

“O‘ZBEKISTON TEMIR YO‘LLARI” AJ

TOSHKENT TEMIR YO‘L MUHANDISLARI INSTITUTI

Oliy matematika kafedrası

A.M.Karimov,

A.A.Eshqobilov

OLIY MATEMATIKA

fanidan amaliy mashg‘ulotlar

(2-semestr)

Toshkent – 2020

Ushbu uslubiy qo'llanma "Oliy matematika" fani bo'yicha 2-semestr amaliyot mashg'ulotlarda professor-o'qituvchilar va talabalar foydalanishi uchun mo'ljallangan. Uslubiy qo'llanmada har bir mavzuni yoritib beradigan qisqacha nazariy ma'lumotlar keltirilgan va misollar batafsil yechib ko'rsatilgan. Dars jarayonida yechiladigan topshiriqlar va ularga moslab uy vazifalari uchun misol va masalalar berilgan.

Ushbu uslubiy qo'llanma professor-o'qituvchilar va barcha ta'lim yo'nalishlaridagi bakalavriat talabalari uchun mo'ljallangan.

Institut Ilmiy-uslubiy Kengashi tomonidan nashrga tavsiya etilgan.

Tuzuvchilar: A.M. Karimov– f-m. f. n., dots.;

A.A. Eshqobilov – katta o'qituvchi.

Taqrizchilar: O.I. Egamberdiyev – f-m. f. n. (O'zR FA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti);

R.Sh. Isanov – f-m. f. n., dots. (TTYMI).

KIRISH

Ilm-fan jadal rivojlanayotgan, axborot texnologiyalari keng qo'llanilayotgan o'quv jarayonida turli fan sohalarida ma'lumotlarning tez yangilanib borishi, talabalar oldida ularni batafsil egallash bilan bir qatorda, muntazam va mustaqil ravishda bilim izlash vazifasini qo'ymoqda.

Hozirgi vaqtda "Oliy matematika" fanining usullari fan, texnika va iqtisodiyotning turli-tuman masalalarini hal qilishda keng qo'llanilmoqda. Bu maqsadni amalga oshirishda amaliy mashg'ulotlarni o'tkazish alohida o'rin egallaydi. Amaliy mashg'ulot darslarida talaba mavzuga doir misol va masalalarni yechish orqali, nazariy va amaliy bilimlarini amaliyotga tadbqiq qila olish ko'nikmalarini shakllantirib boradi.

Yuqorida qayd etib o'tilgan vazifalarning bajarilishini ta'minlash maqsadida yuzaga kelgan mazkur o'quv qo'llanma "Oliy matematika" fanidan ikkinchi semestrda amaliy darslarni o'tishda qo'llanishga mo'ljallangan bo'lib, barcha ta'lim yo'nalishidagi bakalavriat talabalariga mo'ljallangan. Qo'llanma "Oliy matematika"ning kompleks sonlar, aniqmas integral, aniq integral va oddiy differensial tenglamalar kabi boblarini o'z ichiga olgan.

Qo'llanmada har bir mavzuni yoritib beradigan qisqacha nazariy ma'lumotlar keltirilgan. Mavzuga oid misollarning yechilishini oddiy va sodda tilda, tushunarli va ravon qilib bayon qilishga harakat qilingan. Ushbu uslubiy qo'llanmani yaratishda "Oliy matematika" faniga tegishli bo'lgan barcha o'quv-adabiyotlardan foydalanishga urunib ko'rildi. Shu bilan birga mazkur qo'llanma mavjud adabiyotlardagi ba'zi bo'shliqlarni to'ldiradi degan umiddamiz.

1-AMALIY MASHG'ULOT

Kompleks sonlar. Kompleks sonlar ustida amallar. Kompleks sonning trigonometrik shakli. Kompleks sondan ildiz chiqarish

Nazorat uchun savollar

1. Algebraik ko'rinishdagi kompleks sonning ta'rifini bering.
2. Algebraik ko'rinishda berilgan kompleks sonlar qanday qilib qo'shiladi, ayiriladi, ko'paytiriladi va bo'linadi?
3. Kompleks sonning geometrik tasviri qanday topiladi?
4. Ayniyatni isbotlang:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

5. Yuqoridagi ayniyat qanday geometrik talqinga ega?
6. Kompleks sonning moduli hamda argumenti deb nimaga aytiladi?
7. Kompleks soni trigonometrik ko'rinishda yozing. Haqiqiy soni qanday qilib trigonometrik ko'rinishda yozsa bo'ladi?
8. Muavr formulasini trigonometrik va ko'rsatkichli ko'rinishlarda yozing.
9. Kompleks sonning trigonometrik va ko'rsatkichli ko'rinishlari orasidagi bog'lanishni yozing.
10. Trigonometrik ko'rinishda berilgan kompleks sonlar ustida ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish va ildiz chiqarish amallari qanday bajariladi?
11. Qo'shma kompleks son deb nimaga aytiladi? Quydagilarni isbotlang:

$$1) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$2) \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

12. $\sin 4\alpha$ va $\cos 4\alpha$ larni Muavr formulasidan foydalanib α burchak funksiyalari orqali ifodalang.

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. $2+i$ ni $2-i$ ga bo'ling.

Yechish. $\frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)^2}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+4i+i^2}{4-i^2} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$, bunda $i^2 = -1$.

2-misol. $\alpha = (2+3i), \beta = (4+i)$ sonlarni ko'paytiring:

Yechish. $(2+3i)(4+i) = 8+2i+12i+3i^2 = 5+14i$.

3-misol. $3+3i$ kompleks sonni trigonometrik shaklga keltiring.

Yechish. $a=3, b=3, r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}, \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}=\frac{3}{3}=1, (1,1)$

nuqta birinchi chorakka tegishli bo'lganligi sababli $\varphi = \frac{\pi}{4}$ bo'ladi. Demak,

$$3+3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

4-misol. Berilgan $\alpha = -1+i\sqrt{3}$ sonni trigonometrik shaklga keltiring.

Yechish. $r=\sqrt{1+3}=2, \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}=-\sqrt{3}$, berilgan α kompleks songa mos

$(-1;\sqrt{3})$ nuqta ikkinchi chorakka tegishli bo'lganligi sababli $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, demak,

$$-1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

5-misol. Berilgan kompleks sonlarni ko'paytiring:

$\alpha = 3(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ), \beta = 2(\cos 25^\circ + i\sin 25^\circ)$ va $\gamma = 5(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)$.

Yechish.

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \beta \cdot \gamma &= 3 \cdot 2 \cdot 5(\cos(15^\circ + 25^\circ + 20^\circ) + i\sin(15^\circ + 25^\circ + 20^\circ)) = 30(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = \\ &= 30\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 15 + i15\sqrt{3}.\end{aligned}$$

6-misol. Quyidagi ildizni hisoblang: $\sqrt[3]{i}$.

Yechish. 1) Avval i ni trigonometrik shaklga keltiramiz. $r=1$ va $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Demak, $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. Endi Muavr formulaga ko'ra

$$\beta_k = \sqrt[3]{i} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}.$$

Bu misolda $k=0,1,2$. Bundan,

$$\beta_0 = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$\beta_1 = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$\beta_2 = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

Amaliy mashg'ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 76-95 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 96-115 misollar.

2-AMALIY MASHG'ULOT

Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral. Integrallash jadvali

Nazorat uchun savollar

1. Boshlang'ich funksiya ta'rif bering
2. Aniqmas integralga ta'rif bering.
3. Asosiy formulalarni keltiring.
4. Integrallar jadvalida 5ta formulani yozing.
5. Integralning sodda hossalari keltiring.

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. $F(x) = \arcsin x$ funksiya $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiyaning $(-1;1)$

oralikdagi boshlang'ich funksiyasi bo'ladi, chunki

$$F'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1;1)$$

2-misol. $F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$, $a \in (0;1) \cup (1;\infty)$ funksiya $f(x) = a^x$ funksiyaning

oralikdagi boshlang'ich funksiyasi bo'ladi, chunki

$$F'(x) = \left(\frac{a^x}{\ln a} \right)' = \frac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x, \quad \forall x \in (-\infty; \infty)$$

3-misol. $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3) dx$ hisoblansin.

Yechish. Bu integral, integral xossalaridan foydalanib quyidagicha integrallanadi:

$$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3) dx = 2 \int x^3 dx - 5 \int x^2 dx + 7 \int x dx - 3 \int dx$$

Dastlabki 3ta integral, integrallash jadvalidagi $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ va so'ngi

integral $\int dx = x + C$ formulalar bilan hisoblanadi.

$$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3) dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 5 \cdot \frac{x^3}{3} + 7 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x + C = \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 3x + C.$$

4-misol. $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^3} dx$ hisoblansin.

Yechish. Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^3} dx &= \int \left(\frac{\sqrt{x}}{x^3} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \left(x^{-\frac{5}{2}} + x^{-\frac{7}{3}} + x^{-3} \right) dx = \\ &= \int x^{-\frac{5}{2}} dx + \int x^{-\frac{7}{3}} dx + \int x^{-3} dx = \frac{x^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{7}{3}+1}}{-\frac{7}{3}+1} + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{3\sqrt{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt[3]{x^4}} - \frac{1}{2x^2} + C.$$

5-misol. $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} \right)^2 dx$ aniqmas integralni toping.

Yechish. Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} \right)^2 dx = \int \left(x^3 - 2 + \frac{1}{x^3} \right) dx = \int x^3 dx - 2 \int dx + \int \frac{dx}{x^3} = \frac{x^4}{4} - 2x - \frac{1}{2x^2} + C.$$

6-misol. $\int \frac{(1+x^2)}{x^3+x} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{aligned} \int \frac{(1+x)^2}{x^3+x} dx &= \int \frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{(1+x^2)+2x}{x(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{1+x^2} = \ln|x| + 2\arctg x + C \end{aligned}$$

Amaliy mashg‘ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G‘.G‘aniyev va boshqalar. muallifligidagi “Oliy matematikadan masalalar to‘plami” nomli o‘quv qo‘llanmasining 1-qismidagi 1592-1601 va 1612-1622 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G‘.G‘aniyev va boshqalar. muallifligidagi “Oliy matematikadan masalalar to‘plami” nomli o‘quv qo‘llanmasining 1-qismidagi 1602-1611 va 1623-1633 misollar.

3-AMALIY MASHG'ULOT

Aniqmas integralni o'zgaruvchini almashtirish va bo'laklab integrallash usullari bilan integrallash

Nazorat uchun savollar

1. Aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish usulini ayting.
2. Aniqmas integralda bo'laklab integrallash formulasini yozing.
3. Bo'laklab integrallash formulasini keltirib chiqaring.

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. $\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sqrt[3]{x} = t \\ x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right| \Rightarrow \int \frac{3t^2 \sin t}{t^2} dt = 3 \int \sin t dt = -3 \cos t + C = -3 \cos \sqrt[3]{x} + C$$

2-misol. $\int x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx$ aniqmas integralni hisoblang.

Yechish. Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^3 + 5} = t \\ x^3 + 5 = t^2 \\ 3x^2 dx = 2dt \\ x^2 dx = \frac{2}{3} dt \end{array} \right| \Rightarrow \int t \cdot \frac{2}{3} dt = \frac{2}{3} \int t^2 dt = \frac{2}{9} t^3 + C = \frac{2}{9} (\sqrt{x^3 + 5})^3 + C = \\ &= \frac{2}{9} (x^3 + 5) \sqrt{x^3 + 5} + C \end{aligned}$$

3-misol. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ hisoblansin.

Yechish.

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{x}{a} = t \\ x = at \\ dx = a dt \end{array} \right| \Rightarrow \int \frac{adt}{a^2 + a^2 t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \arctgt + C = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C.$$

4-misol. $\int x \cos x dx$ hisoblansin.

Yechish.

$$\int x \cos x dx \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos x dx, \quad v = \sin x \end{array} \right| \Rightarrow \quad (\text{bo'laklab integrallash formulasiga}$$

$$\text{qo'yib}) \Rightarrow x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

5-misol. $\int \frac{3x+4}{x^2+2x+3} dx$ hisoblansin.

Yechish.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{x^2+2x+3} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)+1}{x^2+2x+3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+3} + \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x^2+2x+3=t \\ (2x+2)dx=dt \\ x+1=z \\ dx=dz \end{array} \right| \Rightarrow \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dz}{2+z^2} = \frac{3}{2} \ln|t| + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{z}{\sqrt{2}} + C = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2+2x+3| + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

6-misol. $\int \arctg x dx$ hisoblansin.

Yechish.

$$\begin{aligned} \int \arctg x dx &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} u = \arctg x \quad du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| \Rightarrow x \arctg x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = \\ &= x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

7-misol. $\int e^x \sin x dx$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\int e^x \sin x dx \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u = e^x, \quad du = e^x dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right| \Rightarrow -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx. \text{ Go'yoki natija}$$

bo'lmagandek. Ammo oxirgi integralga yana bo'laklab integrallash formulasini qo'llasak:

$$\int e^x \cos x dx \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u = e^x, \quad du = e^x dx \\ dv = \cos x dx, \quad v = \sin x \end{array} \right| \Rightarrow e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \text{ hosil bo'ladi. Uni}$$

o'rniga qo'ysak: $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$ kelib chiqadi.

Bundan $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$ ekanligini topamiz.

