А.В.Архангельский, В.И.Пономарев

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

517.

А.В. Архангельский, В.И. Пономарев

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ





ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI
DENOV FILIALI ARM
№ 2157

517.6
А 87
УДК 513.83

Кто
mud
О
п
517

Книга вводит читателя в область основных понятий и методов общей топологии своеобразным путем, а именно посредством задач, которые предлагаются читателю в порядке возрастающей трудности. Никакой специальной подготовки книга не требует — она доступна студентам математикам, начиная со второго курса.

Книга является оригинальным по форме, но достаточно полным учебником общей топологии, доводящим читателя до современных проблем этой области математики. Она будет полезна научным работникам, аспирантам, студентам, интересы которых так или иначе сталкиваются с общей топологией.



© Издательство «Наука», 1974.

А $\frac{20203-093}{053(02)-74}$ 37-74

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5
Обращение к читателю 9

Глава I. **Теория множеств** 13
§ 1. Операции над множествами. Счетные множества (задачи 1—22) 20
§ 2. Общие задачи об отображениях (задачи 23—35) 22
§ 3. Общие задачи о вполне упорядоченных множествах (задачи 36—82) 23
§ 4. Свойства кардинальных чисел (задачи 83—122) 28
§ 5. Предфильтры, фильтры и ультрафильтры. Центрированные и максимальные центрированные семейства множеств (задачи 123—148) 32
Решения 35

Глава II. **Топологические пространства. Метрические пространства. Основные понятия, связанные с топологическим и метрическим пространством** 52
§ 1. Простейшие задачи, связанные с общими понятиями топологии (задачи 1—74) 62
§ 2. Кардинальнозначные характеристики пространств (задачи 75—150) 70
§ 3. Метрические пространства (задачи 151—280) 77
§ 4. Непрерывные отображения топологических пространств. Первый круг задач (задачи 281—352) 94
§ 5. Тихоновские произведения (задачи 353—398) 100
Решения 106

Глава III. **Бикомпактные пространства и их подпространства. Понятия, связанные с бикомпактностью** 130
§ 1. Функциональная отделимость. Вполне регулярные и нормальные пространства (задачи 1—41) 136
§ 2. Бикомпактность (задачи 42—174) 140
§ 3. Понятия, близкие к бикомпактности (задачи 175—252) 152
§ 4. Компакты (задачи 253—308) 160
§ 5. Непрерывные функции на бикомпактах (задачи 309—337) . . . 165
§ 6. Связность (задачи 338—376) 170
Решения 174

Глава IV. **Бикомпактные расширения** 232
§ 1. Общие конструкции и общие задачи (задачи 1—47) 233
§ 2. Задачи, связанные с расширением βN Стоуна—Чеха счетного дискретного пространства (задачи 48—88) 238

§ 3. Бикомпактные расширения и α-фильтры (задачи 69—78) 240
§ 4. Q-пространства и расширение Хьюитта (задачи 79—139) . . 242
§ 5. Подчинения (задачи 140—184) 247
Решения 253

Глава V. Метризация и паракомпактность 286
§ 1. Общие задачи о покрытиях и базах (задачи 1—74) 290
§ 2. Основные метризационные теоремы (задачи 75—101) 293
§ 3. Пространства, близкие к метризуемым. Специальные теоремы о метризации и метрических пространствах (задачи 102—125) 298
§ 4. Паракомпакты (задачи 126—156) 300
§ 5. Свойства типа паракомпактности: счетная паракомпактность, сильная паракомпактность, слабая паракомпактность и другие (задачи 157—206) 302
§ 6. Некоторые дальнейшие задачи (задачи 207—271) 308
Решения 309

Глава VI. Пространства и непрерывные отображения 340
§ 1. Финальные, бифакторные и псевдооткрытые отображения (задачи 1—28) 346
§ 2. Совершенные отображения (задачи 29—72) 348
§ 3. Замкнутые отображения (задачи 73—114) 352
§ 4. Открытые отображения (задачи 115—152) 356
§ 5. Экстремально несвязные пространства (задачи 153—187) . . 360
§ 6. Абсолюты регулярных пространств и совершенные непривод-ные отображения. Собственные пространства (задачи 188—252) 363
Решения 371

Литература 417

Kno
mud
O
n
517

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние годы в иностранной математической литературе появилось много книг, посвященных так называемой общей топологии, т. е. в первую очередь теории топологических пространств. Книги эти — разного достоинства. Наилучшими среди них я считаю обширный двухтомный классический трактат К. Куратовского «Топология» (выдержавший несколько изданий на различных языках и переведенный на русский язык несколько лет тому назад) и замечательную книгу польского математика Р. Энгелькинга, вышедшую параллельно на польском и английском языках соответственно под заглавиями «Zarys topologii ogólnej» и «Outline of general topology». Неудивительно, что обе эти книги принадлежат перу польских математиков: общеизвестно, что польская математическая школа в течение более чем полустолетия занимает одно из самых передовых мест в теоретико-множественной топологии.

Советская топологическая школа в течение этого же полустолетия выдвинулась также на одно из первых мест, но в нашей книжной литературе это обстоятельство, можно сказать, совсем не отразилось: кроме уже упомянутого перевода трактата Куратовского и перевода знаменитой «Теории множеств» Хаусдорфа (оригинал которой относится — в различных его изданиях — к 1914 и к 1927 гг.), мы имеем еще на русском языке перевод книги Келли (изданной в 1935 г., но устаревшей больше, чем упомянутые выше классические произведения) да еще написанное мною и изданное

kuc
mud
O
n
517

в 1948 г. совсем элементарное «Введение в общую теорию множеств и функций», не доходящее в топологической части даже до формулировки какой-либо общей метризационной теоремы. На фоне фактического отсутствия оригинальных русских книг по общей топологии даже новое издание «Мемуаров о компактных топологических пространствах», написанного в 1922 г. П. С. Урысоном и мною, явилось, вероятно, небесполезным пополнением нашего книжного фонда по данной области математики.

Книга, предлагаемая нашему вниманию математиков, интересующихся и занимающихся общей топологией, имеет заглавие «Общая топология в задачах и упражнениях» и принадлежит перу двух математиков молодого поколения, принадлежащих к числу наиболее выдающихся представителей советской математической школы в области теоретико-множественной топологии. Им принадлежат многие из самых замечательных результатов, полученных в теории топологических пространств за последние 10—15 лет. Достаточно сказать, что такая фундаментальная и совершенно новая глава топологии, какой является общая теория непрерывных отображений топологических пространств, в основном создана именно двумя авторами этой книги. Такие результаты, как теоремы В. И. Пономарева об абсолюте топологического пространства или о пространствах с первой аксиомой счетности как открытых образах метрических пространств, равно как теоремы Архангельского о введенных им так называемых паритетных пространствах и вообще о связях между различными типами пространств,— связях, осуществляемых непрерывными отображениями тех или иных классов,— принадлежат бесспорно к основным и наиболее интересным достижениям общей топологии. Что же касается решения А. В. Архангельским вопроса о мощности всех бикомпактных хаусдорфовых пространств с первой аксиомой счетности, то это не только решение проблемы пятидесятилетней давности, но и несомненно отва-

ма фундаментальных результатов всей теоретико-множественной математики.

Неудивительно, что авторы, столь далеко продвинувшие разрабатываемую ими область науки, в наилучшей степени могли отразить в своем общем труде и наиболее существенные стороны современного ее состояния, и наиболее яркие перспективы ее дальнейшего развития. Действительно, книга А. В. Архангельского и В. И. Пономарева вводит нас в самую глубину достижений и задач, волнующих нас сейчас в разрабатываемой ими, хотя и очень абстрактной, но от этого не менее увлекательной области математики. Именно эту увлекательность излагаемых ими вопросов они сумели показать, хотя избранный ими оригинальный (в последнее время, к сожалению, становящийся уже и модным) способ изложения —«в задачах и упражнениях»,— по моему мнению, не столько помогает им, сколько скорее затрудняет их в достижении поставленной цели. Тем не менее *здесь предлагается читателю увлекательную картину самого значительного из того, чем живет общая топология именно сегодня*, удачно решается в этой книге так, что не нахожу другого сочинения, которому в этом отношении можно было бы отдать предпочтение.

После сказанного выше читатель не удивится тому, что все сочинение кульминирует в общей теории непрерывных отображений, с одной стороны, и в теории так называемых кардинальных инвариантов (мощность, вес, так называемый π-вес, теснота, число Суслина и т. д.) — с другой. Эти вопросы и многочисленные с ними связанные не только наиболее близки интересам самих авторов, но и объективно в самые последние годы выдвинулись в общей топологии на первый план. Но и другие основные направления теории топологических пространств не остались в тени. Такова проблема «метризации», получившая за последние десятилетия неожиданное новое развитие, в значительной степени связанное именно с общей теорией непрерывных отобра-

жений и в свою очередь тесно связанное с понятием паракомпактности, его усилениями и ослаблениями. Такова теория бикомпактных расширений и в не меньшей степени теория диадических бикомпактов. Книга не осталась в стороне и от связей с аксиоматикой абстрактной теории множеств, которые так ярко выявились в общей топологии за последние годы.

В мои задачи не входит даже конспективное изложение содержания книги. Читатель найдет его в оглавлении. Подводя итог сказанному, хочется только повторить, что сочинение А. В. Архангельского и В. И. Пономарева вводит читателя именно в современные вопросы общей топологии и притом не случайно выбранные, а отобранные действительными знатоками дела.

Книга в высшей степени приспособлена для того, чтобы направить читателя на собственные исследования, давая ему, кроме того, и хорошую школу активной работы над математической книгой. Я не сомневаюсь, что эта книга найдет успех среди читателей, для которых она предназначена, и сослужит этим читателям большую службу, сделав многих самых молодых среди них настоящими математиками — независимо от того, будут ли они дальше заниматься непременно общей топологией или какой-нибудь другой частью математической науки.

П. Александров

Болшево—Комаровка,
12 ноября 1972 г.

Нашему дорогому учителю
Павлу Сергеевичу Александрову
посвящаются эти книги

ОБРАЩЕНИЕ К ЧИТАТЕЛЮ

Когда мы начинали писать эту книгу, еще не вышли книги Халмоша «Гильбертово пространство в задачах», а также Глазмана и Любича «Конечномерный линейный анализ в задачах»; нам казалось, что мы первые делаем попытку нового подхода в изложении основ той или иной математической дисциплины — посредством задач. Названные книги лишают нас приоритета в этом отношении, но, с другой стороны, показывают, что мы не одиноки в желании практически опереться на, казалось бы, бесспорный тезис: лучший способ глубоко овладеть какой-либо серьезной математической теоремой — это самостоятельно ее доказать. Поэтому первое и основное требование, которое мы предъявляем нашему читателю,— это требование его активности и готовности терпеливо самому искать решения предлагаемых ему задач и как можно позже обращаться к решению, данному в книге. Иногда мы считаем полезным даже перейти от данной задачи, решить которую читателю не удается, к нескольким следующим. Может быть, он справится с ними и приобретенный при этом опыт принесет ему успех, когда он вернется к задаче, решить которую ему упорно не удавалось. Неудачи сами по себе не должны смущать читателя — во многих случаях, предлагая ему ту или иную задачу, мы в действительности предлагаем ему доказать трудную теорему, т. е. предлагаем ему серьезную пробу сил, вовсе не сулящую верный и тем более быстрый успех. Словом, обращение к данному в книге решению должно всегда быть для читателя действительно крайним средством! Другое дело, что, найдя самостоятельно решение задачи, читатель поступит благоразумно, если сравнит это решение с тем, которое мы приводим в книге. Это всегда полезно и дает повод для размышлений, а иногда укажет читателю и на ошибку в его решении — этот случай тоже нельзя исключить. Несомненно, что первые решения, найденные читателем для задач, особенно более трудных, довольно часто будут ошибочными — так бывает и при самом процессе математического творчества. Мы должны также предупредить читателя, что, располагая задачи

по тематическому признаку, мы в некоторых случаях вынуждены ссылаться на решения задач, появляющихся позже — в другом тематическом разделе. Создавая этим, конечно, дополнительные трудности для читателя, мы, однако, уверяем, что никогда не заставляем его в этих немногих случаях двигаться по кругу. Само собой разумеется, что в пределах каждой темы мы заботились о том, чтобы логическая последовательность задач не нарушалась.

Многие трудные задачи мы расчленяем на более легкие. В других случаях (например, в задаче 213 гл. III, представляющей собой трудную математическую проблему, решенную сравнительно недавно) мы даем несколько подходов к решению. Все это, по нашему мнению, должно или облегчить работу над книгой, или увеличить пользу, получаемую читателем от этой работы. Мы надеемся и желаем, чтобы читатель находил и свои собственные подходы к решению наиболее трудных задач и этим как бы тренировал свои творческие возможности, что, несомненно, в ряде случаев будет приводить и к реальному прогрессу науки — нахождению новых лучших доказательств тех или иных важных теорем. Обратим внимание читателя также и на то, что некоторые из предлагаемых задач — не решенные до сих пор проблемы. Решение подобного сорта задач могло бы явиться предметом научной публикации.

Разумеется, пассивный читатель или читатель, чьи научные интересы лежат в стороне от общей топологии, но которому надо по роду его научной деятельности познакомиться с общей топологией, может (к предлагаемая книга дает ему эту возможность) подойти к работе над книгой как к работе над учебником или научной монографией, из которой он хочет почерпнуть нужные сведения. Этой цели наша книга также может служить. Мы надеемся, что такой читатель сможет с достаточной полнотой осуществить свои намерения.

Перед каждой главой, а часто даже перед началом параграфа мы приводим теоретическое введение, в котором мы даем не только основные определения, но и вводим вспомогательные понятия, нужные для решения задач этой главы (или параграфа), если, конечно, они не встречались ранее. Существенно, чтобы читатель с самого же начала ознакомился с этими определениями и понятиями.

На каждой из разбираемых тем мы стремились подвести читателя к современному ее состоянию и довести до современной проблематики. Многие из задач — это задачи на доказательство совсем недавно доказанных теорем. Есть, повторяем, и задачи — не решенные до сих пор проблемы.

После всех этих общих и отчасти даже принципиальных замечаний дадим некоторые конкретные сведения о книге, вероятно, полезные для читателя.

От читателя не предполагается никаких специальных знаний в области общей топологии. Однако предполагается, что читатель хорошо владеет элементами математического анализа и аналитической геометрии по программе первых двух курсов математических факультетов университетов и педагогических институтов. Книга рассчитана на студентов III—V курсов этих факультетов, специализирующихся в областях математики теоретико множественного направления, на аспирантов и научных работников, работающих в области функционального анализа, топологии, некоторых отделах геометрии, теории динамических систем и т. п. Полагаем, что особенно полезной будет наша книга при ведении специального семинара.

В книге 1587 задач. Она разбита на шесть глав в основном по тематическому принципу, каждая глава в свою очередь разбита на параграфы. В каждой главе своя нумерация задач (например, ссылка на задачу 10 главы I делается так: см. 10 гл. I). После формулировки последней задачи каждой главы приводятся решения задач этой главы или указания к решению. Некоторые задачи не снабжаются ни решениями, ни указаниями к решению обычно по причине их элементарности или же потому, что эти задачи не связаны с остальным материалом книги. В последнем случае мы иногда снабжаем номера этих задач звездочкой, что отнюдь не означает, что эти задачи труднее других. В частности, мы не даем, как правило, решений к задачам, относящимся к теории метрических пространств — ведь теория метрических пространств является составной частью многих учебников по функциональному анализу, к тому же она входит в настоящее время в обязательную программу по анализу на первых двух курсах математических факультетов. Заметим также, что при решении небольшого числа задач мы отсылаем читателя либо к некоторой книге, либо к оригинальной работе.

В конце книги мы приводим небольшой список литературы. Этот список ни в коем случае не претендует на полноту. Прежде всего, здесь указаны книги и работы, на которые имеются ссылки при решении задач.

И еще одна важная особенность этой книги. Мы нигде не касаемся истории вопроса, не указываем, за небольшими исключениями, кто (то или иное) предложение впервые доказал, кто (тот или иной) пример впервые построил. Мы также не выделяем в формулировках задач, какие задачи трудные, какие более легкие.

Появлению в свет этой книги мы в первую очередь обязаны Павлу Сергеевичу Александрову, который самым настойчивым образом побуждал нас к ее написанию. Павел Сергеевич тщательно следил и направлял нашу работу над книгой, очень часто мы пользовались его советами и рекомендациями, неоднократно он просматривал уже написанное нами. Мы от всей

души благодарим нашего дорогого учителя за все его многообразное участие и неизменную помощь.

Приносим искреннюю благодарность рецензенту этой книги Л. А. Тумаркину за ценные замечания и пожелания, которыми мы старались воспользоваться.

Мы благодарны В. Л. Клюшину, прочитавшему рукопись книги от начала до конца и принявшего самое деятельное участие в редактировании книги.

Мы благодарны нашим аспирантам — А. Башкирову, А. Комбарову, В. Малыхину, Б. Шапировскому, В. Мишкину и др.— которые тщательнейшим образом просмотрели решения к задачам и сделали целый ряд важных поправок.

А. В. Архангельский, В. И. Пономарев

Московский университет
Кафедра высшей геометрии и топологии
25 июня 1973 г.

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Понятие *множества*, равно как и более общее понятие *класса* (совокупности, семейства) элементов, мы будем считать первоначальным и интуитивно ясным. В частности, мы полагаем, что ясен смысл следующих высказываний.

Множество состоит из *элементов* и определяется своими элементами. Формула $a \in A$ читается: «a является элементом множества A». *Равенство множеств* понимается как их *совпадение*: $A = B$, где A и B — множества, в том и только в том случае, если из $a \in A$ следует, что $a \in B$, и из $b \in B$ следует, что $b \in A$. Существует (и единственно) пустое множество — множество, не имеющее ни одного элемента. Пустое множество обозначается через Λ.

Классы также состоят из элементов и характеризуются своими элементами. Все множества являются классами. Но класс является множеством в том и только в том случае, если он сам служит элементом некоторого класса. Только что сказанное можно понимать так: запрещено пользоваться некоторыми классами как элементами при построении новых множеств. Пример такого класса — класс всех множеств. Напротив, по каждому множеству A канонически определяется некоторое новое множество $\exp A$, которое, в частности, содержит и A в качестве элемента — а именно, $\exp A$ есть множество всех *подмножеств* (см. ниже) множества A.

Разделение всевозможных мыслимых совокупностей на множества и классы, не являющиеся множествами, позволяет избежать широко известных парадоксов, возникших в наивной теории множеств на заре нашего века (см. книгу Френкеля и Бар-Хиллела [1]).

Мы не рассматриваем в этой книге ни аксиоматики теории множеств, ни этих парадоксов.

Если для всех a из $a \in A$ следует, что $a \in B$, где B — множество, а A — класс, то мы пишем $A \subset B$ и говорим, что A является *подмножеством* множества B. При этом A непременно само является множеством. Ясно, что пустое множество является подмножеством любого множества. Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то

говорят, что A является *собственным* подмножеством (или собственной частью) множества B.

(А) *При определении и обозначении новых множеств часто используется запись следующего вида:* $A = \{a\colon \ldots F(a) \ldots\}$.

Разъясним ее смысл. A — определяемое множество, a — символ, обозначающий произвольный объект, могущий быть элементом (какого-нибудь класса), а $F(a)$ — высказывание об a ($F(x)$ — формула, в которую x входит только в качестве свободной переменной и в которой все другие переменные связаны кванторами). При этом $a \in A$ в том и только в том случае, если высказывание $F(a)$ имеет смысл и верно (предложение, получающееся при подстановке индивидуальной переменной a в $F(x)$ на место всех вхождений x в $F(x)$, осмысленно и истинно). Через $\{a\}$ всегда обозначается множество, единственным элементом которого служит a.

(Б) *Операции над множествами. Сумма или объединение* множеств A и B обозначается через $A \cup B$ и определяется так: $A \cup B = \{a\colon a \in A$ или $a \in B\}$ (союз «или» всегда означает, что требуется выполнение хотя бы одного из соединенных им утверждений). *Пересечение* множеств A и B обозначается через $A \cap B$ и определяется так: $A \cap B = \{a\colon a \in A$ и $a \in B\}$ (союз «и» всегда означает требование одновременной истинности соединенных им утверждений). Когда $A \cap B = \Lambda$, множества A и B называются *непересекающимися*, или *дизъюнктными*. Если каждому элементу α множества A поставлено в соответствие некоторое множество P_α, то мы полагаем $\bigcup \{P_\alpha\colon \alpha \in A\} = \{a\colon$ существует $\alpha \in A$, для которого $a \in P_\alpha\}$ и $\bigcap \{P_\alpha\colon \alpha \in A\} = \{a\colon a \in P_\alpha$ при каждом $\alpha \in A\}$. При этом мы называем $\bigcup \{P_\alpha\colon \alpha \in A\}$ *суммой* (или *объединением*) (элементов) семейства $\{P_\alpha\colon \alpha \in A\}$, или *целым* этого семейства, и $\bigcap \{P_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — *пересечением* (элементов) семейства $\{P_\alpha\colon \alpha \in A\}$. В аксиоматической теории множеств доказывается, что классы $\bigcup \{P_\alpha\colon \alpha \in A\}$ и $\bigcap \{P_\alpha\colon \alpha \in A\}$ и описываемой нами ситуации являются множествами.

Если объединение элементов семейства η множеств равно X, то η называется *покрытием* множества X. Если $\gamma = \{P_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — семейство множеств, и для любых α', $\alpha'' \in A$ из $\alpha' \neq \alpha''$ следует, что $P_{\alpha'} \cap P_{\alpha''} = \Lambda$, то семейство γ называется *дизъюнктным*.

Разность упорядоченной пары множеств A и B есть множество $A \setminus B = \{a\colon a \in A$ и $a \notin B\}$ (где запись $a \notin B$ читается как «a не принадлежит множеству B»). Иногда $A \setminus B$ называют *дополнением* B в A. Наряду с $A \setminus B$ и $B \setminus A$ рассматривают *симметрическую разность* $A \triangle B$ множеств A и B: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. (Круглые скобки всюду в этой книге играют обычную роль — в отличие от фигурных, которые, как мы видели выше, выполняют специальную функцию при определении множеств.)

Произведение множеств A и B есть множество $A \times B = \{(a, b)\colon a \in A$ и $b \in B\}$. Аналогично определяется произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ любого конечного семейства множеств $A_1, \ldots, A_k$. При этом пишут $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ раз}} = A^k$. Вскоре будет определено произведение любого (не обязательно конечного) семейства множеств.

Пусть каждому $\alpha \in A$ поставлено в соответствие множество X_α. Одномерным *свободного объединения* или *свободной суммы* $\bigcup_A \{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ множеств X_α по всем $\alpha \in A$ являются всевозможные пары (x, α), где $\alpha \in A$ и $x \in X_\alpha$.

При фиксированном $\alpha^* \in A$ множество X_{α^*} отождествляется с подмножеством $i_{\alpha^*}(X_{\alpha^*})$ свободного объединения, состоящим из всех пар (x, α), для которых $\alpha = \alpha^*$. Мы полагаем при этом $i_\alpha(x) = (x, \alpha)$ для всех $\alpha \in A$ и $x \in X_\alpha$. Для разных $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ может быть $X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2} \neq \Lambda$. Но всегда $i_{\alpha_1}(X_{\alpha_1}) \cap i_{\alpha_2}(X_{\alpha_2}) = \Lambda$, если $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Это замечание выясняет характерное отличие операции свободного объединения от обычной операции объединения: мы не просто объединяем слагаемые, но одновременно располагаем их так, чтобы они попарно не пересекались.

(В) *Отображения.* Понятие *отображения* мы также считаем интуитивно ясным: говорят, что задано отображение f множества X в множество Y (пишут «задано (отображение) $f\colon X \to Y$»), если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие однозначно определенный элемент $y \in Y$, обозначаемый при этом через $f(x)$ (т. е. $y = f(x)$). Простейшее отображение множества X *тождественное* $e\colon X \to X$ — определяется так: $e(x) = x$ для всех $x \in X$. Пусть задано отображение $f\colon X \to Y$. Элемент $f(x)$ называется *образом элемента* x (при отображении f). Если $A \subset X$, то полагают $f(A) = \{f(x)\colon x \in A\}$ *) (это — сокращенная форма записи, развернутая такова: $f(A) = \{y\colon$ существует $x \in A$, для которого $y = f(x)\}$). Множество $f(A)$ называется *образом множества* A (при отображении f). Если ξ — семейство подмножеств множества X, то $f\xi = \{f(A)\colon A \in \xi\}$. Далее, если $B \subset Y$, то полагают $f^{-1}(B) = \{x\colon f(x) \in B\}$ и называют $f^{-1}(B)$ *прообразом множества* B. *Прообраз* $f^{-1}\eta$ семейства η *подмножеств* множества Y есть $\{f^{-1}(B)\colon B \in \eta\}$. Отображение f называют отображением *на* (*отображением* X *на* Y), если $f(X) = Y$. Если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$, то отображение f называют *взаимно однозначным* (или *вложением*). Специальный интерес представляют взаимно однозначные отображения «на». Если $f\colon X \to Y$ — отображение и $X' \subset X$, то отображение

*) Там, где это не вызывает затруднения, скобки могут опускаться, т. е. наряду с $f(A)$ допускается написание fA.

$f' = f \mid X'$, $f'\colon X' \to Y$, называемое *сужением* отображения f на множество X', определяется для всех $x \in X'$ правилом: $f'(x) = f(x)$ ($f'(x)$ при прочих x не определено).

Пусть даны отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$. Для каждого $x \in X$ положим $\varphi(x) = g(f(x))$. Очевидно, φ является отображением множества X в множество Z; оно называется *композицией* (или *суперпозицией*) отображений f и g; пишут при этом $\varphi = gf$.

Графиком отображения $f\colon X \to Y$ называется подмножество $\Gamma(f) = \{(x, f(x))\colon x \in X\}$ произведения $X \times Y$. *Стандартное отображение* φ_f области определения X отображения f на график $\Gamma(f)$ отображения f определяется следующим правилом: $\varphi_f(x) = (x, f(x)) \in \Gamma(f)$ для всех $x \in X$. Если $\pi_Y : X \times Y \to Y$ — *проектирование*, т. е. $\pi_Y(x, y) = y$ для всех $(x, y) \in X \times Y$, то, очевидно, $f = \pi_Y \varphi_f$.

Пусть каждому элементу α множества A поставлено в соответствие некоторое множество X_α. Тогда назовем *точкой* *) любое отображение x, определенное на A, в силу которого каждому $\alpha \in A$ однозначно соответствует некоторый элемент множества X_α, обозначаемый через $x(\alpha)$ или через x_α. (Здесь нет расширения понятия отображения: можно считать, что пишь x есть подчиненное указанному выше условию отображение множества A в множество, являющееся объединением множеств X_α.) При этом x_α называется α-й *координатой* точки x. Множество всех точек называется *произведением множеств* X_α по всем $\alpha \in A$ и обозначается через $\Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ или просто через ΠX_α, если ясно, какое A имеется в виду. Положим $X = \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$. Для каждого $x \in X$ и каждого $\alpha \in A$ полагаем $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$. Очевидно, π_α — отображение множества X на множество X_α; оно называется *проектированием произведения* на α-й сомножитель. Пусть $A' \subset A$. Тогда произведение $\Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in A'\}$ называется A'-*гранью* (или просто *гранью*) произведения $X = \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ и обозначается через $X_{A'}$.

Имеет место естественное проектирование $\pi_{A'}$ произведения $X = \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ на грань $X_{A'}$ (называемое *стандартным отображением* на грань $X_{A'}$), описываемое правилом: $\pi_{A'}(x) = x \mid A'$ для каждого $x \in X$, где $x \mid A'$ есть такой элемент $x' \in X_{A'} = \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in A'\}$, что $x'_\alpha = x_\alpha$ для всех $\alpha \in A'$. Формально грань произведения не является его подмножеством, но для каждой точки $x^0 \in X$ определено *естественное вложение* $i^{A'}_{x^0}$ множества $X_{A'}$ в множество X, а именно: для каждого $x' \in X_{A'}$ $i^{A'}_{x^0}(x') = x$, где $x \mid A' = x'$ и $x \mid (A \setminus A') = x^0 \mid (A \setminus A')$. В частности, каждый сомножитель, т. е. каждое X_α, где $\alpha \in A$, можно интерпретировать как грань множества X, получающуюся, когда

*) В последней главе термин точка употребляется в более специальном смысле, что будет в надлежащем месте оговорено.

$A' = \{\alpha\}$. Для этого случая мы полагаем $i^{\alpha}_{x^0} = i^{A'}_{x^0}$ — очевидно, $i^{\alpha}_{x^0}$ является вложением множества X_α в X.

Вложения $i^{A'}_{x^0}$, $i^{\alpha}_{x^0}$ будут называться *стандартными вложениями* в произведение (граней, сомножителей) в *направлении* x^0.

Полезна следующая специализация понятия произведения: если A и B — множества, то через B^A обозначается *множество всех отображений* A в B. Очевидно, $B^A = \Pi\{B_\alpha\colon \alpha \in A\}$, где $B_\alpha = B$ для каждого $\alpha \in A$.

Если для каждого $\alpha \in A$ задано отображение f_α некоторого множества X_α в некоторое множество Y_α, то произведение $f = \Pi\{f_\alpha\colon \alpha \in A\}$ отображений f_α является отображением множества $X = \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ в множество $Y = \Pi\{Y_\alpha\colon \alpha \in A\}$, определяемое следующим правилом: $f(x) = y \Leftrightarrow f_\alpha(x_\alpha) = y_\alpha$ при всех $\alpha \in A$ [2]).

Если $X_\alpha = Z$ для каждого $\alpha \in A$, то в произведении $X = \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ выделяется следующее подмножество Δ, называемое диагональю произведения: $\Delta = \{x \in X\colon x_{\alpha'} = x_{\alpha''}$ для любых $\alpha' \in A$, $\alpha'' \in A\}$. Если, кроме того, заданы отображения $f_\alpha\colon X_\alpha = Z \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, то их *диагональное произведение* $f_\Delta = \Delta\{f_\alpha\colon \alpha \in A\}$ определяется как сужение произведения f отображений f_α, $\alpha \in A$, на диагональ Δ. Так как диагональ посредством произвольного проектирования π_α естественно отождествляется с множеством Z, то f_Δ можно интерпретировать как отображение множества Z в множество $Y = \Pi\{Y_\alpha\colon \alpha \in A\}$, определяемое условием: $f_\Delta(z) = y \Leftrightarrow f_\alpha(z) = y_\alpha$ для всех $\alpha \in A$.

Понятие отображения может быть положено в основу определения понятия числа. Особенно важно, что на этом пути удается определить не только конечные (натуральные) числа, но и различные бесконечные (кардинальные, порядковые) числа. Подробности можно найти в книге Серпинского [1]. Множество называется *счетным*, если оно или состоит из конечного числа элементов (т. е. конечно — в частности, может быть, пусто), или если существует взаимно однозначное отображение этого множества на множество N всех натуральных чисел. Если существует взаимно однозначное отображение множества X на множество Y, то говорят, что X и Y *равномощны*, и пишут $|X| = |Y|$. Класс всех множеств, равномощных данному множеству X, называется *мощностью* множества X и обозначается через $|X|$. Мощности именуются также *кардинальными числами*. Если существует $Y' \subset Y$, для которого $|X| = |Y'|$, то пишут $|X| \leqslant |Y|$. Если $|X| \leqslant |Y|$, но неравенство $|Y| \leqslant |X|$ не имеет места, то пишут $|X| < |Y|$. Для произвольного множества X полагают [3] $2^{|X|} = |\exp X|$. Понятие кардинального числа позволяет

*) Знак $\Leftrightarrow$ [illegible]

2 А. В. Архангельский, [illegible]

[illegible] библиотека
DENOF MEDALI ARM
№ 2857
Эчмиадзин

произвести несколько достаточно важных определений на основе рассмотренных выше конструкций. Именно, если τ — кардинальное число, то мы полагаем $\exp_\tau X = \{A \subset \exp X: |A| < \tau\}$. Далее, если $Y = \Pi\{Y_\alpha: \alpha \in A\}$ и $y^* \subset Y$, то $\Sigma_{\tau, y^*}\{Y_\alpha: \alpha \in A\}$ есть множество всех таких $y \in Y$, что мощность множества всех тех $\alpha \in A$, для которых $y_\alpha \neq y^*_\alpha$, меньше τ. Обозначение $\Sigma_{\tau, y^*}\{Y_\alpha: \alpha \in A\}$ читается так: Σ_τ — *произведение множеств* Y_α *по всем* $\alpha \in A$ *с центром в* y^*. Часто то же множество обозначают через $\Sigma_\tau(y^*)$ и называют τ-*оболочкой* точки y^* в произведении $\Pi\{Y_\alpha: \alpha \in A\}$.

Важную роль в теоретико-множественных построениях играют упорядочения на множествах и связанные с ними общие принципы.

Мы говорим, что на множестве или классе X определено *упорядочение* $\prec$, если для некоторых $x, y \in X$ объявлено истинным соотношение $x \prec y$, причем выполняются условия:

(а) если $x \prec y$ и $y \prec z$, то $x \prec z$;

(б) $x \prec y$ и $y \prec x$ имеют место одновременно тогда и только тогда, когда $x = y$.

Упорядочение $\prec$ называется *линейным*, если дополнительно выполняется условие

(в) для любых $x, y \subset X$ имеет место или $x \prec y$, или $y \prec x$.

Множество X вместе с заданным на нем упорядочением $\prec$ называют *упорядоченным множеством* $(X, \prec)$.

Гнездом, или *цепью*, в упорядоченном множестве $(X, \prec)$ называется любое подмножество, на котором $\prec$ является линейным упорядочением.

Элемент $b \in X$ называется *мажорантой* множества $A \subset X$ по отношению к заданному на X упорядочению $\prec$, если $a \prec b$ для всех $a \in A$.

Упорядоченное множество $(X, \prec)$ (или само упорядочение $\prec$) называется *индуктивным*, если для каждой цепи $A \subset X$ в X существует мажоранта.

Элемент $c \in (X, \prec)$ называется *максимальным* элементом множества X, если из $a \subset X$ и $c \prec a$ следует, что $c = a$.

Постулат Куратовского — Цорна (принимаемый нами) гласит: *каждое индуктивное множество содержит хотя бы один максимальный элемент*.

Соответственно элемент a множества A, лежащего в упорядоченном множестве $(X, \prec)$, называется минимальным элементом множества A, если $a \in A$, и из $a' \subset A$, $a' \prec a$ следует, что $a' = a$. Линейное упорядочение, заданное на множестве X, называется *вполне упорядочением*, если у каждого непустого множества $A \subset X$ есть минимальный элемент. Мы принимаем без доказательства принцип: *каждое множество может быть вполне упорядочено*.

Пусть $(X, \prec)$ — упорядоченное множество и $x \in X$. Через $I(x)$ (иногда через $I(x)$ или $I_{\prec}(x)$) условимся обозначать множество всех $y \in X$, для которых $y \neq x$, $y \prec x$, и положим $\bar{I}(x) = I(x) \cup \{x\}$. Когда $\prec$ — вполне упорядочение, будем $I(x)$ называть *интервалом с концом в* x, а $\bar{I}(x)$ — *сегментом с концом в* x.

Вполне упорядоченное $\prec$, заданное на X, называется *минимальным*, если $|I(x)| \neq |X|$ для любого $x \in X$.

Положим $A(x) = X \setminus \bar{I}(x)$.

Если $A(x) \neq \Lambda$, то через $x+1$ обозначают минимальный (относительно $\prec$) элемент множества $A(x)$. Для произвольного подмножества A вполне упорядоченного множества $(X, \prec)$ через $\sup A$ обозначается первый элемент множества $\{x \in X: a \prec x$ для всех $a \in A\}$, если последнее не пусто. В противном случае выражение $\sup A$ объявляется лишенным смысла. Через $(N^+, \prec)$ в дальнейшем обозначается множество целых положительных чисел, наделенное естественным вполне упорядочением, а N — множество всех целых чисел, линейно упорядоченное, как обычно. Мощность множества N^+ обозначается через $\aleph_0$. Взаимно однозначное отображение $f: (X, \prec) \to (Y, \ll)$ одного упорядоченного множества в другое называется $(+)$-*монотонным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \prec x_2$ следует, что $f(x_1) \ll f(x_2)$ *). Если, кроме того, $f(X) = Y$ и f^{-1} — тоже $(+)$-монотонное отображение, то f называется *подобием*, или *подобным отображением*.

Иногда сама природа элементов множества позволяет определить на нем естественное упорядочение. Первостепенное значение имеет следующая конкретная ситуация. Пусть $\mathscr{E}$ — некоторое семейство подмножеств множества X. Для $A_1 \in \mathscr{E}$, $A_2 \subset \mathscr{E}$ положим $A_1 < A_2$ в том и только в том случае, если $A_1 \supset A_2$. Отношение $<$ является упорядочением на $\mathscr{E}$. При этом цепь или гнездо в $\mathscr{E}$ — это любое такое подсемейство $\mathscr{E}'$ семейства $\mathscr{E}$, что для любых $A_1 \in \mathscr{E}'$, $A_2 \in \mathscr{E}'$ либо $A_1 \supset A_2$, либо $A_2 \supset A_1$. В этом случае говорят, что ранг семейства $\mathscr{E}'$ равен единице. Наряду с гнездами, большую роль в теории множеств и общей топологии играют *центрированные* семейства множеств, характеризующиеся тем, что пересечение любого конечного множества их элементов не пусто.

