

«O'zbekiston temir yo'llari» DATK

Toshkent temir yo'l muhandislari instituti

A.M.Karimov, A.A.Eshqobilov

**OLIY MATEMATIKADAN LOYIHA-HISOB ISHLARINI
BAJARISHDA MISOL VA MASALALAR YECHISH**

5230100 – Iqtisodiyot (temir yo'l transportida), 5230200 – Menejment (temir yo'l transportida), 5230900 – Buxgalteriya hisobi va audit (temir yo'l transportida) ta'lim yo'nalishlari bakalavriat talabalari va professor-o'qituvchilar uchun loyiha-hisob ishlarini bajarishda misol va masalalar yechishga doir uslubiy qo'llanma

II qism

Toshkent 2015

Oliy matematikadan loyiha-hisob ishlarini bajarishda misol va masalalar yechish. II qism. Uslubiy qo'llanma. A.M.Karimov, A.A.Eshqobilov. ToshTYMI, T.: 2015 y.

Ushbu uslubiy qo'llanma, oliy matematika fani bo'yicha loyiha-hisob ishlarini bajarishda foydalanishga mo'ljallangan. Uslubiy qo'llanmada oliy matematikaning birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar, darajalari pasaytirib yechiladigan ikkinchi tartibli differensial tenglamalar, yuqori tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar, musbat hadli sonli qatorlar, tarkibida manfiy hadlari ham bo'lgan sonli qatorlar, funksional qatorlar, darajali qatorlar, Fur'e qatorlari, hodisalar algebrasi, ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari, diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar va matematik statistika kabi bo'limlari bo'yicha qisqacha nazariy tushunchalar keltirilgan va misollar yechib ko'rsatilgan.

Uslubiy qo'llanma iqtisodiy (5230100 – Iqtisodiyot (temir yo'l transportida), 5230900 – Buxgalteriya hisobi va audit (temir yo'l transportida) va 5230200 – Menjment (temir yo'l transportida)) yo'nalishdagi bakalavr talabalari va Oliy matematika fanidan amaliyot darslarida o'qituvchilar foydalanishi uchun mo'ljallangan.

Institut Ilmiy-uslubiy kengashi tomonidan nashrga tavsiya etilgan.

Taqrizchilar: Sh.A.Qosimov – dots., f.-m.f.n.;
O.I.Egamberdiyev – dots., f.-m.f.n. (O'zMU).

Kirish

Amaliyotdagi muhim iqtisodiy jarayonlarning matematik modelini yaratib, uni tahlil qilib, tegishli qarorlar qabul qilish uchun talabada oily matematikaning “Differensial tenglamalar”, “Qatorlar nazariyasi” hamda “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” bo’limlari bo’yicha yetarli bilim va ko’nikmalari bo’lishi talab etiladi. Mustaqil ish topshiriqlarini va loyiha-hisob ishlarini bajarish shu vazifa uchun xizmat qiladi.

Mazkur uslubiy qo’llanma A.M.Karimov va A.A.Eshqobilovlar tomonidan tuzilgan “Oliy matematikadan loyiha-hisob ishlarini bajarishda misol va masalalar yechish” uslubiy qo’llanmaning uzviy davomi bo’lib, iqtisodiy yo’nalishdagi bakalavr-talabalar loyiha-hisob ishlarini bajarishda foydalanadigan A.M.Karimov, L.G.Jukovalar tomonidan tuzilgan “Oliy matematikadan hisob-grafik ishlari” o’quv qo’llanmaning uslubiy ta’minoti sifatida yaratildi.

Ushbu uslubiy qo’llanma Oliy matematika fanining o’zgaruvchilari ajraladigan va unga keltiriladigan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar, birinchi tartibli bir jinsli va chiziqli differensial tenglamalar, Bernulli differensial tenglamasi, to’liq differensial tenglama, darajalari pasaytirilib yechiladigan yuqori tartibli oddiy differensial tenglamalar, yuqori tartibli o’zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli va bir jinsli bo’lmagan differensial tenglamalar, musbat hadli sonli qatorlar, ishoralari o’zgaruvchan bo’lgan sonli qatorlar, funksional qatorlar, darajali qatorlar, Fur’e qatorlari, tasodifiy hodisalar, tasodifiy miqdorlar, uzluksiz tasodifiy miqdorlar, taqsimot qonunlari, matematik statistika elementlari kabi bo’limlarni o’z ichiga olgan. Har bir bobning avvalida kerakli tushunchalar va zarur formulalar keltirilgan. Boshqa uslubiy qo’llanmalarda kamroq bayon etilgan misol va masalalarning yechilishiga ko’proq e’tibor berilgan.

I BOB. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

1-§. Birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan oddiy differensial tenglamalar

Nazariy tushunchalar. Ushbu

$$F(x; y; y') = 0$$

ko'rinishdagi tenglama birinchi tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi. Bu yerda $y = y(x)$ qidirilayotgan noma'lum funksiya. Berilgan tenglamani ayniyatga aylantiradigan ixtiyoriy $y = f(x)$ funksiyani shu tenglamaning yechimi deyiladi.

Birinchi tartibli differensial tenglamaning biror C o'zgarmas songa bog'liq bo'lgan $y = f(x; C)$ ko'rinishdagi yechimiga, uning umumiy yechimi deyiladi.

Agar differensial tenglamaning yechimi $\Phi(x; y; C) = 0$ ko'rinishdagi oshkormas funksiya sifatida topilgan bo'lsa, uni differensial tenglamaning umumiy integrali deyiladi.

Ushbu $y(x_0) = y_0$ boshlang'ich shartdan foydalanib tenglamaning umumiy yechimidan kelib chiqqan $y = \Phi(x; C_0)$ funksiyaga shu tenglamaning xususiy yechimi deyiladi.

Xuddi shuningdek, boshlang'ich shartdan foydalanib, tenglamaning umumiy integralidan kelib chiqadigan $\Phi(x; y; C_0) = 0$ funksiyaga shu tenglamaning xususiy integrali deyiladi.

Ushbu

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

ko'rinishidagi tenglama birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama deyiladi. Bu tenglamani yechish uchun uni bevosita integrallash kifoya.

Ushbu

$$M_1(x)N_2(y)dx + M_2(x)N_1(y)dy = 0$$

ko'rinishidagi tenglama birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deyiladi. Bu tenglamani yechish uchun uning har ikkala tomonini $N_2(y)M_2(x)$ ga bo'lib, natijani bevosita integrallash kifoya. U holda

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_1(y)}{N_2(y)} dy = C$$

hosil bo'ladi.

Misol. $52xdx - 5ydy = 5x^2ydy - 13xy^2dx$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir. O'zgaruvchilarini ajratish uchun quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$$52xdx + 13xy^2dx - 5ydy - 5x^2ydy = 0,$$

$$13x(4 + y^2)dx - 5y(1 + x^2)dy = 0,$$

$$\frac{13xdx}{1 + x^2} - \frac{5ydy}{4 + y^2} = 0.$$

Hosil bo'lgan ifodani bevosita integrallab:

$$\int \frac{13xdx}{1 + x^2} - \int \frac{5ydy}{4 + y^2} = C$$

yoki

$$\frac{13}{2} \ln(1 + x^2) - \frac{5}{2} \ln(4 + y^2) = \frac{1}{2} \ln C_1$$

yoki

$$\ln \frac{(1 + x^2)^{13}}{(4 + y^2)^5} = \ln C_1$$

yoki

$$\frac{(1 + x^2)^{13}}{(4 + y^2)^5} = C_1$$

ko'rinishdagi umumiy integralni topamiz.

Javob: $\frac{(1 + x^2)^{13}}{(4 + y^2)^5} = C_1.$

2-§. Birinchi tartibli bir jinsli va unga keladigan differensial tenglamalar

Nazariy tushunchalar. Ushbu $f(x; y)$ ikki o'zgaruvchili funksiya uchun $f(\lambda x; \lambda y) = \lambda^m f(x; y)$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda uni argumentlariga nisbatan m - o'lchovli bir jinsli funksiya deb yuritiladi.

Masalan $f(x; y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ funksiya o'z argumentlarining $m = \frac{2}{3}$ o'lchovli funksiyasidir. Chunki $f(\lambda x; \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \lambda^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x^2 + y^2} = \lambda^{\frac{2}{3}} f(x; y)$ o'rinli. Bu yerda $m = \frac{2}{3}$.

Ushbu

$$y' = f(x; y)$$

ko'rinishdagi tenglama birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama deyiladi, agarda $f(x; y)$ funksiya o'z argumentlarining nol o'lchovli bir jinsli funksiyasi bo'lsa. Bunday tenglamani yechish uchun $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ almashtirish bajariladi.

Ushbu

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

ko'rinishdagi tenglama birinchi tartibli bir jinsli tenglamaga keladigan differensial tenglama deyiladi. Uni yechish uchun $x = t + t_0$, $y = u(t) + u_0$ belgilashlarni kiritib, t_0 va u_0 ni topish uchun

$$\begin{cases} a_1t_0 + b_1u_0 + c_1 = 0 \\ a_2t_0 + b_2u_0 + c_2 = 0 \end{cases}$$

algebraik tenglamalar sistemasini hamda $u(x)$ funksiyaning topish uchun

$$\frac{du}{dt} = f\left(\frac{a_1t + b_1u}{a_2t + b_2u}\right)$$

birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamani hosil qilamiz.

1-misol. $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{7y}{x} + 9$ differensial tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglama birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamadir. Chunki, $f(x; y) = \frac{y^2}{x^2} + \frac{7y}{x} + 9$, $f(\lambda x; \lambda y) = \frac{\lambda^2 y^2}{\lambda^2 x^2} + \frac{7\lambda y}{\lambda x} + 9 = \frac{y^2}{x^2} + \frac{7y}{x} + 9 = \lambda^0 \left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{7y}{x} + 9 \right) = \lambda^0 f(x; y)$, $m = 0$.

Tenglamani yechimini $y = x \cdot u(x)$ ko'rinishda qidiramiz. U holda $y' = u(x) + xu'(x)$ bo'ladi. Bularni berilgan tenglamaga qo'yib $u(x) + xu'(x) = u^2(x) + 7u(x) + 9$ yoki $xu'(x) = u^2(x) + 6u(x) + 9$ ko'rinishdagi birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamani hosil qilamiz. Uning o'zgaruvchilarini ajratib:

$$\frac{du}{u^2 + 6u + 9} = \frac{dx}{x}$$

yoki

$$\frac{du}{(u+3)^2} = \frac{dx}{x}$$

va bevosita integrallab,

$$-\frac{1}{u+3} = \ln|x| + \ln C$$

yoki

$$-\frac{1}{u+3} = \ln C|x|$$

yoki

$$(u(x) + 3) \ln C|x| + 1 = 0$$

ko'rinishdagi yechimni topamiz. Unga $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ ni qo'yib, berilgan tenglamaning

$$(y(x) + 3x) \ln C|x| + x = 0$$

ko'rinishdagi umumiy integralini hosil qilamiz.

Javob: $(y(x) + 3x) \ln C|x| + x = 0$.

2-misol. $y' = \frac{x+y-4}{x-y-5}$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglama birinchi tartibli bir jinsli tenglamaga keladigan differensial tenglamadir. Haqiqatdan ham, $x = t + t_0$, $y = u(t) + u_0$ almashtirishni kiritsak:

$$\frac{du}{dx} = \frac{t+u+t_0+u_0-4}{t-u+t_0-u_0-5}$$

hosil bo'ladi. Agar

$$\begin{cases} t_0 + u_0 - 4 = 0 \\ t_0 - u_0 - 5 = 0 \end{cases}$$

deb, hosil qilingan algebraik tenglamalar sistemasini yechsak $t_0 = 4,5$; $u_0 = -0,5$ ekanligini topamiz. U holda

$$\frac{du}{dx} = \frac{t+u}{t-u}$$

ko'rinishdagi birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama hosil bo'ladi.