8-misol. $\int (x^2 - 1) \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 1) \cos x dx &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 1, \quad du = 2x dx \\ dv = \cos x dx, \quad v = \sin x \end{array} \right| \Rightarrow (x^2 - 1) \sin x - 2 \int x \sin x dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ v = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right| \Rightarrow (x^2 - 1) \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C = \\ &= (x^2 - 3) \sin x + 2x \cos x + C. \end{aligned}$$

Amaliy mashg'ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1634-1640 va 1670-1681 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1641-1650 va 1682-1691 misollar.

4-AMALIY MASHG'ULOT

Eng sodda ratsional kasrlar. Nomalum koeffitsientlar usuli

Nazorat uchun savollar

1. Eng sodda ratsional kasrlarning turlarini ayting.
2. Nomalum koeffitsientlar usulini ko'rsating.

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x}$ to'g'ri ratsional kasrni eng sodda ratsional kasrlarga ajrating.

Yechish. Kasrning maxraji

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2)$$

ko'rinishda ko'paytuvchilarga ajraladi. Uning ildizlari haqiqiy va har xil bo'lganligi sababli, u quyidagi eng sodda ratsional kasrlarga yoyiladi.

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

Tenglikning o'ng tomonini umumiy maxrajga, chap va o'ng tomonidagi suratlar o'zaro tenglashtirib, ushbu

$$3x^2 - 6x + 2 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)$$

ayniyatni hosil qilamiz.

Agar $x^2; x; x^0$ o'zgaruvchilar oldida turgan koeffitsiyentlarni tenglashtirsak u holda

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} A + B + C \\ -3A - 2B - C = -6 \\ 2A = 2 \end{array} \right\}$$

chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Uning yechimi $A=1, B=1, C=1$ dan iborat bo‘ladi.

Agar x o‘zgaruvchiga qulay qiymatlar bersak, u holda

$$x=0 \text{ bo‘lganda } 2=2A, \text{ bundan } A=1$$

$$x=1 \text{ bo‘lganda } -1=-B, \text{ bundan } B=1$$

$$x=2 \text{ bo‘lganda } 2=2C, \text{ bundan } C=1$$

larni hosil qilamiz. Natijada

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

hosil bo‘ladi.

2-misol. $\frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$ to‘g‘ri ratsional kasrni eng sodda ratsional kasrlarga

yoying.

Yechish. Kasrning maxrajidagi $x^2 + 1$ ko‘phad x ning birorta ham qiymatlarida nolga aylanmaydi. Shuning uchun kasr

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{M_1x + N_1}{x^2 + 1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + 1)^2}$$

ko‘rinishda yoyiladi. Yoyilmani umumiy maxrajga keltirib, suratlar tenglashtirilgandan so‘ng

$$x^3 + x^2 + 1 = (M_1x + N_1)(x^2 + 1) + M_2x + N_2$$

yoki

$$x^3 + x^2 + 1 = M_1x^3 + N_1x^2 + (M_1 + M_2)x + (N_1 + N_2)$$

hosil bo‘ladi. x o‘zgaruvchining bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib, $M_1=1, N_1=1, M_1+M_2=0, N_1+N_2=1$ ni hosil qilamiz. Bundan $M_1=1, N_1=1, M_2=-1, N_2=0$ mos ravishda

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x+1}{x^2 + 1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$$

yoyilma kelib chiqadi.

Amaliy mashg'ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1692-1709 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1710-1719 misollar.

5-AMALIY MASHG'ULOT

Kasr-ratsional ifodalarni integrallash

Nazorat uchun savollar

1. 1-tur ratsional kasrlarni integrallash usulini ko'rsating.
2. 2-tur ratsional kasrlarni integrallash usulini ko'rsating.
3. 3-tur ratsional kasrlarni integrallash usulini ko'rsating.
4. 4-tur ratsional kasrlarni integrallash usulini ko'rsating.

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. $\int \frac{3+2x}{x^3-3x^2-x+3} dx$ ni hisoblang.

Yechish. 1) Berilgan kasrning maxrajini ko'paytuvchilarga ajratamiz.

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2(x-3) - (x-3) = (x-3)(x^2 - 1) = (x-3)(x-1)(x+1) = (x-1)(x+1)(x-3).$$

2) Berilgan kasrni sodda kasrlarga yoyamiz.

$$\frac{3-2x}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{3-2x}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}.$$

3) A, B, C sonlarni noma'lum koefitsiyentlar usulidan foydalanib, topamiz.

$$\begin{aligned} 3-2x &= A(x+1)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+1) = \\ &= (A+B+C)x^2 - (2A+4B)x - 3A+3B-C. \end{aligned}$$

x ning bir xil darajalarining oldidagi koefitsiyentlarni tenglashtirib,

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+2B=1 \\ -3A+3B-C=3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Uni yechib, $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{5}{8}$, $C = -\frac{3}{8}$ larni topamiz.

Yuqoridagi ayniyatga qulay $x=1$, $x=-1$, $x=3$ qiymatlar berib, to'g'ridan-to'g'ri bu sonlarni topsa bo'ladi. Ba'zida esa bir necha koefitsiyentlarni qulay qiymat berib, boshqalarini x o'zgaruvchining mos darajalari oldidagi koefitsiyentlarni tenglashtirib, topish maqsadga muvofiq bo'ladi.

4) Hosil qilingan kasrlarni integrallaymiz

$$\begin{aligned} \int \frac{3-2x}{x^3-3x^2-x+3} dx &= \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{5}{8}}{x+1} + \frac{-\frac{3}{8}}{x-3} \right) dx = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{5}{8} \int \frac{dx}{x+1} - \\ &\quad - \frac{3}{8} \int \frac{dx}{x-3} = -\frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{5}{8} \ln|x+1| - \frac{3}{8} \ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

2-misol. $\int \frac{x dx}{(x-1)(x^2+1)}$ integral hisoblansin.

Yechish. 1) Integrallanayotgan kasrni sodda kasrlarga yoyamiz.

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

2) Noma'lum koeffitsiyentlar usulini qo'llaymiz.

$$x = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1).$$

$x = 1$ deb $1 = 2A$, $A = \frac{1}{2}$ ni topamiz. $x = 0$ deb $0 = A - C$, $C = A$, $C = \frac{1}{2}$ ni topamiz. x^2 oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib, $A + B = 0$ ni hosil qilamiz va $B = -A$, $B = -\frac{1}{2}$ ni topamiz.

Natijada,

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}(x-1)}{x^2+1}$$

ni hosil qilamiz.

3) Integralni hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)} &= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}(x-1)}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \arctg x + C. \end{aligned}$$

3-misol. $\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2} dx$ ni integrallang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya to'rtinchi ko'rinishdagi eng sodda ratsional kasr bo'lib, uning mahrajidagi kvadrat uchhad haqiqiy ildizlarga ega emas.

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2} dx &= \int \frac{x+1}{((x-2)^2+1)^2} dx \Rightarrow \begin{cases} x-2=t \\ x=t+2 \\ dx=dt \\ a^2=1 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{t+3}{(t^2+1)^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{(t^2+1)^2} + 3 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{2(t^2+1)} + 3 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \end{aligned}$$

Rekurent formulada $k = 2$, $a^2 = 1$ desak

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} = \frac{t}{2(t^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{t}{2(t^2 + 1)} + \frac{1}{2} \arctgt + C$$

bo'lib, mos ravishda

$$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2 - 4x + 5)^2} = -\frac{1}{2(t^2 + 1)} + \frac{3t}{2(t^2 + 1)} + \frac{3}{2} \arctgt + C = \frac{3t-1}{2(t^2 + 1)} + \frac{3}{2} \arctgt + C$$

kelib chiqadi. t o'zgaruvchini x o'zgaruvchi bilan almashtirib

$$\int \frac{(x+1)}{(x^2 - 4x + 5)} dx = \frac{3x-5}{2(x^2 - 4x + 5)} + \frac{3}{2} \arctg(x-2) + C$$

ni topamiz.

4-misol. $\int \frac{x^3}{(x-1)(x^2-4)} dx$ ni topish.

Yechish. Integral ostidagi funksiya noto'g'ri ratsional kasr bo'lganligi tufayli, uning butun qismini ajratamiz.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ x^3 - x^2 - 4x + 4 & 1 \\ \hline & x^2 + 4x - 4 \end{array}$$

Mos ravishda

$$\frac{x^3}{(x-1)(x^2-4)} = 1 + \frac{x^2 + 4x - 4}{(x-1)(x^2-4)}$$

hosil bo'ladi. Paydo bo'lgan to'g'ri kasrning mahrajidagi $(x-1)(x^2-4)$ ko'phad uchta haqiqiy va har xil $a=1$, $b=2$, $c=-2$ ildizlarga ega. Shundan foydalanib uni sodda ratsional kasrlarga yoyamiz.

$$\frac{x^2 + 4x - 4}{(x-1)(x^2-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

Bundan

$$x^2 - 4x + 4 = A(x^2 - 4) + B(x+1)(x+2) + C(x-1)(x-2)$$

kelib chiqadi. x o'zgaruvchiga qulay qiymat berish yo'li bilan quyidagilarni topamiz:

$$x = 1 \text{ bo'lganda } 1 = -3A, A = -\frac{1}{3}$$

$$x = 2 \text{ bo'lganda } 8 = 4B, B = 2$$

$$x = -2 \text{ bo'lganda } -8 = 12C, C = -\frac{2}{3}$$

Natijada,

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{(x-1)(x^2 - 4)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + 2 \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x+1}$$

hosil bo'ladi.

Aniqmas integralning chiziqli xossalariidan foydalanib, qidirilayotgan integralni quyidagicha topamiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{(x-1)(x^2 - 4)} &= \int \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + 2 \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= x - \frac{1}{2} \ln|x-1| + 2 \ln|x-2| - \frac{2}{3} \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

Amaliy mashg'ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1692-1709 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1710-1719 misollar.

6-AMALIY MASHG'ULOT

Trigonometrik funksiyalarni integrallash

Nazorat uchun savollar

1. Ushbu $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash usulini bayon qiling. Bu yerda R – ratsional operator.
2. Trigonometrik funksiyalarning boshlang'ich funksiyalarini yozing.

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. $\int \frac{dx}{\sin x}$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\int \frac{dx}{\sin x} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} tg \frac{x}{2} = t \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| \Rightarrow \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C$$

2-misol. $\int \frac{\cos x dx}{4 + \sin^2 x}$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\int \frac{\cos x dx}{4 + \sin^2 x} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| \Rightarrow \int \frac{dt}{4 + t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \sin x \right) + C$$

3-misol. $\int \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx$ ni integrallang.

Yechish.

$$\int \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| \Rightarrow -\int \frac{dt}{2 + t} = -\ln(2 + t) + C = -\ln(2 + \cos x) + C$$

4-misol. $\int \frac{dx}{6 \sin x + 8 \cos x + 9}$ integral hisoblansin.

Yechish.

$$\int \frac{dx}{6 \sin x + 8 \cos x + 9} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| \Rightarrow \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 8 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 9} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{4t + 8 - 8t^2 + 9 + 9t^2} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 17} = 2 \int \frac{dt}{(t+2)^2 + 13} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} t+2 = z \\ dt = dz \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \int \frac{dz}{z^2 + (\sqrt{13})^2} = \frac{2}{\sqrt{13}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{13}} + C = \frac{2}{\sqrt{13}} \operatorname{arctg} \frac{t+2}{\sqrt{13}} + C = \frac{2}{\sqrt{13}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{\sqrt{13}} + C.$$

5-misol. $\int \sin 3x \cdot \cos 2x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Ushbu $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$ formulaga ko'ra,

$$\sin 3x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin x + \sin 5x) \text{ hosil bo'ladi. Natijada,}$$

$$\begin{aligned}\int \sin 3x \cdot \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin x + \sin 5x) dx = \frac{1}{2} \int \sin x dx + \frac{1}{2} \int \sin 5x dx = \\ &= -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + C\end{aligned}$$

topiladi.

6-misol. $\int \cos^4 3x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Ushbu $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ formulaga asosan,

$$\begin{aligned}\cos^4 3x &= (\cos^2 3x)^2 = \left(\frac{1 + \cos 6x}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2\cos 6x + \cos^2 6x}{4} = \\ &= \frac{1 + 2\cos 6x + \frac{1 + \cos 12x}{2}}{4} = \frac{1}{8} (3 + 4\cos 6x + \cos 12x)\end{aligned}$$

hosil bo'ladi. Natijada,

$$\int \cos^4 3x dx = \frac{1}{8} \int (3 + 4\cos 6x + \cos 12x) dx = \frac{1}{8} \left(3x + \frac{2}{3} \sin 6x + \frac{1}{12} \sin 12x \right) + C$$

kelib chiqadi.

7-misol. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$ integral hisoblansin.

Yechish.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^6 x} &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} ctgx = t, \quad -\frac{dx}{\sin^2 x} = dt \\ \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x = 1 + t^2 \\ \frac{1}{\sin^4 x} = (1 + t^2)^2 \end{array} \right| \Rightarrow \int \frac{1}{\sin^4 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int (1 + t^2)^2 dt = \\ &= -\int (1 + 2t^2 + t^4) dt = -\left(t + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right) + C = -\left(ctgx + \frac{2}{3} ctg^3 x + \frac{1}{5} ctg^5 x \right) + C.\end{aligned}$$

Amaliy mashg'ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1739-1752 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1753-1762 misollar.

7-AMALIY MASHG'ULOT

Aniq integral. Nyuton-Leybnits formulasini. O'zgaruvchini almashtirish va bo'laklab integrallash usullari

Nazorat uchun savollar

1. O'rta qiymat haqidagi teoremani ayting.
2. Nyuton-Leybnits formulasini yozing.
3. Aniq integralning qanday xossalari bilasiz?
4. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish formulasini yozing.
5. Aniq integralda bo'laklab integrallash formulasini yozing.