Если X — множество и $\mathscr{E}$ — некоторое семейство его подмножеств, то через $\mathscr{U}(\mathscr{E})$ всюду в дальнейшем будет обозначаться упорядоченное множество всех центрированных семейств множеств, содержащихся в $\mathscr{E}$ ($\mathscr{U}(\mathscr{E})$ упорядочивается как семейство множеств естественным образом — по сформулированному выше правилу). Множество $\mathscr{U}(\mathscr{E})$ возникло как семейство семейств подмножеств

*) Для обозначения конкретных упорядочений наряду со знаком $\prec$ будут употребляться $\prec_1$, $\prec_2$ и другие подобные символы. Условимся также писать $x \prec_2 y$, если $x \prec_2 y$ и $x \neq y$.

множества X. Законно спросить, оправдан ли интерес к подобным громоздким образованиям; имеется ли разумная причина рассматривать $\mathscr{P}(\mathscr{E})$, игнорируя в то же время $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{E}))$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{E})))$ и т. д.? Упорядоченное множество $\mathscr{P}(\mathscr{E})$ индуктивно (см. 127 гл. I); заметьте, что $\mathscr{E}$, упорядоченное естественным образом, не всегда индуктивно, а на X вообще не дано порядка.

Как и во всяком индуктивном упорядоченном множестве, в $\mathscr{P}(\mathscr{E})$ достаточно много максимальных элементов (см. 144 гл. I). В данном случае максимальные элементы — это *максимальные центрированные* системы элементов $\mathscr{E}$, т. е. центрированные системы, все элементы которых принадлежат $\mathscr{E}$ и которые не являются собственным подмножеством никакой другой такой центрированной системы.

Центрированная система ξ множеств, принадлежащих $\mathscr{E}$, называется *предфильтром* в $\mathscr{E}$, если из $A \in \xi$ и $B \in \xi$ следует, что $C \subset A \cap B$ для некоторого $C \in \xi$. Предфильтр ξ в $\mathscr{E}$ называется *фильтром* в $\mathscr{E}$, если из $A \in \xi$ и $B \in \mathscr{E}$, $B \supset A$, следует, что $B \in \xi$. Если $\mathscr{E}$ совпадает с множеством всех подмножеств рассматриваемого множества X, то мы говорим просто о предфильтре (на X) и фильтре (на X). В этом случае максимальная центрированная система элементов $\mathscr{E}$ называется *ультрафильтром* (на X).

Центрированная система ξ множеств (предфильтр, фильтр, ультрафильтр) называется *свободной*, если $\bigcap\{U\colon U \in \xi\} = \Lambda$. В противном случае говорят, что система ξ *закреплена*, или *главная*.

Семейство η непустых множеств называется *базисом* семейства ξ множеств, если для каждого $U \subset \xi$ существует $V \in \eta$ такое, что $V \subset U$. В этом смысле можно говорить о базисе предфильтра, фильтра, ультрафильтра. Если семейство имеет счетный базис, то его называют *счетно порожденным*.

§ 1. Операции над множествами. Счетные множества

1. Пусть A, B и C — подмножества множества X. Докажите, что тогда
(а) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
(б) $X \setminus (X \setminus A) = A$;
(в) $A \subset B$ в том и только в том случае, если $X \setminus B \subset X \setminus A$;
(г) $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$;
(д) $A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B))$.

2. Пусть B — множество и $\{A_\alpha\colon \alpha \in M\}$ — семейство множеств. Покажите, что
(а) $B \cap (\bigcap\{A_\alpha\colon \alpha \in M\}) = \bigcap\{B \cap A_\alpha\colon \alpha \in M\}$;
(б) $B \cap (\bigcup\{A_\alpha\colon \alpha \in M\}) = \bigcup\{B \cap A_\alpha\colon \alpha \in M\}$;
(в) $B \cup (\bigcap\{A_\alpha\colon \alpha \in M\}) = \bigcap\{B \cup A_\alpha\colon \alpha \in M\}$.

3. Пусть X — множество и $\{A_\alpha\colon \alpha \in M\}$ — семейство его подмножеств. Докажите, что
(а) $X \setminus \bigcap\{A_\alpha\colon \alpha \in M\} = \bigcup\{X \setminus A_\alpha\colon \alpha \in M\}$;
(б) $X \setminus \bigcup\{A_\alpha\colon \alpha \in M\} = \bigcap\{X \setminus A_\alpha\colon \alpha \in M\}$.
Эти соотношения называются формулами де Моргана.

4. Покажите, что если множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$ равномощны, то $|A| = |B|$ (но обратное, вообще говоря, не верно).

5. Покажите, что из $|A_1| = |B_1|$ и $|A_2| = |B_2|$ не следует, вообще говоря, что $|A_1 \cap A_2| = |B_1 \cap B_2|$.

6. Пусть A — конечное множество и n — его мощность. Какова мощность множества $\exp A$?

7. Приведите пример непустого множества, каждый элемент которого является некоторым подмножеством этого множества.

8. Для каждого целого $n \geqslant 0$ постройте множество A_n, состоящее ровно из n элементов, такое, что для любых $a \in A_n$, $a' \in A$, либо $a \in a'$, либо $a' \in a$.

9. Множество конечно в том и только в том случае, если любое линейное упорядочение на нем является вполне упорядочением.

10. Пусть $(X, \leqslant)$ — вполне упорядоченное множество. Для $x_1, x_2 \in X$ положим $x_1 \preccurlyeq x_2$ в том и только в том случае, если $x_2 \leqslant x_1$. Докажите, что $\preccurlyeq$ — вполне упорядочение на X в том и только в том случае, если X — конечное множество.

11. Множество X конечно в том и только в том случае, если оно не равномощно никакому своему собственному подмножеству.

12. Всякое подмножество счетного множества является счетным множеством.

13. В каждом бесконечном множестве существует бесконечное счетное подмножество.

14. Для любого бесконечного множества X непременно $\aleph_0 \leqslant |X|$.

15. Каждое бесконечное счетное множество можно представить как объединение двух непересекающихся бесконечных (тоже счетных) подмножеств.

16. Если A и B — счетные множества, то и $A \cup B$ — счетное множество.

17. Если X — несчетное множество, а A — его счетное подмножество, то $|X \setminus A| = |X|$.

18. Объединение счетного семейства конечных множеств есть множество счетное.

19. Объединение счетного семейства счетных множеств есть множество счетное.

20. Произведение двух (конечного числа) счетных множеств есть множество счетное.

21. Образ счетного множества (при произвольном отображении) есть множество счетное.

22. Докажите, что следующие множества счетны:
(а) множество всех рациональных чисел на прямой;

(б) множество всех точек плоскости (пространства), обе (все три) координаты которых рациональны (система координат предполагается фиксированной);

(в) множество всех конечных подмножеств счетного множества;

(г) множество всех интервалов на прямой с рациональными концами;

(д) множество всех шаров в пространстве с центрами в рациональных точках (все три координаты которых рациональны) и рациональным радиусом;

(е) множество всех полиномов от конечного числа переменных с рациональными коэффициентами (с точностью до отождествления полиномов, переходящих друг в друга в результате перенумерования переменных);

(ж) любое множество попарно не пересекающихся восьмерок, лежащих на фиксированной плоскости (восьмерка — множество точек двух касающихся внешним образом окружностей, радиусы которых могут быть различны).

§ 2. Общие задачи об отображениях

23. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение, $\eta = \{B_\alpha\colon \alpha \in M\}$ — семейство подмножеств множества Y, $\xi = \{A_\beta\colon \beta \in L\}$ — семейство подмножеств множества X. Докажите, что тогда

(а) $f^{-1}(\bigcap \{B_\alpha\colon \alpha \in M\}) = \bigcap \{f^{-1}B_\alpha\colon \alpha \in M\}$;

(б) $\bigcup \{fA_\beta\colon \beta \in L\} = f(\bigcup \{A_\beta\colon \beta \in L\})$;

(в) $f(\bigcap \{A_\beta\colon \beta \in L\}) \subset \bigcap \{fA_\beta\colon \beta \in L\}$.

Покажите, что может быть $f(\bigcap \{A_\beta\colon \beta \in L\}) \neq \bigcap \{fA_\beta\colon \beta \in L\}$.

24. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение, $A \subset X$ и $B \subset Y$. Покажите, что $f^{-1}(fA) \cap B) \supset A \cap f^{-1}B$ и $f(A \cap f^{-1}B) = fA) \cap B$. Выведите отсюда, что $fA) \cap B = \Lambda$ в том и только в том случае, если $A \cap f^{-1}B = \Lambda$. Покажите, что $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}B$.

25. Если существует отображение f множества X на множество Y, то $|Y| \leqslant |X|$.

26. Пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ — отображения и $|g(Y)| \geqslant 2$. Тогда существуют непустые множества X_1, X_2, Y_1, Y_2, для которых $X_1 \cap X_2 = \Lambda$, $Y_1 \cap Y_2 = \Lambda$, $fX_1 = Y_1$ и $gY_2 = X_2$.

27. Для любых непустых множеств A, B и C

$$|(A \times B)^C| = |A^C \times B^C|.$$

28. Для любых трех непустых множеств A, B и C таких, что $B \cap C = \Lambda$, имеет место равенство: $|A^{B \cup C}| = |A^B \times A^C|$.

29. Для любых непустых множеств A, B и C

$$|(A^B)^C| = |A^{B \times C}|.$$

30. Каковы бы ни были множества X и Y, по крайней мере одно из них равномощно некоторому подмножеству другого.

31. Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ — взаимно однозначные отображения (но обязательно «на»). Постройте с помощью f и g взаимно однозначное отображение множества X на множество Y.

32. Для любых двух множеств X и Y либо $|X| \prec |Y|$, либо $|X| = |Y|$, либо $|Y| \prec |X|$.

33. Отношение $\leqslant$ между кардинальными числами является линейным упорядочением класса всех кардинальных чисел.

34. Докажите, что всегда $|X| \prec |\exp X|$.

35. Пусть $\{S_i\colon i \in N^+\}$ — последовательность конечных множеств S_i, причем каждому $a \in S_{i+1}$ поставлен в соответствие некоторый элемент $\varphi(a) \in S_i$ при всех $i \in N^+$. Покажите, что всегда можно выбрать $a_i \in S_i$ так, чтобы при всех $i \in N^+$ было $\varphi(a_{i+1}) = a_i$.

§ 3. Общие задачи о вполне упорядоченных множествах

Пусть $(X, \prec)$ — линейно упорядоченное множество. Множество $A \subset X$ называется *фрагментом* этого множества, если из $x \in A$, $y \in X$ и $y \prec x$ всегда следует, что $y \in A$.

Если линейно упорядоченные множества $(A, \prec)$ и $(B, \ll)$ не пересекаются, то их *сумма*, обозначаемая через $(A, \prec) + (B, \ll)$, есть множество $A \cup B$, линейно упорядоченное отношением $\prec_1$, которое определяется так: если $a \in A$, $b \in B$, то $a \prec_1 b$; если $a_1 \in A$ и $a_2 \in A$, то $a_1 \prec a_2 \Leftrightarrow a_1 \prec_1 a_2$; если $b_1 \in B$ и $b_2 \in B$, то $b_1 \prec_1 b_2 \Leftrightarrow b_1 \ll b_2$.

Общая конценция: если $(A, \prec)$ — линейно упорядоченное множество и для каждого $\alpha \in A$ задано множество B_α, линейно упорядоченное отношением $\prec_\alpha$, и $B^{\alpha'} \cap B_{\alpha''} = \Lambda$ при $\alpha' \neq \alpha''$, то *упорядоченная сумма множеств* $(B_\alpha, \prec_\alpha)$ *по множеству* $(A, \prec)$, обозначаемая через $\Sigma\{(B_\alpha, \prec_\alpha)\colon \alpha \in (A, \prec)\}$, состоит из точек множества $X = \bigcup \{B_\alpha\colon \alpha \in A\}$, упорядоченного отношением $\prec$ по следующему правилу: если $x, y \in X$ и $x \in B_{\alpha'}$, $y \in B_{\alpha''}$, то при $\alpha' \prec \alpha''$ полагаем $x \prec y$, а при $\alpha' = \alpha''$ полагаем $x \prec y \Leftrightarrow x \prec_{\alpha'} y$.

Произведение (*лексикографическое*) $(A, \prec) \times (B, \ll)$ двух линейно упорядоченных множеств $(A, \prec)$ и $(B, \ll)$, взятых в определенном порядке (этот порядок обычно выражается порядком следования символов, обозначающих рассматриваемые множества), получается, если наделить произведение $A \times B$ множеств A и B следующим соотношением $\prec$. Если $(a_1, b_1) \in A \times B$ и $(a_2, b_2) \in A \times B$, то $(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2)$, когда $b_1 \ll b_2$ или $b_1 = b_2$ и $a_1 \prec a_2$. Упорядочение $\prec$ называется *лексикографическим упорядочением* (произведения).

Заметьте, что операция произведения, в отличие от операции сложения, определена нами для всех (а не только для непересекающихся) линейно упорядоченных множеств. В частности, можно рассматривать (лексикографически) упорядоченный квад-

рат линейно упорядоченного множества. В задаче 50 гл. I будет определен канторов квадрат линейно упорядоченного множества, отличный, как мы увидим, от лексикографического квадрата, обычно именуемого просто квадратом.

Для любых двух (непустых) линейно упорядоченных множеств $(A, \prec)$ и $(B, \ll)$, где, кроме того, $(B, \ll)$ имеет первый элемент 0, определяется такое понятие *степени*, а именно, элементами множества $(B, \ll)^{(A, \prec)}$ служат точки $\Sigma_{\alpha\in A} B_\alpha$ — произведения (по всем $\alpha \in A$) множеств B_α, где $B_\alpha = B$ для каждого $\alpha \in A$, с центром в точке $\{0\}$, все координаты которой совпадают с первым элементом 0 множества B. Иначе говоря, элементы, из которых состоит $(B, \ll)^{(A, \prec)}$, — это такие отображения x множества A в множество B, что $x_\alpha = 0$ для всех $\alpha \subset A \setminus K(x)$, где $K(x)$ — некоторое конечное множество. Пусть $x, y \subset (B, \ll)^{(A, \prec)}$. Через $\alpha(x, y)$ обозначим наибольший (относительно $\prec$) элемент множества $K(x) \cup K(y) \subset A$; так как $K(x) \cup K(y)$ — конечное множество, наибольший элемент в нем существует. Мы полагаем $x \prec y$ в том и только в том случае, если $x_{\alpha^*} \ll y_{\alpha^*}$ для $\alpha^* = \alpha(x, y)$.

Часто в дальнейшем нам будет встречаться упорядоченное множество $(D, \prec)$. Оно состоит из двух элементов: 0 и 1, порядок такой: $0 \prec 1$. Символами 0, 1, 2, ... мы будем пользоваться иногда для обозначения первого, второго и т. д. элементов произвольно фиксированного вполне упорядоченного множества. В этом параграфе $(N, \prec)$ всегда обозначает множество натуральных чисел, естественно упорядоченное; иногда эти два символа — N и $\prec$ — мы будем заменять одним символом ω_0.

36. Докажите, что если каждое счетное подмножество линейно упорядоченного множества вполне упорядочено, то и всё множество вполне упорядочено.

37. Произвольный фрагмент A вполне упорядоченного множества $(X, \prec)$ либо совпадает с X, либо является интервалом с концом в некоторой точке множества X.

38. (а) Объединение любого множества фрагментов линейно упорядоченного множества является фрагментом этого множества.

(б) Из любых двух фрагментов A, A' линейно упорядоченного множества $(X, \prec)$ один непременно содержится в другом.

39. Существует ровно одно подобное отображение f вполне упорядоченного множества $(X, \prec)$ в себя, при котором $f(X)$ является фрагментом множества X, а именно — тождественное.

40. Пусть $(X, \prec)$, $(Y, \ll)$ — вполне упорядоченные множества и f_1: $(X, \prec) \to (Y, \ll)$, f_2: $(X, \prec) \to (Y, \ll)$ — подобные отображения, причем $f_1(X)$ и $f_2(X)$ — фрагменты множества $(Y, \ll)$. Тогда $f_1 = f_2$.

41. Каковы бы ни были вполне упорядоченные множества $(X, \prec)$ и $(Y, \ll)$, хотя бы одно из них можно подобно отобразить на некоторый фрагмент другого.

42. Для любых двух вполне упорядоченных множеств $(X, \prec)$ и $(Y, \ll)$ существует одно и только одно (с точностью, возможно, до перехода к обратному отображению) подобное отображение одного из них на некоторый фрагмент другого.

43. На каждом бесконечном множестве X существует вполне упорядочение $\prec$, относительно которого X не имеет последнего элемента (т. е. для каждого $x \subset X$ множество $\{x' \in X: x \prec x' \text{ и } x \neq x'\}$ не пусто).

44. Если A — бесконечное множество, A' — его подмножество и $A \setminus A'$ состоит ровно из одной точки, то $A \mid = \mid A' \mid$.

45. На всяком множестве X существует минимальное вполне упорядочение.

46. Покажите, что если вполне упорядоченное множество $(A, \prec)$ подобно вполне упорядоченному множеству $(B, \ll)$ и $\prec$ минимально, то и $\ll$ минимально.

47. Для любых минимальных вполне упорядочений $\prec$ и $\ll$ одного и того же множества X существует и единственно подобное отображение множества $(X, \prec)$ на множество $(X, \ll)$.

48. Естественное вполне упорядочение множества натуральных чисел минимально.

49. Если $\prec$ — минимальное вполне упорядочение на бесконечном множестве X, то никакой элемент множества X не является относительно $\prec$ последним.

50. Пусть $(A, \prec)$ — вполне упорядоченное множество. Рассмотрим упорядочение множества $A \times A$, определенное следующим образом.

Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \subset A \times A$ и $\max\{x_1, y_1\} \neq \max\{x_2, y_2\}$ *). Если $\max\{x_1, y_1\} \prec \max\{x_2, y_2\}$, то полагаем $(x_1, y_1) \ll (x_2, y_2)$ (соответственно, если $\max\{x_2, y_2\} \prec \max\{x_1, y_1\}$, то полагаем $(x_2, y_2) \ll (x_1, y_1)$). Если $\max\{x_1, y_1\} = \max\{x_2, y_2\}$, то полагаем $(x_1, y_1) \ll (x_2, y_2)$, если $x_1 \prec x_2$ либо если $y_1 \prec y_2$, когда $x_1 = x_2$. В остальных случаях полагаем $(x_2, y_2) \ll (x_1, y_1)$.

Докажите, что **) $(A \times A, \ll)$ — вполне упорядоченное множество.

51. Пусть $(N, \prec)$ — множество натуральных чисел, наделенное естественным вполне упорядочением, и $(N \times N, \ll)$ — его канторов квадрат (см. 50 гл. I). Тогда $(N, \prec)$ и $(N \times N, \ll)$ подобны.

52. Если множество A бесконечно, то множества A и $A \times A$ равномощны.

---

*) Через $\max(x, y)$, где x, y — элементы линейно упорядоченного множества, обозначается наибольший из них.

**) Указанным способом и дальнейшем $A \times A$ можете в так определенном вполне упорядочением *(которое называется вполне упорядоченного множества $(A, \prec)$.*

53. Докажите, что любые два из следующих множеств равномощны: (а) прямая; (б) плоскость; (в) n-мерное евклидово пространство, $n = 1, 2, 3, \ldots$; (г) отрезок; (д) квадрат; (е) шар; (ж) сфера; (з) интервал.

54. Если $(A, <)$ — бесконечное вполне упорядоченное множество и $<$ минимально, то и вполне упорядочение $\ll$ канторова квадрата множества $(A, <)$ минимально.

55. Канторов квадрат $(A \times A, \ll)$ бесконечного вполне упорядоченного множества $(A, <)$ подобен $(A, <)$, если $<$ минимально.

56. Если $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ и $|X_i| \leqslant \tau$ для всех $i = 1, \ldots, k$, где τ — некоторое бесконечное кардинальное число, то $|X| \leqslant \tau$.

57. Пусть X — множество и $\{X_\alpha: \alpha \in M\}$ — некоторое семейство его подмножеств, причем $|M| \leqslant \tau$ и $|X_\alpha| \leqslant \tau$ для всех $\alpha \in M$. Тогда $|\bigcup \{X_\alpha: \alpha \in M\}| \leqslant \tau$.

58. Множество $\mathfrak{K}(A)$ всех конечных подмножеств любого фиксированного бесконечного множества A равномощно A.

59. Пусть X — бесконечное множество. Тогда существуют такие X_1 и X_2, что $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \Lambda$ и $|X_1| = |X| = |X_2|$.

60. Пусть X — бесконечное множество и $|X| = \tau$. Множество X можно представить как объединение множества мощности τ своих попарно не пересекающихся подмножеств мощности τ.

61. Проверьте, что сумма непересекающихся вполне упорядоченных множеств по вполне упорядоченному множеству (см. стр. 23) является вполне упорядоченным множеством.

62. Покажите, что если $(A, <)$ и $(B, \ll)$ — непересекающиеся бесконечные вполне упорядоченные множества и их сумма $(A, <) + (B, \ll)$ — минимально вполне упорядоченное множество, то $|A| < |B| = \aleph_0$ и $(B, \ll)$ — минимальное вполне упорядоченное множество. Покажите, что верно и обратное утверждение.

63. Покажите, что операция сложения вполне упорядоченных множеств не коммутативна.

64. Проверьте, что операция умножения линейно упорядоченных множеств ассоциативна: $((A, <) \times (B, \ll)) \times (C, \prec)$ подобно $(A, <) \times ((B, \ll) \times (C, \prec))$ для любых линейно упорядоченных множеств $(A, <)$, $(B, \ll)$ и $(C, \prec)$.

65. Пусть $(A, <)$ и $(B, \ll)$ — вполне упорядоченные множества и $(C, \prec) = (A, <) \times (B, \ll)$ — их произведение. Покажите, что $(C, \prec)$ — вполне упорядоченное множество.

66. Докажите, что *) произведение $(D, <) \times (N, <)$ подобно $(N, <)$.

*) Обозначения см. на стр. 24.

67. Докажите аналогичное сформулированному в задаче 66 (1) утверждение для случая, когда вместо $(N, <)$ взято произвольное вполне упорядоченное множество, в котором нет последнего элемента.

68. Подобны ли $(N, <) \times (D, <)$ и $(N, <)$?

69. Покажите, что операция умножения вполне упорядоченных множеств не коммутативна.

70. Пусть α, β, γ — упорядоченные множества. Докажите, что всегда $\alpha \times (\beta + \gamma) = (\alpha \times \beta) + (\alpha \times \gamma)$ и что может быть $(\beta + \gamma) \times \alpha \neq (\beta \times \alpha) + (\gamma \times \alpha)$.

71. Вполне упорядочение (лексикографическое) квадрата $(A, <) \times (A, <)$ бесконечного вполне упорядоченного множества $(A, <)$ никогда не бывает минимальным.

72. Покажите, что канторов квадрат и (лексикографический) квадрат вполне упорядоченного множества редко совпадают.

73. Пусть $(A, <)$ и $(B, \ll)$ — вполне упорядоченные множества и $(C, \prec) = (B, \ll)^{(A, <)}$. Покажите, что $(C, \prec)$ — вполне упорядоченное множество.

74. Рассмотрите вполне упорядоченное множество $(D, <)^{(D, <)}$.

75. Докажите, что если вполне упорядоченные множества $(A, <)$ и $(B, \ll)$ состоят из конечного числа элементов, то $(A, <)^{(B, \ll)}$ подобно вполне упорядоченному множеству натуральных чисел, меньших $|A|^{|B|}$.

76. Покажите, что если упорядоченные множества $(A, <)$ и $(B, \ll)$ бесконечны, то мощность множества элементов степени $(A, <)^{(B, \ll)}$ не превосходит наибольшего из кардинальных чисел $|A|$, $|B|$.

77. Докажите, что если $(A, \ll)$ — линейно упорядоченное множество, то $(A, \ll)^{(B, <)} = (A, \ll) \times (A, \ll)$.

78. Докажите, что для любых вполне упорядоченных множеств α, β и γ имеет место $\alpha^{\beta - \gamma} = \alpha^\beta \times \alpha^\gamma$.

79. Укажите такое вполне упорядоченное множество $(A, \ll)$ мощности $\aleph_0$, что $(D, <)^{(A, \ll)}$ подобно $(A, \ll)$.

80 (принцип доказательства по трансфинитной индукции). Пусть W — вполне упорядоченное множество и $Q \subseteq W$. Если для каждого $x \in W$ из $I(x) \subset Q$ следует, что $x \in Q$, то $Q = W$.

81 (практическая формулировка принципа доказательства по трансфинитной индукции). Пусть W — вполне упорядоченное множество, и каждому $x \in W$ поставлено в соответствие некоторое утверждение $P(x)$, причем выполняются условия:

1) $P(0)$ — верное утверждение (где 0 — первый элемент множества W) и

2) для каждого $x \in W$, если $P(a)$ верно для всех $a \in I(x)$, то и $P(x)$ верно.

Тогда $P(x)$ верно для всех $x \in W$.

82 (принцип построения по трансфинитной индукции). Пусть W — вполне упорядоченное множество, S — некоторый класс элементов и для каждого $x \in W$ определено отображение K_x, в силу которого каждому отображению f множества $I(x)$ в S соответствует некоторый элемент $K_x(f)$ класса S. Тогда существует и единственно отображение $\varphi\colon W \to S$ такое, что $\varphi(x) = K_x(\varphi \mid I(x))$ для всех $x \in W$.

§ 4. Свойства кардинальных чисел

Для кардинальных чисел определяются операции сложения, умножения, возведения в степень таким образом, что для натуральных чисел они совпадают с операциями обычной арифметики. Арифметика кардинальных чисел весьма своеобразна. Значение ее для теоретико-множественной топологии исключительно велико. Кардинальные числа входят с необходимостью и нетривиально в многие фундаментально важные определения, построения, формулировки теорем общей топологии.

Кардинальное число называется *бесконечным*, если оно является мощностью бесконечного множества. В противном случае оно называется конечным. Конечные кардинальные числа естественно отождествляются с натуральными числами — при этом мы понимаем натуральное число как мощность множества всех меньших его натуральных чисел. В частности, 0 — мощность пустого множества. Среди бесконечных кардинальных чисел есть наименьшее в смысле отношения $\preccurlyeq$, определенного на классе всех кардинальных чисел в начале главы 1; в этой книге никаких других упорядочений класса кардинальных чисел не рассматривается. Это число — $\aleph_0$ — мощность бесконечного счетного множества N. Скоро, решив задачу 84, вы узнаете, что в любом непустом множестве кардинальных чисел есть наименьший элемент. Этот факт имеет исключительно важное значение для всей математики. В соответствии со сказанным через τ^+ для произвольного кардинального числа τ мы обозначаем наименьшее из всех кардинальных чисел, строго больших τ.

Пусть λ и τ — кардинальные числа. Зафиксируем непересекающиеся множества A и B, для которых $|A| = \lambda$, $|B| = \tau$. Тогда кардинальное число $\lambda + \tau$ — *сумма кардинальных чисел* λ и τ — определяется как мощность множества $A \cup B$. *Произведение* $\lambda\tau$ есть мощность произведения $A \times B$ множеств A и B. Кардинальное число λ^τ — говорят «λ в степени τ», — по определению, является мощностью множества A^B. Ясно, что остающийся произвол в выборе множеств A и B не влечет неоднозначности в определении суммы, произведения и степени кардинальных чисел.

Обобщенная континуум-гипотеза заключается в том, что $2^\lambda = \lambda^+$ для каждого бесконечного кардинального числа τ. *Континуум-гипотеза* в классическом понимании есть утверждение, что $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (где $\aleph_1 = \aleph_0^+$; это общепринятое обозначение). П. Коэн показал, что континуум-гипотеза (равно как и обобщенная континуум-гипотеза) не зависит от принятых систем аксиом теории множеств.

Часто в связи с данным числом τ приходится рассматривать *кофинальное* (от τ) число $cf(\tau)$. По определению, $cf(\tau)$ есть наименьшее из таких кардинальных чисел λ, что τ можно представить как сумму некоторого множества M, где $|M| = \lambda$, кардинальных чисел, каждое из которых меньше τ (слово «меньше», по условию, в случае кардинальных чисел всегда означает «строго меньше»). Мы должны разъяснить только, что понимается под суммой бесконечного множества кардинальных чисел. Пусть A — некоторое множество, и для каждого $\alpha \in A$ задано кардинальное число τ_α. Будем считать, что τ_α является мощностью некоторого множества X_α; при этом множества X_α можно выбрать для каждого $\alpha \in A$ так, чтобы при $\alpha' \neq \alpha''$ всегда было $X_{\alpha'} \cap X_{\alpha''} = \Lambda$. (Достаточно перейти от самих X_α к их экземплярам $i_\alpha(X_\alpha)$, лежащим в свободной сумме множеств X_α по всем $\alpha \in A$.) Положим $X = \bigcup \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ и назовем *суммой кардинальных чисел* τ_α по всем $\alpha \in A$ (обозначение: $\Sigma \{\tau_\alpha : \alpha \in A\}$) мощность множества X. Ясно, что и это определение действует однозначно в пределах допускаемого произвола. Аналогично можно было бы определить произведение произвольного бесконечного множества кардинальных чисел.

Кардинальное число τ называется *изолированным*, если $\tau = \lambda^+$ для некоторого кардинального числа λ. Если τ не является изолированным, то его называют *предельным*. Кардинальное число τ называется *регулярным*, если $\tau = cf(\tau)$. Говорят, что τ *недостижимо*, если для любого λ из $\lambda \preccurlyeq \tau$ следует, что $2^\lambda \preccurlyeq \tau$. Регулярное недостижимое кардинальное число называется *сильно недостижимым*.

83. Пусть λ и τ — произвольные кардинальные числа. Покажите, что всегда

(а) $\lambda + \tau = \tau + \lambda$;

(б) $\lambda \cdot \tau = \tau \cdot \lambda$.

84. Во всяком непустом множестве M кардинальных чисел имеется наименьшее.

85. Пусть $(X, \preccurlyeq)$ — вполне упорядоченное множество мощности τ и λ — кардинальное число, меньшее τ. Тогда существует $x \in X$, для которого $|I(x)| = \lambda$.

86. Мощность множества $\mathfrak{K}$ всех кардинальных чисел, меньших произвольно фиксированного кардинального числа τ, не превосходит τ.

87. Пусть τ — мощность некоторого бесконечного множества. Тогда

(а) $\tau + \tau = \tau$;

(б) $\tau \cdot \tau = \tau$;

(в) если $\lambda \neq \tau$, то $\lambda \cdot \tau$ равно наибольшему из кардинальных чисел λ, τ.

88. Покажите, что если $\tau_\alpha \leqslant \tau$ для каждого $\alpha \in A$ и $|A| \leqslant \tau$, то $\Sigma\{\tau_\alpha: \alpha \in A\} \leqslant \tau$.

89. Каждое предельное кардинальное число τ является суммой всех предшествующих кардинальных чисел.

90. Пусть $\tau = \Sigma\{\tau_\alpha: \alpha \in A\}$. Покажите, что τ равно наибольшему из двух кардинальных чисел: $\sup\{\tau_\alpha: \alpha \in A\}$ и $|A|$.

91. В дальнейшем символом $\aleph_1$ мы всегда обозначаем наименьшее из кардинальных чисел, бо́льших $\aleph_0$. Пусть $T_{\aleph_1}$ (или $T(\omega_1)$) — множество мощности $\aleph_1$, наделенное минимальным вполне упорядочением $\prec$ (все такие множества подобны в силу 47 гл. I). Докажите, что, каково бы ни было счетное множество A, существует элемент $b \in T_{\aleph_1} \setminus A$ такой, что $a \prec b$ для всех $a \in A$.

92. Докажите, что эквивалентны следующие два определения кардинального числа 2^τ:

(а) 2^τ есть мощность множества $\exp X$ всех подмножеств такого множества X, что $|X| = \tau$;

(б) 2^τ есть мощность множества D^X всех отображений множества X, для которого $|X| = \tau$, в множество D, состоящее из ровно двух элементов — нуля и единицы.

93. Для каждого кардинального числа τ непременно $\tau < 2^\tau$.

94. Не существует самого большого кардинального числа.

95. Пусть λ и τ — бесконечные кардинальные числа. Всегда ли $\lambda^\tau = \tau^\lambda$?

96. Пусть λ, μ и τ — кардинальные числа. Докажите, что если $\lambda < \mu$, то $\lambda^\tau \leqslant \mu^\tau$ и $\tau^\lambda \leqslant \tau^\mu$.

97. Для любых трех кардинальных чисел λ, μ, τ справедливы соотношения: $\lambda^{\mu+\tau} = \lambda^\mu \cdot \lambda^\tau$, $(\lambda^\mu)^\tau = \lambda^{\mu \cdot \tau}$, $(\lambda \cdot \mu)^\tau = \lambda^\tau \cdot \mu^\tau$.

98. Покажите, что множество всех счетных подмножеств прямой имеет мощность $2^{\aleph_0}$.

99. Покажите, что $\aleph_1^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$.

100. Докажите, что если $\mu \geqslant \aleph_0$ и $2 \leqslant \lambda \leqslant \mu$, то $\lambda^\mu = 2^\mu$.

101. Пусть λ, μ и τ — кардинальные числа. Всегда ли $(\lambda^\mu)^\tau = \lambda^{(\mu^\tau)}$?

102. Число $\aleph_0$ сильно недостижимо.

103. Определите какое-нибудь недостижимое кардинальное число, отличное от $\aleph_0$.

104. Верно ли, что если кардинальное число λ меньше кардинального числа τ, то 2^λ меньше 2^τ?

105. Если $X = \bigcup\{X_\alpha: \alpha \in A\}$, где $|A| < |X|$ и $|X_\alpha| < |X|$ для каждого $\alpha \in A$, то $X = \bigcup\{Y_\beta: \beta \in B\}$, где $|B| \leqslant |A|$ и $|A| < |Y_\beta| < |X|$ для всех $\beta \in B$, причем $|Y_{\beta'}| \neq |Y_{\beta''}|$, когда $\beta' \neq \beta''$.

106. Пусть τ — кардинальное число и $(X, \prec)$ — минимально вполне упорядоченное множество мощности τ. Тогда $cf(\tau)$ есть наименьшее из кардинальных чисел λ таких, что в $(X, \prec)$ существует конфинальное подмножество мощности λ. При этом подмножество $M \subset X$ конфинально $(X, \prec)$, если для каждого $x \in X$ существует $a \in M$, для которого $x \prec a$.

107. Для любого кардинального числа τ, если $\lambda = cf(\tau)$, то $cf(\lambda) = \lambda$.

108. Чему равно $cf(\tau^*)$ для кардинального числа τ^*, определенного в решении задачи 103 гл. I?

109. Всякое изолированное бесконечное кардинальное число регулярно.

110. Пусть A и X_α, где $\alpha \in A$, — множества, причем $|A| = \tau$ и $|X_\alpha| \leqslant \lambda$ для каждого $\alpha \in A$. Тогда мощность произведения $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ не превосходит λ^τ.

111. Пусть τ и λ — кардинальные числа, причем $\lambda < cf(\tau)$ и число τ предельное. Тогда $\tau^\lambda = \Sigma\{\mu^\lambda: \mu < \tau\}$.

112. Приняв обобщенную континуум-гипотезу, докажите следующее утверждение: если τ и λ — кардинальные числа, причем $1 < \lambda < cf(\tau)$, то $\tau^\lambda = \tau$.

113. Пусть M — некоторое множество и для каждого $\alpha \in M$ заданы множество A_α и множество B_α такие, что $|A_\alpha| < |B_\alpha|$. Тогда мощность объединения всех A_α, $\alpha \in M$, строго меньше мощности произведения всех B_α, $\alpha \in M$.

114. Пусть для каждого $\alpha \in M$ задано множество A_α, причем выполняются условия:

1) если $\alpha' \neq \alpha''$, $\alpha' \in M$ и $\alpha'' \in M$, то $|A_{\alpha'}| \neq |A_{\alpha''}|$;

2) в множестве $\{|A_\alpha|: \alpha \in M\}$ нет наибольшего элемента.

Тогда $|\bigcup\{A_\alpha: \alpha \in M\}| < |\Pi\{A_\alpha: \alpha \in M\}|$.

115. Для любого кардинального числа τ имеем $\tau < cf(2^\tau)$.

116. Докажите, что отрезок нельзя представить в виде объединения счетного семейства множеств меньшей мощности.

117. Пусть даны множества A_1, A_2, B_1 и B_2 такие, что

(а) $A_1 \cap A_2 = \Lambda$; (б) $B_1 \cap B_2 = \Lambda$; (в) $|A_1 \cup A_2| = |B_1 \cup B_2|$; (г) $|A_1| = |A_2|$; (д) $|B_1| = |B_2|$.

Тогда $|A_1| = |B_1|$ (и $|A_2| = |B_2|$).

118. Существует такое семейство $\mathcal{E}^*$ подмножеств натурального ряда N, что: (а) если $A \in \mathcal{E}^*$, $B \in \mathcal{E}^*$ и $A \neq B$, то $|A \cap B| < \aleph_0$; (б) для каждого $A \in \mathcal{E}^*$ имеем $|A| = \aleph_0$; (в) $|\mathcal{E}^*| = 2^{\aleph_0}$; (г) если $C \subset N$ и $|C| = \aleph_0$, то $|A \cap C| = \aleph_0$ для некоторого $A \in \mathcal{E}^*$.