Chunki, $f(t;u) = \frac{t+u}{t-u}$, $f(\lambda t; \lambda u) = \frac{\lambda t + \lambda u}{\lambda t - \lambda u} = \frac{\lambda(t+u)}{\lambda(t-u)} = \lambda^0 \frac{t+u}{t-u} = \lambda^0 f(t;u)$,

$m = 0$. Tenglamaning yechimini $u = t \cdot w(t)$ ko'rinishda qidiramiz. U holda $u' = w + tw'$ hosil bo'ladi. Ularni yechayotgan tenglamamizga qo'ysak:

$$w + tw' = \frac{t+tw}{t-tw}$$

yoki

$$w + tw' = \frac{1+w}{1-w}$$

yoki

$$tw' = \frac{1+w}{1-w} - w$$

yoki

$$tw' = \frac{1+w^2}{1-w}$$

ko'rinishdagi o'zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli differensial tenglama hosil bo'ladi. Uning o'zgaruvchilarini ajratib

$$\frac{(1-w)dw}{1+w^2} = \frac{dt}{t}$$

yoki

$$\frac{dw}{1+w^2} - \frac{wdw}{1+w^2} = \frac{dt}{t}$$

hi topamiz. Uni bevosita integrallab,

$$\arctg w - \frac{1}{2} \ln(1+w^2) = \ln|t| + \ln C$$

yoki

$$\arctg w = \ln C |t| \sqrt{1+w^2}$$

ko'rinishdagi umumiy integralni topamiz. Bunda $w(x) = y(x) + 0.5$, $t = x - 4.5$ almashtirishni bajarib, ushbu

$$\arctg(y + 0.5) = \ln C |x - 4.5| \sqrt{1 + (y + 0.5)^2}$$

ko'rinishda umumiy integralni hosil qilamiz.

$$\textbf{Javob: } \arctg(y + 0.5) = \ln C |x - 4.5| \sqrt{1 + (y + 0.5)^2} .$$

3-§. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

Nazariy tushunchalar. Ushbu

$$y' + S(x)y = Q(x)$$

ko'rinishdagi tenglama birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi. Bu yerda $S(x)$ va $Q(x)$ funksiyalar o'z argumetlarining uzluksiz funksiyalaridir. Chiziqli tenglamaning yechimi $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ ko'rinishda, ya'ni ikkita noma'lum funksiyalarning ko'paytmasi ko'rinishida qidiriladi. Buning asosiy sababi, noma'lum funksiyalardan birini tanlash imkoniyati borligida. Qidirilayotgan yechimni berilgan tenglamaga qo'yib,

$$u'v + uv' + S(x)uv = Q(x)$$

yoki

$$u'v + u(v' + S(x)v) = Q(x)$$

tenglamani hosil qilamiz. Tenglash imkoniyatidan foydalanib, qavs ichidagi ifodani nolga tenglaymiz. Natijada

$$v'(x) + S(x)v(x) = 0$$

ko'rinishdagi birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga kelamiz. Uni yechib, topilgan yechimni joyiga qo'yib, ushbu

$$u'(x)v(x) = Q(x)$$

ko'rinishdagi birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamani hosil qilamiz. Uni yechib, $u = u(x)$ funksiya topiladi. Topilgan funksiyalarni $y = u(x) \cdot v(x)$ belgilashga qo'yib, berilgan birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimiga ega bo'lamiz.

Agar birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama boshlang'ich shart bilan berilgan bo'lsa, u holda uni Koshi masalasi deb yuritiladi.

Misol. $y' - y \cos x = \sin 2x$, $y(0) = -1$ Koshi masalasini yeching.

Yechish. Berilgan tenglama birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamadir. Bu yerda $S(x) = -\cos x$, $Q(x) = \sin 2x$ uzluksiz funksiyalardir. Yechimni

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

ko'rinishda qidiramiz. U holda

$$y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

bo'ladi. Bularni berilgan tenglamaga qo'yib,

$$u' \cdot v + u \cdot v' - u \cdot v \cos x = \sin 2x$$

yoki

$$u' \cdot v + u(v' - v \cos x) = \sin 2x$$

tenglamani hosil qilamiz. Tanlash imkoniyatidan foydalanib qavs ichidagi ifodani nolga tenglab, ushbu

$$v' - v \cos x = 0$$

ko'rinishdagi birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamani hosil qilamiz. Uni yechamiz.

$$\frac{dv}{dx} = v \cos x,$$

$$\frac{dv}{v} = \cos x dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \cos x dx,$$

Shuni ta'kidlash lozimki, yechilayotgan differensial tenglamaning xususi yechimini toppish yetarli, shuning uchun yechimni hosil qilishda ixtiyoriy o'zgarmas sonni yozish shart emas.

$$\ln|v| = \sin x,$$

$$v(x) = e^{\sin x}.$$

Topilgan uechimni joyiga qo'yib

$$u'(x) \cdot e^{\sin x} = \sin 2x$$

ko'rinishda yana o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamani hosil qilamiz. Uni yechamiz.

$$\frac{du}{dx} = \sin 2x \cdot e^{-\sin x}$$

yoki

$$du = \sin 2x \cdot e^{-\sin x} dx$$

yoki

$$u(x) = \int \sin 2x \cdot e^{-\sin x} dx + C$$

bundan

$$\begin{aligned} \int \sin 2x e^{-\sin x} dx &= 2 \int \sin x \cos x e^{-\sin x} dx \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| \Rightarrow 2 \int t e^{-t} dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u = t, \quad du = dt \\ dv = e^{-t} dt, \quad v = -e^{-t} \end{array} \right| &\Rightarrow 2(-te^{-t} + \int e^{-t} dt) = 2(-te^{-t} - e^{-t}) = -2e^{-t}(t+1) = \\ &= -2e^{-\sin x}(\sin x + 1) \end{aligned}$$

hosil bo'ladi. Natijada,

$$u(x) = -2e^{-\sin x}(\sin x + 1) + C$$

yechimni topamiz. U holda berilgan chiziqli tenglamaning yechimi

$$y = u(x) \cdot v(x) = (-2e^{-\sin x}(\sin x + 1) + C) \cdot e^{\sin x} = -2(\sin x + 1) + C \cdot e^{\sin x}$$

ko'rinishda bo'ladi. Endi boshlang'ich shartdan foydalansak,

$$-1 = -2 \cdot (\sin 0 + 1) + C \cdot e^{\sin 0},$$

$$-1 = -2 \cdot 1 + C \cdot 1,$$

$$C = 1$$

ni topamiz. Uni o'rniga qo'yib, berilgan Koshi masalasining

$$y(x) = -2(\sin x + 1) + e^{\sin x}$$

ko'rinishdagi yechimini topamiz.

$$\textbf{Javob: } y(x) = -2(\sin x + 1) + e^{\sin x}.$$

4-§. Birinchi tartibli Bernulli differensial tenglamasi

Nazariy tushunchalar. Ushbu

$$y' + S(x)y = Q(x)y^\alpha$$

ko'rinishdagi tenglama birinchi tartibli Bernulli differensial tenglamasi deyiladi. Bu yerda $S(x)$ va $Q(x)$ funksiyalar qaralayotgan sohada uzluksiz funksiyalar bo'lib, $\alpha \neq 0$ va $\alpha \neq 1$ ekanligi ma'lum. Aks holda Bernulli differensial tenglamasi chiziqli differensial tenglamaga aylanib qoladi. Tenglamaning har ikkala tomonini y^α ga bo'lib

$$y^{-\alpha}y' + S(x)y^{-\alpha+1} = Q(x)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bunda

$$w(x) = y^{-\alpha+1}(x)$$

almashtirishni kiritsak,

$$w'(x) = (-\alpha + 1)y^{-\alpha}y'(x)$$

ga ega bo'lamiz. Ularni qaralayotgan tenglamaga qo'yib

$$\frac{w'(x)}{1-\alpha} + S(x)w(x) = Q(x)$$

yoki

$$w'(x) + (1-\alpha)S(x)w(x) = (1-\alpha)Q(x)$$

ko'rinishdagi birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga kelimiz.

Eslatib o'tamizki, Bernulli differensial tenglamasini bevosita Bernulli usuli bilan ham ya'ni, yechimni $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ ko'rinishda qidirib yechish mumkin.

Misol. $y' + \frac{y}{2x} = -x^2y^3$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Yechish. Berilgan tenglama birinchi tartibli Bernulli differensial tenglamasidir. Chunki $S(x) = \frac{1}{2x}$, $Q(x) = -x^2$ va $\alpha = 3$.

Tenglamaning har ikkala tomonini y^3 ga bo'lib, so'ngra $w(x) = y^{-2}$ almashtirishni kiritib, $w'(x) = -2y^{-3}$ ni topib, quyidagi

$$w' - \frac{1}{x}w = 2x^2$$

ko'rinishdagi birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga kelimiz. Uni yechamiz:

$$\begin{aligned}w(x) &= u(x) \cdot v(x), \\w'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),\end{aligned}$$

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) - \frac{1}{x} u(x) \cdot v(x) = 2x^2,$$

$$u'v + u \left(v' - \frac{1}{x} v \right) = 2x^2,$$

$$v' - \frac{1}{x} v = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} v,$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = \ln|x|,$$

$$v(x) = x,$$

$$u'x = 2x^2,$$

$$du = 2x dx,$$

$$u(x) = x^2 + C,$$

$$w(x) = u(x) \cdot v(x) = x^3 + Cx.$$

Natijada $y^{-2}(x) = w(x) = x^3 + Cx$ yoki $(x^3 + Cx) \cdot y^2 = 1$ ko'rinishdagi yechim topiladi.

Javob: $(x^3 + Cx) \cdot y^2 = 1$.

5-§. To'liq differensialli tenglamalar

Nazariy tushunchalar. Agar

$$\frac{\partial M(x; y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x; y)}{\partial x}$$

shart bajarilgan bo'lsa, u holda

$$M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$$

tenglamani to'liq differensialli tenglama deyiladi. Bu tenglama uchun shunday $u(x; y)$ funksiya topiladiki, uni

$$du(x; y) = 0$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi. Natijada tenglamaning umumiy integrali

$$u(x; y) = C$$

ko'rinishda bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, to'liq differensialli tenglamani yechishdagi asosiy muammo $u(x; y)$ funksiyani topishdir.

Faraz qilaylik, ushbu

$$M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$$

tenglama uchun to'liq differensiallik sharti bajarilmasin. Ammo, shunday $\lambda(x; y)$ funksiya topilsinki, tenglamani shu funksiya ko'pattirilgandan so'ng u to'liq differensialli tenglamaga aylanib qolsin. $\lambda(x; y)$ funksiyaning integrallovchi ko'paytuvchi deb yuritiladi. Uni topish uchun

$$\lambda M dx + \lambda N dy = 0$$

tenglamaning to'liq differensialli tenglama bo'lib qolganlik shartidan foydalaniladi.

$$\frac{\partial(\lambda M)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda N)}{\partial x}$$

bundan

$$\lambda \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \lambda \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

bundan

$$M \frac{\partial \lambda}{\partial y} - N \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \lambda \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

bundan

$$M \frac{\partial \ln \lambda}{\partial y} - N \frac{\partial \ln \lambda}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

hosil bo'ladi.

Agar integrallovchi ko'paytuvchi faqat x o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

kelib chiqadi va o'ng tomondagi ifoda faqat x o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi.

Agar integrallovchi ko'paytuvchi faqat y o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial y} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

kelib chiqadi va o'ng tomondagi ifoda faqat y o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi.

Bu hollarda integrallovchi ko'paytuvchini topish qulaylashadi.

1-misol. $(\cos(x + y^2) + \sin x)dx + 2y \cos(x + y^2)dy = 0$ differensial tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglama to'liq differensialli tenglamadir. Chunki,

$$M(x; y) = \cos(x + y^2) + \sin x,$$

$$N(x; y) = 2y \cos(x + y^2)$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y \sin(x + y^2),$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2y \sin(x + y^2)$$

bo'lib, to'liq differensiallik sharti bajariladi. Natijada shunday $u(x; y)$ funksiya topiladiki

$$du(x; y) = (\cos(x + y^2) + \sin x)dx + 2y \cos(x + y^2)dy$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$$du(x; y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x + y^2) + \sin x \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \cos(x + y^2) \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Sistemaning birinchi tenglamasini x o'zgaruvchi bo'yicha integrallab

$$u(x; y) = \sin(x + y^2) - \cos x + \varphi(y)$$

ifodani topamiz. Integrallanayotgan funksiya ikki o'zgaruvchili bo'lganligi tufayli, umumiylikni buzmasdan, integrallashda paydo bo'ladigan ixtiyoriy o'zgaruvchi sonni y o'zgaruvchining funksiyasi deb, uni $C = \varphi(y)$ ko'rinishda olindi. Bu funktsiyani topish uchun yechimni sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yamiz. U holda

$$2y \cos(x + y^2) + \varphi'(y) = 2y \cos(x + y^2),$$

$$\varphi'(y) = 0,$$

$$\varphi(y) = \text{const}$$

hosil bo'ladi. To'liq differensialli tenglamaning umumiy integrali $u(x; y) = C$ ko'rinishda ekanligini hisobga olib

$$\sin(x + y^2) - \cos x = C$$

ni topamiz.

$$\textbf{Javob: } \sin(x + y^2) - \cos x = C.$$

2-misol. $(y + xy^2)dx - xdy = 0$ differensial tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglama to'liq differensialli tenglama emas. Chunki,

$$M(x; y) = y + xy^2, \quad N(x; y) = -x, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

ya'ni to'liq differensiallilik sharti bajarilmadi.