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. $\int_1^3 x^2 dx$ ni toping

Yechish. Ma'lumki, $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ ya'ni $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$. Shuning uchun

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 8\frac{2}{3}.$$

2-misol. $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

3-misol. $\int_0^1 e^x dx$ ni toping

Yechish.

$$\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

4-misol. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ ni hisoblang

Yechish.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

5-misol. $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$ ni toping

Yechish.

$$\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \\ x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=e \Rightarrow t=1 \end{array} \right| \Rightarrow \int_0^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

6-misol. $\int_0^1 (2x^3 - 1)\sqrt{x^4 - 2x + 1} dx$ ni hisoblang

Yechish.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x^3 - 1)\sqrt{x^4 - 2x + 1} dx &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x^4 - 2x + 1 = t \\ (4x^3 - 2)dx = dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_1^0 = \\ &= \frac{1}{3} (0 - 1) = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

7-misol. $\int_0^\pi (\pi - x) \sin x dx$ ni hisoblang

Yechish.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\pi - x) \sin x dx &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} u = \pi - x, \quad du = -dx \\ dv = \sin x, \quad v = -\cos x \end{array} \right| \Rightarrow \left(-(\pi - x) \cos x \right) \bigg|_0^\pi - \\ &= -\int_0^\pi \cos x dx = \left((x - \pi) \cos x \right) \bigg|_0^\pi - \sin x \bigg|_0^\pi = \pi. \end{aligned}$$

8-misol. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ ni toping

Yechish.

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{dx}{x^2}, \quad v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| \Rightarrow \left(-\frac{1}{x} \ln x \right) \bigg|_1^e + \int_1^e \frac{dx}{x^2} = \\ &= \left(-\frac{\ln x}{x} \right) \bigg|_1^e - \frac{1}{x} \bigg|_1^e = 1 - 2e^{-1}. \end{aligned}$$

Amaliy mashg'ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1769-1789 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1793-1802 misollar.

8-AMALIY MASHG'ULOT

Chegarasi cheksiz bo'lgan xosmas integrallar. Chekli oraliqda uzilishga ega bo'lgan funksiyalarning xosmas integrali

Nazorat uchun savollar

1. Chegarasi cheksiz bo'lgan xosmas integrallarga misollar keltiring..
2. Chekli oraliqda uzilishga ega bo'lgan funksiyalarning xosmas integralini qanday tushinasiz.
3. Xosmas integral qachon yaqinlashuvchi bo'ladi?.

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ integralni hisoblang

Yechish. Berilgan integral $[0; \infty)$ oraliqdagi xosmas integral bo'lib, ta'rifga ko'ra uni quyidagicha hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 0) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Bundan ko‘rinadiki, xosmas integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

yaqinlashuvchi va uning qiymati $\frac{\pi}{2}$ ga teng.

2-misol. $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ta’rifga asoslanib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin b$$

Bu limit mavjud emas, shuning uchun berilgan xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘ladi.

3-misol. Ushbu $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ ($\alpha = \text{const}$) integral α ning qanday qiymatlarida

yaqinlashuvchi, qanday qiymatlarida uzoqlashuvchi bo‘lishini aniqlang.

Yechish. Ta’rif bo’yicha

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha}$$

ni hosil qilamiz. Agar $\alpha \neq 1$ bo‘lsa, u holda

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

bo‘ladi. $\alpha > 1$ deb, shu natijadan foydalansak:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha-1}$$

kelib chiqadi. Bu holda berilgan integralning yaqinlashuvchiligiga ishonch hosil qilamiz.

$$\text{Endi } \alpha < 1 \text{ desak, } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right)$$

chekli bo'lmaydi. Natijada, qaralayotgan integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

Agar $\alpha = 1$ bo'lib qolsa, u holda

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = \infty$$

hosil bo'ladi. Demak, bu holda ham berilgan integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ xosmas integral $\alpha > 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi

bo'lib, uning qiymati $\frac{1}{\alpha-1}$ ga teng bo'ladi, $\alpha \leq 1$ bo'lganda esa, u uzoqlashuvchi bo'ladi.

4-misol. Ushbu $J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ (n -natural son yoki nol) integralni

hisoblang.

Yechish. Bo'laklab integrallash formulasi yordamida

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u = x^n \quad du = nx^{n-1} \\ dV = e^{-x} \quad V = -e^{-x} \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-x^n e^{-x} \right) \Big|_0^b + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \\ &= n J_{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

hosil bo'ladi. Bu yerda

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-x^n e^{-x} \right) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{b^n}{e^b} \right)$$

ni hisoblash uchun Lopital qoidasidan foydalaniladi. Endi

$$J_0 = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-e^{-x} \right) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^b} + 1 \right) = 1$$

ekanligini e'tiborga olsak, $J_n = n!$ kelib chiqadi.

5-misol. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiya $[0; 1-\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) kesmada

integrallanuvchi, ammo $x \rightarrow 1-0$ da chegaralanmagan. Shuning uchun

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \arcsin(1-\varepsilon) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Demak, integral yaqinlashuvchi bo'lib, uning qiymati $\frac{\pi}{2}$ ga teng.

6-misol. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ta'rifga ko'ra

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \right) = \infty$$

Demak, qarayotgan xosmas integral uzoqlashuvchi.

7-misol. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish.. Ta'rifga asoslansak,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty \end{aligned}$$

kelib chiqadi. Demak, qarayotgan xosmas integral uzoqlashuvchi.

Amaliy mashg'ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1844-1856 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1859-1873 misollar.

9-AMALIY MASHG'ULOT

Aniq integralning tekis figuralar yuzini va jism xajmini hisoblashga tadbiri

Nazorat uchun savollar

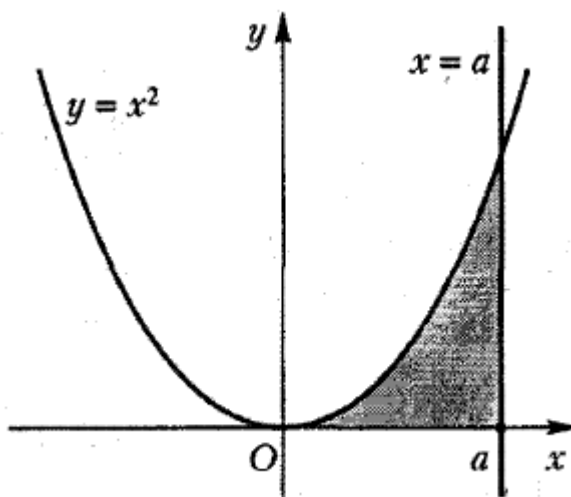
1. Aniq integral yordamida teks figuralarning yuzasi qanday hisoblanadi?
2. Aniq integral yordamida jismning xajmi qanday hisoblanadi?
3. Aniq integral yordamida egri chiziqli yoyning uzunligi qanday hisoblanadi?
4. Har hil koordinata sistemalarida berilgan tekis figuralarning yuzalari qanday topiladi? Formulalarini yozing.
5. Egri chiziq yoyining uzunligi qanday topiladi?
6. Dekart va qutb koordinata sistemalarida hamda parametrik ko'rinishda berilgan egri chiziq yoyining uzunligini hisoblash formulalarini yozing.
7. Ushbu $S = \int_c^d f(y)dy$ formuladan qanday hollarda foydalanadi?
8. Ko'ndalang kesimining yuzasi ma'lum bo'lsa jism hajmini hisoblash uchun formula yozing.

9. Aylanma jisimlarning hajmlarini hisoblash formulalarini keltirib chiqaring. Ox va Oy o'qlari atrofida aylanishdan hosil bo'lgan jismlarning hajmlari qanday topiladi?
10. Cheksiz cho'zilgan egri chiziqni biror o'q atrofida aylanishdan chekli hajmdagi jism hosil bo'lishi mumkinmi? Javobingizni $y = e^{-x}$ ($0 \leq x < \infty$) funksiyani Ox o'qi atrofida aylantirib izohlang.
11. Ox va Oy o'qlari atrofida aylanishdan hosil bo'lgan jismning sirt yuzlari qanday topiladi?
12. Ushbu $x^2 + y^2 = R^2$ va $y^2 + z^2 = R^2$ silindrlarning umumiy qismining hajmi $\frac{16}{3}\pi R^3$ ekanligini isbotlang.

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. $y = x^2$ parabola, $x = a$ chiziq va Ox o'qi bilan chegaralangan tekis figuraning yuzasini toping.

Yechish. Koordinatalar tekisligida ushbu figurani chizsak 1-rasm hosil bo'ladi. So'ngra uning yuzasini hisoblaymiz.

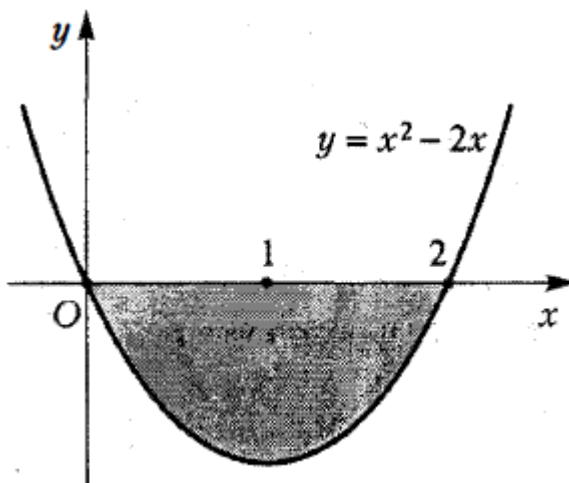


1-rasm.

$$S = \int_0^a x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{a^3}{3}.$$

2-misol. $y = x^2 - 2x$ parabola va OX o'qi bilan chegaralangan tekis figuraning yuzasini toping. (4-rasm)

Yechish. Koordinatalar tekisligida ushbu figurani chizsak 2-rasm hosil bo'ladi.



2-rasm.

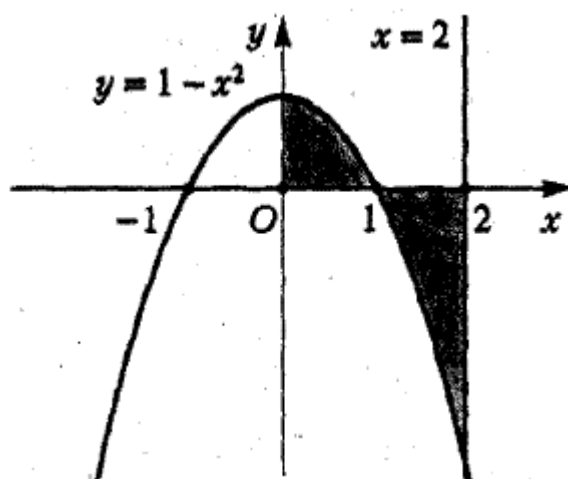
$y = x^2 - 2x$ funksiya $[0; 2]$ kesmada manfiy. Shuning uchun qidiralyotgan yuza

$$S = \left| \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \right) \Big|_0^2 \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

ga teng bo'ladi.

3-misol. $y = 1 - x^2$ parabola, $x = 2$ chiziq va koordinata o'qlari bilan chegaralangan tekis figuraning yuzasini toping.

Yechish. Koordinatalar tekisligida ushbu figurani chizsak 3-rasm hosil bo'ladi.



3-rasm.

Ushbu rasmdan ko‘rinadiki, $y = 1 - x^2$ funksiya $(0;1)$ oraliqda musbat va $(1;2)$ oraliqda manfiy. Shuning uchun qaralayotgan figuraning yuzasi

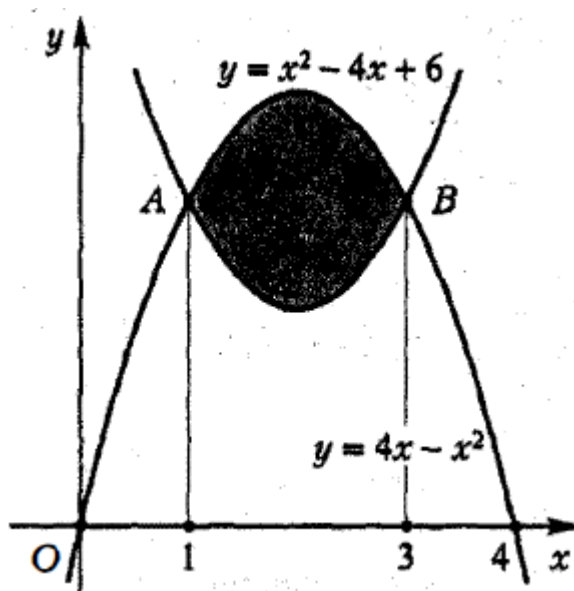
$$S = \int_0^1 (1 - x^2) dx + \left| \int_1^2 (1 - x^2) dx \right| = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left| \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 \right| = 1 - \frac{1}{3} +$$

$$+ \left| 2 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right| = 2$$

ga teng bo‘ladi.

4-misol. $y = 4x - x^2$ va $y = x^2 - 4x + 6$ parabolalar bilan chegaralangan tekis figuraning yuzasini hisoblang.

Yechish. Koordinatalar tekisligida ushbu figurani chizsak 4-rasm hosil bo‘ladi.



4-rasm.