119. Пусть $(B, \prec)$ — минимально вполне упорядоченное множество мощности τ^+. Пусть $\alpha_0 \in B$, причем $|\{\alpha \in B: \alpha \prec \alpha_0\}| = \tau$, $C = \{\alpha \in B: \alpha_0 \leqslant \alpha\}$ и $f: C \to B$ — отображение такое, что

$f(\alpha) \prec \alpha$ для всех $\alpha \in C$ (иначе говоря, f — произвольный элемент произведения $\Pi\{B_\alpha\colon \alpha \in C\}$, где $B_\alpha = \{\beta \in B\colon \beta \prec \alpha\}$). Тогда существуют $\alpha' \in C$ и $\alpha'' \in C$, для которых $\alpha' \neq \alpha''$, но $f(\alpha') = f(\alpha'')$.

120. Пусть τ — кардинальное число, $\tau \geqslant \aleph_0$, $\lambda = 2^\tau$, X — множество мощности, большей λ, и M — множество всех неупорядоченных пар различных элементов множества X. Пусть, кроме того, задано отображение f множества M в некоторое множество T мощности τ. Тогда существует $X^* \subset X$ такое, что $|X^*| \geqslant \tau$ и $f(x, y) = f(x', y')$ для любых $x, y, x', y' \in X^*$, где $x \neq y$ и $x' \neq y'$.

121. Пусть A — множество, τ — кардинальное число, $\tau \geqslant \aleph_0$ и $|A| \geqslant 2^\tau$. Предположим, что множество M всех неупорядоченных пар различных элементов множества A так разбито в сумму попарно не пересекающихся множеств, что для каждого $a \in A$ множество $\{(a, x)\colon x \in A \setminus \{a\}\}$ содержится в объединении семейства мощности τ этих слагаемых. Докажите, что тогда существует такое $A^* \subset A$, $|A^*| \geqslant \tau$, что множество M^* всех неупорядоченных пар различных элементов A^* лежит в одном слагаемом.

122. Пусть на множестве Y задано семейство $\mathscr{E} = \{\gamma_\alpha\colon \alpha \in A\}$ семейств γ_α подмножеств множества Y, причем выполняются условия:

1) если α', $\alpha'' \in A$ и $\alpha' \neq \alpha''$, то существуют $F^{\alpha'} \in \gamma_{\alpha'}$ и $F^{\alpha''} \in \gamma_{\alpha''}$ такие, что $F^{\alpha'} \cap F^{\alpha''} = \Lambda$;

2) каждое γ_α содержит пересечение любых двух своих элементов;

3) $|\gamma_\alpha| \leqslant \tau$, а $|A| \geqslant 2^\tau$ для всех $\alpha \in A$ и некоторого кардинального числа τ.

Тогда можно выбрать множество $A^* \subset A$, и для каждого $\alpha \in A^*$ множество $F^\alpha \in \gamma_\alpha$ так, чтобы выполнялись условия: 4) $|A^*| \geqslant \tau$, и 5) если $\alpha' \in A^*$, $\alpha'' \in A^*$ и $\alpha' \neq \alpha''$, то $F^{\alpha'} \cap F^{\alpha''} = \Lambda$.

§ 5. Предфильтры, фильтры и ультрафильтры. Центрированные и максимальные центрированные семейства множеств

Прежде чем решать задачи этого параграфа — а результаты, в них полученные, существенно применяются в многих построениях и рассуждениях общей топологии,— советуем читателю еще раз обратиться к теоретическому введению, данному в начале этой главы, и внимательно перечитать его последнюю часть. Здесь мы *дополнительно* разъясним лишь небольшое число специальных понятий.

Ультрафильтр, заданный на множестве X, называется *σ-ультрафильтром*, если пересечение любого счетного множества его элементов не пусто. Мощность множества X называется *измеримым кардинальным числом*, если на X существует нетривиальный (т. е. свободный) σ-ультрафильтр.

Пусть ξ_1 и ξ_2 — фильтры, заданные соответственно на множестве X_1 и множестве X_2. Говорят, что ξ_1 и ξ_2 *эквивалентны*, если существует взаимно однозначное отображение f множества X_1 на множество X_2 такое, что *) $f\xi_1 = \xi_2$. Фильтры ξ_1 и ξ_2 называются *слабо эквивалентными*, если существуют такие $A_2 \in \xi_2$ и $A_1 \in \xi_1$, что сужения $\xi_1 \mid A_1$ и $\xi_2 \mid A_2$ (рассматриваемые как фильтры, заданные на множествах A_1 и A_2 соответственно) эквивалентны.

123. Покажите, что если ξ — предфильтр на X, то $\overline{\xi} = \{B \subset X\colon$ существует $A \in \xi$, для которого $A \subset B\}$ является фильтром. При этом говорят, что ξ — *базис* фильтра $\overline{\xi}$.

124. Всякое центрированное семейство ξ подмножеств множества X содержится в некотором фильтре на X.

125. Пусть ξ — предфильтр на X и B — подмножество множества X, для которого $A \cap B \neq \Lambda$, каково бы ни было $A \in \xi$. Докажите, что тогда $\xi' = \xi \cup \{B\}$ — центрированная система множеств.

126. Докажите, что каждая максимальная центрированная система множеств является фильтром. Покажите, что обратное не верно.

127. Пусть X — множество и $\mathscr{E}$ — некоторое семейство непустых подмножеств множества X. Докажите, что каждое центрированное семейство элементов $\mathscr{E}$ содержится в максимальном центрированном семействе элементов $\mathscr{E}$.

128. Докажите, что следующие утверждения равносильны:

(а) ξ — максимальное центрированное семейство подмножеств множества X;

(б) ξ — ультрафильтр на X;

(в) ξ — предфильтр, и для каждого $A \subset X$ из $A \in \xi$ следует, что существует $B \in \xi$, для которого $A \cap B = \Lambda$;

(в') ξ — предфильтр, и для каждого $A \subset X$, если $A \cap B \neq \Lambda$ для любого $B \in \xi$, то $A \in \xi$;

(г) для каждого $A \subset X$ либо $A \in \xi$, либо $X \setminus A \in \xi$ и ξ — центрированное семейство множеств;

(д) ξ — центрированное семейство множеств на X, $\xi \ni X$, и из $A_1 \cup A_2 \in \xi$ следует, что либо $A_1 \in \xi$, либо $A_2 \in \xi$.

129. Пусть X — бесконечное множество и $\eta(X) = \{X \setminus A\colon A \subset X$ и $|A| < |X|\}$. Покажите, что $\eta(X)$ — фильтр, но не ультрафильтр.

130. Пусть X — множество. Докажите, что каждый фильтр ξ на X содержится в некотором ультрафильтре на X.

131. Ультрафильтр ξ на X тривиален в том и только в том случае, если $\{x\} \in \xi$ для некоторой точки $x \in X$.

---

*) $f\xi_1 = \{f(A)\colon A \in \xi_1\}$.

132. Пусть ξ — фильтр на X и $X' \subset X$.

Покажите, что (а) $\xi \mid X'$ является фильтром на X' в том и только в том случае, если $A \cap X' \neq \Lambda$ для всех $A \in \xi$; (б) если ξ — ультрафильтр, то $\xi \mid X'$ — ультрафильтр на X' в том и только в том случае, если $X' \in \xi$.

133. Сужение $\xi \restriction A$ ультрафильтра ξ на любое $A \in \xi$ является подсемейством семейства ξ.

134. Пусть X — множество, x — некоторый его элемент и A — некоторое подмножество множества X. Введем следующие обозначения:

$$\xi(x) = \{B \subset X\colon B \ni x\},$$

$$\xi(A) = \{B \subset X\colon B \supset A\}.$$

Докажите, что

1) $\xi(x)$ — сингулярный ультрафильтр;

2) $\xi(A)$ — сингулярный фильтр;

3) $\xi(A)$ — ультрафильтр в том и только в том случае, если A состоит ровно из одной точки;

4) X бесконечно тогда и только тогда, когда существует свободный ультрафильтр на X.

135. Пусть X и Y — множества, $f\colon X \to Y$ — отображение, ξ — семейство множеств на X, η — семейство множеств на Y. Докажите, что

(а) если ξ — предфильтр, то и $f\xi$ — предфильтр;

(б) если ξ — фильтр, то $f\xi$ может фильтром не быть (даже при $fX = Y$);

(в) если η — предфильтр, то $f^{-1}\eta$ — предфильтр;

(г) если η — фильтр, то $f^{-1}\eta$ может фильтром не быть (даже при $fX = Y$);

(д) если ξ — ультрафильтр и $fX = Y$, то и $f\xi$ — ультрафильтр;

(е) если f — взаимно однозначное отображение X на Y, то ξ — фильтр (соответственно предфильтр, ультрафильтр) в том и только в том случае, когда $f\xi$ — фильтр (соответственно предфильтр, ультрафильтр).

136. Сужение σ-ультрафильтра ξ, заданного на множестве X, на множество $X_0 \subset X$ является σ-ультрафильтром на X_0, если $X_0 \in \xi$.

137. Если ξ — ультрафильтр на X и τ — кардинальное число, $\tau \geqslant \aleph_0$, причем для каждого семейства $\xi' \subset \xi$, мощность которого не превосходит τ, имеет место $\bigcap \{A\colon A \in \xi'\} \neq \Lambda$, то для любого ξ', $|\xi'| \leqslant \tau$, выполняется $\bigcap \{A\colon A \in \xi'\} \in \xi$.

138. Если $X \subset Y$ и на множестве X существует нетривиальный σ-ультрафильтр, то нетривиальный σ-ультрафильтр существует и на Y.

139. Если $\tau_1 \leqslant \tau_2$ и τ_1 — измеримое кардинальное число, то и кардинальное число τ_2 измеримо.

140. Если ξ — нетривиальный σ-ультрафильтр на X и $\xi' \subset \xi$, $|\xi'| \leqslant \tau$, $\bigcap \{A\colon A \in \xi'\} = \Lambda$, то кардинальное число τ измеримо.

141. Пусть A и X — множества, причем $X = \bigcup \{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ и $|A| = \tau$, $|X_\alpha| = \tau_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$ — неизмеримые кардинальные числа. Тогда и мощность множества X неизмерима.

142. Если мощность множества X неизмерима, то и мощность множества $\exp X$ неизмерима.

143. Наименьшее из измеримых кардинальных чисел (если таковые существуют) является сильно недостижимым кардинальным числом, отличным от $\aleph_0$.

144. Мощность множества всех различных (т. е. отличающихся друг от друга хотя бы одним элементом) максимальных центрированных семейств подмножеств множества X равна $2^{2^{|X|}}$.

145. Покажите, что существуют неэквивалентные свободные ультрафильтры на множестве натуральных чисел.

146. Покажите, что на множестве натуральных чисел существуют свободные ультрафильтры, не являющиеся слабо эквивалентными (см. стр. 33). Какова мощность семейства всех попарно неслабо эквивалентных свободных ультрафильтров на множестве натуральных чисел? (Сравните с задачей 144 этой главы.)

РЕШЕНИЯ

6. 2^a (докажите по индукции; напомним, что пустое множество является элементом $\exp A$).

7. Годятся $A = \{A\}$ или $B = \{A, \{A\}\}$ и т. д.

8. Положим $a_1 = \{A\}$, $a_2 = \{A, \{A\}\}$, $a_3 = \{A, \{A\}, \{\{A\}\}\}$, ... Тогда $a_i \in a_j$ при $i < j$ и $A = \{a_2, \ldots, a_n\}$ — искомое множество.

9. Предоставляется читателю (см. 10 гл. 1).

10. Пусть $\preccurlyeq$ — полное упорядочение на X. Пусть $(X, \preccurlyeq)$ есть наименьший элемент. Обозначим его через x^*. Тогда x^* — наибольший элемент в $(X, \preccurlyeq)$. Если X бесконечно, то множества $A = \{y\colon y \in X$ и $\overleftarrow{\gamma}_{\preccurlyeq}(y)$ бесконечно$\}$ непусто (ибо $x^* \in A$). Пусть a — наименьший элемент множества A (относительно $\preccurlyeq$). Тогда $I_{\preccurlyeq}(a)$ — бесконечное множество, у которого, как легко видеть, нет наименьшего по отношению к упорядочению $\preccurlyeq$ элемента. Получили противоречие. Остальное ясно.

11. Пусть X бесконечно и $\preccurlyeq$ — полное упорядочение на X. Если в X существует максимальный элемент, то только один. В этом случае обозначим его через ξ и положим $X' = X \setminus \{\xi\}$. В противном случае полагаем $X' = X$. Для каждого $x \in X'$ определен элемент $x + 1 \in X$. Отображение $\varphi\colon X' \to X$, определенное правилом $\varphi(x) = x + 1$, взаимно однозначно. Если $X' = X$, то $\varphi\colon X \to X$ есть взаимно однозначное соответствие между X и собственным подмножеством $\varphi(X)$ множества X, ибо наименьший элемент η множества X не принадлежит $\varphi(X)$. Если $X' \neq X$, то $X \setminus X' = \{\xi\}$. Положим $\varphi(\xi) = \eta$.

Тогда снова $\varphi\colon X \to X$ взаимно однозначно. Покажем, что $\varphi(X) \neq X$. Множества $I_{\preccurlyeq}(\xi)$ бесконечно (ибо X бесконечно, а ξ — максимальный элемент). Положим $B = \{y \in X\colon I_{\preccurlyeq}(y)$ бесконечно$\}$. Тогда $\xi \in B$, и поэтому $B \neq \Lambda$. Через y_1 обозначим наименьший элемент множества B. Ясно бы как было $x \in X$, непременно $y_1 \neq x$ | 1: если $y_1 = x + 1$, то $I_{\preccurlyeq}(y_0) = I_{\preccurlyeq}(x) \cup \{x\}$ и раз $I_{\preccurlyeq}(y_0)$ бесконечно, то и $I_{\preccurlyeq}(x)$ бесконечно, что противоречит выбору y_1, ибо $x \prec y_1$ и $x \neq y_1$. Но тогда $y_0 \in \varphi X$, т. е. $\varphi(X)$ — собственное подмножество множества X. Остальное ясно.

12. Пусть $X' \subseteq X$. Если X конечно, то и X' конечно. Если X бесконечно, но счетно, то существует взаимно однозначное отображение $\varphi\colon X \to N^+$ множества X в множество N^+ целых положительных чисел. Положим $N' = \varphi(X')$; $N' \subseteq N^+$. Достаточно отобразить взаимно однозначно N' на N^+. На N^+ и на N' задан естественный порядок $\leqslant$. Для произвольного $x' \in N'$ положим $\psi(x') = |\{y' \in N'\colon y' \leqslant x'\}|$ — мы интересуемся сейчас целью положительные числа как мощности конечных непустых множеств. Легко доказывается, что $\psi\colon N' \to N^+$ — взаимно однозначное отображение множества N' на множество N^+ (надо воспользоваться тем, что $\leqslant$ вполне упорядочение).

15. Отобразим X взаимно однозначно на множество N всех натуральных чисел и рассмотрим в X прообраз X_0 множества N_0 всех четных чисел (обозначим его через X_0) и прообраз X_1 множества N_1 всех нечетных чисел (обозначим его через X_1). Множества X_0 и X_1 искомые (см. 12 гл. I).

16. Можно считать, что $A \cap B = \Lambda$. (В противном случае заменим B на $B' = B \setminus A$; в силу 12 гл. I B' счетно. Кроме того, $A \cup B = A \cup B'$.) Разберем только случай, когда A и B бесконечны. Через N_1 обозначим множество всех целых чисел, через N_+ — множество всех нечетных чисел. В силу 12 гл. I и N_0 и N_1 взаимно однозначно отображаются на множество N^+ всех натуральных чисел. Значит, A можно взаимно однозначно отобразить на N_0, а B — на N_1. Но тогда объединение этих отображений (в естественном смысле) является взаимно однозначным отображением множества $A \cup B$ на множество N.

17. Множество $X \setminus A$ счетно (18 гл. I). Поэтому и $X \setminus A$ можно вложить бесконечное счетное подмножество C (16 гл. I). Бесконечное множество $A \cup C$ счетно (16 гл. I); существует взаимно однозначное отображение множества C на множество $A \cup C$. Объединив это отображение с тождественным отображением множества $X \setminus (A \cup C)$ на себя, получаем искомое взаимно однозначное отображение множества $X \setminus A$ на множество X.

18. Будем считать, что каждому $n \in N$ поставлено в соответствие некоторое конечное множество A_n (не страшно, если $A_n = \Lambda$). Можно считать, что $A_{n_1} \cap A_{n_2} = \Lambda$ при $n_1 \neq n_2 = n$ — противном случае следует перейти к (конечным) множествам $A'_n = A_n \setminus \bigcup \{A_k\colon k < n\}$, для которых $\bigcup \{A'_n\colon n \in N\} = \bigcup \{A_n\colon n \in N\}$. На $A = \bigcup \{A_n\colon n \in N\}$ определим упорядочение $\ll$ следующим образом. Зафиксируем какие нибудь вполне упорядочения $\ll_n$ на каждом A_n. Если $x, y \in A_n$, то положим $x \ll y$ тогда и только тогда, когда $x \ll_n y$. Если же существует такое n, что $x, y \in A_n$, то положим $x \ll y$, если $n \prec n_0$, где $A_{n_1} \ni x$, $A_{n_2} \ni y$. Легко проверяется, что $\ll$ — вполне упорядочение на A, причем для каждого $x \in A$ множество $I_{\ll}(x)$ конечно. Интересен лишь случай, когда всё A бесконечно. Определим отображение $\varphi\colon A \to N$ правилом: $\varphi(x) = |I_{\ll}(x)|$. Пользуясь тем, что $(N, \prec)$ и $(A, \ll)$ — вполне упорядоченные множества, докажите, что φ — взаимно однозначное отображение A на N.

19. Достаточно разобрать случай (см. 18, 12 гл. I), когда каждому целому $n \geqslant 0$ поставлено в соответствие счетное бесконечное множество A_n с обычными условиями: $A_{n_1} \cap A_{n_2} = \Lambda$ при $n_1 \neq n_2$. Зафиксируем для каждого $n \in N^+$ некоторое взаимно однозначное отображение φ_n множества N^+ на

множество A_n. Положим $\varphi_0(k) = x_{k,k}$. Тогда $A = \bigcup \{A_n\colon n \in N^+\} = \{x_{k,l}\colon k, l \in N^+\}$. Положим $B_1 = \{x_{k,l}\colon k + l = 1\}$ для каждого $l \in N^+$ (1). Тогда $\bigcup \{B_l\colon l \in N^+,\ (\neq 1)\} = \{x_{k,l}\colon k \in N^+,\ l \in N^+\} = A$, а каждое B_l — конечное множество. Остается сослаться на результат задачи 18 гл. I.

20. Пусть A_1, A_2 — счетные множества и φ_1, φ_2 — взаимно однозначные отображения $\varphi_1\colon A_1 \to N$, $\varphi_2\colon A_2 \to N$. Тогда $\varphi_1 \times \varphi_2\colon A_1 \times A_2 \to N \times N$ — тоже взаимно однозначное отображение. Поэтому достаточно установить, что $N \times N$ — счетное множество. Положим $A_n = \{(n, k)\colon k \in N\}$ для каждого $n \in N$. Тогда A_n — счетное множество, ибо $p_n\colon A_n \to N$, где $p_n(n, k) = k$ для каждого $k \in N$, — взаимно однозначное отображение A на N. Очевидно, $\bigcup \{A_n\colon n \in N\} = N \times N$, т. е. $N \times N$ — счетное множество (см. 19 гл. I). Теперь по индукции результат распространяется на случай любого конечного семейства счетных сомножителей.

21. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение и X — счетное множество. Для каждого $y \in f(X)$ зафиксируем $x \in f^{-1}(y)$. Положим $\varphi(y) = x(y)$; тогда $\varphi\colon f(X) \to X$ — взаимно однозначное отображение множества $f(X)$ на множество $\varphi f(X)$, которое счетно, как подмножество счетного множества (см. 12 гл. I).

22. (а) Рассмотрим произведение $N^+ \times N^+$ множества всех целых положительных чисел на себя. Для $(m, n) \in N^+ \times N^+$ положим $\chi(m, n) = \frac{m}{n}$. Этим определено отображение χ счетного (см. 20 гл. I) множества $N^+ \times N^+$ на множество K^+ положительных рациональных чисел. Следовательно (см. 21 гл. I), K^+ счетно. Тогда и множество отрицательных рациональных чисел счетно (умножение на (-1) устанавливает естественное взаимно однозначное соответствие между K^+ и K^-). Поэтому и множество $K^- \cup \{0\} \cup K^+$ счетно (см. 16 гл. I).

(б) Достаточно сослаться на задачи 12, 20, 22 (а) гл. I.

(в) Пусть A счетно и $A^* = \bigcup \{A_i\colon i = 1, 2, \ldots\}$, где $A_1 = A$, $A_2 = A \times A = A^2$ и вообще $A_i = A \times A^{i-1}$. Множество A^* счетно (см. 19, 20 гл. I). Каждому элементу из A^* естественно соответствует некоторое конечное подмножество множества A, причем все непустые конечные подмножества множества A получаются таким образом, т. е. существует естественное отображение множества A^* на множество всех непустых конечных подмножеств множества A. Следовательно, последнее (пополненное пустым множеством как элементом) является счетным множеством (см. 24, 16 гл. I).

(г) Доказывается так же, как в 22 (в) гл. I.

(д) См. 22 (в) и 20 гл. I.

(е) Следует из 22 (д) гл. I.

(ж) Выберем внутри каждой из окружностей, ограничивающих восьмерку, по точке, обе координаты которых рациональны. Получается, легко видеть, взаимно однозначное отображение множества восьмерок, входящих в семейство, на счетное множество.

27. Пусть $f\colon C \to A \times B$ — отображение, $\pi_A\colon A \times B \to A$, $\pi_B\colon A \times B \to B$ — проектирования, т. е. $\pi_A(a, b) = a$, $\pi_B(a, b) = b$ для всех $(a, b) \in A \times B$. Положим $f_1 = \pi_A f$, $f_2 = \pi_B f$; $f_1\colon C \to A$, $f_2\colon C \to B$. Покажите, что правило $\chi(f) = (f_1, f_2)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $(A \times B)^C$ и $A^C \times B^C$.

28. Достаточно заметить, что в силу соотношения $B \cap C = \Lambda$ имеет место взаимно однозначное соответствие между отображениями $f\colon B \cup C \to A$ и парами (f_1, f_2) их сужений $f_1 = f \mid B$, $f_1\colon B \to A$, $f_2 = f \mid C$, $f_2\colon C \to A$.

29. Пусть $f \in A^{B \times C}$ (т. е. $f\colon B \times C \to A$) и $(b, c) \in B \times C$, $b \in B$, $c \in C$. Положим $\varphi_b^f(b) = f(b, c) \in A$. При фиксированных $f \in A^{B \times C}$ и $c \in C$ это правило определяет отображение $\varphi_b^f\colon B \to A$ таким образом, $\varphi_b^f \in A^B$;

полагая $\chi_f(c) = \varphi_c^f$, мы получаем отображение $\chi_f: C \to A^B$. Наконец, правило $\lambda(f) = \chi_f$ определяет отображение $\lambda: A^{B\times C} \to (A^B)^C$. Оказывается, λ — взаимно однозначное отображение сюда. Действительно, пусть $\mu: C \to A^B$ — отображение. Для произвольного элемента $(b, c) \in B \times C$ положим $f_\mu(b, c) = (\mu(c))(b) \in A$. Правилом $\mu(\chi) = f_\mu$ определено некоторое отображение $\mu: (A^B)^C \to A^{B\times C}$. Проверьте, что μ и λ — обратные друг к другу отображения.

30. Тройкой назовем любой набор $t = (A, f, B)$, где $A \subset X$, $B \subset Y$ и f — взаимно однозначное отображение множества A на множество B. Множество всех троек обозначим через T. Пусть $t = (A, f, B)$ и $t' = (A', f', B')$ — произвольные две тройки. Положим $t \prec t'$, если $A \subset A'$, $B \subset B'$ и $f' \mid A = f$; $t = t'$, если $A = A'$, $B = B'$, $f = f'$. Проверьте, что упорядоченное множество $(T, \prec)$ индуктивно. В силу принципа Цорна — Куратовского в $(T, \prec)$ существует некоторый максимальный элемент $t^* = (A^*, f^*, B^*)$. Если $A^* = X$ или $B^* = Y$, то задача решена. В противном случае можно выбрать $x^0 \in X \setminus A^*$ и $y^0 \in Y \setminus B^*$. Полагая $\bar{A} = A^* \cup \{x^*\}$, $\bar{B} = B^* \cup \{y^*\}$ и $\bar{f}(x^0) = y^0$, $\bar{f} \mid A^* = f^*$, мы получаем тройку $\bar{t} = (\bar{A}, \bar{f}, \bar{B}) \in T$, причем $t^* \prec \bar{t}$, $t^* \neq \bar{t}$, что противоречит максимальности элемента t^* в $(T, \prec)$. Значит, либо $A^* = X$, либо $B^* = Y$.

31. Можно считать, что множества X и Y не пересекаются. (В противном случае следует умножить множество $X \cup Y$ на множество $\{0, 1\}$, состоящее из двух элементов 0 и 1; тогда $X \times \{0\}$, $Y \times \{1\}$ — заведомо множества X и Y, являющиеся непересекающимися подмножествами множества $(X \cup Y) \times \{0, 1\}$.) Пусть ξ обозначает объект, не являющийся элементом ни одного из множеств X, Y (например, годится $\xi = \{X \cup Y\}$ — множество, единственным элементом которого является множество $X \cup Y$). Положим $Z = X \cup Y$. Для каждого $z \in Z$ определим по (обычной) индукции последовательность $S(z) = \{s_i: i = 1, 2, \ldots\}$ элементов множества $Z \cup \{\xi\}$ следующим образом. Всегда $s_1 = z$. Пусть $s_i \in S(z)$ определены уже для всех $i \leqslant n$. Тогда либо $s_n \in X$, либо $s_n \in Y$, либо $s_n = \xi$ (и одновременно эти соотношения не осуществляются). Если $s_n \in X$ и $s_n \in g(Y)$, то мы полагаем $s_{n+1} = g^{-1}(s_n)$. Если $s_n \in Y$ и $s_n \in f(X)$, то пусть $s_{n+1} = f^{-1}(s_n)$. Если $s_n \in Y$ и $s_n \notin f(X)$, то пусть $s_{n+1} = \xi$. Наконец, если $s_n = \xi$, мы полагаем и $s_{n+1} = \xi$. Поскольку $X_\infty = \{x \in X: S(x)$ не содержит $\xi\}$, $Y_\infty = \{y \in Y: S(y)$ не содержит $\xi\}$, $X_n = \{x \in X \setminus X_\infty:$ наи $\{n: s_n \neq \xi\}$ — нечетное число$\}$, $Y_n = \{y \in Y \setminus Y_\infty:$ наи $\{n: y_n \neq \xi\}$ — нечетное число$\}$, $X_\xi = \{x \in X \setminus X_\infty:$ наи $\{n: s_n \neq \xi\}$ — четное число$\}$, $Y_\xi = \{y \in Y \setminus Y_\infty:$ наи $\{n: y_n \neq \xi\}$ — четное число$\}$. Тогда легко видеть, что имеют место следующие соотношения: $X = X_\eta \cup X_\xi \cup X_\infty$, $Y = Y_\eta \cup Y_\xi \cup Y_\infty$, $fX_\infty = Y_\infty$, $fX_\eta = Y_\eta$, $gY_\infty = X_\infty$. Определим $\varphi: X \to Y$ так: $\varphi \mid X_\infty = f \mid X_\infty$, $\varphi \mid X_\xi = f \mid X_\xi$, $\varphi \mid X_\eta = g^{-1} \mid X_\eta$. Проверьте, что φ — взаимно однозначное отображение X на Y.

32. Следует из задач 30 и 31 гл. I.

34. Положим $f(x) = \{x\}$ для каждого $x \in X$. Тогда $f(x) \in \exp X$ и f — взаимно однозначное отображение множества X в множество $\exp X$. Теперь следует установить, что если $\varphi: X \to \exp X$ — взаимно однозначное отображение, то $\varphi(X) \neq \exp X$. Положим $A = \{x \in X: x \notin \varphi(x)\}$. Если $A \in \varphi(X)$, то $A = \varphi(x^*)$ для некоторого $x^* \in X$ и либо $x^* \in A$, либо $x^* \notin A$. Покажем, что обе альтернативы ведут к противоречию. Если $x^* \in A$, то $x^* \notin \varphi(x^*)$ и, в силу определения A, $x^* \notin A$ — получаем противоречие. Если $x^* \notin A$, то $x^* \notin \varphi(x^*)$ и, в силу определения A, $x^* \in A$ — получаем противоречие. Следовательно, $A \notin \varphi(X)$.

Если $X = \Lambda$ — пустое множество, то множество $\exp X$ состоит ровно из одного элемента, а X не имеет элементов. Следовательно, между X и $\exp X$ нельзя установить взаимно однозначного соответствия.

35. Если $k \in N^+$, $i \in N^1$ и $a \in S_{i+k}$, положим $\psi_k(a) = \varphi(\underbrace{\varphi_{k-1}(\ldots\varphi}_{k\text{ раз}}(a)\ldots)) = \varphi_k(a)$. Очевидно, $\psi_k(S_{i+k}) \subset S_i$. Полагаем $S_i^k = \bigcap\{\psi_k(S_{i+k}): k \in N^+\}$. Из $\varphi(S_{i+k+1}) \subset S_{i+k}$ следует, что $\psi_{k-1}(S_{i+k}) \subset \psi_k(S_{i+k})$. Следовательно, последовательность $\xi_i = \{\psi_k(S_{i+k}): k \in N^+\}$ монотонно убывающая (но не строго, вообще говоря). Так элементы ξ_i — непустые конечные множества. Поэтому $S_i^k = \psi_{k^*}(S_{i+k^*})$ для некоторого $k^* \in N^+$ и потому $S_i^k \neq \Lambda$. Далее, $\varphi(S_{i+k}^k) = \varphi(\bigcap\{\psi_k(S_{i+k+1}): k \in N^+\}) = \bigcap\{\psi_{k-1}(S_{i+k+1}): k \in N^+\} \subset S_i^k$. С другой стороны, пусть $a \in S_i$ и $A = \{b \in S_{i+1}: \varphi(b) = a\}$. Если $S_{i+1}^k \cap A = \Lambda$, то, так как ξ_{i+1} — монотонно убывающее семейство конечных множеств, существует $k' \in N^+$, для которого $\psi_{k'}(S_{i+k'+1}) \cap A = \Lambda$. Но тогда $\psi_{k'+1}(S_{i+k'+1}) \cap \varphi(A) = \Lambda$ (ибо A — полный прообраз при φ). А $a \in \psi_{k'+1}(S_{i+k'+1})$ и, тем более, $a \in S_i^k$. Этим доказано, что $\varphi(S_{i+1}^k) \supset S_i^k$. Значит, $\varphi(S_{i+1}^k) = S_i^k$ для всех $i \in N^1$. Теперь искомая последовательность $\{x_i: i \in N^+\}$ строится без труда: выбираем произвольно $a_1 \in S_1^k$ и, если определены уже все a_i для $i \leqslant n$, причем так, что $a_i \in S_i^k$, то принимаем за a_{n+1} любой элемент множества S_{n+1}^k, для которого $\varphi(a_{n+1}) = a_n$.

36. Пусть существует множество $A \subset X$, $A \neq \Lambda$, в котором нет наименьшего элемента. Тогда очевидным образом по индукции строится последовательность $(a_n) \subset A$ такая *), что $a_{n+1} \prec a_n$, $a_{n+1} \neq a_n$ при всех n. Очевидно, $(a_n: n = 1, 2, \ldots)$ — счетное множество, которое не вполне упорядочено отношением $\prec$, заданным на X.

38. Утверждение (а) сразу вытекает из определения фрагмента. Докажем (б). Если A' и A не содержатся, то $x' \notin A$ для некоторого $x' \in A'$. Пусть x — произвольный элемент множества A. Соотношение $x' \prec x$ не может быть верным — в противном случае $x' \in A$. Значит, так как $\prec$ — линейное упорядочение, $x \prec x'$. Но тогда $x \in A'$, так как A' — фрагмент, и мы заключаем, что $A \subset A'$.

39. Если $A = \{x \in X: f(x) \preceq x$ и $f(x) \neq x\} \neq \Lambda$, то пусть x^* — первый элемент множества A. Тогда $x = f(x^*) \neq x^*$ и $x \preceq x^*$. Следовательно, $x \in A$. Поэтому не верно, что $f(x) \preceq x = f(x^*)$. Но f — взаимное отображение; поэтому из $x \prec x^*$ следует, что $f(x) \prec f(x^*)$ — получаем противоречие. Значит, $A = \Lambda$. Положим $B = \{x \in X: f(x) \neq x\}$. Пусть $B \neq \Lambda$, и пусть x_0 — наименьший элемент множества B. Рассмотрим множество $I(x_0) = \{x \in X: x \preceq x_0$ и $x \neq x_0\}$. Тогда $f(I(x_0)) = I(x_0)$, ибо для всех $x \in I(x_0)$ $f(x) = x$. Положим $C = X \setminus (I(x_0) \cup \{x_0\})$. Имеем: $f(x_0) \neq x_0$ и $x_0 \prec f(x_0)$; значит, $f(x_0) \in C$. Кроме того, $f(C) \subset C$ (ибо $A = \Lambda$). Следовательно, $f(X) \ni x_0$ и $f(X) \ni f(x_0)$, где $x_0 \prec f(x_0)$. Это противоречит тому, что $f(X)$ является фрагментом множества $(X, \prec)$.

40. Очевидно, либо $f_1(X) \subset f_2(X)$, либо $f_2(X) \subset f_1(X)$ (ибо $f_i(X)$ — фрагменты множества $(Y, \ll)$). Пусть, для определенности, $f_1(X) \subset f_2(X)$. Тогда $Y_1 = f(X_1)$ и $Y_2 = f(X_2)$ суть вполне упорядоченные множества, причем Y_1 — подмножество вполне упорядоченного множества $(Y, \ll)$, причем Y_1 является фрагментом множества $(Y_2, \ll)$. Для каждого $y \in Y_2$ положим $\varphi(y) = f_1|\overline{f_2^{-1}}(y)$. Как суперпозиция двух подобий: $f_2^{-1}: (Y_2, \ll) \to (X, \prec)$ и $f_1: (X, \prec) \to (Y_1, \ll)$, отображение φ является подобием множества $(Y_2, \ll)$ на его фрагмент $(Y_1, \ll)$. Но тогда (см. 38 гл. I) $Y_1 = Y_2$, и φ — тождественное отображение множества Y_2 на себя, т. е. $\varphi(y) = y$ для всех $y \in Y_2$. Это

*) Мы пишем (a_n) вместо правильного $(a_n: n \in N^+)$.

означает, что f_α и f_α^{-1} — взаимно обратные отображения; одновременно $f_\beta(x) = f_\alpha(x)$ для всех $x \in A_\alpha$.

41. Обозначим через $\mathscr{F}$ семейство всех фрагментов множества $(X, \prec)$, которые (будучи наделены вполне упорядоченным $(A, \prec)$) допускают подобное отображение на некоторый фрагмент множества $(Y, \ll)$. $\mathscr{F}$ имеет естественное вполне упорядоченное $\prec$: $A \prec B$, если $A \subset B$ для любых $A, B \in \mathscr{F}$. Докажем, что множество $(\mathscr{F}, \prec)$ индуктивно. Пусть, именно, если $A = \bigcup \{A_\alpha : \alpha \in M\}$, где $A_\alpha \in \mathscr{F}$ для каждого $\alpha \in M$, то A — фрагмент множества $(X, \prec)$ (см. 38 (в) гл. I). Пусть теперь $f_\alpha : A_\alpha \to Y$, $\ll$ — подобное отображение множества $(A_\alpha, \prec)$ на фрагмент множества $(Y, \ll)$ для каждого $\alpha \in M$. Образ фрагмента при подобном отображении на фрагмент снова является фрагментом (это очевидно). Рассмотрим $f_{\alpha'} : (A_{\alpha'}, \prec) \to (Y, \ll)$, $f_{\alpha''} : (A_{\alpha''}, \prec) \to (Y, \ll)$ для любых $\alpha', \alpha'' \in M$. Тогда либо $A_{\alpha'}$ — фрагмент в $(A_{\alpha''}, \prec)$, либо $A_{\alpha''}$ — фрагмент в $(A_{\alpha'}, \prec)$. Из задачи 40 гл. I следует, что отображения $f_{\alpha'}$ и $f_{\alpha''}$ совпадают там, где они оба определены. Определим теперь $f : A \to Y$ правилом: $f(x) = f_\alpha(x)$ для любого $x \in A$ и любого $\alpha \in M$ такого, что $x \in A_\alpha$. В силу сказанного выше это определение корректно. Так как семейство $\{A_\alpha : \alpha \in M\}$ — цепь, то для любых $x_1, x_2 \in A$ найдется $\alpha' \in M$ такое, что $x_1, x_2 \in A_{\alpha'}$.