Integrallovchi ko'paytuvchi topishga harakat qilib ko'ramiz. Buning uchun yuqorida keltirilgan ifodalarning x yoki y o'zgaruvchilardan bog'liqligini tekshirib ko'ramiz.

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-1 - 1 - 2xy}{y + xy^2} = -\frac{2}{y}.$$

Natijada $\frac{\partial \ln \lambda}{\partial y} = -\frac{2}{y}$ kelib chiqadi. Bundan $\ln \lambda = -2 \ln y$ yoki $\lambda(y) = \frac{1}{y^2}$

ni topamiz. Berilgan tenglamani $\lambda(y) = \frac{1}{y^2}$ ga ko'paytirib

$$\left(\frac{1}{y} + x \right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

ko'rinishdagi tenglamani hosil qilamiz. U to'liq differensialli tenglamadir. Chunki,

$$M(x; y) = \frac{1}{y} + x, \quad N(x; y) = -\frac{x}{y^2}, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \quad \text{va} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

to'liq differensiallilik sharti bajariladi. Endi $u(x; y)$ funksiyani qidirsak bo'ladi.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} + x \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \end{cases} \Rightarrow u(x; y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y) \Rightarrow -\frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C$$

Natijada, yechilishi talab etilayotgan tenglamaning $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$ ko'rinishda

umumiy integralini topamiz.

$$\textbf{Javob: } \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C.$$

6-§. Darajalari pasaytirilib yechiladigan ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Nazariy tushunchalar. Tarkibiga y o'zgaruvchi oshkor kirmaydigan $F(x; y'; y'') = 0$ ikkinchi tartibli differensial tenglama $y' = p(x)$ almashtirish yordamida $F(x; p; p') = 0$ ko'rinishidagi birinchi tartibli differensial tenglamaga keltirilib yechiladi.

Tarkibiga x o'zgaruvchi oshkor kirmaydigan $F(y; y'; y'') = 0$ ikkinchi tartibli differensial tenglama $y' = p(y)$ almashtirish yordamida $F(y; p(y); p'(y)p(y)) = 0$ ko'rinishidagi birinchi tartibli differensial tenglamaga keltirilib yechiladi.

1-misol. $xy'' - y' = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning tarkibiga y o'zgaruvchi oshkor kirmaydi. Shuning uchun $y' = p(x)$ almashtirish yordamida berilgan tenglamani

$$xp' - p = 0$$

ko'rinishiga keltiramiz. Uni yechib, $p(x) = C_1 x$ ni topamiz. Buni kiritilgan

$y' = p(x)$ almashtirishga qo'yib $y'(x) = C_1 x$ yoki $y(x) = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2$ umumiy yechimni hosil qilamiz.

Javob: $y(x) = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2$.

2-misol. $y'' = 2 \sin^3 y \cos y$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 1$ differensial tenglamani yeching.

Yechish. Tenglama tarkibiga x o'zgaruvchi oshkor kirmaydigan ikkinchi tartibli differensial tenglamadir. Uni $y' = p(y)$ almashtirish

yordamida darajasini pasaytiramiz. $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = p \cdot p'_y$

ekanligini e'tiborga olib,

$$p \cdot p'_y = 2 \sin^3 y \cos y$$

o'zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli tenglamani hosil qilamiz. Uning o'zgaruvchilarini ajratamiz va integrallaymiz.

$$p dp = 2 \sin^3 y \cos y dy$$

yoki

$$\int p dp = \int 2 \sin^3 y \cos y dy + \frac{C_1^2}{2}$$

yoki

$$\frac{p^2}{2} = \frac{\sin^4 y}{2} + \frac{C_1^2}{2}.$$

Boshlang'ich shartdan foydalansak $C_1 = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Natijada, $p(y) = \sin^2 y$ kelib chiqadi. Topilgan funktsiyani $y'(x) = p(y)$ belgilashga qo'ysak,

$$y' = \sin^2 y$$

ko'rinishdagi birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama hosil bo'ladi. Uni yechib,

$$\operatorname{ctgy} + x = C$$

ko'rinishdagi umumiy integralni topamiz. Yana boshlang'ich shartdan foydalansak $C = 1$ ekanligi kelib chiqadi. U holda berilgan tenglamaning hususiy integrali

$$\operatorname{ctgy} + x = 1$$

ko'rinishda bo'ladi.

Javob: $\operatorname{ctgy} + x = 1$.

7-§. Yuqori tartibli o'zgaras koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar

Nazariy tushunchalar. Ushbu

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

ko'rinishdagi tenglamaga n -tartibli o'zgaras koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama deyiladi. Bu yerda $a_1, a_2, \dots, a_n$ berilgan o'zgaras sonlar, $f(x)$ tenglamaning o'ng tomoni deb ataluvchi uzluksiz funksiya. Qaralayotgan tenglamaning umumiy yechimi uning o'ng tomoniga mos bo'lgan biror xususiy yechimi $y^*(x)$ bilan bir jinsli qismi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

n -tartibli o'zgaras koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi $\tilde{y}(x)$ larning yig'indisidan iboratdir.

$\tilde{y}(x)$ yechimni topish uchun quyidagi ishlarni bajarish lozim bo'ladi:

- 1) $k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0$ xarakteristik tenglama tuziladi.
- 2) xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1, k_2, \dots, k_n$ topiladi.
- 3) har bir karrali bo'lmagan k haqiqiy ildiz uchun e^{kx} ko'rinishdagi xususiy yechim yoziladi.
- 4) har bir juft karrali bo'lmagan $k = \alpha + i\beta$ kompleks ildiz uchun $e^{\alpha x} \cos \beta x$ va $e^{\alpha x} \sin \beta x$ xususiy yechimlar yoziladi.

5) har bir m karrali haqiqiy k ildiz uchun $e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx}, \dots, x^{m-1}e^{kx}$ chiziqli erkli xususiy yechimlar yoziladi.

6) har bir juft p karrali $k = \alpha + i\beta$ kompleks ildizlar uchun

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, x^2e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{p-1}e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, x^2e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{p-1}e^{\alpha x} \sin \beta x$$

chiziqli erkli xususiy yechimlar yoziladi.

7) Topilgan chiziqli erkli xususiy $y_1, y_2, \dots, y_n$ yechimlardan foydalanib

$$\tilde{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

ko'rinishdagi umumiy yechim yoziladi.

Tenglamaning o'ng tomonidagi funksiyaning ba'zi ko'rinishlari uchun $y^*(x)$ xususiy yechimni topish usulini qisqacha bayon qilamiz:

1) $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ ko'rinishda bo'lsin. Bu yerda $P_n(x)$ n -tartibli ko'phad.

Agar α soni xarakteristik tenglamaning ildizlarining birortasi bilan ham ustma-ust tushmasa, u holda xususiy yechim $y^*(x) = e^{\alpha x} Q_n(x)$ ko'rinishda qidiriladi. Bu yerda $Q_n(x)$ n -tartibli noma'lum koeffitsiyentli ko'phad bo'lib, uning koeffitsiyentlari noma'lum koeffitsiyentlar usuli bilan topiladi.

Agar α soni xarakteristik tenglamaning biror m karrali ildizi bilan ustma-ust tushib qolsa, u holda xususiy yechim $y^*(x) = x^m e^{\alpha x} Q_n(x)$ ko'rinishda qidiriladi.

2) $f(x) = e^{\alpha x} (U_p(x) \cos \beta x + W_q(x) \sin \beta x)$ ko'rinishida bo'lsin. Bu yerda $U_p(x), W_q(x)$ - mos ravishda p va q -tartibli ko'phadlar.

Agar $\alpha + i\beta$ kompleks soni xarakteristik tenglamaning hech qaysi ildizi bilan ustma-ust tushmasa, u holda xususiy yechim

$$y^*(x) = e^{\alpha x} (N_s(x) \cos \beta x + M_s(x) \sin \beta x)$$

ko'rinishida qidiriladi. Bu yerda $N_s(x), M_s(x)$ - mos ravishda noma'lum koeffitsiyentli s -tartibli ko'phadlar ($s = \max\{p; q\}$) bo'lib, ularning koeffitsiyentlari noma'lum koeffitsiyentlar usuli bilan topiladi.

Agar $\alpha + i\beta$ kompleks soni xarakteristik tenglamaning biror l karrali kompleks ildizi bilan ustma-ust tushib qolsa, u holda xususiy yechim

$$y^*(x) = x^l e^{\alpha x} (N_s(x) \cos \beta x + M_s(x) \sin \beta x)$$

ko'rinishida qidiriladi.

1-misol. $y''' + 5y'' = 7e^{3x}$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglama uchinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamadir.

1) uning bir jinsli qismiga mos bo'lgan $\tilde{y}(x)$ umumiy yechimini topamiz.

Xarakteristik tenglama

$$k^3 + 5k^2 = 0$$

$k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = -5$ ko'rinishda haqiqiy ildizlarga ega. $k = 0$ ikki karali ildiz. Shuning uchun umumiy yechim

ko'rinishda bo'ladi.

2) $f(x) = 7e^{3x}$ ko'rinishga ega. Bundan ko'rinadiki $\alpha = 3$, $U_0(x) = 7$, $\beta = 0$. $\alpha + i\beta = 3 + 0 \cdot i$ kompleks ildiz xarakteristik tenglamaning birorta ham ildizi bilan ustma-ust tushmaydi. Shuning uchun xususiy yechim

$$y^*(x) = e^{3x}(A \cos 0 \cdot x + B \sin 0 \cdot x)$$

ko'rinishda qidiriladi. Endi noma'lum koeffitsiyentlari A va B larni topamiz. Buning uchun $y^*(x)$ yechimni berilgan tenglamaga qo'yib bir xil ifodalar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtiramiz. Natijada ushbu

$$y' = 3Ae^{3x},$$

$$y'' = 9Ae^{3x},$$

$$y''' = 27Ae^{3x},$$

$$27Ae^{3x} + 45Ae^{3x} = 7e^{3x},$$

$$72A = 7,$$

$$A = \frac{7}{72}.$$

Berilgan tenglamaning $y^*(x)$ xususiy yechimi $y^*(x) = \frac{7}{72}e^{3x}$ ko'rinishda bo'ladi.

2) Topilgan umumiy $\tilde{y}(x)$ va xususiy $y^*(x)$ yechimlarini qo'shib, berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = \tilde{y}(x) + y^*(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{-5x} + \frac{7}{72}e^{3x}.$$

Javob: $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-5x} + \frac{7}{72}e^{3x}.$

2-misol. $y'' - 2y' + 10y = 2\sin 3x + 5\cos x$ tenglamani yeching.

Yechish. Avval $y'' - 2y' + 10y = 0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimni topamiz. Uning $k^2 - 2k + 10 = 0$ xarakteristik tenglamasi ildizlari $k_{1,2} = 1 \pm 3i$. $\alpha = 1$ va $\beta = 3$ bo'lgani uchun umumiy yechim $y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ ko'rinishda bo'ladi. Berilgan tenglamaning o'ng

tomoni turli argumentli trigonometrik funksiyalardan iborat bo'lgani uchun xususiy yechimni ikki xil argumentli trigonometrik funksiyalar yig'indisi ko'rinishda izlaymiz: $y_1 = A \cos 3x + B \sin 3x + C \cos x + D \sin x$.

Uning hosilalarini topib:

$$y_1' = -3A \cos 3x + 3B \sin 3x - C \sin x + D \cos x,$$

$$y_1'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x - C \cos x - D \sin x$$

berilgan tenglamaga qo'yamiz va bir hil argumentli trigonometrik funksiyalar oldidagi koeffitsientlarni tenglashtiramiz:

$$-9A \cos 3x - 9B \sin 3x - C \cos x - D \sin x + 6A \sin 3x - 6B \cos 3x + 2C \sin x - 2D \cos x + 10A \cos 3x + 10B \sin 3x + 10C \cos x + 10D \sin x = 2 \sin 3x + 5 \cos x;$$

$$\cos 3x: \quad 0 = -9A - 6B + 10A,$$

$$\sin 3x: \quad 2 = -9B + 6A + 10C,$$

$$\cos x: \quad 5 = -C - 2D + 10C,$$

$$\sin x: \quad 0 = -D + 2C + 10D.$$

$$\text{Hosil bo'lgan sistemani yechib, } A = \frac{12}{37}, B = \frac{2}{37}, C = \frac{9}{17} \text{ va } D = -\frac{2}{17}$$

larni topamiz. Qaralayotgan bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{2}{37} (6 \cos 3x + \sin 3x) + \frac{1}{17} (9 \cos x - 2 \sin x)$$

ko'rinishda bo'ladi.

$$\text{Javob: } y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{2}{37} (6 \cos 3x + \sin 3x) + \frac{1}{17} (9 \cos x - 2 \sin x).$$

$$\text{3-misol. } y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1} \text{ tenglamani yeching.}$$

Yechish. $y'' - 2y' + y = 0$ tenglama uchun xarakteristik tenglamani tuzamiz: $k^2 - 2k + 1 = 0$. Bu tenglama ildizlari $k_1 = k_2 = 1$ bo'lgani uchun bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\tilde{y} = (C_1 + C_2 x)e^x$ bo'ladi.

