бехтарини иҷро амалҳо нишон дода шудаанд. Иҷрои ин амалиёт, махсусан, ҳангоми ҳалли масъалаҳо, ки алгоритми умумӣ доранд, ҳеле муҳим аст. Зеро дар ин ҳолат амалҳо ба таври автоматӣ тасвир ба аниқ иҷро шуда, вақти иҷрокунанда беҳуда исроф намешавад. Ғайр аз ин, аз ҷунин схемаи пешакӣ тартибдодашудаи ҳалли масъала истифода бурдани мутахассиси нисбатан камтаҷриба низ дар назар дошта мешавад.

II. Лаҳзаи дигари зарурии, ки ба он бояд диққат дод – ин назорат аз болои чараёни хисобкуни мебошад. Бе тафтиши аниқии иҷро амалҳо натиҷаҳои чараёни хисобкуноро аниқ ва ба итмомрасида ҳисобидан қобили қабул нест. Назорат аз болои чараёни хисобкуни ба назорати фосилавӣ ва назоратӣ интиҳой ҷудо карда мешавад. Ҳангоми назорати фосилавӣ амалҳои иловагиро иҷро намуда, ба аниқӣ ва дурустии натиҷаҳои фосилавӣ соҳиб мешавем. Дар ҳолати ақс, ин даври хисобкуни аз нав ба иҷро расонида мешавад. Ҳангоми назоратӣ интиҳой бошад, танҳо натиҷаи охирини хисоб, яъне натиҷаи ҳалли масъалаи гузашташуда, мавриди тафтиш мегардад. Агар дар ин ҳолат натиҷа шубҳанок бошад, он гоҳ ҳама даврҳои хисобкуниро тафтиш намудан зарур мешавад. Бинобар тафтиши хисобкуниҳо дар ҳар як давр мувофиқи мақсад буда, вақти иҷрокунанда беҳуда сарф намешавад. Дар баъзе мавридҳо масъала аз тарафи ду мутахассис ҳал карда мешавад ва ё бо ду усул ҳал карда шуда, натиҷаҳо муқоиса карда мешаванд.

III. Қоидаи сеюми муҳим – ин баҳодиҳии ҳамаи мебошад. Дар бисёр ҳолатҳо хисобкуни бо адалҳои тақрибӣ ва натиҷаҳои тақрибӣ қабул карда мешаванд, яъне ҳамаи пайдо мешаванд. Баъзан ҳангоми амалҳо бо адалҳо ва методҳои аниқ ва яқиниҳои низ ҳамаи пайдо мешаванд. Агар ҳамаи ин ҳамаи ба назар гирифта шаванд, он гоҳ натиҷаи дилхоҳи ҳалли масъала ба даст намеояд ва баҳои ин ҳамаи муайян кардан ба миён меояд. Бинобар дар ҳар як қисми ин васоити таълимии мо методҳои баҳодиҳии ҳамаи оварда шудаанд.

Қоидаи мазкур ба яқини методҳои тақрибии ҳалли масъалаҳо бахшида шудааст. Дар ин ҳамаи маводҳои назариявӣ доир ба бобҳои зерини фанни методҳои хисобкуни пешниҳод шудаанд: назарияи ҳамаи; алгебраи матрисаҳо; методҳои тақрибии ҳалли муодилаҳои алгебравӣ ва трансцендентӣ; методҳои тақрибии ҳалли системаҳои муодилаҳои алгебравӣ; назарияи интерполятсияи функсияҳо; методҳои дифференсиронии адалӣ; методҳои тақрибии ҳисоб намудани интегралҳои муайян; методҳои тақрибии ҳалли муодилаҳои

дифференциалӣ; таҳия намудани мувозинаи (баланси) иктисодиёти корхона ва масъалаҳои хизматрасонии оммавӣ.

Китоб аз 9 боб иборат буда, ҳар як боб аз қисмҳои назариявӣ, амалӣ, лабораторӣ ва иҷроӣ қори мустиқилона иборатанд ва дар онҳо микдори зиёди мисолу масъалаҳои намунавӣ ҳал карда шудаанд. Дар поёни ҳар як боб саволҳои барои санҷиши дониши донишҷӯён оварда шудаанд. Ғайр аз ин, дар ҳар боб барои иҷроӣ қори мустиқилона ба донишҷӯён қори амалӣ, қори лабораторӣ ва қори мустиқилона дар си варианти пешкаш карда шудаанд.

Боби аввали китоб ба назарияи ҳаҷо бахшида шудааст. Дар ин ҳо пайдоиш, тасниф ва намуни ҳаҷо, ҳаҷунин бо мисолҳои мушаххас ҳаҷо, қоидаҳои ялхутқунӣ, ҳисобқунҳои тақрибии решаҳои квадратии қубӣ нишон дода шудаанд.

Дар боби II – алгебраи матрисаҳо, бо истифодаи як қатор мисолҳо амалҳо бо матрисаҳо дида мешаванд. Бобҳои III – VIII бошанд, методҳои нисбатан бештар истифодашавандаро барои ҳалли системаи муодилаҳои ҳаттӣ, муодилаҳои алгебраии трансцендентӣ, назарияи интерполлятсияи функсияҳо, дифференсиронӣ ва интегронии ададӣ, ҳалли муодилаҳои дифференсиронӣ дарбар мегиранд. Дар боби IX бошад, моделсозии математикӣ дар ҳалли масъалаҳои иқтисодӣ (таҳияи мувозинаи (баланси) қорхонаҳо, қор бо додашудаҳои эксперименталӣ, масъалаҳои системаи хизматрасонии оммавӣ) дида шудаанд.

Дар интиҳои ҳар як боби китоби мазкур маҷмӯи саволҳои барои тақрори боби омӯхташуда пешниҳоди хонандагон шудаанд.

Дар китоб аз адабиёти зиёди бо забони русӣ таълифшуда истифода бурдаем ва шояд таҷумаи баъзе мафҳумҳо ба назар, хонандаи муҳтарам аз мафҳуми тоҷикии онҳо тафовут дошта бошад. Бинобар дар мавридҳои зарурӣ баъди мафҳуми тоҷикӣ дар қавс намунаи русии онро овардаем, ки то ба андозае ба ин масъала равшанӣ меандозад ва мувофиқи мақсад мешуморем.

БОБИ I. НАЗАРИЯИ ҲАҶО

1.1. Пайдоиш ва таснифи ҳаҷо

Яке аз шартҳои асосие, ки ҳаҷоии моделсозии математикӣ ба назар гирифта мешавад, дастрас будани натиҷаҳои қаноатбахш ба ҳисоб меравад. Аммо дар амалия қам мавридҳои пеш меоянд, ки методи муайяни ҳалли масъала ёфта шуда, натиҷаи дишҳох ҳосил карда мешавад. Бинобар ин ҳалҳои аниқ ва тақрибии масъала яқоя истифода мешаванд ва дар баробари интиҳоби методи ҳисобқунӣ, аз нуқтаи назари алгоритми тартибододашуда, баҳои аниқии ҳаҷоҳои натиҷаҳои дастрасшуда, бо саҳеҳии муайян ҳисоб карда мешаванд. Чунин ҳаҷоҳои пайдошударо бо бузургие баҳо медиҳанд, ки онро баҳои ҳаҷо меноманд.

Мафҳуми ҳаҷо бузургиро ифода мекунад, ки он аниқии натиҷаҳои ҳисобқуниро муайян мекунад.

Ҳаҷоии моделсозии математикӣ ҳалли масъалаҳои сарчашмаҳои зерин боиси пайдо шудани ҳаҷоҳо мешаванд:

- 1) ҳаҷоии модели математикӣ;
- 2) ҳаҷоии додашудаҳои ибтидоӣ (ҳаҷоҳои бағарафнашаванда);
- 3) ҳаҷоии методи тақрибии истифодашуда;
- 4) ҳаҷоии ҳисобқунӣ ва ялхутқунӣ.

Ҳаҷоии модели математикӣ ҳаҷоии муқоисаи соддагии тақбиқи тақбиқӣ ва имқониятҳои қузаронидани таққиқоти объекти муқоинашаванда пайдо мешавад. Маълум аст, ки модели математикӣ, ки дар ягон муҳити муайян ҳеле ҳуб амал мекунад, дар муҳити дигар тақбиқи ҳудро намеёбад. Бинобар, аз рӯи нуқтаи назари истифодабарандагон, баҳои дурусти соҳаи тақбиқи он, ниҳоят муҳим аст.

Ҳаҷоии додашудаҳои ибтидоӣ ҳаҷоии қузаронидани ҳенқуниҳо ва ё қун намулдани маълумотҳои объект ва ё ҳаҷоии тақрибӣ будани додашудаҳои ибтидоӣ пайдо мешаванд. Ин қуна ҳаҷоҳои бағарафнашаванда меноманд, зеро тақтиши аниқӣ ва дурустии натиҷаҳои ҳисобқуниҳо имқонопазир буда, зарурияти аз нав қузаронидани ҳенқуниҳо ва қун намулдани маълумотҳои объект ба миён меояд.

Ҳаҷоии методи тақрибии истифодашуда (ҳаҷоии наздиқунии объектҳои математикӣ) ҳаҷоии иваз намулдани интеграл ба суммаи қатор, интерполлятсияи қиматҳои қадвалӣ, вобастагиҳои функсионалӣ, тақлили функсияи мураккаб ба бисёрҷағиҳо ва ғайраҳо пайдо мешавад. Ҳаҷоии методи тақрибиро зери назорат гирифтаи мумқин

буда, бузургии онро бо роҳи иваз намудани ягон параметраш ба дараҷаи хурдтарин овардан имконпазир аст.

Хатои ҳисобкунии ва яклухткунӣ ҳангоми яклухткунӣ ададҳо, натиҷаҳои фосилавӣ ва анҷом ёфтани ҳисоб ба вучуд меояд. Ин хато аз қоидаҳо ва зарурияти яклухткунӣ ва алгоритми ҳалли тақрибии масъала вобаста аст.

Яклухткунӣ. Акнун як қатор қоидаҳои яклухткуниро дида мебаром.

1. Агар калонтарин разряди адади яклухтшаванда аз адади 5 хурд бошад, он гоҳ адади пешояндаи он бетағйир мемонад. Масалан, 13,7649 $\approx$ 13,76.

2. Агар калонтарин разряди адади яклухтшаванда аз адади 5 калон бошад, он гоҳ адади пешояндаи он ба як воҳид зиёд карда мешавад. Масалан, 13,7689 $\approx$ 13,77.

3. Агар калонтарин разряди адади яклухтшаванда ба адади 5 баробар бошад, он гоҳ дар ҳолати тоқ будани адади пешоянда, он тағйир намеёбад, дар ҳолати чуфт будани адади пешоянда ба як воҳид зиёд карда мешавад. Масалан, 35,68152 $\approx$ 35,681, ва 35,68252 $\approx$ 35,683.

4. Ҳангоми яклухткунӣ адади бутун разрядҳои партофташавандаро ба нолҳо иваз кардан зарурият надорад, адади яклухтшударо ба зарб намудан бо дараҷаи мувофиқи 10 менависанд. Масалан, 456713 $\approx$ 4,5 $\cdot$ 10⁵.

Шарти асосии яклухткунӣ – ба бузургии хурдтарин овардани фарқи байни адади додашуда ва адади яклухтшуда ба ҳисоб меравад.

Мисоли 1. Адади долашуда бо микдори муайяни разрядҳои яклухт карда шавад.

- 1) $c = 1,9396712$; 2) $c = 245,351365$;
 $c^* = 1,939671$; $c^* = 245,35136$;
 $c^* = 1,93967$; $c^* = 245,3514$;
 $c^* = 1,9397$; $c^* = 245,351$;
 $c^* = 1,940$; $c^* = 245,35$;
 $c^* = 1,94$; $c^* = 245,4$;
 $c^* = 1,9$; $c^* = 245$;
 $c^* = 2$; $c^* = 2,4 \cdot 10^2$;
 $c^* = 2 \cdot 10^3$;

Мисоли 2. Ифодаи зерин дола шудааст

$$S = 25,71 \cdot 1,42 - 3,21 \cdot 7,46 + 0,93 \cdot 7,75 - 4,31 \cdot 2,69.$$

1. Бузургии S аниқ ҳисоб карда шавад

$$S = 36,5082 - 23,9466 + 7,2075 - 11,5939 = 8,1752.$$

2. Бузургии S ҳисоб карда шавад ва то ду разряд баъди вергул яклухт карда шавад

$$S1^* = 8,18.$$

3. Ҳар як зарбшавандаи бузургии S бо ду разряд баъди вергул ҳисоб карда шуда, натиҷаҳо ҷамъ карда шаванд

$$S2^* = 36,51 - 23,95 + 7,21 - 11,59 = 8,18.$$

Яке аз максадҳои асосии назарияи хатоҳо – нишон додани соҳаи номуайянии натиҷаҳои ҳисобкуниҳо ба ҳисоб меравад.

Адади тақрибии a гуфта ададери меноманд, ки ин адад аз адади аниқ A кам фарқ карда, дар ҷараёни ҳисобкуниҳо онро иваз мекунад.

Агар $a < A$ бошад, он гоҳ адади a кимати тақрибии адади A бо норасоӣ номида мешавад, агар $a > A$ бошад, он гоҳ адади a кимати тақрибии адади A бо барзиёдӣ номида мешавад. Масалан, барои адади π бузургии 3.141 кимати тақрибӣ бо норасоӣ мешавад, ва 3.142 – бо барзиёдӣ, бинобар 3.141 $< \pi < 3.142$. Агар a кимати тақрибии адади A бошад, он гоҳ ин муносибат ба тарзи зерин ифода карда мешавад $a \approx A$.

Бигзор A – кимати аниқ бузургии номаълуме буда, a – кимати тақрибии он, ки бо ягон усули муайяне ёфта шудааст. **Хатои** ва ё **кимати тақрибии Δa** адади a гуфта, фарқи байни кимати аниқ адади A ва кимати тақрибӣ адади a – ро меноманд, яъне $\Delta a = A - a$.

Хатои мутлақи Δ адади тақрибии a гуфта кимати мутлақи фарқи байни кимати аниқ адади A ва кимати тақрибӣ адади a – ро меноманд, яъне $\Delta = |A - a|$.

Хатои нисбии δ адади тақрибии a гуфта, нисбати хатои мутлақи Δ ин ададро ба кимати мутлақи адади аниқ A ($A \neq 0$) меноманд, яъне $\delta = \frac{\Delta}{|A|}$. Аз ин ҷо $\Delta = |A| \cdot \delta$, бинобар, $|A - a| = |A| \cdot \delta$ шуда метавонад ва ё $\delta = \left| \frac{A-a}{A} \right|$.

Хатоҳои мутлақ ва нисбии адад бо барзиёдӣ яклухт карда мешаванд, зеро ҳангоми яклухткунӣ ҳудуди номуайянии адад васеъ мешавад. Аз ин рӯ, ҳисобкуниҳо бо як-ду разряди иловагии ададҳо гузаронида мешаванд.

Хатои мутлақи ҳудудии адади тақрибӣ Δ_a – чунин ададест, ки аз хатои мутлақи ин адад хурд нест, яъне $|\Delta| \leq \Delta_a$. Агар Δ_a хатои мутлақи ҳудудии адади тақрибии a, ки адади аниқ A – ро

ивазкунанда бошад, он гоҳ $\Delta = |A - a| \leq \Delta_a$ мешавад. Бинобар кимати аниқи адади A ба маҳдудияти зерин соҳиб мегардад $a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a$ ё $A = a \pm \Delta_a$.

Мисоли 3. Хатой мутлаки худудии адади тақрибии $a = 1.41$, ки ба ҷой адади $\sqrt{2}$ гирифта шудааст, ёфта шавад.

Хал. Азбаски нобаробарии зерин ҷой дорад $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$, бинобар $|a - \sqrt{2}| < 0.01$ мешавад. Аз ин ҷо $\Delta_a = 0.01$ қабул кардан мувофиқи мақсад аст.

Мисоли 4. Хатой мутлаки худудии адади тақрибии a , ёфта шавад, агар $a = \frac{1}{3}$ ва $A = 0.333$ бошад.

Хал. Азбаски $a = \frac{1}{3} = 0.3333 \dots$ аст, бинобар $\Delta = |A - a| = |0.3333 \dots - 0.333| < 0.00034$ мешавад. Бинобар хатой мутлаки худудии адади тақрибии a бошад, $\Delta = 0.00034$ мешавад.

Қайд кардан зарур аст, ки аниқии натиҷаи ҳисобро хатой нисбии он муайян мекунад. Масалан, ададҳои $\pi^* = 3.14$ ва $l^* = 256795$ — ро дида мебароем. Маълум аст, ки $\pi = 3.14159265 \dots$ мебошад. Бинобар $\Delta\pi^* = 3.14159265 - 3.14 = 0.0016$ мешавад ва хатой нисбии он намууди зерин мегирад

$$\delta\pi^* = \frac{0.0016}{3.14} = 0.0005 \text{ ё } \Delta\pi^* = 0.05\%.$$

Маълум аст, ки $\Delta l^* = 1$, бинобар $\delta l^* = \frac{1}{256795} = 0.0000039 \text{ ё } \delta l^* = 0.00039\%$ мешавад. Гарчанде $\Delta\pi^* \ll \Delta l^*$ аст, аммо худӣ бузургии l^* назар ба адади π^* аниқтар муайян карда шудааст.

Хатой нисбии худудии адади тақрибӣ δ_a адади тақрибии a чунин ададест, ки аз хатой нисбии ин адад хурд нест, яъне $\delta \leq \delta_a$. Аз ин ҷо $\frac{\Delta}{|a|} \leq \delta_a$ ва $\Delta \leq |a| \cdot \delta_a$. Хамин тавр, ба сифати хатой нисбии худудии адади тақрибӣ a бузургии зеринро қабул кардан мумкин аст $\Delta_a = |a| \cdot \delta_a$.

Адади дилхоҳи мусбати a — ро дар намууди касри дахлии охирнок ва ё беохир тасвир намудан мумкин аст, яъне

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + \dots + a_{n-m+1} 10^{n-m+1} + \dots$$

Мисол,

$$576.941 = 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}$$

Ҳамаи рақамҳои ададро аз рақами якуми (аз тарафи чапи адад) нобаробари нол сар карда, **рақамҳои аҳамиятнок** меноманд.

Масалан, дар адади 0.000120701 чор ноли аввала рақамҳои аҳамиятнок нестанд, рақамҳои боқимондаи дар зерашон хат ванданишуда (нол ҳам) аҳамиятноканд, зеро онҳо дар байни рақамҳои аҳамиятнок ҷой гирифтаанд. Бо иборати дигар, ҳамаи рақамҳои адад дар навишти он, аз аввалин рақами ғайринулии тарафи чапи адад сар шуда, рақамҳои аҳамиятнок номида мешаванд. Мисол, $x = 2.396029$ — ҳамаи рақамҳои адад (0 низ) аҳамиятноканд; $x = 0.00267$ — танҳо рақамҳои 2, 6, 7 аҳамиятноканд; се ноли аввала аҳамиятнок нестанд, чунин онҳо рақамҳои ғирасонанд — онҳо мавқеи ҷойгиршавии рақамҳои 2, 6, 7 — ро нишон медиҳанд. Аз ин рӯ тасвири зерини ин ададро қабул кардан мумкин аст $x = 2.67 \cdot 10^{-3}$, $x = 2270000$ ва ё $x = 2.27 \cdot 10^6$ (дар навишти якум ҳамаи ҳафт рақами овардашуда аҳамиятноканд, дар навишти дуюм — танҳо рақамҳои 2, 2, 7 аҳамиятноканд).

Агар маълум бошад, ки адади $c = 3200$ аниқ аст, он гоҳ ин ададро дар намууди $c = 3.2 \cdot 10^3$ навиштан ғалаг ҳисобида мешавад, зеро бо ин амал ду ноли адад рақамҳои аҳамиятнокшуда наметавонанд.

Мисоли 5. Адади $A = 4.726$ — ро то ду рақами аҳамиятнок яқлут карда, хатой мутлаки адади тақрибии ҳосилшуда ёфта шавад.

Хал. Адади додашударо пайдарпай то ду рақами аҳамиятнок яқлут карда, ҳосил мекунем $a \approx 4.73 \approx 4.7$. Мувофиқи таърифи хатой мутлаки адади тақрибии a — ро меёбем

$$\Delta = |A - a| = |4.762 - 4.7| = 0.026.$$

Рақами эътимодноки адад гуфта рақами аҳамиятнокӣ ин ададро меноманд, ки хатой мутлаки он аз нисби воҳидӣ разряди рақами аҳамиятнок калон набошад. Бо иборати дигар, бигзор адади $x = \alpha_0 q^n + \alpha_1 q^{n-1} + \alpha_2 q^{n-2} + \dots + \alpha_m q^{n-m}$ дода шуда бошад. Рақами аҳамиятнокӣ α_m — адади x **рақами эътимодноқ** номида мешавад, агар хатой мутлаки худудии x аз ω маротиба воҳиди разряди α_m калон набошад, яъне

$$\Delta_a \leq \omega \cdot q^{n-m}.$$

Мисоли 6. Микдори рақамҳои эътимодноки адади тақрибии a ёфта шавад, агар $a = 2.34$ буда, $\delta_a = 2\%$ — хатой нисбии худудӣ ва $\omega = 0.5$ бошад.

Хал. Мувофиқи таърифи хатой нисбии худудӣ

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \text{ ва ё } \Delta_a = \delta_a \cdot |a| = 2.34 \cdot 0.02 = 0.04622.$$

Аз қоидаҳои яқлуткунии истифода бурда, навишта метавонем

$$\delta_a = 0,05 \text{ ва ё } \delta_a = 0,047.$$

Рақами 4 шубханок аст, зеро $\delta_a > 0,5 \cdot 10^{-2} = 0,005$ аст. Рақамҳои 3 ва 2 рақамҳои эътимодноқанд, зеро

$$0,05 = \delta_a = 0,5 \cdot 10^{-1}.$$

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки микдори рақамҳои эътимодноқ $m = 2$ аст.

Рақамҳои ғайриэътимодноқро рақамҳои шубханок меноманд

Агар барои адади тақрибии a , ки ба ҷои адади аниқии A гирифта шудааст

$$\Delta = |A - a| \leq \frac{1}{2} 10^{n-m+1},$$

бошад, он гоҳ мувофиқи таърифи овардаамон m рақами аввалини адади $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-m+1}$ эътимодноқ мебошанд.

Масалан, барои адади аниқии $A = 576.941$ адади $a = 577$ адади тақрибӣ бо чор рақами эътимодноқ мешавад, зеро $|A - a| = 577 - 576.941 = 0,059 < \frac{1}{2} \cdot 0.1$. Дар адади тақрибии $x = 2,718 \pm 0,006$ рақамҳои 1, 7, 2 эътимодноқанд ($0,006 \leq 0,01$; $0,006 \leq 0,1$; $0,006 \leq 1$), аммо рақами 8 шубханок аст, чунки нобаробарии $0,006 \leq 0,001$ иҷро намешавад.

Мисоли 7. Адади тақрибии $a = 1,574$ дода шудааст, ки дар он хатой мутлақи худудиаш $\Delta_a = 0,03$ ва $\omega = 0,5$ аст. Рақамҳои шубханоки адади a яклухт карда шуда, рақамҳои эътимодноқ боқӣ гузошта шаванд. Хатой мутлақи худудии адади баъд аз яклухткунӣ ҳосилшудаи алад ёфта шавад.

Ҳал. Азбаски $\Delta_a = 0,03 < 0,5 \cdot 10^{-1}$ аст, бинобар дар адади $a = 1,574$ рақамҳои 1 ва 5 эътимодноқ буда, 7 ва 4 шубханоқанд. Мувофиқи қоидаи яклухткунӣ $a \approx \tilde{a} = 1,6$ мешавад. Он гоҳ

$$\Delta_a = |a - \tilde{a}| = 0,026.$$

Азбаски $\Delta_a = 0,026 < 0,5 \cdot 10^{-1}$ аст, бинобар дар адади $\tilde{a} = 1,6$ харду рақам эътимодноқанд.

Агар адади мусбати тақрибии a дорои n рақамҳои эътимодноқ бошад, он гоҳ хатой нисбии худудии ин адад бо формулаи зерин ёфта мешавад

$$\delta_a = \frac{1}{\alpha_m} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}, \quad (A)$$

дар ин ҷо α_m – аввалин рақами эътимодноки адади a .

Агар адади a зиёда аз ду рақами эътимодноқ дошта бошад, он гоҳ ба ҷои формулаи (A) истифодаи формулаи зерин қулайтар аст

$$\delta_a = \frac{1}{2\alpha_m} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}, \quad (B)$$

Мисоли 8. Хатой нисбии худудии бузургии π ёфта шавад, агар ба сифати қимати тақрибии он адади $a = 3.14$ интиҳоб карда шуда бошад.

Ҳал. Мувофиқи шартӣ маъсала $\alpha_m = 3$ ва $n = 3$ аст. Азбаски $n = 3 > 2$ аст, формулаи (B) – ро истифода бурда, хатой нисбии худудии бузургии π – ро меёбем

$$\delta_a = \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{10} \right)^{3-1} = \frac{1}{6 \cdot 100} = \frac{1}{600} = \frac{1}{6} \%.$$

Бинобар хатой нисбии худудии бузургии π ба $\frac{1}{6} \%$ баробар аст.

Мисоли 9. Микдори рақамҳои эътимодноки бузургии $\sqrt{20}$ чӣ қадар бошад, ки хатой ҳисобкунӣ аз 0.1% зиёд нашавад.

Ҳал. Азбаски $\sqrt{20} \approx 4.4721 \dots$ аст, яъне рақами аввал баробари 4 аст, бинобар $\alpha_m = 4$ ва $\delta = 0.001$ мешавад. Аз ин ҷо ҳосил мекунем

$$\frac{1}{4 \cdot 10^{n-1}} \leq 0.001 \text{ ва ё } 10^{n-1} \geq 250.$$

Нобаробарии охирин барои $n \geq 4$ иҷро мешавад, бинобар микдори рақамҳои эътимодноки бузургии $\sqrt{20}$ бояд $n \geq 4$ бошад.

Барои яклухткунини адад то n рақами эътимодноқ, ҳамаи рақамҳои дар тарафи ростии рақами n -уми эътимодноқро мебароянд ва ё, агар зарурати барои разряд нигоҳдорӣ бошад, онҳоро (рақамҳои дар тарафи ростии рақами эътимодноқро) бо нолҳо иваз мекунанд. Ҳангоми иҷрои ин амал ба қоидаҳои зерини яклухткунӣ риоя намудан зарур аст.

1. Агар рақами аввалини партофташаванда аз 5 хурд бошад, он гоҳ рақами пешояндаи он бетағйир нигоҳ дошта мешавад;

2. Агар рақами аввалини партофташаванда аз 5 қалон бошад, он гоҳ рақами пешояндаи он як воҳид зиёд карда мешавад;

3. Агар рақами аввалини партофташаванда баробари 5 буд, рақамҳои боқимондаи партофташаванда рақамҳои ғайринолӣ бошанд, он гоҳ рақами охирини адад ба як воҳид зиёд карда мешавад;

4. Агар рақами аввалини партофташаванда баробари 5 буда, рақамҳои боқимондаи партофташаванда рақамҳои нолӣ буда, рақами охирини адад ҷуфт бошад, он гоҳ адад бетағйир мемонад ва дар ҳолати тоқ будани рақами охирини адад, он ба як воҳид зиёд карда мешавад.

1.2. КОРИ ЛАБОРАТОРИЙ

Намунаи иҷро намудани супориш

Супориш.

I. Муайян кардашавад, ки кадоме аз баробариҳо аниқтаранд

$$\frac{9}{11} = 0,818 \text{ ё } \sqrt{18} = 4,24.$$

II. Рақамҳои эътимоднокро бетағйир гузошта, рақамҳои шубҳанокро яклухт кунед: а) ба маънои маҳдуд; б) ба маънои васеъ. Хатои мутлақи натиҷа муайян карда шавад.

$$a) 72,353(\pm 0,026); b) 2,3544; \delta = 0,2\%.$$

III. Хатоҳои худудии мутлақ ва нисбии ададҳо ёфта шаванд, агар онҳо дорои рақамҳои эътимоднок бошанд: а) ба маънои маҳдуд; б) ба маънои васеъ.

$$a) 0,4357; b) 12,384.$$

Ҳал. I. Қимати ифодаҳои додшударо бо бақияи зиёдтар меёбем $\alpha_1 = 0,81818 \dots, \alpha_2 = \sqrt{18} = 4,2426 \dots$. Акнун хатоҳои худудии мутлақро ёфта, бо барзиёди яклухт мекунем

$$\alpha_{a_1} = |0,81818 - 0,818| \leq 0,00019, \\ \alpha_{a_2} = |4,2426 - 4,24| \leq 0,0027.$$

Хатоҳои худудии нисбии ададҳоро меёбем

$$\delta_{a_1} = \frac{\alpha_{a_1}}{\alpha_{a_1}} = \frac{0,00019}{0,818} = 0,00024 = 0,024\%; \\ \delta_{a_2} = \frac{\alpha_{a_2}}{\alpha_{a_2}} = \frac{0,0027}{4,24} = 0,00064 = 0,064\%.$$

Азбаски $\delta_{a_1} < \delta_{a_2}$, аст бинобар баробарии $\frac{9}{11} = 0,818$ назар ба $\sqrt{18} = 4,24$ аниқтар мебошад.

II. а) Бигзор $72,353(\pm 0,026) = a$ бошад. Мувофиқи шартӣ масъала, хатои $\alpha_a = 0,026 < 0,05$ аст. Ин маънои онро дорад, ки дар адади 72,353 рақамҳои эътимоднок ба маънои маҳдуд 7, 2, 3 мебошанд. Аз рӯи қоидаи яклухткунӣ қимати тақрибии ададро меёбем

$$\alpha_1 = 72,4; \alpha_{a_1} = \alpha_a + \Delta_{\text{окр}} = 0,026 + 0,047,$$

дар ин ҳо $\Delta_{\text{окр}} = 0,5 - 0,026 < 0,5 - 0,03 = 0,047$.

Хатои ҳосилшуда аз 0,05 калон аст. Аз ин рӯ, дар адади тақрибии ҳосилшуда микдори рақамҳоро то ду воҳид кам мекунем $a_2 = 72; \alpha_{a_2} = \alpha_a + \Delta_{\text{окр}} = 0,026 + 0,353 = 0,379$.

Адабии $\alpha_{a_2} < 0,5$ аст, бинобар ҳарду рақами мондашуда ба маънои маҳдуд эътимодноканд.

б) Ин ҳо $a = 2,3544; \delta_a = 0,2\%$ бошад. Он ҳо

$$\alpha_a = a \cdot \delta_a = 2,3544 \cdot 0,2\% = 2,3544 \cdot 0,002 = 0,0047088 \approx 0,00471.$$

Дар адади ҳосилшуда се рақам ба маънои васеъ эътимодноканд. Бинобар ин се рақами ададро нигоҳ дошта, яклухт мекунем

$$\alpha_1 = 2,35; \alpha_{a_1} = 0,0044 + 0,00471 = 0,00911 < 0,01.$$

Ҳа, дар адади яклухткардашудаи 2,35 низ ҳама рақамҳои ба маънои маҳдуд эътимодноканд.

III. а) Азбаски ҳама чор рақами адади $a = 0,4357$ ба маънои маҳдуд эътимодноканд, бинобар хатои мутлақ $\alpha_a = 0,00005$ ва хатои нисбии

$$\delta_a = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 10^3} = 0,000125 = 0,0125\%.$$

б) Азбаски ҳама панҷ рақами адади $a = 12,384$ ба маънои васеъ эътимодноканд, бинобар

$$\alpha_a = 0,0001; \delta_a = \frac{1}{1 \cdot 10^4} = 0,0001 = 0,01\%.$$

Вариантҳои супориш

1) Муайян карда шавад, ки кадоме аз баробариҳо аниқтар аст.
2) Рақамҳои эътимоднокро монда, рақамҳои шубҳанокро яклухт кунед: а) ба маънои маҳдуд; б) ба маънои васеъ. Хатои мутлақи натиҷа муайян карда шавад.

3) Хатоҳои худудии мутлақ ва нисбии ададҳои додшуда ёфта шаванд, агар онҳо дорои рақамҳои эътимоднок бошанд: а) ба маънои маҳдуд; б) ба маънои васеъ.

$$1. 1) \sqrt{44} = 6,63; 19/41 = 0,463. \quad 2) a) 22,553(\pm 0,016);$$

$$6) 2,8546; \delta = 0,3\%. \quad 3) a) 0,2387; б) 42,884.$$

$$2. 1) 7/15 = 0,467; \sqrt{30} = 5,48. \quad 2) a) 17,2334; \delta = 0,3\%.$$

$$6) 6,4257(\pm 0,0024); \quad 3) a) 3,751; б) 0,537.$$

$$3. 1) \sqrt{10,5} = 3,24; 4/17 = 0,235. \quad 2) a) 34,834; \delta = 0,1\%.$$

$$6) 0,5748(\pm 0,0034); \quad 3) a) 11,445; б) 2,043.$$

$$4. 1) 15/7 = 2,14; \sqrt{10} = 3,16. \quad 2) a) 2,3485(\pm 0,0042);$$

$$6) 0,34484; \delta = 0,4\%. \quad 3) a) 2,3445; б) 0,745.$$

- 5.1) $6/7 = 0.857; \sqrt{4.8} = 2.19;$ 2) a) 5.435(± 0.0028);
 6) 10.8441; $\delta = 0.5\%.$ 3) a) 8.345; 6) 0.288.
- 6.1) $12/11 = 1.091; \sqrt{6.8} = 2.61;$ 2) a) 8.24163; $\delta = 0.2\%.$
 6) 0.12356(± 0.000368); 3) a) 12.45; 6) 30.4453.
- 7.1) $2/21 = 0.095; \sqrt{22} = 4.69;$ 2) a) 2.4543(± 0.0032);
 6) 24.5643; $\delta = 0.1\%.$ 3) a) 0.374; 6) 4.348.
- 8.1) $23/15 = 1.53; \sqrt{9.8} = 3.13;$ 2) a) 23.574; $\delta = 0.2\%.$
 6) 8.3445(± 0.0022); 3) a) 20.43; 6) 0.576.
- 9.1) $6/11 = 0.545; \sqrt{83} = 9.11;$ 2) a) 21.68563; $\delta = 0.3\%.$
 6) 3.7834(± 0.0041); 3) a) 41.72; 6) 0.678.
- 10.1) $17/19 = 0.895; \sqrt{52} = 7.21;$ 2) a) 13.537(± 0.0026);
 6) 7.521; $\delta = 0.12\%.$ 3) a) 5.634; 6) 0.0748.
- 11.1) $21/29 = 0.723; \sqrt{44} = 6.63;$ 2) a) 0.3567; $\delta = 0.042\%.$
 6) 13.6253(± 0.0021); 3) a) 18.357; 6) 2.16.
- 12.1) $50/19 = 2.63; \sqrt{27} = 5.19;$ 2) a) 1.784(± 0.0063);
 6) 0.85637; $\delta = 0.21\%.$ 3) a) 0.5746; 6) 236.58.
- 13.1) $13/17 = 0.764; \sqrt{31} = 5.56;$ 2) a) 3.6878(± 0.0013);
 6) 15.873; $\delta = 0.42\%.$ 3) a) 14.862; 6) 8.73.
- 14.1) $7/22 = 0.318; \sqrt{13} = 3.60;$ 2) a) 27.1548(± 0.0016);
 6) 0.3945; $\delta = 0.16\%.$ 3) a) 0.3648; 6) 21.7.
- 15.1) $17/11 = 1.545; \sqrt{18} = 4.24;$ 2) a) 0.8647(± 0.0013);
 6) 24.3618; $\delta = 0.22\%.$ 3) a) 2.4516; 6) 0.863.
- 16.1) $5/3 = 1.667; \sqrt{38} = 6.16;$ 2) a) 3.7542; $\delta = 0.32\%.$
 6) 0.98351(± 0.00042); 3) a) 62.74; 6) 0.389.
- 17.1) $49/13 = 3.77; \sqrt{14} = 3.74;$ 2) a) 83.736; $\delta = 0.085\%.$

- 3) a) 5.6432; 6) 0.00858.
- 2) a) 2.8867; $\delta = 0.43\%.$
 3) a) 0.0384; 6) 63.745.
- 2) a) 4.88445(± 0.00052);
 3) a) 12.688; 6) 4.636.
- 2) a) 38.4258(± 0.0014);
 3) a) 6.743; 6) 0.543.
- 2) a) 0.39642(± 0.00022);
 3) a) 15.644; 6) 6.125.
- 2) a) 5.8425; $\delta = 0.23\%.$
 3) a) 0.3825; 6) 24.6.
- 2) a) 24.3872; $\delta = 0.34\%.$
 3) a) 16.383; 6) 5.734.
- 2) a) 2.3684(± 0.0017);
 3) a) 0.573; 6) 3.6761.
- 2) a) 72.354; $\delta = 0.24\%.$
 3) a) 18.275; 6) 0.00644.
- 2) a) 0.36127(± 0.00034);
 3) a) 3.425; 6) 7.38.
- 2) a) 23.7564; $\delta = 0.44\%.$
 3) a) 3.75; 6) 6.8343.
- 2) a) 15.8372(± 0.0026);
 3) a) 3.643; 6) 72.385.
- 2) a) 3.87683; $\delta = 0.33\%.$
 3) a) 26.3; 6) 4.8556.

- 30.1) $14/17 = 0.823$; $\sqrt{53} = 7.28$; 2) а) $0.66835(\pm 0.00115)$;
б) 23.3748 ; $\delta = 0.27\%$. 3) а) 43.813 ; б) 0.645 .

1.3. МАШГУЛИЯТИ АМАЛӢ

Намунаи иҷро намудани супориш

I. Бигзор $y = \sqrt{x}$ ($x > 0$) бошад. Он гоҳ қимати ин функсия бо татбиқи формулаи зерин ёфта мешавад

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \left(y_n + \frac{x}{y_n} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (A)$$

а). Қимати бузургии $y = \sqrt{3}$ ёфта шавад, агар $y_0 = 1.7$ бошад.

Ҳал. Аз формулаи (A) истифода бурда, ҳосил мекунем

$$y_1 = \frac{1}{2} \left(1.7 + \frac{3}{1.7} \right) \approx 0.5 \cdot 3.4647 = 1.7324.$$

Ин амалро боз такрор намуда, меёбем

$$y_2 = \frac{1}{2} \left(1.7324 + \frac{3}{1.7324} \right) \approx 0.5 \cdot 3.4641 = 1.7321.$$

$$y_3 = \frac{1}{2} \left(y_2 + \frac{x}{y_2} \right) = \frac{1}{2} \left(1.7321 + \frac{3}{1.7321} \right) = 1.73205$$

Бинобар, $\sqrt{3} \approx 1.7321$ қабул кардан мумкин аст.

Ҷавоб: $\sqrt{3} \approx 1.7321$.

II. Агар $y = \sqrt[3]{x}$ ($x > 0$) бошад, он гоҳ ҳисоб намудани қимати ин бузургӣ бо ёрии формулаи зерин ёфта мешавад

$$y_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2y_n + \frac{x}{y_n^2} \right). \quad (B)$$

ё). Қимати бузургии $y = \sqrt[3]{7}$ ёфта шавад, агар $y_0 = 1.9$ бошад.

Ҳал. Формулаи (B) – ро истифода бурда, ҳосил мекунем

$$y_1 = \frac{1}{3} \left(2y_0 + \frac{x}{y_0^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(2 \cdot 1.9 + \frac{7}{1.9^2} \right) \approx \frac{1}{3} (3.8 + 1.9311) = 1.913.$$

$$y_2 = \frac{1}{3} \left(2 \cdot 1.913 + \frac{7}{1.913^2} \right) \approx \frac{1}{3} (3.826 + 1.9128) = 1.9129.$$

$$y_3 = \frac{1}{3} \left(2y_2 + \frac{x}{y_2^2} \right) = \frac{1}{3} \left(2 \cdot 1.9129 + \frac{7}{1.9129^2} \right) = 1.91292.$$

Бинобар, натиҷаи $\sqrt[3]{7} \approx 1.9129$ – ро ҳамчун ҳалли масъала қабул кардан мумкин аст

Ҷавоб: $\sqrt[3]{7} \approx 1.9129$.

Вариантҳои супоришҳо

Супориш. Қимати функсияҳои $y = \sqrt{x}$ ва $z = \sqrt[3]{x}$ ҳисоб карда шаванд, агар y_0 ва z_0 пешакӣ маълум бошанд.

1. а) $y = \sqrt{5}$, $y_0 \approx 2.2$. б) $z = \sqrt[3]{13}$, $z_0 = 2.3$;

2. а) $y = \sqrt{6}$, $y_0 \approx 2.4$. б) $z = \sqrt[3]{93}$, $z_0 = 4.5$;

3. а) $y = \sqrt{7}$, $y_0 \approx 2.6$. б) $z = \sqrt[3]{99}$, $z_0 = 4.6$;

4. а) $y = \sqrt{8}$, $y_0 \approx 2.8$. б) $z = \sqrt[3]{5}$, $z_0 = 1.7$;

5. а) $y = \sqrt{10}$, $y_0 \approx 3.1$. б) $z = \sqrt[3]{6}$, $z_0 = 1.8$;

6. а) $y = \sqrt{11}$, $y_0 \approx 3.3$. б) $z = \sqrt[3]{9}$, $z_0 = 2.1$;

7. а) $y = \sqrt{12}$, $y_0 \approx 3.4$. б) $z = \sqrt[3]{83}$, $z_0 = 4.3$;

8. а) $y = \sqrt{13}$, $y_0 \approx 3.6$. б) $z = \sqrt[3]{11}$, $z_0 = 2.2$;

9. а) $y = \sqrt{14}$, $y_0 \approx 3.7$. б) $z = \sqrt[3]{77}$, $z_0 = 4.2$;

10. а) $y = \sqrt{15}$, $y_0 \approx 3.8$. б) $z = \sqrt[3]{13}$, $z_0 = 2.3$;

11. а) $y = \sqrt{17}$, $y_0 \approx 4.1$. б) $z = \sqrt[3]{14}$, $z_0 = 2.4$;

12. а) $y = \sqrt{18}$, $y_0 \approx 4.2$. б) $z = \sqrt[3]{69}$, $z_0 = 4.1$;

13. а) $y = \sqrt{19}$, $y_0 \approx 4.3$. б) $z = \sqrt[3]{17}$, $z_0 = 2.5$;

14. а) $y = \sqrt{20}$, $y_0 \approx 4.4$. б) $z = \sqrt[3]{18}$, $z_0 = 2.6$;

15. а) $y = \sqrt{21}$, $y_0 \approx 4.5$. б) $z = \sqrt[3]{89}$, $z_0 = 4.4$;

16. а) $y = \sqrt{22}$, $y_0 \approx 4.6$. б) $z = \sqrt[3]{20}$, $z_0 = 2.7$;

17. а) $y = \sqrt{23}$, $y_0 \approx 4.7$. б) $z = \sqrt[3]{96}$, $z_0 = 4.5$;

18. а) $y = \sqrt{24}$, $y_0 \approx 4.8$. б) $z = \sqrt[3]{22}$, $z_0 = 2.8$;

19. а) $y = \sqrt{45}$, $y_0 \approx 6.7$. б) $z = \sqrt[3]{55}$, $z_0 = 3.8$;

20. а) $y = \sqrt{27}$, $y_0 \approx 5.1$. б) $z = \sqrt[3]{61}$, $z_0 = 3.9$;

21. а) $y = \sqrt{28}$, $y_0 \approx 5.2$. б) $z = \sqrt[3]{25}$, $z_0 = 2.9$;

22. а) $y = \sqrt{29}$, $y_0 \approx 5.3$. б) $z = \sqrt[3]{46}$, $z_0 = 3.5$;

23. а) $y = \sqrt{30}$, $y_0 \approx 5.4$. б) $z = \sqrt[3]{59}$, $z_0 = 3.8$;

24. а) $y = \sqrt{31}$, $y_0 \approx 5.5$. б) $z = \sqrt[3]{75}$, $z_0 = 4.2$;

25. а) $y = \sqrt{32}$, $y_0 \approx 5.6$. б) $z = \sqrt[3]{30}$, $z_0 = 3.1$;

26. а) $y = \sqrt{33}$, $y_0 \approx 5.7$. б) $z = \sqrt[3]{48}$, $z_0 = 3.6$;

27. а) $y = \sqrt{34}$, $y_0 \approx 5.8$. б) $z = \sqrt[3]{53}$, $z_0 = 3.7$;

28. а) $y = \sqrt{35}$, $y_0 \approx 5.9$. б) $z = \sqrt[3]{33}$, $z_0 = 3.2$;

29. а) $y = \sqrt{38}$, $y_0 \approx 6.1$. б) $z = \sqrt[3]{37}$, $z_0 = 3.3$;

30. а) $y = \sqrt{41}$, $y_0 \approx 6.4$. б) $z = \sqrt[3]{43}$, $z_0 = 3.5$;

1.4. КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Намунаи иҷрои супориш

Масъалаи 1. Функцияи додашуда хисоб карда шуда, ҳағои натиға баҳо дода шавад

$$X = \frac{m^2 n^3}{\sqrt{k}},$$

агар $m = 28,3 (\pm 0,02)$, $n = 7,45 (\pm 0,01)$, $k = 0,678 (\pm 0,003)$ бошад.

Ҳал. Азбаски

$$m^2 = 28,3^2 = 800,89 \approx 800,9, n^3 = 7,45^3 = 413,5,$$

$$\sqrt{k} = \sqrt{0,678} = 0,8234$$

аст, бинбар ин қиматҳоро ба формула гузошта, ҳосил мекунем

$$X = \frac{m^2 n^3}{\sqrt{k}} = \frac{800,9 \cdot 413,5}{0,8234} = 402200 = 4,2 \cdot 10^5.$$

Акнун ба баҳодиҳии ҳағоҳо мегузарем

$$\delta_m = \frac{0,02}{28,3} = 0,00071; \delta_n = \frac{0,01}{7,45} = 0,00135; \delta_k = \frac{0,003}{0,678} = 0,00443.$$

Аз ин ҷо

$$\delta_X = 2\delta_m + 3\delta_n + 0,5\delta_k = 0,00142 + 0,00405 + 0,00222 = 0,00769,$$

$$\text{ва ё } \delta_X = 0,77\%. \alpha_X = 4,02 \cdot 10^5 \cdot 0,0077 = 3,1 \cdot 10^3.$$

Ҷавоб: $X = 4,2 \cdot 10^5 (\pm 3,1 \cdot 10^3)$; $\delta_X = 0,77\%$.

Масъалаи 2. Функцияи додашуда хисоб карда шуда, ҳағои натиға баҳо дода шавад

$$N = \frac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2},$$

агар $n = 3,0567 (\pm 0,0001)$, $m = 5,72 (\pm 0,02)$ бошад.

Ҳал. Азбаски

$$n-1 = 3,0567 (\pm 0,0001) - 1 = 2,0567 (\pm 0,0001);$$

$$m+n = 5,72 (\pm 0,02) + 3,0567 (\pm 0,0001) = 8,777 (\pm 0,0204);$$

$$m-n = 5,72 (\pm 0,02) - 3,0567 (\pm 0,0001) = 2,663 (\pm 0,0204)$$

аст, бинобар

$$N = \frac{2,0567 \cdot 8,777}{\frac{2,663^2}{76092}} = \frac{2,0567 \cdot 8,777}{2,663^2} = 26545 \approx 2,55.$$

$$\delta_N = \frac{0,0001}{2,0567} + \frac{0,0204}{8,777} + 2 \frac{0,0204}{2,663} = 0,0177 = 1,77\%.$$

$$\alpha_N = 2,55 \cdot 0,0177 = 0,046.$$

Ҷавоб: $N \approx 2,55 (\pm 0,046)$; $\delta_N = 1,77\%$.

Масъалаи 3. Аз қондаҳои хисобкунии рақамҳои ағад истифода бурда, қимати функцияи ёфта шавад

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right), \quad (h = 11,8; R = 23,67).$$

Ҳал. Аз қондаҳои хисобкунии рақамҳои ағад истифода бурда, ҳосил мекунем

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = 3,14 \cdot 11,8^2 \left(23,67 - \frac{11,8}{3} \right) = 8630 \approx 8,63 \cdot 10^3.$$

Ҷавоб: $V \approx 8,63 \cdot 10^3$.

Вариантҳои супоришҳо

1. Функцияи додашуда хисоб карда шуда, ҳағои натиға баҳо дода шавад.

2. Функцияи додашуда хисоб карда шуда, ҳағои натиға баҳо дода шавад.

3. Аз қондаҳои хисобкунии рақамҳои ағад истифода бурда, қимати функцияи ёфта шавад.

№1-3.	1) $X = \frac{ab}{\sqrt[3]{c}}$	№2	№3
a	3,85(±0,01)	4,16(±0,005)	7,27(±0,01)
b	2,0435(±0,0004)	12,163(±0,002)	5,205(±0,002)
c	9,226(±0,1)	55,18(±0,01)	87,32(±0,03)

№1-3.	2) $X = \frac{(a+b)c}{m-n}$	№2	№3
a	4,3(±0,05)	5,2(±0,04)	2,13(±0,01)
b	17,21(±0,02)	15,32(±0,01)	22,16(±0,03)
c	8,2(±0,05)	7,5(±0,05)	6,3(±0,04)
m	12,417(±0,003)	21,823(±0,002)	16,825(±0,004)
n	8,37(±0,005)	7,56(±0,003)	8,13(±0,002)

№1-3.	3) $S = \frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$	№2	№3
a	1,141	2,234	5,813
b	3,156	4,518	1,315
h	1,14	4,48	2,56

№4-6.		1) $X = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{c}$	№4	№5	№6
a	228,6(±0,06)			315,6(±0,05)	186,7(±0,04)
b	86,4(±0,02)			72,5(±0,03)	66,6(±0,02)
c	68,7(±0,05)			53,8(±0,04)	72,3(±0,03)

№4-6.		2) $X = \frac{m^2(a+b)}{c-d}$	№4	№5	№6
a	13,5(±0,02)			18,5(±0,03)	11,8(±0,02)
b	3,7(±0,02)			5,6(±0,02)	7,4(±0,03)
m	4,22(±0,004)			3,42(±0,003)	5,82(±0,005)
c	34,5(±0,02)			26,3(±0,01)	26,7(±0,03)
d	23,725(±0,005)			14,782(±0,006)	11,234(±0,004)

№4-6.		3) $M = \frac{(a+b)h^3}{4} + \frac{(a+b)h}{12}$	№4	№5	№6
a	8,53			6,44	9,05
b	6,271			5,323	3,244
h	12,48			15,44	20,18

№7-9.		1) $X = \frac{\sqrt{ab}}{c}$	№7	№8	№9
a	3,845(±0,004)			4,632(±0,003)	7,312(±0,004)
b	16,2(±0,05)			23,3(±0,04)	18,4(±0,03)
c	10,8(±0,1)			11,3(±0,06)	20,2(±0,08)

№7-9.		2) $X = \frac{(a+b)m}{(c-d)^2}$	№7	№8	№9
a	2,75(±0,001)			3,236(±0,002)	4,523(±0,003)
b	11,7(±0,04)			15,8(±0,03)	10,8(±0,02)
m	0,56(±0,005)			0,64(±0,004)	0,85(±0,003)
c	10,536(±0,002)			12,415(±0,003)	9,318(±0,002)
d	6,32(±0,008)			7,18(±0,006)	4,17(±0,004)

№7-9.		3) $M = \frac{(a+b)^2}{2h} + \frac{(a^2+b^2)h}{5}$	№7	№8	№9
a	0,562			0,834	0,445
b	0,2518			0,3523	0,4834
h	0,68			0,74	0,87

№10-12.		1) $X = \frac{a^2 \cdot b}{c}$	№10	№11	№12
a	3,456(±0,002)			1,245(±0,001)	0,327(±0,005)
b	0,642(±0,0005)			0,121(±0,0002)	3,147(±0,0001)
c	7,12(±0,004)			2,34(±0,003)	1,78(±0,001)

№10-12.		2) $X = \frac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$	№10	№11	№12
a	23,16(±0,02)			17,41(±0,01)	32,37(±0,03)
b	0,23(±0,005)			1,27(±0,002)	2,35(±0,001)
c	145,5(±0,08)			342,3(±0,04)	128,7(±0,02)
d	20,6(±0,1)			11,17(±0,01)	27,3(±0,04)
m	0,28(±0,006)			0,71(±0,003)	0,93(±0,001)

№10-12.		3) $V = \frac{h}{3} \cdot S \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} \right)$	№10	№11	№12
a	8,51			5,71	7,28
b	23,42			32,17	11,71
c	45,8			51,7	21,8
h	3,81			2,42	5,31

№13-15.		1) $X = \frac{ab^3}{c}$	№13	№14	№15
a	0,643(±0,0005)			0,142(±0,0003)	0,258(±0,0002)
b	2,17(±0,002)			1,71(±0,002)	3,45(±0,001)
c	5,843(±0,001)			3,727(±0,001)	7,221(±0,003)

№13-15.		2) $X = \frac{(a-b)^c}{\sqrt{m+n}}$	№13	№14	№15
a	27,16(±0,006)			15,71(±0,005)	12,31(±0,004)
b	5,03(±0,01)			3,28(±0,02)	1,73(±0,03)
c	3,6(±0,02)			7,2(±0,01)	3,7(±0,02)
m	12,375(±0,004)			13,752(±0,001)	17,428(±0,003)
n	86,2(±0,05)			33,7(±0,03)	41,7(±0,01)

№13-15.		3) $V = \frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$	№13	№14	№15
a	21,1			17,8	32,5
h	22,08			32,47	27,51

b	31,11	11,42	21,78
№16-18. 1) $X = \frac{ab}{c^3}$			
	№16	№17	№18
a	0,3575(±0,0002)	0,1756(±0,0001)	0,2731(±0,0003)
b	2,63(±0,01)	3,71(±0,03)	5,12(±0,02)
c	0,854(±0,0005)	0,285(±0,0002)	0,374(±0,0001)
№16-18. 2) $X = \frac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$			
	№16	№17	№18
a	16,342(±0,001)	12,751(±0,001)	31,456(±0,002)
b	2,5(±0,03)	3,7(±0,02)	7,3(±0,01)
c	38,17(±0,002)	23,76(±0,003)	33,28(±0,003)
d	9,14(±0,005)	8,12(±0,004)	6,71(±0,001)
m	3,6(±0,04)	1,7(±0,01)	5,8(±0,02)
№16-18. 3) $V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$			
	№16	№17	№18
a	2,456	7,751	5,441
h	1,76	3,35	6,17
№19-21. 1) $V = \frac{\pi^3}{4}Dd^2$			
	№19	№20	№21
π	3,14	3,14	3,14
D	54(±0,5)	72(±0,3)	31(±0,01)
d	8,235(±0,001)	3,274(±0,002)	7,345(±0,001)
№19-21. 2) $S = \frac{1}{64}\sqrt{D^2 - d^2}$			
	№19	№20	№21
D	36,5(±0,1)	41,4(±0,2)	52,6(±0,01)
d	26,35(±0,005)	31,75(±0,003)	48,39(±0,001)
π	3,14	3,14	3,14

№19-21. 3) $V = a^2 \left(1 + \frac{2b}{a} + \frac{c^2}{a^2}\right)$	№19	№20	№21
	2,435	7,834	4,539
	0,15	0,21	0,34
	1,27	3,71	5,93
№22-24. 1) $X = \frac{m^2n}{c^3}$			
	№22	№23	№24
	1,6531(±0,0003)	2,348(±0,002)	3,804(±0,003)
	3,70(±0,002)	4,37(±0,004)	4,05(±0,003)
	0,158(±0,0005)	0,235(±0,0003)	0,318(±0,0002)
№22-24. 2) $X = \frac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$			
	№22	№23	№24
	9,542(±0,001)	8,357(±0,003)	4,218(±0,001)
	3,128(±0,002)	2,48(±0,004)	1,57(±0,006)
	2,8(±0,001)	3,17(±0,0004)	2,32(±0,02)
	0,172(±0,001)	2,4(±0,02)	2,418(±0,004)
	5,4(±0,02)	2,4(±0,02)	1,8(±0,01)
№22-24. 3) $V = \frac{1}{15}\pi h(2D^2 + Dd + 0,75d^2)$			
	№22	№23	№24
	84,2	76	45
	28,3	17,2	48,3
	42,08	9,344	32,14
№25-27. 1) $X = \sqrt{\frac{cd}{b}}$			
	№25	№26	№27
	0,7568(±0,0002)	0,8345(±0,0004)	0,6384(±0,0002)
	21,17(±0,02)	13,8(±0,03)	32,7(±0,04)
	2,65(±0,01)	1,84(±0,006)	4,88(±0,03)
№25-27. 2) $X = \frac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$			
	№25	№26	№27
	10,82(±0,03)	9,37(±0,004)	11,45(±0,01)
	2,786(±0,0006)	3,08(±0,0003)	4,431(±0,002)
	0,28(±0,006)	0,46(±0,002)	0,75(±0,003)
	14,7(±0,06)	15,2(±0,04)	16,7(±0,05)

$$\text{№25-27.} \quad 3) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

	№25	№26	№27
a	46,3	10,5	2,48
b	29,72	34,18	5,344
c	37,654	27,327	6,0218

$$\text{№28-30.} \quad 1) X = \frac{ab^2}{48c}$$

	№28	№29	№30
a	54,8(±0,02)	38,5(±0,01)	17,3(±0,03)
b	2,45(±0,01)	3,35(±0,02)	5,73(±0,01)
c	0,863(±0,004)	0,734(±0,001)	0,965(±0,004)

$$\text{№28-30.} \quad 2) X = \frac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$$

	№28	№29	№30
n	2,0435(±0,0001)	1,1753(±0,0002)	4,5681(±0,01)
x	4,2(±0,05)	5,8(±0,01)	6,3(±0,02)
y	0,82(±0,01)	0,65(±0,02)	0,42(±0,03)

$$\text{№28-30.} \quad 3) S = \frac{ab-cd}{b^2} - \frac{c(bd-ac)}{b^2(b+c)}$$

	№28	№29	№30
a	5,27,3	7,31	3,28
b	61,21	81,26	52,34
c	0,0562	0,0761	0,0545
d	158,35	234,36	341,17

1.5. САВОЛҲО БАРОИ ТАҚРОРИ БОБ

1. Бахон дараҷаи аниқии ҳалли масъала барои чӣ лозим аст?
2. Вузургии хато чист?
3. Сарҷаммаҳои пайдошавии хатоҳоро номбар кунед.
4. Хатон модели математикӣ чӣ ҳел пайдо мешавад?
5. Хатон методҳои тақрибии ҳалли масъалаҳои чӣ ҳел пайдо мешавад?
6. Хатон ҳисобкунӣ чӣ тавр ба миён меояд?
7. Хатон ҳисобкунӣ аз чӣ вобаста аст?
8. Қондаҳои яқлухткунии ададро номбар кунед.
9. Йелуҷхунии рақамҳои адад бо микдори мувофиқи рақамҳо чист?
10. Адади тақрибӣ чист?
11. Хатон Δa – и адади тақрибии a чист?
12. Хатон мутлақ чист?
13. Хатон ҳудудии хатон тақрибӣ чист?
14. Хатон нисбӣ чист?
15. Хатон ҳудудии нисбӣ чист?
16. Рақами аҳамиятнок чист?
17. Рақами эътимоднок чист?
18. Рақами эътимоднок ба маънои маҳлуд чист?
19. Рақами эътимоднок ба маънои васеъ чист?
20. Бо ёрии кадом формула кимати функсияи $\sqrt{x}$ ҳисоб карда мешавад?
21. Бо ёрии кадом формула кимати функсияи $\sqrt[3]{x}$ ҳисоб карда мешавад?