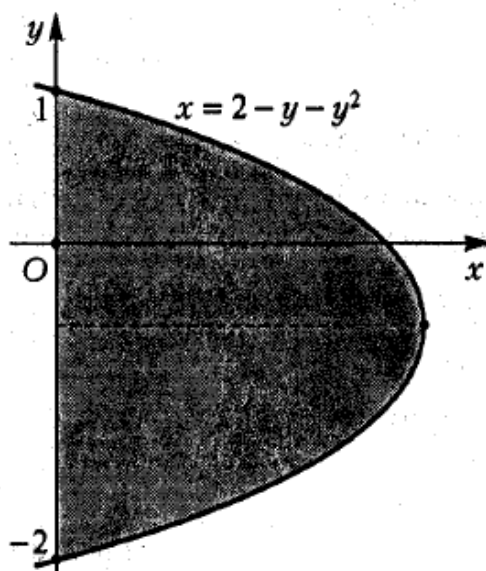
A va B nuqtalarning absissalarini topamiz. Buning uchun $4x - x^2 = x^2 - 4x + b$ tenglamani yechamiz. Bundan $2x^2 - 8x + 6 = 0$ yoki $x^2 - 4x + 3 = 0$ tenglama hosil bo'lib, uning ildizlari $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ topiladi. Ular integrallash chegaralari bo'ladi: $a = 1$ $b = 3$. Natijada,

$$S = \int_1^3 \left((4x - x^2) - (x^2 - 4x + 6) \right) dx = \int_1^3 (8x - 2x^2 + 6) dx = \left(4x^2 - \frac{2x^3}{3} - 6x \right) \Big|_1^3 = \frac{8}{3}$$

ni topamiz.

5-misol. $x = 2 - y - y^2$ parabola bilan ordinata o'qi bilan chegaralangan tekis figuraning yuzasini toping.

Yechish. Koordinatalar tekisligida ushbu figurani chizsak 5-rasm hosil bo'ladi.



5-rasm.

Integrallash chegaralari sifatida parabola va ordinata o'qining kesish nuqtalarini tanlaymiz. Buning uchun $x=0$ deb, $2-y-y^2=0$ yechamiz. Uning ildizlari $y_1=-2$ $y_2=1$ mos ravishda, integrallash chegaralari bo'ladi. Natijada,

$$S = \int_{-2}^1 (2 - y - y^2) dy = 2y \Big|_{-2}^1 - \frac{y^2}{2} \Big|_{-2}^1 - \frac{y^3}{3} \Big|_{-2}^1 = 4,5$$

kelib chiqadi.

6-misol. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$, $a > 0$, $b > 0$ tenglama bilan berilgan chiziq bilan chegaralangan tekis figuraning (ellips) yuzasini toping.

Yechish. Ellipsning koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik ekanligidan foydalanib, uning birinchi koordinata choragida yotgan qismini yuzasini topib, uni to'rtlantiramiz.

$$S = 4 \int_0^a y dy$$

Bu integralda $x = a \cos t$ $y = b \sin t$, $dx = -a \sin t$ almashtirishni bajarib,

$x=0$ da $t_1 = a = \frac{\pi}{2}$, $x=a$ da $t_2 = \beta = 0$ ekanligini e'tiborga olib,

$$S = 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = -4ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt =$$

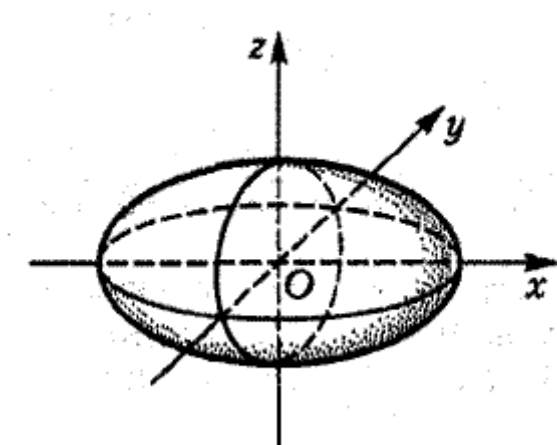
$$= 2ab \left(t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \pi ab$$

ni topamiz.

7-misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoid bilan chegaralangan jismning hajmini

toping.

Yechish. Ellipsoidni koordinatalar sistemasida chizsak 6-rasm hosil bo‘ladi.



6-rasm.

Ellipsoid absissa o‘qiga perpendikulyar qilib kesilgan yuzasida ellips hosil bo‘ladi.

Uning tenglamasi

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

yoki

$$\frac{y^2}{\left(b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right)^2} + \frac{z^2}{\left(c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right)^2} = 1$$

ko‘rinishda bo‘lib, yarim o‘qlari

$$b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ va } c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Natijada, kesim yuzasi

$$S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Mos ravishda, izlanayotgan hajm uchun

$$V = \int_{-a}^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi bc \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi abc$$

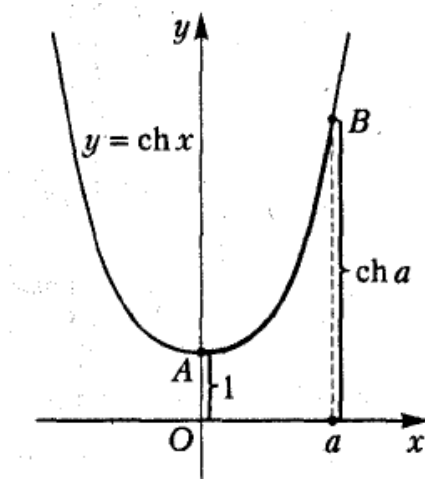
ni topamiz. Xususan, $a = b = c$ bo‘lib qolsa, ellipsoid $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ tenglama bilan ifodalanuvchi sferaga aylanadi. Shu sfera bilan chegaralanib turgan sharning hajmi $V = \frac{4}{3} \pi a^3$ ga teng bo‘ladi.

8-misol. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$ funksiya grafigining $A(0;1)$ nuqtasidan

$B(a, cha)$ nuqtasigacha bo‘lgan qismning uzunligini toping.

Yechish. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$ funksiya grafigini koordinatalar sistemasida

chizsak 7-rasm hosil bo‘ladi.



7-rasm.

$y' = (chx)' = shx$ va $ch^2 x - sh^2 x = 1$ ekanligini inobatga olsak,

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + sh^2 x} = \sqrt{ch^2 x} = chx \quad (ch > 0)$$

kelib chiqadi. Shunga ko‘ra

$$S = \int_0^a chx dx = shx \Big|_0^a = sha$$

hosil bo'ladi.

Amaliy mashg'ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1803-1822 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1823-1832 misollar.

10-AMALIY MASHG'ULOT

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar. Xususiy hosilalar. Yuqori tartibli xususiy hosilalar

Nazorat uchun savollar

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni qanday farqlaysiz?
2. Xususiy hosila deganda nimani tushinasiz?
- 3 Yuqori tartibli xususiy hosilalar qanday hisoblanadi?
4. Ikki o'zgaruvchili funksiya deb nimaga aytiladi?
5. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning aniqlanish sohasi qanday topiladi? Bu tushunchalar qanday geometrik talqinga ega?
6. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning limiti deb nimaga aytiladi?

7. Qachon ikki o'zgaruvchili funktsiyani nuqtada uzluksiz desa bo'ladi? Sohadachi?
8. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning hususiy hosilalari qanday topiladi?
9. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning to'la differensial deb nimaga aytiladi?
10. Qanday qilib to'la differensial yordamida funktsiyaning qiymatini taqribiy hisoblash mumkin?
11. Yuqori tartibli hususiy hosilalar qanday topiladi?
12. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning aralash hususiy hosilalarining tengligi haqidagi teoremani isbotlang.
13. Ushbu $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ funktsiya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

14. Ushbu $y = f(x+at) + \phi(x-at)$ ikki marta differensiallanuvchi ixtiyoriy funktsiya

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

tenglamani qanoatlantirishini ko'rsating. Bu yerda a o'zgarmas son.

15. Ushbu

$$z = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{agar } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{agar } x = y = 0 \end{cases}$$

funktsiya har bir o'zgaruvchisi bo'yicha alohida-alohida uzluksiz ekanligini, ammo $(0; 0)$ nuqtada esa uzilishga ega ekanligini ko'rsating. Bu funktsiya $(0; 0)$ nuqtada hususiy hosilalarga ega bo'la oladimi? Bo'lsa, ular nimaga teng?

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ funktsiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Qaralayotgan funktsiya ma'noga ega bo'lishi uchun ushbu

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$

shartning bajarilishi talab etiladi. Bundan $x^2 + y^2 \leq 2^2$ o‘rinli bo‘ladi. Bu esa qaralayotgan funksiyaning aniqlanish sohasi markazi koordinata boshida, radiusi 2 birlikka teng bo‘lgan doiradan iborat ekanligini bildiradi.

2-misol. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x+y-1)}{x+y-1}$ ni hisoblang.

Yechish. Agar $\alpha(x; y) = x + y - 1$ desak, u holda $x \rightarrow 1, y \rightarrow 0$ bo‘lganda $\alpha(x; y) \rightarrow 0$ bo‘ladi. Shunga ko‘ra,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x+y-1)}{x+y-1} = \lim_{\alpha(x; y) \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x; y)}{\alpha(x; y)} = 1$$

o‘rinli bo‘ladi.

3-misol. Quyidagi funksiylarning xususiy hosilalarini toping:

$$z = x^2 \sin^2 y,$$

$$u = e^{x^2+y^2+z^2},$$

$$w = \arctg(xy).$$

Yechish.

$$z'_x = (x^2 \cdot \sin^2 y)'_x = 2x \sin^2 y,$$

$$z'_y = (x^2 \cdot \sin^2 y)'_y = x^2 2 \sin y \cdot \cos y = x^2 \sin 2y,$$

$$u'_x = (e^{x^2+y^2+z^2})'_x = 2xe^{x^2+y^2+z^2},$$

$$u'_y = (e^{x^2+y^2+z^2})'_y = 2ye^{x^2+y^2+z^2},$$

$$u'_z = (e^{x^2+y^2+z^2})'_z = 2ze^{x^2+y^2+z^2},$$

$$w'_x = (\arctg(xy))'_x = \frac{y}{1+x^2y^2},$$

$$w'_y = (\arctg(xy))'_y = \frac{x}{1+x^2y^2}.$$

4-misol. $z = e^{-2x} \sqrt{x-y}$ funksiyaning hususiy hosilalarini toping.

Yechish. Ushbu ikki o‘zgaruvchili funksiyaning hususiy hosilalari quyidagicha topiladi:

$$z'_x = e^{-2x} \cdot (-2) \cdot \sqrt{x-y} + e^{-2x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-y}} = e^{-2x} \left(\frac{-4(x-y)+1}{2\sqrt{x-y}} \right) = \frac{e^{-2x}(-4x+4y+1)}{2\sqrt{x-y}},$$

$$z'_y = e^{-2x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \cdot (-1) = \frac{-e^{-2x}}{2\sqrt{x-y}}.$$

5-misol. $z = x^2y + \frac{x}{y}$ funksiyaning 2-tartibli hususiy hosilalarini toping.

Yechish. Ushbu ikki o'zgaruvchili funksiyaning 2-tartibli hususiy hosilalari quyidagicha topiladi:

$$z'_x = \left(x^2y + \frac{x}{y} \right)'_x = 2xy + \frac{1}{y},$$

$$z'_y = \left(x^2y + \frac{x}{y} \right)'_y = x^2 - \frac{x}{y^2},$$

$$z''_{xx} = \left(x^2y + \frac{x}{y} \right)''_{xx} = \left(2xy + \frac{1}{y} \right)'_x = 2y,$$

$$z''_{yy} = \left(x^2y + \frac{x}{y} \right)''_{yy} = \left(x^2 - \frac{x}{y^2} \right)'_y = \frac{2x}{y^3},$$

$$z''_{xy} = \left(x^2y + \frac{x}{y} \right)''_{xy} = \left(2xy + \frac{1}{y} \right)'_y = 2x - \frac{1}{y^2},$$

$$z''_{yx} = \left(x^2y + \frac{x}{y} \right)''_{yx} = \left(x^2 - \frac{x}{y^2} \right)'_x = 2x - \frac{1}{y^2}.$$

Guvohi bo'lganingizdek har doim $z''_{xy} = z''_{yx}$ tenglik bajariladi.

Amaliy mashg'ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1894-1915 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1916-1936 misollar.

11-AMALIY MASHG'ULOT

Ikki o'zgaruvchili funksiyalar ekstremumi. Ekstremum mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari

Nazorat uchun savollar

1. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumi qanday topiladi?
2. Ikki o'zgaruvchili funksiyada ekstremum mavjud bo'lishining zaruriy shartini ayting.
3. Ikki o'zgaruvchili funksiyada ekstremum mavjud bo'lishining etarli shartini ayting.

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. Ushbu

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 1$$

funksiya ekstrimumga tekshirilsin.

Yechish. 1) Funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$z'_x = (x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 1)'_x = 2x + y - 3,$$

$$z'_y = (x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 1)'_y = x + 2y - 3.$$

2) Topilgan xususiy hosilalarni nolga tenglab, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Uni yechib, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ ni topamiz. Bundan ko‘rinadiki, (1;1) nuqtada funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalari nolga aylanadi.

3) Funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini topamiz:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (2x + y - 3)'_x = 2,$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (x + 2y - 3)'_y = 2,$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (2x + y - 3)'_y = 1.$$

Bulardan ko‘rinadiki, $z''_{xx}(1;1) = 2$, $z''_{yy}(1;1) = 2$, $z''_{xy}(1;1) = 1$ bo‘ladi.

4) Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremumga erishish shartidan foydalanib, qaralayotgan funksiyaning ekstremumga tekshiramiz.

$$\frac{\partial^2 z(1;1)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z(1;1)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z(1;1)}{\partial x \partial y} \right)^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$$

$$\frac{\partial^2 z(1;1)}{\partial x^2} = 2 > 0 \text{ yoki } \frac{\partial^2 z(1;1)}{\partial y^2} = 2 > 0.$$

Bulardan ko‘rinadiki, qaralayotgan funksiya qaralayotgan (1;1) nuqtada minimumga erishadi. $z_{\min} = z(1;1) = 1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 1 = -2$.

Amaliy mashg‘ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G‘.G‘aniyev va boshqalar. muallifligidagi “Oliy matematikadan masalalar to‘plami” nomli o‘quv qo‘llanmasining 1-qismidagi 1937-1941 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2007 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 1-qismidagi 1942-1946 misollar.

12-AMALIY MASHG'ULOT

Birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar

Nazorat uchun savollar

1. Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Differensial tenglamaning tartibi deb nimaga aytiladi?
3. Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy va hususiy yechimlari deb nimaga aytiladi?
4. Umumiy va hususiy yechimlar qanday geometrik talqinga ega?
5. Birinchi tartibli differensial tenglamaning yechimini mavjud va yagonaligi haqidagi teoremani aytib bering.
6. Nimaga asosan birinchi tartibli differensial tenglamalar o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar deb yuritiladi?

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning ikkala tomonini $\frac{dx}{y}$ ga ko'paytiramiz:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Bundan $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y},$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|,$$

$y = Cx$ umumiy yechimni hosil qilamiz.

2-misol. $xy' + y = y^2$ tenglamaning $y(1) = 0,5$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Yechish. Bu tenglamani

$$xdy + (y - y^2)dx = 0$$

ko'rinishda yozib, o'zgaruvchilarni ajratib (tenglamani $x(y - y^2)$ bo'lamiz),

$$\frac{dy}{y - y^2} + \frac{dx}{x} = 0 \text{ tenglamaga kelimiz.}$$

Oxirgi tenglamani integrallasak:

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} + \int \frac{dx}{x} = C_1,$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{1-y} + \int \frac{dx}{x} = C_1,$$

$$\ln|y| - \ln|1-y| + \ln|x| = \ln|C|.$$

Oxirgi tenglikda C_1 ni $\ln|C|$ bilan almashtiramiz, undan

$$\frac{xy}{1-y} = C$$

umumiy yechimni topamiz.

Boshlang'ich shartdan foydalanib, C ni aniqlaymiz:

$$C = \frac{0,5}{0,5} = 1.$$

Demak, qidirilayotgan yechim $xy = 1 - y$ ni hosil qilamiz.

3-misol. $y' = \cos(y - x)$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamada o'zgaruvchilar ajralmaydi, lekin $z = y - x$ almashtirishni kiritsak, u holda $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1$ bo'ladi va berilgan tenglama

$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx \text{ ko'rinishga keladi.}$$

Oxirgi tenglamani integrallasak,

$$x - \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = C, \text{ yoki } x - \operatorname{ctg} \frac{y-x}{2} = C$$

umumiy yechimni topamiz.

4-misol. $y' - y = 2x - 3$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani

$$dy = (y + 2x - 3)dx$$

ko'rinishda yozib,

$$z = y + 2x - 3$$

almashtirishni kiritib, o'zgaruvchilari ajraladigan

$$dz = (z + 2)dx$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamani $z + 2$ ga bo'lib,

$$\frac{dz}{z + 2} = dx$$

tenglamani hosil qilamiz. Uni integrallab,

$$\ln|z + 2| = x + \ln C$$

yoki

$$y = 1 - 2x + Ce^x$$

umumiy yechimini topamiz.

5-misol. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani quyidagi ko'rinishga keltirib

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Uni integrallaymiz

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C$$

hosil qilamiz.

Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \frac{C_1}{x}, \text{ bunda } C_1 = e^C.$$

6-misol. $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$. tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani quyidagi ko‘rinishga keltirib

$$\frac{(1+x)}{x}dx + \frac{(1-y)}{y}dy = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = 0.$$

$$-\int \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx = \int \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy$$

integrallasak

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = C \Rightarrow$$

$$\ln|xy| + x - y = C.$$

Bu munosabat berilgan tenglamani umumiy yechimi bo‘ladi.

7-misol. Ushbu $x + yy' = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0, \quad xdx + ydy = 0$$

Bu tenglamaning har ikki tomonini integrallab topamiz:

$$\int xdx + \int ydy = \int 0dx, \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Natijada

$$x^2 + y^2 = 2C = C'$$

bo‘lib, u berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

8-misol. Ushbu $(1 + e^x)yy' = e^x$ tenglama yechilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$(1 + e^x) y \frac{dy}{dx} = e^x.$$

Bu tenglikdan

$$(1 + e^x) y dy = e^x dx$$

va uning har ikki tomonini $1 + e^x$ ga bo'lish natijasida

$$y dy = \frac{e^x}{1 + e^x} dx$$

bo'lishi kelib chiqadi. Keyingi tenglikning har ikki tomonini integrallaymiz:

$$\int y dy = \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \int \frac{d(1 + e^x)}{1 + e^x} + C.$$

Natijada

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C$$

bo'lib, bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

9-misol. Ushbu $y' = xy + x + y + 1$ differensial tenglamaning $x = -1$, $y = 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan yechimi topilsin.

Yechish. Avvalo berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz, berilgan tenglamaning o'ng tomonidagi ifoda uchun

$$xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1)$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda tenglama ushbu

$$\frac{dy}{dx} = (x + 1)(y + 1),$$

ya'ni

$$\frac{dy}{y + 1} = (x + 1) dx$$

ko'rinishiga keladi. Uni integrallab topamiz:

$$\int \frac{dy}{y + 1} = \int (x + 1) dx,$$

$$\ln|y+1| = \frac{(x+1)^2}{2} + \ln C$$

(bu holda o'zgarmasni $\ln C$ deb olish qulay bo'ladi).

Shunday qilib berilgan differensial tenglamaning yechimi

$$\ln|y+1| = \frac{(x+1)^2}{2} + \ln C,$$

ya'ni

$$y = Ce^{\frac{(x+1)^2}{2}} - 1$$

bo'ladi. Bu yechim boshlang'ich shartda ($x = -1, y = 0$) da

$$0 = Ce^0 - 1$$

bo'lib, undan $C = 1$ bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, berilgan differensial tenglamaning boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi

$$y = e^{\frac{(x+1)^2}{2}} - 1$$

bo'ladi.

10-misol. $52xdx - 5ydy = 5x^2ydy - 13xy^2dx$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir. O'zgaruvchilarini ajratish uchun quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$$52xdx + 13xy^2dx - 5ydy - 5x^2ydy = 0,$$

$$13x(4 + y^2)dx - 5y(1 + x^2)dy = 0,$$

$$\frac{13xdx}{1+x^2} - \frac{5ydy}{4+y^2} = 0.$$

Hosil bo'lgan ifodani bevosita integrallab:

$$\int \frac{13xdx}{1+x^2} - \int \frac{5ydy}{4+y^2} = C$$

yoki

$$\frac{13}{2} \ln(1+x^2) - \frac{5}{2} \ln(4+y^2) = \frac{1}{2} \ln C_1$$

yoki

$$\ln \frac{(1+x^2)^{13}}{(4+y^2)^5} = \ln C_1$$

yoki

$$\frac{(1+x^2)^{13}}{(4+y^2)^5} = C_1$$

ko‘rinishdagi umumiy integralni topamiz.

Amaliy mashg‘ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2008 yilda nashr etilgan I.G‘.G‘aniyev va boshqalar. muallifligidagi “Oliy matematikadan masalalar to‘plami” nomli o‘quv qo‘llanmasining 2-qismidagi 1-14 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2008 yilda nashr etilgan I.G‘.G‘aniyev va boshqalar. muallifligidagi “Oliy matematikadan masalalar to‘plami” nomli o‘quv qo‘llanmasining 2-qismidagi 15-25 misollar.

13-AMALIY MASHG‘ULOT

Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar.

Nazorat uchun savollar

1. Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Differensial tenglamaning tartibi deb nimaga aytiladi?

3. Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy va hususiy yechimlari deb nimaga aytiladi?
4. Umumiy va hususiy yechimlar qanday geometrik talqinga ega?
5. Birinchi tartibli differensial tenglamaning yechimini mavjud va yagonaligi haqidagi teoremani aytib bering.
6. Nimaga asosan birinchi tartibli differensial tenglamalar bir jinsli differensial tenglamalar deb yuritiladi?

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamani

$$y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right) \quad (x > 0, y > 0)$$

ko'rinishda yozamiz.

$$f(tx, ty) = \frac{ty}{tx} \left(1 + \ln \frac{ty}{tx} \right) = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right) = f(x, y)$$

bo'lgani uchun, $f(x, y)$ – nol o'lchovli funksiya va berilgan tenglama bir jinsli tenglamadir.

Yechimini

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

yoki

$$y = u(x) \cdot x$$

ko'rinishda qidiramiz. Bundan

$$y' = u'x + u$$

kelib chiqadi. Hosil qilgan ifodalarni tenglamaga qo'ysak:

$$u'x + u = u(1 + \ln u),$$

undan

$$xdu - u \ln u dx = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamada o'zgaruvchilarni ajratsak (tenglamani $xu \ln u$ ga bo'lamiz) va hosil bo'lgan tenglamani integrallasak:

$$\int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|\ln u| = \ln Cx$$

undan

$$u = e^{Cx}$$

yoki (u dan y ga qaytib)

$$y = xe^{Cx}$$

umumiy yechimni topamiz.

2-misol. $xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$ tenglamaning $y(1) = 1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama bir jinsli tenglama bo'ladi, chunki

$$M(x, y) = xy \text{ va } N(x, y) = y^2 - x^2$$

funksiyalar ikki o'lchovli bir jinsli funksiyalardir:

$$M(tx, ty) = t^2 xy = t^2 M(x, y),$$

$$N(tx, ty) = t^2 (y^2 - x^2) = t^2 N(x, y).$$

Tenglamani yechish uchun

$$u = yx$$

almashtirishni kiritamiz:

$$u^3 dx + x(u^2 - 1)du = 0.$$

Bu tenglamada o'zgaruvchilar ajratilgandan keyin integrallasak:

$$\int \frac{u^2 - 1}{u^3} du + \int \frac{dx}{x} = \ln C,$$

$$\ln|ux| + \frac{1}{2u^2} = \ln C,$$

undan

$$x^2 + 2y^2 \ln \frac{|y|}{C} = 0$$

umumiy yechimini topamiz. Berilgan boshlang'ich shartdan foydalanib, C ni topamiz:

$$C = e^{\frac{1}{2}}.$$

Qidirilayotgan yechim:

$$x^2 + y^2 \ln(y^2 - 1) = 0.$$

3-misol. $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$ differensial tenglamaning umumiy integralini toping.

Yechish. Berilgan tenglamada $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ va 1-misoldagi kabi almashtirishni

kiritish mumkin emas. Ammo x va y ning koeffitsientlari proporsional bo'lgani uchun $z = 2x + y$ almashtirish qilamiz. U holda

$$dy = dz - 2dx$$

va berilgan tenglamadan

$$5(z - 1)dx - (2z - 3)dz = 0$$

tenglama kelib chiqadi. Bu tenglamani yechib, y o'zgaruvchiga qaytsak,

$$2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$$

umumiy integralni topamiz.

4-misol. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamada $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ bo'lgani uchun $x = x_1 + 3$,

$y = y_1 - 2$ almashtirishni kiritamiz. U holda biz

$$\frac{dy_1}{dx_1} = 2 \frac{y_1^2}{(x_1 + y_1)^2}$$

bir jinsli tenglamani hosil qilamiz. Uning yechimini topish uchun, $y_1 = ux_1$ almashtirish kiritib, o'zgaruvchilari ajraladigan

$$x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{2u^2}{(1+u)^2} - u$$

tenglamaga kelamiz. Bu tenglamani integrallasak:

$$\int \frac{dx_1}{x_1} + \int \frac{u^2 + 2u + 1}{u(1+u^2)} du = C,$$

$$\ln|x_1 u| + 2 \operatorname{arctg} u = C$$

yoki (eski o'zgaruvchilarga qaytsak)

$$y + 2 = C e^{-2 \operatorname{arctg} \frac{y+2}{x-3}}$$

umumiy integralni topamiz.

5-misol. $y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamada

$$\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \end{cases},$$

desak tenglamani yechib bo'lmaydi, chunki $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Bu tenglamani $2x + y = z$

deb o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiramiz:

$$y' = z' - 2$$

$$\text{va } z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5}$$

$$\text{yoki } z' = \frac{5z+9}{2z+5}$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamani yechimi

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25} \ln|5z+9| = x + C,$$

$$2x + y = z$$

bo'lgani uchun

$$\frac{2}{5}(2x + y) + \frac{7}{25} \ln|10x + 2y + 9| = x + C$$

yoki $10y - 5x + 7 \ln|10x + 2y + 9| = C$.

6-misol. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ tenglamaning yechimini toping.