Из $f \upharpoonright A_{\alpha'} = f_{\alpha'}$ и того, что $f_{\alpha'}$ — подобное отображение, следует теперь, что и f — подобное отображение. Значит, множество $(\mathscr{F}, \prec)$ индуктивно. В силу принципа Куратовского — Цорна в множестве $(\mathscr{F}, \prec)$ существует максимальный элемент A^*. В силу определения семейства $\mathscr{F}$ существует подобное отображение f^* множества $(A^*, \prec)$ на некоторый фрагмент Y^* множества $(Y, \ll)$. Если $A^* = X$ или $Y^* = Y$, то цель достигнута. В противном случае пусть a^* — первый элемент множества $X \setminus A^*$, а y^* — первый элемент множества $Y \setminus Y^*$. Положим $\overline{A} = A^* \cup \{a^*\}$, $\overline{Y} = Y^* \cup \{y^*\}$ и определим отображение $\overline{f} : \overline{A} \to \overline{Y}$ следующим образом: $\overline{f}(a^*) = y^*$ и $\overline{f} \upharpoonright A^* = f^*$. Тогда $\overline{A}$ — фрагмент множества $(X, \prec)$, а $\overline{f}$ — его подобное отображение на фрагмент $\overline{Y}$ множества $(Y, \ll)$. Значит, $\overline{A} \in \mathscr{F}$. Но $A^* \prec \overline{A} \in A^* \prec \overline{A}$, а это противоречит тому, что A^* — максимальный элемент множества $\mathscr{F}$. Итак, либо $A = X$, либо $Y^* = Y$.

42. Достаточно сослаться на задачи 40 и 41 гл. I.

43. Пусть $\prec$ — какое-нибудь вполне упорядочение на X. Если оно не удовлетворяет условию задачи, то множество $B = \{x \in X : \aleph_1 \leqslant |I_x(x)|\}$ не пусто (ибо B содержит хотя бы в крайней мере последний элемент множества $(X, \prec)$). Через x^0 обозначим первый элемент множества B. Тогда $(I(x^0), \prec)$ — бесконечное вполне упорядоченное множество без последнего элемента. Определим на X новое вполне упорядочение $\prec_0$ по правилу: если $x_1, x_2 \in I(x^0)$ или $x_1, x_2 \in X \setminus I(x^0)$, то $x_1 \prec_0 x_2$ в том и только в том случае, если $x_1 \prec x_2$; если $x_1 \in I(x^0)$, а $x_2 \in X \setminus I(x^0)$, то $x_1 \prec_0 x_2$ (и, как всегда, $x \prec_0 x$ для всех $x \in X$). Не вызывает сомнений, что $\prec_0$ — действительно вполне упорядочение и притом искомое.

44. Легко следует из задач 17, 16 гл. I.

45. Согласно принципу вполне упорядочения X может быть вполне упорядочено некоторым отношением $\prec$. Пусть это упорядочение по мощности не меньше, чем множество $A = \{x \in X : \{x' \in X : x' \prec x\} \sim |X|\}$ (см. задачу 43). Через x^0 обозначим первый элемент множества A. Тогда $|I(x^0)| = |X|$. Через x^* обозначим первый элемент множества A. Тогда $|I(x^*)| = |X|$, а для любого $x \in I(x^*)$ имеем $|I(x)| < |X|$. Зафиксируем каким-нибудь взаимно однозначное отображение φ множества X на множество $I(x^*)$ и положим $x_1 \ll x_2$ в том и только в том случае, если $\varphi(x_1) \prec \varphi(x_2)$. Тогда φ — подобное отображение, откуда легко следует, что $\ll$ — максимальное вполне упорядочение на X.

47. См. задачу 42 гл. I.

48. Если x — последний элемент множества $(X, \prec)$, то $X = I(x) \cup \{x\}$. Но тогда из задачи 42 гл. I следует, что $|X| = |I(x)|$. Но тогда $\prec$ не удовлетворяет условию.

50. При любом $\alpha \in A$ положим $\Gamma_\alpha = \{(x, y) \in A \times A : \max\{x, y\} = \alpha\}$. Пусть B — произвольное вполне упорядоченное множество мощности $\mathfrak{m} < |A|$ и $B_\alpha = B \cap \Gamma_\alpha$. Первый элемент множества $\{\alpha \in A : B_\alpha \neq \Lambda\}$ обозначим через a^*. Очевидно, $\Gamma_{a^*} = \Gamma^1_{a^*} \cup \Gamma^2_{a^*} \cup \{(a^*, a^*)\}$, где $\Gamma^1_{a^*} = \{(x, y) \in \Gamma_{a^*} \setminus \{(a^*, a^*)\} : \max\{x, y\} = x\}$; $\Gamma^2_{a^*} = \{(x, y) \in \Gamma_{a^*} \setminus \{(a^*, a^*)\} : \max\{x, y\} = y\}$. Проектирования $\pi_1 : (\Gamma^1_{a^*}, \ll) \to (A, \prec)$ и $\pi_2 : (\Gamma^2_{a^*}, \ll) \to (A, \prec)$ (где $\pi_1(x, y) = x$, $\pi_2(x, y) = y$) являются подобными отображениями. Следовательно, $(\Gamma^1_{a^*}, \ll) \sim (\Gamma^2_{a^*}, \ll)$ — вполне упорядоченные множества.

Из определения отношения $\ll$ следует, что любой элемент множества $\Gamma^1_{a^*}$ предшествует любому элементу множества $\Gamma^2_{a^*}$ и все элементы из $\Gamma^1_{a^*} \cup \Gamma^2_{a^*}$ предшествуют элементу (a^*, a^*). Из сказанного без труда выводится, что $(\Gamma_{a^*}, \ll)$ — вполне упорядоченное множество. Поэтому и B_{a^*} есть первый элемент. Этот элемент является и первым элементом множества B.

51. Из определения $\ll$ (см. 50 гл. I) следует, что $\ll$ — минимальное вполне упорядочение на $N \times N$. Теперь достаточно сослаться на задачи 42 и 48 гл. I.

52. Предположим противное, и пусть τ^+ — наименьшее из кардинальных чисел, квадрат которых отличен от них. Тогда $\aleph_1 < \tau^+$ (см. 51 и 15 гл. I). Выберем множество A^*, для которого $|A^*| = \tau^+$. Пусть $\prec$ — некоторое минимальное вполне упорядочение на A^* (см. 45 гл. I) и $(A^* \times A^*, \ll)$ — некоторое квадратное вполне упорядоченное множество $(A^*, \prec)$ (см. 50 гл. I). Из $\tau^+ = |A^*| \leqslant |A^* \times A^*|$ следует (см. 41 гл. I и определение вполне упорядочения $\ll$), что найдется $a^* \in A^*$, для которого $|I((a^*, a^*))| = \tau^+$. Так как $(A^*, \prec)$ — без последнего элемента, то определен элемент $a^* + 1 \in (A^*, \prec)$. Но $I((a^*+1) \times I((a^*+1)) \supseteq I((a^*, a^*))$; поэтому $\tau^+ \leqslant |I(a^*+1) \times I(a^*+1)| = |I(a^*+1)|$ и $\aleph_1 \leqslant |I(a^*+1)|$. В силу минимальности вполне упорядоченного $\prec$ имеем $|I(a^*+1)| < \tau^+$. Из определения τ^+ следует теперь, что $|I(a^*+1) \times I(a^*+1)| = |I(a^*+1)| < \tau^+$, а это противоречит соотношению, доказанному ранее.

54. Положим $\tau = |A| = |A \times A|$ (см. 52 гл. I), и пусть существует $\alpha \in A$, для которого $|I((\alpha, \alpha))| = \tau$. Элемент $\alpha + 1 \in A$ определен в силу минимальности $\prec$. Имеем $I((\alpha, \alpha)) = I(\alpha) \times I(\alpha+1)$, и получим $\tau = |I((\alpha, \alpha))| \leqslant |I(\alpha)| \cdot |I(\alpha+1)|$ (см. решение задачи 52 гл. I). Но $|I(\alpha+1)| < \tau$ в силу минимальности $\prec$. Мы получили противоречие: $\tau < \tau$.

55. В силу 52 гл. I существует подобное отображение множества $(A, \prec)$ на некоторый фрагмент I множества $(A \times A, \ll)$. Если бы фрагмент I был собственным, то вполне упорядочение $\ll$ не было бы минимальным (ибо $|I| = |A| = |A \times A|$ — см. 52 и 54 гл. I). Значит, $I = A \times A$.

56. Воспользуйтесь результатом задачи 52 гл. I.

57. Зафиксируем некоторое множество X^*, для которого $|X^*| = \tau$. Для каждого $\alpha \in M$ существует взаимно однозначное отображение $\varphi_\alpha : X_\alpha \to X^*$. Положим $\varphi_\alpha(X_\alpha) = X^*_\alpha$. В силу 56 гл. I $|X^* \times M| \leqslant \tau$. Пусть $Y^* = \bigcup \{X^*_\alpha \times \{\alpha\} : \alpha \in M\}$. Из $Y^* = X^* \times M$ следует, что $|Y^*| \leqslant \tau$. Положим $\varphi(x^*_\alpha, \alpha) = \varphi_\alpha^{-1}(x^*_\alpha) \in X_\alpha$ для каждого $\alpha \in M$ и каждого $x^*_\alpha \in X^*_\alpha$. Этим правилом определено отображение $\varphi : Y^* \to X$, причем $\varphi(Y^*) = \bigcup \{X_\alpha : \alpha \in M\}$. Но тогда (см. 25 гл. I) $|\bigcup \{X_\alpha : \alpha \in M\}| \leqslant |Y^*| \leqslant \tau$.

58. Для любого натурального n мощность A^n — произведение n экземпляров множества A — равна мощности множества A в силу 56 гл. I. На множество A^n допускает очевидное естественное отображение на множество B_n всех подмножеств множества A, состоящих не более чем из n элементов. Со-

довательно, $|B_0| \leqslant |A^n| = |A|$. Имеем $\mathscr{K}(A) = \bigcup (B_n : n \in N)$ (где N — множество всех натуральных чисел). Так как $|N| = \aleph_0$ — наименьшее из бесконечных кардинальных чисел, а A — бесконечное множество, то $|N| \leqslant |A|$. На основании задачи 57 гл. I можно заключить, что $|\mathscr{K}(A)| \leqslant |A|$. Очевидно, $|A| \leqslant |\mathscr{K}(A)|$ (ибо $\{x\} \in \mathscr{K}(A)$ для каждого $x \in A$). Значит, $|\mathscr{K}(A)| = |A|$.

59. Зафиксируем $x_1^0 \in X$, $x_2^0 \in X$, $x_1^0 \neq x_2^0$. Рассмотрим $X^2 = X \times X = \{(x_1, x_2): x_1 \in X, x_2 \in X\}$. Положим $A_{x_i^0} = \{(x_1, x_2): x \in X\}$, $i = 1, 2$, $Y_1 = A_{x_1^0}$, $Y_2 = X^2 \setminus A_{x_1^0}$. Тогда $X^2 = Y_1 \cup Y_2$, $Y_1 \cap Y_2 = \Lambda$, $|Y_1| = |X|$, $|Y_2| = |X|$. Последнее следует из того, что $A_{x_2^0} \subset Y_2 \subset X^2$ и $|X^2| = |X| = |A_{x_2^0}|$. Множество X^2 равномощно X (см. 52 гл. I). Значит, между ними существует взаимно однозначное соответствие. Образы множеств Y_1 и Y_2 при этом соответствии — искомые X_1 и X_2.

60. Множество $X \times X$ можно взаимно однозначно отобразить на X (52 гл. I). Отсюда решение легко следует.

63. Пусть α — бесконечное вполне упорядоченное множество и β — (тривиально вполне упорядоченное) множество, состоящее из одного элемента, не принадлежащего α. Тогда $\beta + \alpha$ подобно α (см. 42 гл. I), но $\alpha + \beta$ не подобно α, так как в $\alpha + \beta$ есть наибольший элемент, а в α такого элемента нет.

65. Предоставим читателю рассмотреть самостоятельно все подробности, мы докажем только, что в каждом непустом подмножестве Q множества C есть первый, или наименьший относительно $\prec$, элемент. Положим $S = \{b \in B:$ существует $a \in A$, для которого $(a, b) \in Q\}$. Очевидно, $S \neq \Lambda$. Через b_1 обозначим первый относительно $\leqslant$ элемент множества S. Положим $S' = \{a \in A: (a, b_1) \in Q\}$. В силу определения b_1 имеем $S' \neq \Lambda$. Через a_1 обозначим первый элемент множества S'. Тогда (a_1, b_1) — первый элемент множества S (проверьте это сами).

66. Покажите, что вполне упорядоченное произведение минимально, сославшись затем на задачу 42 гл. I.

68. Нет. Упорядоченное произведение $(N, \prec) \times (D, \prec)$ не минимально, а $(N, \prec)$ — минимально упорядоченное множество.

69. См. задачи 66 и 68 гл. I.

70. Первое утверждение выводится легко из определения. Для доказательства второго годится следующий пример. Пусть каждое из множеств β, γ состоит ровно из одного элемента и эти элементы различны (в упорядочении тривиальны — других в этой ситуации быть не может). В качестве α привлечем множество натуральных чисел, подлежащее естественным вполне упорядочением. Тогда $\beta + \gamma$ — упорядоченное множество, состоящее из двух элементов, а произведение его на α подобно α (см. 66 гл. I). В то же время $(\beta \times \alpha) + (\gamma \times \alpha)$ есть сумма двух непересекающихся вполне упорядоченных множеств, подобных α. Поэтому вполне упорядочение на $(\beta \times \alpha) + (\gamma \times \alpha)$ не минимально, и, так как α — минимально вполне упорядоченное множество, то α и $(\beta \times \alpha) + (\gamma \times \alpha)$ не подобны.

71. В самом деле, если $\bar{a}$ — первый элемент множества $(A, \prec)$, то $s_0 A = \{(a, b): a \in A\}$ — очевидно, собственный фрагмент лексикографического квадрата множества $(A, \prec)$, равномощный всему этому множеству (ибо $|A| = |A \times A|$ в силу 52 гл. I).

72. Канторов квадрат минимально вполне упорядоченного множества минимально вполне упорядочен. Но вполне упорядоченное лексикографического квадрата бесконечного вполне упорядоченного множества никогда не бывает минимальным (71 гл. I). Следовательно, они не подобны.

73. Проверим сначала, что отношение $\prec$ транзитивно, а затем, уже не оговаривая деталей, приведем общее рассуждение.

1) Пусть $x, y, z \in C$ и $x \prec y$, $y \prec z$. Обозначим через a' наибольший элемент множества A такой, что $x_{a'} \neq y_{a'}$, и через a'' — наибольший элемент множества A такой, что $y_{a''} \neq z_{a''}$. Все $x_{a'}$, $y_{a'}$, $z_{a'}$, $x_{a''}$, $y_{a''}$, $z_{a''}$ являются элементами множества B, причем из их определения и определения $\prec$ следует, что $x_{a'} \leqslant_c y_{a'}$ и $z_{a''} \leqslant_c z_{a''}$.

Рассмотрим три случая. I) $a' = a''$. Тогда $x_a = y_a$, $y_a = z_a$ и, следовательно, $x_a = z_a$, если $a' = a'' \prec_c a$ и $x_{a'} \leqslant_c y_{a'} = y_{a''} \leqslant_c z_{a''}$, значит, $x \prec z$ в этом случае. II) $a' \prec_c a''$. Тогда, в силу определения a' и a'', будем иметь $x_{a''} = y_{a''}$, $y_{a''} \leqslant_c z_{a''}$. И, значит, $x_{a''} \leqslant_c z_{a''}$. Кроме того, $x_a = y_a$ и $x_a = z_a$ при $a'' \prec_c a$. Поэтому $x \prec z$. III) $a'' \prec_c a'$. Тогда $y_{a'} = z_{a'}$, $x_{a'} \leqslant_c y_{a'}$ и, значит, $x_{a'} \leqslant_c z_{a'}$. При $a' \prec_c a$ имеем $x_a = y_a$, $y_a = z_a$ и, следовательно, $x_a = z_a$. Поэтому $x \prec z$. Утверждение 1) доказано.

2) Через 0 условимся обозначать первый элемент множества $(B, \leqslant)$, через $(A_x, \prec)$, где $x \in A$, — сегмент $\overline{T}(x)$ множества $(A, \prec)$, упорядоченный отношением $\prec$. Заметим, что если $x = y + 1$, то $(B, \leqslant)^{(A_x, \prec)}$ подобно $(B, \leqslant)^{(A_y, \prec)} \times (B, \leqslant)$ (достаточно сравнить определения степени и произведения). Последнее множество вполне упорядочено, если вполне упорядочено множество $(B, \leqslant)^{(A_y, \prec)}$. Пусть теперь $A = \bigcup \{A_y: y \in Q\}$ для некоторого множества $Q \subset A$; предположим, кроме того, что никакой элемент множества Q не является последним (наибольшим в $(Q, \prec)$). Из определения степени ясно, что $(B, \leqslant)^{(A, \prec)}$ подобно $\bigcup \{(B, \leqslant)^{(A_y, \prec)} : y \in Q\}$, где при $y' \prec y''$ множество $(B, \leqslant)^{(A_{y'}, \prec)}$ естественно отождествляется с некоторым сегментом множества $(B, \leqslant)^{(A_{y''}, \prec)}$ и порядок на объединении определяется как объединение порядков. Значит, если $(B, \leqslant)^{(A_y, \prec)}$ — вполне упорядоченное множество для каждого $y \in Q$, то и $(B, \leqslant)^{(A, \prec)}$ — вполне упорядоченное множество. Так как $(B, \leqslant)^{(2, \prec)}$ подобно $(B, \leqslant)$ и, следовательно, вполне упорядочено, мы имеем все необходимое для того, чтобы заключить в соответствии с принципом трансфинитной индукции (см. 81 гл. I), что $(B, \leqslant)^{(A, \prec)}$ вполне упорядочено.

74. Из определения степени следует, что $(D, \prec)^{(D, \prec)}$ есть $(0, 0) \prec (1, 0) \prec (0, 1) \prec (1, 1)$.

79. Через ω обозначим множество натуральных чисел, упорядоченное обычным образом. Положим $\varepsilon = \omega + \omega^\omega + \omega^{\omega^\omega} + \ldots$. (Здесь n-е слагаемое имеет вид $\underbrace{\omega^{\omega^{\cdots^{\omega}}}}_{n \text{ раз}}$; скобки надо расставлять так: $\omega^{(\omega^{(\omega^{\cdots\omega)})}}$. Сложение осуществляется по вполне упорядоченному множеству ω.) Число ε искомое. (Подробнее см. в книге Серпинского [1], стр. 328—329.)

80. Очевидно, среди элементов множества W, не принадлежащих множеству Q, не может быть первого. Значит, таких элементов нет.

81. См. 80 гл. I. Очевидно, за Q следует принять множество всех $x \in W$, для которых $P(x)$ верно.

82. (а) Пусть $\varphi: W \to S$ и $\varphi': W \to S$ удовлетворяют требованиям задачи и $\varphi' \neq \varphi$. Тогда существует первое $x \in W$, для которого $\varphi(x) \neq \varphi'(x)$. Для этого x, очевидно, $\varphi | I(x) = \varphi' | I(x)$, и поэтому $K_x(\varphi | I(x)) = K_x(\varphi' | I(x))$,

$\tau_1 \in \varphi(x) = \varphi'(x)$ — получили противоречие. Таким образом, существует не более одного отображения $\varphi\colon W \to S$ с интересующими нас свойствами.

(б) Обозначим через A множество всех $x \in W$, для которых на $I(x)$ существует нужная функция φ — мы будем обозначать ее через φ_x. По доказанному в (а), если $x' \prec x$, $x \in A$ и $\varphi_{x'}$, φ_x определены, то $\varphi_{x'} \mid I(x') = \varphi_{x'}$. Положим $\bar{A} = \bigcup \{I(x)\colon x \in A\}$. Тогда либо $\bar{A} = W$, либо существует $x \in W$, для которого $\bar{A} = I(x)$. Отображение $\psi\colon \bar{A} \to S$ определяется правилом $\psi(y) = \varphi_{x'}(y)$, где $x' \in A$ и $y \in I(x')$. Если $\bar{A} = W$, то ψ — очевидно, искомое отображение. Если $\bar{A} \neq W$, то полагаем $\varphi(x) = K_x(\psi)$ и $\varphi(x') = \psi(x')$ при $x' \in \bar{A}$. Отображение $\varphi\colon I(x+1) \to S$ удовлетворяет требованию задачи; значит, $x \in I(x+1) \subset \bar{A} = I(x)$, а это противоречит $x \notin I(x)$. Следовательно, случай $\bar{A} \neq W$ невозможен и ψ — искомое отображение.

84. Пусть $\bar{\tau}$ — некоторый элемент множества M и $\bar{M} = \{\tau \in M\colon \tau \leqslant \bar{\tau}\} \neq \Lambda$. Через $\bar{X}$ обозначим какое-нибудь множество мощности $\bar{\tau}$. В силу правильности вполне упорядоченных множеств, что $\bar{X}$ вполне упорядочено некоторым отношением $\leqslant$. Пусть, далее, X_τ для каждого $\tau \in \bar{M}$ — множество мощности τ, вполне упорядоченное некоторым отношением $\prec_\tau$. В силу 41 гл. I существует ровно одно подобное отображение f_τ множества $(X_\tau, \prec_\tau)$ на некоторый фрагмент $\bar{X}_\tau$ множества $(\bar{X}, \leqslant)$ (мы учли, что $\tau < \bar{\tau}$). Из $\tau \prec \bar{\tau}$ следует, что $\bar{X}_\tau \neq \bar{X}$. Обозначим через x_τ первый элемент множества $\bar{X} \setminus \bar{X}_\tau$. Для любых $\tau_1, \tau_2 \in \bar{M}$ либо $\bar{X}_{\tau_1} \subset \bar{X}_{\tau_2}$, либо $\bar{X}_{\tau_2} \subset \bar{X}_{\tau_1}$, ибо $\bar{X}_{\tau_1}$ и $\bar{X}_{\tau_2}$ — фрагменты. Но если $\tau_1 \prec \tau_2$, то включение $\bar{X}_{\tau_2} \subset \bar{X}_{\tau_1}$ невозможно (как невозможно и равенство $\bar{X}_{\tau_1} = \bar{X}_{\tau_2}$). Значит, тогда непременно $\bar{X}_{\tau_1} \subset \bar{X}_{\tau_2}$, причем $\bar{X}_{\tau_2} \setminus \bar{X}_{\tau_1} \neq \Lambda$. Поэтому $x_{\tau_1} \in \bar{X}_{\tau_2} \setminus \bar{X}_{\tau_1}$ и $x_{\tau_1} \leqslant x_{\tau_2}$. Так как $x_{\tau_2} \in \bar{X}_{\tau_2}$, мы заключаем, что $x_{\tau_1} \neq x_{\tau_2}$. Сказанное выше означает, что отображение $\varphi\colon (\bar{M}, \leqslant) \to (\bar{X}, \leqslant)$, определенное формулой $\varphi(\tau) = x_\tau$ для каждого $\tau \in \bar{M}$, является подобным отображением упорядоченного множества $(\bar{M}, \leqslant)$ на некоторое подмножество A вполне упорядоченного множества $(\bar{X}, \leqslant)$. Но в A есть первый элемент. Обозначим его через x^*. Существует $\tau^* \in \bar{M}$, для которого $\varphi(\tau^*) = x^*$ (ибо $\varphi[\bar{M}] = A$). Так как φ — подобное отображение, то τ^* — первый (взаимный) элемент множества $(\bar{M}, \leqslant)$. Из определения $\bar{M}$ следует теперь, что τ^* — наименьший элемент множества M.

85. Зафиксируем вполне упорядоченное множество $(Y, \leqslant)$ мощности λ. Оно отображается подобно на некоторый собственный фрагмент $I(x)$ множества $(X, \prec)$ (см. 42 гл. I; мы учли, что $\lambda < \mathfrak{t}$). Тогда x — искомый элемент множества λ.

86. Пусть $(A, \prec)$ — какое-нибудь вполне упорядоченное множество мощности τ. Каждому $\tau' \in \mathfrak{N}$ поставим в соответствие некоторый элемент $a_{\tau'} \in A$ такой, что $|I(a_{\tau'})| = \tau'$ (это возможно и — см. 85 гл. I). Очевидно, $a_{\tau'} \neq a_{\tau''}$ при $\tau' \neq \tau''$. Значит, мы получили взаимно однозначное отображение множества $\mathfrak{N}$ в множество A, откуда следует, что $|\mathfrak{N}| \prec |A| = \tau$.

87. См. задачи 52, 53 гл. I.

88. Вывод прямо следует из определения суммы кардинальных чисел и результата задачи 57 гл. I.

89. Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех кардинальных чисел, меньших τ. Так как $|\mathfrak{N}| \leqslant \tau$ (см. 86 гл. I) и $\tau' < \tau$ для каждого $\tau' \in \mathfrak{N}$, то $\tau^* = \sum \{\tau'\colon \tau' \in \mathfrak{N}\} \leqslant \tau$ (52 гл. I). Если бы было $\tau^* < \tau$, то, так как число τ

трансфинитно, нашлось бы кардинальное число $\bar{\tau}$, для которого $\tau^* < \bar{\tau} < \tau$. Но тогда $\bar{\tau} \in \mathfrak{N}$ и $\bar{\tau} \leqslant \tau^*$ — получили противоречие. Значит, $\tau^* = \tau$.

90. См. задачу 57 гл. I.

91. Из определения $\aleph_1$ и минимальности $\prec$ вытекает, что $|\bar{I}(a)| \leqslant \aleph_0$ для всех $a \in A$. Но тогда $|\bigcup \{\bar{I}(a)\colon a \in A\}| \leqslant \aleph_0$ в силу 57 гл. I. Следовательно, $T_{\aleph_1} \setminus (\bigcup \{\bar{I}(a)\colon a \in A\}) \neq \Lambda$. Из определения множеств $\bar{I}(a)$ (см. стр. 10) вытекает, что элемент множества $T_{\aleph_1} \setminus (\bigcup \{\bar{I}(a)\colon a \in A\})$ удовлетворяет требованию задачи.

92. Каждому $F \in \exp X$ поставим в соответствие отображение $\varphi_F\colon \lambda \to D$, определенное условием $\varphi_F^{-1}(1) = F$. Положим $\varphi_F = f(F)$. Тогда f — взаимно однозначное отображение множества $\exp X$ на множество D^X.

93. См. задачу 24 гл. I и определение кардинального числа 2^τ (см. 83 гл. I).

94. См. задачу 93 гл. I.

95. Нет, не всегда. Положим $\lambda = 2$, $\tau = \aleph_1$. Тогда $\tau^\lambda = \aleph_0^{\aleph_1} = \aleph_0$ (87 гл. I) $< \lambda^\tau = 2^{\aleph_1}$. Но $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ (83 гл. I).

97. Достаточно сопоставить определения суммы, произведения и степени кардинального числа и результаты задач 28, 27 и 23 гл. I.

98. Очевидно, мощность множества всех счетных подмножеств прямой не превосходит мощности произведения счетного множества прямых. Но мощность последнего равна $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ (см. 97 гл. I о определении степени кардинальных чисел).

99. Из $2 < \aleph_1$ следует, что $2^{\aleph_0} < \aleph_1^{\aleph_0}$. Из $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$ следует, что $\aleph_1^{\aleph_0} \leqslant (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ (87, 97 гл. I). Значит, $2^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0}$.

100. Имеем $2^\mu \leqslant \lambda^\mu$, ибо $2 \leqslant \lambda$. Но $2^\mu = 2^{\mu \cdot \mu} = (2^\mu)^\mu$. Сравним $(2^\mu)^\mu$ и λ^μ, заключаем, что $\lambda^\mu \leqslant (2^\mu)^\mu$, ибо $\lambda < 2^\lambda \leqslant 2^\mu$. Итак, $\lambda^\mu \leqslant 2^\mu$ и, следовательно, $2^\mu = \lambda^\mu$.

101. Нет. Пусть $\lambda = \aleph_0$, $\mu = \aleph_1$ и $\tau = \aleph_0$. Тогда $(\lambda^\mu)^\tau = (\aleph_1^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ (см. 100, 97 гл. I). Но $\lambda^{(\mu^\tau)} = \aleph_1^{(\aleph_1^{\aleph_0})} = \aleph_1^{(2^{\aleph_0})} = 2^{(2^{\aleph_0})}$. В силу 93 гл. I $2^{\aleph_0} < 2^{(2^{\aleph_0})}$.

102. Воспользуемся известными в нашем распоряжении операциями сложения и возведения в степень. Положим $\tau_0 = \aleph_1$, $\tau_1 = \aleph_1^{\aleph_0}$, $\tau_2 = \aleph_0^{\tau_1}, \ldots, \tau_{i+1} = \aleph_0^{\tau_i}, \ldots$, и $\tau^* = \sum \{\tau_i\colon i = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ (суммирование ведется по всем натуральным числам). Убедитесь в недостижимости τ^*.

104. Это сложный вопрос. От решения в аксиоматической теории множеств (см. П. Коэн [1]).

105. Возьмите объединение равномощных счетных; объедините также и одно множество все степени из слишком большой мощности (см. 57 гл. I).

106. Если A — кофинальное подмножество в $(X, \prec)$, то $X = \bigcup \{I(x)\colon x \in A\}$. Так как $I(x)\colon \prec |X| = \tau$ для всех $x \in X$ (универсальное $\prec$ наименьшее), то $c(\tau) \leqslant |A|$ (см. определение $c(\tau)$). Пусть, с другой стороны, M — множество мощности $\mu = c(\tau)$ в $X = \bigcup \{X_\alpha\colon \alpha \in M\}$, где $X_\alpha \prec |X|$ для всех $\alpha \in M$. В этой части рассуждения, очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $\mu \leqslant \tau$. Для каждого $\alpha \in M$ тогда существует элемент $x_\alpha \in X$ такой, что $|X_\alpha| = I(x_\alpha)$ (см. 85 гл. I). Положим $A = \{x_\alpha\colon \alpha \in M\}$. Мы можем считать, что $|X_{\alpha'} \neq X_{\alpha''}|$ при любых различных α', $\alpha'' \in M$ (10) гл. I). Тогда и $x_{\alpha'} \neq x_{\alpha''}$ при $\alpha' \neq \alpha''$; поэтому $|A| = |M| = c(\tau) = \mu$. Множество A кофинально $(X, \prec)$ — в противо-

ков случаи $\bigcup \{I(x_\alpha)\colon \alpha \in M\} = I(x^*)$ для некоторого $x^* \in X'$ и $|X_\alpha| = |I(x_\alpha)| \leqslant |I(x^*)| < \tau$. Тогда $\tau = |X| = |\bigcup \{X_\alpha\colon \alpha \in M\}| = \Sigma \{|X_\alpha|\colon \alpha \in M\} \leqslant \max\{|I(x^*)|, \mu\} < \tau$ — получили противоречие.

107. Очевидно, всегда $c(\lambda) \leqslant \lambda$. Предположим, что $\mu = c(\lambda) < \lambda$. Пусть A — множество мощности λ, B — множество мощности μ и X — множество мощности τ. Тогда существуют разложения в суммы попарно не пересекающихся множеств: $X = \bigcup \{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$, $A = \bigcup \{A_\beta\colon \beta \in B\}$, где $|X_\alpha| < |X| = \tau$ для всех $\alpha \in A$ и $|A_\beta| < |A| = \lambda$ для всех $\beta \in B$. Положим $Y_\beta = \bigcup \{X_\alpha\colon \alpha \in A_\beta\}$ для каждого $\beta \in B$. Тогда $\bigcup \{Y_\beta\colon \beta \in B\} = X$. Из $|B| < \lambda = c(\tau)$ следует, что $|Y_{\beta^0}| = |X| = \tau$ для некоторого $\beta^0 \in B$. Но $|X_\alpha| < \tau$ для каждого $\alpha \in A_{\beta^0}$, и $|\bigcup \{X_\alpha\colon \alpha \in A_{\beta^0}\}| = \tau$. Значит, $\lambda = c(\tau) \leqslant |A_{\beta^0}|$, и это противоречит тому, что $|A_{\beta^0}| < \lambda$.

108. $c(\tau^*) = \aleph_0$. Доказывается это само (см. 88, 93 гл. I).

109. Это утверждение сразу следует из определений и результата задачи 88 гл. I.

110. Пусть Y — множество мощности λ, $Y_\alpha = Y$ и $f_\alpha\colon Y_\alpha \to X_\alpha$ — отображение множества Y_α на множество X_α для каждого $\alpha \in A$. Рассмотрим произведение $\Pi \{Y_\alpha\colon \alpha \in A\}$ и произведение $f = \Pi \{f_\alpha\colon \alpha \in A\}$. Тогда $\Pi \{Y_\alpha\colon \alpha \in A\} = Y^A$ и f — отображение множества Y^A на множество X. По определению, $\lambda^\tau = |Y|^{|A|} = |Y^A|$. Тогда из задачи 25 гл. I следует, что $|X| \leqslant |Y^A|$.

111. Рассмотрим множество A мощности λ и множество X мощности τ, причем на X зафиксируем некоторое минимальное вполне упорядоченное $<$. Тогда если $f \in X^A$, то $f(A) \subset I(x)$ для некоторого $x \in X$ (ибо $|f(A)| \leqslant |A| < c(\tau)$ — см. 108 гл. I). Следовательно, $X^A = \bigcup \{(I(x))^A\colon x \in X\}$. Выберем $x(\mu) \in X$ для каждого $\mu < \tau$ так, чтобы было $|I(x(\mu))| = \mu$ (85 гл. I). Тогда $X^A = \bigcup \{(I(x(\mu)))^A\colon x = x(\mu),\ \mu < \tau\}$. (Здесь мы снова учитываем, что τ — предельное кардинальное число.) Последнее соотношение равносильно заключению задачи.

112. Из задач 97, 87, 109 гл. I следует, что достаточно рассмотреть случай, когда τ — предельное кардинальное число и $\lambda \geqslant \aleph_0$. Тогда, в силу 111 гл. I, $\tau^\lambda = \Sigma \{\mu^\lambda\colon \mu < \tau\}$. Но $\mu^\lambda \leqslant \max(\mu^\mu, \lambda^\lambda) = \max(2^\mu, 2^\lambda)$ (см. 100, 96 гл. I). В силу обобщенной континуум-гипотезы $2^\mu = \mu^+$ (или $\mu < \aleph_0$), $2^\lambda = \lambda^+$. Из $\lambda < c(\tau) \leqslant \tau$, и $\mu < \tau$ следует, что $\mu^+ \leqslant \tau$, $\lambda^+ \leqslant \tau$. Итак, $\mu^\lambda \leqslant \tau$ для всех $\mu < \tau$. Но тогда $\tau \leqslant \tau^\lambda = \Sigma \{\mu^\lambda\colon \mu < \tau\} \leqslant \tau \cdot \tau$, т. е. $\tau^\lambda = \tau$.

113. Положим $A = \bigcup \{A_\alpha\colon \alpha \in M\}$ и $B = \Pi \{B_\alpha\colon \alpha \in M\}$. Можно считать, что $A_{\alpha'} \cap A_{\alpha''} = \Lambda$ при $\alpha' \neq \alpha''$. Через φ обозначим произвольное отображение множества A в множество B и положим $\varphi_\alpha = \pi_\alpha \varphi$, где $\pi_\alpha\colon B \to B_\alpha$ — проектирование (см. *стр.* 16), $C_\alpha = \varphi_\alpha(A_\alpha)$, $\alpha \in M$. Тогда $|C_\alpha| \leqslant |\varphi_\alpha(A_\alpha)| \leqslant |A_\alpha| < |B_\alpha| = \mathfrak{m}$, следовательно, $D_\alpha = B_\alpha \setminus C_\alpha \neq \Lambda$. Положим $D = \Pi \{D_\alpha\colon \alpha \in M\} \subset B$ и проверим, что $\varphi(A) \cap D = \Lambda$. Пусть $b \in \varphi(A)$. Тогда для некоторого $\alpha^* \in M$ имеем $b = \varphi(a)$, где $a \in A_{\alpha^*}$. Заключим, что $\pi_{\alpha^*}(b) = \pi_{\alpha^*}\varphi(a) = \varphi_{\alpha^*}(a) \in C_{\alpha^*}$ — значит, $b \notin D$ (ибо $\pi_{\alpha^*} D = D_{\alpha^*} = B_{\alpha^*} \setminus C_{\alpha^*}$). Следовательно, $\varphi(A) \neq B$ и $|A| < |B|$.

114. Для каждого $\alpha \in M$ определим $\varphi(\alpha) \in M$ следующими требованиями: (a) $|A_\alpha| < |A_{\varphi(\alpha)}|$ и (б) если $\beta \in M$ и $|A_\alpha| < |A_\beta|$, то $|A_{\varphi(\alpha)}| \leqslant |A_\beta|$. Так как класс кардинальных чисел вполне упорядочен по величине, из 1) следует, что элемент $\varphi(\alpha)$, удовлетворяющий условиям (a) и (б), существует (и единственен) для каждого $\alpha \in M$. Положим $B_\alpha = A_{\varphi(\alpha)}$. Тогда $|A_\alpha| < |B_\alpha|$ для каждого $\alpha \in M$. В силу 113 гл. I $|\bigcup \{A_\alpha\colon \alpha \in M\}| < |\Pi \{B_\alpha\colon \alpha \in M\}|$. Так как множество $\Pi \{B_\alpha\colon \alpha \in M\} = \Pi \{A_{\varphi(\alpha)}\colon \alpha \in M\}$ является гранью произведения $\Pi \{A_\alpha\colon \alpha \in M\}$ (заметим, что φ — взаимно однозначное отображение множества A в себя), то $|\bigcup \{A_{\varphi(\alpha)}\colon \alpha \in M\}| \leqslant |\Pi \{A_\alpha\colon \alpha \in M\}|$.