II. АЛГЕБРАИ МАТРИСАҲО

2.1. Мафҳумҳо ва таърифҳои асосӣ

Таърифи 1. Ҷадвали росткунча аз $(m)(n)$ адад, ки m сатр ва n сутунро дорост, яъне

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матриса номида мешавад. Матрисаро ба таври мухтасар чунин ишора мекунамд

$$A = \{a_{ij}\} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n),$$

ки дар ин ҷо a_{ij} - аъзоёни матриса, i - рақами тартибии сатр, j - рақами тартибии сутун. Матрисаҳо бо ҳарфҳои калони алифбои лотинӣ $A, B, C, \dots$ ифода карда мешаванд. Агар дар матриса микдори сатр ва сутунаш баробар бошанд $m = n$, ин намуд матрисаро квадратӣ меноманд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Таърифи 2. Муайянкунандае, ки аз элементҳои матриса тартиб дода шудааст, муайянкунандаи матриса номида шуда, чунин ишора карда мешавад

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Қайд кардан зарур аст, ки матрисаи квадратӣ набуда муайянкунанда надорад.

Таърифи 3. Матрисаи A^* транспониронидашуда нисбат ба матрисаи A номида мешавад, агар сутунҳои матрисаи A сатрҳои матрисаи A^* бошанд.

Масалан, бигзор матрисаи A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

дода шуда бошад. Он гоҳ матрисаи транспониронидашудаи A^* чунин намуд мегирад

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Таърифи 4. Матрисаи квадратии A нисбат ба диагонали асосӣ симметрӣ номида мешавад, агар $a_{ij} = a_{ji}$ бошад.

Таърифи 5. Матрисаи квадратии A , ҳама элементҳои, ғайр аз элементҳои диагонали асосӣ, ноланд, матрисаи диагоналӣ номида мешавад. Агар ҳама элементҳои диагонали асосӣ баробари як бошад, элементҳои дигар баробари нол, он гоҳ чунин матрисаро **матрисаи меноманд** ва бо ҳарфи E ишора мекунем

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Таърифи 6. Матрисаҳоеро дида мебароем, ки аз як сутун ва ё аз як сатр иборатанд:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = (y_1 \quad y_2 \quad y_3).$$

Матрисаи якум сутунӣ ва дуум сатрӣ номида мешаванд.

Таърифи 7. Ду матрисаи A ва B баробаранд, агар дар онҳо элементҳои сатр ва сутунҳо баробар буда, элементҳои мувофиқашон низ ба ҳам баробар бошанд, яъне

$$A = B \text{ ва ё } |a_{ij}| = |b_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n), \text{ агар } a_{ij} = b_{ij}.$$

Таърифи 8. Суммаи ду матрисаи квадратии $|a_{ij}|$ ва $|b_{ij}|$ гуфта матрисаи $|c_{ij}|$ - ро меноманд, дар он элементҳои матрисаи c_{ij} суммаи $a_{ij} + b_{ij}$ бо элементҳои мувофиқи матрисаҳои $|a_{ij}|$ ва $|b_{ij}|$ мебошад, яъне $|a_{ij}| + |b_{ij}| = |c_{ij}|$, агар

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Мисоли 1.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{vmatrix}.$$

Айнан ҳамин тавр фарқи ду матрисаҳо ҳисоб карда мешавад.

Зарби матриса бо адад. Барои зарб задани матриса бо адади λ , ҳар як элементи матрисаро бо ин адад зарб кардан лозим аст, яъне

$$\lambda |a_{ij}| = |\lambda a_{ij}|.$$

Мисоли 2.

$$\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix}.$$

Зарби матрисаҳо. Зарби матрисаҳои A ва B бо симболи $A \times B$ ишора карда шуда, бо ёрии баробарии зерин иҷро карда мешавад

$$A \times B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^3 a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^3 a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^3 a_{3j}b_{j3} \end{vmatrix}.$$

Хангоми амалхо бо матрисахо муносибатҳои зерин ҷой доранд

$$(kA) \cdot B = A \cdot (kB), \quad k - \text{const},$$

$$(A+B) \cdot C = AC + BC,$$

$$A \cdot (BC) = (AB) \cdot C, AE = EA = A.$$

Матрисаи ноли гуфта матрисаеро меноманд, ки дар он ҳамаи элементҳои баробари нол бошад, яъне

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Суммаи ин матриса бо матрисаи дилхохи A худӣ матрисаи A — ро медиҳад: $A + 0 = A$.

2.2. Муайянкунандаҳои матрисаҳои квадратӣ

Зарурияти ворид намудани мафҳуми муайянкунанда — адади матрисаи квадратӣ бо ҳал намудани системаи муодилаҳои хаттӣ алоқаи зич дорад. Муайянкунандаи матрисаи A бо симболи $|A|$ ва ё Δ ишора карда мешавад.

Муайянкунандаи матрисаи тартиби якум $A = (a_{11})$, ва муайянкунандаи тартиби якум гуфта элементҳои a_{11} меноманд, яъне $\Delta_1 = |A| = a_{11}$, масалан, бигзор $A = (5)$ бошад, он гоҳ $\Delta_1 = |A| = 5$.

Муайянкунандаи матрисаи тартиби дуҷум $A = (a_{ij})$ ва ё муайянкунандаи тартиби дуҷум гуфта ададҳои меноманд, ки аз рӯи формулаи зерин ҳисоб карда мешавад

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Масалан, бигзор

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \text{ бошад, Он гоҳ } \Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5.$$

Ҳар як матрисаи тартиби сеюм дода шуда бошад

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Муайянкунандаи матрисаи тартиби сеюм $A = (a_{ij})$ ва ё муайянкунандаи тартиби сеюм аз рӯи формулаи зерин ҳисоб карда

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ҳар як матрисаи квадратии A тартиби n -ум дода шуда бошад. Минори M_{ij} элементҳои a_{ij} — и матрисаи тартиби $n-1$ ум гуфта муайянкунандаи матрисаи тартиби $(n-1)$ — умро, ки аз матрисаи A ҳангоми хат задани сатри i — ум ва сутуни j — ум ҳосил шудааст, меноманд.

Масалан, минори элементҳои a_{12} матрисаи A тартиби сеюм чунин

$$M_{12} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}).$$

Ҳар як матрисаи тартиби n — ум ба микдори n^2 минорҳо тартиби $(n-1)$ — ро дорад.

Пуркунандаи алгебравии A_{ij} элементҳои a_{ij} матрисаи тартиби n -ум гуфта минори онро, ки бо аломати $(-1)^{i+j}$ гирифта шудааст, меноманд, яъне

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Пуркунандаи алгебраӣ ва минори матриса, дар ҳолати ҷуфт будани суммаи рақамҳои тартибии сатр ва сутунҳо $(i+j)$, ба яқдигар мувофиқат мекунанд.

Мисол,

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}.$$

Мисоли 3. Пуркунандаҳои алгебравии ҳамаи элементҳои матрисаи ҳисоб карда шаванд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$C = AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{яъне, } AA^{-1} = E; (A^{-1})^{-1} = A.$$

Барои матрисиҳо ҳосиятҳои зерин ҷой доранд:

$$1. (A^{-1})^{-1} = A, \quad 2. (A^{-1})^{-1} = A, \quad 3. (A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$$

$$4. (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad 5. (A^{-1})' = (A')^{-1}$$

2.4. КОРИ ЛАБОРАТОРИЙ

Намунаи иҷрои супоришҳо

Масъалаи 1. Матрисаи зерин дода шудааст

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрисаи баръакси он ёфта шавад ва натиҷаи он аз рӯи AA^{-1} ва ё $A^{-1}A$ тафтиш карда шавад.

Ҳал. Муайянкунандаи матрисаи A – ро ҳисоб мекунам

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 36 + 6 + 10 - 30 - 9 - 8 = 5.$$

Пуркунандаҳои алгебравии элементҳои ин муайянкунандаро меёбем:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 3 = 9, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 6 = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 5 = 1$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 10 = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 15 = -12, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 10 = 1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{Тафтиш } AA^{-1} = E; \quad A^{-1}A = E$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Масъалаи 2. Муодилаи матрисавии $AX = B$ ҳал карда шавад

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 13 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Ҳал. Мувофиқи шартӣ масъала $AX = B$. Аз ин ҷо $X = A^{-1}B$. Таърир аст, ки матрисаи баръакси A^{-1} ёфта шуда, он ба матрисаи B зарб карда шавад. Матрисаи баръакс A^{-1} – ро ба таври зерин муайян мекунам

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}; \quad (*)$$

Муайянкунандаи матрисаи ΔA – ро ҳисоб мекунам

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 1 - 2 - 0 = -7;$$

Амун пуркунандаҳои алгебравии матриса $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}$ – ро меёбем

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2; A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2; \\
 A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1; A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \\
 A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4; \\
 A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5; A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2; \\
 A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.
 \end{aligned}$$

Қиматҳои пуркунадаҳои алгебравии ёфташударо ба матрисан гузошта, ҳосил мекунем

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Бинобар,

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -14 & -21 & -35 \\ -28 & 14 & 0 \\ -7 & -7 & 7 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ҳамин тавр, решаи муодилаи матрисавии додашуда чунин аст

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариантҳои супоришҳо

I. Матрисаи A дода шудааст. Матрисаи баръакси он ёфта шаванд ва натиҷаи он аз рӯи AA^{-1} ва ё $A^{-1}A$ тафтиш карда шаванд.

$$\text{№1. } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{№2. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 & 6 \\ 6 & 10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{№3. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{№4. } A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ -5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№5. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1,5 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1,5 \end{pmatrix} \quad \text{№6. } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{№8. } A &= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \\
 \text{№10. } A &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{№12. } A &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -8 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{№14. } A &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\
 \text{№16. } A &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
 \text{№18. } A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\
 \text{№20. } A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{№22. } A &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \\
 \text{№24. } A &= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -8 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\
 \text{№26. } A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{№27. } A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} & \text{№28. } A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{№29. } A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} & \text{№30. } A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

II. Муодилаи матрисавии $AX = B$ ҳал карда шавад.

$$\begin{aligned} 1. & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 13 & 21 \end{pmatrix} \\ 2. & \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 16 \end{pmatrix} \\ 3. & \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ 4. & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 22 & -14 & 3 \\ 6 & -7 & 0 \\ 11 & 3 & 15 \end{pmatrix} \\ 5. & \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ 6. & \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ 17 & 1 & 7 \end{pmatrix} \\ 7. & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ 8. & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \\ 9. & \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ 10. & \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. & \begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ 12. & \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \\ 13. & \begin{pmatrix} 2 & -8 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 14. & \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \\ 15. & \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ 16. & \begin{pmatrix} 12 & 15 & -6 \\ 9 & -3 & 0 \\ 12 & 0 & 21 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 16 & 16 & 13 \end{pmatrix} \\ 17. & \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 6 & 6 & 5 \\ -1 & -2 & 11 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 11 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \\ 18. & \begin{pmatrix} -8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ 19. & \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ 20. & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{pmatrix} \\ 21. & \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ 22. & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 4 & 11 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ 23. & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \\ 24. & \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
25. \quad & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
26. \quad & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
27. \quad & \begin{pmatrix} 3 & 23 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
28. \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
29. \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
30. \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.5. МАШҲУЛИЯТИ АМАЛИ

Намунаи иҷрои супоришҳо

Масъала. Бо усули ҷудокунӣ ба катахҳо матрисаи баръакс ёфта шавад

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ҳал. Бигзор

$$S = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right), \quad S^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} K & L \\ \hline M & N \end{array} \right),$$

ки дар ин ҷо

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\
N &= (D - CA^{-1}B), L = -A^{-1}BN, M = -NCA^{-1}, K = A^{-1} - A^{-1}BM.
\end{aligned}$$

Пайдарпай меёбем

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \Delta = 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1, A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
A^{-1}B &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; \\
CA^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CA^{-1}B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}; \\
B &= CA^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}; \\
M &= (B - CA^{-1}B)^{-1}, \Delta = -100, A_{11} = -5, A_{12} = 10, A_{21} = 9, A_{22} = 2,
\end{aligned}$$

$$N = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 100 & -2 \\ 100 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 20 & 100 \\ -1 & -1 \\ 10 & 50 \end{pmatrix};$$

$$L = -A^{-1}BN = -\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 20 & 100 \\ -1 & -1 \\ 10 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -23 \\ 20 & 100 \\ -1 & 29 \\ 10 & 50 \end{pmatrix};$$

$$M = -NCA^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 20 & 100 \\ -1 & -1 \\ 10 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 100 & 100 \\ 7 & -4 \\ 50 & 50 \end{pmatrix};$$

$$K = A^{-1} - A^{-1}BM = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 100 & 100 \\ 7 & -4 \\ 50 & 50 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 & -58 \\ 100 & 100 \\ 106 & 68 \\ 100 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -42 \\ 100 & 100 \\ -6 & 32 \\ 100 & 100 \end{pmatrix};$$

Матрисаҳои ёфташуда $N = (D - CA^{-1}B)$, $L = -A^{-1}BN$, $M = -NCA^{-1}$, $K = A^{-1} - A^{-1}BM$ - ро ба матрисаи $S^{-1} = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ гузошта,

ёфта мешавад

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -42 & 7 & -23 \\ 100 & 100 & 20 & 100 \\ -6 & 32 & -1 & 29 \\ 100 & 100 & 10 & 50 \\ 13 & 14 & 1 & -9 \\ 100 & 100 & 20 & 100 \\ 7 & -4 & -1 & -1 \\ 50 & 50 & 10 & 50 \end{pmatrix}.$$

Акнун натиҷаро бо роҳи зарби матрисаи S ба матрисаи S^{-1} тафтиш мекунем.

$$S \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -42 & 7 & -23 \\ 100 & 100 & 20 & 100 \\ -6 & 32 & -1 & 29 \\ 100 & 100 & 10 & 50 \\ 13 & 14 & 1 & -9 \\ 100 & 100 & 20 & 100 \\ 7 & -4 & -1 & -1 \\ 50 & 10 & 10 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Натиҷаи тафтиш $S \cdot S^{-1}$ матрисаи воҳидиро медиҳад, бинобар ин масъала дуруст ҳал карда шудааст.

Вариантҳои супоришҳо

Масъала. Бо усули ҷудокунӣ ба қатакҳои матрисаи баръакс ёфта шавад.

$$\begin{aligned} \text{№1. } A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{№2. } A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \\ \text{№3. } A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \text{№4. } A &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -8 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{№5. } A &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} & \text{№6. } A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{№7. } A &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \text{№8. } A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{№9. } A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} & \text{№10. } A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{№11. } A &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} & \text{№12. } A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 & 6 \\ 6 & 10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{№13. } A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{№14. } A &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ -5 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{№15. } A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1,5 \end{pmatrix} & \text{№16. } A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{№17. } A &= \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} & \text{№18. } A &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{№19. } A &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -10 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \text{№20. } A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{№21. } A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{№22. } A &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -8 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{№23. } A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} & \text{№24. } A &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{№25. } A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{№26. } A &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{№27. } A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \text{№28. } A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\ \text{№29. } A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} & \text{№30. } A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.6. КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Намунаи иҷрои супоришҳо

Масъала. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои $(3A + B)(2A - B)$ бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ҳал.

$$3A + B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -9 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -8 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$2A - B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & -7 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix};$$

Он гоҳ

$$(3A + B)(2A - B) = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -8 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & -7 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 0 + 7 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 & 5 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 0 \cdot (-5) & 5 \cdot (-5) + 7 \cdot (-7) + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 0 + 6 \cdot (-8) + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + (-8) \cdot (-5) & 1 \cdot (-5) + 6 \cdot (-7) + (-8) \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 7 \cdot 3 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + (-8) \cdot (-5) & 2 \cdot (-5) + 0 \cdot (-7) + 7 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 43 & -74 \\ -30 & 67 & -71 \\ 21 & -29 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ҷавоб: $(3A + B)(2A - B) = \begin{pmatrix} -7 & 43 & -74 \\ -30 & 67 & -71 \\ 21 & -29 & 11 \end{pmatrix}$

Вариантҳои супоришҳо

1. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $2(A + B)(2B - A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $3A - (A + 2B)B$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $2(A - B)(A^2 + B)$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -10 & -2 & 1 \\ 40 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $(A^2 - B^2)(A + B)$.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $(A - B^2)(2A + B)$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $(A - B)A + 2B$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $(A - 0.5B) + AB$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $(A - B)A + 3B$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $2A - (A^2 + B)V$.
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$
10. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $(A^2 - B^2) - 2AB$.
- $$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
11. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $(2A - B)(3A + B) - 2AB$.
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
12. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $(A^2 - B)(B + A)V$.
- $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 13 & 21 \end{pmatrix}.$$
13. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $(A + B)A - B(2A + 3B)$.
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 16 \end{pmatrix}.$$
14. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $A(2A + B) - B(A - B)$.
- $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$
15. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $3(A + B)(AB - 2A)$.
- $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 22 & -14 & 3 \\ 6 & -7 & 0 \\ 11 & 3 & 15 \end{pmatrix}.$$
16. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $2AB - (A + B)(A - B)$.
- $$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

17. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $2A + 3B(AB - 2A)$.
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
18. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $(A - B)(A + B) - 2AB$.
- $$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
19. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $2A - AB(B - A) + B$.
- $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
20. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $A^2 - (A + B)(A - 3B)$.
- $$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
21. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $B(A + 2B) - 3AB$.
- $$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
22. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $3(A + B) - (A - B)A$.
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$
23. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $A(A - B) + 2B(A + B)$.
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
24. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо ин матрисаҳо иҷро карда шаванд $(2A + B)B - 0.5A$.
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.7. САВОЛҲО БАРОИ ТАҚРОРИ БОБ

25. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо матрисаҳо иҷро карда шаванд $AB - 2(A + B)A$.
- $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$
26. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо матрисаҳо иҷро карда шаванд $(A + 2B)(3A - B)$.
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
27. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо матрисаҳо иҷро карда шаванд $2AB + A(B - A)$.
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
28. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо матрисаҳо иҷро карда шаванд $(3A + 0,5B)(2B - A)$.
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
29. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо матрисаҳо иҷро карда шаванд $2A(A + B) - 3AB$.
- $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
30. Матрисаҳои A ва B дода шудаанд. Амалҳои зерин бо матрисаҳо иҷро карда шаванд $3AB + (A - B)(A + 2B)$.
- $$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Матрисаи A чист?
2. Кадом матриса квадратӣ номида мешавад?
3. Муайянкунандаи матрисаи A чист?
4. Кадом матриса транспониронидашуда номида мешавад?
5. Кадом матриса нисбат ба диагонали асосӣ симметрӣ номида мешавад?
6. Кадом матриса диагональ номида мешавад?
7. Кадом вақт ду матрисаҳои A ва B баробар ҳисобида мешаванд?
8. Кадом матриса сатрӣ номида мешавад?
9. Амали ҷамъи ду матриса чӣ тавр иҷро карда мешавад?
10. Амали зарби ду матриса чӣ тавр иҷро карда мешавад?
11. Кадом матрисаи A нолӣ мебошад?
12. Муайянкунандаи матрисаи A чист?
13. Муайянкунандаи тартиби n чӣ тавр ҳисоб карда мешавад?
14. Муайянкунандаи тартиби n чӣ тавр ҳисоб карда мешавад?
15. Муайянкунандаи тартиби n чӣ тавр ҳисоб карда мешавад?
16. Кадом вақт муайянкунандаи матриса баробари нол мешавад?
17. Матрисаи баръакс чист?
18. Матрисаи баръакс чӣ тавр ёфта мешавад?
19. Чӣ тавр дурустии матрисаи баръакс ёфташударо санҷидан мумкин аст?
20. Кадом матриса воҳидӣ номида мешавад?
21. Фарқи ду матриса чӣ тавр иҷро карда мешавад?
22. Минори матрисаи A чист?
23. Дар кадом ҳолат пуркунанда ва минори матриса мувофиқат мекунанд?
24. Кадом вақт матриса дорои муайянкунанд нест?
25. Матрисае, ки аз як сатр ва ё аз як сутун иборат аст чӣ ном дорад?
26. Кадом амалҳо бо матрисаҳо ҷой доранд?
27. Зарби матриса ба вектор чӣ тавр иҷро карда мешавад?
28. Ҳар як матрисаи тартиби n - ум чанд минор дорад?
29. Аз ягон сатр ва ё ягон сутуни муайянкунанда зарбшавандаи умумӣ баровардан мумкин аст?
30. Аз ягон сатр ва ё ягон сутуни матриса зарбшавандаи умумӣ баровардан мумкин аст?

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2.13 & -1.47 & 0.8 \\ 0.34 & -0.58 & 0.32 \\ -1.01 & 2.06 & 0.62 \end{vmatrix} = -1.29338;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2.13 & -3.68 & -1.47 \\ 0.34 & -1.23 & -0.53 \\ -1.01 & 2.12 & 2.06 \end{vmatrix} = -1.58961.$$

Акнун аз формулаҳои дар боло овардашуда истифода намуди раҳаҳои муодилаҳои системаро муайян мекунем

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-0.58755}{-1.5214} = 0.3862; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-1.82738}{-1.5214} = 0.8501;$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-1.5214}{-1.5214} = 1.0448.$$

Тағтиш: $2.13 \cdot 0.3862 - 3.68 \cdot 0.8501 + 0.8 \cdot 1.0448 = -1.46995$.

Муодилаи якуми системаро ҳаҷҳои ёфташуда қаноат мекунанд, бинобар раҳаҳои ёфташуда дурустанд.

Ҷавоб: $x_1 = 0.3862$; $x_2 = 0.8501$; $x_3 = 1.0448$.

3.2. Методи матрисаи баръакс

Бигзор системаи муодилаҳои хаттии (1) дода шуда бошад. Ишораҳои зеринро истифода мебарем

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad - \text{матрисаи коэффициентҳои назди}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad - \text{сутуни ҷазоҳои озоди}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad - \text{сутуни номаълумҳои}$$

муодилаҳои системаи (1). Ин ишораҳои истифода бурда, системаи $(10 - \text{ро дар намуни матрисаи менависем } AX = B$. Агар муайянкунандаи матрисаи коэффициентҳои назди номаълумҳо A нобаробари нол бошад, он гоҳ матрисаи баръакс A^{-1} мавҷуд аст. Ҳарду тарафи муодилаи $AX = B - \text{ро ба матрисаи баръакс } A^{-1}$ аз тарафи чап зарб зада, ҳосил мекунем $A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$.

Мисоли 2. Системати муодилаҳо бо усули матрисаи баръакс бо аниқии то 0.001 ҳал карда шавад.

$$\begin{cases} 2.27x_1 + 0.32x_2 + 0.64x_3 = 1.49 \\ -0.56x_1 + 0.11x_2 + 1.23x_3 = 0.07 \\ 1.25x_1 + 0.09x_2 + 2.48x_3 = 0.74 \end{cases}$$

Ҳал. Матрисаи коэффициентҳои назди номаълумҳо тартиб

$$A = \begin{pmatrix} 2.27 & 0.32 & 0.64 \\ -0.56 & 0.11 & 1.23 \\ 1.25 & -0.09 & 2.48 \end{pmatrix}.$$

Матрисаи баръакси матрисаи A дар намуни зерин ёфта мешавад

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

ин дар ин ҷо $\{A_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, 3$) - пурунаандаҳои алгебравии матрисаи A мебошанд. Пурунаандаҳои $\{A_{ij}\}$ -ро ҳисоб мекунем.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0.11 & 1.23 \\ -0.09 & 2.48 \end{vmatrix} = 0.11 \cdot 2.48 - 1.23 \cdot (-0.09) = 0.3835;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -0.56 & 1.23 \\ 1.25 & 2.48 \end{vmatrix} = -2.9263;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -0.56 & 0.11 \\ 1.25 & -0.09 \end{vmatrix} = -0.0871;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0.32 & 0.64 \\ 0.09 & 2.48 \end{vmatrix} = -0.8512;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2.27 & 0.64 \\ 1.25 & 2.48 \end{vmatrix} = 4.8296;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2.27 & 0.32 \\ 1.25 & 0.09 \end{vmatrix} = 0.6043;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0.32 & 0.64 \\ 0.11 & 1.23 \end{vmatrix} = 0.3232;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2.27 & 0.64 \\ -0.56 & 1.23 \end{vmatrix} = -3.1505;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2.27 & 0.32 \\ -0.56 & 0.11 \end{vmatrix} = 0.6081.$$

Акнун муайянкунандаи матрисаро меёбем

$$|A| = \begin{vmatrix} 2.27 & 0.32 & 0.64 \\ -0.56 & 0.11 & 1.23 \\ 1.25 & -0.09 & 2.48 \end{vmatrix} = 1.7512.$$

Акнун қиматҳои $\{A_{ij}\}$ ва $|A|$ -ро ба (2) гузошта, матрисаи баръаксро ҳосил мекунем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2190 & -0.4861 & 0.1846 \\ 1.6710 & 2.7579 & -1.799 \\ -0.0497 & 0.3451 & 0.2449 \end{pmatrix}.$$

Матрисаи ҳосилшудаи A^{-1} — ро ба сутуни аъзоҳои озоди матрицаи A илова карда, ба ҳаҷми $n \times (n+1)$ мерасонам.

$$\begin{pmatrix} 1.49 \\ 0.07 \\ 0.74 \end{pmatrix} \text{ зарб зада, хосил мекунем } \begin{pmatrix} 0.2190 & -0.4861 & 0.1846 \\ 1.6710 & 2.7579 & -1.799 \\ -0.0497 & 0.3451 & 0.3472 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.49 \\ 0.07 \\ 0.74 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4288 \\ 1.3516 \\ 0.1313 \end{pmatrix}.$$

Чавоб: $x_1 = 0.4288$; $x_2 = 1.3516$; $x_3 = 0.1313$

3.3. Методи Гаусс

Яке аз усулҳои нисбатан маълуме, ки ҷангоми ҳалли системаи муодилаҳои хаттӣ истифода бурда мешавад, ин методи пайдарнаи хоричқунини номаълумҳо мебошад ва бо ёрии ин усул ҳал намунаи системаи муодилаҳоро методи Гаусс меноманд. Идеия асосии ин метод аз он иборат аст, ки бо роҳи пайдарнаи хоричқунини номаълумҳои муодилаҳо система ба намунаи секунҷа оварда мешавад ва ҳамаи элементҳои дар қисми поёни диагонал буда, ба нол баробар мешаванд. Як қатор схемаҳои ҳисобкунӣ мавҷуданд, ки бо ёрии онҳо ин метод ба амал бароварда мешавад. Яке аз методҳои нисбатан бештар истифодашаванда интиҳоби элементҳои асосии матрисаи система дар сатр ва ё дар сутун ва ё дар тамоми матриса ба ҳисоб меравад. Элементи асосии матриса гуфта элементро меноманд, ки қимати мутлақии он аз қиматҳои мутлақии дигар элементҳо хурд нест. Сатр ва сутунро, ки дар он элементҳои асосӣ ҷойгир аст, сатри асосӣ ва сутуни асосӣ меноманд. Аз нуқтаи назари истифодаи қулай ва осонӣ, системаи тақсими ягона бештар мавриди истифода қарор мегирад. Ба идеияи ин метод бо системаи тақсими ягона шинос мешавем.

Одатан системаи муодилаҳои хаттии тартиби n — ум дар намуни зерин навишта мешавад

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j = b_j; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ва ё дар шакли кушод

[illegible]

дар намуди векторӣ бошад,

54

$$A\bar{x} = \bar{b}, \quad (B)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

A – матрица асосин система бо n^2 элементҳо;

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – вектор-сутуни номаълумҳо;

$$b = \{b_1, b_2, \dots, b\} - \text{вектор-супутни аъзоҳои оЗОД.}$$

Муайянқунандаи (детерминанти – *det*) матрицаи A тартиби n -ум
 алади $D (det A)$ – ро меноманд, ки чунин муайян карда

$$|A| = D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пеш аз хама, ҳангоми ба ҳалли системаи муодилаҳо шурӯъ

Агар ҳама аъзоҳои озоди муодилаҳои система баробари нол бошад, яъне $\bar{b} = 0$, он гоҳ системаи $A\bar{x} = 0$ яқинса номида мешавад. Агар $b_i \neq 0$, ва ё ақаллан яке аз $b_i \neq 0$ ($i = \overline{1, n}$) бошад, он гоҳ системаи (A) ғайрияқинса номида мешавад.

Барон кулай шудани муҳокиман минбаъда, системан ҷор
намудани ҳамаи чортагирёндаро дида мбароем

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45} \end{cases}$$

Бигзор $a_{11} \neq 0$ (элементи асосӣ) бошад. Коэффициентҳои назди номдълумҳои муодилаи якуми системаи (1) – ро ба элементи a_{11} тақсим намуда, ҳосил мекунем

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \quad (2)$$

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2, 3, 4, 5).$$

Аз муодилаи (2) истифода бурда, аз системаи (1) номаълуми x_1 — ро хориҷ мекунем. Бо ин мақсад аз муодилаи дуюми системаи (1) муодилаи (2) — ро тарҳ карда, ба элементҳои a_{21} зарбмекунем; аз

муодилаи сеюми системаи (1) муодилаи (2) – ро тарҳ карда, элементҳои a_{31} зарб мекунем; аз муодилаи чоруми системаи (1) муодилаи (2) – ро тарҳ карда, ба элементҳои a_{41} зарб мекунем. Натиҷа системаи зеринро ҳосил мекунем

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)}, \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}, \end{cases} \quad (3)$$

дар ин ҷо коэффисиентҳои $a_{ij}^{(1)}$ ($i, j \geq 2$) бо ёрии формулаҳои зерин ҳисоб карда мешаванд

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}, \quad (i, j \geq 2).$$

Коэффисиентҳои назди номаълумҳои муодилаи дуюми системаи (3) – ро ба элементҳои асосӣ $a_{22}^{(1)}$ ($a_{22}^{(1)} \neq 0$) тақсим намуда, муодилаи зеринро ҳосил мекунем

$$x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_{25}, \quad (4)$$

дар ин ҷо

$$b_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3, 4, 5).$$

Тавре номаълуми x_1 – ро ҳориҷ карда будем, x_2 – ро низ ҳамин тавр ҳориҷ намуда, системаи зеринро ҳосил мекунем

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \\ x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_{25}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)}, \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{(2)}, \end{cases} \quad (5)$$

дар ин ҷо

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}b_{2j}, \quad (i, j \geq 3).$$

Коэффисиентҳои назди номаълумҳои муодилаи сеюми системаи (5) – ро ба элементҳои асосии $a_{33}^{(2)}$ ($a_{33}^{(2)} \neq 0$) тақсим карда, ҳосил мекунем

$$x_3 + b_{34}x_4 = b_{35}, \quad (6)$$

дар ин ҷо

$$b_{3j} = \frac{a_{3j}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \quad (j = 4, 5).$$

ҳамин тавр номаълуми x_3 – ро аз системаи (5) ҳориҷ намуда, системаи зеринро соҳиб мегардем

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \\ x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_{25}, \\ x_3 + b_{34}x_4 = b_{35}, \\ a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(3)}, \end{cases} \quad (7)$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{i3}^{(2)}b_{3j}, \quad (i, j \geq 4).$$

Аз муодилаи охири системаи (7) номаълуми x_4 – ро меёбем

$$x_4 = \frac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} = b_{45}, \quad (a_{44}^{(3)} \neq 0), \quad (8)$$

$$b_{4j} = \frac{a_{4j}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}, \quad (j = 5).$$

Ҳаме ба системаи зерин соҳиб мешавем

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \\ x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_{25}, \\ x_3 + b_{34}x_4 = b_{35}, \\ x_4 = b_{45}. \end{cases} \quad (9)$$

Номаълумҳои x_4, x_3, x_2, x_1 – ро пайдарпай аз системаи (9) меёбем. Ҳамин тавр, ҷараёни ёфтани решаҳои муодилаҳои системаи (1) бо методи Гаусс ба ёфтани решаҳои муодилаҳои системаи (9), ки шакли матрисаси секунҷаро дорад, баробаркува мебошад. Шартҳои зарурӣ ба қифоягии истифодаи методи Гаусс, барои ҳалли чунин системаи муодилаҳо, нобаробари нол будани элементҳои асосии матрисаси система ба ҳисоб меравад.

Ҷараёни ёфтани коэффисиентҳои b_{ij} – и системаи (9) – ро амали рафт ба ҷараёни ёфтани номаълумҳоро амали баръакси методи Гаусс меноманд.

Мисоли 3. Системаи муодилаҳоро бо методи Гаусс, бо аниқии то 0.001, ҳал кунед.

$$\begin{cases} 7.9x_1 + 5.6x_2 + 5.7x_3 - 7.2x_4 = 6.68 \\ 8.5x_1 - 4.8x_2 + 0.8x_3 + 3.5x_4 = 9.95 \\ 4.3x_1 + 4.2x_2 - 3.2x_3 + 9.3x_4 = 8.6 \\ 3.2x_1 - 1.4x_2 - 8.9x_3 + 3.3x_4 = 1.0 \end{cases} \quad (10)$$

Ҳал. Чадвали ҳалли муодилаҳои системаро бо алгоритми боло овардашуда бо методи Гаусс таҳия месозем.

x_1	x_2	x_3	x_4	Абсолютн ошибка	Сумма
7.9	5.6	5.7	-7.2	6.68	18.68
8.5	-4.8	0.8	3.5	9.95	17.95
4.3	4.2	-3.2	9.3	8.6	23.2
3.2	-1.4	-8.9	3.3	1.0	-2.8
1	0.7089	0.7215	-0.9114	0.8456	2.3646
	-10.8253	-5.3329	11.2468	2.7627	-2.1488
	1.1519	-6.3025	13.2190	4.9641	13.0324
	-3.6684	-11.2089	6.2165	-1.7058	-10.3666
	1	0.4926	-1.0389	-0.2552	0.1985
		-6.8700	14.4157	5.2580	12.8037
		-9.4017	2.4052	-2.6420	-9.6385
		1	-2.0984	-0.7654	-1.8637
			-17.3229	-9.8377	-27.1606
			1	0.5679	1.5670

Ҳамин тавр, ба системаи секунҷаҳои муодилаҳои соҳиб шудем, ки он ба системаи муодилаҳои додашудаи (10) барбаркува мебошад

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 0.7089x_2 + 0.7215x_3 - 0.9114x_4 = 0.8456 \\ x_2 + 0.4926x_3 - 1.0389x_4 = -0.2552 \\ x_3 - 2.0984x_4 = -0.7554 \\ x_4 = 0.5679 \end{array} \right.$$

Аз ин систем пайдарпай номалумхоро меёбем

$x_4 = 0.5679;$

$$x_3 = -0.7554 + 2.0984 \cdot 0.5679 = 0.4263;$$

$$x_2 = -0.2552 - 0.4926 \cdot 0.4263 + 1.0389 \cdot 0.5679 = 0.1248;$$

$$x_1 = 0.8456 - 0.7089 \cdot 0.1248 - 0.7215 \cdot 0.4263 +$$

$$+0.9114 \cdot 0.5679 = 0.9671.$$

Число: $x_1 = 0.9671$; $x_2 = 0.1248$; $x_3 = 0.4263$; $x_4 = 0.5679$.

3.4. Методы итератсия

Ҳангоми бисёр будани микдори номаълумҳои системаномии муодилаҳо истифодаи методи Гаусс, ки ҳалҳои аниқро таъмин мекунад, хеле мураккаб мешавад. Дар ин ҳолатҳо барои ёфтани ҳалҳои муодилаҳои системаи истифодаи методҳои тақрибии нисбатан оддӣ мешаванд. Яке аз ин методҳои тақрибӣ - **методи итератсия** ба шумор меравад.

о меравад.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

лифолакунихой зеринро ворид намуда,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

системаи (1) – ро мухтасар дар намуди муодилаи матрисавӣ ба шакли зерин баён карда мешавад:

$$Ax = b. \quad (1)$$

диagonali gairinoliandi, yzhe

$$a_i \neq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Муодилаи якуми системаи (1) — ро нисбат ба x_1 , муодилаи дуюмиро нисбат ба x_2 , сеюмро нисбат ба x_3 ва ҳоказо ҳал намуда ба системаи

[illegible]

Oh I'm done

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \neq j)$$

$$z_{ij} = 0 \text{ уангом } i = j \text{ (} i, j = 1, 2, \dots, n \text{) будан.}$$

Матрисаҳои зеринро ворид намуда,

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ва} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

системаи (2) – ро дар шакли матрисавӣ менависем

$$x = \beta + \alpha x.$$

Системаи (2) – ро бо методи пайдарпай наздиккунӣ ҳал мекунем. Ба сифати наздикшавии ибтидоӣ, масалан, сутуни аъзоҳои озодаи интиҳоб намудан мумкин аст, яъне $x^{(0)} = \beta$.

Пайдарпай матриса-сутунҳоро месозем

$$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)}$$

(наздиккунии аввала),

$$x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)}$$

(наздиккунии дуюм) ва ғайра.

Наздиккунии дилхохи $(k+1)$ – ум аз рӯи формулаи зерин ёфта мешавад

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Агар пайдарпайи наздиккуниҳо $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ худро дошта бошанд, яъне

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)},$$

он гоҳ ин ҳудуд ҳалли системаи (2) мегардад. Дар ҳақиқат, дар баробарии (3) ба ҳудуд гузашта, ҳосил мекунем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$$

ва ё

$$x = \beta + \alpha x,$$

яъне вектори ҳудудӣ x ҳалли системаи (2') мешавад, аз ин рӯ ҳалли системаи (1) низ мешавад.

Формулаҳои наздиккуниро дар шакли кушод менависем

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \beta_i, \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} \end{cases}$$

$$(\alpha_{ij} = 0; i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ҳамаи қардан зарур аст, ки барои нобаробари нол шудани коэффициентҳо, баъзан системаи (1) – ро ба намуди системаи (2) зерин мувофиқи мақсад аст. Масалан, муодилаи зеринро

$$1,02x_1 - 0,15x_2 = 2,7$$

барои тағбики методи пайдарпай наздиккунӣ дар намуди зерин ба намуди лозим мешавад

$$x_1 = 2,7 - 0,02x_1 + 0,15x_2.$$

Ҳамунан, дар системаи

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

қурунии зерин намудан мумкин аст

$$a_{ii} = a_{ii}^{(1)} + a_{ii}^{(2)},$$

дар ин ҳо $a_{ii}^{(1)} \neq 0$. Он гоҳ системаи додашуда ба системаи зерин табарқува мешавад

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

дар ин ҳо

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}^{(1)}}, \quad \alpha_{ii} = -\frac{a_{ii}^{(2)}}{a_{ii}^{(1)}}, \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}^{(1)}} \quad \text{ҳангоми } i = j.$$

Бинобар, минбаъд ҳолати $a_{ii} \neq 0$ – ро дида мебароем

Методи пайдарпай наздиккунӣ, ки бо формулаҳои (3) ё (3') муайян карда мешаванд, номи методи итератсияро дорад. Қараёни итератсияи (3) аниқтар аст, яъне миклори қадамҳои наздиккунӣ, ки барои ба даст овардани ҳалҳои системаи (1), бо аниқии додашуда, ғайрианд бисёр нест, агар элементҳои матрисаи α бо кимати муволақашон хурд бошанд.

Мисоли 4. Системаи муодилаҳо бо тағбики методи итератсия ҳал карда шавад

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8 \\ 0,9x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9 \\ 0,4x_1 - 0,08x_2 - 4x_3 = 20 \end{cases} \quad (4)$$

Ҳал. Дар системаи додашуда коэффициентҳои диагоналі 4; 3; -4 аз коэффициентҳои дигари система калонтаранд. Бинобар, система ро ба намуди нормалӣ (2) меорем

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3 \\ x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3 \\ x_3 = 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2 \end{cases}$$

Системаи (5) – ро дар намуди матрисавӣ менависем

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Ба сифати наздиқунии аввалии системаи (4) элементҳои диагонало қабул мекунем

$$x_1^{(0)} = 2; x_2^{(0)} = 3; x_3^{(0)} = 5.$$

Ин наздиқуниҳоро ба тарафи чапи системаи (5) гузошта, наздиқунии дуҷуми решаҳои муодилаҳоро ба даст меорем

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 2 - 0,06 \cdot 3 + 0,02 \cdot 5 = 1,92 \\ x_2^{(1)} = 3 - 0,03 \cdot 2 + 0,05 \cdot 5 = 3,19 \\ x_3^{(1)} = 5 - 0,01 \cdot 2 + 0,02 \cdot 3 = 5,04. \end{cases}$$

Ҳамин тавр, ин наздиқуниҳои ёфташударо боз ба системаи (5) гузошта, наздиқунии сеҷуми решаҳои муодилаҳоро ҳосил мекунем

$$x_1^{(2)} = 1,9094; x_2^{(2)} = 3,1944; x_3^{(2)} = 5,0446.$$

Ҳамин амалиётро боз такрор намуда, наздиқунии чорумро меёбем, ки ҳалҳои ба мо лозимро медиҳад

$$x_1^{(3)} = 1,90923; x_2^{(3)} = 3,19495; x_3^{(3)} = 5,04485.$$

3.5. Методи Зейдел

Методи Зейдел яке аз методҳои тақмилёфтаи метода итератсияи мебошад. Идеия асосии ин метод аз он иборат аст, ки ҳангоми ҳисоб намудани наздиқунии $(k+1)$ – уми номаълуми x_i ҳамаи $(k+1)$ наздиқуниҳои пештараи номаълумҳои $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ ба назар гирифта мешаванд.

Бигзор системаи хаттии зерин дода шуда бошад

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Наздиқуниҳои аввалии решаҳоро

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)},$$

чунин интиҳоб мекунем, ки онҳо ба номаълумҳои $x_1, x_2, \dots, x_n$ бештар наздиқӣ дошта бошанд.

Минбаъд, фарз мекунем, ки наздиқунии k – уми реша $x_i^{(k)}$ ба мо маълум аст. Мувофиқи методи Зейдел наздиқуниҳои решаҳои $(k+1)$ – умро аз рӯи формулаҳои

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j^{(k)}$$

меёбем.

$$x_1^{(k+2)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j} x_j^{(k)};$$

.....

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)};$$

.....

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Одатан методи Зейдел назар ба методи итератсияи аниқии бехтари ҳисобкуниҳоро медиҳад, аммо ин метод ба ҳисобкуниҳои мураккабтарини мерасонад. Ҷараёни истифодаи методи Зейдел нисбатан наздиқшаванда аст, ҳатто дар мавридҳое, ки ҷараёни итератсия дур мешавад. Аммо на ҳама вақт ин ҷараён чунин суръар мегирад. Ҳолатҳое мешаванд, ки ҷараёни ҳисобкуниҳо аз рӯи методи Зейдел назар ба ба методи итератсияи сулстар наздик мешаванд. Гайр аз ин, ҳолатҳое пеш меоянд, ки ҷараёни ҳисобкуниҳо бо методи итератсияи наздик шуда, ин ҷараён бо методи Зейделя наздик намешавад.

Мисоли 5. Бо ёрии методи Зейдел системаи муодилаҳоро ҳал кунед

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 - 2x_2 - 10x_3 = 14. \end{cases}$$

Ҳал. Пеш аз ҳама, системамаро ба намуди барои истифодаи методи итератсияи кулай меорем

$$\begin{cases} x_1 = 1,2 - 0,1x_2 - 0,1x_3 \\ x_2 = 1,3 - 0,2x_1 + 0,1x_3 \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 - 0,2x_2. \end{cases}$$

Ба сифати наздиқуниҳои нолуми решаҳо чунин интиҳоб мекунем

$$x_1^{(0)} = 1,2; x_2^{(0)} = 0; x_3^{(0)} = 0.$$

методи Зейделя истифода бурда, пайдарпай ҳосил мекунем

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1,2 - 0,1 \cdot 0 - 0,1 \cdot 0 = 1,2 \\ x_2^{(1)} = 1,3 - 0,2 \cdot 1,2 + 0,1 \cdot 0 = 1,06 \\ x_3^{(1)} = 1,4 - 0,2 \cdot 1,2 - 0,2 \cdot 1,06 = 0,948. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1,2 - 0,1 \cdot 1,06 - 0,1 \cdot 0,948 = 0,9992 \\ x_2^{(2)} = 1,3 - 0,2 \cdot 0,9992 + 0,1 \cdot 0,948 = 1,00536 \\ x_3^{(2)} = 1,4 - 0,2 \cdot 0,9992 - 0,2 \cdot 1,00536 = 0,999098. \end{cases}$$

Ҳамин тавр ин ҷараёни ҳисобро тақрор намуда, ба наздиккунҳои зерин соҳиб мегардем

$$\begin{aligned} x_1^{(3)} &= 0,9996; x_2^{(3)} = 1,0001; x_3^{(3)} = 1,0001; \\ x_1^{(4)} &= 1,0000; x_2^{(4)} = 1,0000; x_3^{(4)} = 1,0000; \\ x_1^{(5)} &= 1,0000; x_2^{(5)} = 1,0000; x_3^{(5)} = 1,0000. \end{aligned}$$

Қиматҳои аниқи решаҳо: $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1$

3.6. КОРИ ЛАБОРАТОРИЙ

Образец выполнения работы

Супоринш. Системаи муодилаҳоро ба методи Крамер, бо аниқии то 0.001, ҳал кунед.

$$\begin{cases} 0,54x_1 + 1,53x_2 - 0,26x_3 = 3,09 \\ 0,83x_1 - 0,66x_2 + 1,64x_3 = 0,36 \\ 1,12x_1 + 0,81x_2 - 0,98x_3 = 3,81 \end{cases}$$

Ҳал. Муайянкунандаи асосии матрицаи систем аро ҳисоб мекунем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,54 & 1,53 & -0,26 \\ 0,83 & -0,66 & 1,64 \\ 1,12 & 0,81 & -0,98 \end{vmatrix} =$$

$$= 0,54 \cdot (-0,66) \cdot (-0,98) + 1,53 \cdot 1,64 \cdot 1,12 +$$

$$+ (-0,26) \cdot 0,83 \cdot 0,81 - (-0,26) \cdot (-0,66) \cdot 1,12 - 0,54 \cdot 1,64 \cdot 0,81 -$$

$$- 1,53 \cdot 0,83 \cdot (-0,98) = 3,3198.$$

Муайянкунандаҳои $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ - ро меёбем.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3,09 & 1,53 & -0,26 \\ 0,36 & -0,66 & 1,64 \\ 3,81 & 0,81 & -0,98 \end{vmatrix} =$$

$$= 3,09 \cdot (-0,66) \cdot (-0,98) + 1,53 \cdot 1,64 \cdot 3,81 +$$

$$+ (-0,26) \cdot 0,36 \cdot 0,81 - (-0,26) \cdot (-0,66) \cdot 3,81 - 3,09 \cdot 1,64 \cdot 0,81 -$$

$$- 1,53 \cdot 0,36 \cdot (-0,98) = 7,2641.$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 0,54 & 3,09 & -0,26 \\ 0,83 & 0,36 & 1,64 \\ 1,12 & 3,81 & -0,98 \end{vmatrix} =$$

$$= 1,54 \cdot 0,36 \cdot (-0,98) + 3,09 \cdot 1,64 \cdot 1,12 +$$

$$+ (-0,26) \cdot 0,83 \cdot 3,81 - (-0,26) \cdot 0,36 \cdot 1,12 - 0,54 \cdot 1,64 \cdot 3,81 -$$

$$- 3,09 \cdot 0,83 \cdot (-0,98) = 3,9071.$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 0,54 & 1,53 & 3,09 \\ 0,83 & -0,66 & 0,36 \\ 1,12 & 0,81 & 3,81 \end{vmatrix} =$$

$$= 0,54 \cdot (-0,66) \cdot 3,81 + 1,53 \cdot 0,83 \cdot 3,81 +$$

$$+ 0,54 \cdot 0,36 \cdot 0,81 - 3,09 \cdot (-0,66) \cdot 1,12 + 1,53 \cdot 0,83 \cdot 3,81 -$$

$$- 0,54 \cdot 0,36 \cdot 0,81 = -1,3752.$$

Аз ин аз формулаҳои Крамер истифода бурда, решаҳои меёбем

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{7,2641}{3,3198} = 2,1881; x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{3,9071}{3,3198} = 1,1769;$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-1,3752}{3,3198} = -0,4142.$$

Барои тафтиши дурустии решаҳои ёфташуда, қиматҳои муайяншудаи x_1, x_2, x_3 - ро ба муодилаи якуми система гузошта, ҳисоб мекунем

$$0,54 \cdot 2,1881 + 1,53 \cdot 1,1769 - 0,26 \cdot (-0,4142) = 3,089954.$$

Натиҷаҳои ҳисобкунии тарафи ростии муодила ба тарафи чапи он

баробар шуд. Бинобар ҳамаи муодилаҳои система дурустанд.

Ҷавоб: $x_1 = 2,2555; x_2 = 0,7802; x_3 = 1,0711.$

Вариантҳои супориншо

Системаи муодилаҳоро ба методи Крамер, бо аниқии то 0.001, ҳал кунед.

$$\begin{cases} 1,76x_1 + 3,18x_2 + 1,05x_3 = 5,74 \\ 2,15x_1 + 1,54x_2 - 2,44x_3 = 0,96 \\ 2,18x_1 - 3,23x_2 + 1,27x_3 = 1,91 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,83x_1 + 1,12x_2 + 2,22x_3 = 9,05 \\ -0,24x_1 + 1,17x_2 + 1,01x_3 = 3,42 \\ 0,81x_1 + 0,67x_2 + 0,54x_3 = 2,81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,28x_1 + 0,87x_2 + 1,36x_3 = 2,40 \\ 1,83x_1 - 1,25x_2 + 0,87x_3 = 2,70 \\ -0,54x_1 + 0,71x_2 + 0,83x_3 = 0,12 \end{cases}$$

4. $\begin{cases} 1.37x_1 - 1.71x_2 + 0.73x_3 = 2.05 \\ 3.51x_1 - 2.12x_2 + 0.71x_3 = 4.63 \\ 1.12x_1 + 1.83x_2 - 3.14x_3 = -3.85 \\ 2.06x_1 - 1.08x_2 + 2.11x_3 = 3.10 \\ 0.49x_1 - 0.47x_2 + 1.43x_3 = 1.36 \\ 1.63x_1 + 1.19x_2 - 2.18x_3 = 2.53 \\ 0.14x_1 - 1.13x_2 + 0.28x_3 = -0.11 \\ 3.44x_1 - 1.25x_2 + 0.17x_3 = 4.27 \\ -0.17x_1 + 1.44x_2 - 3.71x_3 = -5.63 \\ 0.93x_1 + 2.15x_2 - 0.46x_3 = 1.73 \\ 1.42x_1 - 1.16x_2 + 1.19x_3 = 2.82 \\ -2.13x_1 + 1.74x_2 + 0.68x_3 = -0.24 \\ 0.99x_1 - 4.52x_2 + 0.13x_3 = -1.98 \\ 0.17x_1 + 0.09x_2 - 0.11x_3 = 0.68 \\ 1.22x_1 - 2.18x_2 - 1.58x_3 = 1.16 \\ 1.16x_1 + 0.46x_2 - 1.27x_3 = -1.51 \\ 2.18x_1 - 1.07x_2 + 1.71x_3 = 3.75 \\ 0.84x_1 + 0.63x_2 - 0.46x_3 = 0.35 \\ 1.24x_1 + 0.12x_2 + 4.63x_3 = 1.17 \\ -0.17x_1 - 3.45x_2 - 1.59x_3 = 2.44 \\ 0.11x_1 + 0.25x_2 - 0.03x_3 = 0.53 \\ 0.53x_1 + 0.95x_2 - 1.17x_3 = 0.31 \\ 1.63x_1 - 1.56x_2 + 1.87x_3 = 0.81 \\ -0.65x_1 + 2.12x_2 + 0.79x_3 = 2.73 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 1.63x_1 + 2.19x_2 - 3.14x_3 = 3.37 \\ 2.56x_1 - 0.67x_2 + 0.77x_3 = 2.53 \\ -0.35x_1 + 1.16x_2 + 2.39x_3 = 0.55 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2.33x_1 - 1.72x_2 + 0.68x_3 = -2.19 \\ 1.88x_1 - 0.79x_2 + 1.83x_3 = 1.47 \\ 3.23x_1 + 0.54x_2 - 0.65x_3 = 3.60 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 1.42x_1 - 0.95x_2 + 0.65x_3 = 3.34 \\ -0.67x_1 + 2.23x_2 + 0.18x_3 = -0.45 \\ 3.45x_1 + 0.07x_2 - 2.27x_3 = 6.42 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 0.18x_1 + 2.25x_2 + 1.72x_3 = 5.27 \\ 0.93x_1 + 1.73x_2 - 3.27x_3 = -1.33 \\ 1.79x_1 - 0.83x_2 + 1.87x_3 = 8.40 \end{cases}$
16. $\begin{cases} 0.84x_1 - 1.51x_2 + 1.23x_3 = 1.23 \\ 0.16x_1 - 3.45x_2 + 1.62x_3 = -2.26 \\ 0.75x_1 + 2.18x_2 - 0.72x_3 = 3.30 \end{cases}$
17. $\begin{cases} 2.18x_1 - 1.65x_2 + 2.27x_3 = 3.74 \\ 1.12x_1 + 2.16x_2 - 0.46x_3 = 2.50 \\ 1.17x_1 + 0.89x_2 - 1.05x_3 = -0.74 \end{cases}$
18. $\begin{cases} 0.78x_1 + 1.17x_2 + 1.23x_3 = 2.95 \\ 1.87x_1 + 2.14x_2 - 2.12x_3 = 0.66 \\ 0.65x_1 - 1.88x_2 + 1.16x_3 = 1.84 \end{cases}$
19. $\begin{cases} 1.28x_1 - 2.32x_2 + 2.48x_3 = 6.17 \\ 1.33x_1 - 0.84x_2 + 1.07x_3 = 4.58 \\ 0.72x_1 + 1.25x_2 - 0.44x_3 = 2.01 \end{cases}$
20. $\begin{cases} 0.18x_1 + 0.12x_2 + 1.45x_3 = 1.81 \\ -1.01x_1 + 0.71x_2 + 1.13x_3 = 0.93 \\ 0.11x_1 - 2.14x_2 + 0.18x_3 = -6.57 \end{cases}$
21. $\begin{cases} 1.78x_1 + 0.76x_2 + 2.15x_3 = 3.85 \\ 2.44x_1 - 1.09x_2 - 0.57x_3 = 0.57 \\ -0.53x_1 + 0.57x_2 + 1.48x_3 = 1.44 \\ 2.01x_1 - 3.17x_2 + 0.76x_3 = -5.32 \end{cases}$
22. $\begin{cases} 0.25x_1 + 1.81x_2 - 0.33x_3 = 1.25 \\ 0.14x_1 + 0.83x_2 + 1.35x_3 = 4.14 \end{cases}$
23. $\begin{cases} 1.35x_1 + 1.51x_2 + 1.26x_3 = 7.77 \\ 0.71x_1 - 0.68x_2 + 0.16x_3 = 1.11 \\ 1.51x_1 + 1.88x_2 - 1.27x_3 = 2.08 \end{cases}$
24. $\begin{cases} 1.17x_1 + 0.13x_2 - 0.68x_3 = 0.42 \\ 0.25x_1 - 0.58x_2 + 1.83x_3 = 1.84 \\ 3.06x_1 + 0.42x_2 - 1.56x_3 = 1.01 \end{cases}$

25.
$$\begin{cases} 0.17x_1 + 1.81x_2 - 0.75x_3 = 1.04 \\ 0.64x_1 - 0.95x_2 + 2.23x_3 = 7.39 \\ 0.87x_1 + 0.73x_2 + 0.64x_3 = 5.71 \end{cases}$$
26.
$$\begin{cases} 0.13x_1 + 1.08x_2 - 0.11x_3 = 1.93 \\ 1.25x_1 - 0.09x_2 + 1.12x_3 = 5.85 \\ -0.86x_1 + 2.33x_2 + 0.21x_3 = 6.62 \end{cases}$$
27.
$$\begin{cases} 1.56x_1 - 3.43x_2 + 2.15x_3 = 3.28 \\ 0.88x_1 + 1.08x_2 - 1.16x_3 = 3.05 \\ 2.45x_1 - 0.42x_2 + 2.18x_3 = 7.83 \end{cases}$$
28.
$$\begin{cases} 1.88x_1 + 2.15x_2 + 0.15x_3 = 6.52 \\ 1.72x_1 - 4.35x_2 + 2.12x_3 = 1.35 \\ 0.79x_1 - 1.48x_2 + 0.84x_3 = 1.08 \end{cases}$$
29.
$$\begin{cases} 0.83x_1 + 0.13x_2 - 0.18x_3 = 0.57 \\ -1.17x_1 + 0.14x_2 + 1.17x_3 = -0.48 \\ 0.22x_1 - 1.12x_2 + 0.73x_3 = -0.58 \end{cases}$$
30.
$$\begin{cases} 0.68x_1 - 2.46x_2 + 2.15x_3 = 1.70 \\ 0.28x_1 - 3.09x_2 + 1.42x_3 = -2.25 \\ 1.27x_1 + 1.08x_2 + 0.73x_3 = 5.74 \end{cases}$$

3.7. МАШҲУЛИЯТИ АМАЛӢ

Намунаи иҷрои супориш

Супориш. Систекаи муодилаҳоро бо методи матрисаи баръакс, бо аниқии то 0.001 ҳал кунед.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Ҳал. Матрисаи A – ро, ки аз коэффисиентҳои назди номаълумҳои системаи муодилаҳо иборат аст, месозем

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрисаи баръакс барои матрисаи A бо ёрии формулаи зерин ёфта мешавад

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (*)$$

дар ин ҷо $\{A_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, 3$) – пуркунадаҳои алгебравии матрисаи A пуркунадаҳои $\{A_{ij}\}$ – ро меёбем

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-5) = 22;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10.$$

Авнуи муайянкунандаи матрисаи асосиро ҳисоб мекунем

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 24 - 15 - 27 + 16 + 20 = -6.$$

Қиёматҳои ёфташудаи $\{A_{ij}\}$ ва $|A|$ – ро ба формулаи (*) гузошта, матрисаи баръаксро ҳосил мекунем

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 22 & 1 & -17 \\ 2 & -1 & -1 \\ -14 & -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.6667 & -0.1667 & 2.8333 \\ -0.3333 & 0.1667 & 1.1667 \\ 2.3333 & 0.3333 & -1.6667 \end{pmatrix}.$$

Матрисаи баръакс ёфташуда A^{-1} – ро ба матриса-сутуни аъзоҳои

оюди система $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ зарб зада, пайдо мекунем

$$X = \begin{pmatrix} -3.6667 & -0.1667 & 2.8333 \\ -0.3333 & 0.1667 & 1.1667 \\ 2.3333 & 0.3333 & -1.6667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.6667 \cdot 1 - 0.1667 \cdot 4 + 2.8333 \cdot 1 \\ -0.3333 \cdot 1 + 0.1667 \cdot 4 + 1.1667 \cdot 1 \\ 2.3333 \cdot 1 + 0.3333 \cdot 4 - 1.6667 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0.5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Цавоб: $x_1 = -1.5$; $x_2 = 0.5$; $x_3 = 1$

Вариантҳои супоришҳо

Системаи муодилаҳоро бо методи матрисаи баръакс, бо анҷом то 0.001 ҳал кунед.

$$1. \begin{cases} 0.87x_1 - 2.13x_2 + 1.17x_3 = -4.22 \\ 0.96x_1 - 1.19x_2 + 1.05x_3 = 5.78 \\ 2.16x_1 + 0.75x_2 - 1.88x_3 = 1.73 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2.22x_1 - 3.21x_2 + 0.85x_3 = 1.40 \\ 1.13x_1 + 0.54x_2 - 2.19x_3 = 0.22 \\ 0.28x_1 + 1.51x_2 + 3.14x_3 = 3.54 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -3.44x_1 + 0.81x_2 + 1.06x_3 = -4.22 \\ 2.28x_1 + 1.74x_2 - 0.94x_3 = 5.78 \\ 1.63x_1 - 2.16x_2 + 0.83x_3 = 1.73 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 1.37x_1 - 1.87x_2 + 1.32x_3 = 0.15 \\ -2.74x_1 - 0.78x_2 + 0.48x_3 = -7.39 \\ 0.75x_1 - 0.35x_2 + 1.16x_3 = 2.39 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 1.41x_1 + 2.75x_2 - 1.23x_3 = 3.80 \\ -0.52x_1 + 0.83x_2 + 0.76x_3 = 0.22 \\ 1.17x_1 - 0.18x_2 + 0.63x_3 = 2.33 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} -2.24x_1 + 3.25x_2 - 1.42x_3 = 2.79 \\ 0.17x_1 - 2.74x_2 + 1.07x_3 = -3.97 \\ 1.18x_1 + 0.95x_2 + 2.18x_3 = 3.11 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 1.83x_1 - 1.26x_2 + 3.18x_3 = 2.24 \\ 0.87x_1 - 0.82x_2 + 1.24x_3 = 0.65 \\ -1.13x_1 + 0.79x_2 + 1.56x_3 = 0.92 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 4.25x_1 - 1.48x_2 + 1.74x_3 = 6.01 \\ 0.68x_1 - 2.93x_2 + 2.24x_3 = 0.88 \\ 1.35x_1 + 2.16x_2 + 1.53x_3 = 6.23 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 1.35x_1 - 1.44x_2 + 0.88x_3 = 0.89 \\ 2.01x_1 - 2.45x_2 + 0.62x_3 = -0.62 \\ -0.77x_1 + 2.16x_2 + 1.34x_3 = 5.47 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} -1.54x_1 + 3.02x_2 + 4.90x_3 = 0.73 \\ -0.67x_1 - 0.84x_2 + 2.53x_3 = 0.44 \\ 2.13x_1 - 2.12x_2 + 1.32x_3 = 0.57 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 0.96x_1 - 0.74x_2 + 0.46x_3 = 0.10 \\ -0.23x_1 + 1.71x_2 + 0.18x_3 = 2.16 \\ 0.81x_1 + 1.13x_2 - 2.13x_3 = -2.08 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2.18x_1 - 1.351x_2 + 0.93x_3 = -1.13 \\ 0.72x_1 - 1.38x_2 + 0.88x_3 = -1.62 \\ 1.87x_1 + 2.27x_2 - 1.62x_3 = 3.41 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2.94x_1 - 1.36x_2 + 1.17x_3 = 8.86 \\ 1.86x_1 - 1.27x_2 + 0.87x_3 = 5.27 \\ 1.21x_1 + 0.87x_2 - 1.55x_3 = 3.26 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 1.42x_1 + 0.64x_2 - 1.23x_3 = 3.50 \\ 1.73x_1 - 2.47x_2 + 1.75x_3 = -3.05 \\ -2.18x_1 + 2.86x_2 - 0.18x_3 = 4.97 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 0.64x_1 + 1.23x_2 - 0.77x_3 = 2.69 \\ 2.74x_1 + 2.16x_2 - 1.11x_3 = 8.34 \\ 0.84x_1 + 0.67x_2 + 2.23x_3 = 4.96 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3.21x_1 - 4.14x_2 + 0.25x_3 = -12.12 \\ -1.04x_1 + 2.21x_2 - 0.55x_3 = 4.27 \\ 0.13x_1 - 2.12x_2 + 3.18x_3 = -1.45 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 0.23x_1 - 0.74x_2 + 0.15x_3 = -0.04 \\ 0.92x_1 + 0.43x_2 - 1.24x_3 = 0.27 \\ 0.54x_1 + 1.16x_2 - 2.15x_3 = -0.73 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} -1.01x_1 + 2.12x_2 + 3.54x_3 = 6.98 \\ 0.47x_1 - 0.75x_2 + 1.25x_3 = 0.67 \\ 0.16x_1 + 0.59x_2 - 1.66x_3 = -0.07 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 2.14x_1 - 1.71x_2 + 1.22x_3 = 1.14 \\ -0.72x_1 + 1.50x_2 + 0.37x_3 = 2.67 \\ 2.34x_1 - 0.41x_2 + 3.41x_3 = 7.06 \end{cases}$$

20.
$$\begin{cases} 0.57x_1 - 3.42x_2 + 1.24x_3 = 1.02 \\ 0.72x_1 - 0.85x_2 + 1.12x_3 = 2.83 \\ 2.07x_1 - 1.44x_2 + 0.98x_3 = 4.06 \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} 0.77x_1 + 3.75x_2 - 0.85x_3 = 6.66 \\ -2.16x_1 + 3.01x_2 + 1.08x_3 = 3.55 \\ 1.07x_1 + 1.12x_2 - 1.27x_3 = 2.35 \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} 0.76x_1 + 1.17x_2 - 0.74x_3 = 2.61 \\ -0.16x_1 - 0.83x_2 + 3.12x_3 = 0.45 \\ 0.67x_1 + 1.84x_2 - 2.11x_3 = 3.25 \end{cases}$$
23.
$$\begin{cases} 2.13x_1 + 1.17x_2 - 2.54x_3 = 7.02 \\ 3.03x_1 - 0.54x_2 + 1.17x_3 = 8.32 \\ 1.25x_1 + 0.31x_2 + 1.58x_3 = 5.71 \end{cases}$$
24.
$$\begin{cases} 3.21x_1 - 3.23x_2 + 0.83x_3 = 2.34 \\ 1.42x_1 - 0.94x_2 + 3.18x_3 = 5.84 \\ 0.71x_1 + 1.15x_2 - 0.74x_3 = 0.66 \end{cases}$$
25.
$$\begin{cases} 1.94x_1 - 0.74x_2 + 0.64x_3 = 4.17 \\ 0.61x_1 + 0.66x_2 - 0.53x_3 = 2.03 \\ 1.09x_1 - 0.96x_2 + 1.12x_3 = 2.05 \\ 1.55x_1 + 2.01x_2 - 2.07x_3 = 0.44 \\ 0.53x_1 + 1.18x_2 - 0.88x_3 = 0.51 \\ 2.12x_1 - 0.34x_2 + 0.83x_3 = 6.49 \end{cases}$$
26.
$$\begin{cases} 0.28 - 0.73x_2 + 0.71x_3 = 0.06 \\ 1.14x_1 - 0.62x_2 - 1.72x_3 = 0.71 \\ 0.73x_1 - 1.25x_2 + 0.14x_3 = 0.01 \end{cases}$$
27.
$$\begin{cases} 3.04x_1 + 0.47x_2 - 1.32x_3 = 6.38 \\ 0.86x_1 - 0.88x_2 + 0.38x_3 = 1.26 \\ 0.17x_1 + 1.72x_2 - 0.75x_3 = 1.90 \end{cases}$$
28.
$$\begin{cases} 0.63x_1 - 3.44x_2 + 1.27x_3 = -0.74 \\ 1.16x_1 - 2.03x_2 - 3.02x_3 = 0.02 \\ 1.07x_1 + 0.54x_2 - 1.12x_3 = 1.53 \end{cases}$$
29.
$$\begin{cases} 0.45x_1 + 2.44x_2 - 1.58x_3 = 3.90 \\ -0.18x_1 + 3.18x_2 + 1.72x_3 = 9.17 \\ 1.45x_1 + 0.66x_2 - 3.01x_3 = -0.99 \end{cases}$$

3.8. КОРИ МУСТАҚИЛОНАИ №1

Намунаи иҷрои супоришҳо

Системаи муодилаҳо бо методи Гаусс, бо аниқии то 0.001, ҳал карда шавад.

$$\begin{cases} 0.68x_1 + 0.05x_2 - 0.11x_3 + 0.08x_4 = 2.15 \\ 0.21x_1 - 0.13x_2 + 0.27x_3 - 0.8x_4 = 0.44 \\ -0.11x_1 - 0.84x_2 + 0.28x_3 + 0.06x_4 = -0.83 \\ -0.08x_1 + 0.15x_2 - 0.5x_3 - 0.12x_4 = 1.16 \end{cases}$$

Ҳал. Аз рӯи схемаи тақсими ягона ҳисобкуниҳоро оғоз мекунем. Ҳамаи мақсад қадвали зеринро тартиб медиҳем

x_1	x_2	x_3	x_4	Аъзон озод
0.68	0.05	-0.11	0.08	2.15
0.21	-0.13	0.27	-0.8	0.44
-0.11	-0.84	0.28	0.06	-0.83
-0.08	0.15	-0.5	-0.12	1.16
1	0.0735	-0.1618	0.1176	3.1618
	-0.1454	0.30398	-0.8247	-0.22398
	-0.8319	0.2622	0.0729	-0.4822
	0.1559	-0.5129	-0.1106	1.4129
	1	-2.0906	5.6719	1.5404
		-1.47697	4.79139	0.7992
		-0.18697	-0.9948	1.1723
	1		-3.2441	-0.5411
			-1.6013	1.0711
			1	-0.6689

Мо шакли секунҷаи системаи муодилаҳоро ҳосил кардем, яъне

$$\begin{cases} x_1 + 0.0735x_2 - 0.1618x_3 + 0.1176x_4 = 3.1618 \\ x_2 - 2.0906x_3 + 5.6719x_4 = 1.5404 \\ x_3 - 3.2441x_4 = -0.5411 \\ x_4 = -0.6689 \end{cases} \quad (**)$$

Акнун амали чапиро истифода бурда, номаълумҳои x_1, x_2, x_3, x_4 — ро меёбем.