O'zgarmaslarni variatsiyalash usulidan foydalanib, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning yechimini $y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$ ko'rinishda izlaymiz, bu yerda $C_1(x)$ va $C_2(x)$ sistemadan topiladi. $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$

$$\text{belgilanib, } \begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0, \\ C_1' e^x + C_2' (1+x) e^x = \frac{e^x}{x^2 + 1} \end{cases} \text{ sistemani hosil qilamiz. Uni yechib}$$

$C_1' = -\frac{x}{x^2+1}$, $C_2' = \frac{1}{x^2+1}$ larni topamiz. Oxirgi ifodalarni integrallab

$C_1 = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \bar{C}_1$, $C_2 = \arctg x + \bar{C}_2$ larni topamiz.

Ularni umumiy yechimga qo'yib,

$$y = \left(C_1 + C_2 x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + x \arctg x \right) e^x$$

ni hosil qilamiz.

Javob: $y = \left(C_1 + C_2 x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + x \arctg x \right) e^x$.

II BOB. QATORLAR NAZARIYASI

1-§. Sonli qatorlar. Umumiy tushunchalar

Nazariy tushunchalar. Agar ushbu

$$a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots$$

sonlar ketma-ketligi qaralayotgan bo'lsa, u holda quyidagi

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

yig'indiga sonli qator deyiladi. Bu yerda $a_1; a_2; a_3; \dots$ -qatorning hadlari, a_n -qatorning umumiy hadi deb yuritiladi.

Ushbu

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

dastlabki n ta hadining yig'indisiga qaralayotgan qatorning xususiy yig'indisi deyiladi.

Agar ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

chekli limit mavjud bo'lsa, u holda qatorni yaqinlashuvchi, S sonni esa uning yig'indisi deyiladi.

Agar qaralayotgan chekli limit mavjud bo'lmasa, u holda qatorni uzoqlashuvchi deyiladi va uning yig'indisi ham mavjud bo'lmaydi.

Misol. Ushbu

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

qatorning yig'indisini toping.

Yechish. Avvalom bor qatorning umumiy hadini keltirib chiqaramiz.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)}, \\ a_2 &= \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{(2 \cdot 2 - 1)(2 \cdot 2 + 1)}, \\ a_3 &= \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{(2 \cdot 3 - 1)(2 \cdot 3 + 1)}, \\ &\dots, \\ a_n &= \frac{1}{(2 \cdot n - 1)(2 \cdot n + 1)}. \end{aligned}$$

Ularni quyidagicha yozib chiqamiz:

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right),$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right),$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right),$$

$$\dots,$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Xususi yig'indini tuzamiz:

$$\begin{aligned} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

Uning limitini topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Javob: qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $\frac{1}{2}$ ga teng.

2-§. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti

Nazariy tushunchalar. Agar ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

o'rinli bo'ladi. Shu shartga qator yaqinlashishining zaruriy sharti deb yuritiladi. Chunki zaruriy shart bajarilsa qaralayotgan qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin. Ammo, zaruriy shart bajarilmasa, qator albatta uzoqlashuvchi bo'ladi.

1-misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ qatorni zaruriy shart yordamida yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = 0.$$

Zaruriy shart bajarildi. Qatorni yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham deb bo'lmaydi. Ammo, yuqoridagi misoldan bilamizki, bu qator yaqinlashuvchi.

2-misol. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ qatorni zaruriy shart yordamida yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $a_n = \frac{1}{n},$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Zaruriy shart bajarildi. Yana qatorni yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham deb bo'lmaydi. Ammo, ma'lumki garmonik qator uzoqlashuvchi.

3-misol. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}$ qatorni zaruriy shart yordamida yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $a_n = \frac{2n}{3n+1},$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{2}{3}.$$

Zaruriy shart bajarilmadi. Demak, qator uzoqlashuvchi.

3-§. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning solishtirish belgilari

Nazariy tushunchalar. Birinchi solishtirish belgisi. Agar ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

va

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$$

musbat hadli sonli qatorlar berilgan bo'lib,

$$a_n \leq b_n \quad (n=1,2,3,\dots)$$

Shart bajarilgan bo'lsa, u holda ikkinchi qatorning yaqinlashuvchi ekanligidan birinchi qatorning ham yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi va aksincha, birinchi qatorning uzoqlashuvchiligidan ikkinchi qatorning ham uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

Ikkinchi solishtirish belgisi.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ va } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

musbat hadli sonli qatorlar berilgan bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$$

chekli limit mavjud bo'lsa, u holda ikkala qator ham baravariga yaqinlashuvchi yoki baravariga uzoqlashuvchi bo'ladi.

Misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$ sonli qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ma'lumki, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ sonli qator yaqinlashuvchi, chunki u cheksiz kamayuvchi geometric progressiyani tashkil etadi. Shuningdek berilgan qatorning har bir hadi, bu qatorning mos hadlaridan kichik, ya'ni

$$\frac{1}{3^n + 1} < \frac{1}{3^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Solishtirishning birinchi belgisiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi.

Javob: yaqinlashuvchi.

4-§. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning D'alamber belgisi

Nazariy tushunchalar. D'alamber belgisi. Agar ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

musbat hadli sonli qator uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$$

chekli limit mavjud bo'lsa, u holda $D > 1$ bo'lganda qaralayotgan qator uzoqlashuvchi, $D < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi bo'ladi. $D = 1$ bo'lganda qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchiligi bilib bo'lmaydi.

Misol. $\frac{1}{5 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3}{5^2 \cdot 3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5^3 \cdot 4!} + \dots$ musbat hadli sonli qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ko'rinib turibdiki

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{5^n \cdot (n+1)!},$$

$$a_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{5^n \cdot (n+2)!}.$$

Bundan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{5^n \cdot (n+2)!} \cdot \frac{5^n \cdot (n+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \frac{2n+1}{5 \cdot (n+1)} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{5 \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)}$$

kelib chiqadi. Dalamber belgisiga ko'ra

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{5 \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{2}{5}.$$

Javob. $D < 1$. Qator yaqinlashuvchi.

5-§. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning Koshi belgisi

Nazariy tushunchalar. Koshi belgisi. Agar ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

musbat hadli sonli qator uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = C$$

chekli limit mavjud bo'lsa, u holda $C > 1$ bo'lganda qaralayotgan qator uzoqlashuvchi, $C < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi bo'ladi. $C = 1$ bo'lganda qatorning yaqinlashish yoki uzoqlashish masalasi ochiq qoladi.

Misol. $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{4n}$ musbat hadli sonli qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ko'rinib turibdiki

$$a_n = n^5 \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{4n}.$$

Bundan

$$\sqrt[n]{a_n} = n^{\frac{5}{n}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4n}$$

kelib chiqadi. Koshi belgisiga ko'ra

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{5}{n}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{5}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4n} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{5}{n}} = y \\
& \ln \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{5}{n}} = \ln y \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \ln n}{n} = \ln y \\
& 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \ln y \\
& \Rightarrow 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \ln y \Rightarrow 1 \cdot 0 = 0. \\
& \frac{1}{x} \\
& 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} = \ln y \\
& 5 \cdot 0 = \ln y \\
& 0 = \ln y \\
& y = 1
\end{aligned}$$

Javob: $C < 1$. Qator yaqinlashuvchi.

6-§. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning integral belgisi

Nazariy tushunchalar. Integral belgi. Agar ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Musbat hadli sonli qatorning hadlari o'smaydigan bo'lib, shunday o'smaydigan uzluksiz $f(x)$ funksiya topilsaki,

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \dots, f(n) = a_n$$

shart bajarilsa, u holda

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi ekanligidan qaralayotgan qatorning ham yaqinlashuvchiligi, uzoqlashuvchi ekanligidan uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

Misol. $\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} + \dots + \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} + \dots$ musbat hadli sonli qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ko'rinib turibdiki

$$a_1 = \frac{1}{2 \ln 2}, a_2 = \frac{1}{3 \ln 3}, a_3 = \frac{1}{4 \ln 4}, \dots, a_n = \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}, \dots$$

qatorning hadlari kamayib bormoqda. Shuningdek,

$$f(x) = \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)}$$

funksiya mavjudki,

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \dots, f(n) = a_n$$

shart bajariladi. Hamda, ushbu

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{d \ln(x+1)}{\ln(x+1)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \ln(x+1) \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(\ln(b+1)) - \ln \ln 2) = \infty \end{aligned}$$

o'rinli bo'lib, xosmas integral uzoqlashuvchi. Integral belgidan kelib chiqadiki, qaralayotgan qator ham uzoqlashuvchi.

Javob: uzoqlashuvchi.

7-§. Tarkibida manfiy hadlari bo'lgan sonli qatorlar

Nazariy tushunchalar. Leybnits belgisi. Ushbu

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$$

ishoralari ketma-ket almashinuvchi sonli qator uchun quyidagi

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$$

va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

shartlar bajarilgan bo'lsa, u holda qaralayotgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi va uning yig'indisi musbat bo'lib, birinchi haddan katta bo'lmaydi.

Absolyut yaqinlashish. Ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

tarkibida manfiy hadlari bo'lgan sonli qatorning hadlarining absolyut qiymatlaridan tashkil topgan

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qaralayotgan qatorni absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.

Shartli yaqinlashish. Ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Tarkibida manfiy hadlari bo'lgan sonli qatorning hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator uzoqlashuvchi bo'lib, ammo qatorning o'zi

Leybnits belgisiga ko'ra yaqinlashuvchi bo'lsa qaralayotgan qatorni shartli yaqinlashuvchi qator deyiladi.

Uzoqlashish. Agar tarkibida manfiy hadlari bo'lgan sonli qator absolyut ham, shartli ham yaqinlashmasa, u holda uni uzoqlashuvchi qator deyiladi.

1-misol. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^n}$ ishoralari ketma-ket almashib keladigan sonli qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Qaralayotgan qator absolyut yaqinlashadimi? Ko'rinib turibdiki

$$a_1 = (-1)^2 \sin \frac{\pi}{2},$$

$$a_2 = (-1)^3 \sin \frac{\pi}{4},$$

$$a_3 = (-1)^4 \sin \frac{\pi}{8},$$

...

$$a_n = (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

Qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tashkil topgan qatorni tuzamiz:

$$|a_1| = 1,$$

$$|a_2| = \sin \frac{\pi}{4},$$

$$|a_3| = \sin \frac{\pi}{8},$$

...

$$|a_n| = \sin \frac{\pi}{2^n},$$

$$|a_{n+1}| = \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Bundan

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^n}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin \frac{\pi}{2^n}} \cdot \frac{1}{2}$$

hosil bo'ladi. Dalamber belgisiga ko'ra

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \frac{\pi}{2^n} \rightarrow 0 \\ \frac{\pi}{2^{n+1}} \rightarrow 0}} \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin \frac{\pi}{2^n}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Demak, $D < 1$. Qaralayotgan qator absolyut yaqinlashuvchi.

Javob: absolyut yaqinlashuvchi.

2-misol. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$ ishoralari ketma-ket almashinuvchi sonli qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. 1) Absolyut yaqinlashadimi? Ko'rinib turibdiki, berilgan qatorning hadlarini absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

sonli qator uzoqlashuvchi. Haqiqatdan ham, integral belgiga ko'ra

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty.$$

Xosmas integral uzoqlashuvchiligidan, qator ham uzoqlashuvchi. Demak, qaralayotgan qator absolyut yaqinlashmaydi.

2) Shartli yaqinlashadimi? Leybnits belgisining shartlari bajariladi. Haqiqatdan ham

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots > \frac{1}{n} > \dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Demak, qaralayotgan qator shartli yaqinlashuvchi.

Javob: shartli yaqinlashuvchi.