Yechish. Tenglamaning o'ng tomonida nolinchi darajali bir jinsli funksiya,

$$\frac{y}{x} = u \text{ desak } y = ux$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \Rightarrow u + x \frac{du}{dx} = \frac{u}{1 - u^2}$$

o'zgaruvchilarni ajratib

$$\frac{(1 - u^2)}{u^3} du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u} \right) du = \frac{dx}{x}$$

integrallasak

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + \ln C$$

$$\text{yoki } -\frac{1}{2u^2} = \ln|uxC|,$$

u ni o'rniga $\frac{y}{x}$ qo'ysak

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|Cy|$$

bundan $x = y\sqrt{-2\ln|Cy|}$.

7-misol. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$ tenglamaning yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamada

$$\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \end{cases},$$

almashtirish bajarsak,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + h + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}$$

hosil qilamiz. U holda $\begin{cases} h+k-3=0 \\ h-k-1=0 \end{cases}$ dan $h=2, k=1$. Natijada $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$

bunda $\frac{dy_1}{dx_1} = u$ desak,

$$y_1 = ux_1, \Rightarrow \frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1 \frac{du}{dx_1} \Rightarrow u + x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u}$$

$$\Rightarrow x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u} - u \Rightarrow x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u} \Rightarrow \frac{(1-u)du}{1+u^2} = \frac{dx_1}{x}$$

integrallasak

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln|x_1| + \ln|C|,$$

$$\operatorname{arctg} u = \ln \left| x_1 C \sqrt{1+u^2} \right|$$

yoki $x_1 C \sqrt{1+u^2} = e^{\operatorname{arctg} u}$, u o'rniga $\frac{y_1}{x_1}$ qo'ysak,

$$C \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1}}$$

va nihoyat x, y ga o'tsak,

$$C \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y-1}{x-2}}$$

hosil bo'ladi.

Amaliy mashg'ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2008 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 2-qismidagi 28-39 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2008 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 2-qismidagi 40-52 misollar.

14-AMALIY MASHG'ULOT

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Bernulli differensial tenglamasi

Nazorat uchun savollar

1. Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Differensial tenglamaning tartibi deb nimaga aytiladi?
3. Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy va hususiy yechimlari deb nimaga aytiladi?
4. Umumiy va hususiy yechimlar qanday geometrik talqinga ega?
5. Birinchi tartibli differensial tenglamaning yechimini mavjud va yagonaligi haqidagi teoremani aytib bering.
6. Nimaga asosan birinchi tartibli differensial tenglamalar chiziqli differensial tenglamalar deb yuritiladi?
7. Nimaga asosan birinchi tartibli differensial tenglamalar Bernulli differensial tenglamalar deb yuritiladi?

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Yechimni $y = u(x) \cdot v(x)$ ko'rinishda izlaymiz. U holda

$$u'v + uv' - uv \operatorname{ctg} x = \sin x ,$$

$$u'v + u(v' - v \operatorname{ctg} x) = \sin x$$

larni hosil qilamiz.

$$v' - v \operatorname{ctg} x = 0$$

deb olamiz. Bu tenglamada o'zgaruvchilarni ajratsak:

$$\frac{dv}{dx} = v \operatorname{ctg} x, \quad v(x) = \sin x$$

ni topamiz. Buni tenglamaga qo'yib,

$$\sin x \frac{du}{dx} = \sin x; \quad du = dx; \quad u = x + C$$

ni hosil qilamiz. Natijada

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = (x + C) \cdot \sin x$$

umumiy yechimni topamiz.

2-misol. $(x + y^2)dy = ydx$ tenglamaning $y(1) = 1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Yechish. Bu tenglama y uchun chiziqli tenglama bo'lmaydi, lekin x uchun bu tenglama – chiziqli tenglamadir. Shuning uchun biz x ni y ning funksiyasi deb hisoblaymiz. Tenglamani quyidagi

$$x + y^2 = y \frac{dx}{dy}$$

ko'rinishga keltiramiz. U holda $x = y \frac{dx}{dy}$ bir jinsli differensial tenglama $x = Cy$

umumiy yechimiga ega. O'zgarmasni variatsiyalash usulini qo'llab,

$$C(y)y + y^2 = y(C'(y)y + C(y)),$$

$$C'(y) = 1, \quad C(y) = y + C_1$$

ni hosil qilamiz. Demak bu tenglamaning umumiy yechimi

$$x = y^2 + C_1 y$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda C_1 – qandaydir o'zgarmas son.

Endi boshlang'ich shartni e'tiborga olsak, C_1 ni aniqlaymiz:

$$1 = 1 + C_1 \cdot 1, C_1 = 0.$$

Natijada $x = y^2$ qidirilayotgan yechim bo'ladi.

3-misol. $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$ tenglamaning yechimini toping..

Yechish.

$$\begin{aligned} y &= uv & \frac{dy}{dx} &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}; \\ \Rightarrow & u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3 \\ \Rightarrow & u \left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v \right) + v \frac{du}{dx} = (x+1)^3 \end{aligned} \quad (1),$$

V ni topish uchun

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1} \Rightarrow \ln|v| = 2\ln|x+1| \Rightarrow v = (x+1)^2$$

V ni (1) qo'ysak

$$(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = (x+1) \Rightarrow u = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Demak

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

4-misol. $xy' - 4u = x^2\sqrt{y}$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamani x ga bo'lgandan keyin $y' - 4\frac{y}{x} = x\sqrt{y}$ tenglamani

hosil qilamiz. Yechimni $y = u(x) \cdot v(x)$ ko'rinishda izlaymiz. U holda

$$u'v + u \left(v' - \frac{4}{x}v \right) = x\sqrt{uv}$$

tenglamaga kelib,

$$v' - \frac{4}{x}v = 0,$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{4dx}{x},$$

$$\ln|v| = 4\ln|x|,$$

$$v = x^4;$$

$$2u^{\frac{1}{2}} = \ln|x| + C,$$

$$u = \frac{(\ln|x| + C)^2}{4};$$

$$x^4 u' = x^3 \sqrt{u},$$

$$u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{dx}{x},$$

$$y = \frac{x^4 (\ln|x| + C)^2}{4} \text{ umumiy yechimi bo'ladi.}$$

5-misol. $x^2 y^2 y' + xy^3 = 1$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Yechish. Bu tenglamaning chap va o'ng qismlarni $x^2 y^2$ ga bo'lgandan keyin

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2 y^2}$$

Bernulli tenglamasiga ega bo'lamiz. Bu tenglamani Lagranj usuli yordamida yechamiz.

Oldin bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y' + \frac{y}{x} = 0, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|, \quad y = \frac{C}{x}.$$

Endi $C = C(x)$ deb olib:

$$y = \frac{C(x)}{x}$$

y funksiyani va uning y' hosilasini bir jinsli bo'lmagan tenglamaga qo'yamiz:

$$\frac{1}{x} C' - \frac{C}{x^2} + \frac{C}{x^2} = \frac{x^2}{x^2 C^2}, \quad C^2 dC = x dx, \quad \frac{C^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$C(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{2} x^2 + 3C_1}.$$

bu ifodada $3C_1 = C$ deb olib,

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}}$$

umumiy yechimini topamiz.

6-misol. $(x^2 + 2y + y^2)y' + 2x = 0$ tenglamaning umumiy integrali topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamada y ni argument va x ni funksiya deb olib,

$$2x \frac{dx}{dy} + x^2 = -2y - y^2, \quad x' + \frac{x}{2} = -\frac{2y + y^2}{2x}$$

tenglamalarga ega bo‘lamiz. Oxirgi tenglama Bernulli tenglamasidir. Unda

$$\alpha = -1, \quad P(y) = \frac{1}{2}, \quad Q(y) = \frac{-2y - y^2}{2}.$$

Shuning uchun

$$z = x^{1-\alpha} = x^2;$$

$$z' = 2xx'$$

bo‘ladi. Tenglamani avval x^{-1} ga bo‘lib, so‘ngra bu ifodalardan foydalansak, yuqorida ko‘rilgan

$$z' + z = -2y - y^2$$

chiziqli differensial tenglamani hosil qilamiz. Uning yechimi

$$z(y) = Ce^{-y} - y^2$$

ekanligi ma’lum. z o‘zgaruvchidan x o‘zgaruvchiga qaytsak,

$$x^2 = Ce^{-y} - y^2$$

yoki

$$x^2 + y^2 = Ce^{-y}$$

umumiy integralni topamiz.

Amaliy mashg‘ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2008 yilda nashr etilgan I.G‘.G‘aniyev va boshqalar. muallifligidagi “Oliy matematikadan masalalar to‘plami” nomli o‘quv qo‘llanmasining 2-qismidagi 60-71 va 86-98 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2008 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 2-qismidagi 72-84 va 99-110 misollar.

15-AMALIY MASHG'ULOT

Birinchi tartibli to'la differensial tenglamalar

Nazorat uchun savollar

1. Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Differensial tenglamaning tartibi deb nimaga aytiladi?
3. Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy va hususiy yechimlari deb nimaga aytiladi?
4. Umumiy va hususiy yechimlar qanday geometrik talqinga ega?
5. Birinchi tartibli differensial tenglamaning yechimini mavjud va yagonaligi haqidagi teoremani aytib bering.
6. Nimaga asosan birinchi tartibli differensial tenglamalar to'la differensial tenglamalar deb yuritiladi?

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. $\left(x - e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y} - 1\right)dy = 0$ tenglamaning umumiy integrali

topilsin.

Yechish. Bu tenglamada

$$P(x, y) = x - e^{\frac{x}{y}};$$

$$Q(x, y) = e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}.$$

Demak, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ shart bajarilgan. Endi $u(x, y)$ funksiyani topish uchun quyidagicha davom etamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \text{ yoki } \frac{\partial u}{\partial x} = x - e^{\frac{x}{y}},$$

Bundan

$$u(x, y) = \frac{1}{2} x^2 - y e^{\frac{x}{y}} + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \text{ yoki } \frac{\partial u}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y} - 1 \right),$$

Bundan

$$e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y} - 1 \right) + \varphi'(y) = e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y} - 1 \right)$$

$$\text{yoki } \varphi'(y) = 0 \text{ yoki } \varphi(y) = C_1.$$

Demak, $u(x, y) = \frac{1}{2} x^2 - y e^{\frac{x}{y}} + C_1$ ekan.

U holda, qaralayotgan tenglamaning umumiy integrali $\frac{x^2}{2} - y e^{\frac{x}{y}} = C$ bo'ladi.

2-misol. $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$ tenglamani yeching.

Yechish.

$$M(x, y) = \frac{2x}{y^3}, N(x, y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}, \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}$$

$$y \neq 0$$

demak hususiy hosilalarning tengligi sharti bajarildi.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3},$$

$$u = \int \frac{2x}{y^3} dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

bundan

$$\frac{-3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

Demak

$$\varphi' = \frac{1}{y^2} \Rightarrow \varphi = -\frac{1}{y} + C$$

bundan

$$u = \frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{y} + C$$

Shunday qilib yechim $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$.

3-misol. $(x^2 + y)dx - xdy = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bu tenglama uchun

$$P(x, y) = x^2 + y, \quad Q(x, y) = -x;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -1.$$

Agar P va Q larni

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{Q(x,y)} \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right) dx}$$

ifodaga qo'ysak,

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2dx}{x}; \quad \ln|\mu| = -2\ln|x|; \quad \mu = \frac{1}{x^2}$$

hosil qilamiz. Tenglamaning chap tomonini integrallovchi ko‘paytuvchiga ko‘paytiramiz:

$$\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0.$$

Bu yerda

$$\frac{\partial\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{x}\right)}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$$

bo‘lgani uchun, oxirgi tenglama – to‘la differensialli tenglamadir.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + \frac{y}{x^2},$$

bundan

$$F(x, y) = \int \left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx = x - \frac{y}{x} + \varphi(y)$$

kelib chiqadi.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{x},$$

bundan

$$-\frac{1}{x} + \varphi'(y) = -\frac{1}{x} \text{ yoki } \varphi(y) = C_1.$$

Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$x - \frac{y}{x} = C$$

bo‘ladi.

4-misol. $(xy^2 + y)dx - xdy = 0$ differensial tenglamaning $y(1) = 1$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Yechish. Bu tenglamada $P(x, y) = xy^2 + y$, $Q(x, y) = -x$ bo‘lib,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy + 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

bo'ladi. $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, shu sababli berilgan tenglama to'la differensialli tenglama

bo'lmaydi. Yuqorida keltirilgan b) shartga ko'ra

$$\frac{1}{P(x,y)} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) = \frac{1}{xy^2 + y} (-1 - 2xy - 1) = -\frac{2(xy+1)}{y(xy+1)} = -\frac{2}{y}$$

bo'lgani uchun berilgan tenglamani integrallovchi ko'paytuvchisi mavjud bo'lib,

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2dy}{y}, \quad \ln|\mu| = -2\ln|y|, \quad \mu = \frac{1}{y^2}$$

kelib chiqadi. Qaralayotgan tenglamaning chap tomonini $\mu = \frac{1}{y^2}$ ifodaga

ko'paytirib, ushbu: $\left(x + \frac{1}{y}\right)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$ to'la differensialli differensial

tenglamaga kelimiz (bu tenglama uchun $\frac{\partial\left(x + \frac{1}{y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(-\frac{x}{y^2}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$ kifoya).

Hosil bo'lgan tenglamaning umumiy yechimi $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} = C$ bo'ladi.

Boshlang'ich shartdan foydalansak, $C = \frac{3}{2}$ ni topamiz va izlanayotgan

xususiy yechim $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ yoki $x^2y + 2x = 3y$ bo'ladi.