Ба муодилаи сеюми системи (**) қимати $x_4 = -0.6689$ — ро гузошта, решаи x_3 — ро меёбем,

$$x_3 = -0.5411 + 3.2441x_4 = -0.5411 + 3.2441 \cdot (-0.6689) = -2.711.$$

Айнан хамин тавр,

$$\begin{aligned} x_2 &= 1.5404 + 2.0906x_3 - 5.6719x_4 = 1.5404 + 2.0906 \cdot (-2.711) - 5.6719 \cdot (-0.6689) = -0.334; \\ x_1 &= 3.1618 - 0.0735x_2 + 0.1618x_3 - 0.1176x_4 = 3.1618 - 0.0735 \cdot (-0.334) + 0.1618 \cdot (-2.711) - 0.1176 \cdot (-0.6689) = 2.826. \end{aligned}$$

Цавоб: $x_1 = 2.826$; $x_2 = -0.334$; $x_3 = -2.711$; $x_4 = -0.6689$

Вариантҳои супоришҳо

Супориш. Систекаи муодилаҳо бо методи Гаусс, бо аниқии 0.001, ҳал карда шавад.

1.
$$\begin{cases} 0.53x_1 + 0.95x_2 - 1.17x_3 + 1.5x_4 = 3.56 \\ 1.63x_1 - 1.56x_2 + 1.87x_3 + 0.9x_4 = 7.40 \\ -0.65x_1 + 2.12x_2 + 0.7x_3 - 0.25x_4 = -0.38 \\ 2.56x_1 - 1.76x_2 + 0.12x_3 + 0.65x_4 = 3.52 \\ 1.83x_1 + 1.12x_2 + 2.22x_3 + 1.5x_4 = 3.35 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} -0.24x_1 + 1.17x_2 + 1.01x_3 + 0.9x_4 = 1.05 \\ 0.81x_1 + 0.67x_2 + 0.54x_3 - 0.25x_4 = 4.25 \\ 0.34x_1 + 2.04x_2 - 2.25x_3 + 0.65x_4 = 5.30 \\ 1.27x_1 - 0.55x_2 + 2.04x_3 + 1.5x_4 = 2.74 \\ -1.76x_1 + 2.67x_2 - 3.67x_3 + 0.9x_4 = -1.99 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} 2.45x_1 - 1.01x_2 + 1.12x_3 - 0.25x_4 = 0.02 \\ 0.34x_1 + 2.04x_2 - 2.25x_3 + 0.65x_4 = 0.16 \\ 1.37x_1 - 1.71x_2 + 0.43x_3 - 3.35x_4 = 1.01 \\ 0.51x_1 - 2.12x_2 + 0.18x_3 + 0.01x_4 = 3.96 \\ 1.72x_1 + 1.83x_2 - 3.21x_3 + 4.18x_4 = 0.49 \\ 2.21x_1 + 3.05x_2 - 0.76x_3 + 1.62x_4 = -1.45 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} 2.06x_1 - 1.08x_2 - 2.11x_3 + 3.1x_4 = 1.16 \\ 0.49x_1 - 0.47x_2 + 1.43x_3 + 1.36x_4 = 5.67 \\ 1.63x_1 + 1.19x_2 - 2.18x_3 + 2.58x_4 = 2.94 \\ 4.21x_1 - 3.05x_2 + 0.32x_3 + 0.45x_4 = 0.86 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.14x_1 - 1.13x_2 + 0.28x_3 + 0.11x_4 = -2.19 \\ 1.44x_1 + 1.25x_2 + 0.17x_3 + 1.27x_4 = 4.70 \\ 0.17x_1 + 1.44x_2 - 3.71x_3 + 5.63x_4 = 3.76 \\ 2.96x_1 + 2.11x_2 + 1.18x_3 + 0.54x_4 = 8.38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.93x_1 + 2.15x_2 - 0.46x_3 + 1.54x_4 = 3.03 \\ 1.42x_1 - 1.16x_2 + 1.19x_3 - 2.18x_4 = -0.92 \\ 2.13x_1 + 1.74x_2 + 0.68x_3 + 1.25x_4 = 6.57 \\ 1.27x_1 - 1.29x_2 + 2.05x_3 + 0.18x_4 = 7.66 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.98x_1 - 4.52x_2 + 0.13x_3 + 1.98x_4 = -1.71 \\ 0.17x_1 + 0.09x_2 - 0.11x_3 + 0.68x_4 = 1.03 \\ 1.22x_1 - 2.18x_2 + 1.59x_3 + 1.16x_4 = 2.61 \\ 2.76x_1 + 1.15x_2 + 3.08x_3 + 2.08x_4 = 11.14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.16x_1 + 0.46x_2 - 0.76x_3 + 1.51x_4 = 1.61 \\ 2.18x_1 - 1.07x_2 + 1.71x_3 - 3.75x_4 = 4.49 \\ 0.84x_1 + 2.64x_2 - 0.46x_3 + 0.45x_4 = 2.40 \\ 1.32x_1 - 1.86x_2 + 2.15x_3 + 2.08x_4 = 8.78 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.24x_1 + 0.12x_2 + 4.63x_3 + 1.17x_4 = 7.25 \\ 0.17x_1 - 3.45x_2 + 1.53x_3 + 2.44x_4 = -2.67 \\ 1.11x_1 + 0.25x_2 + 1.06x_3 - 3.76x_4 = 0.75 \\ 2.32x_1 - 1.98x_2 + 2.09x_3 + 0.65x_4 = 1.08 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.53x_1 + 0.95x_2 - 1.17x_3 + 0.31x_4 = -0.87 \\ 1.63x_1 - 1.56x_2 + 1.87x_3 + 0.81x_4 = 2.99 \\ 0.65x_1 + 2.12x_2 + 0.7x_3 + 2.73x_4 = 4.45 \\ 1.17x_1 + 1.67x_2 + 1.07x_3 + 1.19x_4 = 4.95 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.63x_1 + 2.19x_2 - 3.14x_3 + 0.37x_4 = 7.44 \\ 2.56x_1 - 0.67x_2 + 0.77x_3 + 0.11x_4 = 3.94 \\ 0.35x_1 + 1.16x_2 + 2.39x_3 + 0.55x_4 = 5.45 \\ 0.98x_1 - 5.11x_2 + 1.16x_3 + 1.32x_4 = -4.09 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2.33x_1 - 1.72x_2 + 0.68x_3 - 2.19x_4 = -2.16 \\ 1.88x_1 - 0.79x_2 + 1.83x_3 + 1.47x_4 = 7.35 \\ 3.23x_1 + 0.54x_2 - 0.67x_3 + 1.6x_4 = 6.19 \\ 1.23x_1 + 1.08x_2 - 0.56x_3 + 2.13x_4 = 5.65 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 1.42x_1 - 0.96x_2 + 0.65x_3 + 1.18x_4 = -2.16 \\ 0.67x_1 + 2.23x_2 + 0.18x_3 - 0.89x_4 = 2.32 \\ 1.45x_1 + 0.09x_2 - 1.32x_3 + 2.34x_4 = 1.09 \\ 1.32x_1 + 1.08x_2 - 1.21x_3 + 0.78x_4 = 1.15 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 0.18x_1 - 2.25x_2 + 1.72x_3 + 1.23x_4 = 5.32 \\ 0.43x_1 + 1.73x_2 - 3.27x_3 + 1.33x_4 = -4.57 \\ 1.79x_1 - 0.83x_2 + 1.87x_3 + 0.26x_4 = 6.15 \\ 1.81x_1 + 1.17x_2 - 0.17x_3 + 2.18x_4 = 6.97 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 0.24x_1 - 1.51x_2 + 1.23x_3 + 0.34x_4 = 1.12 \\ 0.16x_1 + 3.13x_2 + 1.62x_3 - 1.64x_4 = -0.21 \\ 1.15x_1 - 2.18x_2 + 0.21x_3 + 1.07x_4 = 2.37 \\ 2.08x_1 + 0.98x_2 - 1.13x_3 + 2.08x_4 = 4.40 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2.18x_1 + 1.65x_2 - 2.27x_3 + 0.13x_4 = 2.45 \\ 1.12x_1 - 2.16x_2 + 0.46x_3 + 2.50x_4 = 4.30 \\ 1.17x_1 + 0.89x_2 - 1.05x_3 + 0.74x_4 = 2.89 \\ 2.04x_1 + 1.24x_2 + 0.23x_3 - 1.07x_4 = 0.99 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 0.78x_1 - 1.17x_2 + 1.86x_3 + 0.13x_4 = 2.45 \\ 1.87x_1 + 2.14x_2 - 1.23x_3 + 2.50x_4 = 4.30 \\ 0.65x_1 - 1.38x_2 + 2.12x_3 + 0.74x_4 = 2.89 \\ 0.18x_1 + 0.27x_2 + 1.16x_3 - 1.07x_4 = 0.99 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 1.28x_1 + 0.32x_2 - 2.49x_3 + 0.19x_4 = 1.64 \\ 1.33x_1 - 0.84x_2 + 1.07x_3 + 1.54x_4 = 4.49 \\ 0.72x_1 + 1.25x_2 + 0.44x_3 - 2.01x_4 = -2.60 \\ 2.07x_1 + 2.17x_2 - 0.65x_3 + 1.34x_4 = 5.07 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 0.18x_1 + 0.12x_2 - 1.45x_3 + 1.31x_4 = 2.95 \\ 1.01x_1 - 0.71x_2 + 1.13x_3 + 0.76x_4 = 3.32 \\ 0.11x_1 + 2.14x_2 - 0.35x_3 + 2.15x_4 = 5.96 \\ 2.32x_1 + 1.54x_2 + 1.67x_3 - 0.88x_4 = 2.31 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 1.76x_1 - 0.76x_2 + 2.15x_3 + 0.85x_4 = 5.13 \\ 2.44x_1 + 1.08x_2 - 0.57x_3 + 0.57x_4 = 2.49 \\ 0.53x_1 + 0.37x_2 + 1.48x_3 - 1.13x_4 = 2.42 \\ 0.65x_1 - 1.25x_2 + 0.87x_3 + 2.54x_4 = 2.35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2.01x_1 + 1.37x_2 - 1.14x_3 + 2.13x_4 = 4.95 \\ 0.28x_1 - 1.81x_2 + 2.09x_3 + 1.25x_4 = -0.50 \\ 0.15x_1 + 0.83x_2 + 1.35x_3 + 0.14x_4 = 1.21 \\ 1.87x_1 + 0.65x_2 + 0.76x_3 - 0.19x_4 = 1.18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.35x_1 - 1.53x_2 + 0.26x_3 + 1.33x_4 = 2.06 \\ 0.73x_1 + 0.68x_2 - 1.86x_3 + 1.11x_4 = 1.61 \\ 1.51x_1 + 0.89x_2 + 0.21 - 0.99x_4 = 1.82 \\ 2.04x_1 - 1.34x_2 + 1.27x_3 + 2.07x_4 = 4.42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.17x_1 + 0.45x_2 - 2.34x_3 + 0.55x_4 = -1.39 \\ 0.15x_1 - 2.13x_2 + 3.65x_3 + 0.76x_4 = 4.44 \\ 3.06x_1 + 0.65x_2 - 2.31x_3 + 1.34x_4 = 0.62 \\ 1.12x_1 + 1.21x_2 + 0.18x_3 - 0.59x_4 = 0.69 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.96x_1 - 2.56x_2 + 0.78x_3 + 1.04x_4 = 2.83 \\ 1.23x_1 + 0.32x_2 - 1.23x_3 + 0.39x_4 = 1.44 \\ 0.74x_1 + 1.81x_2 + 0.64x_3 - 2.67x_4 = -3.76 \\ 0.89x_1 - 1.73x_2 + 1.80x_3 + 0.71x_4 = 3.18 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 0.13x_1 + 1.09x_2 - 0.87x_3 + 1.53x_4 = 1.57 \\ 1.25x_1 - 2.06x_2 + 0.65x_3 + 0.85x_4 = 0.89 \\ 0.86x_1 + 1.43x_2 - 1.32x_3 + 2.11x_4 = 2.04 \\ 2.21x_1 + 0.67x_2 + 0.87x_3 - 1.13x_4 = 1.76 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 1.56x_1 - 2.14x_2 + 1.85x_3 + 0.47x_4 = 3.03 \\ 0.88x_1 + 1.62x_2 - 1.16x_3 + 0.98x_4 = 4.38 \\ 2.45x_1 + 0.18x_2 + 0.18x_3 - 3.16x_4 = -6.36 \\ 1.22x_1 - 3.15x_2 + 0.46x_3 + 1.19x_4 = 3.75 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 1.88x_1 + 1.12x_2 - 2.34x_3 + 0.78x_4 = -1.64 \\ 1.72x_1 - 3.03x_2 + 0.78x_3 + 1.19x_4 = 5.21 \\ 0.79x_1 + 1.05x_2 - 1.34x_3 + 0.89x_4 = 1.82 \\ 0.85x_1 + 1.48x_2 + 2.35x_3 - 0.87x_4 = 8.79 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 0.63x_1 - 1.56x_2 + 0.13x_3 + 1.47x_4 = -0.36 \\ 1.17x_1 + 0.85x_2 + 1.19x_3 - 1.27x_4 = 2.11 \\ 0.22x_1 + 2.65x_2 - 2.53x_3 + 0.79x_4 = 5.64 \\ 1.13x_1 - 0.87x_2 + 1.62x_3 + 0.58x_4 = 1.30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.63x_1 + 0.93x_2 - 2.15x_3 + 1.71x_4 = 5.29 \\ 0.28x_1 - 1.45x_2 + 0.42x_3 + 2.25x_4 = 3.25 \\ 1.27x_1 + 1.08x_2 - 2.76x_3 + 0.74x_4 = 3.07 \\ 0.98x_1 + 1.31x_2 + 0.73x_3 - 1.48x_4 = 0.86 \end{cases}$$

3.9. КОРИ МУСТАҚИЛОНАИ №2

Намунаи иҷрои супориш

Супориш. Методи итератсияро истифода бурда, системани муодилаҳои хаттӣ ҳал карда шавад

$$\begin{cases} 10.9x_1 + 1.2x_2 + 2.1x_3 + 0.9x_4 = -7.0 \\ 1.2x_1 + 11.2x_2 + 1.5x_3 + 2.5x_4 = 5.3 \\ 2.1x_1 + 1.5x_2 + 9.8x_3 + 1.3x_4 = 10.3 \\ 0.9x_1 + 2.5x_2 + 1.3x_3 + 12.1x_4 = 24.6 \end{cases} \quad (1)$$

Ҳал. Систекаи (1) – ро дар шакли матрисавӣ менависем $x = \beta +$ номаълуми x_1 тақсим мекунем, муодилаи дуюмро ба коэффисиенти назди назди x_2 , муодилаи сеюм ва чорумро мувофиқан ба коэффисиентҳои назди номаълумҳои x_3 ва x_4 тақсим намуда системани (1) – ро дар намуди зерин менависем

$$\begin{cases} x_1 = -0.6422 - 0.1101x_2 - 0.1927x_3 - 0.0826x_4 \\ x_2 = 0.4732 - 0.1071x_1 - 0.1339x_3 - 0.2232x_4 \\ x_3 = 1.0510 + 0.2039x_1 - 0.1456x_2 - 0.1262x_4 \\ x_4 = 2.0331 - 0.0366x_1 - 0.1016x_2 - 0.0528x_3 \end{cases} \quad (2)$$

Ба сифати наздиқуниҳои аввала сутуни аъзоҳои озоди системани (2) – ро интихоб мекунем

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} -0.6422 \\ 0.4732 \\ 1.0510 \\ 2.0331 \end{pmatrix}$$

Дар системани (2), ба ҷойҳои номаълумҳои x_1, x_2, x_3, x_4 қиматҳои наздиқуниҳои авваларо гузошта, ҳосил мекунем

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0.6422 - 0.1101 \cdot 0.4732 - 0.1927 \cdot 1.0510 - 0.0826 \cdot 2.0331 \\ x_2^{(1)} = 0.4732 - 0.1071 \cdot (-0.6422) - 0.1339 \cdot 1.0510 - 0.2232 \cdot 2.0331 \\ x_3^{(1)} = 1.0510 - 0.2039 \cdot (-0.6422) - 0.1456 \cdot 0.4732 - 0.1262 \cdot 2.0331 \\ x_4^{(1)} = 2.0331 - 0.0366 \cdot (-0.6422) - 0.1016 \cdot 0.4732 - 0.0528 \cdot 1.0510 \end{cases}$$

ва ғ

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0.6422 - 0.0521 - 0.2025 - 0.1679 = -1.0647 \\ x_2^{(1)} = 0.4732 + 0.0688 - 0.1407 - 0.4538 = -0.0525 \\ x_3^{(1)} = 1.0510 + 0.1309 - 0.0689 - 0.2566 = 0.8564 \\ x_4^{(1)} = 2.0331 + 0.0235 - 0.0481 - 0.0554 = 1.9531 \end{cases}$$

Амун ба сифати наздиқуниҳои дуюм қиматҳои сутуни $x_i^{(1)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) – ро қабул мекунем, яъне

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -1.0647 \\ -0.0525 \\ 0.8564 \\ 1.9531 \end{pmatrix}$$

ва онҳоро ба системани (2) гузошта, соҳиби наздиқуниҳои сеюм мегардем.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -0.6422 + 0.0058 - 0.1650 - 0.1613 = -0.9627 \\ x_2^{(2)} = 0.4732 + 0.1140 - 0.1147 - 0.4359 = 0.0366 \\ x_3^{(2)} = 1.0510 + 0.2171 + 0.0076 - 0.2465 = 1.0292 \\ x_4^{(2)} = 2.0331 + 0.0390 + 0.0053 - 0.0452 = 2.0322 \end{cases}$$

Амун сутуни қиматҳои $x_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) – ро ҳамчун наздиқуниҳои сеюм қабул карда, ҳосил мекунем

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.9627 \\ 0.0366 \\ 1.0292 \\ 2.0322 \end{pmatrix}$$

Ин ҷараёнро такрор карда, ба натиҷаи зерин мероем

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = -0.6422 - 0.0040 - 0.1927 - 0.1679 = -1.0068 \\ x_2^{(3)} = 0.4732 + 0.1031 - 0.1378 - 0.4536 = -0.0151 \\ x_3^{(3)} = 1.0510 - 0.1963 - 0.0053 - 0.2565 = 0.5929 \\ x_4^{(3)} = 2.0331 + 0.0352 - 0.0037 - 0.0543 = 2.0103 \end{cases}$$

Ҳинобар наздиқуниҳои чорум чунин мешавад

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} -1.0068 \\ -0.0151 \\ 0.5929 \\ 2.0103 \end{pmatrix}$$

Он гоҳ

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = -0,6422 + 0,0017 - 0,1143 - 0,1661 = -0,9209 \\ x_2^{(4)} = 0,4732 + 0,1031 - 0,0794 - 0,4487 = 0,0482 \\ x_3^{(4)} = 1,0510 + 0,2053 + 0,0022 - 0,2683 = 0,9902 \\ x_4^{(4)} = 2,0331 + 0,0368 + 0,0015 - 0,0313 = 2,0401 \end{cases}$$

Наздикунии минбаъда намуди зерин мегирад

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} -0,9209 \\ 0,0482 \\ 0,9902 \\ 2,0401 \end{pmatrix}.$$

Бинобар,

$$\begin{cases} x_1^{(5)} = -0,6422 - 0,0053 - 0,1908 - 0,1685 = -1,0068 \\ x_2^{(5)} = 0,4732 + 0,0986 - 0,1326 - 0,4554 = -0,0162 \\ x_3^{(5)} = 1,0510 + 0,1878 - 0,0070 - 0,2575 = 0,9743 \\ x_4^{(5)} = 2,0331 + 0,0337 - 0,0048 - 0,1077 = 1,9543 \end{cases}$$

Аз ин рӯ, қиматҳои наздикуниҳо чунин мешаванд

$$x^{(5)} = \begin{pmatrix} -1,0068 \\ -0,0162 \\ 0,9743 \\ 1,9543 \end{pmatrix}. \text{Аз ин ҷо,}$$

$$\begin{cases} x_1^{(6)} = -0,6422 + 0,0018 - 0,1877 - 0,1614 = -0,9895 \\ x_2^{(6)} = 0,4732 + 0,1078 - 0,1305 - 0,4361 = -0,0152 \\ x_3^{(6)} = 1,0510 + 0,1878 - 0,0070 - 0,2575 = 0,9743 \\ x_4^{(6)} = 2,0331 + 0,0337 - 0,0048 - 0,1077 = 1,9543 \end{cases}$$

Ба сифати решаҳои системаи муодилаҳои (1) қиматҳои наздикунии

$$x_1^{(6)} = -0,9895; x_2^{(6)} = -0,0162; x_3^{(6)} = 0,9743; x_4^{(6)} = 1,9543$$

қабул карда мешаванд.

Ҷавоб: $x_1^{(6)} = -0,9895; x_2^{(6)} = -0,0162; x_3^{(6)} = 0,9743; x_4^{(6)} = 1,9543$

Вариантҳои супоришҳо

Супориш. Методи итератсияро истифода бурда, системаи муодилаҳои хаттӣ ҳал карда шавад

1.
$$\begin{cases} 2,18x_1 + 1,65x_2 - 2,27x_3 + 0,13x_4 = 2,45 \\ 1,12x_1 - 2,16x_2 + 0,46x_3 + 2,50x_4 = 4,30 \\ 1,17x_1 + 0,89x_2 - 1,05x_3 + 0,74x_4 = 2,89 \\ 2,04x_1 + 1,24x_2 + 0,23x_3 - 1,07x_4 = 0,99 \\ 0,78x_1 - 1,17x_2 + 1,86x_3 + 0,13x_4 = 2,45 \\ 1,87x_1 + 2,14x_2 - 1,23x_3 + 2,50x_4 = 4,30 \\ 0,65x_1 - 1,38x_2 + 2,12x_3 + 0,74x_4 = 2,89 \\ 0,18x_1 + 0,27x_2 + 1,16x_3 - 1,07x_4 = 0,99 \\ 1,28x_1 + 0,32x_2 - 2,49x_3 + 0,19x_4 = 1,64 \\ 1,33x_1 - 0,84x_2 + 1,07x_3 + 1,54x_4 = 4,49 \\ 0,72x_1 + 1,25x_2 + 0,44x_3 - 2,01x_4 = -2,60 \\ 2,07x_1 + 2,17x_2 - 0,65x_3 + 1,34x_4 = 5,07 \\ 0,18x_1 + 0,12x_2 - 1,45x_3 + 1,81x_4 = 2,95 \\ 1,01x_1 - 0,71x_2 + 1,13x_3 + 0,76x_4 = 3,32 \\ 0,11x_1 + 2,14x_2 - 0,35x_3 + 2,15x_4 = 5,96 \\ 2,32x_1 + 1,54x_2 + 1,67x_3 - 0,88x_4 = 2,31 \\ 1,76x_1 - 0,76x_2 + 2,15x_3 + 0,85x_4 = 5,13 \\ 2,44x_1 + 1,08x_2 - 0,57x_3 + 0,57x_4 = 2,49 \\ 0,53x_1 + 0,37x_2 + 1,48x_3 - 1,13x_4 = 2,42 \\ 0,65x_1 - 1,25x_2 + 0,87x_3 + 2,54x_4 = 2,35 \\ 2,01x_1 + 1,37x_2 - 1,14x_3 + 2,13x_4 = 4,95 \\ 0,28x_1 - 1,81x_2 + 2,09x_3 + 1,25x_4 = -0,50 \\ 0,15x_1 + 0,83x_2 + 1,35x_3 + 0,14x_4 = 1,21 \\ 1,87x_1 + 0,65x_2 + 0,76x_3 - 0,19x_4 = 1,18 \\ 1,35x_1 - 1,53x_2 + 0,26x_3 + 1,33x_4 = 2,06 \\ 0,73x_1 + 0,68x_2 - 1,86x_3 + 1,11x_4 = 1,61 \\ 1,51x_1 + 0,89x_2 + 0,21 - 0,99x_4 = 1,82 \\ 2,04x_1 - 1,34x_2 + 1,27x_3 + 2,07x_4 = 4,42 \\ 1,17x_1 + 0,45x_2 - 2,34x_3 + 0,55x_4 = -1,39 \\ 0,15x_1 - 2,13x_2 + 3,65x_3 + 0,76x_4 = 4,44 \\ 3,06x_1 + 0,65x_2 - 2,31x_3 + 1,34x_4 = 0,62 \\ 1,12x_1 + 1,21x_2 + 0,18x_3 - 0,59x_4 = 0,69 \end{cases}$$
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.

$$\begin{aligned}
9. & \begin{cases} 0.96x_1 - 2.56x_2 + 0.78x_3 + 1.04x_4 = 2.83 \\ 1.23x_1 + 0.32x_2 - 1.23x_3 + 0.39x_4 = 1.44 \\ 0.74x_1 + 1.81x_2 + 0.64x_3 - 2.67x_4 = -3.76 \\ 0.89x_1 - 1.73x_2 + 1.80x_3 + 0.71x_4 = 3.18 \end{cases} \\
10. & \begin{cases} 0.13x_1 + 1.09x_2 - 0.87x_3 + 1.53x_4 = 1.57 \\ 1.25x_1 - 2.06x_2 + 0.65x_3 + 0.85x_4 = 0.89 \\ 0.86x_1 + 1.43x_2 - 1.32x_3 + 2.11x_4 = 2.04 \\ 2.21x_1 + 0.67x_2 + 0.87x_3 - 1.13x_4 = 1.76 \end{cases} \\
11. & \begin{cases} 1.56x_1 - 2.14x_2 + 1.85x_3 + 0.47x_4 = 3.03 \\ 0.88x_1 + 1.62x_2 - 1.16x_3 + 0.98x_4 = 4.38 \\ 2.45x_1 + 0.18x_2 + 0.18x_3 - 3.16x_4 = -6.36 \\ 1.22x_1 - 3.15x_2 + 0.46x_3 + 1.19x_4 = 3.75 \end{cases} \\
12. & \begin{cases} 1.88x_1 + 1.12x_2 - 2.34x_3 + 0.78x_4 = -1.64 \\ 1.72x_1 - 3.08x_2 + 0.78x_3 + 1.19x_4 = 5.21 \\ 0.79x_1 + 1.05x_2 - 1.34x_3 + 0.89x_4 = 1.82 \\ 0.85x_1 + 1.48x_2 + 2.35x_3 - 0.87x_4 = 8.79 \end{cases} \\
13. & \begin{cases} 0.63x_1 - 1.56x_2 + 0.13x_3 + 1.47x_4 = -0.36 \\ 1.17x_1 + 0.85x_2 + 1.19x_3 - 1.27x_4 = 2.11 \\ 0.22x_1 + 2.65x_2 - 2.53x_3 + 0.79x_4 = 5.64 \\ 1.13x_1 - 0.87x_2 + 1.62x_3 + 0.58x_4 = 1.30 \end{cases} \\
14. & \begin{cases} 1.63x_1 + 0.93x_2 - 2.15x_3 + 1.71x_4 = 5.29 \\ 0.28x_1 - 1.45x_2 + 0.42x_3 + 2.25x_4 = 3.25 \\ 1.27x_1 + 1.08x_2 - 2.76x_3 + 0.74x_4 = 3.07 \\ 0.98x_1 + 1.31x_2 + 0.73x_3 - 1.48x_4 = 0.86 \end{cases} \\
15. & \begin{cases} 0.53x_1 + 0.95x_2 - 1.17x_3 + 1.5x_4 = 3.56 \\ 1.63x_1 - 1.56x_2 + 1.87x_3 + 0.9x_4 = 7.40 \\ -0.65x_1 + 2.12x_2 + 0.7x_3 - 0.25x_4 = -0.38 \\ 2.56x_1 - 1.76x_2 + 0.12x_3 + 0.65x_4 = 3.52 \end{cases} \\
16. & \begin{cases} 1.83x_1 + 1.12x_2 + 2.22x_3 + 1.5x_4 = 3.35 \\ -0.24x_1 + 1.17x_2 + 1.01x_3 + 0.9x_4 = 1.05 \\ 0.81x_1 + 0.67x_2 + 0.54x_3 - 0.25x_4 = 4.25 \\ 0.34x_1 + 2.04x_2 - 2.25x_3 + 0.65x_4 = 5.30 \end{cases} \\
17. & \begin{cases} 1.27x_1 - 0.55x_2 + 2.04x_3 + 1.5x_4 = 2.74 \\ -1.76x_1 + 2.67x_2 - 3.67x_3 + 0.9x_4 = -1.99 \\ 2.45x_1 - 1.01x_2 + 1.12x_3 - 0.25x_4 = 0.02 \\ 0.34x_1 + 2.04x_2 - 2.25x_3 + 0.65x_4 = 0.16 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
18. & \begin{cases} 1.37x_1 - 1.71x_2 + 0.43x_3 - 3.35x_4 = 1.01 \\ 0.51x_1 - 2.12x_2 + 0.18x_3 + 0.01x_4 = 3.96 \\ 1.72x_1 + 1.83x_2 - 3.21x_3 + 4.18x_4 = 0.49 \\ 2.21x_1 + 3.05x_2 - 0.76x_3 + 1.62x_4 = -1.45 \end{cases} \\
19. & \begin{cases} 2.06x_1 - 1.08x_2 - 2.11x_3 + 3.1x_4 = 1.16 \\ 0.49x_1 - 0.47x_2 + 1.43x_3 + 1.36x_4 = 5.67 \\ 1.63x_1 + 1.19x_2 - 2.18x_3 + 2.58x_4 = 2.94 \\ 4.21x_1 - 3.05x_2 + 0.32x_3 + 0.45x_4 = 0.86 \end{cases} \\
20. & \begin{cases} 0.14x_1 - 1.13x_2 + 0.28x_3 + 0.11x_4 = -2.19 \\ 1.44x_1 + 1.25x_2 + 0.17x_3 + 1.27x_4 = 4.70 \\ 0.17x_1 + 1.44x_2 - 3.71x_3 + 5.63x_4 = 3.76 \\ 2.96x_1 + 2.11x_2 + 1.18x_3 + 0.54x_4 = 8.38 \end{cases} \\
21. & \begin{cases} 0.93x_1 + 2.15x_2 - 0.46x_3 + 1.54x_4 = 3.03 \\ 1.42x_1 - 1.16x_2 + 1.19x_3 - 2.18x_4 = -0.92 \\ 2.13x_1 + 1.74x_2 + 0.68x_3 + 1.25x_4 = 6.57 \\ 1.27x_1 - 1.29x_2 + 2.05x_3 + 0.18x_4 = 7.66 \end{cases} \\
22. & \begin{cases} 0.98x_1 - 4.52x_2 + 0.13x_3 + 1.98x_4 = -1.71 \\ 0.17x_1 + 0.09x_2 - 0.11x_3 + 0.68x_4 = 1.03 \\ 1.22x_1 - 2.18x_2 + 1.59x_3 + 1.16x_4 = 2.61 \\ 2.76x_1 + 1.15x_2 + 3.08x_3 + 2.08x_4 = 11.14 \end{cases} \\
23. & \begin{cases} 1.16x_1 + 0.46x_2 - 0.76x_3 + 1.51x_4 = 1.61 \\ 2.18x_1 - 1.07x_2 + 1.71x_3 - 3.75x_4 = 4.49 \\ 0.84x_1 + 2.64x_2 - 0.46x_3 + 0.45x_4 = 2.40 \\ 1.32x_1 - 1.86x_2 + 2.15x_3 + 2.08x_4 = 8.78 \end{cases} \\
24. & \begin{cases} 1.24x_1 + 0.17x_2 + 4.63x_3 + 1.17x_4 = 7.25 \\ 0.17x_1 - 3.45x_2 + 1.53x_3 + 2.44x_4 = -2.67 \\ 1.11x_1 + 0.25x_2 + 1.06x_3 - 3.76x_4 = 0.75 \\ 2.32x_1 - 1.98x_2 + 2.09x_3 + 0.65x_4 = 1.08 \end{cases} \\
25. & \begin{cases} 0.53x_1 + 0.95x_2 - 1.17x_3 + 0.31x_4 = -0.87 \\ 1.63x_1 - 1.56x_2 + 1.87x_3 + 0.81x_4 = 2.99 \\ 0.65x_1 + 2.12x_2 + 0.7x_3 + 2.73x_4 = 4.45 \\ 1.17x_1 + 1.67x_2 + 1.07x_3 + 1.19x_4 = 4.95 \end{cases} \\
26. & \begin{cases} 1.63x_1 + 2.19x_2 - 3.14x_3 + 0.37x_4 = 7.44 \\ 2.56x_1 - 0.67x_2 + 0.77x_3 + 0.11x_4 = 3.94 \\ 0.35x_1 + 1.16x_2 + 2.39x_3 + 0.55x_4 = 5.45 \\ 0.98x_1 - 5.11x_2 + 1.16x_3 + 1.32x_4 = -4.09 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
27. \quad & \begin{cases} 2.33x_1 - 1.72x_2 + 0.68x_3 - 2.19x_4 = -2.16 \\ 1.88x_1 - 0.79x_2 + 1.83x_3 + 1.47x_4 = 7.35 \\ 3.23x_1 + 0.54x_2 - 0.67x_3 + 1.6x_4 = 6.19 \\ 1.23x_1 + 1.08x_2 - 0.56x_3 + 2.13x_4 = 5.65 \\ 1.42x_1 - 0.96x_2 + 0.65x_3 + 1.18x_4 = -2.16 \\ 0.67x_1 + 2.23x_2 + 0.18x_3 - 0.89x_4 = 2.32 \\ 1.45x_1 + 0.09x_2 - 1.32x_3 + 2.34x_4 = 1.09 \\ 1.32x_1 + 1.08x_2 - 1.21x_3 + 0.78x_4 = 1.15 \\ 0.18x_1 - 2.25x_2 + 1.72x_3 + 1.23x_4 = 5.32 \end{cases} \\
28. \quad & \begin{cases} 0.43x_1 + 1.73x_2 - 3.27x_3 + 1.33x_4 = -4.57 \\ 1.79x_1 - 0.83x_2 + 1.87x_3 + 0.26x_4 = 6.15 \\ 1.81x_1 + 1.17x_2 - 0.17x_3 + 2.18x_4 = 6.97 \\ 0.24 - 1.51x_2 + 1.23x_3 + 0.34x_4 = 1.12 \end{cases} \\
30. \quad & \begin{cases} 0.16x_1 + 3.13x_2 + 1.62x_3 - 1.64x_4 = -0.21 \\ 1.15x_1 - 2.18x_2 + 0.21x_3 + 1.07x_4 = 2.37 \\ 2.08x_1 + 0.98x_2 - 1.13x_3 + 2.08x_4 = 4.40 \end{cases}
\end{aligned}$$

3.10. КОРИ МУСТАҚИЛОНАИ №3

Намунаи иҷрои супориш

Супориш. Бо истифодаи методи Зейдел системаи муодилаҳо ҳал карда шаванд

$$\begin{cases} 10.9x_1 + 1.2x_2 + 2.1x_3 + 0.9x_4 = -7.0 \\ 1.2x_1 + 11.2x_2 + 1.5x_3 + 2.5x_4 = 5.3 \\ 2.1x_1 + 1.5x_2 + 9.8x_3 + 1.3x_4 = 10.3 \\ 0.9x_1 + 2.5x_2 + 1.3x_3 + 12.1x_4 = 24.6. \end{cases} \quad (*)$$

Ҳал. Системаи (*) - ро дар шакли матриса ӣй менависем $x = \beta + \mu\alpha$. Бо ин мақсад муодилаҳои якум, дуҷум, сеҷум ва чоруми системаро мувофиқан ба коэффисиентҳои назди номаълумҳои x_1, x_2, x_3, x_4 тақсим намуда, ҳосил мекунем

$$\begin{cases} x_1 = -0.6422 - 0.1101x_2 - 0.1927x_3 - 0.0826x_4 \\ x_2 = 0.4732 - 0.1071x_1 - 0.1339x_3 - 0.2232x_4 \\ x_3 = 1.0510 + 0.2039x_1 - 0.1456x_2 - 0.1262x_4 \\ x_4 = 2.0331 - 0.0366x_1 - 0.1016x_2 - 0.0528x_3. \end{cases}$$

Ба сифати наздиққунии ноли сутуни аъзоҳои озодро интиҳоб мекунем

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} -0.6422 \\ 0.4732 \\ 1.0510 \\ 2.0331 \end{pmatrix}.$$

Он гоҳ наздиққунии якумро ба намуни зерин тасвир мекунем

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0.6422 - 0.0521 - 0.2025 - 0.1679 = -1.0647 \\ x_2^{(1)} = 0.4732 + 0.0688 - 0.1407 - 0.4538 = -0.0525 \\ x_3^{(1)} = 1.0510 + 0.1309 - 0.0689 - 0.2566 = 0.8564 \\ x_4^{(1)} = 2.0331 + 0.0235 - 0.0481 - 0.0554 = 1.9531. \end{cases}$$

Барои ёфтани наздиққуниҳои минбаъда аз схемаи Зейдел бо истифода мебарем.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -0.6422 + 0.1101 \cdot 0.0525 - 0.1927 \cdot 0.8564 - 0.0826 \cdot 1.9531 \\ x_2^{(2)} = 0.4732 + 0.1071 \cdot 1.0647 - 0.1339 \cdot 0.8564 - 0.2232 \cdot 1.9531 \\ x_3^{(2)} = 1.0510 + 0.2039 \cdot 1.0647 + 0.1456 \cdot 0.0525 - 0.1262 \cdot 1.9531 \\ x_4^{(2)} = 2.0331 + 0.0366 \cdot 1.0647 + 0.1016 \cdot 0.0525 - 0.0528 \cdot 0.8564. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, наздиққунии дуҷумро меёбем:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1.0035 \\ -0.0031 \\ 1.00042 \\ 2.0008 \end{pmatrix}.$$

Барои ёфтани наздиққунии сеҷум $x^{(3)}$, ҳосил мекунем

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = -0.6422 + 0.1101 \cdot (-0.0031) - 0.1927 \cdot 1.00042 - 0.0826 \cdot 2.0008 \\ x_2^{(3)} = 0.4732 + 0.1071 \cdot 1.0035 - 0.1339 \cdot 1.00042 - 0.2232 \cdot 2.0008 \\ x_3^{(3)} = 1.0510 + 0.2039 \cdot 1.0035 + 0.1456 \cdot 0.0031 - 0.1262 \cdot 2.0008 \\ x_4^{(3)} = 2.0331 + 0.0366 \cdot 1.0035 + 0.1016 \cdot 0.0031 - 0.0528 \cdot 1.00042. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, наздиққунии сеҷум намуни зерин мегирад

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.9998 \\ -0.0002 \\ 0.9998 \\ 2.0000 \end{pmatrix}.$$

Ҳамин тавр, ба сифати ҳамаи муодилаҳои системаи (*) наздиққуниҳои сеҷум қабул карда мешаванд.

Ҷавоб: $x_1 = -0.9998$; $x_2 = -0.0002$; $x_3 = 0.9998$; $x_4 = 2.0000$.

Вариантҳои супоришҳо

Задания. Бо истифодаи методи Зейдел ҳамаи муодилаҳои система ёфта шаванд.

$$\begin{array}{ll}
1. & \left\{ \begin{array}{l} 2.01x_1 + 1.37x_2 - 1.14x_3 + 2.13x_4 = 4.95 \\ 0.28x_1 - 1.81x_2 + 2.09x_3 + 1.25x_4 = -0.50 \\ 0.15x_1 + 0.83x_2 + 1.35x_3 + 0.14x_4 = 1.21 \\ 1.87x_1 + 0.65x_2 + 0.76x_3 - 0.19x_4 = 1.18 \\ 1.35x_1 - 1.53x_2 + 0.26x_3 + 1.33x_4 = 2.06 \\ 0.73x_1 + 0.68x_2 - 1.86x_3 + 1.11x_4 = 1.61 \\ 1.51x_1 + 0.89x_2 + 0.21 - 0.99x_4 = 1.82 \end{array} \right. \\
2. & \left\{ \begin{array}{l} 2.04x_1 - 1.34x_2 + 1.27x_3 + 2.07x_4 = 4.42 \\ 1.17x_1 + 0.45x_2 - 2.34x_3 + 0.55x_4 = -1.39 \\ 0.15x_1 - 2.13x_2 + 3.65x_3 + 0.76x_4 = 4.44 \\ 3.06x_1 + 0.65x_2 - 2.31x_3 + 1.34x_4 = 0.62 \\ 1.12x_1 + 1.21x_2 + 0.18x_3 - 0.59x_4 = 0.69 \\ 0.96x_1 - 2.56x_2 + 0.78x_3 + 1.04x_4 = 2.83 \\ 1.23x_1 + 0.32x_2 - 1.23x_3 + 0.39x_4 = 1.44 \\ 0.74x_1 + 1.81x_2 + 0.64x_3 - 2.67x_4 = -3.76 \\ 0.89x_1 - 1.73x_2 + 1.80x_3 + 0.71x_4 = 3.18 \\ 0.13x_1 + 1.09x_2 - 0.87x_3 + 1.53x_4 = 1.57 \\ 1.25x_1 - 2.06x_2 + 0.65x_3 + 0.85x_4 = 0.89 \\ 0.86x_1 + 1.43x_2 - 1.32x_3 + 2.11x_4 = 2.04 \\ 2.21x_1 + 0.67x_2 + 0.87x_3 - 1.13x_4 = 1.76 \\ 1.56x_1 - 2.14x_2 + 1.85x_3 + 0.47x_4 = 3.03 \\ 0.88x_1 + 1.62x_2 - 1.16x_3 + 0.98x_4 = 4.38 \\ 2.45x_1 + 0.18x_2 + 0.18x_3 - 3.16x_4 = -6.36 \\ 1.22x_1 - 3.15x_2 + 0.46x_3 + 1.19x_4 = 3.75 \\ 1.88x_1 + 1.12x_2 - 2.34x_3 + 0.78x_4 = -1.64 \\ 1.72x_1 - 3.08x_2 + 0.78x_3 + 1.19x_4 = 5.21 \\ 0.79x_1 + 1.05x_2 - 1.34x_3 + 0.89x_4 = 1.82 \\ 0.85x_1 + 1.48x_2 + 2.35x_3 - 0.87x_4 = 8.79 \\ 0.63x_1 - 1.56x_2 + 0.13x_3 + 1.47x_4 = -0.36 \\ 1.17x_1 + 0.85x_2 + 1.19x_3 - 1.27x_4 = 2.11 \\ 0.22x_1 + 2.65x_2 - 2.53x_3 + 0.79x_4 = 5.64 \\ 1.13x_1 - 0.87x_2 + 1.62x_3 + 0.58x_4 = 1.30 \\ 1.63x_1 + 0.93x_2 - 2.15x_3 + 1.71x_4 = 5.29 \\ 0.28x_1 - 1.45x_2 + 0.42x_3 + 2.25x_4 = 3.25 \\ 1.27x_1 + 1.08x_2 - 2.76x_3 + 0.74x_4 = 3.07 \\ 0.98x_1 + 1.31x_2 + 0.73x_3 - 1.48x_4 = 0.86 \end{array} \right. \\
3. & \\
4. & \\
5. & \\
6. & \\
7. & \\
8. & \\
9. &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
10. & \begin{cases} 0.53x_1 + 0.95x_2 - 1.17x_3 + 1.5x_4 = 3.56 \\ 1.63x_1 - 1.56x_2 + 1.87x_3 + 0.9x_4 = 7.40 \\ -0.65x_1 + 2.12x_2 + 0.7x_3 - 0.25x_4 = -0.38 \\ 2.56x_1 - 1.76x_2 + 0.12x_3 + 0.65x_4 = 3.52 \\ 1.83x_1 + 1.12x_2 + 2.22x_3 + 1.5x_4 = 3.35 \end{cases} \\
11. & \begin{cases} -0.24x_1 + 1.17x_2 + 1.01x_3 + 0.9x_4 = 1.05 \\ 0.81x_1 + 0.67x_2 + 0.54x_3 - 0.25x_4 = 4.25 \\ 0.34x_1 + 2.04x_2 - 2.25x_3 + 0.65x_4 = 5.30 \\ 1.27x_1 - 0.55x_2 + 2.04x_3 + 1.5x_4 = 2.74 \\ -1.76x_1 + 2.67x_2 - 3.67x_3 + 0.9x_4 = -1.99 \end{cases} \\
12. & \begin{cases} 2.45x_1 - 1.01x_2 + 1.12x_3 - 0.25x_4 = 0.02 \\ 0.34x_1 + 2.04x_2 - 2.25x_3 + 0.65x_4 = 0.16 \\ 1.37x_1 - 1.71x_2 + 0.43x_3 - 3.35x_4 = 1.01 \\ 0.51x_1 - 2.12x_2 + 0.18x_3 + 0.01x_4 = 3.96 \\ 1.72x_1 + 1.83x_2 - 3.21x_3 + 4.18x_4 = 0.49 \end{cases} \\
13. & \begin{cases} 2.21x_1 + 3.05x_2 - 0.76x_3 + 1.62x_4 = -1.45 \\ 2.06x_1 - 1.08x_2 - 2.11x_3 + 3.1x_4 = 1.16 \\ 0.49x_1 - 0.47x_2 + 1.43x_3 + 1.36x_4 = 5.67 \\ 1.63x_1 + 1.19x_2 - 2.18x_3 + 2.58x_4 = 2.94 \\ 4.21x_1 - 3.05x_2 + 0.32x_3 + 0.45x_4 = 0.86 \end{cases} \\
14. & \begin{cases} 0.14x_1 - 1.13x_2 + 0.28x_3 + 0.11x_4 = -2.19 \\ 1.44x_1 + 1.25x_2 + 0.17x_3 + 1.27x_4 = 4.70 \\ 0.17x_1 + 1.44x_2 - 3.71x_3 + 5.63x_4 = 3.76 \\ 2.96x_1 + 2.11x_2 + 1.18x_3 + 0.54x_4 = 8.38 \\ 0.93x_1 + 2.15x_2 - 0.46x_3 + 1.54x_4 = 3.03 \end{cases} \\
15. & \begin{cases} 1.42x_1 - 1.16x_2 + 1.19x_3 - 2.18x_4 = -0.92 \\ 2.13x_1 + 1.74x_2 + 0.68x_3 + 1.25x_4 = 6.57 \\ 1.27x_1 - 1.29x_2 + 2.05x_3 + 0.18x_4 = 7.66 \\ 0.98x_1 - 4.52x_2 + 0.13x_3 + 1.98x_4 = -1.71 \\ 0.17x_1 + 0.09x_2 - 0.11x_3 + 0.68x_4 = 1.03 \end{cases} \\
16. & \begin{cases} 1.22x_1 - 2.18x_2 + 1.59x_3 + 1.16x_4 = 2.61 \\ 2.76x_1 + 1.15x_2 + 3.08x_3 + 2.08x_4 = 11.14 \\ 1.16x_1 + 0.46x_2 - 0.76x_3 + 1.51x_4 = 1.61 \\ 2.18x_1 - 1.07x_2 + 1.71x_3 - 3.75x_4 = 4.49 \\ 0.84x_1 + 2.64x_2 - 0.46x_3 + 0.45x_4 = 2.40 \\ 1.32x_1 - 1.86x_2 + 2.15x_3 + 2.08x_4 = 8.78 \end{cases} \\
17. & \\
18. &
\end{array}$$

19. $\begin{cases} 1.24x_1 + 0.12x_2 + 4.63x_3 + 1.17x_4 = 7.25 \\ 0.17x_1 - 3.45x_2 + 1.53x_3 + 2.44x_4 = -2.67 \\ 1.11x_1 + 0.25x_2 + 1.06x_3 - 3.76x_4 = 0.75 \\ 2.32x_1 - 1.98x_2 + 2.09x_3 + 0.65x_4 = 1.08 \end{cases}$
20. $\begin{cases} 0.53x_1 + 0.95x_2 - 1.17x_3 + 0.31x_4 = -0.87 \\ 1.63x_1 - 1.56x_2 + 1.87x_3 + 0.81x_4 = 2.99 \\ 0.65x_1 + 2.12x_2 + 0.7x_3 + 2.73x_4 = 4.45 \\ 1.17x_1 + 1.67x_2 + 1.07x_3 + 1.19x_4 = 4.95 \\ 1.63x_1 + 2.19x_2 - 3.14x_3 + 0.37x_4 = 7.44 \end{cases}$
21. $\begin{cases} 2.56x_1 - 0.67x_2 + 0.77x_3 + 0.11x_4 = 3.94 \\ 0.35x_1 + 1.16x_2 + 2.39x_3 + 0.55x_4 = 5.45 \\ 0.98x_1 - 5.11x_2 + 1.16x_3 + 1.32x_4 = -4.09 \\ 2.33x_1 - 1.72x_2 + 0.68x_3 - 2.19x_4 = -2.16 \end{cases}$
22. $\begin{cases} 1.88x_1 - 0.79x_2 + 1.83x_3 + 1.47x_4 = 7.35 \\ 3.23x_1 + 0.54x_2 - 0.67x_3 + 1.6x_4 = 6.19 \\ 1.23x_1 + 1.08x_2 - 0.56x_3 + 2.13x_4 = 5.65 \\ 1.42x_1 - 0.96x_2 + 0.65x_3 + 1.18x_4 = -2.16 \end{cases}$
23. $\begin{cases} 0.67x_1 + 2.23x_2 + 0.18x_3 - 0.89x_4 = 2.32 \\ 1.45x_1 + 0.09x_2 - 1.32x_3 + 2.34x_4 = 1.09 \\ 1.32x_1 + 1.08x_2 - 1.21x_3 + 0.78x_4 = 1.15 \\ 0.18x_1 - 2.25x_2 + 1.72x_3 + 1.23x_4 = 5.32 \end{cases}$
24. $\begin{cases} 0.43x_1 + 1.73x_2 - 3.27x_3 + 1.33x_4 = -4.57 \\ 1.79x_1 - 0.83x_2 + 1.87x_3 + 0.26x_4 = 6.15 \\ 1.81x_1 + 1.17x_2 - 0.17x_3 + 2.18x_4 = 6.97 \\ 0.24x_1 - 1.51x_2 + 1.23x_3 + 0.34x_4 = 1.12 \end{cases}$
25. $\begin{cases} 0.16x_1 + 3.13x_2 + 1.62x_3 - 1.64x_4 = -0.21 \\ 1.15x_1 - 2.18x_2 + 0.21x_3 + 1.07x_4 = 2.37 \\ 2.08x_1 + 0.98x_2 - 1.13x_3 + 2.08x_4 = 4.40 \\ 2.18x_1 + 1.65x_2 - 2.27x_3 + 0.13x_4 = 2.45 \end{cases}$
26. $\begin{cases} 1.12x_1 - 2.16x_2 + 0.46x_3 + 2.50x_4 = 4.30 \\ 1.17x_1 + 0.89x_2 - 1.05x_3 + 0.74x_4 = 2.89 \\ 2.04x_1 + 1.24x_2 + 0.23x_3 - 1.07x_4 = 0.99 \\ 0.78x_1 - 1.17x_2 + 1.86x_3 + 0.13x_4 = 2.45 \end{cases}$
27. $\begin{cases} 1.87x_1 + 2.14x_2 - 1.23x_3 + 2.50x_4 = 4.30 \\ 0.65x_1 - 1.38x_2 + 2.12x_3 + 0.74x_4 = 2.89 \\ 0.18x_1 + 0.27x_2 + 1.16x_3 - 1.07x_4 = 0.99 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 1.28x_1 + 0.32x_2 - 2.49x_3 + 0.19x_4 = 1.64 \\ 1.33x_1 - 0.84x_2 + 1.07x_3 + 1.54x_4 = 4.49 \\ 0.72x_1 + 1.25x_2 + 0.44x_3 - 2.01x_4 = -2.60 \\ 2.07x_1 + 2.17x_2 - 0.65x_3 + 1.34x_4 = 5.07 \\ 0.18x_1 + 0.12x_2 - 1.45x_3 + 1.81x_4 = 2.95 \end{cases}$
29. $\begin{cases} 1.01x_1 - 0.71x_2 + 1.13x_3 + 0.76x_4 = 3.32 \\ 0.11x_1 + 2.14x_2 - 0.35x_3 + 2.15x_4 = 5.96 \\ 2.32x_1 + 1.54x_2 + 1.67x_3 - 0.88x_4 = 2.31 \\ 1.76x_1 - 0.76x_2 + 2.15x_3 + 0.85x_4 = 5.13 \end{cases}$
30. $\begin{cases} 2.44x_1 + 1.08x_2 - 0.57x_3 + 0.57x_4 = 2.49 \\ 0.53x_1 + 0.37x_2 + 1.48x_3 - 1.13x_4 = 2.42 \\ 0.65x_1 - 1.25x_2 + 0.87x_3 + 2.54x_4 = 2.35 \end{cases}$

3.11. САВОЛҲО БАРОИ ТАҚРОРИ БОБ

1. Намуди умумии системаи муодилаҳои алгебравии хаттиро навиҷед.
2. Кадом методҳои ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии хаттиро медонед?
3. Мохияти методҳои аниқ ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии хаттиро чист?
4. Мохияти методи итератсионии ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии хаттиро баён кунед.
5. Схемаи умумии ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии хаттиро бо методи Крамер биёред.
6. Агар муайянкунандаи асосии системаи муодилаҳои алгебравии хаттиро баробари нол бошад, истифодаи методи Крамер имконпазир аст?
7. Кадом ҳолат барои ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии хаттиро Крамерро истифода бурдан ғайримкон аст?
8. Агар муайянкунандаи асосии системаи муодилаҳои алгебравии хаттиро баробари нол бошад, истифодаи кадом методи ҳал ғайримкон аст?
9. Схемаи умумии ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии хаттиро бо методи матрицаи баръакс биёред?
10. Ҳангоми ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии хаттиро бо методи матрицаи баръакс кадом муодилаи матрицавӣ ҳал карда мешавад?
11. Агар муайянкунандаи асосии системаи муодилаҳои алгебравии хаттиро баробари нол бошад, истифодаи методи матрицаи баръакс мумкин аст, агар мумкин бошад, барои чӣ?