8-§. Funksional qatorlar

Nazariy tushunchalar. Har bir hadi x o'zgaruvchining funksiyasi bo'lgan ushbu

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

ko'rinishdagi qator funksional qator deyiladi.

Argumentning $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x)$ funksiyalar aniqlangan va $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ qator yaqinlashuvchi bo'ladigan qiymatlar to'plamiga, funksional qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi.

Argumentning yaqinlashish sohasidan olingan har bir qiymatida

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

o'rinli bo'ladi. $S(x)$ funksiyaga funksional qatorning yig'indisi deyiladi.

Veyershtrass belgisi. Agar biror oraliqda

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots$$

funksiyalarning har birini absolyut qiymati ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

musbat hadli yaqinlashuvchi sonli qatorning mos hadlaridan katta bo'lmasa, u holda qaralayotgan oraliqda

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

funksional qator tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar qaralayotgan funksional qator bir oraliqda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uni shu oraliqda hadma-had integrallash mumkin.

Agar qaralayotgan funksional qator va uning hadlarining hosilalaridan tashkil topgan funksional qator bir oraliqda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qaralayotgan funksional qatorni shu oraliqda hadma-had differensiallasa bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$\cos x + \frac{1}{2^2} \cos^2 2x + \frac{1}{3^2} \cos^3 3x + \dots + \frac{1}{n^2} \cos^n nx + \dots$$

funksional qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ko'rinib turibdiki,

$$u_1(x) = \cos x, |u_1(x)| = |\cos x| \leq 1,$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2^2} \cos^2 2x, |u_2(x)| = \left| \frac{1}{2^2} \cos^2 2x \right| \leq \frac{1}{2^2},$$

$$u_3(x) = \frac{1}{3^2} \cos^3 3x, |u_3(x)| = \left| \frac{1}{3^2} \cos^3 3x \right| \leq \frac{1}{3^2},$$

...

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2} \cos^n nx, |u_n(x)| = \left| \frac{1}{n^2} \cos^n nx \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Shuningdek, ushbu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

musbat hadli sonli qator integral belgiga ko'ra yaqinlashuvchi. Haqiqatdan ham

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1.$$

Veyershtrass belgisiga ko'ra, berilgan funksional qator butun sonlar o'qida tekis yaqinlashadi.

Javob: $x \in R$ da tekis yaqinlashuvchi.

9-§. Darajali qatorlar

Nazariy tushunchalar. Ushbu

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

ko'rinishdagi funksional qatorni darajali qator deyiladi.

Agar darajali qator biror noldan farqli $x = x_0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda u $|x| < |x_0|$ shartni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalarda absolyut yaqinlashadi (Abel teoremasi).

Abel teoremasiga ko'ra, darajali qator uchun $(-R; R)$ oraliq mavjud bo'ladiki, u bu oraliqda absolyut yaqinlashadi, oraliqning tashqarisida uzoqlashadi, oraliqning chegaralarida esa uni sonli qatorga aylantirib alohida tekshirish lozim bo'ladi. R soniga darajali qatorning yaqinlashish radiusi deyiladi. Uni quyidagi formulalardan foydalanib topish mumkin:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

yoki

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Ushbu

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

ko'rinishdagi darajali qatorni $x = x_0$ nuqtani o'z ichiga olgan oraliqda barcha tartibdagi hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun yozilgan Teylor qatori deyiladi.

Ushbu

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

ko'rinishdagi darajali qatorni $x = 0$ nuqtani o'z ichiga olgan oraliqda barcha tartibdagi hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun yozilgan Makloren qatori deyiladi.

Ba'zi elementar funksiyalarni Makloren qatoriga yoyilishi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots, \quad x \in R, \\
\operatorname{sh} x &= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad x \in R, \\
\operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \dots, \quad x \in R, \\
\sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad x \in R, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \dots, \quad x \in R, \\
(1+x)^m &= 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \\
&\quad + \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots, \quad \begin{cases} x \in [-1;1], & m \geq 0 \\ x \in (-1;1], & m \in (-1;0), \\ x \in (-1;1), & m \leq -1 \end{cases} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in (-1;1], \\
\operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad x \in [-1;1].
\end{aligned}$$

Misol. $f(x) = \frac{7}{12-x-x^2}$ funksiyani Makloren qatoriga yoying.

Yechish. Berilgan funksiyani ikkita elementar funksiyalarga ajratib, $(1-x)^m$ binomial qatorni Makloren qatoriga yoyilmasidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned}
\frac{7}{12-x-x^2} &= \frac{7}{(3-x)(4+x)} = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{4+x} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{3}\right)^{-1} + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{-1} \Rightarrow \\
&\Rightarrow (m = -1) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{4}\right)^n = \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{4^n}\right) \cdot x^n.
\end{aligned}$$

Javob: $\frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{4^n}\right) x^n, \quad x \in (-1;1).$

10-§. Fur'e qatori

Nazariy tushunchalar. Ushbu $[-\pi; \pi]$ kesmada aniqlangan va davri 2π gat eng bo'lgan $f(x)$ funksiyaning Fur'e qatori deb quyidagi triganometrik qatorga aytiladi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

Bu yerda

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

Fur'e koeffitsiyentlaridir.

Drixle sharti. Agar davri 2π bo'lgan $f(x)$ funksiya $[-\pi; \pi]$ kesmada bo'lakli monoton va chegaralangan bo'lsa, u holda bu funksiya uchun yozilgan Fur'e qatori qaralayotgan kesmaning barcha nuqtalarida yaqinlashuvchi bo'ladi. Uning yig'indisi $S(x)$:

- 1) Qaralayotgan funksiyaning uzluksiz nuqtalarida

$$S(x) = f(x);$$

- 2) Qaralayotgan funksiyaning I turdagi uzilish nuqtasi $x = x_0$ da

$$S(x_0) = \frac{1}{2} (f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0));$$

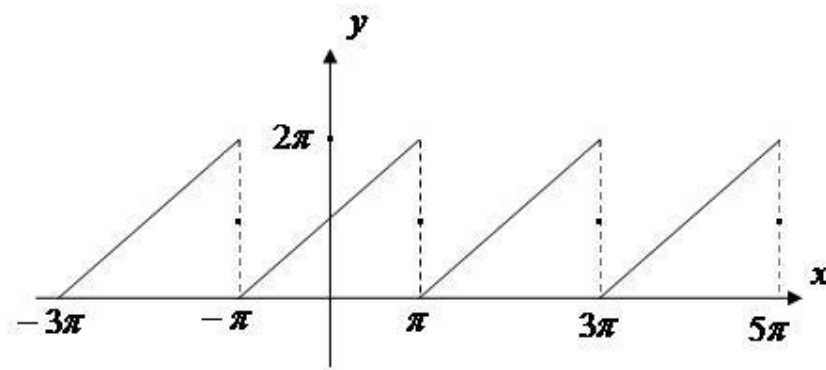
- 3) Kesmaning chekka nuqtalarida

$$S(\pm\pi) = \frac{1}{2} (f(-\pi + 0) + f(\pi - 0))$$

ko'rinishda bo'ladi.

Misol. Davri 2π bo'lgan $f(x) = \pi + x$ funksiyaning $[-\pi; \pi]$ kesmada Fur'e qatoriga yoying.

Yechish. Qaralayotgan funksiyaning grafigi quyidagi ko'rinishga ega:



Fur'e koefitsiyentlarini topamiz:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) dx = \frac{1}{2\pi} (\pi + x)^2 \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} ((\pi + \pi)^2 - (\pi - \pi)^2) = \frac{1}{2\pi} \cdot (2\pi)^2 = 2\pi, \\
 a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos mx dx = 0.
 \end{aligned}$$

Chunki, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \frac{1}{m} \sin mx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{m} (\sin \pi m + \sin \pi m) = \frac{2}{m} \sin \pi m = 0.$

Hamda ikkinchi integral ostidagi funksiya toq.

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \sin mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin mx dx.$$

Bunda quyidagilardan foydalansak:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx &= -\frac{1}{m} \cos mx \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{m} (\cos \pi m - \cos \pi m) = 0, \\
 \int_{-\pi}^{\pi} x \sin mx dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin mx dx, \quad v = -\frac{1}{m} \cos mx \end{array} \right| = -\frac{x}{m} \cos mx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \\
 &= -\frac{x}{m} \cos mx \Big|_{-\pi}^{\pi} + -\frac{1}{m^2} \sin mx \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\pi}{m} \cos m\pi - \frac{\pi}{m} \cos m\pi + \frac{1}{m^2} (\sin m\pi + \sin m\pi) = \\
 &= -\frac{2\pi}{m} \cos m\pi = -\frac{2\pi}{m} \cdot (-1)^m = \frac{2\pi}{m} \cdot (-1)^{m+1},
 \end{aligned}$$

u holda $b_m = \frac{2 \cdot (-1)^{m+1}}{m}$ hosil bo'ladi. Mos ravishda Fur'e qatori

$$f(x) = \pi + 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin mx = \pi + 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\textbf{Javob: } \pi + 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin mx.$$

III BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

1-§. Kombinatorika elementlari

Nazariy tushunchalar. n ta elementli to'plamda o'rnatilgan tartiblar soniga o'rin almashtirishlar deyiladi va $P_n = n!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$) formula bilan topiladi.

n ta elementli to'plamdan ajratilgan m ta elementli qism to'plamlarda o'rnatilgan tartiblar soniga o'rinlashtirishlar deyiladi va $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ formula bilan topiladi.

n ta elementli to'plamdan ajratilgan m ta elementli qism to'plamlar soniga (tartibning ahamiyati yo'q) guruhlash deyiladi va $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ formula bilan topiladi.

Shuningdek quyidagi formulalar o'rinli:

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m,$$

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1},$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Misol. Kuvshinda 10 ta qizil va 4 ta oq rangdagi gullar bor. Necha xil usul bilan kuvshindan uchta gul tanlab olsa bo'ladi?

Yechish. Tanlangan gullarning ikkitasi qizil va bittasi oq rangda bo'lsin. U holda ularni

$$C_{10}^2 \cdot C_4^1 = \frac{10!}{(10-2)!2!} \cdot \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4}{1} = 180$$

xil usul bilan tanlash mumkin.

Tanlangan gullarning bittasi qizil va ikkitasi oq rangda bo'lsin. U holda ularni

$$C_{10}^1 \cdot C_4^2 = \frac{10!}{(10-1)!1!} \cdot \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{10}{1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 60.$$

Tanlangan gullarning uchulasi qizil rangda bo'lsin. U holda ularni faqat qizil gullar orasidan tanlash mumkin:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Tanlangan gullarning uchalagi ham oq rangda bo'lsin. U holda ularni faqat oq gullar orasidan tanlash mumkin:

$$C_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!3!} = 4.$$

Hosil bo'lgan tanlashlar sonini qo'shib chiqsak, 364 xil usul hosil bo'ladi.

Javob: 364 xil usul bilan.

2-§. Hodisalar va ular ustida amallar

Nazariy tushunchalar. Tayin shartlar to'plami bajarilganda ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisaga tasodifiy hodisa deyiladi. Bundan keyin "tayin shartlar bajarildi" iborasining o'rniga "sinash o'tkazildi" iborasini ishlatamiz. Hodisani esa sinash natijasi sifatida qaraymiz. Masalan, mergan beshta sohaga ajratilgan nishonga qarata o'q uzmoqda. O'q uzilishi – sinash. O'qning nishonning tayin sohasiga tegishi – hodisa.

Sinash o'tkazilganda albatta ro'y beradigan hodisaga muqarrar hodisa deyiladi.

Sinash o'tkazilganda mutaqo ro'y bermaydigan hodisaga mumkin bo'lmagan hodisa deyiladi.

Sinash o'tkazilganda birining ro'y berishi qolganlarining ro'y berishini yo'qqa chiqaradigan hodisalarga birgalikda bo'lmagan hodisalar deyiladi. Masalan, mahsulotlar solingan qutidan tavakkaliga bitta mahsulot olindi. Olingan mahsulotni yaroqli bo'lish hodisasi, o'sha mahsulotni yaroqsiz bo'lish hodisasini yo'qqa chiqaradi. Bu hodisalar birgalikda emas.

Sinash o'tkazilganda faqat va faqat bittasining ro'y berishi mumkin bo'lgan hodisalarni yagona mumkin bo'lgan hodisalar deyiladi. Masalan, tanga ikki marotaba tashlanganda "gerb, gerb", "gerb, raqam", "raqam, gerb", "raqam, raqam" hodisalaridan bittasi va faqat bittasi ro'y beradi. Bular yagona mumkin bo'lgan hodisalaridir.

Sinash o'tkazilganda hodisalardan birining ro'y berishi mumkinroq deyish asos bo'lmasa, ularni teng inkoniyatli hodisalar deyiladi.