115. Предположим противное: пусть $\lambda = c(2^\tau) \leqslant \tau$. Зафиксируем минимальное вполне упорядоченное множество $(A, <)$ мощности 2^τ, и пусть $M \subset A$, M конфинально A, $|M| = \lambda$. Для произвольного $\alpha \in M$ положим $A_\alpha = \{\beta \in A\colon \beta < \alpha\}$. Тогда $|A_\alpha| < 2^\tau$ и $\bigcup \{A_\alpha\colon \alpha \in M\} = A$. Отсюда и из $|M| \leqslant \tau$ следует, что в множестве $\{|A_\alpha|\colon \alpha \in M\}$ нет наибольшего элемента (в противном случае этот наибольший элемент, умноженный на τ, дал бы 2^τ, что невозможно (см. 27 (в) гл. I)). Из аналогичных соображений вытекает, что можно найти $M^* \subset M$, конфинальное M (и, следовательно, конфинальное A), для которого выполняется условие: если $\alpha' \in M^*$, $\alpha^* \in M^*$ и $\alpha' < \alpha^*$, то $|A_{\alpha'}| \neq |A_{\alpha^*}|$. Тогда (114 гл. I) $|\bigcup \{A_\alpha\colon \alpha \in M^*\}| < |\Pi \{A_\alpha\colon \alpha \in M^*\}|$. Но $|A_\alpha| < 2^\tau$ для каждого $\alpha \in M^*$ и $|M^*| \leqslant |M| = \lambda \leqslant \tau$. Значит, $|\Pi \{A_\alpha\colon \alpha \in M^*\}| \leqslant (2^\tau)^\tau = 2^\tau$. С другой стороны, M^* конфинально A, и поэтому $A = \bigcup \{A_\alpha\colon \alpha \in M^*\}$ и $|\bigcup \{A_\alpha\colon \alpha \in M^*\}| = |A| = 2^\tau$. Итак, $2^\tau < 2^\tau$ — получили противоречие.

116. В противном случае было бы $c(2^{\aleph_0}) \leqslant \aleph_0$, что невозможно (см. 115 гл. I).

118. В силу 50 гл. IV существует семейство подмножеств множества N, удовлетворяющее условиям (a), (б) и (в). Семейство $\mathfrak{F}$ всех таких семейств, частично упорядоченное отношением включения, индуктивно (и, как только что отмечено, не пусто). Поэтому в $\mathfrak{F}$ есть максимальный элемент. Очевидно, это максимальный элемент и есть искомое $\mathfrak{C}^*$.

119. Предположим, что f задано однозначно. Обозначим через A наименьшее подмножество множества B, содержащее B_{α_0}, для которого $f^{-1}A = A$ (т. е. $A = B_{\alpha_0} \cup f^{-1}B_{\alpha_0} \cup f^{-1}f^{-1}B_{\alpha_0} \cup f^{-1}f^{-1}f^{-1}B_{\alpha_0} \cup \ldots$). Тогда $|A| \leqslant \aleph_0 \cdot \tau = \tau$ и, значит, $B \setminus A \neq \Lambda$. Из $A \supset B_{\alpha_0}$ следует, что $B \setminus A \subset C$. Поэтому на $B \setminus A$ определено отображение f, и из $f^{-1}A = A$ следует, что $f(B \setminus A) \subset B \setminus A$. Зафиксируем $\alpha^0 \in B \setminus A$. Тогда $f(\alpha^0) \in B \setminus A$, $f(\alpha^0) \in B \setminus A_{\alpha^0}$, причем, в силу предположения о f, будем иметь $\alpha^0 > f(\alpha^0) > f(f(\alpha^0)) \ldots$. Таким образом, мы построили бесконечную монотонно (строго) убывающую последовательность элементов вполне упорядоченного множества $(B, <)$, т. е. получили противоречие.

120. Для любых $x \in X$, $a \in X$ и $A \subset X$ положим $(A)_{x,a} = \{y \in A\colon (x, y) = (y, x)\}$ (мы отождествляем (x, y) и (y, x) и всегда предполагаем, что $x \neq y$). Очевидно, $a \in (A)_{x,a}$ и $(A)_{x,a} \subset A$. Пусть $(\mathfrak{Y}, <)$ — минимально вполне упорядоченное множество мощности τ^+. Для каждого $\alpha \in \mathfrak{Y}$ положим $\mathfrak{Y}_\alpha = \{\beta \in \mathfrak{Y}\colon \beta < \alpha\}$. Тогда $|\mathfrak{Y}_\alpha| \leqslant \tau$ при всех $\alpha \in \mathfrak{Y}$. Далее $\alpha + 1$ всегда есть первый элемент множества $\mathfrak{Y}$, больший α. В каждом непустом множестве $A \subset X$ зафиксируем элемент $c(A)$. По индукции вдоль $(\mathfrak{Y}, <)$ для каждого $\alpha \in \mathfrak{Y}$ теперь будет определено семейство $\mathfrak{F}_\alpha$ подмножеств X. Положим $\mathfrak{F}_0 = \{X\}$. Если $\beta \in \mathfrak{Y}$, $\beta \neq 0$ и для всех $\alpha < \beta$ уже определено семейство $\mathfrak{F}_\alpha$, обозначим через $\mathfrak{G}_\beta$ семейство всех непустых $A \subset X$ вида $A = \bigcap \{P_\alpha\colon \alpha < \beta\}$, где $P_\alpha \in \mathfrak{F}_\alpha$ для всех $\alpha < \beta$. Положим $\gamma_{\beta,A} = \{(A)_{c(A),t}\colon t \in T$ и $(A)_{c(A),t} \neq A\} \cup (\{c(A)\})$. Очевидно, $\gamma_{\beta,A}$ — для каждого A — конечное покрытие множества A, причем $|\gamma_{\beta,A}| \leqslant |T| = \tau$. Положим $\mathfrak{F}_\beta = \bigcup \{\gamma_{\beta,A}\colon A \in \mathfrak{G}_\beta\}$. Если $|\mathfrak{F}_\alpha| \leqslant \lambda$ для всех $\alpha < \beta$ (при $\beta = 1$ это верно, ибо $|\mathfrak{F}_1| = 1$), то $|\mathfrak{G}_\beta| \leqslant \lambda^\tau = 2^\tau = \lambda$, и потому $|\mathfrak{F}_\beta| \leqslant \tau \cdot \lambda = \lambda$. Если каждое $\mathfrak{F}_\alpha$, где $\alpha < \beta$, покрывает X, то и $\mathfrak{G}_\beta$ покрывает X, а тогда и $\mathfrak{F}_\beta$ покрывает X. При этом $\mathfrak{F}_2$ покрывает X. Если же $\mathfrak{F}_\alpha$,

где $\alpha < \beta$, дизъюнктны (в $\mathscr{P}_\beta$ заведомо таковы), то и $\mathscr{P}_\beta$ дизъюнктно. Ясно, что $\mathscr{P}_\beta$ вписано в $\mathscr{T}_\alpha$ при $\alpha < \beta$. Будем считать, что семейства $\mathscr{T}_\alpha$ определены, как выше, для всех $\alpha \in \mathscr{Y}$. Следующий очевидный факт важен для нас:

(ш) если $\alpha' \subset \mathscr{Y}$, $\alpha < \alpha'$, $A' \in \mathscr{T}_{\alpha'}$, $A \in \mathscr{P}_\alpha$ и $A \cap A' \neq \Lambda_\alpha$, то $A' \subset A$, причем если $|A'| \geqslant 2$, то $c(A) \neq c(A')$ и существует $t' \in T$, для которого $A' \subset (A)_{\alpha, t'}$.

Положим $\mathscr{P} = \bigcup \{\mathscr{P}_\alpha : \alpha \in \mathscr{Y}\}$, $\mathscr{T}_\lambda = \{A \subset \mathscr{P} : |A| \leqslant \lambda\}$ и $X_\lambda = \bigcup \{A : A \in \mathscr{T}_\lambda\}$. Тогда $|\mathscr{P}_\lambda| \leqslant |\mathscr{T}| \leqslant \tau^\lambda \lambda = \lambda$, и поэтому $|X_\lambda| \leqslant \lambda$. Значит, $X \setminus X_\lambda \neq \Lambda$. Зафиксируем $x_\lambda \subset X \setminus X_\lambda$. Для каждого $\alpha \subset \mathscr{Y}$ выберем $A_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha$ таким, что $x_\lambda \in A_\alpha$. Из $x_\lambda \notin X_\lambda$ следует, что $A_\alpha \notin \mathscr{T}_\lambda$, т. е. что $|A_\alpha| \geqslant \lambda \geqslant 1$ при всех $\alpha \subset \mathscr{Y}$. Положим $x_\alpha = c(A_\alpha)$. В силу (ш) $x_\alpha \neq x_{\alpha'}$ при $\alpha \neq \alpha'$ и $A_{\alpha+1} \subset A_\alpha$. Так как $|A_{\alpha+1}| \geqslant \lambda$, то для каждого $\alpha \subset \mathscr{Y}$ существует такое $t_\alpha \in T$, что $A_{\alpha+1} \subset (A_\alpha)_{\alpha, t_\alpha}$. При $\alpha < \alpha'$ имеем $A_{\alpha'} \subset A_{\alpha+1}$ (см. (ш)) — отсюда и из $x_{\alpha'} \subset A_{\alpha'}$ следует, что $f(x_{\alpha'}, x_\alpha) = t_\alpha$. Но $|T| = \tau < \tau^+$. Следовательно, существует $t^* \subset T$, для которого множество $\mathscr{Y}^* = \{\alpha \in \mathscr{Y} : t_\alpha = t^*\}$ равномощно $\mathscr{Y}$. Полагая $X^* = \{x_\alpha : \alpha \in \mathscr{Y}^*\}$. Имеем $|X^*| = |\mathscr{Y}^*| = \tau^+ \geqslant \tau$. Если $x \subset X^*$, $y^2 \subset X$ и $x \neq y$, то $x = x_\alpha$, $y = x_{\alpha'}$ для некоторых α, $\alpha' \subset \mathscr{Y}^*$, причем $\alpha \neq \alpha'$. Пусть, для определенности, $\alpha < \alpha'$. Тогда $f(x_\alpha, x_{\alpha'}) = t_\alpha = t^*$, т. е. $f(x, y) = t^*$ для любой упорядоченной пары различных элементов множества X^*. Значит, X^* — искомое множество.

121. Зафиксируем множество T мощности τ. Линейно упорядоченное множество A некоторым отношением $\prec$. Для каждого $a \in A$ зафиксируем некоторое отображение φ_a множества T на множество всех слагаемых, пересекающих множество $\{x, a\colon x \subset A \cap a \prec x\}$, и некоторое отображение ψ_a множества T на множество всех слагаемых, пересекающих множество $\{x, a\colon x \prec a\}$. Пусть теперь $a' \subset A$, $a' \in A$ и $a' \neq a^*$. Тогда либо $a' \prec a^*$, либо $a^* \prec a'$. Предположим, для определенности, что $a' \prec a^*$. Тогда существуют $t' \subset T$ и $t'' \subset T$, для которых $(a', a^*) \subset \varphi_{a'}(t')$ и $(a', a^*) \subset \psi_{a^*}(t'')$. В соответствии с тем, что $a' \prec a^*$, рассмотрим упорядоченную пару $(t', t'') \subset T \times T$ и положим $f(a', a^*) = (t', t'')$. Имеем $|T \times T| = \tau$ и $|A| \geqslant 2^\tau$. В силу задачи 120 гл. I существуют $A^* \subset A$ и упорядоченная пара (t_1, t_2) элементов T такие, что $|A^*| \geqslant \tau$ и $f(a', a^*) = (t_1, t_2)$ для любых $a' \subset A^*$, $a^* \subset A^*$ и $a' \neq a^*$. Обозначим $\overline{A}^* = A^*$, если $(A^*, \prec)$ не имеет наибольшего элемента, и $\overline{A}^* = A^* \setminus \{m\}$, если m — наибольший элемент в $(A^*, \prec)$. Множество $\overline{A}^*$ искомое. Действительно, если a', $a' \in \overline{A}^*$ и $a' \prec a''$, то $\varphi_{a'}(t_1) \ni (a', a^*)$ и $\psi_{a^*}(t_2) \ni (a', a^*)$. Т. е. $\varphi_{a'}(t_1) \cap \psi_{a^*}(t_2) \neq \Lambda$, а так как, по предположению, различные слагаемые не пересекаются, то $\varphi_{a'}(t_1) = \psi_{a^*}(t_2)$. Но тогда $\varphi_a(t_1) = \psi_b(t_2)$ для всех a, $b \in \overline{A}^*$, ибо можно выбрать $c \subset \overline{A}^*$ такое, что $a \prec c$ и $b \prec c$ и, по доказанному выше, будем иметь $\varphi_a(t_1) = \psi_c(t_2)$, $\varphi_b(t_1) = \psi_c(t_2)$, а потому $\varphi_a(t_1) = \psi_b(t_2)$. Из $\{(a', a^*)\colon a', a^* \in \overline{A}^*$ и $a' \neq a^*\} \subset \bigcup \{\varphi_a(t_2)\colon a \subset \overline{A}^*\}$ теперь следует нужное заключение.

122. Зафиксируем множество L мощности τ и отобразим его на каждое γ_α. Тогда $\gamma_0 = \{\lambda_\iota^\alpha : \iota \in L\}$. Положим $T = L \times L$. Тогда $|T| = \tau^2 = \tau$. Для каждой пары (α', α'') различных элементов множества A зафиксируем $\tau = (\iota', \iota'') \in T$ так, чтобы было: $\lambda_{\iota'}^{\alpha'} \cap \lambda_{\iota''}^{\alpha''} \cap \lambda_{\iota'}^{\alpha''} \cap \lambda_{\iota''}^{\alpha'} = \Lambda$ (это возможно в силу 1)), и положим $f(\alpha', \alpha'') = \tau$ (порядок элементов в паре (α', α'') не влияет, очевидно, на выбор τ). Тогда можно применить утверждение задачи 120 гл. I (с A и роли X). Заключаем, что существуют $A^* \subset A$ и $t^* \in T$ такие, что $|A^*| \geqslant \tau$ и $f(\alpha', \alpha'') = t^*$, если $\alpha' \subset A^*$, $\alpha'' \in A^*$ и $\alpha' \neq \alpha''$.

Пусть $t^* = (t_1, t_2)$. Для каждого $\alpha \in A^*$ положим $\lambda^\alpha = \lambda_{t_1}^\alpha \cap \lambda_{t_2}^\alpha$. В силу 1) $\lambda^\alpha \in \gamma_\alpha$. Очевидно, множества λ^α, $\alpha \subset A^*$, искомые.

124. В силу 123 гл. I достаточно показать, что ξ содержится в некотором предфильтре на X. Ясно, что таким предфильтром является, в частности, семейство $\xi^{(1)}$ всех подмножеств множества X, представимых в виде пересечения конечного множества элементов семейства ξ.

125. Если бы нашлись $B_1, \ldots, B_k \subset \xi'$, для которых $\bigcap \{B_i\colon i = 1, \ldots, k\} = \Lambda$, то непременно одно из $B_1, \ldots, B_k$ совпадало бы с B либо ξ центрировала бы. Пусть $B_i = B$. Тогда можно считать, что $B_2, \ldots, B_k \in \xi$. Так как ξ — предфильтр, существует $B' \in \xi$, $B' \subset \bigcap \{B_i\colon i = 2, \ldots, k\}$. Тогда $B' \cap B = B_1 \cap B' \subset \bigcap \{B_i\colon i = 1, \ldots, k\} = \Lambda$, что противоречит условию.

127. Множество $\mathscr{T}(\mathscr{E})$ всех центрированных систем элементов $\mathscr{E}$ упорядочим естественным образом: если $\xi_1 \in \mathscr{T}(\mathscr{E})$ и $\xi_2 \in \mathscr{T}(\mathscr{E})$, то $\xi_1 \prec \xi_2$ в том и только в том случае, если $\xi_1 \subset \xi_2$. Покажем, что упорядоченное множество $(\mathscr{T}(\mathscr{E}), \prec)$ индуктивно (см. стр. 48), т. е. что для любой цепи $\mathscr{A} \subset (\mathscr{T}(\mathscr{E}), \prec)$ существует $\overline{\xi} \in \mathscr{T}(\mathscr{E})$, являющееся мажорантой для $\mathscr{A}$. Положим, что все $\xi \in \mathscr{A}$ (как и вообще все $\xi \subset \mathscr{T}(\mathscr{E})$) являются подмножествами множества $\mathscr{E}$, положим $\overline{\xi} = \bigcup \{\xi\colon \xi \in \mathscr{A}\}$. Проверим, что $\overline{\xi}$ — центрированное семейство множеств. Если $A_1, \ldots, A_k$ — произвольный конечный набор элементов $\overline{\xi}$, то, в силу определения $\overline{\xi}$, существуют такие $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathscr{A}$, что $A_i \subset \xi_i$, $i = 1, \ldots, k$. Так как $\mathscr{A}$ — цепь в $(\mathscr{T}(\mathscr{E}), \prec)$, то можно найти перестановку $i_1, \ldots, i_k$ чисел $1, \ldots, k$, для которой $\xi_{i_1} \prec \ldots \prec \xi_{i_k}$. Тогда, в силу определения отношения $\prec$, получим $\xi_{i_1} \subset \ldots \subset \xi_{i_k}$ и, значит, $A_i \subset \xi_{i_k}$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Но тогда, поскольку ξ_{i_k} — центрированное семейство множеств, $\bigcap \{A_i\colon i = 1, \ldots, k\} \neq \Lambda$. Этим доказано, что $\overline{\xi}$ — центрированное семейство. Из определения $\overline{\xi}$ следует теперь, что $\overline{\xi} \in \mathscr{T}(\mathscr{E})$ и что $\xi \subset \overline{\xi}$ для любого $\xi \in \mathscr{A}$. Но последнее означает, что $\xi \prec \overline{\xi}$ для любого $\xi \in \mathscr{A}$; таким образом, $\overline{\xi}$ — мажоранта множества $\mathscr{A}$. На основании принципа Куратовского — Цорна мы заключаем теперь, что в упорядоченном множестве $(\mathscr{T}(\mathscr{E}), \prec)$ есть максимальный элемент (см. стр. 15) — обозначим последний через ξ^*. Покажем, что ξ^* — максимальная центрированная система элементов $\mathscr{E}$ в смысле определения, данного на стр. 20. Пусть $A \subset \mathscr{E} \setminus \xi^*$. Положим $\xi' = \xi^* \cup \{A\}$. Тогда $\xi^* \subset \xi'$ и $\xi^* \neq \xi'$. Если ξ' — центрированное семейство множеств, то мы получаем соотношения $\xi' \in \mathscr{T}(\mathscr{E})$, $\xi^* \prec \xi'$ и $\xi^* \neq \xi'$, которые противоречат максимальности ξ^* в $(\mathscr{T}(\mathscr{E}), \prec)$. Следовательно, семейство ξ' не центрировано, что и требовалось доказать.

128. (а) $\Rightarrow$ (б). Из (а) следует в силу 126 гл. I, что ξ — фильтр. Если $\xi' \supset \xi$ и ξ' — фильтр на X, то ξ' — центрированное семейство множеств и, в силу (а), $\xi' = \xi$.

(б) $\Rightarrow$ (а). Из (б) следует, что ξ — центрированное семейство множеств. Рассмотрим произвольное центрированное семейство ξ' на X, содержащее ξ. В силу 124 гл. I существует фильтр ξ'' на X, содержащий ξ'. Но из (б) теперь следует, что $\xi'' = \xi$. Тем более, $\xi' = \xi$.

(а) $\Rightarrow$ (в). Из (а) следует, что ξ — фильтр (тем более, ξ — предфильтр). Если $A \notin \xi$, то $A \cap B \neq \Lambda$ для всех $B \in \xi$, то, в силу 125 гл. I, $\xi' = \xi \cup \{A\}$ — центрированное семейство на X, причем $\xi' \neq \xi$, $\xi' \supset \xi$, что противоречит (а). Очевидно, (в′) — переформулировка условия (в).

(в) $\Rightarrow$ (д). Если $A_1 \notin \xi$ и $A_2 \notin \xi$, то, в силу (в), существуют $B_1 \subset \xi$ и $B_2 \in \xi$, для которых $A_1 \cap B_1 = \Lambda$ и $A_2 \cap B_2 = \Lambda$. Тогда $(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cap B_2) = \Lambda$. Но так как ξ — предфильтр, то существует $B' \in \xi$, $B' \subset B_1 \cap B_2$. Тогда $(A_1 \cup A_2) \cap B' = \Lambda$, что противоречит центрированности ξ. Очевидно, $\xi \ni X$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Имеем $X = (X \setminus A) \cup A$, $X \in \xi$. Теперь (a) следует из (d).

(a) $\Rightarrow$ (c). Пусть ξ' — центрированное семейство множеств на X, содержащее ξ. Если $A \in \xi'$, то $X \setminus A \notin \xi'$ и, тем более, $X \setminus A \notin \xi$. В силу (a) тогда $A \in \xi$. Значит, $\xi' \subset \xi$, т. е. $\xi' = \xi$, и (c) доказано.

129. В силу 90 гл. I, если мощность каждого из множеств $A_1, \ldots, A_k$ меньше мощности X, то и $|\bigcup \{A_i: i = 1, \ldots, k\}| < |X|$. Теперь ясно, что $\eta(X)$ — фильтр. В задаче 59 гл. I показано, что X можно представить в виде объединения непересекающихся множеств X_1 и X_2, каждое из которых равномощно X. Следовательно (см. 128 (c) гл. I), $\eta(X)$ — не ультрафильтр.

130. Фильтр ξ является центрированным семейством множеств. А каждое такое семейство, в силу 127 гл. I, содержится в некотором максимальном центрированном семействе множеств; последнее же, в силу 128 гл. I, является ультрафильтром.

135. Утверждения (a), (b), (c) и (d) доказываются без труда. Покажем, что справедливо (e). Мы проверим, что для $f\xi$ выполнено условие (a) задачи 128 гл. I. Предфильтром $f\xi$ является в силу (a). Пусть $A \in f\xi$. Тогда $f^{-1}A \notin \xi$ (ибо $Y = fX$). Поэтому, в силу 128 (a) гл. I, существует $B \in \xi$, для которого $(f^{-1}A) \cap B = \Lambda$. Но $f((f^{-1}A) \cap B) = A \cap fB$. Значит, $A \cap fB = \Lambda$. При этом $fB \in f\xi$, ибо $B \in \xi$. Следовательно, условие (a) задачи 128 гл. I для $f\xi$ выполняется, и $f\xi$ является ультрафильтром в силу 128 гл. I.

137. Положим $A' = X \setminus \bigcap \{A: A \in \xi'\}$. Тогда $A' \cap (\bigcap \{A: A \in \xi'\}) = \Lambda$, откуда, в силу предположения о ξ (и того, что $|\xi' \cup \{A'\}| \leqslant \tau$), следует, что $A' \in \xi$. Так как ξ — ультрафильтр на X, мы заключаем, что $X \setminus A' \in \xi$, т. е. что $\bigcap \{A: A \in \xi'\} \subset \xi$.

138. Пусть ξ — нетривиальный σ-ультрафильтр на X. Положим $\overline{\xi} = \{A \subset Y: A \cap X \in \xi\}$. Если $A \cup B = Y$, то $(A \cap X) \cup (B \cap X) = X$, и из того, что ξ — ультрафильтр на X, следует (см. 128 гл. I), что либо $A \cap X$, либо $B \cap X$ является элементом ξ. Но тогда либо $A \in \overline{\xi}$, либо $B \in \overline{\xi}$. Этим рассуждением доказано (см. 128 гл. I), что $\overline{\xi}$ — ультрафильтр на Y. Если $A_i \in \overline{\xi}$, где $i = 1, 2, \ldots$, то $\bigcap \{A_i: i = 1, 2, \ldots\} \cap X = \bigcap \{A_i \cap X: i = 1, 2, \ldots\} \in \xi$, ибо $A_i \cap X \in \xi$ при каждом $i = 1, 2, \ldots$, а ξ — σ-ультрафильтр. Значит, $\bigcap \{A_i: i = 1, 2, \ldots\} \in \overline{\xi}$. Очевидно, $\xi \subset \overline{\xi}$, откуда следует, что $\bigcap \{A: A \in \overline{\xi}\} \subset \bigcap \{A: A \in \xi\} = \Lambda$. Доказано, таким образом, что $\overline{\xi}$ — нетривиальный σ-ультрафильтр на Y.

139. См. задачу 138 гл. I.

140. Предположим противное, и пусть τ^* — наименьшее кардинальное число такое, что существует $\xi^* \subset \xi$, для которого $|\xi^*| \leqslant \tau^*$ и $\bigcap \{A: A \in \xi^*\} = \Lambda$. Тогда $\tau^* \leqslant \tau$, и поэтому (139 гл. I) τ^* несмеримо. Зафиксируем семейство $\xi^* \subset \xi$, обладающее указанным свойством. Пусть элементы семейства ξ^* поставлены во взаимно однозначное соответствие с элементами некоторого минимально вполне упорядоченного множества $(M, \prec)$ мощности τ^*: $\xi^* = (A_\alpha: \alpha \in M)$. Положим (для каждого $\alpha \in M$) $B_\alpha = \bigcap (A_{\alpha'}: \alpha' \leqslant \alpha)$. В силу минимальности рассматриваемого вполне упорядочения, определения τ^* и задачи 137 гл. I, $B_\alpha \in \xi$ при всех $\alpha \in M$. Отсюда и из определения τ^* следует, что множество $(B_\alpha: \alpha \in M)$ не стабилизируется: переходя к подходящему конфинальному подмножеству множества M, можно добиться, чтобы было $B_{\alpha'} \neq B_{\alpha''}$ при $\alpha' \neq \alpha''$. Будем считать, что это условие уже выполняется. Очевидно, если $\alpha' \prec \alpha''$, то $B_{\alpha'} \supset B_{\alpha''}$. Пусть θ — первый элемент множества $(M, \prec)$. Положим $B_\theta = Z$. Определим отображение $\pi: Z \to M$ правилом: $\pi^{-1}(\alpha) = B_\alpha \setminus B_{\alpha+1}$ для всех $\alpha \in M$. Так как $\pi^{-1}(M) = Z \in \xi$ и прообраз суммы равен сумме прообразов, а прообраз пересечения равен пересечению прообразов, то следующее условие определяет σ-ультрафильтр η на M: $L \in \eta$, где $L \subset M$, в том и только в том случае, если $\pi^{-1}L \in \xi$. Так как $B_\alpha = \pi^{-1}\pi(B_\alpha) \in \xi$, то $\pi(B_\alpha) \in \eta$ и $\bigcap (\pi(B_\alpha): \alpha \in M) = \pi(\bigcap (B_\alpha: \alpha \in M)) = \pi(\Lambda) = \Lambda$. Следовательно, η — нетривиальный ультрафильтр на M; при этом $|M| = \tau^*$, что противоречит тому, что τ^* несмеримо.

141. Пусть ξ — σ-ультрафильтр на X. Возможны два случая.

I) $X_{\alpha_0} \in \xi$ для некоторого $\alpha_0 \in A$. Тогда сужение $\xi_{\alpha_0} = \xi \mid X_{\alpha_0}$ ультрафильтра ξ на множестве X_{α_0} является σ-ультрафильтром на X_{α_0} (128 гл. I). Так как $\tau_{\alpha_0} = |X_{\alpha_0}|$ — несмеримое кардинальное число, мы заключаем, что ультрафильтр ξ_{α_0} тривиален, т. е. $\{x_{\alpha_0}\} \in \xi_{\alpha_0}$ для некоторой точки $x_{\alpha_0} \in X_{\alpha_0}$. Но $\xi_{\alpha_0} \subset \xi$ (см. 133 гл. I); значит, $\{x_{\alpha_0}\} \in \xi$, и ультрафильтр ξ тривиален.

II) $X_\alpha \notin \xi$ для каждого $\alpha \in A$. Тогда (128 гл. I) $X \setminus X_\alpha \in \xi$ при всех $\alpha \in A$. Так как $|A| = \tau$ — несмеримое кардинальное число и ξ — σ-ультрафильтр, то $\bigcap \{X \setminus X_\alpha: \alpha \in A\} \in \xi$ (см. 137, 133, 140 гл. I). Но, в силу формулы де Моргана, $\bigcap \{X \setminus X_\alpha: \alpha \in A\} = X \setminus (\bigcup \{X_\alpha: \alpha \in A\}) = \Lambda$. Таким образом, $\Lambda \in \xi$, что противоречит определению ультрафильтра.

142. Предположим противное, и пусть ξ — нетривиальный σ-ультрафильтр на $\exp X$. Положим, для каждой точки $x \in X$, $\eta_1(x) = \{A \subset X: A \ni x\}$, $\eta_2(x) = \{A \subset X: A \not\ni x\}$. Пусть, далее, $F = \{x \in X: \eta_1(x) \in \xi\}$, $\Phi = X \setminus F$. Тогда $\eta_1(x) \cup \eta_2(x) = \exp X$ и $\eta_1(x) \cap \eta_2(x) = \Lambda$. Значит, $\Phi = \{x \in X: \eta_2(x) \subset \xi\}$ (так как ξ — ультрафильтр). Но $|\Phi| \leqslant |X|$ и $|F| \leqslant |X|$, так как $|X|$ несмеримо, следует (см. 137, 139, 140 гл. I), что $A^* = \bigcap \{\eta_1(x): x \in F\} \in \xi$ и $B^* = \bigcap \{\eta_2(x): x \in \Phi\} \in \xi$. Поэтому $A^* \cap B^* \in \xi$. Мы покажем, что $A^* \cap B^* = \{F\}$, т. е. что подмножество $A^* \cap B^*$ множества $\exp X$ состоит ровно из одной точки, и этой точкой является элемент $F \in \exp X$. Из $x \in \Phi = X \setminus F$ и определения $\eta_2(x)$ следует, что $F \in \eta_2(x)$ для всех $x \in \Phi$. Значит, $F \in B^*$. Точно так же из определения $\eta_1(x)$ следует, что $F \subset \eta_1(x)$ для всех $x \in F$. Значит, $F \in A^*$, т. е. $F \in A^* \cap B^*$. Более того, если $Q \in A^*$, то, очевидно, $Q \supset F$, и если $Q \in B^*$, то, столь же очевидно, $Q \cap \Phi = \Lambda$, т. е. $Q \subset F$. Следовательно, если $Q \in A^* \cap B^*$, то $Q = F$ и $\{F\} = A^* \cap B^* \in \xi$. Но тогда ультрафильтр ξ тривиален — он есть совокупность всех подмножеств множества $\exp X$, содержащих (в качестве элемента) F. Получили противоречие.

143. Если τ — наименьшее из измеримых кардинальных чисел, то τ регулярно (в силу 141 гл. I). В задаче 142 гл. I установлено, что если λ несмеримо, то и 2^λ несмеримо. Значит, τ недостижимо (см. 138 гл. I).

144. См. задачи 33 гл. IV и 180 гл. VI.

145. Решение получается такое, если воспользоваться задачей 63 гл. IV.

146. См. Архангельский [6] и Фролик [3].

ГЛАВА II

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ТОПОЛОГИЧЕСКИМ И МЕТРИЧЕСКИМ ПРОСТРАНСТВОМ

Пусть X — некоторое множество. Семейство $\mathcal{T}$ подмножеств множества X называется *топологией* на множестве X, если выполнены следующие условия.

1°. Пересечение любого конечного числа элементов семейства $\mathcal{T}$ есть снова элемент семейства $\mathcal{T}$.

2°. Объединение любого множества элементов из $\mathcal{T}$ снова принадлежит $\mathcal{T}$.

3°. Всё множество X и пустое подмножество Λ являются элементами семейства $\mathcal{T}$.

Множество X вместе с фиксированной топологией $\mathcal{T}$ на нем называется *топологическим пространством* (или просто *пространством*); последнее обозначается через $(X, \mathcal{T})$ или просто через X. Подмножества множества X, принадлежащие топологии $\mathcal{T}$, называются *открытыми* множествами топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Множество $F \subset X$ называется *замкнутым* в пространстве $(X, \mathcal{T})$, если множество $X \setminus F$ открыто в $(X, \mathcal{T})$, т. е. если $X \setminus F \in \mathcal{T}$. Множества, открытые и замкнутые одновременно, называются *открыто-замкнутыми*.

Все дальнейшие обозначения и понятия относятся к точкам и множествам, лежащим в произвольно фиксированном пространстве X.

Окрестностью множества A называется любое открытое множество, содержащее A. Особенно часто рассматриваются *окрестности точек* (т. е. одноточечных подмножеств) пространства X.

Точка x называется *точкой прикосновения для множества* A, если всякая окрестность точки x имеет непустое пересечение со множеством A. При этом мы пишем $x \delta A$ или $x \in [A]$.

Множество всех точек пространства X, являющихся точками прикосновения для A, называется *замыканием* множества A и обозначается через $[A]$. *Нёром*, или *внутренностью*, множества A называется множество $X \setminus [X \setminus A]$, обозначаемое через $\operatorname{Int} A$. Если $x \in \operatorname{Int} A$, то точку x называют *внутренней* точкой множества A. Точка x называется *предельной* для множества A, если всякая

окрестность этой точки содержит некоторую отличную от x точку множества A.

Точка x пространства X называется *изолированной*, если множество $\{x\}$ открыто в X. Говорят, что пространство X *дискретно*, если все его точки изолированные (топология такого пространства называется *дискретной* топологией).

Последовательность $\{x_n: n = 1, 2, \ldots\}$ точек пространства X *сходится* к точке x этого пространства, если для каждой окрестности Ox точки x существует такой номер n^*, что $x_n \in Ox$ при всех $n > n^*$. Пишут при этом $\lim\{x_n\} = x$ и точку x называют *пределом* последовательности $\{x_n: n = 1, 2, \ldots\}$. Точка *прикосновения семейства* ξ множеств есть любая точка, принадлежащая замыканию каждого из этих множеств. Множество всех точек прикосновения семейства ξ обозначается через $[\xi]$; очевидно, $[\xi] = \bigcap \{[A]: A \in \xi\}$. Говорят, что семейство ξ множеств *сходится* к множеству $A \subset X$, если для каждой окрестности OA множества A найдется элемент $Q \subset \xi$, содержащийся в OA в качестве подмножества. Если $A = \{x\}$, где $x \in X$, и ξ сходится к A, то говорят, что ξ сходится к точке x; точку x называют *пределом* семейства ξ и пишут: $x \in \lim \xi$. При этом через $\lim \xi$ обозначается множество всех точек пространства X, являющихся пределом для ξ. Особенно важны в топологии сходящиеся в указанном выше смысле фильтры и ультрафильтры. В соответствии с этими общими представлениями полезно развить точку зрения на сходимость последовательностей следующим образом. Скажем, что последовательность $\{x_n: n = 1, 2, \ldots\}$ точек пространства X *сходится к множеству* $A \subset X$, если для каждой окрестности OA множества A существует номер n^* такой, что $x_n \in OA$ при всех $n \geq n^*$.

Во многих случаях полезны понятия *неповторяющейся* последовательности и *существенной* последовательности. Последовательность $\{x_n: n = 1, 2, \ldots\}$ называется *существенной*, если множество точек этой последовательности бесконечно (т. е. бесконечно множество $\{y:$ существует номер n, для которого $x_n = y\}$), и *неповторяющейся*, если из $n' \neq n''$ всегда следует, что $x_{n'} \neq x_{n''}$.

Семейство σ множеств называется *сетью* в X (или сетью пространства X), если каждое открытое множество является объединением некоторого семейства элементов σ. Если σ — сеть в X и все элементы σ — открытые множества, то σ называют *базой* пространства X (или базой топологии, заданной на X). Семейство γ открытых подмножеств топологического пространства X называется его *предбазой*, если совокупность всех множеств, являющихся пересечением конечного множества элементов семейства γ, образует базу пространства X.

Семейство η окрестностей фиксированного множества A в пространстве X называется *определяющей системой окрестностей*

этого *множества*, если для каждой окрестности U множества A в X существует $V \in \eta$ такое, что $V \subset U$. Если множество A состоит из единственной точки x и η — определяющая система окрестностей множества A, то говорят, что η — *база* пространства X (или топологии, заданной на X) *в точке* x (иногда говорят также, что η — *база точки* $x \in X$).

Для топологии очень важно следующее, по существу чисто теоретико-множественное понятие. Пусть γ — семейство множеств в X и $A \subset X$. *Звездой* множества A относительно γ называется множество $\bigcup \{U \in \gamma\colon U \cap A \neq \Lambda\}$, обозначаемое всегда через $\gamma(A)$. Если $A = \{x\}$, мы пишем $\gamma(x)$ вместо $\gamma(\{x\})$.

Если λ — семейство подмножеств пространства X и каждое непустое открытое множество содержит некоторый элемент семейства λ в качестве непустого подмножества, то говорят, что λ *плотно в* X. Итогда в X система открытых множеств называется *σ-базой* пространства X.