12. Хангоми халли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ пуркунандаи алгебравӣ истифода бурда мешавад, хангоми истифодаи кадом метод?
13. Методи халли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ, ки бо алгоритми пайдарпай хоричкунӣ ба амал бароварда мешавад, бо чӣ ном дорад?
14. Схемаи умумии халли системаи муодилаҳои алгебравии хаттиро бо методи Гаусс биёред?
15. Дар кадом ҳолат халли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ бо методи Гаусс кулай аст?
16. Дар кадом ҳолат хангоми халли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ методи Гауссро истифода бурдан ғайримқон аст?
17. Амали рост ва чап хангоми халли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ бо методи Гаусс чӣ моҳият дорад?
18. Кадом шартҳо зарурӣ ва кифояганд барои истифодаи методи Гаусс?
19. Чаро халли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ барои кадом метод ба намуди матрисаи секунҷа оварда мешавад?
20. Ҳисоб намудани муайянкундаи асосии системаи муодилаҳои хангоми истифодаи кадом метод талаб карда мешавад?
21. Агар микдори муодилаҳои система аз се зиёд бошад, истифодаи кадом методҳо ба мақсад мувофиқ аст?
22. Хангоми халли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ бо методи Гаусс муайянкундаи асосии системаро ҳисоб кардан зарур аст?
23. Хангоми истифодаи кадом методи халли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ муодилаи матрисаи хал карда мешавад?
25. Фарқиятҳои асосии методҳои аниқ халли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ ва методҳои тақрибиро номбар кунед.
26. Дар кадом ҳолатҳо халли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ бо методи итератсионӣ ба мақсад мувофиқ аст?
27. Моҳияти истифодаи методи итератсионро хангоми халли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ номбар кунед.
28. Моҳияти истифодаи методи Зейделро хангоми халли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ номбар кунед.
29. Оё пешаки микдори кадамҳои итератсияро хангоми халли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ пешгӯи кардан мумкин аст?
30. Методи Гаусс ба методҳои аниқ ва ё методҳои тақрибии халли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ тааллуқ дорад?

IV. МУОДИЛАҲОИ АЛГЕБРАВӢ ВА ТРАНСЕНДЕНТӢ

Бигзор муодилаи $f(x) = 0$ дода шуда бошад, ки дар он функсияи $f(x)$ дар интервали охирик $a < x < b$ муайян ва бефосила бошад.

Таъриф. Ҳама гуна қимати ξ , ки барои он $f(\xi) = 0$ аст, *решаи муодилаи $f(x) = 0$ номида мешавад.*

Бо методҳои тақрибӣ ёфтани решаҳои муодилаи $f(x) = 0$ дар ду тои гузаронида мешавад:

1. Чудокунии решаҳо, яъне пайдо намудани порчаҳои хурд-хурди $[a, b]$, ки дар онҳо танҳо як решаи муодилаи $f(x) = 0$ мавҷуд аст;

II. Бо саҳеҳии додашудаи ε ёфтани решаҳои чудокардашудаи муодила.

Барои чудо намудани решаҳои муодилаи додашуда истифодаи теоремаи зерин муфид аст: агар $f: [a, b] \rightarrow R - \text{функсияи бефосила, муштарак монотонӣ ва } f(a)f(b) < 0 \text{ бошад, он гоҳ дар порчаи додашуда муодилаи } f(x) = 0 \text{ соҳиби реша мебошад.}$

Усулҳои чудокунии решаҳои муодилаҳоро кайд мекунем:

1) Қадвали киматҳои функсияи $y = f(x)$ дар порчаи аломатбадалкунии x муайян карда мешавад, ва агар ду киматҳои ҳамсояи аргумент x аломатҳои гуногун дошта бошанд, он гоҳ решаи муодилаи $f(x) = 0$ байни ин ду аргумент ҷустуҷӯ карда мешавад.

2) График функсияи $f(x) = 0$ дар порчаи аломатбадалкардаи аргумент x сохта мешавад. Он гоҳ решаи муодила дар атрофи нуқтаи буриши графикаи функсия бо тире OX ҷустуҷӯ карда мешавад.

3) Муодилаи $f(x) = 0$ бо муодилаи барбаркувваи $\varphi(x) = \phi(x)$ табдил дода мешавад. Графикаи функсияҳои $y = \varphi(x)$ ва $y = \phi(x)$ сохта мешаванд ва решаи муодилаи $f(x) = 0$ дар атрофи проексияи буриши графикҳо бо тире OX ҷустуҷӯ карда мешавад.

4.1. Методи тақсими порча ба ҳиссаҳои баробар

Бигзор решаи муодилаи $f(x) = 0$ дар порчаи $[a, b]$ чудо карда шуда бошад. Порчаи $[a, b]$ — ро дар нуқтаи $x = \frac{a+b}{2}$ ба ду ҳиссаи баробар тақсим мекунем. Агар $f(x) \neq 0$ бошад, он гоҳ ду ҳолати имконпазир мавҷуд мегардад: функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a, x]$ аломат бадал мекунад, ва ё дар порчаи $[x, b]$. Порчаеро интихоб мекунем, ки дар нӯтҳои он функсияи $y = f(x)$ соҳиби аломатҳои гуногун мегардад.

ва ин тақсимуниҳоро то ҳолате давом медиҳем, ки шарт $\left| \frac{b-a}{2^n} \right| < \varepsilon$ иҷро нагардад, дар ин ҳо ε — сахҳии пешакӣ додашуда мебошад.

Мисоли 1. Решаҳои муодилаи додашуда ҷудо карда шаванд, яъне аз онҳо бо ёрии методи ба ҳиссаҳои баробар тақсим намунаҳои порча ёфта шаванд. Саҳҳии ҳисобкуниҳоро $\varepsilon = 0.001$ қабул карда шаванд.

$$f(x) \equiv x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0.$$

Ҳал. Барои ҷудо намудани решаҳои муодилаи додашуда ҷадвали зеринро тартиб медиҳем

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	29	1	-1	-1	1	29	131

Тавре аз ҷадвал дида мешавад, қимати функсияи $f(x)$ дар порчаҳои $[-2, -1]$, $[0, 1]$ тағйири аломат мекунад. Бинобар ин аз ин порчаҳо, масалан, порчаи $(0, 1)$ — ро интихоб намуда, дар он решаи муодилаи додашударо ҷустуҷӯ мекунем.

Порчаи $(0, 1)$ — ро ба ду ҳиссаи баробар $\frac{0+1}{2} = 0.5$ тақсим мекунем ва ду порчаҳои $(0, 0.5)$ ва $(0.5, 1)$ ҳосил мекунем. Қимати функсияи $f(x)$ — ро дар нуқтаи 0.5 ҳисоб мекунем

$$f(0.5) = 0.5^4 + 2 \cdot 0.5^3 - 0.5 - 1 = -1.19.$$

Азбаски қиматҳои функсия дар нуқтаҳои 0.5 ва 1 аломатҳои гуногун доранд, яъне $f(0.5) \cdot f(1) < 0$, бинобар ин порчаро дар навоати худ ба ду ҳиссаи баробар тақсим мекунем $\frac{0.5+1}{2} = 0.75$.

$$f(0.75) = 0.75^4 + 2 \cdot 0.75^3 - 0.75 - 1 = -0.59.$$

Ин ҷараёни ҳисобро пайдарпай такрор мекунем, ба натиҷаи зерин соҳиб мешавем

$$f(0.875) = 0.875^4 + 2 \cdot 0.875^3 - 0.875 - 1 = 0.05;$$

$$f(0.8125) = 0.8125^4 + 2 \cdot 0.8125^3 - 0.8125 - 1 = -0.304;$$

$$f(0.8438) = 0.8438^4 + 2 \cdot 0.8438^3 - 0.8438 - 1 = -0.135;$$

$$f(0.8594) = 0.8594^4 + 2 \cdot 0.8594^3 - 0.8594 - 1 = -0.043.$$

Ҳамин тавр, ба сифати решаи муодилаи додашуда, қимати зеринро қабул кардан мумкин аст

$$\xi = \frac{1}{2} (0.8594 + 0.8750) = 0.867.$$

Қимати функсия дар ин нуқта

$$f(0.867) = 0.867^4 + 2 \cdot 0.867^3 - 0.867 - 1 = 0.0014$$

Мешавад, яъне решаи ёфташудаи $\xi = 0.867$ муодилоро бо сахҳии додашуда қаноат мекунад

Ҷавоб: $\xi = 0.867$.

4.2. Методи хорлаҳо

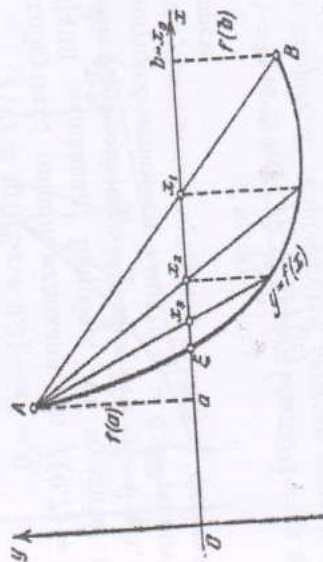
Ин ҷор дар порчаи $[a, b]$ муодилаи $f(x) = 0$ дорои реша бошад. Ба ин методҳои хорда ҷараёни итератсия чунин суръат мегирад. Ба ин методҳои хорда ҷараёни итератсияи муодилаи қиматҳои $x_0, x_1, x_2, \dots$ қабул карда шаванд, ки онҳо нуқтаҳои буриши тире абсисса бо хорҳои ба муодилаи $f(x)$ гузаронидашуда мебошанд.

Ин ҷор функсияи $f(x)$ дар нӯгҳои порчаи $[a, b]$ аломатҳои гуногун дошта бошад, яъне шарт $f(a) \cdot f(b) < 0$ иҷро гардад. Дар ҳолате, ки ин порча a беҳаракат аст (расми 1), $x_0 = b$ интихоб мешавад ва интихоби тақрибии решаи муодилоро бо истифодаи ҷараёни итератсия, аз рӯи формулаи зерин ҳисоб мекунем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} (x_n - a) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Дар ин ҳолат наздиқкуниҳо пайдарпайи монотонӣ камшавандаи маълумдро ташкил медиҳанд, яъне

$$a < \xi < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x_0.$$



Расми 1

Дар ҳолате, ки нӯги порча нуқтаи b беҳаракат аст (расми 2), он гоҳ $x_0 = a$ мешавад ва қимати тақрибии решаи муодилоро бо истифодаи ҷараёни итератсия, аз рӯи формулаи зерин ҳисоб мекунем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} (b - x_n).$$

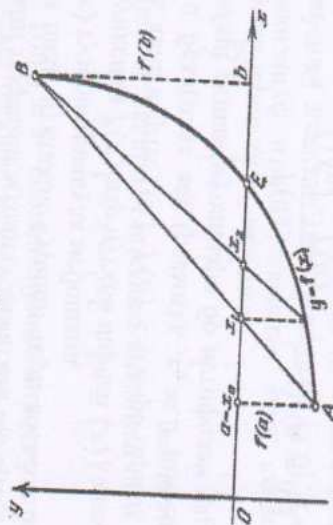
Дар ин ҳолат наздиқкуниҳо пайдарпайи монотонӣ афзуншавандаи маълумдро ташкил медиҳанд, яъне

$$b > \xi > \dots > x_{n+1} > x_n > \dots > x_1 > x_0.$$

Ин ҷараёни ҳисобро то иҷро шудани шарт $|x_n - x_{n-1}| \geq \varepsilon$ давом медиҳем, дар ин ҳо ε — сахҳии пешакӣ додашуда аст.

Барои баҳоиди аниқи ҳисобкуниҳои тақрибӣ аз формулаи зеринро истифода мебаранд

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1} \quad (|f'(x_n)| \geq m_1).$$



Расми 2

Мисоли 2. Решаҳои муодилоро бо методи хорда, бо саҳеҳии то 0.001 ёбед

$$f(x) \equiv tg(0.5x + 0.2) - x^2 = 0.$$

Ҳал. Ҳисобкуниҳо нишон медиҳанд, ки $f(0.7) = 0.1231$ ва $f(0.9) = -0.0498$ мешаванд. Бинобар, ин муодила дар порчаи $[0.7; 0.9]$ соҳиби реша мебошад. Азбаски $f(0.7) > 0$ аст, нуқтаи a — ро беҳаракат интихоб менамоем. Қимати $x_0 = 0.9$ — ро интихоб карда, барои пайдо намудани решаи муодилаи додашуда, формулаи зеринро истифода мебарем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a).$$

азбаски

$$x_0 = 0.9; a = 0.7; f(x_0) = f(0.9) = -0.0498; f(a) = f(0.7) = 0.1231$$

аст, он гоҳ

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0) - f(a)}(x_0 - a) = \\ &= 0.9 - \frac{-0.0498}{-0.0498 - 0.1231}(0.9 - 0.7) = 0.9 - 0.0576 = 0.8424. \\ f(0.8424) &= 0.0061. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(a)}(x_1 - a) = \\ &= 0.8424 - \frac{0.0061}{-0.117} \cdot 0.1424 = 0.8424 + 0.0074 = 0.8498. \end{aligned}$$

$$f(0.8498) = 0.00083.$$

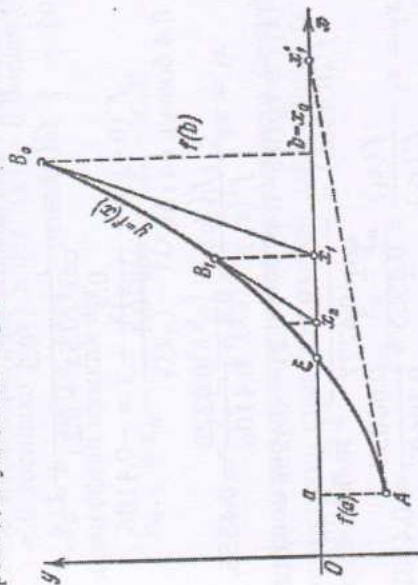
Азбаски қимати ёфташудаи $x_2 = 0.8498$ муодилаи додашударо бо саҳеҳии додашуда қаноат мекунад, онро ба сифати реша қабул кардан мумкин аст.

Ҷавоб: $\xi = 0.8498$.

4.3. Методи расандаҳо

Бигзор муодилаи $f(x) = 0$ дар порчаи $[a, b]$ дорои решаи ξ буда, расандаҳои он $f'(x)$ ва $f''(x)$ бефосила ва ҳангоми $a \leq x \leq b$ будан, дарон аломатҳои муайян бошанд.

Маълуми геометрии методи расандаҳо барбарқувва ба он аст, ки ҳангоми хати қачи $y = f(x)$ ба расандаҳои аз нуқтаҳои мувофиқи ба хати қач гузаронидашуда, иваз карда мешавад.



асми 3

Бигзор $x_0 = b$ бошад (расми.3). ба хати қачи $y = f(x)$ дар нуқтаи $B_0[f(x_0)]$ хати расанда мегузаронем. Ба сифати қимати аввалии тақрибии x_1 решаи ξ абсиссаи нуқтаи буриши ин расандаҳо бо тире Ox қабул мекунем. Аз нуқтаи $B_1[x_1, f(x_1)]$ боз ба хати қач расанда мегузаронем, ки абсиссаи нуқтаи буриши он қимати тақрибии x_2 решаи ξ — ро ифода мекунад. Маълум аст, ки муодилаи расанда ба хати қачи додашуда дар нуқтаи $B_n[x_n, f(x_n)]$ намууди зерин дорад

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Дар ин баробарӣ $y = 0$ ва $x = x_{n+1}$ қабул карда, формулаи ёфтани решаи тақрибии муодилаи $y = f(x)$ — ро бо истифодаи методи расандаҳо ҳосил мекунем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Барои баҳодиҳии ҳисобкунҳои n -уми x_n аз формулаи таркибӣ истифода мекунам

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1} \quad (|f'(x_n)| \geq m_1).$$

Мисоли 3. Бо методи расандаҳо яке аз решаҳои муодилаи додашуда ёфта шавад. Ҳисобкунҳои бо саҳеҳии то 0.001 иҷро карда шаванд

$$f(x) \equiv tg(0.5x + 0.2) - x = 0.$$

Ҳал. Ҳисобкунҳои оддитарин нишон медиҳанд, ки муодилаи додашуда дар порчаи $[0.4; 0.5]$ соҳиби яке аз решаҳо мебошад

$$f(0.4) = 0.0228, \quad f(0.5) = -0.0169.$$

Ҳосилаи функсияро ёфта, қимати онро дар нуктаи 0.5 ҳисоб мекунам

$$f'(x) = -\frac{0.5}{\cos^2(0.5x + 0.2)} - 1.$$

$$f'(0.4) = -\frac{0.5}{\cos^2 0.4} - 1 = -0.4106.$$

Агар $x_0 = 0.4$ бошад, он гоҳ

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.4 + \frac{0.0228}{0.4106} = 0.4555.$$

$$f(x_1) \equiv tg(0.5 \cdot 0.4555 + 0.2) - 0.4555 = 0.00039.$$

$$f'(0.4555) = -\frac{0.5}{\cos^2 0.4277} - 1 = -0.3961.$$

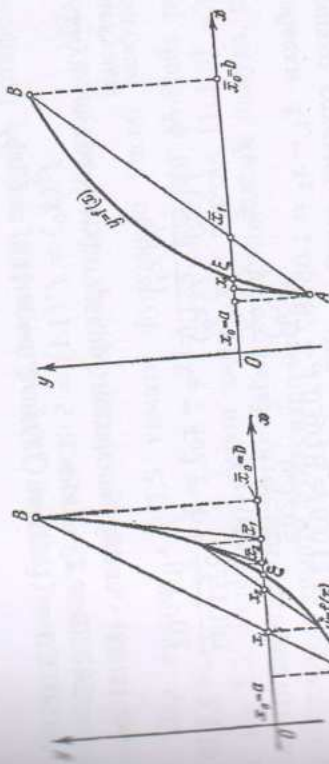
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.4555 + \frac{0.00039}{0.39607} = 0.45626.$$

$$f(x_2) \equiv tg(0.5 \cdot 0.45626 + 0.2) - 0.45626 = 0.0001.$$

Решаи ёфтшуда муодиларо бо саҳеҳии додашуда қаноат мекунад, бинобарин $x_2 = 0.45626$ – ро ба сифати ҳалли он қабул кардан мумкин аст.

Ҷавоб: $\xi = 0.45626$.
4.4. Методи муштарак (комбинированный метод)

Бигзор муодилаи $f(x) = 0$ дода шуда бошад ва дар нӯғҳои порчаи $[a, b]$ функсияи $f(x)$ аломатҳои гуногун дошта бошад, яъне $f(a)f(b) < 0$. Методҳои ҳардуи расандаҳо ва расандаҳои муттаҳид намуна, методҳои соҳиб мешавем, ки дар ҳар як қадами итератсия решаи тақрибиро бо норасоӣ (x_n) ва бо барзӣёӣ ($\bar{x}_n$) ҳамчун решаи аниқ ξ муодилаи $f(x) = 0$ – ро ба даст меорем. Ҳолатҳои $f'(x) > 0$; $f''(x) > 0$ (расми 4) ва $f'(x) > 0$; $f''(x) < 0$ (расми 5) дида мебароем.



Расми 4.

Ҳолати $f'(x) > 0$; $f''(x) > 0$ – ро тадқиқ мекунем. Агар барои муодилаи $f(x) = 0$ ҳосилаҳо $f'(x) > 0$; $f''(x) > 0$ бошанд (расми 4), он гоҳ $x_0 = a$, $\bar{x}_0 = b$ қабул карда, решаи он ξ – ро бо ёрии формулаҳои зерин ёфтан мумкин аст

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n);$$

$$x_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Баъди ба итмом расидани ҷараёни ҳисобкунҳо, ба сифати решаи аниқ арифметикӣ қиматҳои охири пайдошудаи x_n ва $\bar{x}_n$ – ро интихоб мекунам, яъне

$$\xi = \frac{x_n + \bar{x}_n}{2}.$$

Мисоли 4. Бо истифодаи методи муштарак решаи муодилаи бо саҳеҳии то 0.001, ёфта шавад

$$f(x) \equiv x^5 - x - 0.2 = 0.$$

Ҳал. Пеш аз ҳама порчаеро меёбем, ки дар он муодилаи додашуда реша дошта бошад. Азбаски

$$f(1) = 1 - 1 - 0.2 = -0.2 < 0,$$

$$f(1.1) = 1.61051 - 1 - 0.2 = 0.31051 > 0$$

Ҳосилаҳои тартиби якум ва дуҷуми функсияи $f(x) = x^5 - x - 0.2$ – ро меёбем:

$$f'(x) = 5x^4 - 1; \quad f''(x) = 20x^3.$$

Дар порчаи $[1; 1.1]$ бошад, $f'(x) > 0$; ва $f''(x) > 0$ мешавад, яъне аломатҳои ҳосилаҳо доимиянд (расми 4). Қиматҳои $x_0 = 1$ ва $\bar{x}_0 = 1.1$ интихоб карда, ҳосил мекунем

$$f(x_0) = f(1) = -0.2; f(\bar{x}_0) = f(1.1) = 0.31051;$$

$$f'(\bar{x}_0) = f'(1.1) = 5 \cdot 1.4641 - 1 = 6.3205.$$

Акнун методи муштаракро истифода бурда, решахоро чустану мекунем

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(\bar{x}_0) - f(x_0)} (\bar{x}_0 - x_0) = 1 + \frac{0.1 \cdot 0.2}{0.51051} = 1.03918;$$

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 - \frac{f'(\bar{x}_0)}{f'(\bar{x}_0)} = 1.1 - \frac{0.31051}{6.3205} = 1.05087.$$

Азбаски $\bar{x}_1 - x_1 = 1.05087 - 1.03918 = 0.01169$ аст, бинобар ин решахо сахехии талабкардашударо қаноат намекунамд. Аз ин рӯ чуфти наздикунии минбаъдаро ҳисоб мекунем

$$f(x_1) = f(1.03918) = -0.02732; f(\bar{x}_1) = f(1.05087) = 0.03071;$$

$$f'(\bar{x}_1) = f'(1.05087) = 5.0977.$$

$$x_2 = 1.03918 + \frac{0.05803}{0.03071} = 1.04468;$$

$$\bar{x}_2 = 1.05087 - \frac{5.0977}{0.03071} = 1.04485.$$

Аз ин ҷо $\bar{x}_2 - x_2 = 1.04485 - 1.04468 = 0.00017$ мешавад. Ин чуфти ёфташудаи $\bar{x}_2$ ва x_2 ба сахехии талабкардашуда мувофиқат мекунад, бинобар миёнаи арифметикии $\bar{x}_2$ ва x_2 -ро ҳамчун решаи муодилаи додашуда қабул кардан мумкин аст, яъне

$$\xi = \frac{x_2 + \bar{x}_2}{2} = \frac{1.04468 + 1.04485}{2} = 1.04476.$$

$$\text{Ҷавоб: } \xi = 1.04476.$$

4.5. КОРИ ЛАБОРАТОРИИ №1

Намунаи нчрон супориш

Супориш. Решаҳои муодилаи додашуда ҷудо карда шаванд ва яке аз онҳо бо ёрии методи ба ҳиссаҳои баробар тақсим намудани порча ёфта шавад. Саҳехии ҳисобкуниҳо $\varepsilon = 0.001$ қабул карда шавад.

Ҳал. Решаҳои муодилаи додашударо ҷудо мекунем

$$f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 7 = 7;$$

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 7 = 2;$$

$$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 7 = -1.$$

Азбаски $f(1) \cdot f(2) = 2 \cdot (-1) = -2 < 0$ аст, бинобар дар порчаи $[1; 2]$ муодила аққалан якто реша дорад. Аз ин рӯ дар порчаи $[1; 2]$

методи ба ҳиссаҳои баробар тақсим намудани порчаро истифода бурда, решахоро чустану мекунем.

Порчаи $[1; 2]$ -ро ба ду ҳиссаи баробар тақсим мекунем $\frac{1+2}{2} =$

1.5 . Дар нуктаи $x = 1.5$ кимати функсияро ҳисоб мекунем $f(1.5) = 1.5^3 - 2 \cdot 1.5^2 - 4 \cdot 1.5 + 7 = -0.125$. Кимати функсия дар нуктаи $x = 1.5$ манфӣ аст, барои ҳамин ҳам порчаи $[1; 1.5]$ -ро мегиризем. Ин порчаро низ ба ду қисми баробар тақсим намуда, дар нуктаи ҳосилшуда кимати функсияро меёбем

$$x_1 = \frac{1 + 1.5}{2} = \frac{2.5}{2} = 1.25.$$

$$f(1.25) = 1.25^3 - 2 \cdot 1.25^2 - 4 \cdot 1.25 + 7 = 0.8281.$$

Чунон ҷараёни ҳисобкуниҳоро давом дода, ба натиҷаҳои зерин соҳиб мешавем:

$$x_2 = \frac{1.25 + 1.5}{2} = 1.375. f(1.375) = 0.3184;$$

$$x_3 = \frac{1.375 + 1.5}{2} = 1.4375. f(1.4375) = 0.0876;$$

$$x_4 = \frac{1.4375 + 1.5}{2} = 1.4844. f(1.4844) = -0.0737;$$

$$x_5 = \frac{1.4375 + 1.4844}{2} = 1.4609. f(1.4609) = 0.0058;$$

$$x_6 = \frac{1.4609 + 1.4844}{2} = 1.4727. f(1.4727) = -0.0344;$$

$$x_7 = \frac{1.4609 + 1.4727}{2} = 1.4668. f(1.4668) = 1.44638;$$

$$x_8 = \frac{1.4609 + 1.4868}{2} = 1.4638. f(1.4638) = -0.000412;$$

$$x_9 = \frac{1.4609 + 1.4638}{2} = 1.4624. f(1.4624) = 0.00068.$$

Дида мешавад, ки $f(x_9) = f(1.4624) = 0.00068 < 0.001$ аст, пас решаи муодилаи додашуда $x = x_9 = 1.4624$ мебошад

$$\text{Ҷавоб: } x = 1.4624.$$

Вариантҳои супоришҳо

Решаҳои муодилаи додашуда ҷудо карда шаванд ва яке аз онҳо бо ёрии методи ба ҳиссаҳои баробар тақсим намудани порча ёфта шавад. Саҳехии ҳисобкуниҳо $\varepsilon = 0.001$ қабул карда шавад.

$$1. f(x) \equiv 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0.$$

$$2. f(x) \equiv 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0.$$

$$3. f(x) \equiv 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0.$$

$$4. f(x) \equiv x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1 = 0.$$

$$5. f(x) \equiv 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0.$$

$$6. f(x) \equiv 2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0.$$

7. $f(x) \equiv x^4 - x - 1 = 0.$
8. $f(x) \equiv 2x^4 - x^2 - 10 = 0.$
9. $f(x) \equiv 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0.$
10. $f(x) \equiv x^4 - 18x^2 + 6 = 0.$
11. $f(x) \equiv x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0.$
12. $f(x) \equiv x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0.$
13. $f(x) \equiv 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0.$
14. $f(x) \equiv 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0.$
15. $f(x) \equiv 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 3 = 0.$
16. $f(x) \equiv 2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0.$
17. $f(x) \equiv 2x^4 - x^2 - 10 = 0.$
18. $f(x) \equiv 5x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 10 = 0.$
19. $f(x) \equiv x^4 - 18x^2 + 6 = 0.$
20. $f(x) \equiv 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0.$
21. $f(x) \equiv x^3 + 5x + 7 = 0.$
22. $f(x) \equiv x^3 + 4x - 6 = 0.$
23. $f(x) \equiv x^3 + x + 3 = 0.$
24. $f(x) \equiv x^3 + 2x - 11 = 0.$
25. $f(x) \equiv x^3 + x + 1 = 0.$
26. $f(x) \equiv x^3 + x - 1 = 0.$
27. $f(x) \equiv x^3 + 4x + 8 = 0.$
28. $f(x) \equiv x^3 + 6x - 1 = 0.$
29. $f(x) \equiv x^3 + 2x + 4 = 0.$
30. $f(x) \equiv x^3 + x - 4 = 0.$

4.6. КОРИ ЛАБОРАТОРИЙ №2

Намунаи иҷрои супоришҳо

Супориш. Решаҳои муодилаи додашуда ҷудо карда шаванд ва яке аз онҳо бо ёрии методи хордаҳо ёфта шавад. Саҳеҳии ҳисобкуниҳо $\varepsilon = 0.001$ қабул карда шавад.

$$f(x) \equiv x^3 - 2x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Ҳал. Решаҳои муодиларо ҷудо мекунем. Пеш аз ҳама киматифунксияро дар нуктаи $x = 0$ ҳисоб мекунем ва $f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$ - ро ба даст меорем. Ақнуъ кимати функсияро дар нуктаи $x = 1$ ҳисоб карда, соҳиби натиҷаи $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = -1 < 0$ мешавем. Азбаски киматҳои функсия дар нуктаҳои $x = 0$ ва $x = 1$ аломатҳои гуногунро соҳиб шуд, бинобар дар порчаи $[0; 1]$ решаи муодиларо ҷустуҷӯ мекунем. Порчаи $[0; 1]$ - ро ба ду

дар ин баробар тақсим мекунем $\frac{0+1}{2} = 0.5$. Дар нуктаи $x = 0.5$ кимати функсия $f(0.5) = 0.5^3 - 2 \cdot 0.5^2 - 4 \cdot 0.5 + 4 = 1.625 > 0$ мешавад. Пас $f(1) \cdot f(0.5) < 0$ иҷро мегардад ва минбаъд решаи муодиларо дар порчаи $[0.5; 1]$ ҷустуҷӯ мекунем. $f(0.5) > 0$, пас $x_0 = 0.5$. Нуктаи $x_1 = 0.5$ - ро интихоб намуда, формулаи зеринро барои ёфтани решаи муодила истифода мекунем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} (x_n - a).$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} (x_0 - a) = 0.5 - \frac{1.625}{1.625 + 1} (0.5 - 1) = \\ &= 0.5 - \frac{1.625}{2.625} \cdot (-0.5) = 0.5 + 0.3095 = 0.8092. \end{aligned}$$

Аз ин ҷо $f(x_1) = f(0.8092) = -0.0165$. Ҷараёни ҳисобкуниро тақрор намуда, ҳосил мекунем

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} (x_1 - a) = 0.8092 - \frac{-0.0165}{0.9835} (0.8092 - 1) = \\ &= 0.8092 - \frac{0.0165}{0.9835} \cdot 0.1908 = 0.8092 - 0.0032 = 0.806. \end{aligned}$$

Дода мешавад, ки $f(x_2) = f(0.806) = 0.000335 < 0.001$ аст, яъне саҳеҳии додашуда қаноат карда мешавад, бинобар решаи муодилаи додашударо $x = x_2 = 0.806$ қабул кардан мумкин аст

Ҷавоб: $x = 0.806$.

Вариантҳои супоришҳо

Решаҳои муодилаи додашуда ҷудо карда шаванд ва яке аз онҳо бо ёрии методи хордаҳо ёфта шавад. Саҳеҳии ҳисобкуниҳо $\varepsilon = 0.001$ қабул карда шавад.

1. $f(x) \equiv x^3 + 5x + 7 = 0.$
2. $f(x) \equiv x^3 + 4x - 6 = 0.$
3. $f(x) \equiv x^3 + x + 3 = 0.$
4. $f(x) \equiv x^3 + 2x - 11 = 0.$
5. $f(x) \equiv x^3 + x + 1 = 0.$
6. $f(x) \equiv x^3 + x - 1 = 0.$
7. $f(x) \equiv x^3 + 4x + 8 = 0.$

8. $f(x) \equiv x^3 + 6x - 1 = 0.$
9. $f(x) \equiv x^3 + 2x + 4 = 0.$
10. $f(x) \equiv x^3 + x - 4 = 0.$
11. $f(x) \equiv x^3 + 5x + 7 = 0.$
12. $f(x) \equiv 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0.$
13. $f(x) \equiv 2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0.$
14. $f(x) \equiv x^4 - x - 1 = 0.$
15. $f(x) \equiv 2x^4 - x^2 - 10 = 0.$
16. $f(x) \equiv 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0.$
17. $f(x) \equiv x^4 - 18x^2 + 6 = 0.$
18. $f(x) \equiv x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0.$
19. $f(x) \equiv x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0.$
20. $f(x) \equiv 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0.$
21. $f(x) \equiv 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0.$
22. $f(x) \equiv 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0.$
23. $f(x) \equiv 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0.$
24. $f(x) \equiv x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1 = 0.$
25. $f(x) \equiv 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0.$
26. $f(x) \equiv 2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0.$
27. $f(x) \equiv x^4 - x - 1 = 0.$
28. $f(x) \equiv 2x^4 - x^2 - 10 = 0.$
29. $f(x) \equiv 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0.$
30. $f(x) \equiv x^4 - 18x^2 + 6 = 0.$

4.7. МАШҲУЛИЯТИ АМАЛИИ №1

Намунаи иҷрои супориш

Супориш. Решаҳои муодилаи додашуда ҷудо карда шаванд ва яке аз онҳо бо ёрии методи расандаҳо ёфта шавад. Саҳеҳии ҳисобкуниҳо $\varepsilon = 0.001$ қабул карда шавад

$$f(x) \equiv 2x^3 - 4x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Ҳал. Дар нуқтаҳои $x = 0$ ва $x = 1$ қимати функсияро ҳисоб мекунем

$$f(0) = 2 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 1 = 1 > 0;$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 1 = -6 < 0.$$

Шарти $f(0) \cdot f(1) = 1 \cdot (-6) = -6 < 0$ иҷро мешавад ва решаи муодилаи мағлубро дар порчаи $[0; 1]$ ҷустуҷӯ мекунем.

Бигзор $x_0 = 0$ бошад, он гоҳ аз формулаи методи расандаҳо

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (A)$$

ёфтаи ягона, ҳосил мекунем

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

яъне $f(x_0) = f(0) = 1$,
 $f'(x) = 6x^2 - 8x - 5$ и $f'(0) = 6 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 - 5 = -5$.
 Ҳамин тавр ба формулаи (A) гузошта, ба натиҷаи зерин соҳиб мешавим

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{1}{-5} = 0,2.$$

$f(x_1) = f(0,2) = 2 \cdot 0,2^3 - 4 \cdot 0,2^2 - 5 \cdot 0,2 + 1 = -0,144$;
 $f'(x_1) = -0,144$ саҳеҳии додашудаи $\varepsilon = 0,001$ – ро қаноат мекунад, бинобар $x_1 = 0,2$ решаи муодилаи шуда наметавонад. Ҳамин тавр ба формулаи (A) гузошта, ба натиҷаи зерин соҳиб мешавим

$$f'(x_1) = f'(0,2) = 6 \cdot 0,2^2 - 8 \cdot 0,2 - 5 = -6,36.$$

Аз ин ҷо

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,2 - \frac{-0,144}{-6,36} = 0,1774.$$

Аз ин қимати $x_2 = 0,1774$ – ро ба муодилаи гузошта, ҳосил мекунем
 $f(x_2) = f(0,1774) = 2 \cdot 0,1774^3 - 4 \cdot 0,1774^2 - 5 \cdot 0,1774 + 1 = -0,00146$.

Натиҷаи $f(x_2) = -0,00146$ низ саҳеҳии додашудаи $\varepsilon = 0,001$ – ро қаноат намекунад ва решаи ёфташудаи $x_2 = 0,1774$ решаи муодилаи шуда наметавонад. Решаи x_3 – ро ҳисоб мекунем

$$f'(x_2) = f'(0,1774) = 6 \cdot 0,1774^2 - 8 \cdot 0,1774 - 5 = -6,23013.$$

Он гоҳ

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,1774 - \frac{-0,00146}{-6,23013} = 0,1771.$$

$$f(x_3) = f(0,1771) = 2 \cdot 0,1771^3 - 4 \cdot 0,1771^2 - 5 \cdot 0,1771 + 1 = 0,000000215.$$

Азбаски $f(x_3) = f(0,1771) = 0,000000215 < \varepsilon$ аст, бинобар $x = 0,1771$ – ро ба сифати решаи муодилаи додашуда қабул кардан мумкин аст.

Ҷавоб: $x = 0,1771$.

Вариантҳои супоришҳо

Супориш. Решаҳои муодилаи додашуда ҷудо карда шаванд ва яке аз онҳо бо ёрии методи расандаҳо ёфта шавад. Саҳеҳии ҳисобкуниҳо $\varepsilon = 0.001$ қабул карда шавад.

1. $f(x) \equiv x^3 + 5x + 7 = 0$.
2. $f(x) \equiv 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$.
3. $f(x) \equiv 2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$.
4. $f(x) \equiv x^4 - x - 1 = 0$.
5. $f(x) \equiv 2x^4 - x^2 - 10 = 0$.
6. $f(x) \equiv 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$.
7. $f(x) \equiv x^4 - 18x^2 + 6 = 0$.
8. $f(x) \equiv x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$.
9. $f(x) \equiv x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$.
10. $f(x) \equiv 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$.
11. $f(x) \equiv x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$.
12. $f(x) \equiv x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$.
13. $f(x) \equiv 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$.
14. $f(x) \equiv 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0$.
15. $f(x) \equiv 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 3 = 0$.
16. $f(x) \equiv 2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$.
17. $f(x) \equiv 2x^4 - x^2 - 10 = 0$.
18. $f(x) \equiv 5x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 10 = 0$.
19. $f(x) \equiv x^4 - 18x^2 + 6 = 0$.
20. $f(x) \equiv 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$.
21. $f(x) \equiv x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 7 = 0$.
22. $f(x) \equiv x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$.
23. $f(x) \equiv 2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1 = 0$.
24. $f(x) \equiv 2x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 2 = 0$.
25. $f(x) \equiv 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 3 = 0$.
26. $f(x) \equiv 2x^3 - 9x^2 - 6x + 1 = 0$.
27. $f(x) \equiv 2x^4 - x^2 - 10x + 5 = 0$.
28. $f(x) \equiv 4x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 10 = 0$.
29. $f(x) \equiv x^4 - 18x^2 + 6x - 3 = 0$.
30. $f(x) \equiv x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1 = 0$.

4.8. МАШҲУЛИЯТИ АМАЛИИ №2

Намунаи иҷрои супоришҳо

Супориш. Решаҳои муодилаи додашуда ҷудо карда шаванд ва яке аз онҳо бо ёрии методи муштарак ёфта шавад. Саҳеҳии ҳисобкуниҳо $\varepsilon = 0.001$ қабул карда шавад.

$$f(x) \equiv 2x^3 - 4x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Ҳал. Дар муодилаи киматҳои $x = 0$ ва $x = 0,5$ — ро гузошта, ҳосил мекунем $f(0) = 1 > 0$; $f(0,5) = -2,25 < 0$.

Азбаски дар нӯғҳои порчаи $[0; 0,5]$ аломатҳои функсия гуногунанд, дар ин порча яке аз решаҳои муодиларо ҷустуҷӯ мекунем.

Ҳосилаҳои тартиби якум ва дуюми функсияро меёбем

$$f'(x) \equiv 6x^2 - 8x - 5; \quad f''(x) \equiv 12x - 8.$$

Нуқтаҳои $x_0 = a$, ва $\bar{x}_0 = b$ — ро интихоб намуда, бо ёрии формулаҳои зерин решаи муодиларо ҷустуҷӯ мекунем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(\bar{x}_n) - f(x_n)} (\bar{x}_n - x_n), \quad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}. \quad (A)$$

Мунофиқи шарти масъала $x_0 = 0$, $\bar{x}_0 = 0,5$ аст, бинобар

$$f(x_0) = f(0) = 1,$$

$$f(\bar{x}_0) = 2 \cdot 0,5^3 - 4 \cdot 0,5^2 - 5 \cdot 0,5 + 1 = -2,25;$$

$$f'(x_0) = 6 \cdot 0,5^2 - 8 \cdot 0,5 - 5 = -7,5.$$

Ин киматҳои ёфташударо ба формулаҳои (A) гузошта, ҳосил мекунем

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(\bar{x}_0) - f(x_0)} (\bar{x}_0 - x_0) = 0 - \frac{1}{-2,25 - 1} (0,5 - 0) = 0,1538;$$

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 - \frac{f(\bar{x}_0)}{f'(\bar{x}_0)} = 0,5 - \frac{2,25}{-7,5} = 0,5 - 0,3 = 0,2.$$

Фарқи $\bar{x}_1 - x_1 = 0,2 - 0,1538 = 0,0462$ саҳеҳии талабкардашударо қаноат намекунад. Бинобар ҷуфти минбаъдаи решаҳои ҷустуҷӯ мекунем

$$f(x_1) = 2 \cdot 0,1538^3 - 4 \cdot 0,1538^2 - 5 \cdot 0,1538 + 1 = 0,1437,$$

$$f(\bar{x}_1) = 2 \cdot 0,2^3 - 4 \cdot 0,2^2 - 5 \cdot 0,2 + 1 = -0,144,$$

$$f'(x_1) = 6 \cdot 0,1538^2 - 8 \cdot 0,1538 - 5 = -6,36.$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(\bar{x}_1) - f(x_1)} (\bar{x}_1 - x_1) =$$

$$= 0,1538 - \frac{0,1437}{-0,144 - 0,1437} (0,2 - 0,1538) =$$

$$= 0,1538 + \frac{0,0066}{0,2877} = 0,1767;$$

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 - \frac{f(\bar{x}_1)}{f'(\bar{x}_1)} = 0,2 - \frac{-0,144}{-6,36} = 0,2 - 0,0226 = 0,1774.$$

Фарқи $\bar{x}_2 - x_2 = 0,1774 - 0,1767 = 0,0007$ сахехии додашударо каноат мекунад, яъне ба сифати решаи муодила

$$\xi = \frac{\bar{x}_2 + x_2}{2} = \frac{0,1774 + 0,1767}{2} = 0,1771$$

кабул карда мешавад

$$\text{Ҷавоб: } \xi = 0,1771$$

Вариантҳои супоришҳо

Супориш. Решаҳои муодилаи додашуда ҷудо карда шаванд ва яке аз онҳо бо ёрии методи муштарак ёфта шавад. Саҳеҳии ҳисобкуниҳо $\varepsilon = 0,001$ қабул карда шавад.

1. $f(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0.$
2. $f(x) \equiv x^3 - 6x - 8 = 0.$
3. $f(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0.$
4. $f(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$
5. $f(x) \equiv x^3 + 3x + 2 = 0$
6. $f(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0.$
7. $f(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0.$
8. $f(x) \equiv x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0.$
9. $f(x) \equiv x^3 + 4x - 6 = 0.$
10. $f(x) \equiv x^3 - 2x + 4 = 0.$
11. $f(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0.$
12. $f(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0.$
13. $f(x) \equiv x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0.$
14. $f(x) \equiv x^3 + x - 3 = 0.$
15. $f(x) \equiv 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0.$
16. $f(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 3 = 0.$
17. $f(x) \equiv x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0.$
18. $f(x) \equiv 2x^3 + 9x^2 - 21 = 0.$
19. $f(x) \equiv x^3 + 3x^2 - 2 = 0.$
20. $f(x) \equiv x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0.$
21. $f(x) \equiv 2x^3 + 9x^2 - 10 = 0.$
22. $f(x) \equiv x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0.$
23. $f(x) \equiv 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0.$
24. $f(x) \equiv x^3 + 3x^2 - 24x - 3 = 0.$
25. $f(x) \equiv x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0.$

26. $f(x) \equiv 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0.$
27. $f(x) \equiv x^3 - 3x^2 - 24x - 8 = 0.$
28. $f(x) \equiv 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0.$
29. $f(x) \equiv x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0.$
30. $f(x) \equiv 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 0.$

4.9. КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Намунаи иҷрои супориш

Супориш. Решаҳои муодилаи додашуда ҷудо карда шаванд ва яке аз онҳо бо ёрии методи хордаҳо ва ё методи расандаҳо ёфта шавад. Саҳеҳии ҳисобкуниҳо $\varepsilon = 0,001$ қабул карда шавад.

$$f(x) \equiv x^3 + \sin x - 1 = 0.$$

Ҳал. Ба муодила киматҳои $x = 0$ ва $x = 1$ — ро гузошта, ҳисоб мекунем

$$f(0) = 0^3 + \sin 0 - 1 = -1 < 0;$$

$$f(1) = 1^3 + \sin 1 - 1 = 0,8415 > 0.$$

Аյбаски $f(0) \cdot f(1) = -1 \cdot 0,8415 = -0,8415 < 0$ аст, бинобар, муодила дар порчаи $[0; 1]$ реша дорад ва дар ин порча мо онро ҷустуҷӯ мекунем.

Бигзор $x_0 = 0$ бошад, он гоҳ аз формулаи методи расандаҳо

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Натиҷа бунда, ҳосил мекунем

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

дар ин ҷо $f(x_0) = f(0) = -1$,
 $f'(x) = 3x^2 + \cos x$ и $f'(0) = 3 \cdot 0^2 + \cos 0 = 1$.

Он гоҳ

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{-1}{1} = 1.$$

$$f(x_1) = f(1) = 1^3 + \sin 1 - 1 = 0,8415;$$

Дида мешавад, ки кимати $f(x_1) = 0,8415$ сахехии $\varepsilon = 0,001$ — ро қаноат намекунад, яъне решаи ёфташудаи $x_1 = 1$ ҳалли муодила шуда наметавонад. Ин ҷараёни ҳисобро тақрор мекунем

$$f'(x_1) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 + \cos 1 = 3,5403.$$

Пас решаи x_2 — ро бо ёрии формулаи зерин ҳисоб мекунем

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{0,8415}{3,5403} = 0,7623.$$

Аз ин чо

$$f(x_2) = f(0.7623) = 0.7623^3 + \sin 0.7623 - 1 = 0.1336,$$

$f(x_2) = 0.1336$ низ саҳеҳии додашудаи $\varepsilon = 0.001$ – ро қаноат намекунад ва қимати $x_2 = 0.7623$ решаи муодилаи шуда наметавонад. Решаи минбаъда x_3 – ро меёбем.

$$f'(x_2) = f'(0.7623) = 3 \cdot 0.7623^2 + \cos 0.7623 = 2.4666,$$

Он гоҳ

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.7623 - \frac{0.1336}{2.4666} = 0.7082.$$

$$f(x_3) = f(0.7082) = 0.7082^3 + \sin 0.7082 - 1 = 0.00556,$$

Натиҷаи $f(x_3) = 0.00556$ низ ба саҳеҳии $\varepsilon = 0.001$ қаноат намекунад ва аз ин рӯ қимати $x_3 = 0.7082$ решаи муодилаи наметавонад. Ин ҳисобкуниҳоро боз такрор намуда решаи x_4 – ро меёбем.

$$f'(x_3) = f'(0.7082) = 3 \cdot 0.7082^2 + \cos 0.7082 = 2.264.$$

Он гоҳ

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0.7082 - \frac{0.00556}{2.264} = 0.705696.$$

$f(x_4) = f(0.705696) = 0.705696^3 + \sin 0.705696 - 1 = 0.0000097$, Дида мешавад, ки $f(x_4) = f(0.705696) = 0.0000097 < \varepsilon$ аст, саҳеҳии додашуда қаноат мегадарад ва $x = 0.705696$ ҳамчун решаи муодила қабул карда мешавад.

Ҷавоб: $x = 0.705696$.

Вариантҳои супоришҳо

Супориш. Решаҳои муодилаи додашуда ҷудо карда шаванд, ки яке аз онҳо бо ёрии методи хордаҳо ва ё методи расандаҳо ёфта шавад. Саҳеҳии ҳисобкуниҳоро $\varepsilon = 0.001$ қабул карда шавад.

- $f(x) \equiv x^3 + 3\sin x - 1 = 0$;
- $f(x) \equiv 2x + \lg x - 1.2 = 0$;
- $f(x) \equiv \arctg(2x + 3) - x = 0$;
- $f(x) \equiv e^{2x} + 3x + 1.4 = 0$;
- $f(x) \equiv x - 4\sin(2x + 0.7) = 0$;
- $f(x) \equiv \arctg(2x + 3) - x = 0$;
- $f(x) \equiv 2\cos 3x + x - 4 = 0$;
- $f(x) \equiv \arctg 2x - x + 1 = 0$;
- $f(x) \equiv \arcsin x + 0.4x - 0.3 = 0$;
- $f(x) \equiv \arctg x - 4x - 0.5 = 0$;

- $f(x) \equiv \sin(2x + 1) - x^2 = 0$;
- $f(x) \equiv \arctg(3x + 0.1) - 2x = 0$;
- $f(x) \equiv \lg(0.4x + 0.7) - x^2 = 0$;
- $f(x) \equiv 2x + \cos(3x - 1) + 1.1 = 0$;
- $f(x) \equiv x + \arcsin x - 1 = 0$;
- $f(x) \equiv 2x^2 \sin x - 1 = 0$;
- $f(x) \equiv \sin(0.7x + 4.1) + x = 0$;
- $f(x) \equiv \lg(2x + 1) + 0.4x + 7 = 0$;
- $f(x) \equiv \arccos x - x^2 = 0$;
- $f(x) \equiv \lg x + x^2 - 1 = 0$;
- $f(x) \equiv \sin(0.3x + 4) - 4x^2 = 0$;
- $f(x) \equiv (1 - x^2)\cos x - 1 = 0$;
- $f(x) \equiv \lg(0.5x + 2) + x - 5 = 0$;
- $f(x) \equiv \sin(4 + x) - 2x^2 = 0$;
- $f(x) \equiv \cos x - x + 1.2 = 0$;
- $f(x) \equiv \cos x + x - 1.3 = 0$;
- $f(x) \equiv \arctg x + \sin(x - 1) = 0$;
- $f(x) \equiv 2x + \sin(x + 5) + x - 3 = 0$;
- $f(x) \equiv \cos(0.3x + 5) + x - 1 = 0$;
- $f(x) \equiv \lg(x + 1) + x - 1 = 0$;
- $f(x) \equiv \cos(x - 3) + 0.4x + 1 = 0$;

4.10. САВОЛҲО БАРОИ ТАҚРӨРИ БОБ

- Қадам муодилаҳо алгебравӣ номида мешаванд?
- Қадам муодилаҳоро трансцендентӣ мегӯянд?
- Қадам методҳои ҳалли муодилаҳои алгебравӣ ва трансцендентиро медонед?
- Ёфтани решаҳои тоқрибии муодилаи $f(x) = 0$ дода шуда бошад, дар қадам ҳолати ξ – ро решаи ин муодила мегӯянд?
- Агар муодилаи $f(x) = 0$ дода шуда бошад, қарар мекунед, ки $f(x) = 0$ қарар мекунад?
- Бо қадам максималӣ решаи муодилаи $f(x) = 0$ қарар мекунед?
- Этапҳои асосии ёфтани ҳалҳои тақрибии муодилаи $f(x) = 0$ қарар мекунед.
- Агар $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – функсияи бефосила, мутлақ монотонӣ буда, $f(a)f(b) < 0$ бошад, он гоҳ дар порчаи додошуда решаи муодилаи $f(x) = 0$ мавҷуд аст. Ин чӣ маъно дорад?
- Ҷудокунии решаҳои муодилаи $f(x) = 0$ қарар мекунед?

10. Агар дар ду нуктаҳои ҳамсоя аргумент кимати функсияи аломатҳои гуногун дошта бошад, он гоҳ решаи муодилаи $f(x) = 0$ дар кучо ҷустуҷӯ карда мешавад?
11. Мавҷуд будани решаҳои муодиларо ба таври графикӣ тасвир кардан мумкин аст?
12. Ҷояи асосии методи ба ҳиссаҳои баробар тақсим намуни порча чист?
13. Ҳангоми иҷро шудани кадом шартҳо порча ба ду ҳиссаи баробар тақсим карда мешавад?
14. Ҷояи асосии методи хордаҳо чист?
15. Мазмуни истифодаи методи хордахоро ба таври геометрии тасвир кунед.
16. Дар методи хордаҳо ҷараёни итератсия аз он иборат аст, ки ба сифати решаҳои тақрибии муодила киматҳои $x_0, x_1, \dots$ нуктаҳои буриши хордаҳо бо ... қабул карда мешаванд.
17. Дар ҳолате, ки нӯги порча a беҳаракат бошад, он гоҳ $x_0 = b$ шуда, решаҳои тақрибии муодила бо кадом формулаи итератсионӣ ёфта мешаванд?
18. Дар кадом ҳолат пайдарпаии наздиккунии решаҳои муодилаи пайдарпаии монотонӣ камшавандаи маҳдудро ташкил медиҳад?
19. Дар ҳолате, ки нӯги порча b беҳаракат бошад, он гоҳ $x_0 = a$ шуда, решаҳои тақрибии муодила бо кадом формулаи итератсионӣ ёфта мешаванд?
20. Дар кадом ҳолат пайдарпаии наздиккунии решаҳои муодилаи пайдарпаии монотонӣ афзуншавандаи маҳдудро ташкил медиҳад?
21. Ҷараёни табиқи методи хордаҳо то ҳолате давом мекунад, ки агар нобаробарии ... иҷро нашавад.
22. Ҷояи асосии методи расандаҳо чист?
23. Барои ёфтани решаҳои муодилаи $f(x) = 0$ бо ёрии методи расандаҳо формулаи зерини итератсионӣ истифода бурда мешавад.
24. Мазмуни истифодаи методи расандаҳо ба таври геометрии тасвир кунед.
25. Мазмуни истифодаи методи муштаракро ба таври геометрии тасвир кунед.
26. Ҳангоми муттаҳид намудани методҳои хордаҳо ва расандаҳо кадом методи нав пайдо мешавад?
27. Барои табиқи методи муштарак аз кадом формулаҳои истифода мебаранд?

У. НАЗАРИЯИ ИНТЕРПОЛЯТСИЯИ ФУНКСИЯҲО

5.1. Ҷузориши масъалаи интерполятсия

Инзор функсияи $y = f(x)$ дода шуда бошад. Ба воситаи Δx фарқи аргументи (қадами) ин функсияро ишора мекунем. Он гоҳ фарқи намуни

$$\Delta y \equiv \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

фарқи охиринокӣ тартиби якуми функсияи додашуда номида мешавад. Аз рӯи формулаи $\Delta^2 y = \Delta(\Delta y)$ фарқи охиринокӣ тартиби дуюмро ҳисоб мекунамд, яъне

$$\Delta^2 y = \Delta[f(x + \Delta x) - f(x)] = [f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)] - [f(x + \Delta x) - f(x)] = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x).$$

Ин ҳисобкуниҳоро давом дода, фарқҳои охиринокӣ тартиби n - ро муайян кардан мумкин аст

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y) \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Ҳисёр ҳолатҳо чунин функсияи $y = f(x)$ - ро дидан зарур мешавад, ки он дар намуни ҷадвал $y_i = f(x_i)$, барои системаи нуктаҳои мунтазам ҷойгиршудаи x_i ($i = 0, 1, 2, \dots$), дода шудааст, яъне барои системаи нуктаҳои

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{const.}$$

Фарқҳои охиринокӣ пайдарпаии y_i аз рӯи формулаҳои зерин ҳисоб карда мешаванд:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i,$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta(\Delta^2 y_i) = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i, \dots$$

$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i.$$

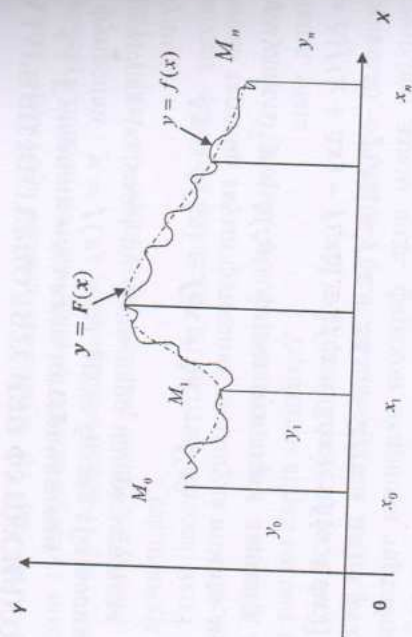
Ҷузориши масъалаи интерполятсияро чунин баён кардан мумкин аст. Дао порчаи $[a, b]$ ба миклори $n + 1$ нуктаҳои $x_0, x_1, \dots, x_n$ дода шудаанд, ки ин нуктаҳоро гиреҳҳои интерполятсия меноманд. Киматҳои функсияи $f(x)$ низ дар ин нуктаҳо дода шудаанд.

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n).$$

Чунин функсияи $F(x)$ сохта шавад, ки дар дар гиреҳҳои интерполятсионӣ киматҳои мувофиқи функсияи $f(x)$ - ро қабул кунад, яъне

$$y_0 = F(x_0), y_1 = F(x_1), \dots, y_n = F(x_n).$$

Маънои геометрии масъалаи интерполятсия аз он иборат аст: чунин хати қачи $y = F(x)$ ёфта шавад, ки (расми 1) системаи нуктаҳои додашудаи $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) - ро бурида гузаранд.



Расми 1.

5.2. Бисёраъзогиҳои интерполёсионии Нютон

Бигзор барои функсия $y = f(x)$ қиматҳои $y_i = f(x_i)$ хангоми мунтазам будани қиматҳои тағйирёбандаҳои новобастаи $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$, h - қадами интерполётсия), дода шуда бошад. Чунин полиноми $P_n(x)$, ки дараҷааш аз n калон набояд ва дар нуктаҳои x_i қиматҳои мувофиқи $P_n(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) қабул кунад. Ин шартҳо ба он баробаркуванд, ки $\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0$ хангоми $m = 0, 1, 2, \dots, n$ будан иҷро мешаванд.