Sinashning yagona mumkin bo'lgan hodisalari to'plamiga to'la grupp deb ataladi. Masalan, mergan nishonga qarata ikkita o'q uzdi. Nishonga bitta o'q tegishi, nishonga ikkita o'q tegishi, nishonga o'q tegmasligi hodisalari to'la gruppani tashkil etadi.

To'la gruppani tashkil qiluvchi yagona mumkin bo'lgan ikkita hodisaga qarama-qarshi hodisalar deyiladi. Masalan, mergan nishonga

qarata o'q uzdi. O'qning nishonga tegishi va o'qning nishonga tegmasligi hodisalari qarama-qarshi hodisalardir.

Sinash o'tkazilganda hodisalardan birining ro'y berishi yoki bermasligi ikkinchisining ro'y berishi yoki ro'y bermasligiga bog'liq bo'lmasa, ularni erkli hodisalar deyiladi. Masalan, tanga ikki marotaba tashlangan, birinchi safar gerbil tomoni tushishi, ikkinchi safar gerbil tomonining tushishi yoki tushmasligiga ta'sir etmaydi. Shuning uchun bu hodisalar erklidir.

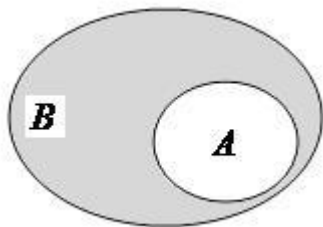
Sinash o'tkazilganda birining ro'y berishi ikkinchisining ro'y berishi yoki ro'y bermasligiga bog'liq bo'lgan hodisalarga bog'liq hodisalar deyiladi. Masalan, qutida qora va oq sharlar bor. Qutidan tavakkaliga bitta shar olinib, u qutiga qaytarib solinmaydi. U holda ikkinchi safar olingan sharning qora rangda bo'lishi, birinchi safar olingan sharning qora yoki oq rangda bo'lishiga bog'liqdir.

Sinash o'tkazilganda ro'y berishi mumkin bo'lgan har bir hodisaga elementar natija deb ataladi.

Tasodifiy hodisalar $A, B, C, \dots$ harflar bilan belgilanadi.

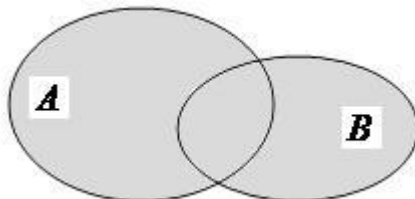
Tasodifiy hodisalar ustida amallar quyidagicha bajariladi:

1. A hodisani tashkil qiluvchi elementar natijalar B hodisaga ham tegishli bo'lsa, u holda A hodisa B hodisaga ergashadi deyiladi va $A \subset B$ ko'rinishda yoziladi.

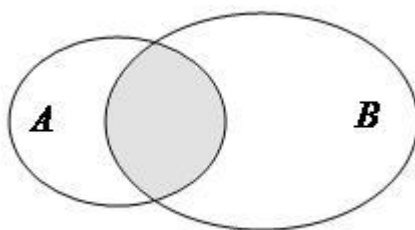


2. A hodisa B hodisani ergashtirsa, va aksincha B hodisa A hodisani ergashtirsa, u holda ularni teng deyiladi va $A = B$ ko'rinishda yoziladi.

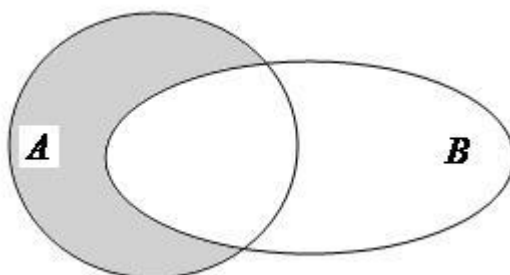
3. A va B hodisalarning yig'indisi deb A hodisa yoki B hodisa yoki ikkala hodisaning ham ro'y berishidan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi va $A \cup B$ ko'rinishda yoziladi.



4. A va B hodisalarning ko'paytmasi deb, bu hodisalarning birgalikda ro'y berishidan iborat hodisaga aytiladi va $A \cap B$ ko'rinishda yoziladi.

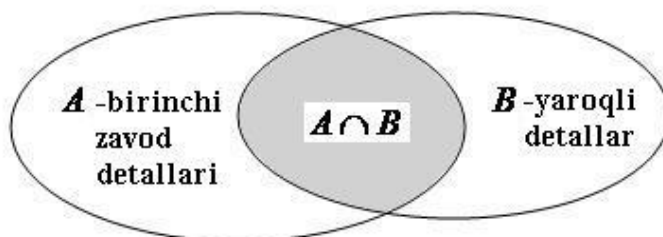


5. A va B hodisalarning ayirmasi deb, A hodisaning ro'y berishidan va B hodisaning ro'y bermasligidan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi va $A \setminus B$ ko'rinishda yoziladi.



Misol. Qutida birinchi va ikkinchi zavodlarda ishlab chiqarilgan yaroqli va yaroqsiz detallar bo'lib, qutidan tavakkaliga bitta detal olindi. A hodisa – olingan detalning birinchi zavodda ishlab chiqarilgan bo'lish, B hodisa esa yaroqli detal bo'lishi bo'lsa, u holda $A \cap B$ hodisa nimani anglatadi?

Yechish.



$A \cap B$ - birinchi zavodda ishlab chiqarilgan yaroqli detal chiqishini bildiradi.

Javob: hodisalarning birgalikda ro'y berishi.

3-§. Ehtimolning klassik ta'rifi. Nisbiy chastota. Geometrik ehtimol

Nazariy tushunchalar. Sinashning A hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi natijalari sonining sinashning yagona mumkin bo'lgan va teng imkoniyatli elementar natijalari jami soniga nisbatiga qaralayotgan A hodisaning ehtimoli deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Bu yerda, m - hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar soni; n - sinashning mumkin bo'lgan barcha elementar natijalar soni.

Ehtimolning xossalari:

- 1°. Muqarrar hodisaning ehtimoli birga teng.
- 2°. Mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimoli nolga teng.
- 3°. Tasodifiy hodisaning ehtimoli nol va bir orasida yotadi.
- 4°. Ixtiyoriy hodisaning ehtimoli $[0;1]$ kesmada yotadi.

Hodisa ro'y bergan sinashlar sonining aslida o'tkazilgan jami sinashlar soniga nisbatiga shu hodisaning nisbiy chastotasi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$w(A) = \frac{m}{n}.$$

Bu yerda, m - hodisaning ro'y berish soni, n - sinashlarning jami soni.

Agar S yassi figura, s yassi figuraning bo'lagi bo'lib, S figuraga tavakkaliga tashlangan nuqtaning s figuraga tushish ehtimoli bu figuralarga mutanosib bo'lib, uning S figuraga nisbatan joylashishiga ham, s ning formasiga ham bog'liq bo'lmasa, u holda nuqtaning s figuraga tushish ehtimoli

$$P = \frac{s \text{ ning yuzi}}{S \text{ ning yuzi}}$$

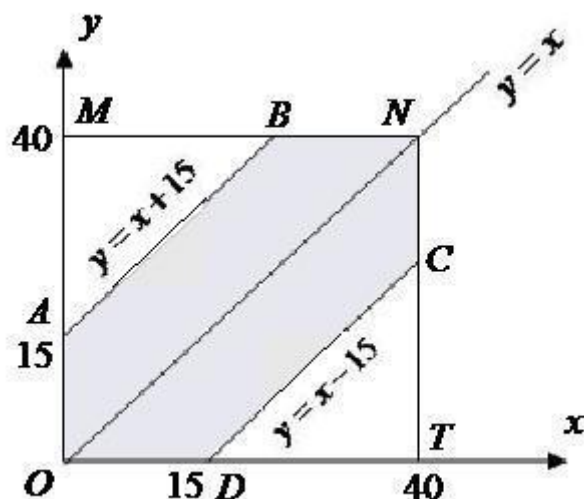
formula bilan topiladi.

Misol. Ikki talaba kunduzi soat 12²⁰ bilan 13⁰⁰ orasida institutning fontani oldida uchrashishga kelishib olishdi. Oldin kelgan talaba o'rtog'ini 15 daqiqa davomida kutib, u kelmasa ketib qoladi. Agar har bir talaba o'zining kelish vaqtini tavakkaliga tanlasa, ularning uchrashish ehtimolini toping.

Yechish. Birinchi va ikkinchi talabalarning uchrashishga kelish vaqtlarini mos ravishda x va y orqali belgilaymiz. Masalaning shartiga ko'ra

$$0 \leq x \leq 40, 0 \leq y \leq 40$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga kiritsak, bu tengsizliklarni $OMNT$ kvadratga tegishli bo'lgan ixtiyoriy nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi.



Agar talabalarining kelish vaqtlari orasidagi ayrima 15 daqiqdan kichik bo'lsa, talabalar uchrashishadi, ya'ni

$$x > y \text{ bo'lganda } x - y < 15 \text{ yoki } y > x - 15,$$

$$y > x \text{ bo'lganda } y - x < 15 \text{ yoki } y < x + 15$$

shartlar bajarilganda ular uchrashishadi. Shakldan ko'rinadiki, $OABNCD$ olti burchakga tegishli nuqtaning koordinatalari vaqtning talabalarining uchrashishiga qulaylik tug'diruvchi daqiqalaridir. Ma'lum bo'ladiki, s yassi figura sifatida oltiburchakni, S yassi figura sifatida esa kvadratni olish mumkin. U holda izlanayotgan ehtimol:

$$P = \frac{s \text{ ning yuzi}}{S \text{ ning yuzi}} = \frac{S_{kv} - 2S_{\triangle AMB}}{S_{kv}} = \frac{40^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}(40-15)^2}{40^2} = \frac{39}{64}.$$

Javob: $\frac{39}{64}.$

4-§. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari

Nazariy tushunchalar. Agar A va B hodisalar birgalikda bo'lmasa, u holda

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

o'rinli bo'ladi.

Agar A va B hodisalar birgalikda bo'lsa, u holda

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

o'rinli bo'ladi.

Agar A va B hodisalar erkli bo'lsa, u holda

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

o'rinli bo'ladi.

Agar A va B hodisalar bog'liq bo'lsa, u holda

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

o'rinli bo'ladi. Bu yerda $P_A(B)$ va $P_B(A)$ shartli ehtimollar bo'lib, B hodisaning A hodisa ro'y berdi degan farazda hisoblangan hamda A hodisaning B hodisa ro'y berdi degan farazda hisoblangan ehtimollaridir.

Misol. Qutida 4 ta oq va 6 ta qora sharlar bor. Qutidan tavakkaliga bitta shar olinib, u qutiga qaytarib solinmasdan, undan tavakkaliga yana bitta shar olindi. Olingan sharlardan birinchisi oq, ikkinchisi esa qora bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. A hodisa – birinchi olingan sharning oq bo'lishi. Uning ehtimoli:

$$P(A) = \left| \frac{m=4}{n=10} \right| = \frac{m}{n} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

B hodisa – ikkinchi olingan sharning qora bo'lishi, bu yerda shart bor: birinchi olingan shar oq. B hodisaning shartli ehtimoli:

$$P_A(B) = \left| \frac{m=6}{n=9} \right| = \frac{m}{n} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Izlanayotgan ehtimol bog'liq hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasiga asosan quyidagiga teng bo'ladi:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}.$$

Javob: $\frac{4}{15}.$

5-§. To'la ehtimol va Beyes formulalari

Nazariy tushunchalar. To'la grupp tashkil etuvchi birgalikda bo'lmagan $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ hodisalardan bittasining ro'y berganlik shartidagina ro'y beradigan A hodisaning ehtimoli:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)$$

formula bilan topiladi.

Agar A hodisa ro'y bergan bo'lsa, u holda gipotezalar deb ataluvchi $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ hodisalarning ehtimollari ushbu

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

Beyes formulasi bilan topiladi.