Подмножество M называется *всюду плотным* (в X), если любое непустое открытое множество U пересекается с M (т. е. если $U \cap M \neq \Lambda$). Множество P называется *нигде не плотным* (в X), если для каждого непустого открытого множества U существует непустое открытое множество $U' \subset U$, не имеющее общих точек с P: $U' \cap P = \Lambda$.

Ряд дальнейших понятий относится к фиксированному произвольно отображению $f\colon X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y *). Отображение f называется *непрерывным*, если полный прообраз любого открытого в Y множества является открытым в X множеством.

Если f непрерывно, взаимно однозначно и $f(X) = Y$, то f называют *гомеоморфизмом*.

Если $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм X на Y; $Y \to X$ — гомеоморфизм, то f называется *гомеоморфизмом* X на Y, или топологическим отображением X на Y. Пространства X и Y называются *гомеоморфными* (или *топологически эквивалентными*), если существует гомеоморфизм одного из них на другое.

Пусть на множестве X заданы две топологии: $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$. Говорят, что топология $\mathcal{T}_1$ больше или равна топологии $\mathcal{T}_2$, если $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ (не исключается, что $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1$ **)). Говорят, что топологии $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ совпадают, или равны, если $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Пусть $(X, \mathcal{T})$ — топологическое пространство и $X_0 \subset X$. Топология $\mathcal{T}$ *индуцирует* (или порождает) топологию $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T} \mid X_0$ на X_0 следующим образом: $\mathcal{T}_0 = \{U \cap X_0\colon U \in \mathcal{T}\}$. При этом

*) Говорят об отображении f топологического пространства X в топологическое пространство Y, имея в виду отображение множества X в множество Y и фиксированные топологии на X и Y.

**) Если $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2 \neq \mathcal{T}_1$, говорят, что $\mathcal{T}_1$ *строго больше* $\mathcal{T}_2$.

$(X_0, \mathcal{T}_0)$ (или просто X_0) называется *подпространством* *) пространства X.

Если мы рассматриваем одновременно пространство X, его подпространство X_0 и множество A, лежащее в X_0, то замыкание A в X обозначается через $[A]_X$ или, как обычно, через $[A]$, а замыкание A в пространстве X_0 обозначается непременно через $[A]_{X_0}$.

Гомеоморфизм пространства X на некоторое подпространство Y_0 пространства Y называется гомеоморфизмом X в Y, или *вложением* пространства X в пространство Y.

Свойство $\mathcal{P}$ топологического пространства называется *топологическим*, или *топологическим инвариантом*, если оно сохраняется при гомеоморфизмах, т. е. если из того, что какое-нибудь топологическое пространство X обладает свойством $\mathcal{P}$, всегда следует, что этим свойством обладает любое гомеоморфное X пространство.

Важнейшим топологическим инвариантом является *бикомпактность*. Заслуга выделения понятия бикомпактности как фундаментального математического понятия принадлежит П. С. Александрову. *Покрытием* топологического пространства X называется всякое покрытие множества точек этого пространства, т. е. любое семейство ξ подмножеств множества X такое, что для каждого $x \in X$ существует элемент A семейства ξ, содержащий x. Покрытие ω пространства X называется *открытым* (соответственно *замкнутым*), если все множества, входящие в ω, открыты (соответственно замкнуты).

Если подсемейство ω' семейства ω само является покрытием пространства X, то ω' называют *подпокрытием* покрытия ω. Пространство X *бикомпактно*, если любое открытое покрытие этого пространства содержит конечное подпокрытие.

Наряду с понятием подпокрытия, большую роль в топологических рассмотрениях играет понятие *вписанного покрытия*. Говорят, что покрытие (семейство множеств) λ вписано в покрытие (семейство множеств) γ, если для каждого $V \in \lambda$ существует $U \in \gamma$ такое, что $V \subset U$.

К числу ранее всех введенных топологических инвариантов относится *связность* (Хаусдорф). Пространство X *связно*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых (в X) множеств. В противном случае говорят, что пространство X *не связно*. Множество A, рассматриваемое как часть топологического пространства X, называется связным, если подпространство A пространства X является связным пространством в смысле данного выше определения.

*) Если X_0 — замкнутое (открытое) множество пространства X, $(X_0, \mathcal{T}_0)$ называют замкнутым (открытым) подпространством пространства $(X, \mathcal{T})$.

В определенном отношении противоположным связанности свойством является *нульмерность*. Пространство называется *нульмерным*, если множества, одновременно открытые и замкнутые в нем, составляют его базу. Нульмерность тоже является топологическим инвариантом.

К числу самых фундаментальных топологических инвариантов относятся свойства типа *отделимости*. Они выделяются посредством так называемых *аксиом отделимости*, образующих иерархию требований.

Топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_0, или является T_0-пространством, если для любых двух различных точек x_1, x_2 этого пространства существует окрестность одной из этих точек, не содержащая другой точки (А. Н. Колмогоров).

Топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_1, или является T_1-*пространством*, если для любых двух различных точек x_1, x_2 этого пространства существуют окрестности Ox_1 и Ox_2 этих точек, для которых $x_2 \notin Ox_1$ и $x_1 \notin Ox_2$.

Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым*, или T_2-*пространством*, если у любых двух различных точек x_1 и x_2 этого пространства существуют непересекающиеся окрестности (при этом топологию, задающую на X, называют хаусдорфовой). Бикомпактные хаусдорфовы пространства называются *бикомпактами*. T_1-пространство X называется *регулярным*, если для любой точки $x \in X$ и любого замкнутого множества F, не содержащего эту точку, найдутся такие окрестность Ox точки x и окрестность OF множества F, что $Ox \cap OF = \Lambda$.

T_1-пространство X называется *нормальным*, если у любых двух непересекающихся замкнутых множеств этого пространства существуют непересекающиеся окрестности.

Есть еще одно важное нетривиальное условие типа отделимости, называемое *вполне регулярностью*, более слабое, чем нормальность, но более сильное, чем регулярность. T_1-пространство X называется вполне регулярным, если для любой точки $x_0 \in X$ и любого замкнутого в X множества F, не содержащего эту точку, найдется такая непрерывная функция f, определенная на всем X, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ для всех $x \in X$, $f(x_0) = 0$ и $f(x) = 1$, если $x \in F$ (см. задачи 25 и 41 гл. III).

Ряд весьма важных топологических инвариантов определяется с привлечением кардинальных чисел, причем сами кардинальные числа являются, как правило, значениями этих инвариантов.

Наименьшее из кардинальных чисел, являющихся мощностями баз пространства X, называется *весом* X и обозначается через $w(X)$. Наименьшее из кардинальных чисел, являющихся мощностями сетей в X, называется *α-весом* пространства X и обозначается через $\alpha(X)$. Через $\alpha_n(X)$ обозначается *n-вес* пространства X — наименьшая из мощностей его n-баз. Наименьшее из кардинальных чисел, являющихся мощностями всюду плотных в X множеств, называется *плотностью* X и обозначается через $s(X)$. Через $c(X)$ обозначается наименьшее из всех кардинальных чисел τ, удовлетворяющих следующему условию: мощность каждой системы попарно не пересекающихся непустых открытых подмножеств пространства X не превосходит τ. Инвариант $c(X)$ называется *числом Суслина пространства* X.

Характер $\chi(A, X)$ *множества* $A \subset X$ *в пространстве* X есть наименьшая из мощностей определяющих систем окрестностей множества A в X. Если $A = \{x\}$, где $x \in X$, то вместо $\chi(\{x\}, X)$ мы пишем $\chi(x, X)$; при этом $\chi(x, X)$ называется *характером точки* x в пространстве X (или, наоборот, *характером пространства* X *в точке* x). *Псевдохарактер* $\psi(A, X)$ множества A в T_1-пространстве X есть наименьшая из мощностей семейств $\mathcal{E}$ открытых в X множеств таких, что $A = \bigcap \{V: V \in \mathcal{E}\}$ (корректность этого определения утверждается в задаче 41 гл. II). Если $A = \{x\}$, где $x \in X$, то мы пишем $\psi(x, X)$ вместо $\psi(\{x\}, X)$ и называем $\psi(x, X)$ *псевдохарактером пространства* X *в точке* x. Если $\psi(A, X) \leqslant \tau$, мы говорим, что A — *множество типа* G_τ в X. Множества типа $G_{\aleph_0}$ называются также, в соответствии с традицией, *множествами типа* G_δ (в X). *Теснота* $t(x, X)$ пространства X в точке $x \in X$ — наименьшее из кардинальных чисел τ, удовлетворяющих условию: если $A \subset X$ и $x \in [A]$, то существует $A' \subset A$, для которого $|A'| \leqslant \tau$ и $x \in [A']$. *Характер* $\chi(X)$ (соответственно *псевдохарактер* $\psi(X)$, *теснота* $t(X)$) пространства X — наименьшее из кардинальных чисел τ таких, что $\chi(x, X) \leqslant \tau$ (соответственно $\psi(x, X) \leqslant \tau$, $t(x, X) \leqslant \tau$) для всех $x \in X$. Пространство X удовлетворяет *второй аксиоме счетности*, если $w(X) \leqslant \aleph_0$, т. е. если в X есть счетная база. Пространство X удовлетворяет *первой аксиоме счетности*, если $\chi(X) \leqslant \aleph_0$, т. е. если X имеет счетную базу в каждой точке. Если $s(X) \leqslant \aleph_0$, то говорят, что X *сепарабельно*; если $c(X) \leqslant \aleph_0$, то говорят, что X *удовлетворяет условию Суслина*. Пространство X называется *пространством Фреше — Урысона*, если из $x \in X$, $A \subset X$ и $x \in [A]$ всегда следует, что существует последовательность $\{x_n: n = 1, 2, \ldots\}$ точек множества A, сходящаяся к x. Пространство X называется *секвенциальным*, если из $A \subset X$ и $A \neq [A]$ всегда следует, что существует последовательность $\{x_n: n = 1, 2, \ldots\}$ точек множества A, сходящаяся к некоторой точке $x \in [A] \setminus A$. Разница с предыдущим определением в том, что в данном случае точка $x \in [A] \setminus A$ не всегда может быть выбрана произвольно. Наконец, *индекс компактности* $ic(X)$ пространства X определяется как наименьшее кардинальное число τ такое, что любое открытое покрытие пространства X содержит подпокрытие, мощность которого не превосходит τ. Если индекс компактности пространства X равен $\aleph_0$, т. е. из любого открытого

покрытия этого пространства можно выделить счетное подпокрытие, то X называется *финально компактным*. Если X нормально и каждое его замкнутое множество имеет тип G_δ, то X называется *совершенно нормальным* пространством.

Свободная сумма топологических пространств X_α, где $\alpha \in A$, есть свободная сумма $X = \bigcup_\alpha \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ множеств X_α по $\alpha \in A$, наделенная топологией, однозначно определяющейся следующими требованиями: (а) каждое $i_\alpha(X_\alpha)$ как подпространство свободной суммы X гомеоморфно X_α, причем гомеоморфизмом является отображение $i_\alpha : X_\alpha \to \bigcup_\alpha \{X_\alpha : \alpha \in A\}$, (б) $i_\alpha(X_\alpha)$ открыто в X для каждого $\alpha \in A$ (см. стр. 15).

В дальнейшем i_α будет именоваться *стандартным вложением* пространства X_α в свободную сумму, а само $i_\alpha(X_\alpha)$ будет называться *стандартной реализацией* пространства X_α в свободной сумме.

Очень важно понятие *топологического* (или тихоновского) *произведения* топологических пространств. Пусть для каждого $\alpha \in A$ задано топологическое пространство $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$. Через X обозначим произведение $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ множеств X_α. Мы сейчас определим топологию $\mathcal{T}$ на X, называемую *топологией произведения*, или *произведением топологий* $\mathcal{T}_\alpha$ по $\alpha \in A$. Напомним, что через $\mathcal{E}_0(A) = \exp_{\aleph_0}(A)$ обозначается множество всех конечных подмножеств множества A. Если $U \subset X$ и $U = \Pi\{U_\alpha : \alpha \in A\}$, причем $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ для всех $\alpha \in A$ и $U_\alpha = X_\alpha$ для всех $\alpha \in A \setminus F$, где F — некоторое конечное множество ($F \in \mathcal{E}_0(A)$), то мы скажем, что U — *стандартное* множество. При этом мы полагаем $h(U) = \{\alpha \in A : U_\alpha \neq X_\alpha\}$. Тогда $h(U) \in \mathcal{E}_0(A)$ для каждого стандартного множества U. Семейство всех стандартных множеств служит базой некоторой топологии $\mathcal{T}$ на X; эту топологию мы будем называть *топологией произведения*, или *тихоновской топологией*, и обозначать через $\Pi\{\mathcal{T}_\alpha : \alpha \in A\}$. Впрочем, обычно мы будем писать коротко: $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, подразумевая, что множество X наделено топологией произведения, отвечающей топологиям, заданным на X_α, обозначения которых также не выписываются. Базу топологии произведения, образованную совокупностью стандартных множеств, мы будем называть *стандартной базой*; само X вместе с топологией произведения называется *топологическим*, или *тихоновским*, *произведением* пространств X_α.

Операция топологического умножения, как и более простые операции перехода к подпространству, взятия свободной суммы топологических пространств, позволяет из уже имеющихся пространств строить новые. Дальнейшие возможности в этом направлении связаны с понятием *факторного* отображения.

Отображение $f : X \to Y$ топологического пространства X на топологическое пространство Y называется *факторным*, если в Y открыты то и только те множества, полный прообраз которых открыт в X. Понятие факторного отображения тесно связано с понятием разбиения пространства X (П. С. Александров). При этом *разбиением* пространства X называется любое замкнутое дизъюнктное покрытие этого пространства. В дальнейшем ω обозначает некоторое фиксированное разбиение топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Каждая точка $x \in X$ содержится ровно в одном элементе разбиения ω, т. е. определено *естественное* отображение $\pi_\omega : X \to \omega$ топологического пространства X на множество ω. Теперь мы можем наделить множество ω *естественной* топологией, называемой *факторной*, или *фактор-топологией*, или *естественной топологией* разбиения ω: множество $V \subset \omega$ называется открытым, если $\pi_\omega^{-1}(V)$ открыто в X, т. е. если объединение элементов множества V, рассматриваемых как подмножества множества X, является открытым в X множеством. Естественная топология разбиения ω обозначается через $\mathcal{T}'_\omega$ (где $\mathcal{T}$ — топология, заданная на X). Название топологии $\mathcal{T}' = \mathcal{T}'_\omega$ связано с тем, что отображение $\pi_\omega : (X, \mathcal{T}) \to (\omega, \mathcal{T}')$ всегда является факторным. Множество ω, наделенное топологией $\mathcal{T}' = \mathcal{T}'_\omega$, называется *фактор-пространством* по разбиению ω, или *пространством разбиения* ω, пространства X. Пишут при этом: $(\omega, \mathcal{T}') = X \mid \omega$. Отображение π_ω называют также *естественным проектированием пространства* X *на пространство разбиения* ω. Важные специальные случаи факторных отображений — непрерывные открытые отображения и непрерывные замкнутые отображения. Отображение называется *открытым*, если образ каждого открытого множества открыт. Отображение называется *замкнутым*, если образ каждого замкнутого множества замкнут. Открыто-замкнутые отображения — те, которые одновременно открыты и замкнуты. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, под открытым (соответственно замкнутым, открыто-замкнутым) отображением понимается непрерывное открытое (соответственно непрерывное замкнутое, непрерывное открыто-замкнутое) отображение. Подчеркнем, что данные выше определения относятся ко всем отображениям, а не только к тем, которые являются отображениями «на». Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется *бикомпактным*, если подпространство $f^{-1}y$ бикомпактно для любой точки $y \in Y$. Непрерывные замкнутые бикомпактные отображения называются *совершенными*.

Исторически понятию топологического пространства предшествовало понятие метрического пространства (Фреше). Пусть X — некоторое множество. Функция ρ, которая каждой паре точек $x \in X$, $y \in X$ сопоставляет неотрицательное действительное число $\rho(x, y)$, называемое расстоянием от точки x до точки y, называется *метрикой* на X, если выполнены следующие аксиомы.

1°. Для любой пары точек $x \in X$, $y \in X$ всегда $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*аксиома симметрии*).

2°. $\rho(x, y) = 0$ в том и только в том случае, когда $x = y$ (*аксиома тождества*).

3°. Для любой тройки точек $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$ всегда $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (*аксиома треугольника*).

Множество X вместе с метрикой ρ на нем называется *метрическим пространством* (X, ρ).

Пусть $x \in X$ — произвольная точка, а $M \subset X$ — произвольное подмножество метрического пространства (X, ρ). Число $\rho(x, M) = \inf\{\rho(x, y): y \in M\}$ называется *расстоянием от точки x до множества M*, а число $\rho(M_1, M_2) = \inf\{\rho(x, M_2): x \in M_1\} = \inf\{\rho(x, y): x \in M_1, y \in M_2\}$ называется *расстоянием от множества M_1 до множества M_2*.

Подмножество A метрического пространства (X, ρ) называется *ограниченным*, если существует число K такое, что $\rho(x, y) \leqslant K$ для всех $x \in A$, $y \in A$. *Диаметром* ($\operatorname{diam} A$) ограниченного множества A называется $\sup\{\rho(x, y): x \in A, y \in A\}$. Пусть $A \subset X$ и ε — положительное число. Множество $\{y \in X: \rho(A, y) < \varepsilon\}$ называется *ε-окрестностью множества A* и обозначается через $O_\varepsilon(A)$. Если $A = \{x\}$, где $x \in X$, то $O_\varepsilon(x) = O_\varepsilon(\{x\})$ называется *ε-окрестностью точки x* или *шаром* (шаровой окрестностью) в (X, ρ) радиуса ε с центром в x.

Множество S точек пространства (X, ρ) называется *ε-сетью в X*, если для каждой точки $x \in X$ существует точка $x' \in S$ такая, что $\rho(x, x') < \varepsilon$ (т. е. если $\bigcup\{O_\varepsilon(x): x \in S\} = X$). Равносильное условие: $O_\varepsilon(S) = X$. Метрическое пространство (X, ρ) называется *вполне ограниченным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть (т. е. ε-сеть, состоящая из конечного числа точек).

Если A — подмножество метрического пространства (X, ρ), то метрика ρ индуцирует на A метрику $\rho' = \rho \mid A$: $\rho'(x, y) = \rho(x, y)$, если $x \in A$, $y \in A$. Таким образом, A превращается в метрическое пространство (A, ρ'), которое называется (метрическим) *подпространством метрического пространства* (X, ρ) и часто обозначается через (A, ρ) или коротко через A.

Подмножество A метрического пространства (X, ρ) называется вполне ограниченным, если метрическое пространство (A, ρ) вполне ограничено.

Фундаментальную роль в теории метрических пространств играют также следующие понятия.

Последовательность $\{x_n\}$ точек *) метрического пространства X *сходится* к точке x_0, если последовательность действительных

*) Мы пишем для краткости $\{x_n\}$ вместо $\{x_n: n = 1, 2, \ldots\}$ или $\{x_n: n \in N^+\}$.

чисел $\alpha_n = \rho(x_n, x_0)$ сходится к нулю (т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ непременно $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$). Последовательность $\{x_n\}$ точек пространства X называется *фундаментальной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$. Метрическое пространство X называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность его точек сходится к некоторой точке пространства X.

Подмножество U метрического пространства (X, ρ) назовем *открытым* в (X, ρ), если $\rho(x, X \setminus U) > 0$ для всех $x \in U$.

Через $\mathscr{T}_\rho$ будем обозначать множество всех открытых множеств метрического пространства (X, ρ). Система $\mathscr{T}_\rho$ является топологией на множестве X (что, конечно, надо доказать) и называется *топологией, порождённой* (или *индуцированной*) *метрикой* ρ на X. Таким образом, всякое метрическое пространство (X, ρ) может в то же время рассматриваться как топологическое пространство $(X, \mathscr{T}_\rho)$.

Пусть ρ и ρ^* — две метрики на X. Напишем $\rho \to \rho^*$, если $\rho(x, y) \to \rho^*(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Может оказаться, что $\rho \not\to \rho^*$, но $\mathscr{T}_\rho = \mathscr{T}_{\rho^*}$. Если $\mathscr{T}_\rho = \mathscr{T}_{\rho^*}$, то говорят, что метрики ρ и ρ^* *топологически эквивалентны*.

Однако существуют топологии, которые не порождаются никакой метрикой. Топологическое пространство $(X, \mathscr{T})$, для которого $\mathscr{T} = \mathscr{T}_\rho$, где ρ — некоторая метрика на X, называется *метризуемым*. Метризуемость — тоже топологический инвариант. Метризуемые бикомпакты или, что то же самое, бикомпакты со счетной базой называются *компактами*.

Взаимно однозначное отображение $f: (X, \rho) \to (Y, \rho')$ метрического пространства (X, ρ) на метрическое пространство (Y, ρ') называется *изометрией*, или *изометрическим отображением*, если для любой пары точек $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ непременно $\rho(x_1, x_2) = \rho'(fx_1, fx_2)$.

Изометрическое вложение одного метрического пространства (X, ρ) в другое метрическое пространство (Y, ρ^*) определяется как изометрическое отображение пространства (X, ρ) на некоторое метрическое подпространство пространства (Y, ρ^*).

Если существует изометрическое отображение пространства (X, ρ) на пространство (Y, ρ^*), то говорят, что (X, ρ) и (Y, ρ^*) *изометричны*, что каждое из них является *изометрическим образом* другого. Следует заметить, что обратное к изометрическому отображению само является изометрическим отображением.

Если $\mathscr{P}$ — некоторое топологическое свойство, то будем говорить, что пространство X обладает этим свойством *наследственно*, или что X — наследственное $\mathscr{P}$-пространство, в том случае, когда не только само X обладает свойством $\mathscr{P}$, но этим же свойством обладает и всякое подпространство $X' \subset X$.

§ 1. Простейшие задачи, связанные с общими понятиями топологии

Отображение семейства всех подмножеств фиксированного множества X в себя иначе еще называется *оператором на семействе всех подмножеств* множества X. Оператор C на семействе всех подмножеств множества X называется *оператором Куратовского*, если одновременно выполнены следующие условия:

1) для каждого $A \subset X$ непременно $A \subset C(A)$;

2) если $A \subset X$, $B \subset X$, $A \subset B$, то $C(A) \subset C(B)$;

3) если $A \subset X$, $B \subset X$, то $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$;

4) для каждого $A \subset X$ имеет место $C(C(A)) = C(A)$.

Пусть $(X, \mathcal{T})$ — топологическое пространство. Оператор, в силу которого каждому подмножеству A множества X соответствует его замыкание $[A]$ в пространстве $(X, \mathcal{T})$ (см. стр. 52), называется *оператором замыкания*. Другим важным оператором на семействе всех подмножеств топологического пространства является *оператор* Int, сопоставляющий каждому множеству $A \subset X$ множество $\operatorname{Int} A$ — ядро, или внутренность, множества A в $(X, \mathcal{T})$. Замкнутое множество F (открытое множество U) называется *каноническим замкнутым* (*каноническим открытым*), если $F = [\operatorname{Int} F]$ (если $\operatorname{Int}[U] = U$).

Подмножество A топологического пространства X называется *дискретным в себе*, если A как подпространство пространства X является дискретным пространством (см. стр. 53). Замкнутое дискретное в себе множество называется *дискретным в пространстве* X.

Топологическое пространство X называется *связным*, если открыты в X только два подмножества: пустое и всё X. На каждом бесконечном множестве X может быть определено много топологий. Полезно иметь в виду семейство $\mathfrak{M}(X)$ всех топологий на множестве X. Семейство $\mathfrak{M}(X)$ естественно рассматривать как упорядоченное множество: если $\mathcal{T}' \in \mathfrak{M}(X)$ и $\mathcal{T}'' \in \mathfrak{M}(X)$, то мы полагаем $\mathcal{T}' < \mathcal{T}''$, когда $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}''$. Конечно, это упорядочение не является линейным. Целесообразно поэтому рассматривать *цепи*, или *пучки*, *топологий*, т. е. цепи в упорядоченном множестве $(\mathfrak{M}(X), <)$. В $(\mathfrak{M}(X), <)$ есть наибольший элемент — дискретная топология — и минимальный элемент — это роль играет антидискретная топология.

Топологическим объединением $\bigvee \mathcal{B}$ произвольного семейства $\mathcal{B}$ топологий, заданных на одном и том же множестве X, называется топология, предбазой которой служит (теоретико-множественное) объединение $\mathcal{B}^* = \bigcup \{\mathcal{T} : \mathcal{T} \in \mathcal{B}\}$ топологий из $\mathcal{B}$ (при этом каждая топология понимается как множество, лежащее в множестве всех подмножеств множества X). *Пересечение* (*теоретико-множественное*) $\bigwedge \mathcal{B}$ семейства $\mathcal{B}$ топологий определяется просто как теоретико-множественное их пересечение: $\bigwedge \mathcal{B} = \bigcap \{\mathcal{S} : \mathcal{S} \supset \mathcal{B}\}$.

Пусть X — множество и B — фиксированное его подмножество. Обозначим через $\mathcal{S}(B)$ семейство, элементами которого являются всё X и всевозможные подмножества множества B. Семейство $\mathcal{S}(B)$ является топологией на X. Эта топология будет называться *B-топологией*. Сами по себе B-топологии малоинтересны. Однако могут получаться нетривиальные вещи, если «склеивать» B-топологии с другими топологиями — в смысле, который сейчас будет разъяснен. Назовем *B-модификацией* произвольной топологии, заданной на множестве X (и обозначим через $\mathcal{T}_B$), топологическое объединение топологий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}(B)$. *B-усилением* называется топология, предбазу которой образуют множества из семейства $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}|B$, где $\mathcal{T}|B = \{U \cap B : U \in \mathcal{T}\}$.

Своеобразный класс топологических пространств составляют линейно упорядоченные пространства. Пусть $(X, <)$ — линейно упорядоченное множество. Под его *интервалом* понимается всякое множество вида $(x', x'') = \{x \in X : x' <_x x <_x x''\}$, где $x' \in X$, $x'' \in X$. *Порядковой топологией* $\mathcal{T}_<$ на множестве X, порожденной линейным упорядочением $<$, называется топология, базу которой образуют всевозможные интервалы линейно упорядоченного множества $(X, <)$. Линейно упорядоченное множество $(X, <)$ вместе с топологией, порожденной на X линейным порядком $<$, называется *линейно упорядоченным* (или коротко: упорядоченным) *пространством*.

Важный класс составляют локально бикомпактные пространства. Пространство X называется *локально бикомпактным*, если для всякой точки $x \in X$ существует такая окрестность Ox, что $[Ox]$ — бикомпактное подпространство.

1. Пусть X — некоторое множество. Докажите, что для произвольного оператора Куратовского C на X существует такая топология $\mathcal{T}$ на X, что $CA = [A]$ для всех $A \subset X$.

2. Пусть X — бесконечное множество и $\mathcal{T}_0 = \{A \subset X : X \setminus A$ конечно или $A = \Lambda\}$. Условимся называть $\mathcal{T}_0$ *конечной топологией* на X.

Докажите, что

(а) $\mathcal{T}_0$ — топология на X;

(б) $(X, \mathcal{T}_0)$ — T_1-пространство;

(в) если $(X, \mathcal{T})$ — топологическое пространство, удовлетворяющее T_1-аксиоме отделимости, то $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$;

(г) любые два непустых открытых в $(X, \mathcal{T}_0)$ множества пересекаются;

(д) каждая точка $x \in X$ является предельной для любого бесконечного множества $A \subset X$;

(е) для любого бесконечного подмножества A множества X, $[A] = X$ (иными словами, всякое бесконечное подмножество множества X всюду плотно в X);

(ж) X бикомпактно и сепарабельно.

3. Пусть X — бесконечное множество, ξ — свободный ультрафильтр на X и $\mathscr{T}_\xi = \xi \cup \{A\}$.

Докажите, что

(а) $\mathscr{T}_\xi$ — топология на X;

(б) $(X, \mathscr{T}_\xi)$ — T_1-пространство;

(в) $\mathscr{T}_A \subset \mathscr{T}_\xi$ (см. 2 гл. II);

(г) $\pi(X, \mathscr{T}_\xi)$ тот изолированных точек;

(д) если $U \in \xi$, то $X \setminus U$ — дискретное подпространство пространства $(X, \mathscr{T}_\xi)$;

(е) если $\mathscr{T}$ — топология на X и $\mathscr{T}_\xi \subset \mathscr{T}$, $\mathscr{T}_\xi \neq \mathscr{T}$, то в $(X, \mathscr{T})$ есть изолированная точка (утверждение (е) выражает максимальность топологии $\mathscr{T}_\xi$ по отношению к свойству (г)).

4. Пусть X — топологическое пространство, ξ — предфильтр на множестве X и $x \in X$, x — точка прикосновения для ξ. Тогда существует ультрафильтр ξ^*, содержащий ξ и сходящийся к x.

5. Пусть $\mathscr{T}$ и $\mathscr{T}'$ — две топологии на множестве X, причем $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$. Тогда если $\mathscr{T}$ — T_2-топология, то и $\mathscr{T}'$ — T_2-топология, и если $\mathscr{T}$ — хаусдорфова топология, то и $\mathscr{T}'$ — хаусдорфова топология.

6. Пусть на множестве X задано некоторое семейство $\{\mathscr{T}_\alpha: \alpha \in M\}$ топологий и $\mathscr{T}' = \bigcap \{\mathscr{T}_\alpha: \alpha \in M\}$ — пересечение топологий $\mathscr{T}_\alpha$ по всем $\alpha \in M$. Пусть $\mathscr{T}'' = \bigcup \{\mathscr{T}_\alpha: \alpha \in M\}$ — объединение топологий $\mathscr{T}_\alpha$ по всем $\alpha \in M$.

1) Является ли $\mathscr{T}'$ топологией?

2) Является ли $\mathscr{T}''$ топологией?

7. Всякое упорядоченное пространство удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа.

8. Если множество всех точек T_1-пространства X конечно, то X — дискретное пространство.

9. Каждое дискретное пространство нульмерно. Верно ли обратное?

10. Приведите пример пространства X, никакое одноточечное подмножество которого в нем не замкнуто (анти T_1-пространство).

11. Приведите пример T_0-пространства, в котором никакое одноточечное подмножество не замкнуто.

12. Пусть X — множество, $B \subset X$ и $\mathscr{T} = \mathscr{T}(B)$ — B-топология на X. Показать, что

(а) B — множество всех изолированных в $(X, \mathscr{T})$ точек;

(б) $[B] = X$;

(в) $\mathscr{T}$ — дискретная топология в том и только в том случае, если $B = X$;

(г) $\mathscr{T}$ — антидискретная топология в том и только в том случае, если $B = \Lambda$.

13. Пусть X — топологическое пространство, а σ — некоторое семейство открытых в X множеств. Доказать, что σ — база

пространства X тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ и произвольной ее окрестности Ox существует такое $U \in \sigma$, что $x \in U \subset Ox$.

14. Пусть X — некоторое множество, $\mathscr{B}$ — произвольное семейство его подмножеств, $\overline{\mathscr{B}}$ — семейство всех множеств, представимых в виде пересечения конечного множества элементов семейства $\mathscr{B}$, а $\overline{\overline{\mathscr{B}}}$ — семейство всех множеств, представимых в виде объединения какого-либо множества элементов семейства $\overline{\mathscr{B}}$. Тогда $\overline{\mathscr{B}} \cup \{A\} \cup \{X\}$ — топология на X, $\overline{\mathscr{B}} \cup \{X\}$ является базой этой топологии и $\mathscr{B} \cup \{X\}$ является предбазой этой топологии.

15. Проверьте, что совокупность стандартных множеств произведения топологических пространств (стр. 58) действительно образует базу некоторой топологии.

16. Опишите, из каких множеств состоит определенная на плоскости топология, предбаза которой состоит из всех прямых, параллельных некоторой фиксированной прямой l.

17. Рассмотрите на плоскости топологию, предбазой которой служит совокупность всех прямых. Что это за топология?

18. Пусть $(X, \mathscr{T})$ — топологическое пространство.

(а) Докажите, что пересечение любого семейства замкнутых множеств является замкнутым множеством.

(б) Докажите, что объединение конечного семейства замкнутых множеств является замкнутым множеством.

(в) Покажите, что все пространство, а также пустое множество являются замкнутыми множествами.

19. Семейство $\mathscr{F}$ подмножеств множества X является топологией на X в том и только в том случае, если семейство $\mathscr{F} = \{X \setminus U: U \in \mathscr{T}\}$ удовлетворяет условиям:

(а) $\{X\} \in \mathscr{F}$ и $\{\Lambda\} \in \mathscr{F}$;

(б) объединение каждого конечного множества элементов семейства $\mathscr{F}$ снова является элементом этого семейства;

(в) пересечение любого множества элементов семейства $\mathscr{F}$ принадлежит $\mathscr{F}$.

20. Докажите, что множество F топологического пространства $(X, \mathscr{T})$ замкнуто тогда и только тогда, когда $[F] = F$.

21. Открытое множество U пересекается с множеством Q в том и только в том случае, если U пересекается с замыканием множества Q.

22. Пусть $(X, \mathscr{T})$ — топологическое пространство. Показать, что

(а) $A \subset [A]$ для любого подмножества $A \subset X$;

(б) если $A \subset B$, то $[A] \subset [B]$;

(в) $[A_1 \cup A_2] = [A_1] \cup [A_2]$;

(г) $[[A]] = [A]$.

23. Если $[A] \subset A$, то A замкнуто.

24. Пусть σ — база пространства X и $A \subset X$. Покажите, что $x \in [A]$ тогда и только тогда, когда для любого множества $U \in \sigma$, содержащего точку x, имеет место $U \cap A \neq \Lambda$.

25. Пусть X — топологическое пространство и $A \subset X$. Тогда, если каждое подмножество множества A замкнуто в X, то у A в X нет предельных точек.

26. Замыкание всякого множества A в пространстве X есть наименьшее замкнутое в X множество, содержащее A.

27. Для любого множества, лежащего в пространстве X, имеем: $[A] = \bigcap \{P\colon P \subset X,\ P$ замкнуто и $P \supset A\}$.

28. Если $A \subset X$, $x \subset X$, где X — топологическое пространство, и $x \in [A]$, то для любого открытого в X множества U, содержащего точку x, непременно $[U \cap A] \ni x$.

29. Если множество A всюду плотно в пространстве X и U — открытое в X множество, то $[A \cap U] = [U] \supset U$.

30. Пересечение двух (конечного семейства) открытых всюду плотных в пространстве X множеств всюду плотно (и открыто) в X.

31. Произвольное непустое подмножество антидискретного пространства (даже состоящее из одной точки) всюду плотно в нем.

32. Пусть $\mathscr{B}$ — некоторая предбаза пространства X, $A \subset X$ и $A \cap U \neq A$ для каждого $U \in \mathscr{B}$. Вытекает ли отсюда, что A всюду плотно в X?

33. Если множество U открыто, а множество F замкнуто, то $U \setminus F$ открыто, а $F \setminus U$ замкнуто.

34. Докажите, что пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 тогда и только тогда, когда всякое его одноточечное подмножество замкнуто.

35. Пусть X — T_1-пространство и фиксированы $x \in X$, $A \subset X$. Тогда следующие утверждения (1) и (2) равносильны:

1) Для каждой окрестности Ox точки x имеет место $|Ox \cap A| \geqslant \aleph_0$.

2) Для каждой окрестности Ox точки x существует точка $x' \in Ox \cap A$, отличная от x.

36. Пусть X — топологическое пространство и A — лежащее в нем множество. Следующие утверждения равносильны:

(а) у каждой точки $x \in A$ существует окрестность Ox в X такая, что $A \cap Ox$ замкнуто в Ox;

(б) $[A] \setminus A$ — замкнутое множество;

(в) A является пересечением замкнутого множества с открытым.

37. Докажите, что для любых двух непересекающихся открытых множеств замыкание любого из них не пересекается с другим.

38. Если множества U и V открыты и не пересекаются, то $(\mathrm{Int}[U]) \cap (\mathrm{Int}[V]) = \Lambda$.

39. Если у множеств A и B, лежащих в топологическом пространстве X, существуют непересекающиеся окрестности, то у A в B существуют такие непересекающиеся окрестности, являющиеся каноническими открытыми множествами.

40. Приведите пример пространства, в котором все одноточечные множества замкнуты (T_1-аксиома) и одновременно любые два непустых открытых множества пересекаются (антихаусдорфовость).

41. В каких пространствах каждое множество является пересечением некоторого семейства открытых множеств?

42. Верно ли, что на всяком бесконечном множестве существует хаусдорфова топология *), по отношению к которой никакая точка множества X не является изолированной?

43. Докажите, что пространство X регулярно тогда и только тогда, когда для всякой точки $x \in X$ и любой ее окрестности Ux существует такая окрестность $U'x$ этой точки, что $[U'x] \subset Ux$.

44. Если M — счетное дискретное подпространство регулярного пространства X, то существует семейство $\{Oy\colon y \in M\}$ попарно не пересекающихся окрестностей этих точек в X.

45. Докажите, что пространство X нормально тогда и только тогда, когда для всякого замкнутого множества F и любой его окрестности UF существует такая окрестность $U'F$ этого множества, что $[U'F] \subset UF$.