5-Misol. Ushbu $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish. Bu tenglamada

$$P(x,y) = x + y^2, \quad Q(x,y) = -2xy$$

bo'lib,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -2y$$

bo‘ladi. $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$, shu sababli berilgan tenglama to‘liq differensialli tenglama bo‘lmaydi. Yuqorida keltirilgan shartga ko‘ra

$$\frac{1}{Q(x, y)} \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{1}{-2xy} (2y - (-2y)) = -\frac{2}{x}$$

bo‘lgani uchun berilgan tenglamani integrallovchi ko‘paytuvchisi mavjud bo‘lib, u

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{-2xy} (2y + 2y) dx} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}$$

bo‘ladi. Berilgan tenglamaning har ikki tomonini $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$ ifodaga ko‘paytirib ushbu

$$\frac{x + y^2}{x^2} dx - \frac{2xy}{x^2} dy = 0$$

to‘liq differensial tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaning chap tomonidagi ifoda uchun

$$\frac{x + y^2}{x^2} dx - \frac{2xy}{x^2} dy = \frac{1}{x} dx - \frac{2xy dy - y^2 dx}{x^2} = d(\ln|x|) - d\left(\frac{y^2}{x}\right) = d\left(\ln|x| - \frac{y^2}{x}\right)$$

bo‘ladi. Demak,

$$d\left(\ln|x| - \frac{y^2}{x}\right) = 0.$$

Bu tenglama yechimi

$$\ln|x| - \frac{y^2}{x} = C.$$

Binobarin tenglamaning umumiy yechimi

$$x = C e^{\frac{y^2}{x}}$$

bo‘ladi.

Amaliy mashg'ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2008 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 2-qismidagi 112-125 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2008 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 2-qismidagi 126-140 misollar.

16-AMALIY MASHG'ULOT

Ikkinchi tartibli o'zgarmas ko'effitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar

Nazorat uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli o'zgarmas ko'effitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi qanday?.
2. Ikkinchi tartibli o'zgarmas ko'effitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi qanday ko'rinishda bo'ladi?.
3. Xarakteristik tenglama nima?
4. Xarakteristik tenglama qanday tuziladi?
5. Xarakteristik tenglananing ildizlari orasida karrali ildizlar mavjud bo'lsa, ikkinchi tartibli o'zgarmas ko'effitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi qanday yoziladi?
6. Xarakteristik tenglananing ildizlari orasida kompleks ildizlar mavjud bo'lsa, ikkinchi tartibli o'zgarmas ko'effitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi qanday yoziladi?

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. $y'' + y' - 2y = 0$ tenglamaning umumiy yechimlari topilsin.

Yechish. Xarakteristik tenglama tuzamiz:

$$k^2 + k - 2 = 0$$

Bu tenglamaning ildizlari:

$$k_1 = -2, \quad k_2 = 1.$$

Demak tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

2-misol. $y'' + 2y' + 5y = 0$ tenglamaning $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi umumiy integrali va hususiy yechimi topilsin.

Yechish. Xarakteristik tenglama tuzamiz:

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Bu tenglamaning ildizlari:

$$k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i$$

Demak tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

$x = 0$ bo'lsa,

$$0 = e^{-0} (C_1 \cos 2 \cdot 0 + C_2 \sin 2 \cdot 0) \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$y'|_{x=0} = \left(e^{-x} 2C_2 \cos 2x - e^{-x} C_2 \sin 2x \right) \Big|_{x=0} = 1$$

$$1 = 2C_2, \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2},$$

Tenglamaning xususiy yechimi

$$y = \frac{e^{-x} \sin 2x}{2}$$

3-misol. $y'' + 9y = 0$ tenglamaning $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 3$ shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Yechish. Xarakteristik tenglama tuzamiz:

$$k^2 + 9 = 0,$$

Bu tenglamaning ildizlari:

$$k_1 = 3i, k_2 = -3i$$

Tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

$$y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x$$

$x = 0$ da

$$0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0$$

$$3 = -3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0$$

bundan

$$C_1 = 0, C_2 = 1,$$

Demak tenglamaning xususiy yechimi

$$y = \sin 3x.$$

4-misol. $y'' + 4y' + 4y = 0$ tenglamaning yechimi topilsin.

Yechish. Xarakteristik tenglama tuzamiz:

$$k^2 + 4k + 4 = 0,$$

Bu tenglamaning ildizlari:

$$k_1 = k_2 = -2,$$

Demak tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

5-misol. $y'' - 4y' + 3y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish: Xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$k^2 - 4k + 3 = 0.$$

Bu tenglamaning ildizlari $k_1 = 1, k_2 = 3$. Ildizlari turli va haqiqiy bo'lgani uchun berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$$

bo‘ladi.

6-misol. $y'' - 8y' + 16y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish: Qaralayotgan tenglamaning $k^2 - 8k + 16 = 0$ xarakteristik tenglamasi $k = 4$ ikki karrali ildizga ega. Shuning uchun $y'' - 8y' + 16y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$y = e^{4x} (C_1 + C_2 x).$$

7-misol. $y'' + 6y' + 13y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish: Xarakteristik tenglamani tuzamiz: $k^2 + 6k + 13 = 0$. Uning ildizlarini topamiz: $k_{1,2} = -3 \pm 2i$. Bu qo‘shma kompleks ildizlardir: $\alpha = -3$, $\beta = 2$. Tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Amaliy mashg‘ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2008 yilda nashr etilgan I.G‘.G‘aniyev va boshqalar. muallifligidagi “Oliy matematikadan masalalar to‘plami” nomli o‘quv qo‘llanmasining 2-qismidagi 167-174, 183-187, 192-206 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2008 yilda nashr etilgan I.G‘.G‘aniyev va boshqalar. muallifligidagi “Oliy matematikadan masalalar to‘plami” nomli o‘quv qo‘llanmasining 2-qismidagi 175-182, 188-191, 207-216 misollar.

17-AMALIY MASHG'ULOT

Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar

Nazorat uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi qanday?
2. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi qanday ko'rinishda bo'ladi?
3. Xarakteristik tenglama nima?
4. Xarakteristik tenglama qanday tuziladi?
5. Xarakteristik tenglamaning ildizlari orasida karrali ildizlar mavjud bo'lsa, ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi qanday yoziladi?
6. Xarakteristik tenglamaning ildizlari orasida kompleks ildizlar mavjud bo'lsa, ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi qanday yoziladi?
7. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning o'ng tomoniga ko'ra xususiy yechim qanday tanlanadi?

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. $y'' - 2y' - 3y = 3x^2 - 1$ tenglamaning yechimi topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos kelgan bir jinsli tenglamani yechamiz:
 $y'' - 2y' - 3y = 0$. Bu tenglama uchun xarakteristik tenglama tuzamiz:
 $k^2 - 2k - 3 = 0$. Uning ildizlari $k_1 = 3$, $k_2 = -1$ bo'lgani uchun bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$. Bir jinsli bo'lmagan

tenglamaning o'ng tomoni ikkinchi darajali ko'phad bo'lgani uchun, bu tenglamani xususiy yechimi ham ikkinchi darajali ko'phad bo'ladi: $y_1 = Ax^2 + Bx + C$, bu yerda A, B, C – noma'lim koeffitsientlar. Ularni aniqlash uchun y_1 ning hosilalarini topib ($y_1' = 2Ax + B$, $y_1'' = 2A$), berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$$2A - 4Ax - 2B - 3Ax^2 - 3Bx - 3C = 3x^2 - 1.$$

Oxirgi ifoda x bo'yicha ayniyat bo'lgani uchun, x ning chap va o'ng tomondagi bir hil darajalari oldidagi koeffitsientlarini tenglashtirib,

$$\begin{aligned} x^2: & \quad 3 = -3A, \\ x : & \quad 0 = -4A - 3B, \\ x^0: & \quad -1 = 2A - 2B - 3C, \end{aligned}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Uni yechib, $A = -1$, $B = \frac{4}{3}$, $C = -\frac{11}{9}$ larni

topamiz. Shuning uchun bir jinsli bo'lmagan tenglamani xususiy yechimi $y_1 = -x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{11}{9}$ bo'ladi va mos ravishda berilgan tenglamaning umumiy

yechimi $y = y + y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{11}{9}$ topiladi.

2-misol. $y'' - 6y' + 9y = 6e^{3x}$ tenglamaning yechimi topilsin.

Yechish. Mos kelgan $y'' - 6y' + 9y = 0$ bir jinsli tenglamani yechamiz. Bu tenglama uchun xarakteristik tenglama $k^2 - 6k + 9 = 0$. Uning ildizlari $k_1 = k_2 = 3$ ikki karrali bo'lgani uchun, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$.

Bir jinsli bo'lmagan tenglamaning o'ng tomonida $m = 3$ va u ildizlarga teng bo'lgani uchun berilgan tenglamaning xususiy yechimini $y_1 = Ax^2 e^{3x}$ ko'rinishda izlaymiz. Uning hosilalarni topib:

$$y_1' = 2Ax e^{3x} + Ax^2 \cdot 3e^{3x} = A(2x + 3x^2)e^{3x},$$

$$y_1'' = A(2 + 12x + 9x^2)e^{3x}$$

qaralayotgan $y'' - 6y' + 9y = 6e^{3x}$ tenglamaga qo'yamiz:

$$A(2+12x+9x^2)e^{3x} - 6A(2x+3x^2)e^{3x} + 9Ax^2e^{3x} = 6e^{3x}.$$

O‘xshash hadlarni ixchamlab, $2Ae^{3x} = 6e^{3x}$ ni hosil qilamiz, bundan $A = 3$.

Nihoyat, berilgan tenglamaning umumiy yechimi $y = (C_1 + C_2x + 3x^2)e^{3x}$ bo‘ladi.

3-misol. $y'' + 4y' - 5y = 3x - 8e^x$ tenglamaning $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{4}{3}$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish. Mos kelgan $y'' + 4y' - 5y = 0$ bir jinsli tenglama uchun xarakteristik tenglama tuzamiz: $k^2 + 4k - 5 = 0$. Uning ildizlari $k_1 = 1$, $k_2 = -5$ bo‘lgani uchun bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y = C_1e^x + C_2e^{-5x}$. Berilgan tenglamada o‘ng tomon birinchi darajali ko‘phad va ko‘rsatkichli funksiya yig‘indisidir. $m = 1 = k_1$, shuning uchun xususiy yechim birinchi darajali ko‘phad va ko‘rsatkichli funksiyaning yig‘indisi bo‘lib, shuningdek ko‘rsatkichli funksiyaning x ga ko‘paytirish lozim, ya’ni $y_1 = Ax + B + Cxe^x$.

y_1' , y_1'' hosilalarni topib va berilgan tenglamaga qo‘yib,

$$Ce^x + Ce^x + Cxe^x + 4(A + Ce^x + Cxe^x) - 5(Ax + B + Cxe^x) = 3x - 8e^x$$

ni hosil qilamiz. Chap va o‘ng tomondagi bir hil darajalar oldidagi koeffitsientlar

va ko‘rsatkichli funksiya oldidagi mos koeffitsientlarini tenglashtirib, $A = -\frac{3}{5}$,

$B = -\frac{12}{25}$, $C = -\frac{4}{3}$ larni topamiz. Undan $y_1 = -\frac{3}{5}\left(x + \frac{4}{5}\right) - \frac{4}{3}xe^x$ kelib chiqadi.

Nihoyat, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1e^x + C_2e^{-5x} - \frac{3}{5}\left(x + \frac{4}{5}\right) - \frac{4}{3}xe^x.$$

Endi C_1 va C_2 larni aniqlash uchun boshlang'ich shartlaridan foydalanamiz.

Izlanayotgan yechim hosilasini topib: $y' = C_1 e^x - 5C_2 e^{-5x} - \frac{3}{5} - \frac{4}{3} e^x - \frac{4}{3} x e^x$, ularga

$$\text{boshlang'ich shartlarini qo'yamiz: } \begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{12}{25} = 0, \\ C_1 - 5C_2 - \frac{29}{15} = 0. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, $C_1 = \frac{53}{90}$ va $C_2 = -\frac{109}{450}$ larni topamiz.

Shunday qilib, berilgan bir jinsli bo'lmagan tenglamaning so'ralayotgan xususiy yechimi:

$$y = \frac{53}{90} e^x - \frac{109}{450} e^{-5x} - \frac{3}{5} \left(x + \frac{4}{5} \right) - \frac{4}{3} x e^x.$$

4-misol. $y'' - 2y' + 10y = 2\sin 3x + 5\cos x$ tenglama uchun umumiy yechim topilsin.