Ҳамин гуна полиноми $P_n(x)$ - ро дар намуди зерин ҷустуҷӯ мекунем

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}).$$

Аз ҳосиятҳои дараҷаҳои умумикардшуда истифода бурда, ин полиномро чунин менависем

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + \dots + a_n(x - x_0)^{[n]}. \quad (1)$$

Мо бояд коэффисиентҳои a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) - ро дар полиноми $P_n(x)$ муайян кунем. Дар баробарии (1) гузориши $x = x_0$ - ро иҷро намуда, ҳосил мекунем

$$P_n(x_0) = y_0 = a_0.$$

Барои муайян намудани коэффисиенти a_1 фарқҳои охиноки баробарии (1) - ро тартиб медиҳем

$$\Delta P_n(x) = a_1 h + 2a_2(x - x_0)^{[1]} h + 3a_3(x - x_0)^{[2]} h + \dots + na_n(x - x_0)^{[n-1]} h.$$

Дар баробарии охири $x = x_0$ қабул карда, пайдо мекунем

$$\Delta P_n(x_0) = \Delta y_0 = a_1 h,$$

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Барои муайян намудани коэффисиенти a_2 фарқҳои охиноки тартиби дуюми (1) - ро тартиб медиҳем

$$\Delta^2 P_n(x) = 2! h^2 a_2 + 2 \cdot 3 h^2 a_3(x - x_0)^{[1]} + \dots + (n-1) \cdot n h^2 a_n(x - x_0)^{[n-2]}.$$

Гузориши $x = x_0$ - ро иҷро намуда, соҳиби

$$\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta^2 y_0 = 2! h^2 a_2,$$

ёнашем ва аз ин ҷо

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}.$$

Чунин қараёни ҳисобкунихоро давом дода, ба ҳулосае мероем, ки барои ҳама гуна коэффисиентҳои a_k баробарии зерин дуруст аст

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Ҳама коэффисиентҳои ёфтамон a_k - ро дар баробарии (1) гузошта, полиноми интерполёсионии Нютонро соҳиб мешавем

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h}(x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)^{[2]} + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)^{[n]}.$$

Ин полиноми ҳосилшуда ҳама шартҳои дар ибтидо гузоштамонро қаноат мекунад.

Барои дар амалия татбиқ намудани формулаи интерполёсионии Нютон, одатан онро дар дигар намуд менависанд. Бо ин мақсад, параметри нави q - ро дар намуди формулаи $q = \frac{x - x_0}{h}$ дохил мекунем.

Он гоҳ

$$\begin{aligned} \frac{(x - x_0)^{[k]}}{h^k} &= \frac{x - x_0}{h} \cdot \frac{x - x_0 - h}{h} \cdot \frac{x - x_0 - 2h}{h} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_0 - (n-1)h}{h} = \\ &= q(q-1)(q-2) \dots (q-k+1) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Ин ифодаҳоро дар формулаи интерполёсионии Нютон гузошта, натиҷаи зеринро дастрас менамоем

$$P_n(x) = y_0 + q \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1) \dots (q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (2)$$

дар ин ҷо $q = \frac{x - x_0}{h}$ - микдори қадамҳои интерполётсия, ки аз нуктаи x_0 ибтидо гирифта, барои дарёфт намудани нуктаҳои x истифода

бурда мешавад. Формулаи (2) — ро **формулаи интерполясионии Нютон** меноманд.

Истифодаи формулаи (2) хангоми интерполатсияи функсияи $y = f(x)$ дар наздикии қимати ибтидоии аргумент x_0 кулай аст.

Агар дар формулаи (2) $n = 1$ гузорем, он гоҳ формулаи интерполатсияи якумин хаттиро ҳосил мекунем, ки намуни зеринро дорад

$$P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0.$$

Хангоми $n = 2$ будан, формулаи параболӣ ва ё формулаи интерполатсияи квадратиро соҳиб мешавем

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0.$$

Табиики формулаи якуми интерполатсионии Нютон дар наздикии қимати интиҳои аргумент x_n нокулай аст. Бинобар, дар чунон ҳолатҳо одатан, формулаи дуҷуми интерполатсионии Нютонро истифода бурдан мувофиқи мақсад аст. Акнун барои ҳосил намудани ин формула шурӯъ менамоем.

Бигзор системаи қиматҳои функсияи $y_i = y(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) барои қиматҳои мунтазами аргумент $x_i = x_0 + ih$ дода шуда бошад.

Полиноми интерполатсионии зеринро тартиб медиҳем

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \dots (x - x_1),$$

ва ё дараҷаҳои умумикардшударо истифода бурда, дорон баробарии зерин мешавем

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n)^{[1]} + a_2(x - x_{n-1})^{[2]} + a_3(x - x_{n-2})^{[3]} + \dots + a_n(x - x_1)^{[n]}. \quad (3)$$

Дар формулаи (3) гузориши $x = x_n$ — ро иҷро карда, ҳосил мекунем

$$P_n(x_n) = y_n = a_0.$$

Аз ин ҷо $a_0 = y_n$ мешавад.

Дар формулаи (3) фарқҳои охирии тартиби якумро муайян мекунем

$$\Delta P_n(x) = a_1 \cdot 1h + a_2 \cdot 2h(x - x_{n-1})^{[1]} + a_3 \cdot 3h(x - x_{n-2})^{[2]} + \dots + a_n \cdot nh(x - x_1)^{[n-1]}.$$

Дар ин баробарӣ $x = x_{n-1}$ гузорем, баробарии

$$\Delta P_n(x_{n-1}) = \Delta y_{n-1} = a_1 h.$$

Ҳосил мешавад ва аз ин ҷо пайдо мекунем

$$a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}.$$

қимати тағйир фарқҳои охирии тартиби дуҷумро барои полиноми $P_2(x)$ тартиб дода, ба натиҷаи зерин меёсем

$$\Delta^2 P_n(x) = a_2 \cdot 2! h^2 + a_3 \cdot 3 \cdot 2h^2(x - x_{n-2})^{[1]} + \dots + a_n \cdot n(n-1)h^2(x - x_1)^{[n-2]}.$$

Дар ин баробарӣ $x = x_{n-2}$ мегузорем

$$\Delta^2 P_n(x_{n-2}) = \Delta^2 y_{n-2} = a_2 \cdot 2! h^2$$

ва коэффиенти a_2 — ро ҳисоб мекунем

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! h^2}.$$

Ин чараёни ҳисобро давом дода, бо методи индуксияи математикӣ боварӣ ҳосил мекунем, ки

$$a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k! h^k}.$$

Коэффиентҳои ёфташудаи a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) — ро ба формулаи (1) мегузорем ва полиноми интерполатсионии зеринро дорон мешавем

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1! h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3! h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \dots (x - x_1). \quad (4)$$

Ин формулаи номи формулаи дуҷуми интерполатсионии Нютонро гирифтааст.

Формулаи дуҷуми интерполатсионии Нютонро дар намуни инсбатан кулай навиштан мумкин аст. Бигзор $q = \frac{x - x_n}{h}$ бошад, он гоҳ

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_n + h}{h} = q + 1, \quad \frac{x - x_{n-2}}{h} = q + 2, \dots$$

Ин ифодаҳоро дар формулаи (4) мегузорем ва соҳиби чунон полином мешавем

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!} \Delta^3 y_{n-3} + \dots + \frac{q(q+1)(q+2) \dots (q+n-1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (5)$$

Формулаи (5) **формулаи дуҷуми интерполатсионии Нютон** номида мешавад.

Аз рӯи қадвали қиматҳои пешакӣ додашудаи функсияи $f(x)$ ёфтани функсияи наздиқашавдан $\varphi(x)$: $f(x) \approx \varphi(x)$, хангоми иҷро шудани шартӣ мувофиқат намудани функсияҳои $f(x)$ ва $\varphi(x)$ дар

нуктаҳои x_i , яъне $f(x_i) = \varphi(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), интерполирош **функсияи $f(x)$** номида мешавад. Дар ин ҷо $\varphi(x)$ **функсияи интерполантикунӣ** номида шуда, x_i - ғиреҳои интерполантия.

Формулаҳои интерполантиро одатан барои тақрибан ҷамъ намудани қиматҳои функсияи $f(x)$, ки дар шакли ҷадвал дода шудааст, барои қиматҳои аз ғиреҳои интерполантия фарқундаи x , истифода мебаранд.

Мисоли 1. Функсияи $y = f(x)$ дар шакли ҷадвал дода шумораи Формулаи интерполантии якум ва ё дуҷуми Нютонро истифода намуда, қиматҳои $f(x)$ барои қиматҳои аргумент $x_1 = 1,52$, $x_2 = 1,837$ ҳисоб карда шаванд. Ҳисобкуниҳо бо саҳеҳии то 0,001 иҷро карда шаванд.

x_i	1,5	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90
y_i	1,67	2,12	2,47	2,90	3,35	3,82	4,30	4,81	5,35

Ҳал. Пеш аз ҳама ҷадвали фарқҳои охирикро тартиб медиҳем

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$	$\Delta^7 y_i$	$\Delta^8 y_i$
1,5	1,67	0,45	-0,1	0,19	-0,26	0,3	-0,25	-0,01	0,72
1,55	2,12	0,35	0,09	-0,07	0,04	0,05	-0,26	0,71	-
1,60	2,47	0,44	0,02	-0,03	0,09	-0,21	0,45	-	-
1,65	2,91	0,46	-0,01	0,06	-0,12	0,24	-	-	-
1,70	3,37	0,45	0,05	-0,06	0,12	-	-	-	-
1,75	3,82	0,5	-0,01	0,06	-	-	-	-	-
1,80	4,32	0,49	0,05	-	-	-	-	-	-
1,85	4,81	0,54	-	-	-	-	-	-	-
1,90	5,35	-	-	-	-	-	-	-	-

Ҳангоми пур кардан катакчаҳои ҷадвали овардашуда, формулаҳои зерин истифода бурда шудааст:

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}; \quad \Delta^2 y_i = \Delta y_i - \Delta y_{i-1}; \quad \Delta^3 y_i = \Delta^2 y_i - \Delta^2 y_{i-1}; \dots$$

Вобаста аз ҷойгиршави нуктаҳо, ки дар онҳо ёфтани қимати функсияи ҷадвалӣ талаб карда мешавад, формулаи якум ва ё дуҷуми интерполантии Нютон истифода бурда мешавад.

Агар нуктаи ёфташаванда x^* ба нуктаи x_0 наздик бошад ва шарт $x^* > x_0$ иҷро гардад, он гоҳ формулаи интерполантии якуми Нютон истифода бурда мешавад, яъне формулаи

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

дар ин ҷо $p = \frac{x-x_0}{h}$, $h = x_i - x_{i-1}$.

Агар нуктаи ёфташаванда x^* ба нуктаи x_n наздик бошад ва шарт $x^* < x_n$ иҷро гардад, он гоҳ формулаи интерполантии дуҷуми Нютон истифода бурда мешавад, яъне формулаи

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \dots + \frac{q(q+1)(q+2)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

дар ин ҷо $q = \frac{x-x_n}{h}$, $h = x_i - x_{i-1}$.

Мувофиқи шартӣ масъала нуктаи $x_1 = 1,52$ ба нуктаи $x = 1,5$ наздиктар аст ва шарт $1,52 > 1,5$ иҷро мешавад. Бинобар, барои ёфтани қимати функсия дар ин нукта аз формулаи якуми интерполантии Нютон истифода мебарем. Дар ин ҷо

$$h = x_i - x_{i-1} = 1,55 - 1,5 = 0,05; \quad p = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1,52 - 1,5}{0,05} = 0,4.$$

Ин қиматҳоро ба формулаи (2) гузошта, ҳосил мекунем

$$\begin{aligned} P_n(1,52) &= 1,67 + 0,4 \cdot 0,45 + \frac{0,4(0,4-1)}{2!} \cdot (-0,1) + \\ &+ \frac{0,4(0,4-1)(0,4-2)}{3!} \cdot 0,19 + \frac{0,4(0,4-1)(0,4-2)(0,4-3)}{4!} \cdot (-0,26) + \\ &+ \frac{0,4(0,4-1)(0,4-2)(0,4-3)(0,4-4)}{5!} \cdot 0,3 + \\ &+ \frac{0,4(0,4-1)(0,4-2)(0,4-3)(0,4-4)(0,4-5)}{6!} \cdot (-0,25) + \\ &+ \frac{0,4(0,4-1)(0,4-2)(0,4-3)(0,4-4)(0,4-5)(0,4-6)}{7!} \cdot (-0,01) = \\ &= 1,67 + 0,18 + \frac{0,024}{2} + \frac{0,073}{6} + \frac{0,2596}{24} + \frac{1,0783}{120} + \frac{4,1334}{720} = \\ &= 1,85 + 0,012 + 0,0122 + 0,0108 + 0,009 + 0,0057 + 0,0002 + \\ &+ 0,0109 = 1,9104. \end{aligned}$$

Ҳамин тавр, $P_n(1,52) \approx 1,9104$ ҳосил шуд.

Ҷавоб: $P_n(1,52) \approx 1,9104$.

Акун қимати функсияро дар нуктаи $x_2 = 1,837$ ҷустуҷӯ мекунем. Нуктаи $x_2 = 1,837$ ба нуктаи $x = 1,85$ наздиктар аст ва шарт $1,85 > 1,837$ иҷро мешавад. Бинобар барои ёфтани қимати функсия дар ин нукта аз формулаи дуҷуми интерполантии Нютон истифода мебарем. Дар ин ҷо

$$h = x_i - x_{i-1} = 1,55 - 1,5 = 0,05; \quad q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{1,837 - 1,85}{0,05} = -0,26.$$

Ин киматхоро ба формулаи (5) гузошта, ҳосил мекунем

$$P_n(1,837) = 4,81 + (-0,26) \cdot 0,54 + \frac{-0,26 \cdot (-0,26 + 1)}{2} \cdot 0,05 = 4,81 - 0,1404 - \frac{0,0096}{2} = 4,6648.$$

Ҳамин тавр, $P_n(1,837) \approx 0,6648$ мешавад.

Ҷавоб: $P_n(1,837) \approx 4,6648$

5.3. Формулаи интерполясионии Лагранж

Формулаҳои интерполясионии Нютон дар ҳолатҳои таъбиқ қарин мешаванд, ки ғиреҳои интерполясия мунтазам ҷойгир шуда бошанд. Дар ҳолатҳои, ки масофаи байни ғиреҳои интерполясионии гуногунанд, формулаи нисбатан умумикардшуда истифода бурда мешавад, ки формулаи интерполясионии Лагранж меноманд.

Бигзор дар порчаи $[a, b]$ дар $n+1$ нукта киматҳои гуногуни аргументҳо $x_0, x_1, \dots, x_n$ дода шуда бошанд ва барои ин аргументҳои киматҳои мувофиқи функсияи $y = f(x)$ маълум бошанд:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n).$$

Чунин бисёрзағии $L_n(x)$ ёфта шавад, ки дараҷаи он аз n калон набошад ва дар ғиреҳои интерполиронӣ ҳамон киматҳои мувофиқи функсияи $f(x)$ – ро доро бошад, яъне полиномҳои намуни

$$y_0 = L_n(x_0), y_1 = L_n(x_1), \dots, y_n = L_n(x_n).$$

Ҳамин гуна полином $L_n(x)$, ки шартҳои болоиро қаноат мекунад, яъне $L_n(x_i) = y_i$ намуни зерин дорад

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

Ин формуларо **формулаи интерполясионии Лагранж** меноманд, ки ҳангоми ғайримунтазам ҷойгиршавии ғиреҳои интерполясия истифода бурда мешавад.

Мисоли 2. Ҷадвали киматҳои функсияи $y = f(x)$ дода шудааст.

x	1	3	4	5
$y = f(x)$	3,4	4,7	5,2	5,8

Полиноми Лагранжро ёбед.

Ҳал. Киматҳои дар ҷадвал овардашударо дар формулаи Лагранж гузошта, бисёрзағиро тартиб медиҳем

$$L_n(x) = \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-3)(1-4)(1-5)} \cdot 3,4 + \frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-4)(3-5)} \cdot 4,7 +$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(5-1)(5-3)(5-4)} \cdot 5,2 + \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(x^3-12x^2+37x-60) \cdot 3,4 + \frac{4}{x^3-9x^2+23x-15} \cdot 5,2 + \frac{-4}{x^3-12x^2+37x-60} \cdot (-0,1417) + (x^3-10x^2+29x-20) \cdot 1,175 + \\ &+ (x^3-9x^2+23x-15) \cdot 1,733 + (x^3-8x^2+19x-12) \cdot (-1,45) = \\ &= -0,1417x^3 + 1,7x^2 - 5,2429x + 8,502 + 1,175x^3 - 11,75x^2 + 34,075x - \\ &- 23,5 + 1,733x^3 - 15,597x^2 + 39,859x - 25,995 - 1,45x^3 + 11,6x^2 - \\ &- 27,55x + 21,75 = 1,3163x^3 - 14,047x^2 + 41,1411x - 19,243. \end{aligned}$$

Ҳамин тавр, полиноми Лагранж барои масъалаи матлуб намуни зерин мегирад

$$L_n(x) = 1,3163x^3 - 14,047x^2 + 41,1411x - 19,243.$$

Маълум, агар кимати аргумент $x = 3,14$ дода шуда бошад, бо ёрии формулаи интерполясионии лагранж кимати онро меёбем. Бо ин мақсад, кимати додашудаи аргумент $x = 3,14$ – ро ба формулаи

$$\begin{aligned} L_n(3,14) &= 1,3163 \cdot 3,14^3 - 14,047 \cdot 3,14^2 + 41,1411 \cdot 3,14 - 19,243 = \\ &= 3,14 \cdot 30,9591 - 14,047 \cdot 9,8596 + 41,1411 \cdot 3,14 - 19,243 = \\ &= 97,2116 - 138,4978 + 129,1831 - 19,243 = 68,6539. \end{aligned}$$

5.4. Ҷадвали фарқҳои марказӣ

Ҳангоми тартиб додани формулаҳои интерполясионии Нютон танҳо киматҳои истифода бурда мешаванд, ки дар як тарафи ғиреи интиҳобшуда меҳобанд, яъне ин формулаҳои Нютонро характери яктарафа ҳисобкунӣ ҳисоб мекунанд.

Ҷадвали 5.1

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
x_{-4}	y_{-4}						
		Δy_{-4}					
x_{-3}	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$				
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$			
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$		
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-4}$
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$

x_1	y_1	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_1$
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_2$	$\Delta^5 y_2$
x_4	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$	$\Delta^4 y_3$	$\Delta^5 y_3$

Ин фаркҳои охирик $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \dots$ (қадвали 5.1), фаркҳои марказӣ номиди мешаванд, ки дар ин ҷо

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad y_i = f(x_i),$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i; \quad \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \dots$$

мебошанд. Формулаҳои интерполясионии Гаусс, Стирлинг ва Бессел бо ёрии чунон фаркҳои марказӣ тартиб дода мешаванд.

5.5. Формулаҳои интерполясионии Гаусс

Бигзор $2n + 1$ ғирехҳои мунтазам ҷойгиршудаи интерполанти дода шуда бошад

$$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n,$$

дар ин ҷо $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \text{const}$ ($i = -n, -(n-1), \dots, n-1$),

ва барои функсия $y = f(x)$ дар ғирехҳои қиматҳои маълум бошад, яъне

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n).$$

Чунон полиноми $P(x)$, ки дараҷааш аз $2n$ хурд аст, тартиб додан шавад, ки

$$P(x_i) = y_i \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n)$$

бошад.

Аз шартҳои охири небарояд, ки

$$\Delta^k P(x_i) = \Delta^k y_i \quad (5.1)$$

барои ҳама қиматҳои мувофиқи i ва k ҷой дорад.

Полиноми лозимро дар шакли зерин ҷустуҷӯ мекунем

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + a_5(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + \dots + a_{2n-1}(x - x_{-(n-1)}) \dots + (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + a_{2n}(x - x_{-(n-1)}) \dots (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

ба ҷо дараҷаи умумикардшударо истифода бурда, ба

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + a_3(x - x_0)^{[2]} + \dots + a_{2n-1}(x - x_{-(n-1)})^{[2n-1]} + a_{2n}(x - x_{-(n-1)})^{[2n]}. \quad (5.2)$$

Ҳамаи коэффисиентҳои a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 2n$) усули ҳисоб кардани коэффисиентҳои Нютон истифода бурдамонро татбиқ карда, дар формулаҳои (5.1), пайдарпай меёбем

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!h}, \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}, \quad a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}, \quad a_4 = \frac{\Delta^4 y_0}{4!h^4}, \dots, \\ a_{2n-1} = \frac{\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{(2n-1)!h^{2n-1}}, \quad a_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!h^{2n}}.$$

Ҳаминанд, бо $q = \frac{x - x_0}{h}$ ишора карда, онро ба формулаи (5.2) ҷойгузорем ва формулаи якуми интерполясионии Гауссро соҳиб

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)(q-3)}{5!}\Delta^5 y_0 + \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\dots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}.$$

ва 6

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{(q+1)^{[3]}}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{(q+1)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_0 + \dots + \frac{(q+n-1)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} + \frac{(q+n-1)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}.$$

дар ин ҷо $x = x_0 + qh$, $q^{[m]} = q(q-1)(q-2)\dots(q-(m-1))$. Формулаи якуми интерполясионии Гаусс фаркҳои марказии зеринро соҳиб аст

$$\Delta y_0, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-1}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-2}, \Delta^6 y_{-3}, \dots$$

Айнан ҳамин тавр формулаи дууми интерполясионии Гауссро

ёфтани мумкин аст, ки фаркҳои марказии зеринро дорад

$$\Delta y_{-1}, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-2}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-3}, \Delta^6 y_{-3}, \dots$$

Формулаи дууми интерполясионии Гаусс чунон намуна дорад:

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \frac{5!}{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)} \Delta^5 y_{-3} + \dots + \frac{(q+n-1) \dots (q-n+1)}{(2n-1)!} \Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(q+n)(q+n-1) \dots (q-n+1)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n},$$

ва ё

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)^{[2]}}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[3]}}{3!} \Delta^3 y_{-2} + \frac{(q+2)^{[4]}}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!} \Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(q+n)^{[2n]}}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n},$$

где $x = x_0 + qh$, $q^{[m]} = q(q-1)(q-2) \dots (q-(m-1))$.

5.6. Формулаи интерполационии Стирлинг

Миёнаи арифметикии формулаҳои якум ва дуҷои Гауссро гирифта, формулаи интерполационии Стирлингро сохиб мешавем

$$P(x) = y_0 + q \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2} \Delta^2 y_{-1} + \frac{3!}{q(q^2-1^2)} \Delta^3 y_{-1} + \frac{q^2(q^2-1^2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{5!} \Delta^5 y_{-1} + \frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{6!} \Delta^6 y_{-2} + \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2) \dots (q^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!} \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)(q^2-3^2) \dots (q^2-(n-1)^2)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n},$$

где $q = \frac{x-x_0}{h}$.

5.7. Формулаи интерполационии Бессел

Ғайр аз формулаи Стирлинг, боз формули интерполационии Бессел истифода бурда мешавад. Барои ҳосил намудани формулаи интерполационии Бессел аз формулаи дуҷои Гаусс истифода мебарем.

Бигзор $2n+2$ гирифта мунтазам ҷойгиршудаи интерполационии $x_{-n}, x_{-(n-1)}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$

ба қадми h дода шуда буда, $y_i = f(x_i)$ ($i = -n, \dots, n+1$) — қиматҳои функсияи $y = f(x)$ бошанд.

Агар ба сифати қиматҳои ибтидоӣ $x = x_0$ ва $y = y_0$ интихоб карда шаванд, он гоҳ тавассути гирифтаи x_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$), ҳосил мешавад:

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{2!}{(q+2)(q+1)q(q-1)} \Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+1)q}{3!} \Delta^3 y_{-2} + \frac{4!}{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)} \Delta^5 y_{-3} + \dots + \frac{(q+n-1) \dots (q-n+1)}{(2n-1)!} \Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(q+n)(q+n-1) \dots (q-n+1)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n}, \quad (5.3)$$

Аммо ба сифати қиматҳои ибтидоӣ $x = x_1$ ва $y = y_1$ қабул карда, гирифтаи x_{1+k} ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$) — ро дида мебароем. Он гоҳ $\frac{x-x_1}{h} = \frac{x-x_0-h}{h} = q-1$

мешавад. Дар формулаи (5.3) ҳама индексҳои фарқҳои охирик ба як вохид зиёд шудаанд. Дар тарафи ростии формулаи (5.3) $q-1$ ба q иваз намуда, индексҳои фарқҳои охирик ба як вохид зиёд мекунем ва соҳиби формулаи интерполационии зерин мегардем

$$P(x) = y_0 + (q-1)\Delta y_0 + \frac{2!}{(q+1)q(q-1)(q-2)} \Delta^4 y_{-1} + \frac{4!}{(q+1)q(q-1)(q-2)(q-3)} \Delta^5 y_{-2} + \dots + \frac{(q+n-2) \dots (q-n)}{(2n-1)!} \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)(q+n-2) \dots (q-n)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-(n-1)}. \quad (5.4)$$

Миёнаи арифметикии формулаҳои (5.3) ва (5.4) — ро гирифта, баъди баъзе табдилотҳо, ба формулаи интерполационии Бессел сохиб мешавем

$$P(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + \left(q - \frac{1}{2}\right) \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \Delta^2 y_{-1} + \frac{\Delta^2 y_0}{2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(q - \frac{1}{2}\right)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} \\
& + \frac{\left(q - \frac{1}{2}\right)q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!} \Delta^5 y_{-1} + \\
& + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q-3)}{6!} \Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2} + \dots + \\
& + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2) \dots (q-n)(q+n-1)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n+1} + \\
& + \frac{\left(q - \frac{1}{2}\right)q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2) \dots (q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} y_{-n}
\end{aligned}$$

ки дар ин ҷо $q = \frac{x-x_0}{h}$ мебошад.

Формулаи интерполясионии Бессел, тавре аз усули ҳосилшавиши дида мешавад полиномест, ки бо функсияи додашудаи $y = f(x)$ дар $2n+2$ нуктаҳои

$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$ мувофиқат мекунад.

Дар ҳолати хусусӣ бошад, ҳангоми $n = 1$ будан, агар фарқи $\Delta^3 y_{-1}$ ба назар нагирем, дорой формулаи квадратии интерполясионии Бессел мешавем

$$P(x) = \frac{y_0 + y_0 + \Delta y_0}{2} + \left(q - \frac{1}{2}\right) \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \cdot \frac{\Delta y_0 - \Delta y_{-1} + \Delta y_1 - \Delta y_0}{2}$$

ва ё

$$P(x) = y_0 + q \Delta y_0 - q_1 (\Delta y_1 - \Delta y_{-1}) \left(q_1 = \frac{q(q-1)}{4} \right).$$

Акнун ҳалли масъалаеро дида мебароем, ки бо татбиқи формулаҳои Гаусса, Стирлинг ва Бессел ҳал карда мешавад.

Мисоли 3. Бо ёрии формулаҳои интерполясионии Гаусс, Стирлинг ва Бессел, қиматҳои тақрибии функсияи $y = f(x)$, ҳангоми қиматҳои додашудаи аргумент 1) $x = 0,168$; 2) $x = 0,192$; 3) $x = 0,204$; 4) $x = 0,175$ ҳисоб карда шаванд. Функсияи $y = f(x)$ дар намууди ҷадвали зерин дода шудааст:

x	$y(x)$	x	$y(x)$	x	$y(x)$
0,1	6,278	0,16	6,487	0,20	6,436
0,14	6,405	0,18	6,505	0,22	6,259
0,24	5,954				

Ҳол, Ҷадвали фарқҳои марказии диагоналии функсияи $y = f(x)$ ро тартиб медиҳем

x_i	$y(x_i)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
$x_{-3} = 0,12$	$y_{-3} = 6,278$			
$x_{-2} = 0,14$	$y_{-2} = 6,404$	0,126		
$x_{-1} = 0,16$	$y_{-1} = 6,487$	0,083	-0,043	
$x_0 = 0,18$	$y_0 = 6,505$	0,018	-0,065	-0,022
$x_1 = 0,20$	$y_1 = 6,436$	-0,069	-0,087	-0,021
$x_2 = 0,22$	$y_2 = 6,259$	-0,177	-0,108	-0,020
$x_3 = 0,24$	$y_3 = 5,954$	-0,305	-0,128	

Азбаски қиматҳои фарқҳои марказии тартиби сеюм ба ҳам наздиканд, бинобар ҷадвалро то ин тартиби фарқҳо тартиб додем.

1). Барои ҳисоб кардани қимати $y(0,168)$ аввал $x_0 = 0,16$ қабул мекунем. Он гоҳ ҳангоми $h = 0,14 - 0,12 = 0,02$ будан, ба $q = \frac{x-x_0}{h} = \frac{0,168-0,16}{0,02} = 0,4$ соҳиб мешавем

Аз формулаи якуми интерполясионии Гаусс истифода мебарем $y(x) \approx P(x) = y_0 + q \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1}$. Барои ҳисоб кардани қимати $y(0,168)$, ҳосил мекунем

$$\begin{aligned}
y(0,168) &= 6,487 + 0,4 \cdot 0,018 + \frac{0,4 \cdot (-0,6)}{2} \cdot (-0,065) + \\
&+ \frac{1,4 \cdot 0,4 \cdot (-0,6)}{6} \cdot (-0,022) \approx 6,487 + 0,0072 + 0,0078 + 0,0012 = \\
&= 6,5032 \approx 6,503.
\end{aligned}$$

Ҷавоб: $y(0,168) \approx 6,503$.

2). Барои ҳисоб кардани қимати $y(0,192)$ қимати ибтидоиро $x_0 = 0,18$ интихоб мекунем ва қимати q - ро меёбем

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0,192 - 0,18}{0,02} = 0,6.$$

Формулаи интерполятсионии Бесселро

$$y(x) \approx P(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + \left(q - \frac{1}{2}\right) \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{\left(q - \frac{1}{2}\right) q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \dots$$

татбик намуда, ҳосил мекунем

$$\begin{aligned} y(0,192) &\approx \frac{6,505 + 6,436}{2} + (0,6 - 0,5) \cdot (-0,069) + \\ &+ \frac{0,6 \cdot (-0,4)}{2} \cdot \frac{-0,087 - 0,018}{2} + \frac{(0,6 - 0,5) \cdot 0,6 \cdot (-0,4)}{6} \cdot (-0,021) \approx \\ &\approx 6,4705 - 0,0069 + 0,0117 + 0,0001 = 6,4754 \approx 6,475. \end{aligned}$$

3). Барои ҳисоб кардани қимати $y(0,204)$ мо $x_0 = 0,20$ қабул мекунем. Он гоҳ $q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0,204 - 0,20}{0,02} = 0,2$.

Формулаи интерполятсионии Стирлингро, ки намуни зерин дорад

$$P(x) = y_0 + q \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{6} + \frac{q(q^2 - 1^2)}{6} \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2},$$

истифода бурда, ҳосил мекунем

$$\begin{aligned} y(0,204) &\approx 6,436 + 0,2 \cdot \frac{-0,069 - 0,177}{2} + \frac{0,04}{2} \cdot \frac{0,04}{2} \cdot (-0,108) + \\ &+ \frac{0,2 \cdot (0,04 - 1)}{6} \cdot \frac{-0,021 - 0,020}{2} \approx \\ &\approx 6,436 - 0,0246 - 0,0022 + 0,0007 = 6,4099 \approx 6,410. \end{aligned}$$

4). Барои ҳисоб кардани қимати $y(0,175)$ пешакӣ $x_0 = 0,18$ қабул карда, q - ро меёбем

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0,175 - 0,18}{0,02} = -0,25.$$

Акнун аз формулаи дуюми интерполятсионии Гаусс

$$P(x) = y_0 + q \Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-2}$$

истифода намуда, соҳиб мешавем

$$\begin{aligned} y(0,175) &\approx 6,505 + (-0,25) \cdot 0,018 + \frac{0,75 \cdot (-0,25)}{2} \cdot (-0,087) + \\ &+ \frac{0,75 \cdot (-0,25) \cdot (-1,25)}{6} \cdot (-0,022) \approx \end{aligned}$$

$$\approx 6,505 - 0,0045 + 0,0082 - 0,0009 = 6,5078 \approx 6,508.$$

Ҷавоб: $y(0,175) \approx 6,508$.

5.8. КОРИ ЛАБОРАТОРИЙ

Намунаи иҷрои супориш

Супориш. Фарқҳои охириҳои тартиби 3-юмро ҳангоми $\Delta x = 1$ будан, ёфта шавад

$$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3.$$

Ҳал. Маълум аст, ки фарқи охириҳои тартиби якуми функсия $y = f(x)$ аз рӯи формулаи зерин ҳисоб карда мешавад

$$\Delta y \equiv \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Мувофиқи шарт масъала $\Delta x = 1$ аст, бинобар

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x+1)^3 - 2(x+1)^2 + (x+1) - 3 - (x^3 - 2x^2 + x - 3) = \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2(x^2 + 2x + 1) - 3 - x^3 + 2x^2 - x + 3 = \\ &= 5x^2 + 2x + 1 - 2x^2 - 4x - 2 = 3x^2 - 2x - 1. \end{aligned}$$

Аз рӯи формулаи $\Delta^2 y = \Delta(\Delta y)$ фарқи охириҳои тартиби дуюмро меёбем

$$\begin{aligned} \Delta^2 y &= \Delta(3x^2 - 2x - 1) = 3(x+1)^2 - 2(x+1) - 1 - (3x^2 - 2x - 1) = \\ &= 3x^2 + 6x + 3 - 2x - 2 - 1 - 3x^2 + 2x + 1 = 6x + 1. \end{aligned}$$

Айнан ҳамин тавр, аз рӯи формулаи $\Delta^3 y = \Delta(\Delta^2 y)$ фарқи охириҳои тартиби сеюмро меёбем

$$\Delta^3 y = \Delta(6x + 1) = 6(x+1) + 1 - (6x + 1) = 6x + 6 + 1 - 6x - 1 = 6.$$

Ҷавоб: $\Delta^3 y = 6$.

Вариантҳои супоришҳо

Супориш. Фарқҳои охириҳои тартиби 3-юмро ҳангоми $\Delta x = 1$ будан, ёфта шавад.

1. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$
2. $y = 3x - x^3$
3. $y = x^3 + 6x^2 - 4x + 1$
4. $y = x^3 - 9x^2 + 6x - 9$
5. $y = 2 - 3x^2 - x^3$
6. $y = 4x^3 + 5x^2 - 3$
7. $y = 2x^2 - 3x^2 - 4$
8. $y = 3x^2 - 2 - x^3$
9. $y = 2x^3 + 3x^2 - 3x + 2$
10. $y = x^3 - 3x^2 - 5$
11. $y = 6x - 8x^3$
12. $y = 4x^3 + 5x^2 - 3x - 5$
13. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$
14. $y = 2 - 12x^2 - 8x^3$
15. $y = 4^3 + 6x^2 - 4x + 1$
16. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$
17. $y = 12x^2 + 8x^3 - 2$
18. $y = 3x^3 - 4x^2 - 2x + 3$
19. $y = x^3 - 3x^2 - 4$
20. $y = 12 - x^2 - 8x + 1$
21. $y = 5x^3 + 2x^2 - 3x$
22. $y = x^3 + x^2 - 5x + 6$
23. $y = 16 - 6x^2 - x^3$
24. $y = x^3 - 4x^2 + 7x - 2$

25. $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$ 26. $y = 6x^3 - x^2 + 4x - 3$
 27. $y = 2x^3 - 94 + 6x - 2$ 28. $y = 16x^3 - 12x^2 - 4$
 29. $y = 11 + 9x - 3x^2 - x^3$ 30. $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$

5.9. МАШГУЛИЯТИ АМАЛӢ

Намунаи иҷрои супориш

Супориш. Функцияи $y = f(x)$ дар намууди ҷадвал дода шудааст. Формулаҳои якум ё дуҷуми интерполлятсионии Нютонро истифода бурда, қиматҳои ин функция дар нуктаҳои $x_1 = 1,21$, $x_2 = 1,58$ ёфта шаванд. Ҳисобкуниҳо бо саҳеҳии то 0,001 иҷро карда шаванд.

x_i	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y_i	1,6	2,1	2,4	2,9	3,3	3,8

Ҳал. Ҷадвали фарқҳои охирикро тартиб медиҳем

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
1,1	1,6	0,5	-0,2	0,4	-0,7	1,2
1,2	2,1	0,3	0,2	-0,3	0,5	-
1,3	2,4	0,5	-0,1	0,2	-	-
1,4	2,9	0,4	0,1	-	-	-
1,5	3,3	0,5	-	-	-	-
1,6	3,8	-	-	-	-	-

- 1). Қимати функцияро дар нуктаи $x_0 = 1,2$ меёбем. Азбаски нуктаи $x_1 = 1,21$ ба нуктаи $x_0 = 1,2$ наздиктар аст ва шарт $x_1 > x_0$ иҷро мешавад, бинобар формулаи якуми интерполлятсионии Нютонро татбиқ мекунем

$$P_n(x) = y_0 + p \Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)}{n!} \Delta^n y_0$$

дар ин ҷо $p = \frac{x - x_0}{h}$, $h = x_i - x_{i-1}$ аст. Мувофиқи шарт $h = 0,1$

$$h = x_i - x_{i-1} = 1,2 - 1,1 = 0,1; \quad p = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1,21 - 1,2}{0,1} = 0,1.$$

Барои қимати аргумент $x_0 = 1,2$ қимати функция $y_0 = 2,1$ мувофиқат мекунад, ҳама қиматҳои мавҷударо ба формулаи якуми интерполлятсионии Нютон гузошта, ҳосил мекунем

$$P_n(2,1) = 2,1 + 0,1 \cdot 0,3 + \frac{0,1(0,1-1)}{2!} \cdot 0,2 + \frac{0,1(0,1-1)(0,1-2)}{3!} \cdot (-0,3) +$$

$$+ \frac{0,1(0,1-1)(0,1-2)(0,1-3)}{4!} \cdot 0,5 =$$

$$= 2,1 + 0,03 - 0,009 - 0,0086 - 0,01033 = 2,1124.$$

Ҷавоб: $P_n(2,1) = 2,1124$.

- 2). Акнун қимати функцияро дар нуктаи $x_2 = 1,58$ ҳисоб мекунем. Азбаски ин нукта $x_1 = 1,58$ ба нуктаи $x_n = 1,6$ наздик аст ва шарт $x_2 < x_n$ иҷро мешавад, бинобар формулаи дуҷуми интерполлятсионии Нютонро истифода мебарем

$$P_n(x) = y_n + q \Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!} \Delta^3 y_{n-3} + \dots + \frac{q(q+1)(q+2)\dots(q+n-1)}{n!} \Delta^n y_0,$$

дар ин ҷо $q = \frac{x - x_n}{h}$, $h = x_{i+1} - x_i$ мебошад

Мувофиқи шарт $h = 0,1$

$$h = x_{i+1} - x_i = 1,6 - 1,58 = 0,02; \quad q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{1,58 - 1,6}{0,02} = -0,2.$$

Ин қиматҳо ва қиматҳои фарқҳои охирикро ба формулаи дуҷуми интерполлятсионии Нютон гузошта, ҳосил мекунем

$$P_n(1,58) = 3,8 - 0,2 \cdot 0,5 + \frac{-0,2 \cdot (-0,2 + 1)}{2!} \cdot 0,1 + \frac{-0,2 \cdot (-0,2 + 1)(-0,2 + 2)}{3!} \cdot 0,5 + \frac{-0,2 \cdot (-0,2 + 1)(-0,2 + 2)(-0,2 + 3)}{4!} \cdot 0,2 + \frac{-0,2 \cdot (-0,2 + 1)(-0,2 + 2)(-0,2 + 3)(-0,2 + 4)}{5!} \cdot 1,2 =$$

$$= 3,8 - 0,1 - 0,008 - 0,0096 - 0,0168 - 0,0306 = 3,635.$$

Ҷавоб: $P_n(2,1) = 2,1124$, $P_n(1,58) = 3,635$.

Вариантҳои супориш

Супориш. Функцияи $y = f(x)$ дар намууди ҷадвал дода шудааст. Формулаҳои якум ё дуҷуми интерполлятсионии Нютонро истифода бурда, қиматҳои ин функция дар нуктаҳои x_1 , x_2 ёфта шаванд. Ҳисобкуниҳо бо саҳеҳии то 0,001 иҷро карда шаванд.

x_i	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
y_i	1,670	2,065	2,477	2,906	3,354	3,821	4,308	4,818	5,352

$$x = 2,26; \quad x = 1,38.$$

2.

x_i	0,101	0,106	0,111	0,116	0,121	0,126	0,131	0,136	0,141
y_i	1,262	1,276	1,291	1,306	1,321	1,337	1,352	1,368	1,384

$x = 0,108; x = 0,129.$

3.

x_i	1,12	1,24	1,36	1,48	1,60	1,72	1,84	1,96	2,08
y_i	3,262	3,275	3,293	3,306	3,321	3,337	3,352	3,369	3,384

$x = 1,22; x = 1,716.$

4.

x_i	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50	2,60	2,70	2,80
y_i	5,431	5,816	6,211	6,620	7,051	7,509	8,001	8,535	9,189

$x = 2,21; x = 2,39.$

5.

x_i	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80
y_i	2,780	3,004	3,320	3,669	4,055	4,481	4,994	5,474	6,050

$x = 1,4123; x = 1,7801.$

6.

x_i	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80
y_i	3,981	3,837	3,649	3,425	3,176	2,911	2,638	2,369	2,109

$x = 1,11; x = 1,47.$

7.

x_i	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50	2,60	2,70	2,80
y_i	6,492	6,879	7,340	7,889	8,890	9,339	10,30	11,48	12,94

$x = 2,13; x = 2,48.$

8.

x_i	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80
y_i	1,034	1,107	1,153	1,192	1,230	1,318	1,346	1,352	1,411

$x = 0,11; x = 0,56.$

9.

x_i	1,00	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
y_i	0,984	1,103	1,144	1,208	1,283	1,308	1,314	1,473	1,532

$x = 1,0628; x = 1,3388.$

10.

x_i	3,12	3,24	3,36	3,48	3,60	3,72	3,84	3,96	4,08
y_i	2,312	2,531	2,792	3,001	3,128	3,333	3,789	3,999	4,131

$x = 3,26; x = 3,69.$

11.

x_i	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90
y_i	1,042	1,061	1,088	1,119	1,161	1,213	1,274	1,356	1,389

$x = 1,21; x = 1,679.$

12.

x_i	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	2,05	2,10	2,15	2,20
y_i	1,958	2,107	2,269	2,444	2,632	2,841	3,072	3,325	3,625

$x = 1,86; x = 2,039.$

13.

x_i	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10	1,15
y_i	0,742	0,789	0,835	0,881	0,924	0,967	1,009	1,046	1,123

$x = 0,81; x = 1,94.$

14.

x_i	1,70	1,76	1,82	1,88	1,96	2,02	2,08	2,14	2,20
y_i	3,262	3,275	3,293	3,306	3,321	3,337	3,352	3,369	3,38

$x = 1,77; x = 2,04.$

15.

x_i	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55
y_i	1,583	1,679	1,712	1,784	1,845	1,907	1,987	2,264	2,596

$x = 1,2021; x = 1,7002.$

16.

x_i	1,02	1,10	1,18	1,26	1,34	1,42	1,50	1,58	1,66
y_i	1,362	1,375	1,393	1,406	1,421	1,437	1,452	1,469	1,484

$x = 1,11; x = 1,39.$

17.

x_i	1,01	1,10	1,19	1,28	1,37	1,46	1,55	1,64	1,73
y_i	9,163	9,176	9,192	9,216	9,222	9,247	9,253	9,269	9,249

$x = 1,13; x = 1,43.$

18.

x_i	0,13	0,18	0,23	0,28	0,33	0,38	0,43	0,48	0,53
y_i	0,130	0,179	0,228	0,276	0,324	0,371	0,417	0,462	0,496

$x = 0,19; x = 0,36.$

19.

x_i	1,12	1,20	1,28	1,36	1,44	1,52	1,60	1,68	1,76
y_i	0,129	0,179	0,228	0,276	0,325	0,372	0,418	0,463	0,496

$x = 1,21; x = 1,49.$

20.

x_i	2,12	2,17	2,22	2,27	2,32	2,37	2,42	2,47	2,52
y_i	3,743	3,831	3,951	4,003	4,125	4,237	4,328	4,493	4,538

 $x = 2,14; x = 2,36.$

21.

x_i	1,01	1,06	1,11	1,16	1,21	1,26	1,31	1,36	1,41
y_i	3,263	3,276	3,292	3,307	3,323	3,338	3,354	3,367	3,381

 $x = 1,08; x = 1,29.$

22.

x_i	2,05	2,10	2,15	2,20	2,25	2,30	2,35	2,40	2,45
y_i	3,362	3,375	3,393	3,406	3,421	3,437	3,452	3,469	3,484

 $x = 2,12; x = 2,33.$

23.

x_i	0,51	0,57	0,63	0,69	0,75	0,81	0,87	0,93	0,99
y_i	0,263	0,276	0,294	0,316	0,322	0,347	0,354	0,379	0,386

 $x = 0,59; x = 0,79.$

24.

x_i	1,12	1,22	1,32	1,42	1,52	1,62	1,72	1,82	1,92
y_i	2,128	2,223	2,355	2,446	2,546	2,624	2,789	2,903	2,998

 $x = 1,23; x = 1,7.$

25.

x_i	1,01	1,10	1,19	1,28	1,37	1,46	1,55	1,64	1,73
y_i	7,004	7,135	7,198	7,255	7,314	7,404	7,491	7,562	7,629

 $x = 1,14; x = 1,42.$

26.

x_i	2,70	2,75	2,80	2,85	2,90	2,95	3,00	3,05	3,10
y_i	0,003	0,124	0,235	0,351	0,424	0,491	0,561	0,636	0,703

 $x = 2,71; x = 2,94.$

27.

x_i	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10	1,15
y_i	0,282	0,295	0,273	0,316	0,331	3,47	0,362	0,379	0,374

 $x = 0,77; x = 1,03.$

28.

x_i	5,12	5,24	5,36	5,48	5,60	5,72	5,84	5,96	6,08
y_i	7,264	7,276	7,294	7,316	7,323	7,339	7,354	7,367	7,383

 $x = 5,16; x = 5,7$

29.

x_i	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50	2,60	2,70	2,80	2,90
-------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

y_i	4,265	4,285	4,295	4,309	4,325	4,338	4,357	4,379	4,383
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

 $x = 2,23; x = 2,58.$

30.

x_i	6,13	6,20	6,27	6,34	6,41	6,48	6,55	6,62	6,69
y_i	3,001	3,125	3,199	3,254	3,333	3,432	3,538	3,692	3,783

 $x = 6,15; x = 6,46.$

5.10. КОРИ МУСТАКИЛОНА

Намунаи иҷрои супориш

Супориш. Функция $y = f(x)$ дар намуни ҷадвал дода шудааст. Формулаҳои якум ё дуҷуми интерполёсионии Нютонро истифода бурда, қиматҳои ин функция дар нуктаҳои $x_1 = 2,6$, $x_2 = -1,5$ ёфта шаванд. Ҳисобкуниҳо бо саҳеҳии то 0,001 иҷро карда шаванд.

x_i	2	1	4	3
-------	---	---	---	---

$y_i = f(x_i)$	1,5	3,6	4,2	5,4
----------------	-----	-----	-----	-----

Ҳал. Бо ёрии формулаи интерполёсионии Лагранж, ҳосил мекунем

$$\begin{aligned}
 L_n(x) &= \frac{(x-1)(x-4)(x-3)}{(2-1)(2-4)(2-3)} \cdot 1,5 + \frac{(x-2)(x-4)(x-3)}{(1-2)(1-4)(1-3)} \cdot 3,6 + \\
 &+ \frac{(x-2)(x-1)(x-3)}{(4-2)(4-1)(4-3)} \cdot 4,2 + \frac{(x-2)(x-1)(x-4)}{x^3 - 9x^2 + 26x - 24} \cdot 5,4 = \\
 &= \frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{x^3 - 9x^2 + 26x - 24} \cdot 1,5 + \frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}{x^3 - 9x^2 + 26x - 24} \cdot 5,4 = \\
 &= (x^3 - 8x^2 + 19x - 12) \cdot 0,75 - (x^3 - 9x^2 + 26x - 24) \cdot 0,6 + \\
 &+ (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \cdot 0,7 - (x^3 - 7x^2 + 14x - 8) \cdot 2,7 = \\
 &= 0,75x^3 - 6x^2 + 14,25x + 9 - 0,6x^3 + 3,6x^2 + 15,6x + 14,4 + \\
 &+ x^3 - 4,2x^2 + 7,7x - 4,2 - 2,7x^3 + 18,9x^2 - 37,8x + 21,6 = \\
 &= -1,55x^3 + 12,3x^2 - 0,25x - 43,8.
 \end{aligned}$$

Пас, бисёрвазгонии Лагранж намуни зерин дорад

$$L_n(x) = -1,55x^3 + 12,3x^2 - 0,25x - 43,8.$$

Акнун ин бисёрвазгониро истифода бурда, қимати функцияро дар нуктаҳои $x = 2,6$ ва $x = -1,5$ меёбем

$$\begin{aligned}
 L_n(2,6) &= -1,55 \cdot 2,6^3 + 12,3 \cdot 2,6^2 - 0,25 \cdot 2,6 - 43,8 = \\
 &= -27,2428 + 83,148 - 0,65 - 43,8 = 11,4552.
 \end{aligned}$$

$$L_n(-1,5) = -1,55 \cdot (-1,5)^3 + 12,3 \cdot (-1,5)^2 - 0,25 \cdot (-1,5) - 43,8 =$$

$$= 5,2313 + 27,675 + 0,375 - 43,8 = -10,5187.$$

Ҷавоб: $L_n(x) = -1,55x^3 + 12,3x^2 - 0,25x - 43,8$

$$L_n(2,6) = 11,4552; L_n(-1,5) = -10,5107.$$

Вариантҳои супоришҳо

Супориш. Функцияи $y = f(x)$ дар намууди ҷадвал дода шудааст. Формулаҳои якум ё дуҷуми интерполационии Нютонро истифода бурда, қиматҳои ин функция дар нуктаҳои x_1, x_2 ёфта шаванд. Ҳисобкуниҳо бо саҳеҳии то 0,001 иҷро карда шаванд.

x_i	1.2	2.1	3.4	3.9
$y_i = f(x_i)$	3.5	4.6	2.7	5.1

$$x_1 = 1,6; x_2 = -3,5.$$

2.

x_i	1.3	2.2	3.5	3.7
$y_i = f(x_i)$	3.2	4.3	2.5	5.4

$$x_1 = 2,6; x_2 = -4,5.$$

3.

x_i	4.2	5.1	6.3	4.7
$y_i = f(x_i)$	5.6	3.2	6.5	4.1

$$x_1 = 2,8; x_2 = -6,4.$$

4.

x_i	0.2	2.1	0.3	1.5
$y_i = f(x_i)$	5.6	3.2	6.5	4.1

$$x_1 = 3,14; x_2 = -0,34.$$

5.

x_i	3.4	5.3	0.5	1.6
$y_i = f(x_i)$	1.8	4.2	6.2	2.1

$$x_1 = 3,4; x_2 = -2,54.$$

6.

x_i	1.3	2.8	3.5	4.6
$y_i = f(x_i)$	2.7	3.1	5.3	2.1

$$x_1 = 1,8; x_2 = -2,4.$$

7.

x_i	3.4	2.5	3.6	4.7
$y_i = f(x_i)$	1.8	3.6	4.3	2.5

$$x_1 = 3,8; x_2 = -5,4.$$

8.

x_i	0.5	2.6	3.8	4.1
$y_i = f(x_i)$	2.3	3.2	4.1	2.9

$$x_1 = 4,1; x_2 = -0,8.$$

9.

x_i	3.6	0.8	2.2	4.3
$y_i = f(x_i)$	2.5	4.2	5.3	1.4

$$x_1 = 1,4; x_2 = -5,1.$$

10.

x_i	4.6	2.5	3.2	1.2
$y_i = f(x_i)$	0.5	1.6	2.3	3.4

$$x_1 = 3,9; x_2 = -2,8.$$

11.

x_i	1.6	2.5	3.7	4.2
$y_i = f(x_i)$	3.5	0.6	1.3	3.8

$$x_1 = 2,7; x_2 = -3,1.$$

12.

x_i	2.3	1.8	3.9	4.5
$y_i = f(x_i)$	1.5	2.6	3.5	4.4

$$x_1 = 2,3; x_2 = -1,1.$$

13.

x_i	1.2	2.1	3.5	4.3
$y_i = f(x_i)$	4.5	1.6	2.3	4.5

$$x_1 = 2,2; x_2 = -2,1.$$

14.

x_i	3.1	1.2	2.5	4.4
$y_i = f(x_i)$	3.5	1.3	4.1	0.7

$$x_1 = 2,7; x_2 = -4,5.$$

15.

x_i	5.3	2.4	1.5	3.3
$y_i = f(x_i)$	1.5	2.6	3.3	4.8

$$x_1 = 2,9; x_2 = -3,6.$$

16.

x_i	2.4	1.5	3.6	4.3
$y_i = f(x_i)$	1.3	2.5	3.4	4.1

$$x_1 = 3,8; x_2 = -1,6.$$

17. x_i 3.4 2.1 0.8 1.3
 $y_i = f(x_i)$ 1.4 3.6 4.3 4.9
 $x_1 = 1,9; x_2 = -0,6.$
18. x_i 0.3 1.4 2.5 3.3
 $y_i = f(x_i)$ 2.5 3.1 3.9 4.2
 $x_1 = 0,8; x_2 = -5,6.$
19. x_i 5.3 1.4 2.5 4.3
 $y_i = f(x_i)$ 0.5 4.6 3.7 5.1
 $x_1 = 0,7; x_2 = -1,2.$
20. x_i 1.4 2.5 0.6 1.3
 $y_i = f(x_i)$ 2.5 1.6 2.1 4.3
 $x_1 = 3,3; x_2 = -2,9.$
21. x_i 5.3 1.6 2.7 4.3
 $y_i = f(x_i)$ 3.5 5.7 4.1 6.8
 $x_1 = 3,8; x_2 = -0,7.$
22. x_i 3.1 2.4 4.3 1.1
 $y_i = f(x_i)$ 8.5 7.6 5.7 9.4
 $x_1 = 5,3; x_2 = -6,1.$
23. x_i 6.2 5.4 4.4 3.1
 $y_i = f(x_i)$ 7.5 6.6 4.7 8.4
 $x_1 = 4,3; x_2 = -5,2.$
24. x_i 3.2 2.5 1.3 0.8
 $y_i = f(x_i)$ 7.5 6.6 4.7 8.4
 $x_1 = 3,3; x_2 = -4,6.$
25. x_i 1.4 0.8 3.9 4.8
 $y_i = f(x_i)$ 3.5 4.3 5.6 6.2
 $x_1 = 2,9; x_2 = -5,6.$

16. x_i 6.5 5.8 4.7 3.8
 $y_i = f(x_i)$ 9.1 10.3 11.2 13.4
 $x_1 = 11,9; x_2 = -2,3.$
17. x_i 1.4 0.8 0.3 1.2
 $y_i = f(x_i)$ 9.1 10.3 11.2 13.4
 $x_1 = 1,9; x_2 = -0,3.$
18. x_i 0.4 1.7 2.5 3.2
 $y_i = f(x_i)$ 4.6 6.3 7.8 10.4
 $x_1 = 10,9; x_2 = -6,3.$
19. x_i 2.4 3.7 4.6 6.1
 $y_i = f(x_i)$ 7.7 8.9 10.8 11.4
 $x_1 = 8,9; x_2 = -5,3.$
20. x_i 2.4 4.1 5.6 7.2
 $y_i = f(x_i)$ 8.2 9.8 10.7 11.9
 $x_1 = 7,3; x_2 = -9,1.$

5.11. САВОЛҲО БАРОИ ТАҚРОРИ БОБ

1. Фарқи охириҳои тартиби якум чист?
2. Формулаи фарқи охириҳои тартиби якумро нависед.
3. Ин формула чӣ маъно дорад $\Delta y \equiv \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$?
4. Фарқҳои охириҳои тартиби олӣ чӣ таъриф мунҷар карда мешаванд?
5. Аз рӯи кадом формула фарқҳои охириҳои тартиби дуюм ёфта мешаванд?
6. Дарачаи умумикардаси чист?
7. Гузориши маънаҳои интерполятсияро баён кунед.
8. Маънои геометрии гузориши маънаҳои интерполятсияро фаҳмонед.
9. Барои интерполятсия намудани функсия $y = f(x)$ дар наздикии нуқтаи ибтидоии x_0 кадом формула истифода бурда мешавад?

10. Дар кадом ҳолат формулаи якуми интерполатсияи Нютон татбиқ карда мешавад?

11. Дар кадом ҳолат формулаи дуҷуми интерполатсияи Нютон татбиқ карда мешавад?

12. Барои интерполатсия намудани функсияи $y = f(x)$ дар наздикии нуқтаи интиҳои x_n кадом формула истифода бурда мешавад?

13. Дар формулаҳои интерполатсияи Нютон кадам чӣ тавр муайян карда мешавад?

14. Барои интерполатсия намудани функсия бо қадамҳои мунтазам ҷойгиршуда кадом формулаҳои интерполатсионӣ истифода бурда мешаванд?

15. Кадам ҷараёни ҳисобро интерполатсиякунонӣ меноманд?

16. Гиреҳи интерполатсия чист?

17. Дар кадом ҳолатҳо формулаҳои интерполатсионии Нютон татбиқ карда мешаванд?

18. Дар ҳолати ғайримунтазам ҷойгир будани гиреҳҳои интерполатсия, кадом формулаҳои интерполатсионӣ истифода бурда мешаванд?

19. Экстраполатсия чист?

20. Ҷадвали фарқҳои охиринок чӣ тавр тартиб дода мешавад?

21. Чӣ тавр формулаи интерполиронии хаттиро ҳосил кардан мумкин аст?

22. Гузориши масъалаи интерполатсия аз рӯи формулаи Лагранжро баён кунед.

23. Оё формулаи интерполатсионии Лагранжро барои ҷараёни экстраполатсия истифода намудан мумкин аст?

24. Оё формулаи интерполатсионии Нютонро барои ҷараёни экстраполатсия истифода намудан мумкин аст?

25. Формулаҳои якум ва дуҷуми интерполатсионии Нютон аз ҳамдигар чӣ фарқият доранд?

27. Формулаҳои интерполатсионии Гаусс, Стирлинг ва Бессел чӣ намуна доранд?

VI. ДИФФЕРЕНЦИРОНИИ АДАДӢ

6.1. Гузориши масъала

Ҳангоми ҳалли як қатор масъалаҳои амалӣ ҳосилаи функсияро ёфтани зарур мешавад, ки қиматҳои он дар намуни ҷадвал дода шудаанд. Ғайр аз ин, баъзан бо сабаби ҳеле мураккаб будани намуни функсияи $y = f(x)$, ёфтани ҳосилаи он ба таври аналитикӣ душвор мегардад. Дар ҳама ҳолатҳо аз дифференсиронии ададӣ истифода мебаранд.

Формулаҳои барои ҳисобкунии $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ дар нуқтаи x , аз соҳаи муайяни функсия, бо роҳи аппроксиматсияи оператори дифференсиронӣ бо бисёрҷузғҳои интерполатсионӣ, ба амал бароварда мешавад. Барои нуқтаи муоинашавандаи x якҷанд гиреҳҳои интерполатсионии $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq m + 1$), интиҳоб карда мешаванд. Қиматҳои функсияи $y_i = f(x_i)$ дар гиреҳҳо ҳисоб карда шуда, бисёрҷузғии интерполатсионии $y = f(x) \approx \varphi(x; a) = P_{n-1}(x)$ сохта мешавад. Он гоҳ

$$\frac{d^m f}{dx^m} \approx \frac{d^m P_{n-1}}{dx^m}$$

ҷой дорад.