46. Если $\mathscr{T}$ и $\mathscr{T}'$ — две топологии на множестве X и $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$, то $[A]_{\mathscr{T}'} \subset [A]_{\mathscr{T}}$ для каждого $A \subset X$.

47. Пусть X — подпространство топологического пространства Y и G — открытое в X множество. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) $\bar{G} = \bigcup \{V \subset Y\colon V$ открыто в Y и $V \cap X = G\}$;

2) $\bar{G}$ — открытое в Y множество, $\bar{G} \cap X = G$, и если $U \subset Y$, U открыто в Y, $U \cap X = G$, то $U \subset \bar{G}$;

3) $\bar{G} = Y \setminus [X \setminus G]$;

4) $z \in Y \setminus \bar{G}$ в том и только в том случае, если какая-нибудь окрестность точки z пересекается с множеством $X \setminus G$.

48. Если P открыто в пространстве X и $Q \subset X$, то $\mathrm{Int}[P \cap Q] = \mathrm{Int}[P] \cap \mathrm{Int}[Q]$.

49. Если U — открытое в пространстве X множество, то $F = [U] \setminus U$ нигде не плотно в X.

50. Докажите, что замыкание нигде не плотного в пространстве X множества $A \subset X$ нигде не плотно в X.

51. Докажите, что замкнутое подмножество F пространства X нигде не плотно тогда и только тогда, когда $X \setminus F$ всюду плотно в X. Остается ли это утверждение верным, если опустить слово «замкнутое»?

52. Если открытое множество нигде не плотно, то оно пусто.

*) Хаусдорфова топология — топология, удовлетворяющая аксиоме отделимости Хаусдорфа.

53. Если U — открытое в пространстве X множество и A нигде не плотно в X, то $A \cap U$ нигде не плотно в U (как в подпространстве пространства X).

54 (пример). Через Q^0 обозначим какое-нибудь счетное всюду плотное (по отношению к обычной топологии) подмножество плоскости (см. 173 гл. II), через $\mathscr{T}$ — топологию, порожденную (см. стр. 54—55 и задачу 58 гл. II) на Q^2 обычной топологией плоскости. Положим $\tilde{\mathscr{T}} = \{U \setminus A\colon U \in \mathscr{T}$, A нигде не плотно в $(Q^2, \mathscr{T})\}$. Тогда $(Q^2, \tilde{\mathscr{T}})$ — счетное хаусдорфово пространство без изолированных точек, в котором нет ни одной нетривиальной (т. е. состоящей из попарно различных точек) сходящейся последовательности. Тем более, $(Q^2, \tilde{\mathscr{T}})$ не удовлетворяет первой аксиоме счетности ни в одной точке.

55. (а) Замыкание открытого множества является каноническим замкнутым множеством.

(б) Если A замкнуто, то его внутренность $\operatorname{Int} A$ — каноническое открытое множество.

56. Дополнение канонического открытого множества является каноническим замкнутым множеством. Дополнение канонического замкнутого множества является каноническим открытым множеством.

57. (а) Покажите, что объединение конечного числа канонических замкнутых множеств пространства X есть каноническое замкнутое множество.

(б) Выясните, будет ли всегда каноническим замкнутым пересечение двух канонических замкнутых множеств.

(в) Покажите, что для любых двух канонических замкнутых множеств A_1 и A_2 пространства X множество $\operatorname{Int} A_1 \cap \operatorname{Int} A_2$ каноническое замкнутое.

58. Пусть $(X, \mathscr{T})$ — топологическое пространство и $X' \subset X$ — некоторое подмножество. Положим

$$\mathscr{T}' = \{U \cap X'\colon U \in \mathscr{T}\}.$$

(а) Проверьте, что $\mathscr{T}'$ — топология на X'.

(б) Докажите, что $A \subset X'$ замкнуто в X' тогда и только тогда, когда $A = F \cap X'$, где F — замкнутое в X множество.

(в) Покажите, что $[A]_{\mathscr{T}'} = [A]_{\mathscr{T}} \cap X'$ для любого множества $A \subset X'$.

(г) Пусть σ — база топологии $\mathscr{T}$. Докажите, что $\sigma' = \{X' \cap U\colon U \in \sigma\}$ — база топологии $\mathscr{T}'$.

59. Пусть X — топологическое пространство и X' — его замкнутое подмножество. Тогда каждое замкнутое множество в подпространстве X' замкнуто и в X.

60. Если X' — открытое подпространство пространства X, то каждое открытое в X' множество открыто в X.

61. Пусть X — топологическое пространство и X' — его подпространство. Покажите, что если выполняется одно из следующих условий:

(а) X — T_0-пространство;

(б) X — T_1-пространство;

(в) X — хаусдорфово пространство;

(г) X — регулярное пространство,

то тому же условию удовлетворяет и пространство X'.

62. Докажите, что замкнутое подпространство нормального пространства является нормальным пространством.

63. Каковы пространства X, обладающие свойством: если $A \subset X$ и A всюду плотно в X, то $A = X$?

64. Всюду плотное подпространство T_1-пространства без изолированных точек само не имеет изолированных точек.

65. Пусть $(X, \mathscr{T})$ — топологическое пространство, $B \subset X$ и $\tilde{\mathscr{T}}$ — B-усиление топологии $\mathscr{T}$. Покажите, что

(а) $U \in \tilde{\mathscr{T}}$ в том и только в том случае, если $U = (V \cap B) \cup W$ для некоторых $V \in \mathscr{T}$, $W \in \mathscr{T}$;

(б) окрестности множества $A = X \setminus B$ в $(X, \tilde{\mathscr{T}})$ содержат его окрестность в $(X, \mathscr{T})$.

66. Приведите пример счетного хаусдорфова нерегулярного пространства.

67. Теоретико-множественное объединение цепи топологий образует базу их топологического объединения.

68. Пусть $\mathscr{C}$ — цепь топологий на множестве X и $\mathscr{T}^*$ — объединение всех топологий, принадлежащих $\mathscr{C}$. Докажите, что если $(X, \mathscr{T})$ для каждого $\mathscr{T} \in \mathscr{C}$ — пространство без изолированных точек, то и $(X, \mathscr{T}^*)$ — пространство без изолированных точек.

69. Пусть $\mathscr{C}$ — семейство топологий на множестве X и $\mathscr{T}^*$ — их объединение. Тогда $(X, \mathscr{T}^*)$ регулярно, если $(X, \mathscr{T})$ регулярно для каждого $\mathscr{T} \in \mathscr{C}$ *).

70. Пусть $\mathscr{C}$ — семейство топологий на X и $\mathscr{T}^*$ — их объединение. Тогда пространство $(X, \mathscr{T}^*)$ естественно гомеоморфно некоторому подпространству топологического произведения $\Pi\{(X, \mathscr{T})\colon \mathscr{T} \in \mathscr{C}\}$.

71. Пусть $(X, \mathscr{T})$ — хаусдорфово пространство без изолированных точек. Покажите, что существует хаусдорфова топология $\mathscr{T}^*$ на X такая, что (а) $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$; (б) в $(X, \mathscr{T}^*)$ нет изолированных точек; (в) если $\mathscr{T}'$ — топология на X и $\mathscr{T}' \supset \mathscr{T}$, $\mathscr{T}' \neq \mathscr{T}$, то в $(X, \mathscr{T}')$ есть изолированная точка **).

*) По поводу аналитических утверждений для случая T_4-пространств и хаусдорфовых пространств см. задачу 5 гл. II.

**) Любую хаусдорфову топологию со свойствами (б) и (в) называют максимальной топологией (ср. сноску на стр. 70).

72. Приведите пример топологий $\mathscr{T}$ и $\mathscr{T}'$ на некотором множестве X, из которых первая регулярна, а вторая — нет, для которых $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$.

73. Пусть $(X, \mathscr{T})$ — регулярное пространство без изолированных точек. Покажите, что существует регулярная топология $\mathscr{T}^*$ на X, для которой (а) $\mathscr{T}^* \supset \mathscr{T}$; (б) в $(X, \mathscr{T}^*)$ нет изолированных точек и (в) если $(X, \mathscr{T}')$ — регулярное пространство без изолированных точек и $\mathscr{T}' \supset \mathscr{T}^*$, то $\mathscr{T}' = \mathscr{T}^*$ *).

74. Если $\mathscr{T}$ — максимальная или максимальная регулярная топология на X и X_1, X_2 — всюду плотные в $(X, \mathscr{T})$ множества, то $X_1 \cap X_2 \neq \Lambda$.

§ 2. Кардинальнозначные характеристики пространств

Говорят, что *точечная мощность* семейства γ множеств пространства X не превосходит кардинального числа τ, если для каждого x мощность множества всех элементов семейства γ, содержащих x (в качестве элемента), не превосходит τ. Если точечная мощность семейства не превосходит $\aleph_0$, его называют *точечно счетным*. Если каждая точка содержится лишь в конечном семействе элементов, его называют *точечно конечным*.

Пусть X — пространство и Y — его подпространство. Семейство $\mathscr{B}$ открытых в X множеств называется *внешней базой* пространства Y в пространстве X, если для каждого $y \in Y$ и каждой окрестности G точки y в пространстве X существует $V \in \mathscr{B}$ такое, что $x \in V \subset G$. Заметьте, что внешняя база пространства Y в X совсем не то же самое, что определяющая система окрестностей множества Y в X (см. стр. 53). *Внешний вес* пространства Y в X — это минимум мощностей внешних баз этого пространства в X.

Существенные особенности, хорошо передаваемые языком кардинальных чисел, имеют симметризуемые топологии. *Симметрика* d на множестве X — это такая неотрицательная вещественнозначная функция, определенная на множестве всех неупорядоченных пар элементов X, что $d(x, y) = 0$ в том и только в том случае, если $x = y$. Ясно, что каждая метрика является симметрикой, но обратное, разумеется, не верно. С любой симметрикой d, заданной на множестве X, связывается однозначно топология $\mathscr{T}_d$ на X, описываемая так: множество $F \subset X$ замкнуто в том и только в том случае, если $d(y, F) > 0$ для всех $y \in X \setminus F$. При этом $d(x, F) = \inf\{d(y, z): z \in F\}$. Конечно, следует проверить, что

*) Регулярная топология, удовлетворяющая условиям (б) и (в), называется *максимальной регулярной* топологией. Это понятие не следует путать с понятием максимальной топологии. Максимальная регулярная топология (так, как мы ее определили), вообще говоря, может не быть максимальной. Вопрос о существовании максимальной топологии, являющейся регулярной, разрешен только в самое последнее время П. Малыхиным.

$\mathscr{T}_d$ — топология. Про топологию $\mathscr{T}_d$ говорят, что она *порождена* симметрикой d. Всякая топология на X, которая порождается некоторой симметрикой, называется *симметризуемой* топологией; само пространство при этом называется *симметризуемым*.

При изучении симметризуемых пространств полезно общее понятие *секвенциального замыкания* множества A в пространстве X. Это есть совокупность пределов в X всех сходящихся последовательностей, которые можно составить из элементов множества A. Множества, которые совпадают со своими секвенциальными замыканиями, называются *секвенциально замкнутыми*.

75. Если в покрытие γ пространства X можно вписать покрытие мощности τ, то γ содержит подпокрытие X мощности $\leqslant \tau$.

76. Если ξ — открытое покрытие пространства X, $\mathscr{B}$ — какая-нибудь база этого пространства и $\mathscr{B}_\xi = \{U \in \mathscr{B}$: существует $G \in \xi$, для которого $U \subset G\}$, то и $\mathscr{B}_\xi$ — база пространства X.

77. Докажите, что из любого открытого покрытия пространства X со счетной базой (или даже со счетной сетью) можно выделить счетное покрытие (финальная компактность X). Докажите аналогичное утверждение для случая любой мощности.

78. В T_1-пространстве X никакое семейство множеств не может служить базой двух различных точек.

79. Пусть X — T_1-пространство, x — его неизолированная точка, $\mathscr{B}$ — база пространства X в x и γ — конечное семейство открытых множеств. Тогда $\mathscr{B} \setminus \gamma$ — тоже база в точке x.

80. Если X — T_1-пространство, γ — точечно конечное семейство открытых множеств, причем каждый элемент семейства γ содержит по крайней мере две точки, и $\mathscr{B}$ — база пространства X, то $\mathscr{B}' = \mathscr{B} \setminus \gamma$ — база пространства X.

81. Если X — T_1-пространство и точка $x \in X$ имеет в X базу, состоящую из конечного числа элементов, то x изолирована.

82. Если каждый элемент базы точки x в пространстве X содержит не менее двух точек, то точка x неизолированная.

83. Эквивалентны ли для произвольного хаусдорфова пространства условия:

(а) в X есть счетное всюду плотное множество;

(б) в X есть счетная база?

84. Приведите пример счетного хаусдорфова пространства без счетной базы.

85. Докажите, что мощность произвольной дизъюнктной системы P непустых открытых множеств сепарабельного пространства не превосходит $\aleph_0$.

86. Докажите, что всякое упорядоченное сепарабельное связное топологическое пространство имеет счетную базу.

87. Верно ли, что если каждое счетное подмножество топологического пространства замкнуто в нем, то это пространство дискретно?

88. Покажите, что топологическое пространство $(X, \mathscr{T}_\xi)$, где X — бесконечное множество, а ξ — сингулярный ультрафильтр на X (см. стр. 20 и задачу 3 гл. II), никогда не имеет счетной базы.

89. Покажите, что пространство $(X, \mathscr{T}_\xi)$, определенное в задаче 3 гл. II, сепарабельно в том и только в том случае, если существует счетное подмножество A множества X, принадлежащее ξ.

90. Если каждая окрестность множества A в пространстве X пересекается с фиксированным множеством $B \subset X$, то $|B| \cap A \neq A$.

91. Если характер множества A в пространстве X равен τ и каждая окрестность множества A пересекается с фиксированным множеством $B \subset X$, то существует $C \subset B$ такое, что $|C| \leqslant \tau$ и $[C] \cap A \neq A$.

92. Приведите пример хаусдорфова пространства, в котором характер некоторой точки не равен ее псевдохарактеру (см. стр. 57).

93. Пусть X — топологическое пространство, Y — его замкнутое подпространство, $F \subset X$ и γ — определяющее семейство окрестностей множества F в X. Тогда $\gamma' = \{U \cap Y: U \in \gamma\}$ — определяющее семейство окрестностей множества $\Phi = F \cap Y$ в пространстве Y.

94. Если Y — замкнутое подпространство пространства X и $F \subset X$, $\Phi = F \cap Y$, то $\chi(\Phi, Y) \leqslant \chi(F, X)$.

95. Пусть $(X, \prec)$ — вполне упорядоченное множество, обладающее наибольшим элементом x_m и наделенное порядковой топологией. Пусть, кроме того, на $I(x_m)$ вполне упорядочение $\prec$ минимально. Тогда характер пространства X в точке x_m равен $c|X|$ (см. стр. 29).

96. Для произвольного топологического пространства X и любой его точки x имеют место соотношения:

$$c(X) \leqslant s(X) \leqslant a(X) \leqslant w(X)$$

и

$$l(x, X) \leqslant \chi(x, X) \leqslant w(X).$$

97. Пусть X — топологическое пространство и X' — его подпространство. Как связаны $s(X)$ и $s(X')$, $a(X)$ и $a(X')$, $c(X)$ и $c(X')$, $l(X)$ и $l(X')$?

98. Вес и плотность дискретного пространства равны его мощности.

99. Если X — пространство веса τ, то вес любого подпространства пространства X не превосходит τ.

100. Если $\mathscr{E}$ — предбаза топологии $\mathscr{T}$ на X и $|\mathscr{E}| \geqslant \aleph_0$, то вес пространства $(X, \mathscr{T})$ не превосходит мощности $\mathscr{E}$.

101. Пусть X — топологическое пространство веса τ. Докажите, что из любой базы σ этого пространства можно выделить базу мощности τ. Покажите, что для сетей аналогичное утверждение не верно.

102. Если $\mathscr{B}$ — база (или π-база — см. стр. 54) пространства X и U — открытое в X множество, то существует семейство $\mathscr{E}^* \subset \mathscr{B}$ попарно не пересекающихся множеств такое, что

$$\bigcup\{V: V \in \mathscr{E}^*\} \subset U \subset [\bigcup\{V: V \in \mathscr{E}^*\}].$$

103. Приведите пример нерегулярного хаусдорфова пространства со счетной базой.

104. Рассмотрим полуинтервал $[0, 1)$ числовой прямой. Введем в $[0, 1)$ следующую топологию: все полуинтервалы $[\alpha, \beta)$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $\alpha < \beta \leqslant 1$, по определению, образуют базис этой топологии. Полученное топологическое пространство обозначим через X^*. Докажите последовательно следующие свойства этого пространства:

1) X^* — T_4-пространство;
2) X^* регулярно;
3) X^* удовлетворяет первой аксиоме счетности;
4) X^* сепарабельно;
5) X^* наследственно финально компактно, т. е. любое его подпространство финально компактно (см. стр. 57—58);
6) X^* совершенно нормально (см. стр. 58);
7) X^* не имеет счетной базы;
8) X^* неметризуемо.

105. Пусть X наследственно финально компактно и каждому $\alpha \in T(\omega_1)$ (см. 91 гл. I) поставлено в соответствие замкнутое в X множество $F(\alpha)$ таким образом, что $F(\alpha_2) \subset F(\alpha_1)$ при $\alpha_2 \prec \alpha_1$. Тогда существует $\alpha_0 \in T(\omega_1)$, для которого $F(\alpha_0) = F(\alpha)$ при всех $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$.

106. Пусть X — топологическое пространство, τ — кардинальное число. Тогда следующие условия равносильны:

(а) для каждого $A \subset X$ и любой точки $x \in [A]$ существует $A' \subset A$ такое, что $x \in [A']$ и $|A'| \leqslant \tau$;

(б) для каждого незамкнутого множества $A \subset X$ существует точка $y \in [A] \setminus A$ и множество $A' \subset A$ такое, что $y \in [A']$ и $|A'| \leqslant \tau$.

107. Секвенциальное пространство имеет счетную тесноту.

108. Каждое ли хаусдорфово пространство счетной тесноты секвенциально?

109. Каждое ли хаусдорфово секвенциальное пространство является пространством Фреше — Урысона?

110. Пусть топология пространства X порождается симметрикой d и A — замкнутое в X множество. Тогда если x — неизолированная в A точка, то $d(x, A \setminus \{x\}) = 0$.

111. Если топология пространства X порождена симметрикой d, $x \in X$ и $\xi = \{x_n : n \in N^+\}$ — последовательность точек множества X такая, что $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, то ξ сходится к x.

112. Если топология пространства X порождена симметрикой d, то X — секвенциальное пространство.

113. Пусть $X = \{x_{nm} : n \in N^+, m \in N^+\}$ — какое-нибудь бесконечное счетное множество, элементы которого взаимно однозначно перенумерованы всевозможными парами положительных целых чисел, $Y = \{y_n : n \in N^+\}$ — бесконечное счетное множество, не пересекающееся с X, а 0 — какой-нибудь объект, не принадлежащий $X \cup Y$. Положим $Z = \{\theta\} \cup Y \cup X$ и определим $d(z', z'')$ для всех z', $z'' \in Z$ следующим образом:

(а) если $z' = z''$, полагаем $d(z', z'') = 0$;

(б) если $z' = \theta$ и $z'' \in X$, то $d(z', z'') = 1$;

(в) если $z' = \theta$ и $z'' = y_n$, то $d(z', z'') = \frac{1}{n}$;

(г) если $z' = y_{n'}$ и $z'' = x_{n''m}$, полагаем $d(z', z'') = 1$ при $n' \neq n''$ и $d(z', z'') = \frac{1}{m}$ при $n' = n''$;

(д) если $z' \in X$, $z'' \in X$ и $z' \neq z''$, то $d(z', z'') = 1$;

(е) если $z' \in Y$, $z'' \in Y$ и $z' \neq z''$, то $d(z', z'') = 1$;

(ж) во всех прочих случаях определяем $d(z', z'')$ требованием $d(z', z'') = d(z'', z')$.

Покажите, что

1) d — симметрика на Z;

2) Z — нормальное пространство;

3) пространство Z секвенциально, но не является пространством Фреше — Урысона, не локально бикомпактно, не удовлетворяет первой аксиоме счетности;

4) топология пространства Z является пересечением двух локально бикомпактных метризуемых топологий со счетной базой;

5) пространство Z является образом локально бикомпактного метрического пространства со счетной базой при факторном двукратном отображении (т. е. отображении, при котором прообраз любой точки состоит не более чем из двух точек).

Утверждения 2) — 5) относятся к топологии $\mathcal{T}$ на Z, порожденной симметрикой d.

114. Пусть X — хаусдорфово пространство, топология которого порождена симметрикой d. Тогда следующие условия равносильны:

(а) X удовлетворяет первой аксиоме счетности;

(б) X — пространство Фреше — Урысона;

(в) для каждого $A \subset X$ имеет место $[A] = \{y \in X : d(y, A) = 0\}$;

(г) для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $x \in X$ непременно $\text{Int}\, O_{\varepsilon x} \ni x$, где $O_{\varepsilon x} = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$.

115. Каждое ли сепарабельное хаусдорфово пространство наследственно (см. стр. 61) сепарабельно?

116. Если пространство X обладает счетной π-базой $\mathcal{B}$, то любое всюду плотное в X подпространство сепарабельно.

117. Если пространство X с первой аксиомой счетности сепарабельно, то и любое всюду плотное в X подпространство сепарабельно.

118. Пусть X — пространство, τ — кардинальное число, Y всюду плотно в X и $s(X) \leqslant \tau$, $l(X) \leqslant \tau$. Тогда и $s(Y) \leqslant \tau$.

119. Верно ли, что произведение любых двух нормальных наследственно сепарабельных пространств наследственно сепарабельно?

120. Верно ли, что в каждом вполне регулярном (см. стр. 56) сепарабельном пространстве для любого множества мощности $2^{\aleph_0}$ существует предельная точка?

121. Если X — нормальное сепарабельное пространство и $A \subset X$, $|A| \geqslant 2^{\aleph_0}$, то A имеет в X предельную точку.

122. Пусть X — хаусдорфово пространство и A — всюду плотное в X множество. Тогда $|X| \leqslant 2^{2^{|A|}}$.

123. Если X — хаусдорфово пространство веса $\tau \geqslant \aleph_0$, то $|X| \leqslant 2^{\tau}$.

124. Пусть мощность хаусдорфова пространства X больше, чем $2^{\aleph_0}$. Верно ли, что X непременно содержит дискретное подпространство несчетной мощности?

125. Каждое ли наследственно сепарабельное хаусдорфово пространство имеет мощность, не бо́льшую $2^{\aleph_0}$?

126. Пусть X — хаусдорфово пространство и $M \subset X$, $|M| \leqslant 2^{\aleph_0}$. Тогда существует секвенциально замкнутое (см. стр. 71) множество $\bar{M}$ такое, что $M \subset \bar{M} \subset [M]$ и $|\bar{M}| \leqslant 2^{\aleph_0}$.

127. Пусть X — регулярное пространство. Пусть $s(X) \leqslant \aleph_0$ и $\psi(x, X) \leqslant \aleph_0$ для любой точки $x \in X$. Докажите, что $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$.

128. Всякое ли хаусдорфово (регулярное) пространство X счетного псевдохарактера можно уплотнить на хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности?

129. Пусть X регулярно, $\psi(x, X) \leqslant \aleph_0$ для каждой точки X, $s(X) \leqslant 2^{\aleph_0}$ и $s(X) = \aleph_0$. Докажите, что тогда $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$.

130. Пусть X — регулярное пространство, $\psi(x, X) \leqslant \aleph_0$ для любой точки $x \in X$ и $d(X) = \aleph_0$. Докажите, что для любого $M \subset X$ из $|M| \leqslant 2^{\aleph_0}$ следует, что $|[M]| \leqslant 2^{\aleph_0}$.

131. Если хаусдорфово пространство X с первой аксиомой счетности удовлетворяет условию Суслина, то $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$.

132. Пусть $(X', \mathscr{T}')$ — подпространство регулярного пространства $(X, \mathscr{T})$, всюду плотное в последнем. Тогда семейство $\mathscr{T}' = \{\mathrm{Int}[U]: U \in \mathscr{T}'\}$ является базой топологии $\mathscr{T}$.

133. Пусть X — регулярное пространство, X' — всюду плотное в X подпространство и вес X' равен τ. Тогда и внешний вес пространства X' в пространстве X равен τ (см. стр. 70).

134. Пусть X — регулярное пространство и A — всюду плотное в нем множество. Тогда вес X не превосходит $2^{|A|}$.

135. Если X — регулярное пространство и X' — всюду плотное в X подпространство, то характер любой точки x пространства X' в X' равен ее характеру в X.

136. Всякая база топологического пространства является сетью в нем.

137. В каких пространствах каждая сеть является базой?

138. Семейство всех одноточечных подмножеств произвольного пространства является сетью в нем.

139. Если в пространстве X имеется сеть мощности τ, то и в любом его подпространстве есть сеть мощности, не большей τ.

140. Приведите пример нормального пространства со счетной сетью, но без счетной базы.

141. Пусть X — пространство, X_α для каждого $\alpha \in M$ — подпространство пространства X и $X = \bigcup\{X_\alpha: \alpha \in M\}$. Тогда, если S_α — сеть в X_α, $\alpha \in M$, то $S = \bigcup\{S_\alpha: \alpha \in M\}$ — сеть в пространстве X. Покажите, что для баз аналогичное утверждение, вообще говоря, места не имеет.

142. Если в регулярном пространстве есть сеть мощности τ, то в нем есть сеть мощности, не большей τ, все элементы которой — замкнутые множества.

143. Если пространство X обладает сетью мощности τ, то из любого открытого покрытия этого пространства можно выделить подпокрытие мощности, не большей τ.

144. Если в пространстве X есть сеть мощности τ, все элементы которой — замкнутые множества, то в X каждое замкнутое множество является пересечением такого семейства γ открытых множеств, что $|\gamma| \leqslant \tau$.

145. Верно ли, что в каждом хаусдорфовом пространстве со счетной базой произвольное замкнутое множество является пересечением счетного семейства открытых множеств?

146. Во всяком ли хаусдорфовом пространстве со счетной базой существует счетная сеть из замкнутых множеств?

147. Если в хаусдорфовом пространстве $(X, \mathscr{T})$ есть сеть мощности τ, то на X существует хаусдорфова топология $\mathscr{T}^*$ веса, не превосходящего τ, для которой $\mathscr{T}^* \subset \mathscr{T}$ (ср. с задачей 148 п. II).

148. Пусть $\mathscr{T}$ — хаусдорфова топология на X, обладающая сетью мощности $\tau \geqslant \aleph_0$. Тогда на X существует (хаусдорфова) топология $\mathscr{T}'$ веса, не превосходящего τ, для которой $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$.

149. Хаусдорфово пространство обладает сетью мощности τ в том и только в том случае, если на него уплотняется некоторое хаусдорфово пространство веса τ (см. стр. 54).

150. Хаусдорфово пространство обладает сетью мощности τ в том и только в том случае, если оно является непрерывным образом некоторого хаусдорфова пространства веса τ.

§ 3. Метрические пространства

Множество F топологического пространства X называется *совершенным*, если оно, во-первых, замкнуто в X, во-вторых, *плотно в себе*, т. е. как подпространство пространства X не имеет изолированных точек. Понятно, что множество F пространства X совершенно в том и только в том случае, когда оно замкнуто в X и всякая точка $x \in F$ предельная для F.

Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет *условию Бэра*, если пересечение всякого его счетного семейства открытых всюду плотных множеств всюду плотно. Множество A пространства X называется *множеством* второй *категории*, если дополнительное множество $X \setminus A$ — первой *категории*, т. е. $X \setminus A$ представимо в виде объединения счетного семейства нигде не плотных в X множеств (см. стр. 54).

Определение метрического пространства, а также основные понятия, связанные с метрическими пространствами, даны в теоретическом введении к главе II.

С понятием изометрического отображения тесно соприкасается понятие *сжатого* отображения: отображение $f: (X, \rho) \to (Y, \rho')$ называется *сжатием*, если существует такое действительное число $\alpha < 1$, что $\rho'(fx_1, fx_2) \leqslant \alpha \cdot \rho(x_1, x_2)$ для любых двух точек $x_1 \in X$, $x_2 \in X$.

Понятие непрерывного отображения для случая отображений метрических пространств получает совсем классическое звучание. Отображение f метрического пространства (X, ρ) в метрическое пространство (Y, ρ') непрерывно в точке $x_0 \in X$, если для всякого положительного действительного числа ε существует такое положительное число δ, что $\rho'(fx, fx_0) < \varepsilon$, если только $\rho(x, x_0) < \delta$. Если отображение f метрического пространства (X, ρ) в метрическое пространство (Y, ρ') непрерывно во всякой точке $x \in X$, то оно называется просто *непрерывным*. Наконец, отображение f метрического пространства (X, ρ) в метрическое пространство (Y, ρ') называется *равномерно непрерывным*, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой пары точек x_1 и x_2 из X, для которой $\rho(x_1, x_2) < \delta$, непременно $\rho'(fx_1, fx_2) < \varepsilon$.

Пополнением метрического пространства (X, ρ) называется полное метрическое пространство $(Y, \bar{\rho})$ вместе с изометрическим

вложением $i\colon (X, \rho) \to (Y, \bar{\rho})$ таким, что $\bar{\rho}(y, i(X)) = 0$ для всех $y \in Y$ (последнее означает просто, что $i(X)$ всюду плотно в $(Y, \mathscr{T}_{\bar{\rho}})$). Когда говорят о пополнении, часто отождествляют x с $i(x)$, X с $i(X)$ и пишут $X \subset Y$.

Пусть (X_i, ρ_i), $i \in N^+$, — счетное семейство метрических пространств, диаметр каждого из которых не больше единицы (т. е. $\sup\{\rho_i(x_i, x_i')\colon i \in N^+, x_i \in X_i, x_i' \in X_i\} \leqslant 1$).

Рассмотрим произведение $X = \Pi\{X_i\colon i \in N^+\}$. На множестве X определим метрику следующим образом: если $x = \{x_i\colon i \in N^+\} \in X$, $y = \{y_i\colon i \in N^+\} \in X$, то $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{2^i}$. Легко проверяется, что функция $\rho(x, y)$ на X действительно является метрикой. Метрическое пространство $(\Pi\{X\colon i \in N^+\}, \rho)$, так определенное, называется *метрическим произведением* метрических пространств (X_i, ρ_i) по $i \in N^+$. При этом $\rho(\pi_i x, \pi_i y) \leqslant \rho(x, y)$, где $x \in \Pi\{X_i\colon i \in N^+\}$, $y \in \Pi\{X_i\colon i \in N^+\}$, $\rho_i(\pi_i x, \pi_i y) = \frac{1}{2^i}\rho_i(\pi_i x, \pi_i y)$, $\pi_i\colon \Pi\{X_i\colon i \in N^+\} \to (X_i, \rho_i)$ — проектирование. Поэтому оно является равномерно непрерывным отображением.

151. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда для любой точки $x \in X$, любого $\varepsilon > 0$ и любого $x' \in O_\varepsilon x$ найдется такое $\varepsilon' > 0$, что $x' \in O_{\varepsilon'}x' \subset O_\varepsilon x$.

152. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и семейство $\mathscr{T}_\rho$ его подмножеств определено, как на стр. 61. Докажите, что $\mathscr{T}_\rho$ — топология и что $O_\varepsilon x \in \mathscr{T}_\rho$ для всех $x \in X$ и всех $\varepsilon > 0$.

153. Пусть X — множество; положим $\rho(x, y) = 1$, если $x \in X$, $y \in X$, $x \neq y$, и $\rho(x, x) = 0$ для любого $x \in X$. Покажите, что (X, ρ) — полное метрическое пространство, ограниченное, но не вполне ограниченное. Какие множества в нем открыты?

154. Докажите, что отрезок числовой прямой (с естественной метрикой) вполне ограничен.

155. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Докажите, что множество $U \subset X$ открыто в (X, ρ) тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in U$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $x \in O_\varepsilon x \subset U$.

156. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Покажите, что совокупность всех шаровых окрестностей всевозможных точек из X является базой пространства $(X, \mathscr{T}_\rho)$.

157. Докажите, что топология любого метрического пространства удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа.

158. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $A \subset X$. Покажите, что $x_0 \in [A]$ в том и только в том случае, когда $\rho(x_0, A) = 0$.

159. Докажите, что в метрическом пространстве предел сходящейся последовательности единственен.

160. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Докажите, что точка x_0 является точкой прикосновения множества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда существует последовательность точек $\{x_n\colon n \in N^+\}$ множества A, сходящаяся к x_0.

161. Докажите, что топология любого метрического пространства (X, ρ) удовлетворяет первой аксиоме счетности.

162. Пусть (X, ρ) — произвольное метрическое пространство.

(а) Докажите, что $F \subset X$ — замкнутое множество в том и только в том случае, когда для любого $x \notin F$ непременно $\rho(x, F) > 0$.

(б) Докажите, что F замкнуто тогда и только тогда, когда для любой сходящейся в X последовательности $\{x_n\colon n \in N^+\}$ точек множества F непременно $\lim_{n\to\infty} x_n \in F$.

163. Покажите, что в случае, когда точка x_0 является предельной для множества M метрического пространства (X, ρ), всегда можно выбрать последовательность $\{x_n\colon n \in N^+\}$ попарно различных точек множества M, сходящуюся к точке x_0.

164. Пусть X — метрическое пространство, $A \subset X$, ε — положительное число и $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon$ для любых $x \in A$, $y \in A$. Тогда в X нет ни одной предельной точки для множества A.

165. Покажите, что всякая подпоследовательность сходящейся последовательности метрического пространства также сходится и имеет тот же самый предел. Покажите, что всякая подпоследовательность фундаментальной последовательности также фундаментальна.

166. Докажите, что всякая сходящаяся последовательность метрического пространства (X, ρ) является фундаментальной.

167. Приведите пример метрического пространства и фундаментальной последовательности в нем, не имеющей предела.

168. Докажите, что фундаментальная последовательность $\{x_n\colon n \in N^+\}$ метрического пространства (X, ρ) сходится, если она содержит сходящуюся подпоследовательность.

169. Докажите, что всякое бесконечное ограниченное подмножество прямой имеет на прямой предельную точку.

170. Докажите, что из любой существенной (см. стр. 53) и ограниченной последовательности $\{x_n\colon n \in N^+\}$ точек числовой прямой можно выделить сходящуюся на прямой подпоследовательность из попарно различных точек.

171. Докажите, что любая ограниченная последовательность $\{x_n\colon n \in N^+\}$ действительных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность.

172. Докажите, что числовая прямая с естественной метрикой: $\rho(x, y) = |x - y|$ есть полное сепарабельное метрическое пространство.

173. Пусть R^2 — плоскость. Пусть $x \in R^2$, $y \in R^2$. Положим $\rho(x, y)$ — расстояние от точки x до y — равным длине отрезка, соединяющего точки x и y.

(а) Докажите, что (R^2, ρ) — метрическое пространство.

(б) Докажите, что $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ для $x = \{x_1, x_2\} \in R^2$, $y = \{y_1, y_2\} \in R^2$.

(в) Докажите, что (R^2, ρ) сепарабельно.

(г) Докажите, что (R^2, ρ) полно.

Пусть на плоскости R^2 введена прямоугольная система координат.

(д) Покажите, что следующие множества в R^2 открыты:

1) внутренности всевозможных кругов;

2) внутренности всевозможных прямоугольников.

(е) Докажите, что множества, описанные в пп. 1) и 2) утверждения (д), образуют базу топологии плоскости.

(ж) Положим $\rho^*(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ для точек $x = \{x_1, x_2\} \in R^2$, $y = \{y_1, y_2\} \in R^2$. Докажите, что ρ^* — метрика на R^2, порождающая ту же топологию, что и метрика ρ.

(з) Опишите ε-окрестности точек $x \in R^2$ в метрике ρ^*.

(и) Рассмотрите также метрику $\rho'(x, y)$ на R^2, определенную формулой $\rho'(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, $x = \{x_1, x_2\}$, $y = \{y_1, y_2\}$. Ответьте на вопросы, аналогичные (ж) и (з) для метрики ρ'.

174. Приведите пример множества X и двух различных метрик на нем, приводящих к одной и той же топологии на X. Всякие ли две метрики на данном множестве X приводят к одной и той же топологии?

175. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, а $X_0 \subset X$ — некоторое подмножество. Множество X_0 естественным образом превращается в метрическое пространство — подпространство метрического пространства (X, ρ): $\rho_0(x, y) = \rho(x, y)$, где $x \in X_0$, $y \in X_0$. Докажите, что (X_0, ρ_0) — метрическое пространство (в дальнейшем множество X_0 метрического пространства (X, ρ) с определенной выше метрикой будет называться (метрическим) подпространством метрического пространства (X, ρ)).

176. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и (A, ρ') — его подпространство (т. е. $A \subset X$ и $\rho' = \rho \mid A$ — сужение метрики ρ на A). Покажите, что $(A, \mathscr{T}_{\rho'})$ является топологическим подпространством топологического пространства $(X, \mathscr{T}_\rho)$.

177. Приведите пример двух непересекающихся замкнутых множеств прямой (плоскости), расстояние между которыми равно нулю.

178. Докажите, что любая дизъюнктная система открытых множеств прямой конечна или счетна. Докажите то же самое и для плоскости.