Misol. Birinchi qutida 6 ta oq va 4 ta qora, ikkinchi qutida esa 4 ta oq va 6 ta qora sharlar bor. Birinchi qutidan tavakkaliga bitta shar olinib ikkinchi qutiga solindi. So'ngra ikkinchi qutidan tavakkaliga bitta shar olindi. Olingan sharning oq rangda bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. B_1 - birinchi qutidan tavakkaliga olinib ikkinchi qutiga solinayotgan sharning oq bo'lishi. Uning ehtimoli:

$$P(B_1) = \frac{|m=6|}{n=10} = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

B_2 - birinchi qutidan tavakkaliga olinib ikkinchi qutiga solinayotgan sharning qora bo'lishi. Uning ehtimoli:

$$P(B_2) = \frac{|m=4|}{n=10} = \frac{m}{n} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

A - ikkinchi qutidan tavakkaliga olingan sharning oq bo'lishi. Agar birinchi qutidan ikkinchi qutiga oq shar solingan bo'lsa, u holda A hodisaning ehtimoli:

$$P_{B_1}(A) = \frac{|m=5|}{n=11} = \frac{m}{n} = \frac{5}{11}.$$

Agar birinchi qutidan ikkinchi qutiga qora shar solingan bo'lsa, u holda A hodisaning ehtimoli:

$$P_{B_2}(A) = \frac{|m=4|}{n=11} = \frac{m}{n} = \frac{4}{11}.$$

Birinchi qutidan ikkinchi qutiga qanday shar olinib solinishidan qat'iy nazar ikkinchi qutidan oq shar olinish ehtimoli to'la ehtimol formulasi bilan hisoblanadi.

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{11} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{11} = \frac{27}{55}.$$

Javob. $\frac{27}{55}.$

6-§. Sinashlarning takrorlanishi. Bernulli formulasi. Muavr-Laplasning lokal va integral teoremlari

Nazariy tushunchalar. Bernulli formulasi. Agar n ta erkli sinashning har birida g ta teng bo'lsa, u holda shu sinashlarda A hodisaning k marta ro'y berish ehtimoli

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

formula bilan topiladi. Bu yerda $q = 1 - p$ har bir sinashda A hodisaning ro'y bermaslik ehtimoli.

Muavr-Laplasning lokal teoremasi. Agar har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoli p o'zgarmas bo'lib, nol va birdan farqli bo'lsa, u holda n ta sinashda A hodisaning rosa k marta ro'y berish ehtimoli (n qancha katta bo'lsa, shuncha aniqlikda) ushbu

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

formula bilan topiladi. $\varphi(x)$ funksiyaning qiymatlari jadvallashtirilgan. $x > 4$ bo'lganda $\varphi(x)$ funksiyaning qiymati nolga teng deb olinadi.

Muavr-Laplasning integral teoremasi. Agar har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoli p o'zgarmas bo'lib, nol va birdan farqli bo'lsa, u holda n ta sinashda A hodisaning k_1 dan k_2 martagacha ro'y berish ehtimoli (n qancha katta bo'lsa, shuncha aniqlikda) ushbu

$$P_n(k_1, k_2) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

formula bilan topiladi. Laplas funksiyasi $\Phi(x)$ ning qiymatlari jadvallashtirilgan. $x > 5$ bo'lganda $\Phi(x)$ funksiyaning qiymati 0,5 ga teng deb olinadi.

1-misol. O'yin kubigi 5 marta tashlandi. 2 martasida besh ochko tushish ehtimolini toping.

Yechish. O'yin kubigi bir marta tashlanganda besh ochko tushish ehtimoli $p = \frac{1}{6}$, besh ochko tushmaslik ehtimoli $q = \frac{5}{6}$ ga teng. Bernulli formulasiga ko'ra,

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{125}{216} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 125}{2 \cdot 36 \cdot 216} = \frac{2500}{15552} = 0,16.$$

Javob: 0,16.

2-misol. Bitta o'q uzganda nishonga tegish ehtimoli 0,6 ga teng. 2400 marta o'q uzganda 1400 ta o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish. Muavr-Laplasning lokal teoremasidan foydalanish uchun x ni hisoblaymiz:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \left| \begin{array}{l} n = 2400 \\ k = 1400 \\ p = 0,6 \\ q = 0,4 \end{array} \right| = \frac{1400 - 2400 \cdot 0,6}{\sqrt{2400 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = -\frac{40}{24} = -1,67.$$

$\varphi(x)$ funksiya juft bo'lganligi uchun $\varphi(-1,67) = \varphi(1,67)$. Jadvaldan $\varphi(1,67) = 0,0989$. Izlanayotgan ehtimol

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

formulaga ko'ra:

$$P_{2400}(1400) = \frac{1}{\sqrt{2400 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} \cdot 0,0989 = 0,0041$$

ga teng bo'ladi.

Javob: 0,0041.

3-misol. Tanga 1000 marta tashlandi. 470 martadan 520 martagacha gerb tomoni bilan tushgan bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Bir marta tanga tashlaganda gerb tomoni bilan tushish ehtimoli $p = \frac{1}{2}$, gerb tomoni bilan tushmaslik ehtimoli $q = \frac{1}{2}$. Muavr-Laplasning integral teoremasidan foydalanish uchun x_1 va x_2 larni topamiz:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{470 - 1000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{-30}{15,81} = -1,89,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{520 - 1000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{20}{15,81} = 1,26.$$

$\Phi(x)$ funksiyaning toqligidan va uning qiymatlar jadvalidan $\Phi(x_1) = \Phi(-1,89) = -\Phi(1,89) = -0,4706$, $\Phi(x_2) = \Phi(1,26) = 0,3962$ larni aniqlab,

$P_{1000}(470, 520) \cong \Phi(1,26) - \Phi(-1,89) = 0,3962 - (-0,4706) = 0,8668$ ehtimolni topamiz.

Javob: 0,8668.

7-§. Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari

Nazariy tushunchalar. Avvaldan noma'lum bo'lgan va oldindan inobatga olib bo'lmaydigan tasodifiy sabablarga bog'liq bo'lgan hamda sinash natijasida bitta mumkin bo'lgan qiymat qabul qiluvchi miqdorga tasodifiy miqdor deyiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb, uning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarning mos ehtimollarga ko'paytmalari yig'indisiga aytiladi.

Agar X tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlarni mos ravishda $p_1, p_2, \dots, p_n$ ehtimollar bilan qabul qilsa, u holda uning $M(X)$ matematik kutilmasi ushbu

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Matematik kutilmaning xossalari.

1°. O'zgarmas miqdorning matematik kutilmasi shu o'zgarmasning o'ziga teng:

$$M(C) = C.$$

2°. O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilma belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$M(CX) = C \cdot M(X).$$

3°. Ikkita erkli tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi ularning matematik kutilmalarining ko'paytmasiga teng:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

4°. Ikkita tasodifiy miqdor yig'indisining matematik kutilmasi qo'shiluvchilarning matematik kutilmalarining yig'indisiga teng:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb, tasodifiy miqdorni o'zining matematik kutilmasidan chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Dispersiyani hisoblash uchun ushbu

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

formuladan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Dispersiyaning xossalari.

1°. O'zgarmas miqdorning dispersiyasi nolga teng:

$$D(C) = 0.$$

2°. O'zgaras ko'paytuvchini kvadrati bilan dispersiya ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$D(CX) = C^2 \cdot D(X).$$

3°. Ikkita erkli tasodifiy miqdor yig'indisining dispersiyasi qo'shiluvchilar dispersiyalarining yig'indisiga teng:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

4°. Ikkita erkli tasodifiy miqdor ayirmasining dispersiyasi ularning dispersiyalari yig'indisiga teng:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi deb, dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Misol. X diskret tasodifiy miqdor faqat ikkita x_1 va x_2 qiymatga ega, shu bilan birga $x_1 < x_2$. X ning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,9 ga teng. Matematik kutilmasi $M(X) = 1,2$ va o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma(X) = 0,6$ ni bilgan holda X ning taqsimot qonunini toping.

Yechish. Diskret tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini qabul qilish ehtimollari yig'indisi birga teng:

$$p_1 + p_2 = 1.$$

Bundan $p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,9 = 0,1$.

X ning taqsimot qonuni

X	x_1	x_2
P	0,9	0,1

$M(X)$ ni topamiz:

$$M(X) = 0,9x_1 + 0,1x_2.$$

X^2 ning taqsimot qonunini yozamiz:

X^2	x_1^2	x_2^2
P	0,9	0,1

$M(X^2)$ ni topamiz:

$$M(X^2) = 0,9x_1^2 + 0,1x_2^2.$$

Dispersiyani topamiz:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 0,9x_1^2 + 0,1x_2^2 - 1,44.$$

Shartga ko'ra $M(X) = 1,2$, $D(X) = (\sigma(X))^2 = 0,36$. Shulardan foydalansak, ushbu tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 0,9x_1 + 0,1x_2 = 1,2 \\ 0,9x_1^2 + 0,1x_2^2 = 1,8 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, $x_1 < x_2$ ekanligini hisobga olib, $x_1 = 1$ va $x_2 = 3$ ni topamiz. Natijada, izlanayotgan taqsimot qonuni hosil qilamiz

$$\begin{array}{ccc} X & 1 & 3 \\ P & 0,9 & 0,1 \end{array}$$

Javob. $\begin{array}{ccc} X & 1 & 3 \\ P & 0,9 & 0,1 \end{array}$

8-§. Tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining integral funksiyasi

Nazariy tushunchalar. Taqsimotning integral funksiyasi deb, har bir x qiymat uchun X tasodifiy miqdorning x dan kichik qiymat qabul qilish ehtimolini aniqlovchi $F(x)$ funksiyaga aytiladi.

$$F(x) = P(X < x).$$

Xossalari.

1°. Integral funksiyaning qiymatlari $[0;1]$ kesmaga tegishli:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

2°. Integral funksiya kamaymaydigan funksiyadir.

3°. Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari $(a;b)$ oraliqqa tegishli bo'lsa, u holda $x \leq a$ bo'lganda $F(x) = 0$ va $x \geq b$ bo'lganda $F(x) = 1$ bo'ladi.

Misol. X diskret tasodifiy miqdor ushbu

$$\begin{array}{ccc} X & 1 & 3 & 7 \\ P & 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{array}$$

taqsimot qonuni bilan taqsimlangan. Uning integral funksiyasini toping va grafigini chizing.

Yechish. Agar $x \leq 1$ bo'lsa, u holda $F(x) = 0$ (uchinchi xossa).

Agar $1 < x \leq 3$ bo'lsa, u holda $F(x) = 0,4$. Haqiqatdan ham, X miqdor 1 qiymatni 0,4 ehtimol bilan qabul qiladi.

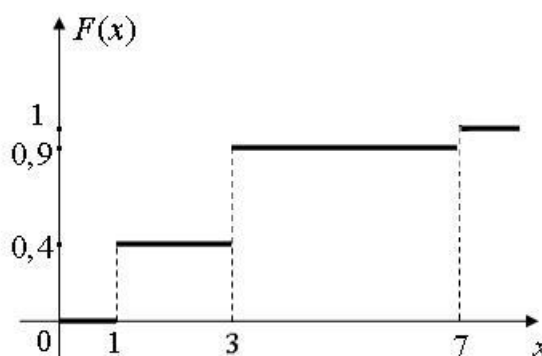
Agar $3 < x \leq 7$ bo'lsa, u holda $F(x) = 0,9$. Haqiqatdan ham, X ushbu $3 < x \leq 7$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $F(x)$ funksiya $X < x$ hodisaning ehtimoli bo'lib, bu hodisa X miqdor 1 qiymatni qabul qilganda yoki 4 qiymatni qabul qilganda ro'y beradi. Bu ikkita hodisa birgalikda bo'lmagani uchun qo'shish teoremasiga ko'ra $X < x$ hodisaning ehtimoli $0,4 + 0,5 = 0,9$ yig'indiga teng.

Agar $x > 7$ bo'lsa, u holda $F(x) = 1$ (uchunchi xossa).

Topilganlarga asoslanib, integral funksiyaning ko'rinishini yozamiz:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 1 \text{ bo'lsa} \\ 0,4, & \text{agar } 1 < x \leq 3 \text{ bo'lsa} \\ 0,9, & \text{agar } 3 < x \leq 7 \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x > 7 \text{ bo'lsa} \end{cases}.$$

Hosil qilingan funksiyaning grafigini chizamiz:



Javob:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 1] \\ 0,4, & x \in (1; 3] \\ 0,9, & x \in (3; 7] \\ 1, & x \in (7; \infty) \end{cases}.$$

9-§. Uzluksez tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasi

Nazariy tushunchalar. Taqsimotning zichlik funksiyasi $f(x)$ deb, integral funksiyadan olingan birinchi tartibli hosilaga aytiladi.

$$f(x) = F'(x).$$

Xossalari.

1°. Zichlik funksiya manfiy emas,

$$f(x) \geq 0.$$

2°. Zichlik funksiyadan butun sonlar o'qi bo'yicha olingan xosmas integral birga teng,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

3°. Mumkin bo'lgan qiymatlari $[a; b]$ kesmaga tegishli bo'lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx$$

aniq integralga teng.

4°. Mumkin bo'lgan qiymatlari $[a;b]$ kesmaga tegishli bo'lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(X))^2$$

ifodaga teng.