Барои ҳосил намудани формулаҳои барои истифода кулай, ҳама амалҳо дар гиреҳҳои мунтазам ҷойгиршуда иҷро карда мешаванд ва дар ин ҳолат ҳосилаҳо дар гиреҳҳои x_i , бо саҳеҳии лозимӣ, пайдо мегарданд. Ҳангоми $n = m + 1$ будан формулаҳои дифференсиронии ададӣ аз мавқеи нуқтаи x вобастагӣ надорад, зеро ҳосилаи тартиби m -уми полиноми дараҷааш m дараҷа (константа) мебошад. Ҳангоми $n > m + 1$ будан формулаҳои дифференсиронии ададӣ меноманд.

Дар ҳолати дар намуни ҷадвал дода шудани функсия ёфтани ҳосилаи функсия ба формулаи

$$y' = f'(x) \approx \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

таъя мекунад, ки дар ин ҳо

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

Формулаи (1) – ро аппроксиматсияи ҳосила тавассути фарқҳои охиринок меноманд. Ҳангоми дода шудани қиматҳои ҷадвал $\{x_i, y_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ва қадами ҷойгиршавии гиреҳҳои интерполатсионӣ $h = \text{const}$, вобаста аз усули ҳисоб намудани

фарқҳои охирик, алгоритмҳои зерини дифференсиронии ададҳои (1) мавҷуданд. Бигзор $i = 1$ бошад.

1. Формулаи фарқҳои тарофи чап

$$\Delta y_i = y_i - y_0; \quad \Delta x = h;$$

$$y'_1 = \frac{y_1 - y_0}{h}.$$

2. Формулаи фарқҳои тарофи рост

$$\Delta y_i = y_2 - y_1; \quad \Delta x = h;$$

$$y'_1 = \frac{y_2 - y_1}{h}.$$

3. Формулаи фарқҳои марказӣ

$$\Delta y_i = y_2 - y_0; \quad \Delta x = 2h;$$

$$y'_1 = \frac{y_2 - y_0}{2h}.$$

Формулаҳои (2), (3), (4) — ро истифода бурда, пайдарпай формулаҳоро барои ҳисоб кардани ҳосилаҳои тартиби оӣ ба даст овардан мумкин аст. Масалан, дар натиҷаи татбиқи формулаи (3), ҳосил мекунем

$$y''_1 = (y'_1, y'_1) = (y'_2 - y'_0) / h = ((y_2 - y_1) / h - (y_1 - y_0) / h) / h = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}.$$

6.2. Аппроксиматсия бо бисёрзағии Нютон

Фарз мекунем, ки функсияи $f(x)$ дар намуни чадвал бо кадами доимии $h = x_i - x_{i-1}$ ($i=1, 2, \dots, n$) дода шудааст ва бо ёрии бисёрзағии интерполёсионии Нютон аппроксиматсия карда шудааст

$$y \approx N(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0, \quad t = \frac{x - x_0}{h}. \quad (9)$$

Баробарии (9) — ро ҳамчун функсияи мураккаб аз рӯи тағйирёбандаи x дифференсиронида

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dN}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dN}{dt},$$

формуларо барои ёфтани ҳосилаҳои тартиби ихтиёрӣ ҳосил кардан имконпазир аст,

$$y' \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!} \Delta^4 y_0 + \dots \right);$$

$$y'' \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 + \frac{6t-6}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{12t^2-36t+22}{4!} \Delta^4 y_0 + \frac{20t^3-120t^2+210t-100}{5!} \Delta^5 y_0 + \dots \right); \quad (10)$$

Мисоли 1. Функсия дар намуни чадвал дода шудааст.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	1,2833					
0,1	1,8107	0,5274	0,0325	0,0047	0,0002	0,0000
0,2	2,3606	0,5599	0,0372	0,0049	0,0002	
0,3	2,9577	0,5971	0,0421	0,0051		
0,4	3,5969	0,6392	0,0472			
0,5	4,2833	0,6864				

Дар нуктаи $x = 0,1$ ҳосилаҳои тартиби якум $f'(x)$ ва дуҷум $f''(x)$ ёфта шаванд. Дар ин ҳо $h = 0,1$; $t = (0,1 - 0)/0,1 = 1$.

Ҳал. Фарқҳои охирикро пешакӣ ҳисоб карда, бо татбиқи формулаи (10), меёбем

$$y' \approx 10 \cdot (0,5274 + (2 \cdot 1 - 1)/2) \cdot 0,0325 + 0,0047 \cdot (3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 2)/6 + 0,0002 \cdot (4 \cdot 1 - 18 \cdot 1 + 22 \cdot 1 - 6)/24 = 5,436;$$

$$y'' \approx 100 \cdot (0,0325 + 0,0047 \cdot (6 \cdot 1 - 6)/6 + 0,0002 \cdot (12 - 36 + 22)/24) = 3,25.$$

Ҳангоми истифодаи методҳои дифференсиронии ададӣ бисёрзағии интерполёсионии Нютон, Гаусс, Стирлинг ва Бессел дар намуни дигар татбиқ карда мешаванд, зеро формулаҳои дифференсиронии ададӣ барои ёфтани ҳосилаҳои функсияи додашуда дар гиреҳои мунтазам ҷойгиршуда $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) истифода бурда мешаванд. Бинобар, нуктаи ихтиёрӣ тӯро ба сифати кимати ибтидоӣ қабул карда, формулаи дифференсиронии ададиро дар нуктаи x_0 менависанд. Агар гузориши $t = (x - x_0)/h = 0$ кунем, он гоҳ дифференсиронии бисёрзағии бисёрзағии ба формулаҳои зерин меорад:

Формулаи Нютон

$$y'_0 = f'(x_0) = \frac{1}{h} (\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{6} \Delta^3 y_0 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \Delta^n y_0); \quad (a)$$

$$y''_0 = f''(x_0) = \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 y_0 + \dots);$$

$$y'''_0 = f'''(x_0) = \frac{1}{h^3} (\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2} \Delta^4 y_0 + \frac{1}{2} \Delta^5 y_0 - \dots + \frac{1}{n} \Delta^n y_0); \quad (b)$$

$$y''_0 = f''(x_0) = \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_{-2} - \Delta^3 y_{-3} + \frac{11}{12} \Delta^4 y_{-4} - \frac{5}{6} \Delta^5 y_{-5} + \dots)$$

Формулаи (а) дар сатрҳои аввалии ҷадвал татбиқ мешавад, формулаи (б) – барои сатрҳои охирини ҷадвал. Он гоҳ формулаи Стирлин намуди зеринт мегирад

$$y'_0 = f'(x_0) \approx \frac{1}{h} \left(\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} - \frac{1}{6} \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{1}{30} \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \dots \right) \quad (a)$$

$$y''_0 = f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12} \Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{90} \Delta^6 y_{-4} + \dots \right)$$

Формулаи (с) – барои дифференсиронӣ дар маркази ҷадвал истифода бурда мешавад.

Мисоли 2. Истифодаи формулаҳои (а) ва (с) барои функсияи $y = \text{sh}2x$ с $h = 0,05$. Ҳосилаҳои y' ва y'' дар нуктаҳои $x = 0,00$ ва $x = 0,1$ ёфта шаванд. Ҷадвали ҳисобкунии барои $y = f(x)$ намуди зерин дорад:

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0,00	0,0000					
0,05	0,10017	10017	100			
0,10	0,20134	10117	201	101		
0,15	0,30452	10318	305	104	3	0
0,20	0,41075	10623	412	107		
0,25	0,52110	11035				

Ҳал. Дар асоси бисёрраёзҳои интерполтсионӣ аз формулаҳои дифференсиронии ададӣ истифода мебарем. Бо ин мақсад, пеш аз ҳама ҷадвали фарқҳои охиринокро тартиб медиҳем. Ҷадвалро то фарқҳои тартиби 4 – ум месозем, зеро фарқҳои аз тартиби 4 боло ҳама нолиҳоянд.

Барои нуктаи $x = 0,0$ формулаи (а) – ро истифода мебарем, $x_0 = 0,0$ қабул мекунем:

$$y' \Big|_{x=0,0} \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^3 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^5 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^7 y_0 + \dots \right) =$$

$$= 20 \cdot (0,10017 - 0,00050 + 0,0034 - 0,00001) = 2,0000;$$

$$y'' \Big|_{x=0,0} \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 - \Delta^4 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^6 y_0 - \dots \right) =$$

$$= 400 \cdot (0,00100 - 0,00101 + 0,00003) = 0,008.$$

Барои нуктаи $x = 0,1$ формулаи (с), қабул мекунем $x_0 = 0,1$:

$$y' \Big|_{x=0,1} \approx \frac{1}{h} \left(\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} - \frac{1}{6} \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{1}{30} \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} - \dots \right) =$$

$$= 20 \cdot (0,10217 - 0,00017) = 2,0400;$$

$$y'' \Big|_{x=0,1} \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12} \Delta^4 y_{-2} \right) = 400 \cdot (0,00201 - 0,00000) = 0,804.$$

Барои муқоиса киматҳои аниқи ҳосилаҳои тартиби якум ва дууми функсияи $y = \text{sh}2x$ – ро меорем:

$$y' = 2\text{ch}2x: \text{хангоми } x = 0,0 \text{ будан } y' = 2; \text{ хангоми } x = 0,1: y' = 2,0401;$$

$$y'' = 4\text{sh}2x: \text{хангоми } x = 0,0 \text{ будан } y'' = 0; \text{ хангоми } x = 0,1: y'' = 0,8052.$$

Бисёрраёзҳои интерполтсионии (9) ва интерпретатсияҳои он (Стирлинг, Гаусс) барои ҳисоб намудани кимати ҳосилаи функсияи $f(x)$ дар марказ ва интиҳои порча тавассути фарқҳои охиринок $\Delta^k y$ ($k = 1, 2, \dots$) муайян карда мешавад. Аммо дар амал ифодаи киматҳои ҳосилаи функсия тавассути киматҳои y_i нисбатан қулайтар аст. Агар гиреҳои интерполтсия мунтазам ҷойгиршуда бошанд, ин масъала бо ёрии бисёрраёзҳои интерполтсионии Лагранжаҳал карда мешавад.

6.3. Бисёрраёзҳои Лагранж дар ҳисобкунии ҳосила

Бисёрраёзҳои интерполтсионии Лагранж $L(x)$ ва бакиаи он $R_L(x)$ – ро барои ҳамаи се гиреҳои интерполтсия ($n = 2$), хангоми x_i $-x_{i-1} = h = \text{const}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) будан, дида мебароем

$$L(x) = \frac{1}{2h^2} [(x - x_1)(x - x_2)y_0 - 2(x - x_0)(x - x_2)y_1 + (x - x_0)(x - x_1)y_2];$$

$$R_L(x) = \frac{y'''}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Ҳосилаҳои онҳоро меёбем

$$L'(x) = \frac{1}{2h^2} [(2x - x_1 - x_2)y_0 - 2(2x - x_0 - x_2)y_1 + (2x - x_0 - x_1)y_2];$$

$$R'_L(x) = \frac{y'''}{3!} [(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)].$$

Дар ин ҷо y''' – киматҳои ҳосила дар ягон нуктаи $x_* \in [x_0, x_n]$ мебошад.

Ҳангоми $x = x_0$ будан, ифодаи ҳосилаи y'_0 — ро менависем:

$$y'_0 = L'(x_0) + R'_L(x_0) = \frac{1}{2h^2} [(2x_0 - x_1 - x_2)y_0 - 2(2x_0 - x_0 - x_2)y_1 + (2x_0 - x_0 - x_1)y_2] + \frac{y_2}{3!} [(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) + (x_0 - x_0)(x_0 - x_2) + (x_0 - x_0)(x_0 - x_1)] = \frac{x_0(x_0 - x_1)}{2h} = \frac{1}{2h} (-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3} y''',$$

Айнан ҳамин тавр киматҳои y'_1, y'_2 — ро шангоми $x = x_1, x = x_2$ будан муайян кардан мумкин аст.

Ҳамин тавр, дар ҳолати се гиреҳҳои интерполясионӣ ($n = 2$) формулаҳо намуни зерин мегирад

$$\begin{aligned} y'_0 &= \frac{1}{2h} (-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3} y''', \\ y'_1 &= \frac{1}{2h} (y_2 - y_0) - \frac{h^2}{6} y''', \\ y'_2 &= \frac{1}{2h} (y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \frac{h^2}{3} y'''. \end{aligned} \quad (11)$$

Агар чор гиреҳҳои интерполясионӣ ($n = 3$) дода шуда бошад, он гоҳ

$$\begin{aligned} y'_0 &= \frac{1}{6h} (-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4} y''', \\ y'_1 &= \frac{1}{6h} (-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) - \frac{h^3}{12} y''', \\ y'_2 &= \frac{1}{6h} (y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12} y''', \\ y'_3 &= \frac{1}{6h} (-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) - \frac{h^3}{4} y'''. \end{aligned} \quad (12)$$

Формулаҳои (11) ва (12) нишон медиҳанд, ки дар $(n+1)$ гиреҳҳои кимати функсияро истифода бурда, аппроксиматсияи тартиби n -уми ҳосиларо ба даст овардан мумкин аст. Ин формулаҳо на танҳо барои гиреҳҳои $x_0, x_1, x_2, \dots$, балки барои гиреҳҳои ихтиёрии интерполятсия $x = x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots$, бо роҳи иваз намуни индексҳои мувофиқи формулаҳои (11) ва (12) таъбиқ карда мешаванд. Бо ёрии бисёрраҷоии Лагранж барои ҳосилҳои тартиби олии низ чунин аппроксиматсияро ҳосил намуни мумкин аст.

Ҳамин тавр, ҳангоми $n = 3$ будан, соҳиб мешавем:

$$y''_0 = \frac{1}{h^2} (2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + O(h^2),$$

$$\begin{aligned} y''_1 &= \frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) + O(h^2), \\ y''_2 &= \frac{1}{h^2} (y_1 - 2y_2 + y_3) + O(h^2), \\ y''_3 &= \frac{1}{h^2} (-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3) + O(h^2), \end{aligned}$$

ва ғайра.

Айнан ҳамин тавр ин формулаҳо ҳангоми ба таври ғайримунтазам ҷойгир шудани гиреҳҳои интерполятсия низ ҳосил намуни мумкин аст. Аммо дар ин ҳолат барои ҳисоб намуни киматҳои ҳосилаи талабкардани ифодаҳои барои ҳисоб мураккаб пайдо мешаванд.

Ҳангоми ба миён омадани чунин ҳисобкуниҳо усулҳои сунӣ истифода бурдан лозим мешавад. Яке аз чунин усулҳои сунӣ ҳисобкунии ҳосилаҳо, методи коэффисиентҳои номуайян ба ҳисоб меравад.

6.4. Методи коэффисиентҳои номуайян

Ин метод одатан ҳангоми ғайримунтазам ҷойгир будани гиреҳҳои интерполятсионӣ таъбиқ карда мешавад. Ифодаи матлӯби ҳосилаи тартиби k -ум дар ягон нуқтаи $x = x_i$ дар намуни комбинатсияи ҳаттии киматҳои функсияи $y_j = f(x_j)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$), дар гиреҳҳо чунин тасвир карда мешавад

$$y_i^{(k)} = c_0 y_0 + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n, \quad i = 1, n. \quad (13)$$

Агар функсияи $y = f(x)$ бисёрраҷоии дараҷааш аз n калон набошад, он гоҳ ҳисобкуниҳо бо ёрии формулаи (13) аниқ гузаронида мешаванд, яъне формулаи (13) дар намуни

$$y = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n, \quad j = 0, n$$

навишта мешавад. Аз ин ҷо мебарояд, ки формулаи (13) барои бисёрраҷоии $y = 1, y = x - x_i, y = (x - x_i)^2, y = (x - x_i)^n$ аниқ иҷро мешавад. Ҳосилаҳои ин бисёрраҷоии мувофиқан намуни зерин мегиранд

$$y' = 0; \quad y' = 1; \quad y' = 2(x - x_i), \dots, \quad y' = n(x - x_i)^{n-1}.$$

Ин ифодаҳо ба формулаи (13) гузошта, системаи муодилаҳои алгебравии ҳаттии тартиби $(n+1)$ -ро барои ҳисоб кардани киматҳои коэффисиентҳои $c_0, c_1, \dots, c_n$ ба даст меорем

Мисоли 3. Ифодаи ҳосилаи y' дар ҳолати чор гиреҳҳо ($n = 3$), $h = \text{const}$ ёфта шавад.

Ҳал. Формулаи (13) — ро дар намуни зерин менависем

$$y' = c_0 y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3. \quad (13')$$

Аз бисёраъзогиҳои зерин истифода мебарем

$$y = 1; y = x - x_0; y = (x - x_0)^2; y = (x - x_0)^3; \quad (14)$$

$$y' = 0; y' = 1; y' = 2(x - x_0); y' = 3(x - x_0)^2. \quad (15)$$

Ифодаҳои (14) ва (15) – ро ба муодилаи (13) хангоми $x = x_1$ будан гузошта, ҳосил мекунем

$$0 = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 1;$$

$$1 = c_0(x_0 - x_0) + c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_0) + c_3(x_3 - x_0);$$

$$2(x_1 - x_0) = c_0(x_0 - x_0)^2 + c_1(x_1 - x_0)^2 + c_2(x_2 - x_0)^2 + c_3(x_3 - x_0)^2;$$

$$3(x_1 - x_0)^2 = c_0(x_0 - x_0)^3 + c_1(x_1 - x_0)^3 + c_2(x_2 - x_0)^3 + c_3(x_3 - x_0)^3.$$

Баъди баъзе табдилотҳо системаи зеринро ба даст меорем

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0; \\ hc_1 + 2hc_2 + 3hc_3 = 1; \\ hc_1 + 4hc_2 + 9hc_3 = 2; \\ hc_1 + 8hc_2 + 27hc_3 = 3. \end{cases}$$

Ин системаро ҳал карда, ҳосил мекунем

$$c_0 = -\frac{1}{3h}; c_1 = -\frac{1}{2h}; c_2 = \frac{1}{h}; c_3 = -\frac{1}{6h};$$

$$y' = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3).$$

Ин ифодаи ҳосилшуда, барои y'_1 , бо муодилаи (12) баробаркуви мебошад, танҳо дар ин ҷо ҳатогиҳо ба назар гирифта нашудаанд.

6.5. КОРИ ЛАБОРАТОРИ

Намунан иҷрои супоришҳо

Супориш. Қиматҳои ҳосилшудаи $y'(50)$ ва $y''(55)$ ёфта шаванд, агар

функсияи $y = \lg x$ дар намуни чадвал дода шуда бошад

x_i	50	55	60	65	70	75
y_i	1,6990	1,7404	1,7782	1,8129	1,8451	1,8751
Ҳал. Чадвали додшударо бо ҷутунҳои фарқҳои охиринок пурра мекунем						

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
50	1,6990	0,0414	-0,0036	0,0005	-0,0024	0,0033
55	1,7404	0,0378	-0,0031	-0,0006	0,0009	
60	1,7782	0,0347	-0,0025	0,0003		
65	1,8129	0,0322	-0,0022			
70	1,8451	0,03				
75	1,8751					

Ҳар як қимати чадвалро ҳамчун додшудаи ибтидоӣ тнгиҳоб намунад мумкин аст, бинобар $x = x_0, q = 0$ кабул карда, барои ёфтани ҳосилаҳо аз формулаҳои зерин истифода мебарем

$$y'(x_0) = \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \dots \right);$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11\Delta^4 y_0}{12} - \frac{5\Delta^5 y_0}{6} + \dots \right),$$

дар ин ҷо $h = x_{i+1} - x_i = 55 - 50 = 5$. Акнун аз формулаи якум истифода мебарем ва ҳосил мекунем

$$\begin{aligned} y'(50) &= \frac{1}{5} \left(0,0414 - \frac{-0,0036}{2} + \frac{0,0005}{3} - \frac{-0,0024}{4} + \frac{0,0282}{5} \right) = \\ &= \frac{1}{5} (0,0414 + 0,0018 + 0,0002 + 0,0006 + 0,00564) = 0,0099. \end{aligned}$$

Барои баҳодиҳии саҳеҳии қиматҳои ёфташуда, азбаски функсияи табулятешуда $y = \lg x$ аст, бинобар

$$y'_x = (\lg x)'_x = \frac{1}{x} \cdot \lg e \approx \frac{0,4343}{x},$$

$$y'(50) \approx \frac{0,4343}{50} \approx 0,008686.$$

Ҳамин тавр, натиҷаҳои ба даст овардамон бо саҳеҳии то 0,001 мувофиқат мекунанд.

Акнун ҳосилаи $y''(55)$ – ро аз рӯи формулаи зерин меёбем

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11\Delta^4 y_0}{12} - \frac{5\Delta^5 y_0}{6} + \dots \right).$$

Додшудаҳои чадвалро ба ин формула мегузорем ва соҳиби натиҷаи зерин мешавем

$$\begin{aligned} y''(55) &= \frac{1}{5^2} \left(-0,0031 + 0,0006 + \frac{11 \cdot 0,0009}{12} - \frac{1}{25} \cdot 0,0017 \right) = \\ &= -0,00007. \end{aligned}$$

Барои баҳо додани саҳеҳии қиматҳои ёфташуда, ҳосилаи тартиби дуумро меёбем

$$y''_x = (\lg x)''_x \approx \left(\frac{0,4343}{x} \right)'_x = -\frac{0,4343}{x^2}.$$

Қимати $x = 55$ гузошта, ҳосил мекунем

$$y''(55) \approx -\frac{0,4343}{55} = -0,0079.$$

Натиҷаҳои ёфташуда бо саҳеҳии то 0,001 ба ҳақиқат анки мувофиқат мекунанд.

Вариантҳои суворишҳо

Сувориш. Функцияи $y = f(x)$ дар намуни ҷадвал дода шудааст.

Ҳосилаҳои $y'(x_1)$ ва $y''(x_2)$ ёфта шаванд

1. $y = \ln x$. Ёфта шавад $y'(10)$ ва $y''(15)$

x_i	5	10	15	20	25	30
y_i	1,6094	2,3026	2,7081	2,9957	3,2189	3,4012

2. $y = \ln x$. Ёфта шавад $y'(5)$ ва $y''(20)$

x_i	5	10	15	20	25	30
y_i	0,699	1	1,1761	1,301	1,3979	1,4771

3. $y = e^x$. Ёфта шавад $y'(0,2)$ ва $y''(0,3)$

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y_i	1,1052	1,2214	1,3499	1,4918	1,6487	1,8221

4. $y = \sin x$. Ёфта шавад $y'(0,1)$ ва $y''(0,4)$

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y_i	0,0998	0,1987	0,2955	0,3894	0,4794	0,5646

5. $y = \cos x$. Ёфта шавад $y'(0,1)$ ва $y''(0,3)$

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y_i	0,995	0,9801	0,9553	0,9211	0,8776	0,8253

6. $y = \lg x$. Ёфта шавад $y'(0,2)$ ва $y''(0,3)$

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y_i	0,1003	0,2027	0,3093	0,4228	0,5463	0,6841

7. $y = \lg x$. Ёфта шавад $y'(1)$ ва $y''(2)$

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	1,5574	-2,185	-0,1426	1,1578	-0,3805	-0,291

8. $y = \operatorname{ctg} x$. Ёфта шавад $y'(1)$ ва $y''(2)$

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	0,6421	-0,4577	-7,0153	0,8637	-0,2958	-3,4364

9. $y = \operatorname{ctg} x$. Ёфта шавад $y'(0,2)$ ва $y''(0,3)$

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y_i	9,9666	4,9332	3,2327	2,3652	1,8305	1,4617

10. $y = \ln x$. Ёфта шавад $y'(1,5)$ ва $y''(2,5)$

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0,4055	0,6931	0,9163	1,0986	1,2528	1,3863

11. $y = \lg x$. Ёфта шавад $y'(2)$ ва $y''(2,5)$

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0,1761	0,301	0,3979	0,4771	0,5441	0,6021

12. $y = \sin x$. Ёфта шавад $y'(1,5)$ ва $y''(3)$

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0,9975	0,9093	0,5985	0,1411	-0,3508	-0,7568

13. $y = \cos x$. Ёфта шавад $y'(1,5)$ ва $y''(3)$

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0,0707	-0,4162	-0,8011	-0,99	-0,9365	-0,6536

14. $y = \operatorname{tg} x$. Ёфта шавад $y'(1,5)$ ва $y''(3,5)$

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	14,1014	-2,185	-0,747	-0,1426	0,3746	1,1578

15. $y = \operatorname{ctg} x$. Ёфта шавад $y'(1,5)$ ва $y''(3)$

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0,0709	-0,4577	-1,3387	-7,0153	2,6696	0,8637

16. $y = \sqrt{x}$. Ёфта шавад $y'(2)$ ва $y''(2,5)$

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	1,2247	1,4142	1,5811	1,7321	1,8708	2

17. $y = \sqrt{x}$. Ёфта шавад $y'(5)$ ва $y''(15)$

x_i	5	10	15	20	25	30
y_i	2,2361	3,1623	3,873	4,4721	5	5,4772

18. $y = \sqrt{x+2}$. Ёфта шавад $y'(5)$ ва $y''(10)$

x_i	5	10	15	20	25	30
y_i	2,6458	3,4641	4,1231	4,6904	5,1962	5,6569

19. $y = \sqrt{x+5}$. Ёфта шавад $y'(10)$ ва $y''(15)$

x_i	5	10	15	20	25	30
-------	---	----	----	----	----	----

y_i 3,1623 3,873 4,4721 5 5,4772 5,9161

20. $y = \sqrt{x+7}$. Ёфта шавад $y'(5)$ ва $y''(20)$

x_i 5 10 15 20 25 30
 y_i 3,4641 4,1231 4,6904 5,1962 5,6569 6,0828

21. $y = \sqrt{x^2+1}$. Ёфта шавад $y'(10)$ ва $y''(25)$

x_i 5 10 15 20 25 30
 y_i 5,099 10,0499 15,0333 20,025 25,02 30,0167

22. $y = \sqrt{x}$. Ёфта шавад $y'(2)$ ва $y''(5)$

x_i 2 3 5 6 7 8
 y_i 1,4142 1,7321 2,2361 2,4495 2,6458 2,8284

23. $y = e^{-x}$. Ёфта шавад $y'(1,5)$ ва $y''(3)$

x_i 1 1,5 2 2,5 3 3,5
 y_i 0,3679 0,2231 0,1353 0,0821 0,0498 0,0302

24. $y = \arcsin x$. Ёфта шавад $y'(0,2)$ ва $y''(0,3)$

x_i 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6
 y_i 0,1002 0,2014 0,3047 0,4115 0,5236 0,6435

25. $y = \arccos x$. Ёфта шавад $y'(0,1)$ ва $y''(0,2)$

x_i 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6
 y_i 1,4706 1,3694 1,2661 1,1593 1,0472 0,9273

26. $y = \arccos x$. Ёфта шавад $y'(0,2)$ ва $y''(0,3)$

x_i 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8
 y_i 1,2661 1,1593 1,0472 0,9273 0,7954 0,6435

27. $y = \arcsin x$. Ёфта шавад $y'(0,3)$ ва $y''(0,4)$

x_i 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8
 y_i 0,3047 0,4115 0,5236 0,6435 0,7754 0,9273

28. $y = \arcsin x$. Ёфта шавад $y'(0,4)$ ва $y''(0,6)$

x_i 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9
 y_i 0,4115 0,5236 0,6435 0,7754 0,9273 1,1198

29. $y = \arccos x$. Ёфта шавад $y'(0,5)$ ва $y''(0,7)$

x_i 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9
 y_i 1,1593 1,0472 0,9273 0,7954 0,6435 0,451

30. $y = \ln x$. Ёфта шавад $y'(4)$ ва $y''(5)$

x_i 4 5 6 7 8 9
 y_i 1,3863 1,6094 1,7918 1,9459 2,0794 2,1972

6.6. МАШГУЛИЯТИ АМАЛӢ

Намунаи иҷрои супоришҳо

Супориши 1. Функсияи $y = \sin x + \cos x$ дода шудааст. Қимати ҳосилаҳо $y'''(1,2)$ ва $y^{(V)}(0,5)$ ёфта шаванд.

Ҳал. Маълум аст, ки $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ мешавад. Он гоҳ

$$\begin{aligned} y' &= (\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x; \\ y'' &= (\sin x + \cos x)'' = -\sin x - \cos x; \\ y''' &= (\sin x + \cos x)''' = -\cos x + \sin x; \\ y^{(IV)} &= (\sin x + \cos x)^{(IV)} = \sin x + \cos x; \\ y^{(V)} &= (\sin x + \cos x)^{(V)} = \cos x - \sin x; \end{aligned}$$

Аз ин ҷо

$$\begin{aligned} y'''(1,2) &= -\cos 1,2 + \sin 1,2 = 0,5697; \\ y^{(V)}(0,5) &= \cos 0,5 - \sin 0,5 = 0,3982. \end{aligned}$$

Ҷавоб: $y'''(1,2) = 0,5697$; $y^{(V)}(0,5) = 0,3982$.

Супориши 2. Қимати дифференциали пурраи функсияи $z = x^3 + y^4$ ҳангоми $x = 1$, $y = 2$; $dx = 0,03$, $dy = -0,01$ будан, ҳисоб карда шавад.

Ҳал. Агар функсияи $z = f(x, y)$ дода шуда бошад, он гоҳ дифференциали пурраи он аз рӯи формулаи зерин муайян карда мешавад

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy. \quad (*)$$

Ҳосилаҳои ҳусусии тартиби якуми функсияи $z = f(x, y)$ — ро аз рӯи ҳар як тағйирёбанда, меёбем

$$z'_x = (x^3 + y^4)'_x = 3x^2; \quad z'_y = (x^3 + y^4)'_y = 4y^3.$$

Агар ин ҳосилаҳои ҳусусии ёфтаамонро ба формулаи (*) гузорем, дифференциали пурраи функсияи додашуда чунин мешавад

$$dz = 3x^2 dx + 4y^3 dy.$$

Акнун қиматҳои $x = 1$, $y = 2$; $dx = 0,03$, $dy = -0,01$ ба баробарии охириин мегузорем ва соҳиби натиҷаи зерин мешавем

$$dz = 3x^2 dx + 4y^3 dy = 3 \cdot 1^2 \cdot 0,03 + 4 \cdot 2^3 \cdot (-0,01) = -0,23.$$

Ҷавоб: $dz = -0,23$.

Вариантхон супоришхо

Супориши 1.

1. Функция $y = \sin x - 2 \cos x$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(0,2)$ ва $y^{(v)}(1,5)$ ёфта шаванд.
2. Функция $y = \operatorname{tg} x - \cos x$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(1,1)$ ва $y^{(v)}(0,2)$ ёфта шаванд.
3. Функция $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(1,1)$ ва $y^{(v)}(0,5)$ ёфта шаванд.
4. Функция $y = \operatorname{tg} x - \sin x$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(0,2)$ ва $y^{(v)}(1,5)$ ёфта шаванд.
5. Функция $y = \operatorname{tg} x + \cos x$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(0,1)$ ва $y^{(v)}(1,4)$ ёфта шаванд.
6. Функция $y = \operatorname{ctg} x - \cos x$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(0,7)$ ва $y^{(v)}(1,3)$ ёфта шаванд.
7. Функция $y = \operatorname{tg} x + \sin x$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(0,2)$ ва $y^{(v)}(1,4)$ ёфта шаванд.
8. Функция $y = \sin x \cdot \cos x$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(1,1)$ ва $y^{(v)}(1,2)$ ёфта шаванд.
9. Функция $y = x^4 \cos x$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(0,7)$ ва $y^{(v)}(1,6)$ ёфта шаванд.
10. Функция $y = x^4 \sin x$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(0,2)$ ва $y^{(v)}(0,6)$ ёфта шаванд.
11. Функция $y = x^5 \cos x$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(0,8)$ ва $y^{(v)}(1,6)$ ёфта шаванд.
12. Функция $y = x^5 \sin x$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(1,8)$ ва $y^{(v)}(1,2)$ ёфта шаванд.
13. Функция $y = x^4 \sqrt{x^3 + 1}$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(2)$ ва $y^{(v)}(6)$ ёфта шаванд.
14. Функция $y = x^4 \sqrt{x^2 + 2x}$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(2)$ ва $y^{(v)}(6)$ ёфта шаванд.
15. Функция $y = x^4 \sqrt{3x^2 + x - 1}$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(1)$ ва $y^{(v)}(3)$ ёфта шаванд.
16. Функция $y = x^4 \ln(x^2 + 2x)$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(1)$ ва $y^{(v)}(2)$ ёфта шаванд.
17. Функция $y = x^4 \ln(4x^2 + 2x - 1)$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(2)$ ва $y^{(v)}(3)$ ёфта шаванд.

18. Функция $y = e^x \ln(x^2 + 2x)$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(1)$ ва $y^{(v)}(3)$ ёфта шаванд.
19. Функция $y = e^x \ln(x^3 + 2x + 7)$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(3)$ ва $y^{(v)}(4)$ ёфта шаванд.
20. Функция $y = e^{x+1} \ln(x^2 + 2x)$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(1)$ ва $y^{(v)}(5)$ ёфта шаванд.
21. Функция $y = e^{x-1} \ln(x^2 - 0,2)$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(3)$ ва $y^{(v)}(1)$ ёфта шаванд.
22. Функция $y = e^{2x} \ln(4x^2 + 2x)$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(5)$ ва $y^{(v)}(3)$ ёфта шаванд.
23. Функция $y = e^{4x} \ln(x^3 + 5x)$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(1)$ ва $y^{(v)}(2)$ ёфта шаванд.
24. Функция $y = \frac{5-3x^2}{x-x^3}$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(4)$ ва $y^{(v)}(2)$ ёфта шаванд.
25. Функция $y = \frac{5x^2-6}{x-2}$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(3)$ ва $y^{(v)}(4)$ ёфта шаванд.
26. Функция $y = \frac{4-6x^2}{3-x^3}$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(4)$ ва $y^{(v)}(1)$ ёфта шаванд.
27. Функция $y = \frac{5+3x^2}{6x-x^3}$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(2)$ ва $y^{(v)}(3)$ ёфта шаванд.
28. Функция $y = x^3 \arcsin x$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(0)$ ва $y^{(v)}(1)$ ёфта шаванд.
29. Функция $y = x^2 \operatorname{arctg} x$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(1)$ ва $y^{(v)}(0)$ ёфта шаванд.
30. Функция $y = x^2 \arccos x$ дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'''(2)$ ва $y^{(v)}(1)$ ёфта шаванд.

Супориши 2.

1. Қимати дифференциали пурраи функция $z = x^2 + 4y^3$ ҳангоми $x = 3, y = 2; dx = 0,04, dy = 0,3$ будан, ёфта шавад.
2. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = 3x^2 - 2y^4$ ҳангоми $x = 5, y = 1; dx = 0,4, dy = 1,5$ будан, ёфта шавад.
3. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = x^2 + 4y^3$ ҳангоми $x = 3, y = 2; dx = 0,04, dy = 0,6$ будан, ёфта шавад.

4. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \sin x + \cos 2y$ хангоми $x = 5, y = 2; dx = 0,4, dy = 0,5$ будан, ёфта шавад.
5. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = x^2 + 4y^3 - \sin x$ хангоми $x = 3, y = 2; dx = 0,01, dy = 0,2$ будан, ёфта шавад.
6. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \sin x \cdot \cos y$ хангоми $x = 1, y = 2; dx = 0,6, dy = 0,3$ будан, ёфта шавад.
7. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \sin 3x + \cos 2y$ хангоми $x = 1, y = 2; dx = 0,4, dy = 0,5$ будан, ёфта шавад.
8. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \sqrt{3x + 5y}$ хангоми $x = 2, y = 1; dx = 0,3, dy = 0,4$ будан, ёфта шавад.
9. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \sqrt{3x^2 + 5y^2}$ хангоми $x = 4, y = 1; dx = 0,5, dy = 0,4$ будан, ёфта шавад.
10. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \sqrt{x^2 - 2y^2}$ хангоми $x = 5, y = 1; dx = 0,3, dy = 0,2$ будан, ёфта шавад.
11. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \ln(3x^2 + 5y^3)$ хангоми $x = 3, y = 1; dx = 0,4, dy = 0,7$ будан, ёфта шавад.
12. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \ln(2x^3 - 3y^2)$ хангоми $x = 3, y = 1; dx = 0,4, dy = 0,7$ будан, ёфта шавад.
13. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \ln(3x^4 - 2y^3)$ хангоми $x = 2, y = 3; dx = 0,6, dy = 0,1$ будан, ёфта шавад.
14. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = (2x^3 - 3y^2)^2$ хангоми $x = 1, y = 1; dx = 0,2, dy = 0,3$ будан, ёфта шавад.
15. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = (4x^2 - 5y^2)^3$ хангоми $x = 2, y = 1; dx = 0,6, dy = 0,3$ будан, ёфта шавад.
16. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = (2x^3 - 3y^2 - xy)^4$ хангоми $x = 1, y = 1; dx = 0,2, dy = 0,3$ будан, ёфта шавад.
17. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = (5x^3 - 3y^2)^3$ хангоми $x = 2, y = 1; dx = 0,4, dy = 0,1$ будан, ёфта шавад.
18. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = (5x^2 - y^2 - xy)^2$ хангоми $x = 4, y = 2; dx = 0,1, dy = 0,2$ будан, ёфта шавад.
19. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \frac{5x^2 - y^2}{xy}$ хангоми $x = 1, y = 2; dx = 0,1, dy = 0,2$ будан, ёфта шавад.
20. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \frac{x^2 + 3y^2}{x - y}$ хангоми $x = 3, y = 2; dx = 0,6, dy = 0,2$ будан, ёфта шавад.

21. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \frac{5x^2 - xy + y^2}{xy + 1}$ хангоми $x = 2, y = 2; dx = 0,3, dy = 0,2$ будан, ёфта шавад.
22. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \frac{x^2 - 3xy + y^2}{2xy}$ хангоми $x = 1, y = 2; dx = 0,1, dy = 0,2$ будан, ёфта шавад.
23. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \frac{x^2 + xy - 4y^2}{xy - 2}$ хангоми $x = 2, y = 1; dx = 0,3, dy = 0,2$ будан, ёфта шавад.
24. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \frac{x^2 - 3xy + y^2}{2xy}$ хангоми $x = 1, y = 2; dx = 0,1, dy = 0,2$ будан, ёфта шавад.
25. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} y$ хангоми $x = 0,5, y = 2; dx = 0,1, dy = 0,4$ будан, ёфта шавад.
26. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y$ при $x = 0,4, y = 1; dx = 0,1, dy = 0,6$ будан, ёфта шавад.
27. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = e^x - e^{2y}$ при $x = 0,5, y = 2; dx = 0,1, dy = 0,4$ будан, ёфта шавад.
28. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = e^{x+1} - e^{2-y}$ хангоми $x = 2, y = 3; dx = 0,3, dy = 0,4$ будан, ёфта шавад.
29. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = e^{2x} - e^{2+y}$ хангоми $x = 5, y = 3; dx = 0,1, dy = 0,3$ будан, ёфта шавад.
30. Қимати дифференциали пурраи функцияи $z = e^{3x-1} - e^{2y}$ хангоми $x = 1, y = 2; dx = 0,3, dy = 0,5$ будан, ёфта шавад.

6.7. КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Намунаи иҷрои супориш

Супориш. Функцияи $y = y(x)$ дар намуни ҷадвал дода шудааст.

Ҳосилаҳои $y'(1)$ ва $y''(1)$ ёфта шаванд

x_i	0,96	0,98	1,00	1,02	1,04
y_i	0,7825361	0,7739332	0,7651977	0,7563321	0,7473390

Ҳал. Ҷадвали додашудаи қиматҳои функцияи $y = y(x)$ – ро бо сутунҳои фарқҳои охиринок пурра мекунем

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0,96	0,7825361				
		-0,0086029			
0,98	0,7739332		-0,0001326		
		-0,0087355		0,0000025	

1,00 0,7651977

-0,0001301

0,00000001

-0,0088656

0,00000026

1,02 0,7563321

-0,0001275

-0,0089931

1,04 0,7473390

Барои ҳалли ин масъала аз формулаҳои истифода мебарем, ки дар асоси бисёрҷузъиҳои Стирлинг таҳия шудаанд

$$y'(x_0) = \frac{1}{h} \left(\Delta y_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} \Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{30} \Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \dots \right), \quad (*)$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12} \Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{90} \Delta^6 y_{-3} + \dots \right), \quad (**)$$

дар ин ҷо

$$\Delta y_{-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2}, \quad \Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} = \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2},$$

$$\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} = \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-4}}{2}, \dots$$

$$h = x_{i+1} - x_i = 0,98 - 0,96 = 0,02.$$

Ададҳои дар тағашон ҳат қашидан ҷадвалро истифода бурда, бо ёрии формулаи (*), ҳосилаи тартиби якумро меёбем

$$y'(1) = \frac{1}{0,02} \left(-\frac{0,0087355}{2} + 0,0088656 - \frac{1}{6} \cdot \frac{0,0000025 + 0,0000026}{2} + \frac{1}{30} \cdot 0,0000001 \right)$$

$$= 50 \cdot (-0,0088005 - 0,0000004 + 0) =$$

$$= -50 \cdot 0,0088009 = -0,440045.$$

Айнан ҳамин тавр, аъзоҳои дар тағашон ду бор ҳат қашидаро гирифта, бо таъбиқи формулаи (**), ҳосилаи тартиби дуюми функсияи додшударо меёбем

$$y''(1) = \frac{1}{0,02^2} \left(-0,0001301 - \frac{1}{12} \cdot 0,0000001 \right) =$$

$$= 2500 \cdot (-0,0001301 - 0) = -0,32525.$$

$$\text{Ҷавобҳо: } y'(1) = -0,440045, \quad y''(1) = -0,32525.$$

Вариантҳои супоришҳо

Супориш. Функсияи $y = y(x)$ дар намуни ҷадвал дода шудааст. Ҳосилаҳои $y'(x_1)$ ва $y''(x_2)$ ёфта шаванд

1. $y = \ln x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(10)$ ва $y''(15)$

x_i	5	10	15	20	25	30
y_i	1,6094	2,3026	2,7081	2,9957	3,2189	3,4012

2. $y = \ln x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(5)$ ва $y''(20)$

x_i	5	10	15	20	25	30
y_i	0,699	1	1,1761	1,301	1,3979	1,4771

3. $y = e^x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(0,2)$ ва $y''(0,3)$

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y_i	1,1052	1,2214	1,3499	1,4918	1,6487	1,8221

4. $y = \sin x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(0,1)$ ва $y''(0,4)$

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y_i	0,0998	0,1987	0,2955	0,3894	0,4794	0,5646

5. $y = \cos x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(0,1)$ ва $y''(0,3)$

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y_i	0,995	0,9801	0,9553	0,9211	0,8776	0,8253

6. $y = \lg x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(0,2)$ ва $y''(0,3)$

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y_i	0,1003	0,2027	0,3093	0,4228	0,5463	0,6841

7. $y = \lg x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(1)$ ва $y''(2)$

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	1,5574	-2,185	-0,1426	1,1578	-0,3805	-0,291

8. $y = \operatorname{ctg} x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(1)$ ва $y''(2)$

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	0,6421	-0,4577	-7,0153	0,8637	-0,2958	-3,4364

9. $y = \operatorname{ctg} x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(0,2)$ ва $y''(0,3)$

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y_i	9,9666	4,9332	3,2327	2,3652	1,8305	1,4617

10. $y = \ln x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(1,5)$ ва $y''(2,5)$

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0,4055	0,6931	0,9163	1,0986	1,2528	1,3863

11. $y = \lg x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(2)$ ва $y''(2,5)$

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0,1761	0,301	0,3979	0,4771	0,5441	0,6021

12. $y = \sin x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(1,5)$ ва $y''(3)$

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0,9975	0,9093	0,5985	0,1411	-0,3508	-0,7568

13. $y = \cos x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(1,5)$ ва $y''(3)$

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0,0707	-0,4162	-0,8011	-0,99	-0,9365	-0,6536

14. $y = \operatorname{tg} x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(1,5)$ ва $y''(3,5)$

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	14,1014	-2,185	-0,747	-0,1426	0,3746	1,1578

15. $y = \operatorname{ctg} x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(1,5)$ ва $y''(3)$

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0,0709	-0,4577	-1,3387	-7,0153	2,6696	0,8637

16. $y = \sqrt{x}$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(2)$ ва $y''(2,5)$

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	1,2247	1,4142	1,5811	1,7321	1,8708	2

17. $y = \sqrt{x}$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(5)$ ва $y''(15)$

x_i	5	10	15	20	25	30
y_i	2,2361	3,1623	3,873	4,4721	5	5,4772

18. $y = \sqrt{x+2}$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(5)$ ва $y''(10)$

x_i	5	10	15	20	25	30
y_i	2,6458	3,4641	4,1231	4,6904	5,1962	5,6569

19. $y = \sqrt{x+5}$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(10)$ ва $y''(15)$

x_i	5	10	15	20	25	30
y_i	3,1623	3,873	4,4721	5	5,4772	5,9161

20. $y = \sqrt{x+7}$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(5)$ ва $y''(20)$

x_i	5	10	15	20	25	30
y_i	3,4641	4,1231	4,6904	5,1962	5,6569	6,0828

21. $y = \sqrt{x^2+1}$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(10)$ ва $y''(25)$

x_i	5	10	15	20	25	30
y_i	5,099	10,0499	15,0333	20,025	25,02	30,0167

22. $y = \sqrt{x}$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(2)$ ва $y''(5)$

x_i	2	3	5	6	7	8
y_i	1,4142	1,7321	2,2361	2,4495	2,6458	2,8284

23. $y = e^{-x}$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(1,5)$ ва $y''(3)$

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302

24. $y = \arcsin x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(0,2)$ ва $y''(0,3)$

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y_i	0,1002	0,2014	0,3047	0,4115	0,5236	0,6435

25. $y = \arccos x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(0,1)$ ва $y''(0,2)$

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y_i	1,4706	1,3694	1,2661	1,1593	1,0472	0,9273

26. $y = \arccos x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(0,2)$ ва $y''(0,3)$

x_i	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
y_i	1,2661	1,1593	1,0472	0,9273	0,7954	0,6435

27. $y = \arcsin x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(0,3)$ ва $y''(0,4)$

x_i	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
y_i	0,3047	0,4115	0,5236	0,6435	0,7754	0,9273

28. $y = \arcsin x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(0,4)$ ва $y''(0,6)$

x_i	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y_i	0,4115	0,5236	0,6435	0,7754	0,9273	1,1198

29. $y = \arcsos x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(0,5)$ ва $y''(0,7)$

x_i	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y_i	1,1593	1,0472	0,9273	0,7954	0,6435	0,451

30. $y = \ln x$ дода шудааст. Ёфта шавад $y'(4)$ ва $y''(5)$

x_i	4	5	6	7	8	9
y_i	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972

6.8. САВОЛҲО БАРОИ ТАҚРОРИ БОБ

1. Дар кадом ҳолатҳо методҳои дифференсиронии ададӣ татбиқ карда мешаванд?
2. Гузориши масъалаи дифференсиронии ададиरो баён кунед
3. Кадам формулаҳо формулаҳои соддатарини дифференсиронии ададӣ номида мешаванд?
4. Формулаи фарқҳои тарафи чапро нависед.
5. Формулаи фарқҳои тарафи ростро нависед.
6. Формулаи фарқҳои марказиро нависед.
7. Дар кадом ҳолатҳо методи коэффисиентҳои номуайян истифода бурда мешавад?
8. Ҷадвали фарқҳои охиринок чӣ тавр тартиб дода мешавад?
9. Барои ҳосил намудани формулаҳои дифференсиронии ададӣ функсияи додашуда бо кадом аппарат математикӣ иваз карда мешавад?
10. Агар ҳамаи функсияи интерполясикунии $P(x)$ маълум бошад, он гоҳ ҳамаи ҳосилаи ин функсия $P'(x)$ бо ёрии кадом формула ҳисоб карда мешавад?
11. Формулаи дифференсиронии ададиҳо, ки дар асоси бисёрраъзгии якуми интерполясикунии Нютон ҳосил мешавад, нависед.
12. Формулаи дифференсиронии ададиҳо, ки дар асоси бисёрраъзгии интерполясикунии Лагранж ҳосил мешавад, нависед.

VII. ИНТЕГРОНИИ АДАДИИ ФУНКСИЯ

7.1. Гузориши масъала

Интеграл дар порчаи $[a, b]$ функсияи $y = f(x)$ дода шуда бошад. Бар нуктаҳои $x_0, x_1, \dots, x_n$ порчаи $[a, b]$ — ро ба n порчаҳои элементарии $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) тақсим карда, $x_0 = a$ ва $x_n = b$ интихоб мекунем. Дар ҳар яке ин порчаҳо нуктаи ихтиёрии ξ_i ($x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$) — ро гирифта, ҳосили зарби киматҳои функсияро S_i дар ин нукта $f(\xi_i)$ ба дарозии порчаҳои элементарӣ $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ мекунем

$$S_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Суммаи ҳамаи ҷунибҳои зарбхоро ҳисоб мекунем

$$S_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Суммаи S_n суммаи интегралӣ номида мешавад.

Таъриф. Интегралӣ муайян аз функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a, b]$ гуфта, ҳудуди суммаи интегралӣро ҳангоми беохир афзудани миқдори нуктаҳои тақсимогии порчаҳо ($x_0, x_1, \dots, x_n$) меноманд ва мувофиқи ин таъриф дарозии ин порчаҳои элементарӣ ба нол майл мекунанд, яъне

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Дар бисёр мавридҳо, вақте функсияи зеринтегралӣ дар намуди аналитикӣ дода шудааст, ҳисоб намудани ин интеграл бо ёрии формулаи Нютон-Лейбнитс ба амал бароварда мешавад, яъне агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a, b]$ бефосила буда, функсияи ибтидоӣ он $F(x)$ маълум бошад, он гоҳ интегралӣ муайян аз ин функсия дар ҳудуди аз a то b бо татбиқи формулаи Нютон-Лейбнитс ҳисоб карда мешавад, яъне бо истифодаи формулаи

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

дар ин ҷо $F'(x) = f(x)$ аст.

Аммо мавриди ҳалли бисёр масъалаҳо татбиқи формулаи Нютон-Лейбнитс бо ду сабаб ғайриимкон мегардад:

- 1) Намуд аналитикии функсияи $f(x)$ барои интегралӣ мувофиқ нест, яъне барои ин функсия функсияи ибтидоӣ мавҷуд нест, масалан, функсияҳои $\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2} ва ғайра;

2) Қиматҳои функсияи $f(x)$ танҳо дар нуктаҳои ҷудо кардашудаи маҷмӯи охиринокӣ x_i дода шудаанд, яъне қиматҳои функсия дар намуди ҷадвал дода шудаанд.

Аз ин рӯ, ҳангоми пеш омадани чунин душвориҳо аз методҳои тақрибии интегронии ададӣ истифода бурдан мувофиқи мақсад аст. Вазифаи интегронии ададӣ аз он иборат аст, ки қимати интегралро муайян дар асоси интиҳоби як қатор қиматҳои функсияи зеринтегралӣ, ҳисоб карда мешавад.

7.2. Формулаи умумии трапетсияҳо

Бигзор ҳисоб кардани интегралҳои функсияи $y = f(x)$ талаб карда шуда бошад, яъне

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx.$$

Порчаи интегронии $[a, b]$ — ро ба n қисмҳои баробар $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ мекунем. $h = \frac{b-a}{n}$ гирифта, ба воситаи $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) қиматҳои функсияи зеринтегралро дар нуктаҳои x_i ифода мекунаем ва ҳосил мекунем

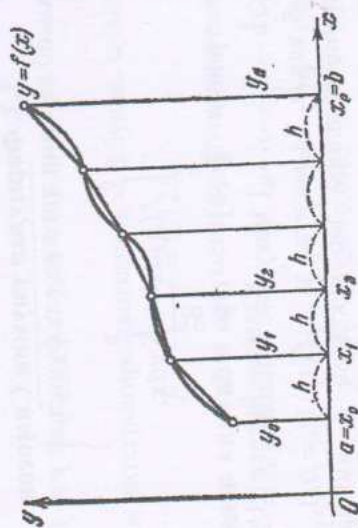
$$\int_a^b y dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \dots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

ва ё

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_n) + h(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}). \quad (1)$$

Формулаи (1) формулаи трапетсияҳо барои тақрибӣ ҳисоб кардани интегралҳои муайян номида мешавад.

Маънои геометрии формулаи трапетсияҳо — ин ифодаи графико хати қачи функсияи зерин интеграл $y = f(x)$ бо хатҳои шикаста мебошад (расми 1).



Расми 1.

Бақияи формулаи квадратурии трапетсияҳо бо ёрии формулаи зерин баҳо дода мешавад

$$R = -\frac{(b-a)h^2}{12} y''(\xi) \quad (\xi \in [a, b]).$$

Мисоли 1. Бо ёрии формулаи трапетсияҳо, ҳангоми $n = 10$ будан, бо саҳеҳии то 0.001, интеграл ҳисоб карда шавад

$$\int_0^2 \frac{\sin x + 0.5}{e^{1.5x} + 1.7} dx.$$

Ҳал. Ҳангоми $n = 10$ будан, қадами интегрониро муайян мекунем.

$$h = \frac{2-0}{10} = 0.2.$$

Барои қулай шудани ҳисобкуниҳо ҷадвали қиматҳои аргумент ва функсияро дар нуктаҳои x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 10$) тартиб медиҳем.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y_i	0.1852	0.2588	0.3294	0.3943	0.4509	0.4963	0.5304	0.5502	0.5554	0.5459	0.522

Қиматҳои ҷадвалро истифода бурда, тавассути формулаи (1) интегралро ҳисоб мекунем

$$\int_0^2 \frac{\sin x + 0.5}{e^{1.5x} + 1.7} dx \approx \frac{0.2}{2} \cdot (0.1852 + 0.522) +$$

$$+ 0.2 \cdot (0.2588 + 0.3294 + 0.3943 + 0.4509 + 0.4968 + 0.5304 +$$

$$+ 0.5502 + 0.5554 + 0.5459) = 0.0707 + 0.8224 = 0.8931.$$

Ҷавоб: 0.8931.

7.3. Формулаи умумии Симпсон

Бигзор ҳисоб кардани интеграл аз функсияи $y = f(x)$ талаб кунем, шуда бошад

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx.$$

Порчаи интеграл $[a, b]$ — ро ба n қисмҳои баробар $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ мекунем. Минбаъд $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$ ($n = 2m$) интиҳоб карда, ба воситаи $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) қиматҳои функсияи зеринтегралро дар нуктаҳои x_i ишора карда, соҳиб мешавем

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots +$$

$$\frac{h}{3} (y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

ва ё

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})]. \quad (2)$$

Формулаи (2) формулаи умумикардани Симпсон барои интегралҳои ададӣ номида мешавад. Ҷуний ишорахоро ворид карда

$$\sigma_1 = y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1},$$

$$\sigma_2 = y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2},$$

формулаи Симпсон (2) — ро дар намуни нисбатан кулай навиштам

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2m}) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2].$$

Бақияи формулаи квадратурии Симпсон бо ёрии формулаи зерин баҳо дода мешавад

$$R = -\frac{(b-a)h^4}{180} y^{(IV)}(\xi) \quad (\xi \in [a, b]).$$

Мисоли 2. Формулаи Симпсонро истифода бурда, ҳангоми $n = 8$ будан, бо саҳеҳии то 0.001 интегралҳои зерин ҳисоб карда шаванд

$$\int_1^2 \sqrt{2.3x^5 - 1.4x^2 + 3.6} dx.$$

Ҳал. Қадами интегрониро ҳангоми $n = 8$ будан, муайян мекунем.

$$h = \frac{2-1}{8} = 0.125.$$

Ақсун ҷадвали қиматҳои аргумент ва функсияро дар нуктаҳои x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 8$) тартиб медиҳем

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	0	1.125	1.25	1.375	1.5	1.625	1.75	1.875	2
y_i	2.1213	2.4439	2.9037	3.5011	4.2327	5.0955	6.0879	7.2097	8.4617

Қиматҳои ҷадвалро ба формулаи (2) гузошта, интегралро тақрибӣ ҳисоб мекунем

$$\int_1^2 \sqrt{2.3x^5 - 1.4x^2 + 3.6} dx \approx \frac{0.125}{3} \cdot [(2.1213 + 8.4617) +$$

$$+ 4 \cdot (2.4439 + 3.5011 + 5.0955 + 7.2097) +$$

$$+ 2 \cdot (2.9037 + 4.2327 + 6.0879)] = 4.58468.$$

Ҷавоб: 4.58468.