Yechish. Avval $y'' - 2y' + 10y = 0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimni topamiz. Uning $k^2 - 2k + 10 = 0$ xarakteristik tenglamasi ildizlari $k_{1,2} = 1 \pm 3i$. $\alpha = 1$ va $\beta = 3$ bo'lgani uchun umumiy yechim

$$y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

ko'rinishda bo'ladi. Berilgan tenglamaning o'ng tomoni turli argumentli trigonometrik funksiyalardan iborat bo'lgani uchun xususiy yechimni ikki xil argumentli trigonometrik funksiyalar yig'indisi ko'rinishda izlaymiz:

$$y_1 = A \cos 3x + B \sin 3x + C \cos x + D \sin x.$$

Uning hosilalarini topib:

$$y_1' = -3A \cos 3x + 3B \sin 3x - C \sin x + D \cos x;$$

$$y_1'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x - C \cos x - D \sin x$$

berilgan tenglamaga qo'yamiz va bir xil argumentli trigonometrik funksiyalar oldidagi koeffitsientlarni tenglashtiramiz:

$$\begin{aligned} & -9A \cos 3x - 9B \sin 3x - C \cos x - D \sin x + 6A \sin 3x - 6B \cos 3x + 2C \sin x - \\ & -2D \cos x + 10A \cos 3x + 10B \sin 3x + 10C \cos x + 10D \sin x = 2 \sin 3x + 5 \cos x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 3x: & \quad 0 = -9A - 6B + 10A, \\
\sin 3x: & \quad 2 = -9B + 6A + 10C, \\
\cos x: & \quad 5 = -C - 2D + 10C, \\
\sin x: & \quad 0 = -D + 2C + 10D.
\end{aligned}$$

Hosil bo'lgan sistemani yechib, $A = \frac{12}{37}$, $B = \frac{2}{37}$, $C = \frac{9}{17}$ va $D = -\frac{2}{17}$ larni topamiz. Qaralayotgan bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{2}{37} (6 \cos 3x + \sin 3x) + \frac{1}{17} (9 \cos x - 2 \sin x).$$

5-misol. $y'' - y = \cos x - e^{-x}$ tenglama uchun umumiy yechim topilsin.

Yechish. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $k^2 - 1 = 0$ xarakteristik tenglama ildizlari $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ bo'lgani uchun $y'' - y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi

$$\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Berilgan tenglamaning o'ng tomoni trigonometrik va ko'rsatkichli funksiyalar yig'indisi bo'lib, unda $m = -1$ xarakteristik tenglamaning ildizlaridan bittasiga, ya'ni k_2 ga teng. Shuning uchun bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimi

$$y_1 = A \cos x + B \sin x + C x e^{-x}$$

ko'rinishda bo'ladi. y_1'' ni topib va tenglamaga qo'yib

$$-A \cos x - B \sin x - C e^{-x} - C e^{-x} + C x e^{-x} - A \cos x - B \sin x - C x e^{-x} = \cos x - e^{-x},$$

bir xil trigonometrik funksiyalar va ko'rsatkichli funksiya oldidagi

koeffitsientlarini tenglashtirib $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = \frac{1}{2}$ larni topamiz. Demak,

xususiy yechim $y_1 = \frac{1}{2} (x e^{-x} - \cos x)$. Nihoyat, berilgan tenglamaning umumiy

yechimi topiladi:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} (x e^{-x} - \cos x).$$

6-misol. $y'' - 7y' + 6y = e^x \sin x$ tenglama uchun umumiy yechim topilsin.

Yechish. Bir jinsli tenglama uchun xarakteristik tenglama tuzamiz: $k^2 - 7k + 6 = 0$. Uning ildizlari $k_1 = 1$, $k_2 = 6$ bo'lgani uchun umumiy yechim $\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$ bo'ladi.

Berilgan tenglamaning o'ng tomoniga ko'ra uning xususiy yechim $y_1 = e^x (A \cos x + B \sin x)$ ko'rinishda bo'ladi. y_1' , y_1'' larni topib, tenglamaga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} & e^x (A \cos x + B \sin x) + e^x (-A \sin x + B \cos x) + e^x (-A \sin x + B \cos x) + \\ & + e^x (-A \cos x - B \sin x) - 7e^x (A \cos x + B \sin x - A \sin x + B \cos x) + \\ & + 6e^x (A \cos x + B \sin x) = e^x \sin x. \end{aligned}$$

Buni e^x ga qisqartirib va bir hil trigonometrik funksiyalar oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, $A = \frac{5}{26}$ va $B = -\frac{1}{26}$ larni topamiz.

Demak, qaralayotgan tenglamaning xususiy yechimi

$$y_1 = \frac{1}{26} e^x (5 \cos x - \sin x)$$

va umumiy yechim

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{1}{26} (5 \cos x - \sin x) e^x$$

bo'ladi.

7-misol. $y'' - 2y' = x \cos x$ tenglama uchun umumiy yechim topilsin.

Yechish. Bir jinsli tenglama uchun xarakteristik tenglamani tuzamiz: $k^2 - 2k = 0$. Uning ildizlari $k_1 = 0$, $k_2 = 2$ bo'lgani uchun $y'' - 2y' = 0$ tenglamaning umumiy yechimi

$$\tilde{y} = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Bir jinsli bo'lmagan tenglamaning o'ng tomoni ikkihad va trigonometrik funksiya ko'paytmasi bo'lgani uchun xususiy yechimni

$$y_1 = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x$$

ko‘rinishda izlaymiz.

Uning hosilalarni topib:

$$y_1' = A \cos x - (Ax + B) \sin x + C \sin x + (Cx + D) \cos x,$$

$$y_1'' = -A \sin x - A \sin x - (Ax + B) \cos x + C \cos x + C \cos x - (Cx + D) \sin x$$

tenglamaga qo‘yamiz:

$$-A \sin x - A \sin x - (Ax + B) \cos x + C \cos x + C \cos x - (Cx + D) \sin x -$$

$$-2(A \cos x - (Ax + B) \sin x + C \sin x + (Cx + D) \cos x) = x \cos x.$$

Mos koeffitsientlarini tenglashtiramiz:

$$\sin x: \quad -A - A - D + 2B - 2C = 0,$$

$$\cos x: \quad -B + C + C - 2A - 2D = 0,$$

$$x \sin x: \quad -C + 2A = 0,$$

$$x \cos x: \quad -A - 2C = 1.$$

Hosil bo‘lgan sistemani yechib, $A = -\frac{1}{5}$, $B = -\frac{14}{25}$, $C = -\frac{2}{5}$, $D = \frac{2}{25}$ larni

topamiz. Demak, bir jinsli tenglamaning xususiy yechimi

$$y_1 = -\frac{1}{5} \left(x + \frac{14}{5} \right) \cos x - \frac{2}{5} \left(x - \frac{1}{5} \right) \sin x$$

va bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{5} \left(x + \frac{14}{5} \right) \cos x - \frac{2}{5} \left(x - \frac{1}{5} \right) \sin x$$

bo‘ladi.

Amaliy mashg‘ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2008 yilda nashr etilgan I.G‘.G‘aniyev va boshqalar. muallifligidagi “Oliy matematikadan masalalar to‘plami” nomli o‘quv qo‘llanmasining 2-qismidagi 167-174, 183-187, 192-206 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2008 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 2-qismidagi 175-182, 188-191, 207-216 misollar.

18-AMALIY MASHG'ULOT

Yuqori tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar

Nazorat uchun savollar

1. Yuqori tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi qanday?.
2. Yuqori tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi qanday ko'rinishda bo'ladi?.
3. Xarakteristik tenglama nima?
4. Xarakteristik tenglama qanday tuziladi?
5. Yuqori tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning o'ng tomoniga ko'ra xususiy yechim qanday tanlanadi?

Mavzuga doir misollarning yechilishi

1-misol. Ushbu $y^{IV} - y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish. Xarakteristik tenglamani tuzamiz: $k^4 - 1 = 0$.

Xarakteristik tenglama ildizlarini topamiz:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i.$$

Umumiy integralni yozamiz:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Bunda C_1, C_2, C_3, C_4 ixtiyoriy o'zgarmas sonlardir.

2-misol. $y''' - 6y'' + 13y' = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish. Xarakteristik tenglama tuzamiz: $k^3 - 6k^2 + 13k = 0$.

Bu tenglamaning ildizlari:

$$k_1 = 0; k_{2,3} = 3 \pm 2i.$$

Birinchi ildiz haqiqiy bo'lib, qolgan ikkitasi esa qo'shma kompleks bo'lgani uchun berilgan tenglamani umumiy yechimi $y = C_1 + e^{3x}(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)$ bo'ladi.

3-misol. $\frac{d^4 y}{dx^4} - y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish. Bu tenglamaning $k^4 - 1 = 0$ xarakteristik tenglamasi ikkita $k_{1,2} = \pm 1$ turli haqiqiy va ikkita $k_{3,4} = \pm i$ mavhum ildizlarga ega. Shuning uchun umumiy yechimi quyidagicha yoziladi: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

4-misol. $y^{VI} + 4y^{IV} + 4y'' = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish. Berilgan differensial tenglamaga $k^6 + 4k^4 + 4k^2 = 0$ xarakteristik tenglama mos keladi. Tenglamani $k^2(k^4 + 4k^2 + 4) = 0$ ko'rinishda yozib, uning ildizlarini topamiz: $k_1 = k_2 = 0$ haqiqiy ildizlar va $k_{3,4} = i\sqrt{2}$, $k_{5,6} = -i\sqrt{2}$ ikkita ikki karrali qo'shma mavhum ildizlar. Shuning uchun qaralayotgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) \cos(x\sqrt{2}) + (C_5 + C_6 x) \sin(x\sqrt{2})$$

bo'ladi.

5-misol. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ tenglamani o'zgarmaslarni variatsiyalash

usulini qo'llab yeching.

Yechish. $y'' - 2y' + y = 0$ tenglama uchun xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Bu tenglama ildizlari $k_1 = k_2 = 1$ bo'lgani uchun bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\tilde{y} = (C_1 + C_2 x)e^x$ bo'ladi.

O'zgarmaslarni variatsiyalash usulidan foydalanib, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning yechimini $y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$ ko'rinishda izlaymiz, bu yerda $C_1(x)$ va $C_2(x)$

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases} \quad (1)$$

sistemadan topiladi.

$y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ belgilanib,

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0, \\ C_1' e^x + C_2' (1+x) e^x = \frac{e^x}{x^2 + 1} \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Uni yechib $C_1' = -\frac{x}{x^2 + 1}$, $C_2' = \frac{1}{x^2 + 1}$ larni topamiz.

Oxirgi ifodalarni integrallab

$$C_1 = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \bar{C}_1; \quad C_2 = \arctg x + \bar{C}_2$$

larni topamiz.

Ularni umumiy yechimga qo'yib,

$$y = \left(C_1 + C_2 x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + x \arctg x \right) e^x$$

ni hosil qilamiz.

6-misol. $y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ tenglamani o'zgarmaslarni variatsiyalash usulini

qo'llab yeching.

Yechish. $y''' + y' = 0$ bir jinsli tenglama uchun xarakteristik tenglamani tuzamiz: $k^3 + k = 0$. Uning ildizlari $k_1 = 0$, $k_{2,3} = \pm i$ bo'ladi. Demak, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\tilde{y} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

O'zgarmaslarni variatsiyalash usulidan foydalanib tenglamaning yechimini $y = C_1(x) + C_2(x) \cos x + C_3(x) \sin x$ ko'rinishda izlaymiz.

$y_1 = 1$; $y_2 = \cos x$ va $y_3 = \sin x$ belgilanib, quyidagi sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} C'_1 + C'_2 \cos x + C'_3 \sin x = 0, \\ -C'_2 \sin x + C'_3 \cos x = 0, \\ -C'_2 \cos x - C'_3 \sin x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}. \end{cases}$$

Oxirgi sistema yechimlari: $C'_1 = \sin x + \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$; $C'_2 = -\operatorname{tg} x$; $C'_3 = -\operatorname{tg}^2 x$. Ularni

integrallab

$$C_1 = \frac{1}{\cos x} + \bar{C}_1; \quad C_2 = \ln|\cos x| + \bar{C}_2; \quad C_3 = x - \operatorname{tg} x + \bar{C}_3$$

larni topamiz. Ularni yechimga qo'yib,

$$y = \frac{1}{\cos x} + \bar{C}_1 + \cos x \ln|\cos x| + \bar{C}_2 \cos x + (x - \operatorname{tg} x) \sin x + \bar{C}_3 \sin x$$

yoki

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{\cos x} + \cos x \ln|\cos x| + (x - \operatorname{tg} x) \sin x$$

ni hosil qilamiz.

Amaliy mashg'ulotda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2008 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar. muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 2-qismidagi 167-174, 183-190 va 203-210 misollar.

Uyda mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan masalalar

2008 yilda nashr etilgan I.G'.G'aniyev va boshqalar muallifligidagi "Oliy matematikadan masalalar to'plami" nomli o'quv qo'llanmasining 2-qismidagi 175-182, 191-202 va 211-216 misollar.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. I.G'.G'aniyev va boshqalar., Oliy matematikadan masalalar to'plami, 1-qism, Toshkent, 2007 yil.
2. I.G'.G'aniyev va boshqalar., Oliy matematikadan masalalar to'plami, 2-qism, Toshkent, 2008 yil.
3. В.П.Минорский, Сборник задач по высшей математике, Изд. «НАУКА», Москва, 1971 г.
4. Г.Н.Берман Сборник задач по курсу математического анализа, Изд. «НАУКА», Москва, 1985 г.

MUNDARIJA

Kirish	3
1 – amaliy mashg‘ulot	4
2 – amaliy mashg‘ulot	6
3 – amaliy mashg‘ulot	9
4 – amaliy mashg‘ulot	12
5 – amaliy mashg‘ulot	14
6 – amaliy mashg‘ulot	19
7 – amaliy mashg‘ulot	22
8 – amaliy mashg‘ulot	25
9 – amaliy mashg‘ulot	29
10 – amaliy mashg‘ulot	37
11 – amaliy mashg‘ulot	41
12 – amaliy mashg‘ulot	43
13 – amaliy mashg‘ulot	49
14 – amaliy mashg‘ulot	56
15 – amaliy mashg‘ulot	61
16 – amaliy mashg‘ulot	67
17 – amaliy mashg‘ulot	71
18 – amaliy mashg‘ulot	78
Foydalanilgan adabiyotlar	83