Misol. X uzluksiz tasodifiy miqdor integral funksiyasi ushbu

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x, & 0 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

ko'rinishda berilgan. Shu miqdorning zichlik funksiyasini, matematik kutilmasini, dispersiyasini toping. Integral va zichlik funksiyalarning grafiklarini chizing.

Yechish. Ta'rifga ko'ra:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

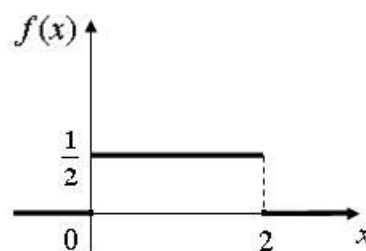
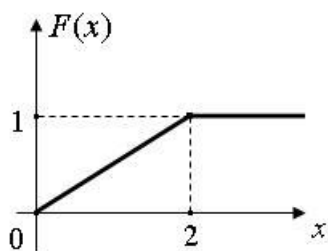
Matematik kutilmasini topamiz:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^2 = 1.$$

Dispersiyasini topamiz:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(X))^2 = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{2} dx - 1 = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 - 1 = \frac{8}{6} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Integral va zichlik funksiyalarining grafiklarini yasaymiz:



$$\text{Javob: } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 2, \quad M(X) = 1, \quad D(X) = \frac{1}{3} \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

10-§. Normal taqsimot

Nazariy tushunchalar. Zichlik funksiyasi ushbu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

ko'rinishda bo'lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimoti normal taqsimlangan yoki normal taqsimot deb yuritiladi.

Normal taqsimot ikkita parametr: a va σ bilan aniqlanadi. Bu yerda a normal taqsimotning matematik kutilmasi, σ o'rtacha kvadratik chetlanishidir.

Agar X tasodifiy miqdor normal qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lsa, u holda uning $(\alpha; \beta)$ oraliqqa tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

formula bilan topiladi. Bu yerda $\Phi(x)$ Laplas funksiyasi.

Misol. X tasodifiy miqdor normal qonun bo'yicha taqsimlangan. Bu miqdorning matematik kutilmasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi mos ravishda 60 va 20 ga teng. Shu tasodifiy miqdorning $(20; 100)$ oraliqqa tegishli qiymat qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish. Shartga ko'ra: $\alpha = 20$, $\beta = 100$, $a = 60$, $\sigma = 20$. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning berilgan oraliqdagi qiymatlarini qabul qilish ehtimolini topish formulasiga ko'ra:

$$\begin{aligned} P(20 < X < 100) &= \Phi\left(\frac{100 - 60}{20}\right) - \Phi\left(\frac{20 - 60}{20}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \\ &= \Phi(2) + \Phi(2) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544. \end{aligned}$$

Javob: 0,9544.

11-§. Matematik statistika elementlari

Nazariy tushunchalar. Bosh to'plamdan tanlanma olingan. Bunda x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta va hakoza kuzatilgan hamda

$\sum_{i=1}^k n_i = n$ bo'lsin. Kuzatilgan x_i qiymatlar variantalar, variantalarning ortib borish tartibida yozilgan ketma-ketligi esa variatsion qator deyiladi. Kuzatishlar sonini chastotalar, ularning tanlanma hajmiga nisbati

$$w_i = \frac{n_i}{n}$$

nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro'yxatiga aytiladi.

Taqsimotning empirik funksiyasi deb har bir x qiymat uchun $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydigan $F^*(x)$ funksiyaga aytiladi.

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}.$$

Bu yerda n_x - x dan kichik variantalar soni, n - tanlanma hajmi.

Xossalari:

1°. Empirik funksiyaning qiymatlari $[0,1]$ kesmaga tegishli.

2°. Empirik funksiya kamaymaydigan funksiyadir.

3°. Agar x_1 - eng kichik varianta bo'lsa, u holda $x \leq x_1$ da $F^*(x) = 0$, agar x_k - eng katta varianta bo'lsa, u holda $x > x_k$ da $F^*(x) = 1$ bo'ladi.

Chastotalar poligoni deb, kesmalari $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_k; n_k)$ nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi.

Nisbiy chastotalar poligoni deb, kesmalari $(x_1; w_1)$, $(x_2; w_2)$, ..., $(x_k; w_k)$ nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari l uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa $\frac{n_i}{n}$ nisbatlarga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakdan iborat pog'anaviy figuraga aytiladi.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari l uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa $\frac{w_i}{n}$ nisbatlarga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakdan iborat pog'anaviy figuraga aytiladi.

Misol. Tanlanmaning ushbu

variantalar X_i 3 5 9

chastotalar n_i 10 15 25

taqsimoti bo'yicha uning empirik funksiyasini toping va grafigini chizing.

Yechish. Tanlanma hajmini topamiz: $n = 10 + 15 + 25 = 50$. Eng kichik varianta 3 ga teng, demak

$$X \leq 3 \text{ da } F^*(x) = 0.$$

$X < 5$ qiymat, xususan $x_1 = 3$ qiymat 10 marta kuzatilgan, demak

$$3 < X \leq 5 \text{ da } F^*(x) = \frac{10}{50} = 0,2.$$

$X < 9$ qiymatlar, jumladan $x_1 = 3$ va $x_2 = 5$ qiymatlar $10 + 15 = 25$ marta kuzatilgan, demak

$$5 < X \leq 9 \text{ da } F^*(x) = \frac{25}{50} = 0,5.$$

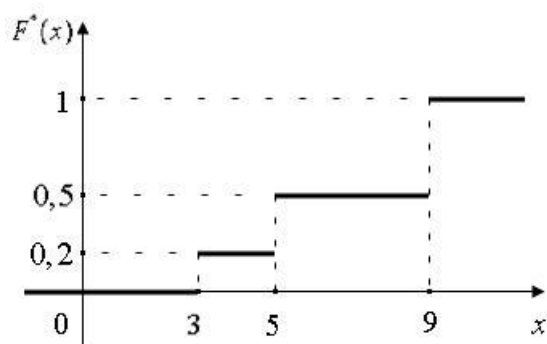
$X = 9$ eng katta varianta bo'lgani uchun

$$X > 9 \text{ da } F^*(x) = 1.$$

Topilganlarga asosanib, izlanayotgan empirik funksiyaning ko'rinishini yozamiz:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 3 \text{ bo'lsa} \\ 0,2, & \text{agar } 3 < x \leq 5 \text{ bo'lsa} \\ 0,5, & \text{agar } 5 < x \leq 9 \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x > 9 \text{ bo'lsa} \end{cases}.$$

Uning grafigini chizamiz.



$$\textbf{Javob: } F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \\ 0,2, & 3 < x \leq 5 \\ 0,5, & 5 < x \leq 9 \\ 1, & x > 9 \end{cases}.$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ funksiyaning qiymatlari.}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3856	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3696
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3604	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3189	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	1874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2631	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2466	2444
1,0	2420	2396	2372	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2056	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1624	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1466	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1136	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0308	0297	0290
2,3	0289	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0170	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139

2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2-ilova

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{ funksiyaning qiymatlari.}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147

1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41416	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49890	49893	49896	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49915	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
4,0	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49998	49998	49998	49998
$x =$ 4,1 4,2 4,3 4,4 4,5 $\Phi(x) =$ 0,499979 0,499986 0,499991 0,499995 0,499997										
$x =$ 4,6 4,7 4,8 4,9 5,0 $\Phi(x) =$ 0,499998 0,4999987 0,4999992 0,4999995 0,4999997										

3-ilova

$P_k(a) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ ning qiymatlari (Puasson taqsimoti).

$k \backslash a$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0905	1637	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659	3679
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647	1839
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0283	0494	0613
4	0000	0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111	0153
5	0000	0000	0000	0001	0002	0004	0007	0012	0020	0031

$k \backslash a$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	3679	2707	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011	0004
2	1839	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050	0023
3	0613	1805	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0150	0076
4	0153	0902	1660	1954	1755	1339	0912	0573	0337	0189
5	0031	0361	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607	0378
6	0005	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0001	0034	0216	0595	1044	137?	1490	1396	1171	0901
8	0000	0009	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9	0000	0002	0027	0132	0363	0688	1014	1241	1318	1251
10	0000	0000	0008	0062	0161	0413	0710	0993	1186	1251
11	0600	0000	0000	0019	0082	0077	0452	0722	0970	1137
12	0000	0000	0000	0006	0034	0113	0264	0481	0728	0946
13	0000	0000	0000	0002	0013	0052	0142	0296	0504	0729
14	0000	0000	0000	0001	0005	0022	0071	0169	0324	0521

Foydalanilgan adabiyotlar

1. G'aniyev I.G., Mansurov X.T., G'anixodjayev R.N., Egamberdiyev O.I., Isanov R.Sh. Oliy matematika. "Turon-Iqbol", 2013 yil.
2. Farmonov Sh.Q., Turgunboyev R.M., Sharipova L.D., Parpiyeva N.T. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent, 2012 yil.
3. Пискунов Н.С. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. II том, Тошкент, 1984 йил.
4. Гмурман В.Е. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Тошкент, 1977 йил.
5. Гмурман В.Е. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма. Тошкент, 1980 йил.
6. Karimov A.M., Eshqobilov A.A. Oliy matematikadan loyiha-hisob ishlarini bajarishda misol va masalalar yechish. I qism, Toshkent, 2014 yil.
7. Karimov A.M., Jukova L.G. Oliy matematikadan hisob-grafik ishlari. Toshkent, 2009 yil.
8. Karimov A.M., Mirsolihov E.A. Oddiy differensial tenglamalar. Toshkent, 2005 yil.
9. Yegamberdiyev B.T. Qatorlar. Toshkent, 2005 yil.
10. Sharipova L.D. Oliy matematikadan hisob-grafik ishlari bo'yicha misol va masalalar yechish. Toshkent, 2009 yil.
11. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Д. Высшая математика в упражнениях и задачах. Москва, 1986 г.

Mundarija

Kirish	3
I bob. Oddiy differensial tenglamalar	4
1-§. Birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan oddiy differensial tenglamalar	4
2-§. Birinchi tartibli bir jinsli va unga keladigan differensial tenglamalar	5
3-§. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar	8
4-§. Birinchi tartibli Bernulli differensial tenglamasi	11
5-§. To'liq differensialli tenglamalar	12
6-§. Darajalari pasaytirilib yechiladigan ikkinchi tartibli differensial tenglamalar	16
7-§. Yuqori tartibli o'zgaruvchilari koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar	17
II bob. Qatorlar nazariyasi	22
1-§. Sonli qatorlar. Umumiy tushunchalar	22
2-§. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti	23
3-§. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning solishtirish belgilari	24
4-§. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning Dalamber belgisi	25
5-§. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning Koshi belgisi	26
6-§. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning integral belgisi	27
7-§. Tarkibida manfiy hadlari bo'lgan sonli qatorlar	28
8-§. Funksional qatorlar	30
9-§. Darajali qatorlar	32

10-§. Fur'e qatori	34
III bob. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika	36
1-§. Kombinatorika elementlari	36
2-§. Hodisalar va ular ustida amallar	37
3-§. Ehtimolning klassik ta'rifi. Nisbiy chastota. Geometrik ehtimol	39
4-§. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari	41
5-§. To'la ehtimol va Bayes formulalari	42
6-§. Sinashlarning takrorlanishi. Bernulli formulasi. Muavr-Laplasning lokal va integral teoremlari	43
7-§. Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalarini	46
8-§. Tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining integral funksiyasi	48
9-§. Uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasi ...	49
10-§. Normal taqsimot	51
11-§. Matematik statistika elementlari	51
1-ilova: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiyaning qiymatlari	54
2-ilova: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ funksiyaning qiymatlari	55
3-ilova: $P_k(a) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ ning qiymatlari (Puasson taqsimoti)	57
Foydalanilgan adabiyotlar	58

Alisher Karimov, Alisher Eshqobilov

**OLIY MATEMATIKADAN LOYIHA-HISOB ISHLARINI
BAJARISHDA MISOL VA MASALALAR YECHISH**

(II qism)

Uslubiy qo'llanma

Muharrir: Begmatova Z.D.
Texnik muharrir va sahifalovchi: Tashbaeva M.X.

Nashrga ruxsat etildi 04.10.2011 y.
Qog'oz bichimi 60×84/16. Hajmi 2,3 b.t.
Adadi 10 nusxa. Buyurtma №2/3
ToshTYMI bosmaxonasida chop etildi
Toshkent sh., Odilxo'jaev ko'chasi, 1uy

Toshkent temir yo'l muhandislari instituti, 2015y.