7.4. КОРИ ЛАБОРАТОРИЙ

Варианти супоришҳо

Аз формулаи трапезияҳо истифода бурда, ҳангоми $n = 10$ будан бо саҳеҳии то 0.001 интеграл ҳисоб карда шаванд

$$1. \int_0^1 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x \, dx; \quad 2. \int_0^{-2} (x^2 - 4) \cos 3x \, dx$$

$$3. \int_{-2}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x \, dx; \quad 4. \int_{-2}^0 (x + 2)^2 \cos 3x \, dx$$

$$5. \int_0^{\pi} (x^2 + 7x + 12) \cos x \, dx; \quad 6. \int_0^{\pi} (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x \, dx;$$

$$7. \int_0^{\pi} (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x \, dx; \quad 8. \int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x \, dx;$$

$$9. \int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x \, dx; \quad 10. \int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x \, dx;$$

$$\begin{aligned}
& 11. \int_0^{2\pi} (3-7x^2) \cos 2x \, dx; \quad 12. \int_0^{2\pi} (1-8x^2) \cos 4x \, dx; \\
& 13. \int_{-1}^0 (x^2+2x+1) \sin 3x \, dx; \quad 14. \int_0^3 (x^2-3x) \sin 2x \, dx; \\
& 15. \int_0^{\pi} (x^2-3x+2) \sin x \, dx; \quad 16. \int_0^{\pi/2} (x^2-5x+6) \sin 3x \, dx; \\
& 17. \int_{-3}^0 (x^2+6x+9) \sin 2x \, dx; \quad 18. \int_0^{\pi/4} (x^2+17,5) \sin 2x \, dx; \\
& 19. \int_0^{\pi/2} (1-5x^2) \sin x \, dx; \quad 20. \int_0^{\pi/4} (3x-x^2) \sin 2x \, dx; \\
& 21. \int_1^2 x \ln^2 x \, dx; \quad 22. \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x \, dx}{\sqrt{x}}; \quad 23. \int_1^8 \frac{\ln^2 x \, dx}{\sqrt[3]{x^2}}; \\
& 24. \int_0^1 (x+1) \ln^2 (x+1) \, dx; \quad 25. \int_2^3 (x-1)^3 \ln^2 (x-1) \, dx; \\
& 26. \int_{-1}^0 (x+2)^3 \ln^2 (x+2) \, dx; \quad 27. \int_0^2 (x+1)^2 \ln^2 (x+1) \, dx; \\
& 28. \int_0^1 x^2 e^{3x} \, dx; \quad 29. \int_{-2}^0 (x^2+2) e^{x/2} \, dx; \quad 30. \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} \, dx.
\end{aligned}$$

7.5. МАШГУЛИЯТИ АМАЛИ

Намунаи иҷрои супориш

Супориш. Аз формулаи Симпсон истифода бурда, ҳангоми $n = 8$ ба саҳеҳии то 0.001 интеграл ҳисоб карда шавад

$$\int_0^1 x^3 \sqrt{3+x^2} \, dx.$$

Ҳал. Азбаски $n = 8$ аст, бинобар қадами интегронири муайян мекунем $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8} = 0,125$. Аввал худуди поёнии интегралро тағйирфта, яъне $x_0 = 0$, дар ин нукта қимати функсияи зерин интегралбударо ҳисоб мекунем

$$f(x_0) = f(0) = 0^3 \sqrt{3+0^2} = \sqrt{3} = 1,7321.$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0,125 = 0,125.$$

$$f(x_1) = f(0,125) = 0,125^3 \sqrt{3+0,125^2} = 0,002.$$

Ом

гоҳ

$$\sqrt{3+0,0156} =$$

$$= 0,002 \cdot \sqrt{3,0156} = 0,002 \cdot 0,7366 = 0,0035.$$

$$x_2 = x_1 + h = 0,125 + 0,125 = 0,25.$$

$$f(x_2) = f(0,25) = 0,25^3 \sqrt{3+0,25^2} = 0,0156 \cdot \sqrt{3+0,0625} =$$

$$= 0,0156 \cdot \sqrt{3,0625} = 0,0156 \cdot 1,75 = 0,0273.$$

$$x_3 = x_2 + h = 0,25 + 0,125 = 0,375.$$

$$f(x_3) = f(0,375) = 0,375^3 \sqrt{3+0,375^2} = 0,0527 \cdot \sqrt{3+0,1406} =$$

$$= 0,0527 \cdot \sqrt{3,1406} = 0,0527 \cdot 1,7722 = 0,0934.$$

$$x_4 = x_3 + h = 0,375 + 0,125 = 0,5.$$

$$f(x_4) = f(0,5) = 0,5^3 \sqrt{3+0,5^2} = 0,125 \cdot \sqrt{3+0,25} =$$

$$= 0,125 \cdot \sqrt{3,25} = 0,125 \cdot 1,8028 = 0,2253.$$

$$x_5 = x_4 + h = 0,5 + 0,125 = 0,625.$$

$$f(x_5) = f(0,625) = 0,625^3 \sqrt{3+0,625^2} = 0,2441 \cdot \sqrt{3+0,3906} =$$

$$= 0,2441 \cdot \sqrt{3,3906} = 0,2441 \cdot 1,8414 = 0,4495.$$

$$x_6 = x_5 + h = 0,625 + 0,125 = 0,75.$$

$$f(x_6) = f(0,75) = 0,75^3 \sqrt{3+0,75^2} = 0,4219 \cdot \sqrt{3+0,5625} =$$

$$= 0,4219 \cdot \sqrt{3,5625} = 0,4219 \cdot 1,8875 = 0,7963.$$

$$x_7 = x_6 + h = 0,75 + 0,125 = 0,875.$$

$$f(x_7) = f(0,875) = 0,875^3 \sqrt{3+0,875^2} = 0,6699 \cdot \sqrt{3+0,7656} =$$

$$= 0,6699 \cdot \sqrt{3,7656} = 0,6699 \cdot 1,9405 = 1,3.$$

$$x_8 = x_7 + h = 0,875 + 0,125 = 1.$$

$$f(x_8) = f(1) = 1^3 \sqrt{3 + 1^2} = 1 \cdot \sqrt{4} = 2$$

Акнун киматҳои барои функсия ёфтамон $f(x_i)$ – ро ба формулаи трапетсияҳо гузошта, ҳосил мекунем

$$\begin{aligned} \int_a^b y dx &= \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + \\ &\quad + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})] = \\ &= \frac{0,125}{3} [1,7321 + 2 + 4 \cdot (0,0035 + 0,0934 + 0,4495 + 1,3) + \\ &\quad + 2 \cdot (0,0273 + 0,2253 + 0,7963)] = \\ &= 0,0417 \cdot (3,7321 + 7,3856 + 2,0978) = 0,5511. \end{aligned}$$

$$\text{Ҷавоб: } \int_0^1 x^3 \sqrt{3 + x^2} dx \approx 0,5511$$

Вариантҳои супоришҳо

Супориш. Аз формулаи Симпсон истифода бурда, ҳангоми $n = 16$ будан бо саҳеҳии то 0,001 интеграл ҳисоб карда шавад

1. $\int_0^1 \sqrt{256 - x^2} dx$; 2. $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$; 3. $\int_0^5 \frac{dx}{x^2 \sqrt{25 + x^2}}$;
4. $\int_0^3 \frac{dx}{(9 + x^2)^{3/2}}$; 5. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5 - x^2)^3}}$; 6. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx$;
7. $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$; 8. $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}$; 9. $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{(2 - x^2)^{3/2}}$;
10. $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}}$; 11. $\int_0^{\sqrt{5}/2} \sqrt{4 - x^2} dx$; 12. $\int_0^4 \frac{dx}{(16 - x^2)^{3/2}}$;
13. $\int_0^4 x^2 \sqrt{16 - x^2} dx$; 14. $\int_0^4 \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 - x^2}}$; 15. $\int_0^5 x^2 \sqrt{25 - x^2} dx$;
16. $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx$; 17. $\int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{(64 - x^2)^3}$; 18. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x^4} dx$;

19. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(16 - x^2)^3}}$; 20. $\int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9 - x^2} dx$; 21. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$;
22. $\int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8 - x^2)^3}}$; 23. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx$; 24. $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx$;
25. $\int_0^4 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4} dx$; 26. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(4 - x^2)^{3/2}}$; 27. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}}$;
28. $\int_0^{2^{3/2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}}$; 29. $\int_0^1 \frac{\sqrt{1 + x}}{x^2 \sqrt{x}} dx$; 30. $\int_0^1 \frac{\sqrt{3 + x}}{\sqrt{x + 1}} dx$.

7.6. КОРИ МУСТАКИЛОНА

Супориш. Бо ёрии методи трапетсияҳо ва ё Симпсон интеграл ҳисоб карда шавад.

1. $\int_0^{\pi} (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x dx$; 2. $\int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx$;
3. $\int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx$; 4. $\int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x dx$;
5. $\int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x dx$; 6. $\int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x dx$;
7. $\int_{-1}^{\pi} (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx$; 8. $\int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x dx$;
9. $\int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx$; 10. $\int_0^{\pi/2} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx$;
11. $\int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx$; 12. $\int_0^{\pi/4} (x^2 + 17,5) \sin 2x dx$;

$$\begin{aligned}
& 13. \int_0^{\pi/2} (1-5x^2) \sin x \, dx; \quad 14. \int_0^{\pi/4} (3x-x^2) \sin 2x \, dx; \\
& 15. \int_1^2 x \ln^2 x \, dx; \quad 16. \int_1^2 \frac{\ln^2 x \, dx}{\sqrt{x}}; \quad 17. \int_1^8 \frac{\ln^2 x \, dx}{\sqrt[3]{x^2}}; \\
& 18. \int_0^1 (x+1) \ln^2 (x+1) \, dx; \quad 19. \int_2^3 (x-1)^3 \ln^2 (x-1) \, dx; \\
& 20. \int_{-1}^0 (x+2)^3 \ln^2 (x+2) \, dx; \quad 21. \int_0^2 (x+1)^2 \ln^2 (x+1) \, dx \\
& 22. \int_0^1 x^2 e^{3x} \, dx; \quad 23. \int_{-2}^0 (x^2+2) e^{x/2} \, dx; \quad 24. \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} \, dx; \\
& 25. \int_{-2}^0 (x^2+5x+6) \cos 2x \, dx; \quad 26. \int_0^2 (x^2-4) \cos 3x \, dx \\
& 27. \int_{-1}^0 (x^2+4x+3) \cos x \, dx; \quad 28. \int_{-2}^0 (x+2)^2 \cos 3x \, dx \\
& 29. \int_{-4}^0 (x^2+7x+12) \cos x \, dx; \quad 30. \int_0^{\pi} (2x^2+4x+7) \cos 2x \, dx;
\end{aligned}$$

7.7. САВОЛҲО БАРОИ ТАҚРОРИ БОБ

1. Суммаи интегралӣ чист?
2. Агар функцияи зеринтегралӣ ба таври аналитикӣ дода шуда бошад, чунин интеграл аз рӯи кадом формула ҳисоб карда мешавад?
3. Дар кадом мавридҳо формулаи Нютон –Лейбнитс истифода бурда мешавад?
4. Дар кадом мавридҳо, барои ҳисоб намудани интеграл истифодаи формулаи Нютон –Лейбнитс ғайримумкин аст?
5. Формулаи умумии трапетсияҳоро нависед.
6. Маънои геометрии формулаи трапетсия чист?
7. Формулаи умумии Симпсонро нависед.
8. Маънои геометрии формулаи Симпсон чист?
9. Ҳангоми истифодаи методи трапетсияҳо чӣ тавр ҳатогии интегрониро кам кардан мумкин аст?
10. Дар кадом мавридҳо методи трапетсияҳо татбиқ карда мешавад?
11. Агар функцияи зеринтегралӣ $f(x) = 5 \cdot x$ дода шуда бошад, истифодаи кадом метод барои ҳисобкунии он кулайтар аст?
12. Бо татбиқи методҳои росткунҷаҳо ва трапетсияҳо интегралҳои функсияи аниқ ҳисобкарда мешавад ё не?
13. Бо истифодаи методи трапетсияҳо интегралҳои номуайинро ҳисоб кардан мумкин аст ё не?
14. Дар мавриди истифодаи методи интегронии ададии трапетсияҳо қадами интегрониро ба таври автоматӣ интихоб кардан мумкин аст ё не?
15. Оё зарур аст, ки ҳамаи интегронии ададӣ порчаи интегронӣ ба порчаҳои хурд тақсим карда шавад?
16. Ҳангоми ҳисоб кардани интеграл бо ёрии формулаи Симпсон чӣ тавр саҳеҳиро аниқтар кардан мумкин аст?
17. Ҳангоми кам кардани микдори тақсимоҳои порчаи интегронӣ n саҳеҳии ҳисобкунии чӣ тавр тағйир меёбад?
18. Функсияи зеринтегралӣ $f(x) = 3x^2 + 5$ дода шудааст. Оё бо истифодаи методҳои интегронии ададӣ ин интегралро бе ҳатогӣ ҳисоб кардан мумкин аст?

VIII. МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ

8.1. Гузориши масъала

Ҳангоми таҳияи модели математикии масъалаҳои муҳталифӣ илмӣю техникий зарурат ба ҳалли муодилаҳои дифференсиалии оддӣ мерасонад.

Таъриф. Муодилаи дифференсиалии гуфта муодиларо меноманд, ки дар он ба ғайр аз функцияҳои y ва $y^{(n)}$ ҳамаи аъзоҳо боз ҳосилаҳои онҳо оварда шудаанд. Муодилаи дифференсиалии оддӣ номида мешавад, агар дар он номатлумҳо функцияҳои яктағйирбанда бошанд, дар ҳолати акс муодилаи дифференсиалии муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусӣ меноманд.

Баробарии

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

ки тағйирбанди x , функцияи номатлуми $y = Y(x)$ ва ҳосилаҳои тартиби n -умро дарбар мегирад, муодилаи дифференсиалии оддӣ тартиби n номида мешавад. Ҳал намудани муодилаи (1) – ин ёфтани чунин вобастагии функционалии $y = Y(x)$, ки ҳангоми онро ба (1) гузоштан, муодилаи (1) ба аиният табдил меёбад.

Барои дар амалия қулай истифода бурдани формулаи (1), ҳосилаи тартиби калонро бо тартиби хуртар ифода мекунамд, масалан ҳангоми $n = 1$ будан, муодилаи (1) намуди зерин мегирад

$$Y' = f(x, Y); \quad (2)$$

Ҳалли умумии муодилаи (1) намуди зерин дорад

$$Y = Y(x, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n),$$

дар ин ҷо $c_1, \dots, c_n$ – доимӣҳои ихтиёрий.

Агар бо ёрии ягон шартӣ пешакӣ додашуда c_i – хо маълум бошанд, он гоҳ решани хусусии муодилаи матлуб намуди зеринро мегирад

$$Y = Y(x, c_{10}, c_{20}, c_{30}, \dots, c_{n0}). \quad (3)$$

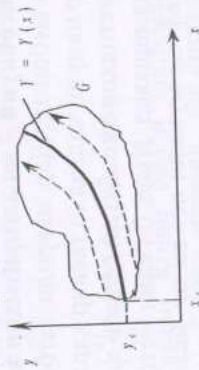
Вобаста аз усулҳои дода шудан чунин шартҳо ду масъала барои муодилаҳои дифференсиалии оддӣ мавҷуданд:

- 1) масъалаи Коши;
- 2) масъалаҳои канорӣ.

Ба сифати шартҳои иловагӣ қимати функцияи матлуб ва ё ҳосилаҳои он низ дода мешаванд. Агар шартҳо дар яке аз нуктаҳои порчаи соҳан муайянии $Y(x) \in [a, b]$ дода шуда бошанд, одатан дар ибтидои порча $x = x_0 = a$, ин масъалаи Коши бо нуктаи ибтидоӣ мебошад. Агар шартҳои иловагӣ дар нуктаҳои $x = a$ ва $x = b$ бошанд,

инро масъалаҳои канорӣ бо шартҳои худудӣ мегӯянд. Ҳалли умумии муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум $Y' = f(x, c)$ мешавад, ҳалли хусусиаш бошад $Y = f(x, c_0)$ аст.

Маънои геометрии муодилаҳои дифференсиалии тартиби якумро аз системаи (2) ба хотир меорем. Ҳалҳои онро дар намуни дастаи хатҳои қатъ дар ҳамвории XOY тасвир кардан мумкин аст:



Бигзор тарафи рости муодилаи (2) функцияи ношкор додашудаи $f(x, y)$ дар соҳаи G – и ин ҳамворӣ муайян ва бефосила бошад. Дар ҳар як нуктаи соҳаи G функцияи $f(x, y)$ ягон самтҳо муайян мекунад ва ин самтҳо майдони самтхоро ташкил медиҳанд. Барои ёфтани ҳалли умумии муодила чунин хатҳои қатъи интегралро пайдо кардан лозим аст, ки расандаҳои онҳо ба самти майдони самтҳо мувофиқат кунанд. Аз ҳар як нуктаи маҷмӯи халҳо як хати қатъи интегралӣ мегузарад. Барои муодилаи дифференсиалии хангоми $n > 1$ будан, аз ҳар як нуктаи ҳалли муодила якчанд хати қатъи интегралӣ мегузарад ва n шартҳои иловагӣ зарур мешаванд, яъне барои муодилаҳои дифференсиалии тартиби олии тасвири геометрии он ҳеле мураккаб мегардад. Ёфтани ҳалли умумии муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум дар намуни аналитикӣ нга ҳама вақт имконпазир мегардад. Ҳалли хусусиро низ тақрибан ёфтан мумкин мешавад. Ҳалли $Y = Y(x)$ ба доимии мувофиқе решани хусусии муодила мешавад.

Методҳои ҳалли муодилаҳои дифференсиалии оддиро ба якҷанд гуруҳ ҷудо мекунамд:

- графӣ;
- аналитикӣ;
- аналитикии тақрибӣ;
- ададӣ.

Аз методҳои тақрибии ҳалли муодилаҳои дифференсиалии тартиби охиринок нисбатан бештар истифода бурда мешавад. Ҷояи асосии ин метод аз он иборат аст, ки соҳаи тағйирбанди бефосилаи аргумент (масалан, порча) ба маҷмӯи дискретии нуктаҳо –

гиреххо иваз карда мешавад. Ин гиреххо аз тӯрҳои фарқҳои охирик (сетка конечных разностей) иборат мебошанд. Дар ин тӯрҳои функсияи аргументҳои бифосилаи матлуб ба функсияи тақрибии аргументаш дискретӣ табдил дода мешавад, яъне ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ ба ҳаҷми қиматҳои функсияи дар намуди катаҳои фарқи охирик додашуда дар гирехҳои тӯрҳо, оварда мешавад.

Методҳои ҳисобкунӣ — ин алгоритмҳои ҳисобкунӣ тақрибии функсияи матлуб мебошад. Дар мавриди таъбиқи чунин алгоритмҳои ҳалли масъала дар намуди ҷадвалҳо тасвир карда мешавад.

Одатан дар методҳои ҳисобкунӣ ёфтани ҳалҳои умумии муодила дар назар дошта намешавад. Яъне, бо ёрии методҳои ҳисобкунӣ танҳо ҳалҳои хусусиро ёфтан мумкин аст ва ин методҳо ба гуруҳи васеи муодилаҳо ва масъалаҳои мухталиф таъбиқ карда мешаванд. Қайд кардан зарур аст, ки дар ҳама ҳалҳои тақрибии масъалаҳои гузориши дуруст, интихоби метод ва саҳеҳии ҳалҳои масъала талаб карда мешаванд.

8.2. Масъалаи Коши барои муодилаҳои дифференсиалии оддӣ

Вобаста аз намуди муодилаҳои дифференсиалии (1) масъалаи Коши чунин баён карда мешавад.

1. Агар $n = 1$ бошад, он гоҳ ёфтани чунин функсия $Y = Y(x)$ талаб карда мешавад, ки муодилаи зеринро қаноат кунад

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y) \quad (4)$$

ва ҳангоми $x = x_0$ будан, қимати Y_0 — ро қабул кунад

$$Y(x_0) = Y_0. \quad (5)$$

Барои аниқии гузориши масъала, фарз карда мешавад, ки ҳалли масъалаи Коши барои қиматҳои $x > x_0$ ҳаҷми қиматҳои x дар бисёр мавридҳо $x_0 = 0$ қабул карда мешавад, ки барои таъбиқи метод ба муодилаи (4) ягон таъсире намерасонад.

Қайд кардан зарур аст, ки ҳама методҳои тақрибии ҳисобкунӣ барои ҳалли муодилаҳои дифференсиалии оддӣ таъбиқи якум пешниҳод карда шудаанд.

2. Масъалаи Коши барои муодилаҳои дифференсиалии оддӣ таъбиқи n -ум

$$Y^{(n)} = f(x, Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}). \quad (6)$$

Чунин функсияи $Y = Y(x)$ ёфта шавад, ки муодилаи (6)-ро қаноат мекунад ва шартҳои ибтидоӣ

$$Y(x_0) = Y_0, \quad Y'(x_0) = Y'_0, \dots, \quad Y^{(n-1)}(x_0) = Y_0^{(n-1)} \quad (7)$$

дода шуда бошанд, дар ин ҳолат $Y_0, Y'_0, \dots, Y_0^{(n-1)}$ — ададҳои додашуда.

3. Масъалаи Коши барои системаи муодилаҳои дифференсиалии

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dx} = f_1(x, Y_1, Y_2, \dots, Y_n); \\ \frac{dY_2}{dx} = f_2(x, Y_1, Y_2, \dots, Y_n); \\ \dots \\ \frac{dY_n}{dx} = f_n(x, Y_1, Y_2, \dots, Y_n). \end{cases} \quad (8)$$

Ғояи асосии масъалаи Коши барои системаи (8) чунин аст: функсияҳои $Y_i(x)$ ($i = 1, n$) ёфта шаванд, ки системаи (8)-ро қаноат мекунад ва шартҳои ибтидоӣ зерин дода шуда бошанд

$$Y_i(x_0) = Y_{i0}; \quad Y_2(x_0) = Y_{20}; \dots; \quad Y_n(x_0) = Y_{n0}. \quad (9)$$

Методҳои тақрибии ҳалли муодилаҳои дифференсиалии оддӣ (4) ва (5) барои ёфтани ҳалҳои системаи (8) низ таъбиқи ҳудуди меёбад.

Муодилаҳои дифференсиалии таъбиқи n -уми (6) ба намуди системаи (8), бо роҳи ворид намудани функсияҳои номаълуми $Y_i(x)$, $i = 1, n-1$ оварда мешавад

$$Y_i = Y_i', \quad Y_i' = Y_i'', \quad \dots, \quad Y_i^{(n-1)} = Y_i^{(n-1)}. \quad (10)$$

Он гоҳ муодилаи (6)-ро дар намуди зерин навиҷаст

$$\begin{cases} \frac{dY}{dx} = Y_1'; \\ \frac{dY_1}{dx} = Y_2'; \\ \dots \\ \frac{dY_{n-2}}{dx} = Y_{n-1}'; \\ \frac{dY_{n-1}}{dx} = f(x, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}). \end{cases}$$

Агар ёфтани ҳалҳои умумии муодилаҳои (4), (6), ва ё системаи (8) муяссар гардад, он гоҳ масъалаи Коши ба ёфтани қиматҳои доимӣҳои ихтиёрӣ оварда мерасонад. Одатан, чунин масъалаҳо ба таъбиқи методҳои тақрибии ҳисобкунӣ ҳал карда мешаванд.

8.3. Ҳалли масъалаи Коши

Барои ҳалли масъалаи Коши (4) ва (5) мувофиқи технологияи методҳои фарқӣ (разностные методы) пайдарпаии нуқтаҳои $x_0, x_1, \dots, x_n$ ва кадам $h_i = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) – ро ворид мекунем. Дар ҳар як гиреҳи x_i ба чои киматҳои функсияҳои $Y(x_i)$ алаҳҳои y_i дида мешаванд. Функсияи y , ки дар намуни додҳои $\{x_i, y_i\}$ дода шудааст, функсияи тўрӣ (сеточная функция) номида мешавад. Дар муодилаи (4) ба чои ҳосила фарқҳои охирикоро гузошта, аз масъалаҳои дифференсиалии (4) ва (5), нисбат ба функсияи $Y(x)$, нисбат ба функсияҳои тўрӣ

$$y_{i+1} = F(x_i, h_i, y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k+1}), \quad i = 1, 2, \dots; \quad (11)$$

$$y_0 = Y_0 \quad (12)$$

ба масъалаҳои фарқӣ мегузарем.

Ин муодилаи фарқӣ, хусусан тарафи рости (11) аз усули апроксиматсияи ҳосила, вобастагӣ дорад. Барои ҳар як методи тақрибии ададӣ намуни хусусии муодилаи (11) ҳосил мешавад.

Агар дар тарафи рости муодилаи (11) киматҳои y_{i+1} мавҷуд набоянд, яъне агар киматҳои y_{i+1} аз рӯи k киматҳои пешояндаи $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k+1}$ ҳисоб карда шуда бошанд, он гоҳ схемаи фарқӣ (разностная схема) **ошкор** номида мешавад. Дар ин маврид методи k -кадама чой дорад: $k = 1$ – яккадама, $k = 2$ – дукадама ва ғайра, яъне дар методҳои яккадама барои ҳисоб намуни y_{i+1} танҳо як кимати дар кадами пешоянда y_i истифода бурда мешавад, дар бисёркадама бошад, киматҳои бисёри пешоянда.

Агар y_{i+1} дар тарафи рости муодилаи (11) омада бошад, он гоҳ ин метод ноошкор мебошад, ки таъбиқи он танҳо хараҷтери итератсионӣ дорад.

8.3.1. Методҳои яккадамаи ҳалли масъалаи Коши

Акнун як қатор методҳои тақрибии нисбатан содаи ҳалли масъалаи Коширо барои ёфтани решаҳои муодилаҳои дифференсиалии оддӣ дида мебароем.

1. Методи Эйлер. Ин метод ба паҳнкунии функсияи матлуб ба катори Тейлор дар атрофи гиреҳҳои система $x = x_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), таъя мекунад, ки дар он ҳама аъзоҳои дорони ҳосилаҳои тартиби дуюм ва аз он боло истисно карда мешаванд. Дар ин маврид, одатан тўри

мунтазами $\Delta x = x_i + 1 - x_i = h = \text{const}$ ($i = 0, n$) истифода бурда мешавад. Ба қатор паҳнкуниро дар шакли зерин менависем

$$Y(x_i + \Delta x) = Y(x_i) + Y'(x_i) \cdot \Delta x + O(\Delta x^2). \quad (13)$$

Киматҳои функсияи $Y(x)$ – ро дар дар гиреҳҳои тўр x_i бо киматҳои функсияи тўрӣ иваз намуна, бо ёрии муодилаи (4), соҳиб мешавем

$$Y'(x_i) = f(x_i, Y(x_i)) = f(x_i, y_i).$$

Он гоҳ аз (13) ҳосил мекунем

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i); \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (14)$$

Ҳангоми $i = 0$ будан, барои гиреҳҳои $x = x_1$ пайдо мекунем $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$.

Акнун алгоритми (14)-ро таъбиқ намуна, ҳосил мекунем

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1);$$

...

$$y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

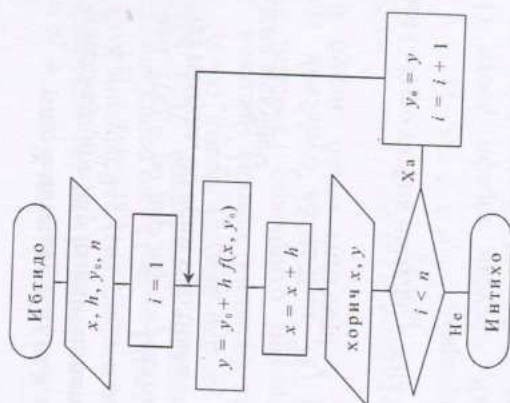
Маънои геометрии ин амалиётро дар расм нишон медиҳем



Дар расм хати қачи «0» – ҳалли аниқ, хатҳои «1» ва «2» – ҳалҳои тақрибӣ мебошанд.

Хати қачи интегралӣ матлуб $y(x)$, ки аз нуқтаи (x_0, y_0) мегузарад, бо хатҳои шикастаи қуллоҳояшон дар нуқтаҳои (x_i, y_i) иваз карда мешавад. Ҳар як қисми хати шикаста дорони самте аст, ки ба самти хати қачи интегралӣ (4) мувофиқат мекунад ва аз нуқтаи (x_i, y_i) мегузарад.

Блок-схемаи алгоритми ин қараёни ҳисобкунӣ намуни зерин дорад



Натиҷаҳои ҳисобкунӣ дар ҳар қадам хориҷ карда мешавад, аммо, агар зарурати маҳфуз доштани натиҷаҳо ба миён ояд, лозим мешавад, ки массиви киматҳои $y_0, y_1, \dots, y_n$ ворид карда шавад.

Тавре аз баробарии (13) дида мешавад, саҳеҳии ҳатогии методи Эйлер ҳамчун бузургии $O(h^2)$ баҳо дода мешавад. Тамоми порчаи $[a, b]$ ба n қисмҳо ҷудо карда мешавад ва он гоҳ саҳеҳии умумӣ ба тарзи зерин баҳо дода мешавад

$$n O(h^2) = \frac{1}{h} O(h^2) = O(h)$$

– тартиби I-ум.

Ҳангоми ҳисобкунӣ мошинӣ барои баҳо додани ҳатоҳои ҳисобкунӣ тақрирӣ истифода бурда мешавад, яъне дар порчаи $[x_i, x_{i+1}]$ ҳисобкунӣ бо қадами $h/2$ тақрор карда шуда, ҳатогии ҳалли аниқ y_{i+1} (ҳангом қадами $h/2$) ҳамчун фарқи $|y_{i+1} - y_{i+1}|$ баҳо дода мешавад.

2. Методи Эйлера бо ҳисоби тақрорӣ (пересчет). Дар мавриди татбиқи ин метод формулаи рекуррентии (14) намуди худро дигар мекунад, ба ҷои киматҳои функсия дар ғиреҳҳо $f(x_i, y_i)$ миёнаи арифметикии $f(x_i, y_i)$ ва $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ гирифта мешавад. Он гоҳ

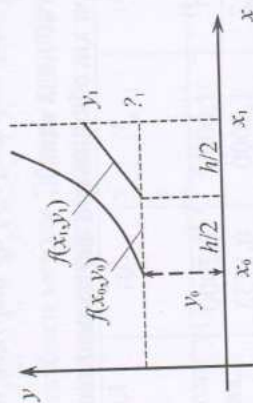
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \quad i = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Ин схеман ношқори ҳалли масъала мебошад. Ин схема бо истифодаи ду итератсия гузаронида мешавад: аввал y_i кимати ибтидоӣ қабул карда шуда, аз рӯи (14) наздиккунӣ яқум ёфта мешавад

дуном баробарии (16) ба ҷои y_{i+1} ба тарафи ростии (15) гузошта мешавад ва ҳосил мекунем

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})], \quad i = 0, 1, \dots \quad (17)$$

Тасвири геометрии ин метод дар расми поёни нишон дода шудааст



Бо ёрии ин методи Эйлер y_{i+1} ва $\tilde{y}_{i+1}$ -ро муқоиса намуда, саҳеҳии ҳисобкунӣ зери назорат гирифта имконпазир аст. Ғайр аз ин, интиҳоби қадами ҳисобкунӣ осон мегардад.

Агар бузургии $|\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}|$ саҳеҳии ε -ро қаноат кунад, он гоҳ қадамро зиёд кардан мумкин аст, яъне схемани зерини ҳисобкунӣ тақрорӣ барои баҳои саҳеҳии ҳатоҳои ҷой дорад

$$\frac{1}{3} |y_i^* - y_i| \approx |y_i^* - y(x_i)|,$$

дар ин ҷо $y(x_i)$ – ҳалли аниқ дар нуктаи $x = x_i$ буда, y_i ва y_i^* киматҳои тақрибӣ, бо қадамҳои h ва $h/2$ мувофиқан, мебошанд.

3. Методи Эйлера бо коркарди миёнаи итератсионӣ (с последующей итерационной обработкой). Натиҷаҳои методи Эйлерро боз ҳам аниқтар гирифта мумкин аст, агар коркарди итератсионӣ ҳар як кимати ҳосилшудаи y_i истифода бурда шавад. Пеш аз ҳама, дар асоси наздиккунӣ аввалин бо ёрии формулаи (16) ҳосилшуда

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + h f(x_i, y_i),$$

ҷараёни итератсиониро дар асоси формулаи (15), аз рӯи схемани зерин истифода мебарем

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})], \quad (18)$$

Ҷараёни итератсия то мавриде давом мекунад, ки пайдарпаии наздиккунӣ ду киматҳои $y_{i+1}^{(k)}$ ва $y_{i+1}^{(k+1)}$ бо саҳеҳии додашуда ба ҳамдигар наздик мешаванд ва $y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k+1)}$ қабул карда мешавад. Ода-

тан, микдори кадамҳо h кам бошад, чараёни итератсия тез дорон халҳои зарури мегардад. Агар пас аз се-чор кадами итератсия саҳеҳии додшударо қаноат накунад, он гоҳ кадами ҳисобкуниҳо h кам карда мешавад. Баъди ҳисобкуниҳои кимати y_i чараёни итератсия барои ҳисобкунии гирихи x_{i+1} мегузарад.

Мисоли 1. Методи Эйлерро истифода бурда, ҷадвали халҳои муодилаи $y' = y - \frac{2x}{y}$ дар порчаи $[0;1]$ бо шартҳои ибтидоии $y(0) = 1$ ва кадами $h = 0,2$ тартиб дода шавад.

Хал. Натиҷаҳои ҳисобкуниҳо дар ҷадвал тасвир мекунем:

i	x_i	y_i	Δy_i	Қимати аниқи $y = \sqrt{2x+1}$
0	0	1,0000	0,2000	1,0000
1	0,2	1,2000	0,1733	1,1832
2	0,4	1,3733	0,1561	1,3416
3	0,6	1,5294	0,1492	1,4832
4	0,8	1,6786	0,1451	1,6124
5	1,0	1,8237		1,7320

Дар сатри якуми ҷадвал ҳангоми $i = 0$ будан, $x_0 = 0$, $y_0 = 1,000$ навишта шуда, аз рӯи ин киматҳо $f(x_0, y_0) = 1$ ҳисоб карда мешавад, аз инҷо $\Delta y_0 = hf(x_0, y_0) = 0,2$ мешавад. Аз ин ҷо бо татбиқи формулаи (14) ҳосил мекунем $y_1 = 1 + 0,2 = 1,2$.

Қиматҳои $x_1 = 0,2$ ва $y_1 = 1,2000$, ҳангоми $i = 1$ будан, дар сатри дуюми ҷадвал навишта мешавад. Аз ин натиҷаҳои фосилави истифода бурда, ҳосил мекунем

$$f(x_1, y_1) = 0,8667; \Delta y_1 = hf(x_1, y_1) = 0,2 \cdot 0,8667 = 0,1733.$$

Он гоҳ $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1,2 + 0,1733 = 1,3733$ мешавад.

Айнан ҳамин тавр ҳангоми $i = 2, 3, 4, 5$ будан, натиҷаҳо дар ҷадвал оварда шудаанд. Дар сатри охирини ҷадвал, барои муқоиса, киматҳои аниқи халли масъала оварда шудаанд.

Аз ҷадвал дида мешавад, ки ҳаттои мултиқ барои натиҷаи y_5 ба $\varepsilon = 1,8237 - 1,7320 = 0,0917$ баробар аст ва 5% - ро ташкил медиҳад.

Агар системаи муодилаҳои дифференсиалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии тартиби олӣ ба системаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум оварда шаванд, дар ин маврид барои ёфтани халҳои онҳо методи Эйлер осон татбиқ карда мешавад.

Системаи ду муодилаи дифференсиалии тартиби якумро

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z); \\ z' = f_2(x, y, z); \end{cases} \quad (19)$$

бо шартҳои ибтидоии $y(x_0) = y_0$ ва $z(x_0) = z_0$ муойна мекунем.

Қиматҳои тақрибии $y(x_i) \approx y_i$ ва $z(x_i) \approx z_i$ бо татбиқи формулаҳои зерин ҳисоб карда мешаванд

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf_1(x_i, y_i, z_i); \\ z_{i+1} = z_i + hf_2(x_i, y_i, z_i); \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

Мисоли 2. Бо татбиқи методи Эйлер, дар порчаи $[1;1,5]$ ҷадвали кимати решаҳои муодилаи дифференсиалии

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0 \quad (21)$$

бо шартҳои ибтидоии $y(1) = 0,77$ ва $y'(1) = -0,44$, ва кадами $h = 0,1$ тартиб дода шавад.

Хал. Дар муодилаи (21) гузоришҳои $y' = z$, $y'' = z'$ иҷро карда, ба системаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум

$$\begin{cases} y' = z; \\ z' = -\frac{z}{x} - y; \end{cases}$$

бо шартҳои ибтидоии $y(1) = 0,77$ ва $z(1) = -0,44$ соҳиб мешавем. Ҳамин тавр, ҳосил мекунем

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = z; \\ f_2(x, y, z) = -\frac{z}{x} - y. \end{cases}$$

Формулаи (20)-ро истифода бурда, киматҳои ҳосилшударо дар ҷадвал сабт мекунем

i	x_i	y_i	Δy_i	$f_{1i} = z_i$	Δz_i	$f_{2i} = -\frac{z_i}{x_i} - y_i$
0	1,0	0,77	-0,044	-0,44	-0,033	-0,33
1	1,1	0,726	-0,047	-0,473	-0,030	-0,296
2	1,2	0,679	-0,050	-0,503	-0,026	-0,260
3	1,3	0,629	-0,053	-0,529	-0,022	-0,222
4	1,4	0,576	-0,055	-0,551		
5	1,5	0,521				

Ҷадвал ба тарзи зерин тартиб дода шудааст. Дар сатри якуми ҷадвал менависем: $i = 0, x_0 = 1,0; y_0 = 0,77; z_0 = -0,44$.

Ин киматхоро истифода бурда, соҳиб мешавем

$$f_{10} = f_1(x_0, y_0, z_0) = z_0 = -0,44;$$

$$f_{20} = f_2(x_0, y_0, z_0) = -\frac{z_0}{x_0} - y_0 = -0,33.$$

Формулаи (20)-ро истифода бурда, ҳосил мекунем

$$\Delta y_0 = hf_{10} = 0,1 \cdot (-0,44) = -0,044; \quad y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0,726;$$

$$\Delta z_0 = hf_{20} = 0,1 \cdot (-0,33) = -0,033; \quad z_1 = z_0 + \Delta z_0 = -0,473.$$

Аз ин ҷо дар сатри дуҷуми ҷадвал навишта метавонем $i = 1; x_1 = 1, y_1 = 0,726; z_1 = -0,473$. Бо ёрии ин киматҳо, соҳиб мешавем

$$f_{11} = f_1(x_1, y_1, z_1) = z_1 = -0,473;$$

$$f_{21} = f_2(x_1, y_1, z_1) = -\frac{z_1}{x_1} - y_1 = -0,296.$$

Ва аз ин ҷо

$$\Delta y_1 = hf_{11} = 0,1 \cdot (-0,47) = -0,047; \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 0,679;$$

$$\Delta z_1 = hf_{21} = 0,1 \cdot (-0,30) = -0,030; \quad z_2 = z_1 + \Delta z_1 = -0,503.$$

Сатрҳои $i = 2, 3, 4, 5$ ҷадвал айнан ҳамин тавр пур карда шудаанд.

4. Методи Рунге-Кутта. Дар асоси ин метод схемаҳои фарқии (разностные схемы) тартибҳои гуногунро тартиб додан мумкин аст. Ҳамаи асосии ин метод аз он иборат аст, ки бо мақсади аниқтар шудани ҳисобкуниҳо дар атрофи ғиреҳои тӯр, катори Тейлор барои барои апроксиматсияи функсияи матлуб $y = y(x)$ мувофиқ гардонида мешавад, яъне мақсад аз афзун намудани микдори ҳосилаҳои тартиби оӣ бе муайянкунии онҳо бо сабаби мураккабии намуни аналитикии ҳосилаҳои хусусии функсияи $f(x, y)$ аз рӯи тағйирёбандаи x мебошад.

Акнун схемаи фарқҳои тартиби чорумро, ки дар ҳалли масъалаҳо амалан бештар таътиқ карда мешавад, дида мебароем.

Алгоритм ин ҳисобкуниҳо намуни зерин дорад:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i;$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + k_2^{(i)} + k_3^{(i)} + k_4^{(i)}); \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

дар ин ҷо $k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i); \quad k_2^{(i)} = hf(x_i + h/2, y_i + k_1^{(i)}/2);$

$$k_3^{(i)} = hf(x_i + h/2, y_i + k_2^{(i)}/2); \quad k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}).$$

Дар ин схемаи ҳисобкуниҳои Рунге-Кутта дар ҳар як қадами ҳисобкунии y_i функсияи $f(x, y)$ чор маротиба дар ҳисобкуниҳо

ниширок мекунанд, яъне методи Рунге-Кутта (22) микдори зиёди ҳисобкуниҳоро талаб менамояд, аммо саҳеҳии матлуб ба даст меояд.

Яке аз норисҳои ин метод аз он иборат аст, ки методи якқадамаи Рунге-Кутта танҳо барои ёфтани ҳалҳои системаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум таътиқи худро меёбаду ҳалос.

8.3.2. Ҳалли масъалаи Коши бо методҳои бисёрқадама

Дар ин метод тартиб додани схемаи ҳисобкунии фарқҳои (11) ба амале таътиқ мекунанд, ки барои муайян намудани y_{i+1} на танҳо як қадам, балки k қадамҳои пештара ҳисобкардашудаи $y_{i-k+1}, y_{i-k+2}, \dots, y_i$ истифода бурда мешаванд, дар ин маврид методи k -қадама.

Таҳияи методҳои бисёрқадама чунин суръат мегирад. Муодилаи дифференсиалии додашудаи (4) барои масъалаи Коши дар намуни $dY(x) = f(x, y)dx$ навишта мешавад. Аз ҳарду тарафи ин муодилаи ҳосилшуда дар порчаи $[x_i, x_{i+1}]$ интеграл мегирем.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dY(x) = Y(x_{i+1}) - Y(x_i) \approx y_{i+1} - y_i, \quad (23)$$

дар ин ҷо y_{i+1}, y_i — киматҳои тӯрии функсияи матлуб. Барои ҳисоб намудани интегралҳои тарафи рост аввал бисёрзағии интерполлятсионии $P_{k-1}(x)$ -ро, ки дараҷааш $(k-1)$ аст, барои функсияи $f(x, y)$ мувофиқи киматҳои ҳисобкардашудаи функсияҳои $f(x_{i-k+1}, y_{i-k+1}), f(x_{i-k+2}, y_{i-k+2}), \dots, f(x_i, y_i)$ дар ин порча месозем. Он гоҳ ҳосил мекунем

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x) dx. \quad (24)$$

Муодилаҳои (23) ва (24)-ро баробар карда, барои муайян намудани киматҳои номаълуми функсияи тӯрии y_{i+1} дар ғиреҳи x_{i+1} формулаи зеринро пайдо мекунем

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x) dx. \quad (25)$$

Дар асоси формулаи (25) методҳои гуногуни бисёрқадамаи тартиби дилҳои саҳеҳиро таҳия намудан имконпазир аст. Дар ин маврид тартиби саҳеҳӣ аз дараҷаи бисёрзағии $P_{k-1}(x)$ вобаста аст, ки барои таҳияи он киматҳои функсияи тӯрии $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k+1}$ истифода шудаанд.

Хангоми халли бисёр масъалаҳо чунин методҳои бисёрқадामी истифода бурда мешаванд.

1. Методҳои Адамс. Як қатор методҳои Адамси тартиби k -ум маълуманд. Оддитарини онҳо хангоми $k = 1$ будан, методи тартиби якуми Эйлерро айнан тақрор мекунад. Методи тартиби чорумро хангоми халли масъалаҳо, одатан методи Адамс меноманд.

2. Методҳои бисёрқадामीи схемаҳои фарқҳои ношкорро истифодабаранда. Дар амалия ин методҳо методҳои пешгӯикунӣ (прогноз) ва тахриркунӣ (коррекция) ва ё методҳои предиктор-корректор меноманд.

Ғояи асоси ин метод аз он иборат аст, ки дар ҳар як қадами ҳисобкунӣ ду давр (этап) ворид карда мешаванд ва методҳои бисёрқадामीи зеринро истифода мебаранд:

а) бо ёрии методи шакли ошкор (предиктор) дар ғиреҳҳои пештара аз рӯи қиматҳои маълуми функсия қиматҳои ибтидоии $y_{i+1}^{(0)}$ дар ғиреҳҳои нав ҳисоб карда мешаванд;

б) методи ношкорро (корректор) истифода бурда, дар натиҷаи итератсия қиматҳои тақрибии $y_{i+1}^{(1)}, y_{i+1}^{(2)}, \dots, y_{i+1}^{(k)}$, ... ёфта мешаванд. Тавассути корректор итератсия то мавриде давом меёбад, ки саҳеҳии додашудаи фарқи $y_{i+1}^{(k)}$ ва $y_{i+1}^{(k-1)}$ -ро қаноат накунад ва гузарии ба тӯри дигар мешавад, яъне мувофиқи алгоритми дар боло овардашуда қиматҳои y_{i+2} ҳисоб карда мешаванд. Яке аз намунаҳои методи пешгӯӣ (прогноз) ва тахриркунӣ (коррекция) методе мебошад, ки дар асоси методи Адамси тартиби чорум тахия шудааст.

Алгоритми метод k -р даври (этапи) предиктор

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (55 f_i + 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3}); \quad (27)$$

алгоритми метод дар даври корректор

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (9 f_{i+1} + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2}). \quad (28)$$

Дар формулаҳои (27) ва (28) фарқҳои охиринок Δf_i истифода бурда намешаванд ва ба ҷои онҳо қиматҳои функсияи тарафи рости муодилаи (4) гирифта мешаванд, ки барои ҳисобкунӣ бо ёрии мошинҳои ҳисоббарор, ҳеле қулай аст. Схемаи ошқори формулаи (27) дар ҳар як қадам як бор истифода бурда мешавад, бо ёрии схемаи ношқори (28) бошад, ҷараёни итератсионии ҳисобкунӣ y_{i+1} суръат мегирад, зеро ин қимат ба тарафи рости баробарии $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$ тааллуқ дорад.

Дар формулаҳои (27) ва (28), чун дар методи Адамс, хангоми ҳисобкунӣ y_{i+1} , қиматҳои функсияи тӯрӣ дар ҷор ғиреҳҳои пешоянда y_{i+2}, y_{i+1}, y_i иштирок мекунад. Ҳисобкунӣ дар ин метод аз қимати y_i оғоз меёбад.

Дар ин маврид қиматҳои зарурии y_1, y_2 ва y_3 бо ёрии методи Рунге-Кутта ҳисоб карда шуда, қимати y_0 тавассути шартҳои ибтидоӣ дода мешавад.

Методи Адамс барои ёфтани ҳалҳои системаи муодилаҳои дифференсиалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ тартиби n -ум таъбиқ карда мешавад.

3. Саҳеҳгардонии натиҷаҳо. Ба саҳеҳии матлуб бо роҳи кам намудани қиматҳои қадами итератсия h ноил гаштан мумкин аст. Аммо ин роҳ иҷро намудани ҳаҷми калони ҳисобкунӣҳо талаб мекунад.

Дар амалия одатан, барои баланд бардоштани дараҷаи саҳеҳии ҳисобкунӣҳо, бе зиёд намудани вақти ҳисобкунӣ мошинӣ, методи Рунге таъбиқи худро меёбад. Ғояи асоси ин метод аз он иборат аст, ки ба истифодаи танҳо як схемаи фарқӣ ҳисобкунӣҳои тақрорӣ бо қадамҳои гуногуни итератсия ба амал бароварда мешаванд. Мувофиқи методи Рунге қимати аниқӣ функсияи тӯрӣ y^* дар ғиреҳҳои тӯр бо қадами h аз рӯи формулаи зерин ҳисоб карда мешавад

$$y_h^* = \frac{2^k y_{h/2} - y_h}{2^k - 1} + O(h^{k+1}).$$

8.4. КОРИ ЛАБОРАТОРИИ

Намунаи иҷрои супориш

Супориш. Ҳалли масъалаи Коши барои муодилаи дифференсиалӣ один тартиби якум $y' = 0,185(x^2 + \cos 0,7x) + 1,843y$, бо истифодаи методи тақмилиёфтаи хатҳои шикаста, дар порчаи $[0,2; 1,2]$, қадами $h = 0,1$, ёфта шавад. Шартҳои ибтидоӣ $y(0,2) = 0,25$ қабул карда шуда, ҳисобкунӣҳо бо саҳеҳии $0,001$ иҷро карда шавад.

Ҳал. Формулаи зеринро истифода мебарем

$$y_{i+1} = y_i + hy'_{i+\frac{1}{2}},$$

дар ин ҷо

$$y'_{i+\frac{1}{2}} = y' \left(x_i + \frac{h}{2}; y_{i+\frac{1}{2}} \right), \quad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} y'_i.$$

Азбаски $y(0,2) = 0,25$ аст, пас хангоми $i = 0$ будан, соҳиб мешавем

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} y'_0 = 0,25 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,25 = 0,2625.$$

$$\begin{aligned} y'_1 &= y' \left(x_0 + \frac{h}{2}; y_1 \right) = 0,185 \cdot (x_0^2 + \cos(0,7 \cdot x_0)) + 1,843 \cdot y_0 = \\ &= 0,185 \cdot (0,2^2 + \cos(0,7 \cdot 0,2)) + 1,843 \cdot 0,25 = 0,1906 + 0,4608 \\ &= 0,6514. \end{aligned}$$

Он гоҳ

$$y_1 = y_0 + h y'_1 = 0,25 + 0,1 \cdot 0,6514 = 0,3151.$$

Қадами $i = 1$ интиҳоб мекунем. Он гоҳ

$$y_{1+\frac{1}{2}} = y_1 + \frac{h}{2} y'_1 = 0,3151 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,3151 = 0,3309.$$

$$\begin{aligned} y'_{1+\frac{1}{2}} &= y' \left(x_1 + \frac{h}{2}; y_{1+\frac{1}{2}} \right) = 0,185 \cdot (x_1^2 + \cos(0,7 \cdot x_1)) + 1,843 \cdot y_1 = \\ &= 0,185 \cdot (0,3^2 + \cos(0,7 \cdot 0,3)) + 1,843 \cdot 0,3151 = \\ &= 0,185 \cdot (0,09 + 0,978) + 0,5807 = 0,7782. \\ y_2 &= y_1 + h y'_{1+\frac{1}{2}} = 0,3151 + 0,1 \cdot 0,7782 = 0,3929. \end{aligned}$$

Акнун $i = 2$ қабул карда, ҳосил мекунем

$$y_{1+\frac{1}{2}} = y_1 + \frac{h}{2} y'_1 = 0,3151 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,3151 = 0,3309.$$

$$\begin{aligned} y'_{2+\frac{1}{2}} &= y' \left(x_2 + \frac{h}{2}; y_{2+\frac{1}{2}} \right) = 0,185 \cdot (x_2^2 + \cos(0,7 \cdot x_2)) + 1,843 \cdot y_2 = \\ &= 0,185 \cdot (0,4^2 + \cos(0,7 \cdot 0,4)) + 1,843 \cdot 0,3929 = \\ &= 0,185 \cdot (0,16 + 0,9611) + 0,7241 = 0,9315. \\ y_3 &= y_2 + h y'_{2+\frac{1}{2}} = 0,3929 + 0,1 \cdot 0,9315 = 0,4861. \end{aligned}$$

Чунин қараёни ҳисобкуниро давом дода, барои қиматҳои боқимондаи аргументҳо $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$ қиматҳои $y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}$ ро меёбем ва ҷадвали зеринро месозем

i	x_i	y_i	y'_i
0	0,2	0,25	0,6514
1	0,3	0,3151	0,7782
2	0,4	0,4861	0,9315
3	0,5	0,5137	1,1668
4	0,6	0,6419	1,4185

5	0,7	0,7977	1,7240
6	0,8	0,9870	2,0942
7	0,9	1,2169	2,5421
8	1,0	1,4959	3,0834
9	1,1	1,8341	3,7369
10	1,2	2,2438	-

Ҳалли масъалаи додшуда дар натиҷаи ҳисобкуниҳо ҳосилшудаи y_i, y'_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 10$) – ро медихад (сутуни 2 ва сутуни 3).

Вариантҳои супоришҳо

Супориш. Ҳалли масъалаи Коши барои муодилаи дифференсиалии одии тартиби якум $y' = f(x, y)$, бо истифодаи методи такмилёфтаи хатҳои шикаста, дар порчаи $[0, 2; 1, 2]$, қадами $h = 0,1$, ёфта шавад. Шартҳои ибтидоӣ $y(0, 2) = 0,25$ қабул карда шавад. Ҳисобкуниҳо бо саҳеҳии 0,001 иҷро карда шаванд.

1. $y' = 0,133(x^2 + \sin 2x) + 0,872y$;
2. $y' = 0,215(x^2 + \cos 1,5x) + 1,283y$;
3. $y' = 0,158(x^2 + \sin 0,8x) + 1,164y$;
4. $y' = 0,173(x^2 + \cos 0,7x) + 0,754y$;
5. $y' = 0,221(x^2 + \sin 1,2x) + 0,452y$;
6. $y' = 0,163(x^2 + \cos 0,4x) + 0,635y$;
7. $y' = 0,218(x^2 + \sin 1,6x) + 0,718y$;
8. $y' = 0,145(x^2 + \cos 0,5x) + 0,842y$;
9. $y' = 0,213(x^2 + \sin 1,8x) + 0,368y$;
10. $y' = 0,127(x^2 + \cos 0,6x) + 0,573y$;
12. $y' = 0,417(x^2 + \sin 0,8x) + 0,972y$;
13. $y' = 0,324(x^2 + \sin 1,5x) + 1,612y$;
14. $y' = 0,263(x^2 + \cos 1,2x) + 0,453y$;
15. $y' = 0,372(x^2 + \sin 0,7x) + 0,758y$;
16. $y' = 0,343(x^2 + \cos 0,4x) + 1,315y$;
17. $y' = 0,276(x^2 + \sin 1,6x) + 0,988y$;
18. $y' = 0,173(x^2 + \cos 0,6x) + 1,534y$;
19. $y' = 0,258(x^2 + \sin 0,4x) + 0,724y$;
20. $y' = 0,317(x^2 + \cos 1,4x) + 1,344y$;
21. $y' = 0,166(x^2 + \sin 1,1x) + 0,883y$;
22. $y' = 0,215(x^2 + \cos 0,9x) + 1,213y$;
23. $y' = 0,188(x^2 + \sin 1,5x) + 0,885y$;

24. $y' = 0,314(x^2 + \cos 0,6x) + 0,772y$;
 25. $y' = 0,418(x^2 + \sin 1,2x) + 1,344y$;
 26. $y' = 0,273(x^2 + \cos 1,3x) + 0,687y$;
 27. $y' = 0,176(x^2 + \sin 0,8x) + 1,247y$;
 28. $y' = 0,245(x^2 + \cos 0,4x) + 1,452y$;
 29. $y' = 0,184(x^2 + \sin 0,6x) + 0,747y$;
 30. $y' = 0,212(x^2 + \cos 1,2x) + 1,544y$;

8.5. МАШҲУЛИЯТИ АМАЛӢ

Намунаи иҷрои супоришҳо

Супори. Якчанд аъзон ба қатори дараҷагӣ паҳн кардашудан ҳалли $y = y(x)$ -и муодилаи дифференсиалии

$$y'(x) = \frac{y}{x+y} \quad (*)$$

ки шарт ибтидоии $y(1) = 2$ – ро қаноат мекунад, ёфта шавад. Аз ба қатор паҳншавии ҳал истифода бурда, қимати $y(1,2)$ тақрибӣ ёфта шавад.

Ҳал. Ҳалли муодилаи додашударо бо ёрии формулаи зерин муайян мекунем

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \quad (|x - x_0| < h), \quad (**)$$

дар ин ҷо

$$c_k = \frac{1}{k!} y^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

ва h – ягон адади мусбат.

Коэффициенти c_0 паҳнкунии $(**)$ аз шарт ибтидоии $y(x_0) = y_0$ муайян карда мешавад, яъне $c_0 = y(x_0) = y_0$. Коэффициенти c_1 аз муодилаи дифференсиалии $c_1 = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ ёфта мешавад. Коэффициентҳои боқимондаи c_k қатори $(**)$ бошад, бо роҳи пайдарпай дифференсиронии муодилаи $y'(x) = f(x, y)$, қадам ба қадам ёфта мешаванд.

Мувофиқи шарт масъала $x_0 = 1$, $y_0^{(k)} = y_0^{(k)}(x_0)$ гирифта, бо ёрии формулаи $(**)$

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{1}{2!} y_0''(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} y_0'''(x - x_0)^3 + \dots$$

ҳосил мекунем

$$y_0 = 2, \quad y_0' = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}.$$

Муодилаи $(*)$ дифференсиронида, соҳиб мешавем

$$y'' = \frac{y'(x+y) - y(1+y')}{(x+y)^2} = \frac{xy' - y}{(x+y)^2}.$$

Аз ин ҷо

$$y_0'' = \frac{1 \cdot \frac{2}{3} - 2}{(1+2)^2} = -\frac{4}{27}.$$

Боз як бори дигар дифференсиронида, соҳиб мешавем

$$y_0''' = \frac{(xy' - y)'(x+y)^2 - (xy' - y)((x+y)^2)'}{(x+y)^4} = \frac{xy''(x+y) - 2(xy' - y)}{(x+y)^3}.$$

Бинобар

$$y_0''' = \frac{\frac{4}{27} \cdot 3 + 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3}}{27} = \frac{4}{27}.$$

Айнан ҳамин тавр ин қараёни ҳисобкунихоро давом дода, ҳосилаҳои боқимондаи $y_0^{(k)}$ ($k > 3$) – ро ёфтан мумкин аст.

Ҳамин тавр,

$$y = 2 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{27}(x-1)^2 + \frac{2}{81}(x-1)^3 + \dots$$

Бинобар, паҳнкунии тақрибӣ барои $y(1,2)$, чунин намуд мегирад

$$y(1,2) = 2 + \frac{2}{3}(1,2-1) - \frac{2}{27}(1,2-1)^2 + \frac{2}{81}(1,2-1)^3 + \dots = 2 + 0,1333 - 0,0030 + 0,0002 + \dots \approx 2,1305.$$

Вариантҳои супоришҳо

Супориш. Якчанд аъзон ба қатори дараҷагӣ паҳн кардашудаи ҳалли $y = y(x)$ -и муодилаи дифференсиалии $y'(x) = f(x, y)$, ки шарт ибтидоии $y(x_0) = y_0$ – ро қаноат мекунад, ёфта шавад. Аз ба қатор паҳншавии ҳал истифода бурда, қимати $y(\tilde{x})$ тақрибӣ ёфта шавад.

$$1. y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{5}}, \quad y_0(1,8) = 2,6, \quad \tilde{x} = 2,5;$$

$$2. y' = x + \cos \frac{y}{3}, \quad y_0(1,6) = 2,6, \quad \tilde{x} = 2,3;$$

$$3. y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{10}}, \quad y_0(0,6) = 0,8, \quad \tilde{x} = 1,2;$$

4. $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{7}}, \quad y_0(0.5) = 0.6, \quad \tilde{x} = 0.9;$
5. $y' = x + \cos \frac{y}{\pi}, \quad y_0(1.7) = 5.3, \quad \tilde{x} = 2.5;$
6. $y' = x + \cos \frac{y}{2.25}, \quad y_0(1.4) = 2.2, \quad \tilde{x} = 1.8;$
7. $y' = x + \cos \frac{y}{e}, \quad y_0(1.4) = 2.5, \quad \tilde{x} = 2.1;$
8. $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{2}}, \quad y_0(0.8) = 1.4, \quad \tilde{x} = 1.5;$
9. $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{3}}, \quad y_0(1.2) = 2.1, \quad \tilde{x} = 1.9;$
10. $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{11}}, \quad y_0(2.1) = 2.5, \quad \tilde{x} = 2.8;$
11. $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{5}}, \quad y_0(1.8) = 2.6, \quad \tilde{x} = 2.6;$
12. $y' = x + \sin \frac{y}{3}, \quad y_0(1.6) = 4.6, \quad \tilde{x} = 2.2;$
13. $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{10}}, \quad y_0(0.6) = 0.8, \quad \tilde{x} = 1.3;$
14. $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{7}}, \quad y_0(0.5) = 0.6, \quad \tilde{x} = 1.2;$
15. $y' = x + \sin \frac{y}{\pi}, \quad y_0(1.7) = 5.3, \quad \tilde{x} = 2.4;$
16. $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{2.8}}, \quad y_0(1.4) = 2.2, \quad \tilde{x} = 1.7;$
17. $y' = x + \sin \frac{y}{e}, \quad y_0(1.4) = 2.5, \quad \tilde{x} = 1.6;$
18. $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{2}}, \quad y_0(0.8) = 1.3, \quad \tilde{x} = 1.3;$
19. $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{3}}, \quad y_0(1.1) = 1.5, \quad \tilde{x} = 1.5;$
20. $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{11}}, \quad y_0(0.6) = 1.2, \quad \tilde{x} = 1.2;$
21. $y' = x + \sin \frac{y}{1.25}, \quad y_0(0.5) = 1.8, \quad \tilde{x} = 0.8;$
22. $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{15}}, \quad y_0(0.2) = 1.1, \quad \tilde{x} = 0.6;$
23. $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{1.3}}, \quad y_0(0.1) = 0.8, \quad \tilde{x} = 0.3;$

24. $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{0.3}}, \quad y_0(0.5) = 0.6, \quad \tilde{x} = 1.2;$
25. $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{0.7}}, \quad y_0(1.2) = 1.4, \quad \tilde{x} = 1.9;$
26. $y' = x + \cos \frac{y}{1.25}, \quad y_0(0.4) = 0.8, \quad \tilde{x} = 0.7;$
27. $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{1.5}}, \quad y_0(0.3) = 0.9, \quad \tilde{x} = 0.6;$
28. $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{1.3}}, \quad y_0(1.2) = 1.8, \quad \tilde{x} = 1.8;$
29. $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{0.3}}, \quad y_0(0.7) = 2.1, \quad \tilde{x} = 1.5;$
30. $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{0.7}}, \quad y_0(0.9) = 1.7, \quad \tilde{x} = 1.3;$

8.6. КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Намунаи иҷрои супориш

Супориш.

Масъалаи 1. Бо методи Рунге-Кутта дар порчаи $[0; 0.5]$ интегралли муодилаи дифференсиалии

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1,$$

бо кадами $h = 0.1$, ҳисоб карда шавад.

Ҳал. Аввал баъзе мафҳуму формулаҳои заруриро муҳокима мекунем.

Бигзор муодилаи дифференсиалии тартиби якуми $y' = f(x, y)$ бо шартҳои ибтидоии $y(x_0) = y_0$ дода шуда бошад. Қадами h -ро интихоб намуда, $x_i = x_0 + ih$ ифода мекунем ва $y_i = y(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Адаҳои зеринро муқим мекунем

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), \quad k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), \quad k_4^{(i)} = hf\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right).$$

Мувофиқи методи Рунге-Кутта пайдарпайи қиматҳои y_i -и функсияи матлуб y бо формулаи зерин муайян карда мешаванд

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

ки дар ин ҷо

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} \left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right) \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Акнун ба ҳалли масъалаи гузошташуда мегузарем.

Ҳисобкунии y_1 . Пайдарпай мейбем

$$\begin{aligned} k_1^{(0)} &= hf(x_0, y_0) = h \cdot (x_0 + y_0) = 0,1 \cdot (0 + 1) = 0,1; \\ k_2^{(0)} &= 0,1 \cdot (0 + 0,05 + 1 + 0,05) = 0,11; \\ k_3^{(0)} &= 0,1 \cdot (0 + 0,05 + 1 + 0,055) = 0,1105; \\ k_4^{(0)} &= 0,1 \cdot (0,1 + 1 + 0,1105) = 0,12105. \end{aligned}$$

Аз ин ҷо

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0,1 + 2 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,1105 + 0,12105) = 0,1103,$$

бинобар,

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,1103 = 1,1103.$$

Ҳисобкунии y_2 . Ҳангоми $i = 1$, соҳиб мешавем $x_1 = x_0 + h = 0,1$. Он гоҳ

$$\begin{aligned} k_1^{(1)} &= hf(x_1, y_1) = h \cdot (x_1 + y_1) = 0,1 \cdot (0,1 + 1,1103) = 0,1210; \\ k_2^{(1)} &= 0,1 \cdot (0,1 + 0,05 + 1,1103 + \frac{0,1210}{2}) = 0,1321; \\ k_3^{(1)} &= 0,1 \cdot (0,1 + 0,05 + 1,1103 + \frac{0,1321}{2}) = 0,1326; \\ k_4^{(1)} &= 0,1 \cdot (0,1 + 0,1 + 1,1103 + 0,1326) = 0,1443. \end{aligned}$$

Аз ин ҷо

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(0,1210 + 2 \cdot 0,1321 + 2 \cdot 0,1326 + 0,1443) = 0,1325,$$

бинобар,

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1,1103 + 0,1325 = 1,2428.$$

Ҳисобкунии y_3 . Ҳангоми $i = 2$, соҳиб мешавем $x_2 = x_1 + h = 0,1 + 0,1 = 0,2$. Он гоҳ

$$\begin{aligned} k_1^{(2)} &= h \cdot (x_2 + y_2) = 0,1 \cdot (0,2 + 1,2428) = 0,1443; \\ k_2^{(2)} &= 0,1 \cdot (0,1 + 0,05 + 1,2428 + \frac{0,1443}{2}) = 0,1565; \\ k_3^{(2)} &= 0,1 \cdot (0,1 + 0,05 + 1,2428 + \frac{0,1565}{2}) = 0,1571; \\ k_4^{(2)} &= 0,1 \cdot (0,2 + 0,1 + 1,2428 + 0,1571) = 0,1700. \end{aligned}$$

Аз ин ҷо

$$\Delta y_2 = \frac{1}{6}(0,1443 + 2 \cdot 0,1565 + 2 \cdot 0,1571 + 0,1700) = 0,1569,$$

бинобар,

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = 1,2428 + 0,1569 = 1,3997.$$

Ин чарағи ҳисобкунихоро давом дода, ҳосил мекунем

$$i = 3, x_3 = 0,3; k_1^{(2)} = 0,1700; k_2^{(2)} = 0,1835; k_3^{(2)} = 0,1840; k_4^{(2)} = 0,1984;$$

$$\Delta y_3 = 0,1840; y_4 = 1,5836.$$

$$i = 4, x_4 = 0,4; k_1^{(3)} = 0,1984; k_2^{(3)} = 0,2133; k_3^{(3)} = 0,2140; k_4^{(3)} = 0,2298;$$

$$\Delta y_4 = 0,2138; y_5 = 1,7974.$$

Вариантҳои супорӣ

Супориш. Методи Рунге-Куттаро тағбиқ намуда дар порчаи $[0; 1]$ интегралӣ муодилаи дифференсиалӣ $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ ҳисоб карда шавад. Қадами итератсия $h = 0,1$ қабул карда шавад.

1. $y' = x^2 + 0,5y$, $y(0) = 0,8$;
2. $y' = x^2 + \frac{3}{y}$, $y(0) = 1,3$;
3. $y' = 2x^2 + \sqrt{y}$, $y(0) = 1,4$;
4. $y' = 0,2x + y^2$, $y(0) = 0,6$;
5. $y' = x^2 + 0,7y$, $y(0) = 0,7$;
6. $y' = 0,3x^2 + 1,5y$, $y(0) = 0,8$;
7. $y' = 2x^2 + \frac{x}{y}$, $y(0) = 0,8$;
8. $y' = x^2 - 2,5y$, $y(0) = 1$;
9. $y' = x^2 - 0,5y$, $y(0) = 1$;
10. $y' = x^2 + 0,7\sqrt{y}$, $y(0) = 0,9$;
11. $y' = x^2 + y^3$, $y(0) = 0,1$;
12. $y' = 3xy + 5y^2$, $y(0) = -0,5$;
13. $y' = 2x + \sqrt{y}$, $y(0) = 0,5$;
14. $y' = 2x + 0,5y^2$, $y(0) = 1,2$;
15. $y' = 2xy + y^2$, $y(0) = 0$;
16. $y' = 0,3x + 0,7y^2$, $y(0) = 0,6$;
17. $y' = 1,5x + 0,2y^2$, $y(0) = 0,8$;
18. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0,3$;
19. $y' = 3x^2 + 0,5y$, $y(0) = 1$;
20. $y' = 0,2x + y^2$, $y(0) = 0$;
21. $y' = x^3 + \sqrt{x}$, $y(0) = 0,2$;
22. $y' = x^2 + y^3$, $y(0) = 0,5$;
23. $y' = 2x + 0,3y^2$, $y(0) = 1,2$;

24. $y' = x^3 + y^2$, $y(0) = 0,4$;
25. $y' = x + \sqrt{xy}$, $y(0) = 0,5$;
26. $y' = x^2 - \sqrt{y}$, $y(0) = 0,7$;
28. $y' = 2xy + x$, $y(0) = 0,1$;
29. $y' = y - 2x^2$, $y(0) = 0,3$;
30. $y' = xy^3 - y$, $y(0) = 0,2$;

8.7. САВОЛҲО БАРОИ ТАҚРОРИ БОБ

1. Муодилаи дифференциалӣ чист?
2. Кадом муодилаҳои дифференциалӣ оддӣ номид мешаванд?
3. Кадом муодилаҳои дифференциалиро муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусӣ меноманд?
4. Масъалаи Коши бо нуктаи ибтидоӣ чист?
5. Масъалаҳои канорӣ бо шартҳои худудӣ чист?
6. Маънои геометрии муодилаҳои дифференциалӣ тартибӣ яқуро баён кунед.
7. Методҳои ҳалли муодилаҳои дифференциалӣ оддӣ ба гуруҳҳои зерин ҷудо карда мешаванд ...
8. Тӯри фарқӣ чист?
9. Ғояи асосии методи фарқҳои охиринок аз чӣ иборат аст?
10. Ғояи асосии методи Эйлер аз чӣ иборат аст?
11. Ғояи асосии методи Эйлер бо ҳисобкуниҳо аз чӣ иборат аст?
12. Ғояи асосии методи Эйлер бо ҳисобкуниҳои итератсионӣ минбъада аз чӣ иборат аст?
13. Ғояи асосии методи Рунге-Кутта аз чӣ иборат аст?
14. Гузориши масъалаи методи бисёрқадамаи Коширо баён созед.
15. Гузориши масъалаи гуруҳи методҳои Адамсро баён созед.
16. Барои чӣ бо методҳои ададӣ масъалаи Коши ҳал карда мешавад, аммо муодилаҳои дифференциалӣ не?
17. Ҳалли масъалаи Коши тавассути методҳои тақрибӣ тасвир карда мешавад?
18. Ҳалли муодилаи дифференциалӣ чист?
19. Оё ҳангоми ҳалли муодилаҳои дифференциалӣ тавассути методи Эйлер дода шудани шартҳои ибтидоӣ зарур аст?
20. Ҳалли аниқии муодилаи дифференциалиро надониста, ҳагогини халро баҳо додан мумкин аст, ё не?

IX. МОДЕЛҲОИ ХАТТИИ ИҚТИСОДӢ

9.1. Модели математикӣ мувозинаи истеҳсолот

Имкониятҳои истифодаи методҳои математикӣ дар самтҳои гуногуни илму техника бо масъалаҳои, ки дар бобҳои болоӣ дида баромадем, маҳдуд намешавад. Методҳои алгебраи хаттӣ ва программиронии хаттӣ ҳангоми ҳалли масъалаҳои баплангирии мураккаб дар микёси ҳеле васеъи истеҳсолот таъбиқи худро ёфтаанд.

Боби мазкур асосан, ба омӯзиши моделҳои дар таҳияи мувозинаи (баланси) корхонаҳо, кор бо додани ҳамаҷонибаи таҷрибаи (баланси) корхонаҳои оммавӣ бахшида шудааст.

Пуштида нест, ки яке аз шартҳои асосии пешравӣ ва тараққиёти иқтисодиёт, ин мавҷуд будани мувозина (баланс) миёни хароҷот ва барори истеҳсоли маҳсулот ва даромади умумии истеҳсолот аз ин маҳсулоти истеҳсолшуда мебошад. Дар ин маврид ҳаминро низ ба назар гирифта, лозим аст, ки қисме аз маҳсулоти истеҳсолшуда барои васеъ намудани истеҳсолот пешбинӣ карда мешавад. Аз ин ҷо зарурияти таҳия намудани модели математикӣ мувозинаи истеҳсолот (математическая модель межотраслевого баланса) ба миён меояд.

Бигзор маҳсулот дар n самтҳои гуногун истеҳсол карда шавад. Вақти муайянеро, масалан, як сол ва ё панҷ солро дида мебароем, ки дар ин муддат як як даври (цикли) ба охир мерасад, дида мебароем. Бигзор $X_1, X_2, \dots, X_n$ — ҳаҷми умумии маҳсулот дар самтҳои якум, дуум, ..., n -ум бошад. Масалан, X_2 — микдори қувваи барқ (киловатт-соат), ки дар вақти муайян саноати энергетикӣ истеҳсол намудааст; X_5 — микдори металл, ки дар ин давра аз тарафи саноати металлургӣ истеҳсол карда шудааст; X_7 — микдори автомашинаҳо, ки саноати машинасозӣ истеҳсол намудааст, ва ғайра.

Ба воситаи x_{ik} микдори маҳсулоти самти i -ум, ки ба самти k -ум истифода бурда мешавад, ифода мекунем. Масалан, тавассути X_{57} микдори металл, ки ба саноати мошинсозӣ ворид карда мешавад, ифода карда мешавад. Бо y_i микдори маҳсулоти соҳаи i -ум, ки умуман, ба истеҳсолот ворид наметаргад ифода мекунем, яъне ин қисми маҳсулот берун аз истеҳсолот ба муомила бароварда мешавад (барои музди меҳнат, ба экспорт, барои маҳфуз доштан ва ғайра).

Бузургии y_i маҳсулоти умумии соҳаи i -умро ифода мекунад. Бо ёрии ин додани ҳамаҷонибаи таҷрибаи тақсими маҳсулоти истеҳсолшавандаро тартиб медиҳем (ҷадвали 9.1).

он гоҳ матрисаи

$$E - a = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 - a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрисаи коэффициентҳои назди номаълумҳои $X_1, X_2, \dots, X_n$ дар системаи (4) мешавад. Агар бо X матриса-сутуни бузургирои номаълум, ба воситаи Y матриса-сутуни микдори маҳсулоти соҳаи гирифташударо ишора кунем, он гоҳ системаи (4)-ро дар намуни муодилаи матрисаӣ чунин менависем

$$(E - a)X = Y \quad (5)$$

Агар ранги матрисаи a баробари n бошад, он гоҳ ранги матрисаи $E - a$ низ ба n баробар мебошад. Аз ин ҷо мебарояд, ки барои матрисаи $E - a$ матрисаи баръакс $(E - a)^{-1}$ мавҷуд аст. Ҳарду тарафи баробарии (5) ба матрисаи $(E - a)^{-1}$ зарб намуда, ҳосил мекунем

$$(E - a)^{-1} \cdot (E - a)X = (E - a)^{-1}Y$$

$$X = (E - a)^{-1}Y. \quad (6)$$

Дар ин ҷо дида мешавад, ки ҳалли системаи (5) ба ҳисоб кардани матрисаи баръакс $(E - a)^{-1}$, ки ба матриса-сутуни Y зарб карда шудааст, оварда мерасонад

Мисол. Мувозинаи се соҳаи хоҷагии халқ дода шудааст: хоҷагии кишлоқ, саноат, соҳаҳои дигар. Ҷадвали мувозинаи мувофиқи шартҳои ин масъала намуди зерин дорад.

Ҷадвали 9.2

Номи истехсолот	Микдори маҳсулот	Хоҷагии кишлоқ	Саноат	Соҳаҳои дигар	Маҳсулоти ниҳой (Y)
Хоҷагии кишлоқ	X_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$y_1 = 40$
Саноат	X_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	$y_2 = 200$
Соҳаҳои дигар	X_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	$y_3 = 30$

Дар сутуни охири "маҳсулоти ниҳой", ҳиссаи ҳар як соҳа, ки барои васеъкунии истеҳсолоти дохил намешавад, дода шудааст. Ин

бузургиро воҳидҳои пӯлиро ифода мекунанд, масалан, миллиард сӯм (рақамҳои тасодуфианд).

Бигзор матрисаи коэффициентҳои хароҷоти рост намуни зерин дошта бошад

$$a = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Боз такроран қайд мекунем, ки ададҳои овардашуда тасодуфианд. Баъзе коэффициентҳои хароҷоти рост ба нол баробаран, масалан, $a_{13} = 0$. Ин коэффициент нишон медиҳад, ки аз соҳаи хоҷагии кишлоқ ба соҳаҳои дигар маҳсулот ворид намешавад. Дар матриса мавҷуд будани нолҳо ҳисобкуниҳоро осон мегардонад.

Мувофиқи шартҳои масъала талаб карда мешавад, ҳаҷми умумии маҳсулоти ҳар як соҳаи муоинашаванда ёфта шавад, яъне қимати бузургирои $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Пеш аз ҳама ёфтани матрисаи $E - a$ зарур аст

$$E - a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & 0 \\ -0,2 & 0,6 & -0,1 \\ -0,1 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Акнун матрисаи баръакс $(E - a)^{-1}$ -ро меёбем. Бо ин максд ҳар як пукунаандаҳои алгебраии матрисаи $E - a$ -ро меёбем

$$A_{11} = 0,48, A_{21} = 0,08, A_{31} = 0,01,$$

$$A_{12} = 0,17, A_{22} = 0,56, A_{32} = 0,07,$$

$$A_{13} = 0,06, A_{23} = 0,01, A_{33} = 0,40.$$

Муайянкунандаи ин матрисаи ҳисоб намуда,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 & 0 \\ -0,2 & 0,6 & -0,1 \\ -0,1 & 0 & 0,8 \end{vmatrix} \approx 0,3,$$

матрисаи $(E - a)^{-1}$ дар намуни зерин пайдо мекунем

$$(E - a)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,6 & 0,27 & 0,03 \\ 0,56 & 1,86 & 0,23 \\ 0,2 & 0,03 & 1,33 \end{pmatrix}.$$

Баъди он, ки матрисаи $(E - a)^{-1}$ ёфта шуд, бо ёрии баробарии (6) матриса-сутуни зеринро меёбем

$$X = (E - a)^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1,6 & 0,27 & 0,03 \\ 0,56 & 1,86 & 0,23 \\ 0,2 & 0,03 & 1,33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 200 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Аз ин чо ҳосил мекунем

$$\begin{aligned} X_1 &= 1,6 \cdot 40 + 0,27 \cdot 200 + 0,03 \cdot 30 \approx 120; \\ X_2 &= 0,56 \cdot 40 + 1,86 \cdot 200 + 0,23 \cdot 30 \approx 400; \\ X_3 &= 0,2 \cdot 40 + 0,03 \cdot 200 + 1,33 \cdot 30 \approx 54. \end{aligned}$$

Ҳамин тавр, микдори умумии маҳсулооти соҳаи хочагии киниши ба 120 млрд сӯм, соҳаи саноат – 400 млрд сӯм ва соҳаҳои дигар – 54 млрд сӯмро ташкил медиҳад.

Масъалаи ҳалкардашуда нишон медиҳад, ки агар матрисаи хароҷоти рост $a = a_{ij}$ ва маҳсулоати ниҳони хар як соҳа дода шуда бошанд Y_i , он гоҳ микдори умумии ҳаҷми маҳсулоати хар як соҳа X_i ро ёфтан мумкин аст.

Дар баъзе мавридҳо коэффисиентҳои хароҷоти рост маълум нестанд, аммо микдори умумии маҳсулоати хар як соҳа ва ба соҳаҳои дигар истифода шудани маҳсулоати соҳаҳо x_{ik} дода мешаванд. Дар ин ҳолат коэффисиентҳои хароҷоти умумиро бо ёрии формулаи (2) ҳисоб кардан мумкин мешавад. Аз баробарии $x_{ik} = a_{ik} \cdot X_k$, меёбем $a_{ik} = \frac{x_{ik}}{X_k}$.

9.2. КОРИ ЛАБОРАТОРИ

Намунаи иҷрои супориш

Супориш. Истеҳсолот ва тақсими маҳсулоати (бо воҳидҳои пӯй) сеҳҳои завод дар ҷадвал дода шудаанд.

	Сеҳи №1	Сеҳи №2	Сеҳи №3	Ғайри-истеҳсолӣ	Микдори умумӣ
Сеҳи №1	2	3	15	10	30
Сеҳи №2	1	2	16	3	22
Сеҳи №3	0,5	3,5	5	20	29

Истеҳсоли маҳсулоати хар як сеҳи завод муайян карда шавад, агар вектори маҳсулоати ниҳони хар як сеҳ дар намуни зерин дода шуда бошад

$$Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Ҳал. Аз ҷадвал дида мешавад, ки сеҳи №1 ҳамагӣ 30 воҳид маҳсулот мебарорад, аз онҳо 2 воҳид барои худӣ сеҳ, 3 воҳид барои сеҳи №2 ва 15 воҳид барои сеҳи №3 буда, 10 воҳид барои маҳфуз

доштан, пешбини шудааст. Барои сеҳҳои дигар низ ҳамин гуна тақсими дар ҷадвал нишон дода шудааст.

Мувофиқи шартӣ масъала, талаб карда мешавад, ки микдори умумии маҳсулоати ҳама сеҳҳо муайян карда шуда, ба тағйирот ба ҷараёни технологияи сеҳҳои завод, барои хароҷотҳои ғайринистеҳсоли 20 воҳид маҳсулоати сеҳи №1, 100 – сеҳи №2, 50 сеҳи №3 истеҳсол карда шаванд.

Матрисаи коэффисиентҳои хароҷоти рост, яъне компонентаҳои матрисаи A – ро меёбем

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Коэффисиенти a_{11} микдори маҳсулоати сеҳи №1 – ро нишон медиҳад, ки барои таъмин намудани фабوليати худӣ сеҳи №1 бароварда мешавад. Ин коэффисиент чунин муайян карда мешавад

$$a_{11} = \frac{2}{30} = 0,0667.$$

Айнан ҳамин тавр

$$a_{12} = \frac{3}{22} = 0,1364; \quad a_{13} = \frac{15}{29} = 0,5179; \quad a_{21} = \frac{1}{30} = 0,0333;$$

$$a_{22} = \frac{2}{22} = 0,0909; \quad a_{23} = \frac{16}{29} = 0,5517; \quad a_{31} = \frac{0,5}{30} = 0,0167;$$

$$a_{32} = \frac{3,5}{22} = 0,1591; \quad a_{33} = \frac{5}{29} = 0,1724.$$

Пас матрисаи коэффисиентҳои хароҷоти росто дар намуни зерин менависем

$$A = \begin{pmatrix} 0,0667 & 0,1364 & 0,5179 \\ 0,0333 & 0,0909 & 0,5517 \\ 0,0167 & 0,1591 & 0,1724 \end{pmatrix}.$$

Акнун матрисаи коэффисиентҳои хароҷоти пурра (коэффисиенти полных затрат) b_{ik} – ро ҳамчун элементҳои матрисаи баръакси $B = (E - A)^{-1}$ ҳисоб мекунем. Пеш аз ҳама матрисаи $E - A$ – ро меёбем

$$\begin{aligned} D = E - A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,0667 & 0,1364 & 0,5179 \\ 0,0333 & 0,0909 & 0,5517 \\ 0,0167 & 0,1591 & 0,1724 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,9333 & -0,1364 & -0,5179 \\ -0,0333 & 0,9091 & -0,5517 \\ -0,0167 & -0,1591 & 0,8276 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Муодилаи мувозина (баланс) чунин намуд мегирад $(E - A)X = F$,
Ин муодилаи матрисавиро ҳал намуда, ҳосил мекунем $X = (E - A)^{-1} \cdot Y$.

Муайянкунадаи матрисаи D -ро ҳисоб мекунем $D = |E - A| = 0,6046$.

Акнун пуркунадаҳои алгебравиро меёбем

$$D_{11} = 0,9091 \cdot 0,8276 - 0,1591 \cdot 0,5517 = 0,0665;$$

Айнан ҳамин тавр

$$D_{12} = 0,0368; D_{13} = 0,0205; D_{21} = 0,1952; D_{22} = 0,7638;$$

$$D_{23} = 0,1508; D_{31} = 0,5454; D_{32} = 0,5321; D_{33} = 0,8440;$$

Аз ин натиҷаҳо истифода бурда, матрисаи коэффициентҳои хароҷоти пулраро муайян мекунем.

$$b_{11} = \frac{D_{11}}{D} = \frac{0,0665}{0,6046} = 0,1100; b_{12} = \frac{D_{12}}{D} = \frac{0,1952}{0,6046} = 0,3229;$$

$$b_{13} = \frac{D_{13}}{D} = \frac{0,0205}{0,6046} = 0,0339; b_{21} = \frac{D_{21}}{D} = \frac{0,1952}{0,6046} = 0,0609;$$

$$b_{22} = \frac{D_{22}}{D} = \frac{0,7638}{0,6046} = 1,2633; b_{23} = \frac{D_{23}}{D} = \frac{0,5321}{0,6046} = 0,8801;$$

$$b_{31} = \frac{D_{31}}{D} = \frac{0,5454}{0,6046} = 0,9021; b_{32} = \frac{D_{32}}{D} = \frac{0,5321}{0,6046} = 0,8801;$$

$$b_{33} = \frac{D_{33}}{D} = \frac{0,8440}{0,6046} = 1,3960;$$

$$b_{33} = \frac{D_{33}}{D} = \frac{0,8440}{0,6046} = 1,3960;$$

$$b_{33} = \frac{D_{33}}{D} = \frac{0,8440}{0,6046} = 1,3960;$$

Ин элементҳоро ба матрисаи B гузошта, ҳосил мекунем

$$B = \begin{pmatrix} 0,1100 & 0,3229 & 0,9021 \\ 0,0609 & 1,2633 & 0,8801 \\ 0,0339 & 0,2494 & 1,3960 \end{pmatrix}$$

Акнун барои ҳисоб намудани миқдори умумии маҳсулотҳои сеҳҳои завод матрисаи B -ро ба вектори маҳсулотии ниҳой

$$Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

зарб мекунем

$$X = B \cdot Y = \begin{pmatrix} 0,1100 & 0,3229 & 0,9021 \\ 0,0609 & 1,2633 & 0,8801 \\ 0,0339 & 0,2494 & 1,3960 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 79,59 \\ 171,55 \\ 95,42 \end{pmatrix}$$

Ҳамин тавр, барои истеҳсол намудани маҳсулотии ба нақша гирифташудаи сеҳҳои завод, ҳар як сеҳ бояд миқдори зерини маҳсулот истеҳсол кунад:

1. Дар сеҳи № 2 – 79,59 воҳид маҳсулот;

2. Дар сеҳи № 2 – 171,55 воҳид маҳсулот;

3. Дар сеҳи № 3 – 95,42 воҳид маҳсулот.

Вариантҳои супоришҳо

Супориш. Истеҳсолот ва тақсими маҳсулотии (бо воҳидҳои ниҳой) сеҳҳои завод дар ҷадвал дода шудаанд. Истеҳсоли маҳсулотии ҳар як сеҳи завод муайян карда шавад, агар вектори маҳсулотии ниҳойи ҳар як сеҳ дода шуда бошад

Вариантҳои № 1

	Сеҳ 1	Сеҳ 2	Сеҳ 3	Хароҷоти ғай-ринистеҳсолий	Миқдори умумӣ	Вектори маҳсулотии ниҳой
Сеҳ 1	3	5	14	11	33	30
Сеҳ 2	2	3	13	3	21	100
Сеҳ 3	1,5	2,5	5	20	29	40

Вариантҳои № 2

	Сеҳ 1	Сеҳ 2	Сеҳ 3	Хароҷоти ғай-ринистеҳсолий	Миқдори умумӣ	Вектори маҳсулотии ниҳой
Сеҳ 1	2	5	12	10	29	50
Сеҳ 2	6	3	5	9	23	20
Сеҳ 3	4	3	5	20	32	90

Вариантҳои № 3

	Сеҳ 1	Сеҳ 2	Сеҳ 3	Хароҷоти ғай-ринистеҳсолий	Миқдори умумӣ	Вектори маҳсулотии ниҳой
Сеҳ 1	1,5	3,5	16	4	25	80
Сеҳ 2	7	2	16	3	28	20
Сеҳ 3	3	5	15	8	31	50

Вариантҳои № 4

	Сеҳ 1	Сеҳ 2	Сеҳ 3	Хароҷоти ғай-ринистеҳсолий	Миқдори умумӣ	Вектори маҳсулотии ниҳой
Сеҳ 1	3	2	14	11	30	25
Сеҳ 2	1	2	16	3	22	95
Сеҳ 3	4	3	5	20	32	50

Варианти № 5

	Сех 1		Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори маҳсулоти нихой
Сех 1	2	3	15		10	30	35
Сех 2	1	2	16		3	22	80
Сех 3	6	3	5		13	27	55

Варианти № 6

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори маҳсулоти нихой
Сех 1	3	4	13	8	28	50
Сех 2	1	2	16	3	22	30
Сех 3	5	3	10	17	35	90

Варианти № 7

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори маҳсулоти нихой
Сех 1	2	3	13	8	26	100
Сех 2	2	5	17	6	29	50
Сех 3	4	5	5	16	30	45

Варианти № 8

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори маҳсулоти нихой
Сех 1	7	3	8	10	28	120
Сех 2	10	12	4	3	29	20
Сех 3	4	11	5	14	34	40

Варианти № 9

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори маҳсулоти нихой
Сех 1	2,5	9	1,5	19	32	35

Сех 2	4	12	8	13	37	45
Сех 3	0,5	3,5	5	20	29	105

Варианти № 10

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори маҳсу- лоти нихой
Сех 1	2,5	3,5	13	10	29	70
Сех 2	1	2	16	3	22	30
Сех 3	0,5	3,5	5	20	29	60

Варианти № 11

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори маҳсу- лоти нихой
Сех 1	2	3	15	10	30	100
Сех 2	1	2	12	5	20	30
Сех 3	1,5	3,5	5	20	30	40

Варианти № 12

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори маҳсу- лоти нихой
Сех 1	2	3	15	10	30	90
Сех 2	1	2	16	3	22	20
Сех 3	12	11	5	6	34	50

Варианти № 13

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори маҳсулоти нихой
Сех 1	5	3	13	10	31	50
Сех 2	1	2	16	3	22	75
Сех 3	5	3	5	20	33	60

Варианти № 14

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори маҳсу- лоти нихой
Сех 1	1	2	7	8	18	65
Сех 2	1	2	16	3	22	30
Сех 3	3	5	15	9	32	50

Варианти № 15

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори махсу- лоти ниҳой
Сех 1	7	4	5	12	28	100
Сех 2	11	2	6	13	32	70
Сех 3	5	5	9	16	35	50

Варианти № 16

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори махсулоти ниҳой
Сех 1	3	9	10	11	33	30
Сех 2	3	2	13	3	21	100
Сех 3	1,5	2,5	5	20	29	40

Варианти № 17

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори махсулоти ниҳой
Сех 1	3	4	12	10	29	50
Сех 2	5	4	5	9	23	20
Сех 3	4	3	5	20	32	90

Варианти № 18

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори махсулоти ниҳой
Сех 1	1,5	3,5	16	4	25	80
Сех 2	6	3	16	3	28	20
Сех 3	3	5	15	8	31	50

Варианти № 19

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори махсу- лоти ниҳой
Сех 1	4	3	12	11	30	25
Сех 2	1	2	16	3	22	95

Сех 3	4	3	5	20	32	50
-------	---	---	---	----	----	----

Варианти № 20

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори махсу- лоти ниҳой
Сех 1	4	5	10	10	30	35
Сех 2	1	2	16	3	22	80
Сех 3	6	3	5	13	27	55

Варианти № 21

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори махсу- лоти ниҳой
Сех 1	4	3	15	8	30	50
Сех 2	1	2	16	3	22	30
Сех 3	5	3	10	17	35	90

Варианти № 22

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори махсу- лоти ниҳой
Сех 1	5	3	10	8	26	100
Сех 2	2	5	17	6	29	50
Сех 3	4	5	5	16	30	45

Варианти № 23

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори махсулоти ниҳой
Сех 1	4	6	8	10	28	120
Сех 2	10	12	4	3	29	20
Сех 3	4	11	5	14	34	40

Варианти № 24

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори махсу- лоти ниҳой
Сех 1	3	9	1	19	32	35
Сех 2	4	12	8	13	37	45
Сех 3	0,5	3,5	5	20	29	105

Варианти № 25

	Харочоти ғай- риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори махсу- лоти ниҳой

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	риистехсолӣ	умумӣ	лоти ниҳой
Сех 1	3	3	13	10	29	70
Сех 2	1	2	16	3	22	30
Сех 3	0,5	3,5	5	20	29	60

Варианти № 26

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай-риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори махсулоти ниҳой
Сех 1	2	3	15	10	30	100
Сех 2	1	2	12	5	20	30
Сех 3	2	4	4	20	30	40

Варианти № 27

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай-риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори махсулоти ниҳой
Сех 1	2	3	15	10	30	90
Сех 2	1	2	16	3	22	20
Сех 3	9	11	8	6	34	50

Варианти № 28

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай-риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори махсулоти ниҳой
Сех 1	5	3	13	10	31	50
Сех 2	5	2	12	3	22	75
Сех 3	5	3	5	20	33	60

Варианти № 29

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай-риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори махсулоти ниҳой
Сех 1	1	2	7	8	18	65
Сех 2	5	2	12	3	22	30
Сех 3	3	5	15	9	32	50

Варианти № 30

	Сех 1	Сех 2	Сех 3	Харочоти ғай-риистехсолӣ	Микдори умумӣ	Вектори махсулоти ниҳой
Сех 1	7	4	5	12	28	100
Сех 2	9	4	6	11	30	70

Сех 3	5	5	9	16	35	50
-------	---	---	---	----	----	----

9.3. МАШҖУЛИЯТИ АМАЛӢ

Намунан иҷрои супориш

Амалҳо бо додашудаҳои таҷрибавӣ

Масъала. Мушоҳидаҳо барои муайян намудани нарх дар болоравии истеҳсоли маҳсулоти корхона натиҷаҳои зеринро доданд:

Рақами мушоҳида	Натиҷаи мушоҳидаҳо		
	Гуруҳи I	Гуруҳи II	Гуруҳи III
1	70	86	46
2	80	70	68
3	64	79	55
4	78	85	71

Бо истифодаи методи таҳлили дисперсионӣ муайян карда шавад, ки фарқият байни миёнаҳои арифметикии мушоҳидаҳо чӣ гуна аст. Боваринокии баҳои мушоҳида $\lambda = 0,95$ қабул карда шавад.

Хал. Миёнаи арифметикии ҳар як гуруҳи мушоҳидаро аз рӯи формулаи

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_{ij},$$

ҳисоб мекунам, ки дар инҷо x_{ij} – натиҷаҳои мушоҳида ва n – микдори мушоҳидаҳо.

$$\bar{x}_{\text{гумумӣ}} = \frac{70 + 80 + 64 + 78 + 86 + 70 + 79 + 85 + 46 + 68 + 55 + 71}{12} = 71;$$

$$\bar{x}_{\text{гуруҳи 1}} = \frac{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}}{4} = \frac{70 + 80 + 64 + 78}{4} = 73;$$

$$\bar{x}_{\text{гуруҳи 2}} = \frac{x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}}{4} = \frac{86 + 70 + 79 + 85}{4} = 80;$$

$$\bar{x}_{\text{гуруҳи 3}} = \frac{x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}}{4} = \frac{46 + 68 + 55 + 71}{4} = 60.$$

Суммаи квадратҳои фарқи гуруҳҳо ва мушоҳидаи умумиро ҳисоб мекунем

$$S_{\text{гумумӣ}} = \sum (x_{ij} - \bar{x}_{\text{гумумӣ}})^2 = (70 - 71)^2 + (80 - 71)^2 + (64 - 71)^2 + (78 - 71)^2 + (86 - 71)^2 + (70 - 71)^2 + (79 - 71)^2 + (85 - 71)^2 + (46 - 71)^2 + (68 - 71)^2 + (55 - 71)^2 + (71 - 71)^2 = 1556;$$

Акнун суммаи квадрати фаркҳои гурӯҳҳо ва мушоҳидаи умумиро аз рӯи формулаи

$$S_{\text{факт}} = q \sum_{i=1}^p (\bar{x}_{\text{гурӯҳи } i} - \bar{x}_{\text{умумӣ}})^2$$

муайян мекунем, дар ин ҷо q – миқдори мушоҳидаҳо, p – миқдори объектҳои мушоҳидашаванда. Бинобар, бо ёрии ин формула, меёбем

$$S_{\text{факт}} = q \sum_{i=1}^p (\bar{x}_{\text{гурӯҳи } i} - \bar{x}_{\text{умумӣ}})^2 =$$

$$= 4((73 - 71)^2 + (80 - 71)^2 + (60 - 71)^2) = 824;$$

Фарқиятҳои $S_{\text{умумӣ}}$ ва $S_{\text{факт}}$ – ро, ин тавр муайян мекунем

$$S_{\text{бақия}} = S_{\text{умумӣ}} - S_{\text{факт}} = 1556 - 824 = 732.$$

Он гоҳ

$$S_{\text{умумӣ}}^2 = \frac{S_{\text{бақия}}}{(q - 1)^2} = \frac{732}{(4 - 1)^2} = \frac{732}{9} = 81,3.$$

Акнун дисперсияи бақияро меёбем

$$S_{\text{факт}}^2 = \frac{S_{\text{факт}}}{p - 1} = \frac{824}{3 - 1} = 412,$$

дар ин ҷо p – миқдори объектҳои мушоҳидашаванда.

Бо ёрии қонуни тақсимогии Фишер – Снедекор натиҷаҳои мушоҳидашударо аниқ мекунем

$$F_{\text{мушоҳида}} = \frac{S_{\text{факт}}^2}{S_{\text{бақия}}^2} = \frac{412}{81,3} = 5,07.$$

Қиматҳои критикӣ параметро барои боваринокии $\lambda = 0,95$ ва ададҳои дараҷаи озодии сурадро $k_1 = p - 1 = 3 - 1 = 2$, маҳраҷро $k_2 = p(q - 1) = 3(4 - 1) = 9$, ҳисоб кардем, дар ин ҷо q – миқдори гурӯҳи объектҳо.

Аз ин ҷо

$$F_{\text{критикӣ}} = \frac{k_2}{k_1} \cdot \lambda = \frac{9}{2} \cdot 0,95 = 4,275.$$

Қиматҳои параметрҳои мушоҳидашуда ва критикиро муқоиса намуда, яъне $F_{\text{мушоҳида}}$ ва $F_{\text{критикӣ}}$ – ро, мебинем, ки $F_{\text{мушоҳида}}$ аз $F_{\text{критикӣ}}$ калон мебошад. Бинобар, миёнаҳои арифметикӣ ёфташуда тафовути калон доранд ва барои ин параметрҳо дар нархгузории маҳсулоти истеҳсолшаванда таъсиркунанда мебошад.

Вариантҳои супоришҳо

Супориш. Таҷрибаҳо барои муайян намудани нарх дар болоравии истеҳсоли маҳсулоти корхона натиҷаҳои зеринро доданд (ба ҷадвал нигаред). Бо истифодаи методи таҳлили дисперсионӣ муайян карда шавад, ки фарқият байни миёнаҳои арифметикӣ мушоҳидаҳо чӣ гуна аст. Боваринокии баҳои мушоҳида λ қабул карда шавад.

Варианти 1

Рақами мушоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,943$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	75	91	51
2	85	75	73
3	69	84	60
4	83	90	76

Варианти 2

Рақами мушоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,952$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	65	80	40
2	73	64	62
3	51	74	67
4	74	82	56

Варианти 3

Рақами мушоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,948$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	54	69	44
2	62	53	51
3	40	63	58
4	63	71	45

Варианти 4

Рақами мушоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,945$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	165	182	144
2	173	168	151
3	156	179	158

4	172	171	145
---	-----	-----	-----

Вариант 5

Рақами му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,93$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	28	31	14
2	17	26	20
3	22	18	25
4	19	23	21

Вариант 6

Рақами му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,935$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	39	42	25
2	28	37	31
3	33	29	36
4	30	34	32

Вариант 7

Рақами му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,942$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	50	53	36
2	39	48	42
3	44	40	47
4	41	45	43

Вариант 8

Рақами му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,962$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	70	74	56
2	59	68	62
3	66	60	67
4	62	65	83

Вариант 9

Рақами му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,96$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	75	79	61

2	64	73	67
3	71	65	72
4	67	70	88

Вариант 10

Рақами му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,97$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	90	94	76
2	79	98	82
3	86	80	87
4	92	85	103

Вариант 11

Рақами му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,917$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	140	144	126
2	129	148	132
3	136	130	147
4	142	185	153

Вариант 12

Раками му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,93$)		
	Гуруҳи I	Гуруҳи II	Гуруҳи III
1	241	243	226
2	229	247	233
3	238	232	249
4	248	286	257

Вариант 13

Раками му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,934$)		
	Гуруҳи I	Гуруҳи II	Гуруҳи III
1	148	137	125
2	127	144	131
3	135	130	147
4	141	183	156

Вариант 14

Раками му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,928$)		
	Гуруҳи I	Гуруҳи II	Гуруҳи III
1	42	38	35
2	29	49	31
3	36	37	47
4	44	53	46

Вариант 15

Раками му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,925$)		
	Гуруҳи I	Гуруҳи II	Гуруҳи III
1	52	58	55
2	39	49	41
3	46	47	67
4	54	63	46

Вариант 16

Раками му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,955$)		
	Гуруҳи I	Гуруҳи II	Гуруҳи III
1	12	18	25
2	19	19	21
3	16	17	37

4	14	13	26
---	----	----	----

Вариант 17

Раками му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,915$)		
	Гуруҳи I	Гуруҳи II	Гуруҳи III
1	122	128	125
2	125	129	124
3	126	127	137
4	124	125	126

Вариант 18

Раками му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,995$)		
	Гуруҳи I	Гуруҳи II	Гуруҳи III
1	342	338	315
2	315	329	344
3	336	337	357
4	314	345	336

Вариант 19

Раками му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,89$)		
	Гуруҳи I	Гуруҳи II	Гуруҳи III
1	33	37	35
2	45	28	47
3	46	36	54
4	54	44	36

Вариант 20

Раками му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,85$)		
	Гуруҳи I	Гуруҳи II	Гуруҳи III
1	45	49	47
2	57	40	59
3	58	48	58
4	66	56	49

Вариант 21

Раками му- шоҳида	Натиҷаҳои мушоҳида ($\lambda = 0,88$)		
	Гуруҳи I	Гуруҳи II	Гуруҳи III
1	60	64	62

2	72	55	74
3	73	63	73
4	81	71	64

Вариант 22

Рақами мушохиди	Натиҷаҳои мушохиди ($\lambda = 0,875$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	72	76	74
2	84	67	86
3	85	75	85
4	93	82	78

Вариант 23

Рақами мушохиди	Натиҷаҳои мушохиди ($\lambda = 0,9$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	174	173	170
2	180	166	185
3	191	172	180
4	189	181	176

Вариант 24

Рақами мушохиди	Натиҷаҳои мушохиди ($\lambda = 0,88$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	479	478	475
2	485	471	490
3	496	477	485
4	494	486	481

Вариант 25

Рақами мушохиди	Натиҷаҳои мушохиди ($\lambda = 0,925$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	87	76	79
2	76	75	91
3	84	75	84
4	88	82	78

Вариант 26

Рақами мушохиди	Натиҷаҳои мушохиди ($\lambda = 0,825$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	49	39	38
2	34	36	50
3	42	38	41
4	47	40	39

Вариант 27

Рақами мушохиди	Натиҷаҳои мушохиди ($\lambda = 0,85$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	143	138	130
2	137	132	150
3	145	135	144
4	142	141	136

Вариант 28

Рақами мушохиди	Натиҷаҳои мушохиди ($\lambda = 0,94$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	45	40	32
2	39	34	53
3	47	37	45
4	44	43	39

Вариант 29

Рақами мушохиди	Натиҷаҳои мушохиди ($\lambda = 0,945$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	56	52	49
2	48	43	50
3	56	46	51
4	55	52	48

Вариант 30

Рақами мушохиди	Натиҷаҳои мушохиди ($\lambda = 0,905$)		
	Гурӯҳи I	Гурӯҳи II	Гурӯҳи III
1	278	275	273
2	281	266	284
3	292	273	281
4	289	287	273

9.4. КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Намунаи иҷрои супориш

Системаи хизматрасонии умумӣ

Масъала. Магазин аз хочагиҳои обҷакорини назди шаҳри сабзавотҳои гуногун қабул мекунад. Автомобили бордор дар як рӯз, вақтҳои гуногун 6 бор ($\lambda = 6$) ба магазин сабзавот меорад. Амбормӯҳ ва воситаҳои коркарди сабзавоти ба фуруш тайёр имконият дорад, ки бори ду автомобил ($m = 2$) ба фуруш тайёр карда шуда, дар амбор нигоҳ дошта шавад. Дар амбор 3 нафар ($n = 3$) сабзавотро ба фуруш тайёр мекунад, ки ҳар яки он дар вақти муайяншудаи корӣ, қариб 4 соат ($t_{\text{хизм.}} = 4$) як мошин сабзавотро ба фуруш тайёр мекунад. Давомнокии рӯзи корӣ $t = 12$ соат мебошад. Ҳамаи амбори магазин (m) чӣ гуна бошад, ки эҳтимолияти қабул на кардани пурраи сабзавот ба 0,97 ($P_{\text{хизм.}} \geq 0,97$) баробар бошад? Ҳама параметрҳои система муайян карда шаванд.

Ҳал.

1. Эҳтимолияти бекор мондани каналҳои хизматрасонӣ, вақте дархост нест ($k = 0$), бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад

$$P_0 = \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \cdot \left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right) \right\}^{-1}.$$

Мувофиқи ин формула, эҳтимолияти бекор мондани коргарон, ҳангоми наомадани автомобилҳои бордор, чунин мешавад

$$P_0 = \left\{ \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^{3+1}}{3!(3-2)} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) \right\}^{-1} = 0,128.$$

дар ин ҷо шиддати ҷараёни (интенсивноҳи нағрузки) кор

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{3} = 2$$

буда, шиддати ҷараёни хизматрасонӣ (интенсивноҳи потокаи обхузи-живания) бо формулаи зерин ёфта мешавад

$$\mu = \frac{t}{t_{\text{хизм.}}} = \frac{12}{4} = 3 \text{ авто/рӯз.}$$

1) Эҳтимолияти рад намудани хизматрасонӣ бошад, ин тавр ёфта мешавад

$$P_{\text{рад}} = \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} \cdot P_0 = \frac{32 \cdot 0,128}{3!3^2} = \frac{32 \cdot 0,128}{54} = 0,076.$$

2) Эҳтимолияти хизматрасонӣ

$$P_{\text{хизм.}} = 1 - P_{\text{рад}} = 1 - 0,076 = 0,924.$$

$P_{\text{хизм.}} = 0,924 < 0,97$, ки ба эҳтимолияти дар масъала гузошташуда, мувофиқ нест, бинобар $m = 3$ қабул карда, имконияти бор қабул намудани амборро зиёд мекунем.

1) Эҳтимолияти бекор мондани коргарон, ҳангоми наомадани автомобилҳои бордор, чунин мешавад

$$P_0 = \left\{ \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^{3+1}}{3!(3-2)} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right) \right\}^{-1} = 0,122.$$

Эҳтимолияти рад намудани хизматрасонӣ бошад

$$P_{\text{рад}} = \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} \cdot P_0 = \frac{2^{3+3}}{3!3^3} \cdot 0,122 = 0,048.$$

Эҳтимолияти хизматрасонӣ

$$P_{\text{хизм.}} = 1 - P_{\text{рад}} = 1 - 0,048 = 0,952.$$

$P_{\text{хизм.}} = 0,952 < 0,97$, ба шарти масъала мувофиқат намекунад, бинобар $m = 4$ қабул мекунем, яъне боз имконияти бор қабул намудани амборро зиёд мекунем.

1) Эҳтимолияти бекор мондани коргарон, ҳангоми наомадани автомобилҳои бордор, чунин мешавад

$$P_0 = \left\{ \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^{3+1}}{3!(3-2)} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4\right) \right\}^{-1} = 0,118$$

Эҳтимолияти рад намудани хизматрасонӣ бошад

$$P_{\text{рад}} = \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} \cdot P_0 = \frac{2^{3+4}}{3!3^4} \cdot 0,118 = 0,031.$$

Эҳтимолияти хизматрасонӣ

$$P_{\text{хизм.}} = 1 - P_{\text{рад}} = 1 - 0,031 = 0,969.$$

$P_{\text{хизм.}} = 0,969 < 0,97$, низ шарти масъаларо қаноат намекунад, бинобар $m = 5$ гирифта, боз имконияти бор қабул намудани амборро зиёд мекунем ва ҳосил мекунем

2) Эҳтимолияти бекор мондани коргарон, ҳангоми наомадани автомобилҳои бордор

$$P_0 = \left\{ \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^{3+1}}{3!(3-2)} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5\right) \right\}^{-1} = 0,112.$$

2) Эҳтимолияти рад намудани хизматрасонӣ

$$P_{\text{рад}} = \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} \cdot P_0 = \frac{2^{3+5}}{3!3^5} \cdot 0,112 = 0,0097 \approx 0,02.$$

3) Эҳтимолияти хизматрасонӣ

$$P_{\text{хизм.}} = 1 - P_{\text{рад}} = 1 - 0,02 = 0,98.$$

$P_{\text{хизм}} = 0,98 > 0,97$. Ин эҳтимолияти ёфтамон шarti масъаларо қаноат мекунад, бинобар $m = 5$ қабул карда, ҳаҷми борқабулкунини амборро ба 5 автомобил мерасонем.

Акнун параметрҳои иловатии системаро ҳисоб мекунем.

4) Имконияти борқабулкунини мутлақи амбор

$$A = P_{\text{хизм}} \cdot \lambda = 0,98 \cdot 6 = 5,88 \text{ авто/рӯз.}$$

5) Миёнаи арифметикии банд будан каналҳои хизматрасонӣ

$$\bar{n}_{\text{бк}} = \frac{A}{\mu} = \frac{5,88}{3} = 1,96.$$

6) Миёнаи арифметикии дар навбат истодани автомобилҳо, ҳангоми $m_1 = 5$ будан

$$L_{\text{навбат}} = \frac{m^{n+1}}{(m+1)n!} \cdot \frac{\left(1 - \frac{m}{n}\right)^{m_1} \left(m_1 + 1 - \frac{m_1 m}{n}\right)}{\left(1 - \frac{m}{n}\right)^m} \cdot P_i =$$

$$= \frac{2^{3+1}}{3 \cdot 3!} \cdot \frac{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^5 \left(5 + 1 - \frac{5 \cdot 2}{3}\right)}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} \cdot 0,112 = 0,588.$$

7) Миёнаи арифметикии мунтазир шудани хизматрасонӣ

$$\bar{t}_{\text{навбат}} = \frac{L_{\text{навбат}}}{\lambda} = \frac{0,588}{6} = 0,098 \text{ рӯз.}$$

8) Миёнаи арифметикии миқдори дархостҳои система

$$\bar{z} = L_{\text{навбат}} + \bar{n}_{\text{бк}} = 0,588 + 1,96 = 2,548 \text{ авто.}$$

9) Вақти мӯленӣ дар амбори магазин истодани автомобил, чунин ҳисоб карда мешавад

$$t_{\text{сх}} = \frac{\bar{z}}{\lambda} = \frac{2,548}{6} = 0,424 \text{ рӯз.}$$

Вариантҳои супоришҳо

Супориш. Комбинат барои истеҳсолот аз дигар корхонаҳо маҳсулоти хом қабул мекунад. Автомобилҳои бордор ба комбинат, дар вақтҳои гуногун, ба миқдори λ мошин дар як рӯз маҳсулоти хом мекашонанд. Амборҳо барои қабули бор ва асбобҳои комбинат барои тайёр намудани маҳсулоти тайёр барои фуруш имконият доранд, ки дар як рӯз бори m автомашинаро барои коркард ва маҳфуз нигоҳдорӣ, қабул кунанд. Дар комбинат n коргар кор мекунад, ки ҳар яки онҳо бори як мошинро дар муддати вақти $t_{\text{хизм}}$ соат қабул мекунад. Давомнокии рӯзи корӣ $t = 8$ соат мебошад. Ҳамаи амбори комбинат (m) чӣ гуна бошад, ки эҳтимолияти қабул ва коркарди маҳсулоти хом ба δ ($P_{\text{хизм}} > \delta$) баробар бошад? Ҳама параметрҳои система муайян карда шаванд.

Вариантҳо	λ	m	n	$t_{\text{хизм}}$	δ
1	5	3	2	6	0,965
2	4	3	2	5	0,976
3	6	4	4	3	0,978
4	3	2	2	5	0,981
5	4	3	2	4	0,943
6	5	4	3	5	0,947
7	5	3	3	8	0,938
8	4	3	2	7	0,979
9	6	5	4	4	0,982
10	5	3	3	3	0,964
11	6	4	5	4	0,955
12	5	3	2	4	0,946
13	5	2	4	6	0,959
14	6	3	5	7	0,980
15	6	4	3	5	0,987
16	6	5	4	4	0,929
17	4	4	3	6	0,942
18	5	3	3	7	0,908
19	5	3	2	8	0,917
20	4	4	2	8	0,913
21	4	3	3	7	0,954
22	6	5	5	7	0,932

23	6	5	5	5	0,944
24	5	3	4	4	0,963
25	5	3	2	6	0,970
26	5	4	3	7	0,921
27	4	3	2	7	0,933
28	6	5	5	6	0,966
29	6	3	4	6	0,982
30	6	3	2	7	0,966

9.5. САВОЛҲО БАРОИ ТАҚРОРИ БОБ

1. Методҳои алгебраи хаттӣ ва программиронии хаттӣ хангоми ҳалли масъалаҳои ба плангирӣ, чӣ гуна тағбиқ карда мешаванд?
2. Мувозинаи истеҳсолот (межотраслевой баланс) чист?
3. Бо кадом сабаб модели математикӣ мувозинаи истеҳсолот тағйирёбанда аст?
4. Коэффициентҳои технологӣ чист?
5. Коэффициенти хароҷоти рӯст чӣ тавр муайян карда мешаванд?
6. Коэффициентҳои хароҷоти пулла чист ва чӣ тавр муайян карда мешаванд?
7. Матрисаи коэффицентҳои хароҷоти рӯст чӣ тавр таҳия карда мешавад?
8. Матрисаи коэффицентҳои хароҷоти пулла чӣ тавр таҳия карда мешавад?
9. Агар коэффицентҳои хароҷоти рӯст маълум набоянд, онҳоро чӣ тавр ҳисоб кардан мумкин аст?
10. Барои муайян намудани нархгузори барои маҳсулот миёнаи арифметикӣ факторӣ чӣ тавр ёфта мешавад?
11. Суммаи квадратҳои фарқи миёнаи факторҳои умумӣ бо кадом формула ҳисоб карда мешавад?
12. Дисперсияи фактори бакиавиро чӣ тавр муайян мекунад?
13. Қиматҳои критикӣ параметрҳо ва мушоҳидаҳо чӣ тавр ёфта мешаванд?
14. Эҳтимолияти бекор мондани қнаҳои хизматрасонӣ вақти набудани дархост, бо кадом формула ҳисоб карда мешавад?
15. Бо ёрии кадом формула шиддати ҷараёни хизматрасониро ҳисоб мекунад?
16. Шиддати ҷараёни хизматрасониро чӣ тавр муайян мекунад?

17. Бо ёрии кадом формула эҳтимолияти рад намудани хизматрасонӣ ёфта мешавад?

18. Формулаи эҳтимолияти хизматрасониро нависед.

19. Формулаи бекор мондани коргарон хангоми наомадани автомобилҳоро нависед.

20. Имконияти борқабулкунӣ мутлақи амбор чӣ тавр муайян карда мешавад?

21. Қимати миёнаи банд будани каналҳои хизматрасонӣ бо кадом формула ифода карда мешавад?

22. Қимати миёнаи дархостҳо дар система бо кадом формула ёфта мешавад?

23. Қимати миёнаи дар магазин истодани автомобил бо ёрии кадом формула ҳисоб карда мешавад?

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. Москва, Наука, 1973. 631 с.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Том 1, 2. Москва, ГИФМЛ, 1959.
3. Бородич Л.И., Герасимович А.И., Кеда Н.П., Мелешко И.Н. Справочное пособие по приближенным методам решения задач высшей математики. Минск, Вышэйшая школа, 1986. 190 с.
4. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. Москва, высшая школа, 1990. 208 с.
5. Гершгорн А.С. математическое программирование и его применение в экономических расчетах. Москва, Экономика, 1968. 200 с.
6. Гусева С.Т., Санюкевич А.В. Лабораторные работы по курсу «Высшая математика». Брест, БГТУ, 2003. 52 с.
7. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. Москва, Наука, 1970. 664 с.
8. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Москва, Наука, 1967. 368 с.
9. Калиткин Н.Н. Численные методы. Москва, Наука, 1978. 512 с.
10. Копченко Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. Санкт-Петербург, Лань, 2009. 368 с.
11. Милн В.Э. Численное решение дифференциальных уравнений. Москва, Иностран. литер., 1955. 457 с.
12. Пулькин С.П., Никольская Л.Н., дьячков А.С. вычислительная математика. Москва, Просвещение, 1980. 176 с.
13. Солиев Ю. Сборник заданий к лабораторным работам по численным методам высшей математики. Душанбе, ТПИ, 1980. 47 с.
14. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Москва, Мир, 1969. 362 с.
15. Хасанов Ю.Х., Лешукович А.И. Численные методы. Методические рекомендации к лабораторным занятиям. Душанбе, Ирфон, 2016. 116 с.
16. Черкасова М.И. Сборник задач по численным методам. Минск, Вышэйшая школа, 1967. 145 с.

	Мукаддима	3
I	Назариҳои ҳаҷоҳо	7
1.1.	Пайдоиш ва таснифи ҳаҷоҳо	7
1.2	Кори лабораторӣ	14
1.3	Машғулияти амалӣ	18
1.4	Кори мустақилона	20
1.5	Саволҳо барои тақрори боб	27
II	Алгебраи матрисаҳо	28
2.1	Мафҳумҳо ва таърифҳои асосӣ	28
2.2	Муайянкунандаҳои матрисаҳои квадратӣ	30
2.3	Матрисаи баръакс	32
2.4	Кори лабораторӣ	34
2.5	Машғулияти амалӣ	40
2.6	Кори мустақилона	44
2.7	Саволҳо барои тақрори боб	49
III	Системаи муодилаҳои алгебраӣ	50
3.1	Методи Крамер	51
3.2	Методи матрисаи баръакс	52
3.3	Методи Гаусс	54
3.4	Методи итератсия	59
3.5	Методи Зейдел	62
3.6	Кори лабораторӣ	64
3.7	Машғулияти амалӣ	68
3.8	Кори мустақилонаи №1	73
3.9	Кори мустақилонаи №2	78
3.10	Кори мустақилонаи №3	84
3.11	Саволҳо барои тақрори боб	89
IV	Муодилаҳои алгебраӣ ва трансцендентӣ	91
4.1	Методи тақсими порча ба ҳиссаҳои баробар	91
4.2	Методи хордаҳо	93
4.3	Методи расандаҳо	95
4.4	Методи муштарак	96

4.5	Кори лаборатории №1	98
4.6	Кори лаборатории №2	100
4.7	Машгулияти амалии №1	102
4.8	Машгулияти амалии №2	105
4.9	Кори мустиқилона	107
4.10	Саволҳо барои тақрори боб	109
V	Назари интерполатсияи функсияҳо	111
5.1	Гузориши масъалаи интерполатсия	111
5.2	Бисёрбаҳоии интерполатсияи Нютон	112
5.3	Бисёрбаҳоии интерполатсияи Лагранж	118
5.4	Қадали фарҳақи марказӣ	119
5.5	Формулаҳои интерполатсияи Гаусс	120
5.6	Формулаи интерполатсияи Стирлинг	122
5.7	Формулаи интерполатсияи Бессел	122
5.8	Кори лабораторӣ	127
5.9	Машгулияти амалӣ	128
5.10	Кори мустиқилона	133
5.11	Саволҳо барои тақрори боб	137
VI	Дифференсиронии ададӣ	139
6.1	Гузориши масъала	139
6.2	Аппроксиматсия бо бисёрбаҳоии Нютон	140
6.3	Бисёрбаҳоии Лагранж дар ҳисобкунии ҳосила	143
6.4	Методҳои коэффисиентҳои ҳомаҷунӣ	145
6.5	Кори лабораторӣ	146
6.6	Машгулияти амалӣ	151
6.7	Кори мустиқилона	155
6.8	Саволҳо барои тақрори боб	160
VII	Интегронии ададӣ функсия	161
7.1	Гузориши масъала	161
7.2	Формулаи умумии трапезияҳо	162
7.3	Формулаи умумии Симпсон	164
7.4	Кори лабораторӣ	165
7.5	Машгулияти амалӣ	167
7.6	Кори мустиқилона	169
7.7	Саволҳо барои тақрори боб	171

VIII	Муодилаҳои дифференсиалӣ	172
8.1	Гузориши масъала	172
8.2	Масъалаи Коши барои муодилаҳои дифференсиалӣ одӣ	174
8.3	Ҳалли масъалаи Коши	176
8.3.1	Методҳои яқкадамаи ҳалли масъалаи Коши	176
8.3.2	Ҳалли масъалаи Коши бо методҳои бисёрқадама	183
8.4	Кори лабораторӣ	185
8.5	Машгулияти амалӣ	188
8.6	Кори мустиқилона	191
8.7	Саволҳо барои тақрори боб	194
IX	Моделҳои ҳаттии иқтисодӣ	195
9.1	Моделҳои математикӣ мувозинаи истеҳсолот	195
9.2	Кори лабораторӣ	200
9.3	Машгулияти амалӣ. Амалҳо бо додшудаҳои таҷрибавӣ	209
9.4	Кори мустиқилона. Системи хизматрасонии умумӣ	218
9.5	Саволҳо барои тақрори боб	222
	Адабиёт	224

Ба ҷонаш 07.06.2022 имзо шуд.
Андозан қоғаз 60x84 1/16. Қоғаз офсетӣ.
Ҷузъи ҷомӣ 14,25. Адади нашр 100 нусха.

Матбааи ДДОТ

ISBN 978-99955-54-89-4



9 789995 54894