179. Покажите, что объединение любого множества $\mathscr{S}$ интервалов действительной прямой, содержащих фиксированную ее точку, есть снова интервал (быть может, вся прямая, множество вида $(-\infty, a)$ или множество вида $(b, +\infty)$).

180. Доказать, что всякое открытое множество на прямой есть объединение конечного или счетного множества попарно не пересекающихся интервалов, концы которых принадлежат дополнительному замкнутому множеству на прямой (среди этих интервалов могут оказаться один или два бесконечных интервала вида $(-\infty, a)$ или $(a, +\infty)$). Эти интервалы называются *смежными интервалами* к дополнительному замкнутому множеству, или компонентами этого открытого множества.

181. Докажите, что замкнутое множество F действительной прямой совершенно в том и только в том случае, когда его смежные интервалы (см. 180 гл. II) попарно не имеют общих концов.

182. Докажите, что любые два счетных плотных в себе (см. стр. 77) множества прямой, не имеющие наименьшего и наибольшего элементов, подобны между собой (см. стр. 19).

183. Докажите, что пространство рациональных точек отрезка, равно как и пространство иррациональных точек, нульмерно.

184. Докажите, что всякое нигде не плотное множество X на прямой R^1 нульмерно (см. стр. 56).

185. Пусть $[0; 1]$ — отрезок числовой прямой. На нем возьмем два отрезка $\Delta_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\Delta_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ (будем называть эти отрезки отрезками «первого ранга», а лежащий между ними интервал $\delta = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ — интервалом первого ранга). Далее возьмем на каждом отрезке первого ранга по два отрезка второго ранга: $\Delta_{00} = \left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\Delta_{01} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$ и $\Delta_{10} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$, $\Delta_{11} = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Между этими отрезками лежат соответственно интервалы второго ранга $\delta_0 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ и $\delta_1 = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Продолжаем это построение неограниченно. Пусть построены 2^n отрезков n-го ранга $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ (индексы $i_1, \ldots, i_n$ принимают значение 0 или 1). Разделим каждый отрезок $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$ на три равных части; два крайних отрезка $\Delta_{i_1 \ldots i_n 0}$ и $\Delta_{i_1 \ldots i_n 1}$ назовем отрезками $(n+1)$-го ранга, а лежащий между ними интервал назовем интервалом $(n+1)$-го ранга.

Обозначим через Π_n объединение всех отрезков ранга n. Рассмотрим $C = \bigcap\{\Pi_n : n \in N^+\}$. Множество C называется *канторовым совершенным множеством* или *канторовым дисконтинуумом* (счетного веса).

(а) Докажите, что Π_n — замкнутое множество на отрезке $[0, 1]$.

(б) Докажите непустоту и замкнутость на $[0, 1]$ множества C.

(в) Докажите, что сумма длин всех интервалов всевозможных рангов равна длине всего отрезка $[0, 1]$.

(г) Докажите, что C — совершенное множество.

(д) Докажите, что C имеет мощность континуума.

(е) Докажите нигде неплотность множества C на $[0, 1]$.

186. Докажите, что замкнутое (метрическое) подпространство полного метрического пространства является полным метрическим подпространством.

187. Докажите, что метрическое пространство (X, ρ) полно в том и только в том случае, когда любая убывающая счетная последовательность $\{F_i : i \in N^+\}$ непустых замкнутых в (X, ρ) множеств, для которых $\operatorname{diam} F_i \leqslant \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$, имеет непустое пересечение (при этом такое пересечение состоит из одной точки). Приведите пример полного метрического пространства, для которого существует убывающая счетная последовательность непустых замкнутых множеств с пустым пересечением.

188. Докажите, что метрическое пространство (X, ρ) полно тогда и только тогда, когда любая убывающая последовательность замкнутых шаров, радиус которых стремится к нулю, имеет непустое пересечение.

189. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, а M — его подпространство с метрикой ρ', индуцированной метрикой ρ. Докажите, что M замкнуто в $(X, \mathscr{T}_\rho)$, если (M, ρ') полно.

190. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Положим $\rho^*(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$.

(а) Докажите, что ρ^* — метрика на X, приводящая к той же топологии, что и метрика ρ.

(б) Покажите, что диаметр метрического пространства (X, ρ^*) не больше единицы.

(в) Покажите, что (X, ρ^*) — полное пространство, если (X, ρ) полное.

191. Покажите, что в любом метризуемом пространстве можно ввести ограниченную метрику, совместимую с его топологией.

192. Докажите, что полное метрическое пространство (X, ρ) гомеоморфно полному ограниченному метрическому пространству.

193. Пусть (X_i, ρ_i), где $i \in N^+$,— метрические пространства; $\operatorname{diam} X_i \leqslant 1$. Рассмотрим произведение $X = \prod\{X_i : i \in N^+\}$ множеств X_i. Пусть $x = \{x_i\} \in X$, $y = \{y_i\} \in X$. Положим $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{2^i}$. Докажите, что ρ есть метрика на X и что диаметр пространства (X, ρ) не превосходит единицы.

194. Докажите, что тихоновское произведение счетного множества метризуемых пространств всегда метризуемо.

195. Докажите, что тихоновское произведение счетного множества пространств, гомеоморфных числовой прямой, метризуемо (и имеет счетную базу).

196. Метрическое произведение счетного множества полных ограниченных (одной константой) метрических пространств полно.

197. Покажите, что тихоновское произведение счетного множества пространств, гомеоморфных полным метрическим пространствам, само гомеоморфно полному метрическому пространству.

198. Точками *евклидова пространства* R^n являются всевозможные последовательности из n действительных чисел. Пусть $x = (x_i) \in R^n$, $y = (y_i) \in R^n$. Положим $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

(а) Покажите, что (R^n, ρ) — метрическое пространство.

(б) Докажите его сепарабельность.

(в) Докажите его полноту.

199. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две фундаментальные последовательности метрического пространства (X, ρ). Образуем последовательность $\{z_m\}$, где $z_m = x_n$, если $m = 2n - 1$, и $z_m = y_n$, если $m = 2n$. Тогда последовательность $\{z_m\}$ фундаментальна в том и только в том случае, когда $\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$.

200. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, а $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — две его фундаментальные последовательности. Докажите, что последовательность действительных чисел $\alpha_n = \rho(x_n, y_n)$ сходится. Предел этой последовательности называется *расстоянием* данных двух фундаментальных последовательностей метрического пространства (X, ρ).

201. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

Две фундаментальные последовательности из (X, ρ) называются ρ-эквивалентными, если их отклонение (см. 200 гл. II) равно нулю. Докажите, что указанное отношение ρ-эквивалентности в множестве всех фундаментальных последовательностей метрического пространства (X, ρ) есть отношение эквивалентности (т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно). Отношение ρ-эквивалентности разбивает все множество фундаментальных последовательностей на попарно не пересекающиеся классы по отношению ρ-эквивалентности; их множество обозначается через ρX, а класс последовательности $\{x_n\}$ обозначается через $|\{x_n\}|$.

202. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство. Докажите, что для любых двух точек $\xi \in (X, \rho)$, $\eta \in (X, \rho)$ и любых последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $x_n \in (X, \rho)$, $y_n \in (X, \rho)$,

$n = 1, 2, \ldots$, для которых $\lim x_n = \xi$, $\lim y_n = \eta$, непременно $\rho(\xi, \eta) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$.

203. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, а ρX — множество всех классов ρ-эквивалентности его фундаментальных последовательностей. Положим $\widetilde{\rho}(\xi, \eta) = \widetilde{\rho}(\{x_n\}, \{y_n\})$, где $\widetilde{\rho}(\{x_n\}, \{y_n\})$ — отклонение двух фундаментальных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, для которых $|\{x_n\}| = \xi$, $|\{y_n\}| = \eta$. Докажите, что $(\rho X, \widetilde{\rho})$ — полное метрическое пространство, содержащее в качестве всюду плотного подмножества изометрический образ метрического пространства (X, ρ).

204. Пусть (X', ρ') и (X'', ρ'') — два пополнения метрического пространства (X, ρ). Докажите, что существует изометрическое отображение $f: (X', \rho') \to (X'', \rho'')$, $f(X') = X''$, для которого $fx = x$, если $x \in X$.

205. Докажите, что пополнение $(\rho X, \widetilde{\rho})$ вполне ограниченного метрического пространства (X, ρ) также вполне ограничено.

206. Пусть X — метризуемое пространство, а ρ_1 и ρ_2 — две метрики на X, совместимые с его топологией. Скажем, что $\rho_1 \ll \rho_2$, если всякая последовательность пространства X, фундаментальная в метрике ρ_1, фундаментальна и в метрике ρ_2. Докажите, что $\rho_1 \ll \rho_2$ в том и только в том случае, когда существует такое непрерывное отображение $f: \rho_1 X \to \rho_2 X$ пополнения $\rho_1 X$ по метрике ρ_1 в пополнение $\rho_2 X$ по метрике ρ_2, что $fx = x$ при всех $x \in X$.

207. Докажите, что сжатое отображение f полного метрического пространства (X, ρ) в себя всегда имеет единственную неподвижную точку, т. е. такую точку $x_0 \in X$, что $fx_0 = x_0$.

208. Приведите пример полного метрического пространства и его изометрического отображения в себя, не имеющего ни одной неподвижной точки.

209. Докажите, что всякое сжатое отображение метрического пространства непрерывно.

210. Приведите пример неполного метрического пространства и его сжатого отображения в себя, не имеющего неподвижной точки.

211. Докажите, что всякое замкнутое в метризуемом пространстве множество A имеет тип G_δ.

212. Докажите, что любое метризуемое пространство нормально.

213. Докажите, что для метризуемого пространства X следующие условия эквивалентны:

1) X сепарабельно;
2) X имеет счетную базу;
2′) X имеет счетную μ-базу;
3) X финально компактно.

214. Докажите, что метризуемое пространство X сепарабельно в том и только в том случае, когда оно удовлетворяет условию Суслина.

215. Докажите, что для метризуемого пространства X следующие условия эквивалентны:

1) X — пространство со счетной базой;
2) X наследственно сепарабельно *);
3) всякое дискретное подпространство $X_0 \subset X$ счетно;
4) всякое замкнутое дискретное подпространство $X_0 \subset X$ счетно;
5) X удовлетворяет условию Суслина.

216. Докажите, что вес метризуемого пространства всегда равен его плотности, индексу компактности и π-весу (см. стр. 57).

217. Докажите, что вес любого метризуемого пространства равен его числу Суслина, а также верхней грани мощностей замкнутых дискретных подпространств пространства X.

218. Пусть X — нульмерное сепарабельное метрическое пространство. Покажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует счетное дизъюнктное покрытие о этого пространства открыто-замкнутыми множествами диаметра, меньшего ε.

219. Пусть X_0 — связное подмножество пространства X. Докажите, что множество $[X_0]$ также связно.

220. Пусть X — топологическое пространство, а $\{M_\alpha: \alpha \in A\}$ — система всех связных подмножеств, каждое из которых содержит точку $x_0 \in X$. Докажите, что множество $M = \bigcup\{M_\alpha: \alpha \in A\}$ связно, замкнуто и содержит любое связное подмножество пространства X, содержащее точку x_0.

221. Докажите, что образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

222. Отрезок связен (по отношению к обычной топологии).

223. Докажите, что множество A, лежащее на прямой l, связно в том и только в том случае, если вместе с каждыми своими двумя точками оно содержит весь отрезок, их соединяющий.

224. Перечислите, с точностью до гомеоморфизма, все связные подмножества прямой. Сколько их?

225. Всякий связный компакт, лежащий на прямой, есть либо пустое множество, либо точка, либо отрезок.

226. Выясните, какие из следующих пространств гомеоморфны, какие нет и почему:

1) отрезок числовой прямой;
2) полуинтервал числовой прямой;
3) интервал числовой прямой;
4) числовая прямая;
5) окружность.

---

*) То есть каждое его подпространство сепарабельно.

227. Докажите, что образ отрезка числовой прямой при открытом отображении в хаусдорфово пространство есть или отрезок, или точка.

228. Докажите, что прямая не гомеоморфна n-мерному евклидову пространству при $n \geqslant 2$.

229. Докажите, что дополнение до произвольного счетного подмножества n-мерного евклидова пространства, где $n \geqslant 2$, связно.

230. Докажите, что обычный отрезок имеет базу из связных множеств.

231. Укажите два негомеоморфных компактных подпространства обычной плоскости, произведения которых на отрезок гомеоморфны.

Можно ли найти такие компакты на прямой?

232. Покажите, что полное метрическое пространство может быть гомеоморфно неполному метрическому пространству.

233. Пусть метризуемое пространство X метризуемо полной метрикой. Докажите, что всякое его открытое подмножество метризуемо полной метрикой.

234. Пусть X — метризуемое полной метрикой пространство, а множество $M \subset X$ имеет в X тип G_δ. Докажите, что подпространство M гомеоморфно некоторому полному метрическому пространству.

235. Пусть Y — подпространство хаусдорфова пространства X, всюду плотное в X. Тогда если Y метризуемо полной метрикой, то Y — множество типа G_δ в X.

236. Пусть X — метризуемое полной метрикой пространство. Докажите, что подпространство $M \subset X$ гомеоморфно полному метрическому пространству в том и только в том случае, когда оно является множеством типа G_δ в X (теорема Александрова — Хаусдорфа).

237. Докажите, что пространство иррациональных точек отрезка или прямой гомеоморфно полному метрическому пространству.

238. Докажите, что всякое метризуемое полной метрикой пространство X обладает свойством Бэра (см. стр. 77).

239. Покажите, что метризуемое полной метрикой пространство X нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных в нем подмножеств.

240. Докажите, что пространство рациональных чисел числовой прямой не гомеоморфно никакому полному метрическому пространству.

241. Покажите, что σ-дискретное (т. е. пространство, представимое в виде объединения своих дискретных подпространств) полное метрическое пространство X имеет всюду плотное множество изолированных точек.

242. Может ли счетное полное метрическое пространство (X, ρ) не содержать изолированных точек?

243. Может ли в полном метрическом пространстве (X, ρ) счетное (или даже конечное) подмножество быть множеством второй категории и при каких условиях?

244. Докажите, что любое сепарабельное метрическое пространство X имеет мощность, не большую мощности континуума.

245. Точкой *бэровского пространства* $B(\aleph_0)$ является всякая последовательность $x = \{n_k\colon k \in N^+\}$ натуральных чисел n_k. Пусть $x = \{n_k\colon k \in N^+\}$ и $y = \{m_k\colon k \in N^+\}$ — две точки бэровского пространства $B(\aleph_0)$. Положим $\rho(x, y) = \frac{1}{i(x, y)}$, где $i(x, y) = \min\{k\colon n_k \neq m_k\}$ и $\rho(x, y) = 0$, если $n_k = m_k$ для всех $k \in N^+$.

(а) Докажите, что $(B(\aleph_0), \rho)$ — метрическое пространство.

(б) Докажите полноту этого метрического пространства.

(в) Положим $U_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \{x = \{n_i\} \subset B(\aleph_0)\colon n_1 = n_1, \ldots, n_k = n_k\}$. Докажите, что множество $U_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ есть шаровая окрестность радиуса $\frac{1}{k}$ всякой своей точки, т. е. для любой точки $x = \{n_i\} \in U_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ непременно $U_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \{x' = \{n_i'\} \subset B(\aleph_0)\colon \rho(x, x') < \frac{1}{k}\}$. Множества вида $U_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ называются *интервалами Бэра*.

(г) Докажите, что интервалы Бэра не только открыты в $B(\aleph_0)$, но и замкнуты.

(д) Докажите, что интервалы Бэра образуют базу топологии метрического пространства $B(\aleph_0)$.

(е) Докажите, что вес пространства $B(\aleph_0)$ равен $\aleph_0$.

(ж) Докажите, что два различных интервала Бэра либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом.

246. Пусть W — некоторое множество мощности τ. Через $B(\tau)$ обозначим множество всевозможных последовательностей $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ элементов $\xi_1 \in W, \ldots, \xi_n \in W, \ldots$. Итак, всякая последовательность $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots\}$: $\xi_1 \in W, \ldots, \xi_n \in W, \ldots$, есть точка в $B(\tau)$.

Пусть $x = \{\xi_n\} \subset B(\tau)$, $y = \{\eta_n\} \in B(\tau)$. Положим $\rho(x, y) = \frac{1}{k(x, y)}$, где $k(x, y) = \min\{n\colon \xi_n \neq \eta_n\}$.

(з) Покажите, что $(B(\tau), \rho)$ — метрическое пространство (в дальнейшем это пространство будет называться *бэровским пространством веса* τ).

(и) Положим $U_{\xi_1^0 \ldots \xi_k^0} = \{x = \{\xi_i\} \in B(\tau)\colon \xi_1 = \xi_1^0, \ldots, \xi_n = \xi_n^0\}$. Покажите, что множества вида $U_{\xi_1^0 \ldots \xi_k^0}$ открыто-замкнуты в $B(\tau)$ и являются шаровыми окрестностями всякой принадлежащей им точки (эти множества называются интервалами Бэра).

(в) Покажите, что множества вида $U_{i_1} \dots {}_{i_n}$ образуют базу топологии $D(\tau)$. Докажите, что $w(D(\tau)) = \tau$.

(г) Покажите, что любые два интервала Бэра или не пересекаются, или один из них содержится в другом.

247. Покажите, что пространство $B(\tau)$ (см. 246 гл. II) полно.

248. Докажите, что бэровское пространство $B(\aleph_0)$ гомеоморфно тихоновскому произведению счетного множества дискретных счетных пространств.

249. Точкой гильбертова пространства l^2 является всякая последовательность $x = \{x_n\}$ действительных чисел, для которой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ сходится.

(а) Докажите, что $x + y = \{x_n + y_n\}$ принадлежит l^2, если $x = \{x_n\} \in l^2$, $y = \{y_n\} \subset l^2$.

(б) Положим $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, где $x = \{x_n\} \in l^2$, $y \in l^2$. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ сходится.

(в) Докажите, что функция (x, y), $x \subset l^2$, $y \in l^2$, удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения; т. е. $(x, y) = (y, x)$; $(x, x) \geqslant 0$ и $(x, x) = 0$ в том и только в том случае, если все координаты точки x равны нулю; $(x, y + y') = (x, y) + (x, y')$; $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$, где λ — произвольное действительное число.

(г) Покажите, что $\rho(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}$, где $x = \{x_n\} \in l^2$, $y = \{y_n\} \in l^2$, — метрика в l^2.

250. Докажите, что гильбертово пространство (а) полно, (б) сепарабельно.

251. Пусть A — дискретное пространство мощности τ, $P = [0, 1]$ — полуинтервал с обычной топологией, $P \times A$ — тихоновское произведение и 0 — объект, не принадлежащий множеству $P \times A$. Через $Ku(\tau)$ обозначим тогда множество $(P \times A) \cup \{0\}$ с метрикой, определенной следующими условиями:

1) если $z_1 \in P \times A$ и $z_1 = (r, a)$, то $\rho(z_1, 0) = r$;

2) если $z_1, z_2 \in P \times A$ и $z_1 = (r_1, a_1)$, $z_2 = (r_2, a_2)$, то $\rho(z_1, z_2) = |r_1 - r_2|$, когда $a_1 = a_2$, и $\rho(z_1, z_2) = r_1 + r_2$, когда $a_1 \neq a_2$. Проверьте, что $Ku(\tau)$ связное полное метрическое пространство веса τ (такое пространство будем называть *связным континуумом мощности* τ).

252. Докажите, что евклидово пространство R^m и гильбертово пространство l^2 имеют счетную базу.

253. Докажите, что куб Q^n в евклидовом пространстве R^n вполне ограничен.

254. Докажите, что ограниченное подмножество конечномерного евклидова пространства вполне ограничено.

255. Покажите, что если метрическое пространство (X, ρ) хотя бы для одного $\varepsilon > 0$ имеет конечную ε-сеть, то оно ограничено.

256. Покажите, что (метрическое) подпространство вполне ограниченного метрического пространства само вполне ограничено.

257. Если метрическое пространство (X, ρ) при некотором $\varepsilon > 0$ обладает конечной ε-сетью s, то каждое подпространство A пространства (X, ρ) обладает конечной 2ε-сетью при том же $\varepsilon > 0$.

258. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $\{A_i : i \in N^+\}$ — последовательность множеств в X, причем для каждого $i \in N^+$ в A_i существует конечная $\frac{1}{i}$-сеть. Тогда $A = \bigcap \{A_i : i \in N^+\}$ — вполне ограниченное множество.

259. Пусть X — метрическое пространство и $\{A_i : i \in N^+\}$ — монотонное неубывающее семейство подмножеств множества X (т. е. $A_i \subset A_{i+1}$ при всех $i \in N^+$). Тогда $\operatorname{diam}(\bigcup \{A_i : i \in N^+\}) = \sup \{\operatorname{diam} A_i : i \in N^+\}$.

260. Метрическое пространство (X, ρ) вполне ограничено в том и только в том случае, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие этого пространства замкнутыми множествами диаметра, не большего ε.

261. Докажите, что вполне ограниченное метрическое пространство (X, ρ) сепарабельно, имеет счетную базу и финально компактно.

262. Докажите, что метрическое пространство (X, ρ) не вполне ограничено тогда и только тогда, когда существует такое $\varepsilon > 0$ и бесконечное множество $A \subset X$, что $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon$ для любых $x \in A$, $y \in A$, $x \neq y$.

263. Докажите, что метрическое пространство (X, ρ) вполне ограничено тогда и только тогда, когда из всякой последовательности $\{x_n\}$ (мы пишем опять $\{x_n\}$ вместо точного $\{x_n : n \in N^+\}$) точек этого пространства можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

264. Пусть (X_i, ρ_i) — вполне ограниченные метрические пространства диаметра, не большего единицы. Докажите, что метрическое произведение (X, ρ) этих пространств тоже вполне ограничено.

265. Приведите пример ограниченного, но не вполне ограниченного множества в гильбертовом пространстве.

266. Пусть (X, ρ) и (Y, μ) — два метрических пространства. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ непрерывно относительно порожденных на X и Y метриками ρ и μ топологий в том и только

в том случае, когда для любой сходящейся последовательности $\{x_n\}$ точек из X последовательность $\{y_n\} = \{fx_n\}$ также сходится и $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$.

267. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и подмножество $A \subset X$ произвольно. Докажите неравенство $\rho(x, A) - \rho(y, A) \leqslant \rho(x, y)$.

268. Пусть A — произвольное подмножество метрического пространства (X, ρ).

(а) Докажите непрерывность функции $f(x) = \rho(x, A)$, $x \in X$.

(б) Докажите непрерывность функции $\rho(x, y) = \rho(x, y)$ как функции двух переменных $x \in X$, $y \in X$, что означает следующее: если $x_0 \in X$, $y_0 \in X$ — произвольные фиксированные точки, а $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное действительное число, то существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $|\rho(x_0, y_0) - \rho(x, y)| < \varepsilon$, когда $\rho(x_0, x) < \delta(\varepsilon)$ и $\rho(y_0, y) < \delta(\varepsilon)$.

269. Пусть R^1 — числовая прямая. Постройте график функции $f(x) = \rho(x, A)$ для случая, когда 1) A есть отрезок числовой прямой; 2) A есть интервал числовой прямой; 3) A — множество всех рациональных точек прямой; 4) A — множество всех иррациональных точек прямой; 5) A совпадает с канторовым совершенным множеством, построенным на отрезке $[0, 1]$ (см. 185 гл. II).

270. Докажите, что отображение f метрического пространства (X, ρ) на метрическое пространство (Y, ρ') непрерывно тогда и только тогда, когда для любой точки $x_0 \in X$ и любого множества $A \subset X$, для которых $\rho(x_0, A) = 0$, непременно $\rho'(fx_0, fA) = 0$.

271. Покажите, что всякое изометрическое отображение метрического пространства (X, ρ) на метрическое пространство (Y, ρ') есть гомеоморфизм.

272. Пусть X — прямая (плоскость) с естественной метрикой. Существует ли изометрия X на собственную часть?

273. Докажите, что евклидово пространство R^2 (т. е. плоскость) содержит изометрический образ любого метрического пространства, состоящего не более чем из трех точек.

274. Покажите, что гильбертово пространство l^2 не является универсальным для всевозможных метрических пространств, состоящих из четырех точек (в смысле изометрического вложения), т. е. существует метрическое пространство, состоящее из четырех точек, которое не изометрично никакому множеству, лежащему в гильбертовом пространстве.

275. Пусть f — отображение метрического пространства (X, ρ) в метрическое пространство (Y, ρ') и число $\varepsilon > 0$ таково, что для каждого $\delta > 0$ существуют точки $x' \in X$ и $x'' \in X$, для которых $\rho(x', x'') < \delta$, но $\rho'(fx', fx'') \geqslant \varepsilon$. Тогда верно хотя бы одно из следующих двух утверждений:

I) Существует такое $x \in X$, что, каково бы ни было $\delta > 0$, найдутся $x' \in X$ и $x'' \in X$, для которых $\rho(x', x) < \delta$, $\rho'(fx', fx'') > \varepsilon$ и $\rho'(fx', a) < \frac{\varepsilon}{2}$.

II) Каково бы ни было конечное множество $A \subset Y$, существует $\delta > 0$ такое, что если $\rho(x', x'') < \delta$ и $\rho'(fx', fx'') > \varepsilon$, то $\rho'(fx', A) > \frac{\varepsilon}{3}$ и $\rho'(fx'', A) > \frac{\varepsilon}{3}$.

276. Отображение f метрического пространства (X, ρ) в метрическое пространство (Y, ρ') равномерно непрерывно тогда и только тогда, когда условие $\varepsilon A \subset X$, $B \subset X$ и $\rho(A, B) = 0$ влечет соотношение $\rho'(fA, fB) = 0$.

277. Пусть f — равномерно непрерывное отображение метрического пространства (X, ρ) на метрическое пространство (Y, ρ'). Покажите, что (Y, ρ') вполне ограничено, если (X, ρ) вполне ограничено.

278. Будет ли всегда ограниченным метрическое пространство (Y, ρ'), являющееся образом ограниченного метрического пространства (X, ρ) при равномерно непрерывном отображении f: $(X, \rho) \to (Y, \rho')$ (сравните с задачей 277 гл. II).

279. Пусть f: $(X, \rho) \to (Y, \rho')$ — равномерно непрерывное отображение полного метрического пространства (X, ρ) на метрическое пространство (Y, ρ'). Обязано ли (Y, ρ') быть полным?

280. Пусть f: $X \to Y$ — равномерно непрерывное топологическое отображение метрического пространства X на полное метрическое пространство Y. Докажите, что X полно. Можно ли в этой задаче отказаться от непрерывности обратного отображения?

§ 4. Непрерывные отображения топологических пространств. Первый круг задач

Пусть ω — разбиение топологического пространства X (см. стр. 59). Подмножество $A \subset X$ называется *насыщенным множеством по разбиению* ω или *отмеченным множеством для разбиения* ω, если A является объединением какого-то числа элементов разбиения ω, т. е. если существует подсистема $\omega' \subset \omega$, для которой $A = \bigcup\{F: F \in \omega'\}$. Аналогично определяется понятие насыщенного или отмеченного множества при отображении. Пусть f: $X \to Y$ — отображение множества X на множество Y. Подмножество $A \subset X$ называется *насыщенным множеством при отображении* f: $X \to Y$ или *отмеченным множеством при отображении* f, если $A = f^{-1}fA$. Пусть f — отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y. Представляет интерес рассматривать открытые отмеченные множества и замкнутые отмеченные множества. Особенно важны непрерывные разбие-

ния топологических пространств. Разбиение ω пространства X называется *непрерывным*, если для всякого элемента $F \in \omega$ этого разбиения и любой его окрестности UF существует такая окрестность $U'F$ этого же F, что если $F' \in \omega$ и $F' \cap U'F \neq \Lambda$, то $F' \subset UF$. Разбиение ω пространства X непрерывно тогда и только тогда, когда для всякого элемента $F \in \omega$ и любой его окрестности UF существует отмеченная окрестность $U'F$, для которой $U'F \subset UF$ (пожалуйста, докажите).

Пусть ξ — предфильтр на множестве X и f — отображение множества X в топологическое пространство Y. Говорят, что f *непрерывно по* ξ или, что то же самое, непрерывно *вдоль* ξ, если существует точка $y \in Y$, любая окрестность которой содержит целиком образ хотя бы одного элемента из ξ. Множество всех таких точек обозначается через $\lim_\xi f$. Итак, f *непрерывно вдоль* ξ в том и только в том случае, когда $\lim_\xi f \neq \Lambda$. При этом точка $y \in \lim_\xi f$ называется *пределом* f *вдоль* ξ. Скажем, что *последовательность* $\{x_n: n \in N\}$ точек множества X *мажорирует предфильтр* ξ, если для каждого $A \in \xi$ существует такой номер k, что $x_n \in A$ при всех $n \geqslant k$. Отображение f называется *секвенциально непрерывным вдоль* ξ, если последовательность $\{fx_n: n \in N\}$ сходится в Y для каждой последовательности $\{x_n: n \in N\}$, кофинальной ξ.

Непрерывное отображение $f: X \to Y$ называется *псевдооткрытым*, если для всякой точки $y \in Y$ и любой окрестности $Uf^{-1}y$ множества $f^{-1}y$ в X непременно $y \in \operatorname{Int} fU$ (здесь $\operatorname{Int} fU$ — множество всех внутренних точек множества fU относительно Y; см. стр. 52).

281. Пусть $f: X \to Y$ — отображение пространства X в пространство Y. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

1) f непрерывно;

2) для каждого элемента V некоторой базы σ пространства Y полный прообраз $f^{-1}V$ является открытым в X множеством;

3) для любой точки $x \in X$ и произвольной окрестности V точки fx в Y существует окрестность U точки x, для которой $fU \subset V$;

4) $f[A] \subset [fA]$ для любого множества $A \subset X$;

4′) если $x \in X$, $A \subset X$ и $x \delta A$, то $f(x) \delta f(A)$;

5) для любого замкнутого в Y множества Φ множество $f^{-1}\Phi$ замкнуто в X.

282. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение пространства X на пространство Y. Тогда

(а) если A — всюду плотное в X множество, то его образ fA всюду плотен в Y;

(б) если S — сеть в X, то ее образ $fS = \{f(s): s \in S\}$ — сеть в Y (причем, очевидно,— см. задачу 25 гл. I — $|fS| \leqslant |S|$);

(в) покажите, что образ базы в X может не быть базой в Y.

283. Пусть $f: X \to Y$ — отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y, причем известно, что образ каждого всюду плотного в X множества всюду плотен в Y. Следует ли отсюда, что f — непрерывное отображение?

284. Докажите, что пространство $(X, \mathcal{T})$ дискретно в том и только в том случае, если все его отображения в топологические пространства непрерывны.

285. Покажите, что на каждом множестве X существует и единственна такая топология $\mathcal{T}_A$, что любое отображение f любого топологического пространства $(Y, \mathcal{S})$ в пространство $(X, \mathcal{T}_A)$ непрерывно. Опишите эту топологию.

286. Композиция (стр. 16) непрерывных отображений — непрерывное отображение. Докажите аналогичное утверждение для факторных, псевдооткрытых, замкнутых и открытых отображений.

287. Если $f_1: X \to Y$ и $f_2: X \to Y$ — такие непрерывные отображения топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y, что множество $A = \{x \in X: f_1(x) = f_2(x)\}$ всюду плотно в X, то $f_1 = f_2$ на X.

288. Если $Y \subset X$, $[Y] = X$ и f — непрерывное отображение пространства Y в регулярное пространство Z, то f продолжается до непрерывного отображения всего X в Z в том и только в том случае, если, для каждой точки $x \in X$, f продолжается до непрерывного отображения пространства $Y \cup \{x\}$ в Z.

289. Пусть даны две системы пространств $\{X_\alpha: \alpha \in A\}$, $\{Y_\alpha: \alpha \in A\}$ и для каждого $\alpha \in A$ имеется непрерывное отображение $f_\alpha: X_\alpha \to Y_\alpha$. Докажите, что произведение $f: \Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\} \to \Pi\{Y_\alpha: \alpha \in A\}$ отображений f_α непрерывно.

290. Пусть дано топологическое пространство X, семейство топологических пространств $\{Y_\alpha: \alpha \in A\}$ и для каждого $\alpha \in A$ — непрерывное отображение $f_\alpha: X \to Y_\alpha$. Докажите, что диагональное произведение f отображений f_α является непрерывным отображением в тихоновское произведение $\Pi\{Y_\alpha: \alpha \in A\}$ пространств Y_α.

291. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение пространства X в пространство Y и $X \times Y$ — топологическое произведение пространств X и Y. Положим $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y: y = f(x)\}$. Подпространство Γ_f пространства $X \times Y$ называется *графиком* отображения f. Докажите, что

(а) Γ_f как подпространство пространства $X \times Y$ гомеоморфно X;

(б) если Y — хаусдорфово пространство, то Γ_f замкнуто в $X \times Y$.

292. Пусть X — квадрат (вместе с границей), Y — одна из его сторон и f — проектирование X на Y. Покажите, что отображение f непрерывно, открыто и замкнуто (топологии на X и Y обычные).

293. Пусть X_0 — множество точек обычного квадрата без границы, Y_0 — его сторона (т. е. отрезок без концов), $\pi: X_0 \to Y_0$ — естественное проектирование. Тогда π — непрерывное открытое, но не замкнутое отображение (топологии на X_0 и Y_0 обычные). Сравните эту задачу с задачей 292 гл. II.

294. Пусть X — топологическое пространство и $X' \subset X$. Покажите, что топология подпространства на X' — наименьшая из всех топологий на множестве X', относительно которых отображение $i: X' \to X$, описываемое правилом: $i(x) = x$ для всех $x \in X'$, непрерывно.

295. Пусть $f: X \to Y$ — отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y и $Y' = f(X)$, Y' — подпространство пространства Y. Тогда

(а) если $f: X \to Y$ непрерывно, то и $f: X \to Y'$ непрерывно;

(б) если $f: X \to Y$ открыто, то и $f: X \to Y'$ открыто;

(в) если $f: X \to Y$ замкнуто, то и $f: X \to Y'$ замкнуто.

296. Проверьте, что семейство подмножеств разбиения, определенное под названием фактор-топологии (стр. 59), действительно является топологией.

297. Покажите, что фактор-топология на разбиении Z пространства X — это наибольшая (см. стр. 54) из всех топологий на Z, относительно которых естественное проектирование $\pi: X \to Z$ непрерывно.

298. Отображение $f: X \to Y$, где $f(X) = Y$, факторное в том и только в том случае, если для любого $F \subset Y$ равносильны следующие условия: (а) F замкнуто в Y; (б) $f^{-1}F$ замкнуто в X.

299. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение топологического пространства X на T_1-пространство Y и $Z = \{f^{-1}y: y \in Y\}$. Покажите, что Z — разбиение пространства X, которое, будучи наделено фактор-топологией, отображается на пространство Y посредством естественного отображения $\varphi: Z \to Y$, описываемого формулой: $\varphi(f^{-1}y) = y$. Проверьте, что f — факторное отображение в том и только в том случае, если φ — гомеоморфизм.

300. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение и $X' \subset X$, $f' = f \mid X'$, $f': X' \to Y$ — факторное отображение, причем $f'(X') = f(X') = Y$. Тогда и f — факторное отображение.

301. Пусть на множестве X задано семейство топологий $\{\mathcal{T}_\alpha: \alpha \in \mathfrak{M}\}$ и $\mathcal{T} = \bigcap\{\mathcal{T}_\alpha: \alpha \in \mathfrak{M}\}$ (т. е. $U \in \mathcal{T}$ открыты те и только те множества, которые открыты в каждом $(X, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in \mathfrak{M}$). Тогда естественное отображение *) π свободной суммы X_ξ пространств на семействе $\xi = \{(X, \mathcal{T}_\alpha): \alpha \in \mathfrak{M}\}$ на пространство $(X, \mathcal{T})$ является факторным отображением.

*) Если $p \in X_\xi$, то $p \in (i_\alpha X, \mathcal{T}_\alpha)$ для некоторого $\alpha \in \mathfrak{M}$. Тогда полагаем $\pi p = i_\alpha^{-1} p$, где i_α — стандартное вложение $(X, \mathcal{T}_\alpha)$ в свободную сумму X_ξ (см. стр. 58).

302. Пусть на плоскости по отношению к некоторой прямоугольной декартовой системе координат заданы множества: $A = \left\{\left(\frac{1}{n}, k\right): k = 0, 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots\right\}$, $B = \{(0, k): k = 1, 2, \ldots\}$, $C = A \cup B$. Множество C наделяется топологией, индуцированной на плоскости, и S определяется как пространство B-тривиального разбиения *) пространства C. Докажите, что

1) естественное проектирование $\pi: C \to S$ замкнуто;

2) S неметризуемо;

3) отображение π не открыто.

303. Пусть $A = \left\{\left(\frac{1}{n}, k\right): k = 0, 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots\right\}$ — то же множество, что и в задаче 302 гл. II. Через $*$ обозначим некоторый объект, не принадлежащий A, и на множестве $\Phi = A \cup \{*\}$ определим топологии $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ следующим образом. Все точки множества A будут изолированными как по отношению к $\mathcal{T}_1$, так и по отношению к $\mathcal{T}_2$. Положим $U_j = \{*\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, k\right): k = 0, 1, 2, \ldots; n \geqslant j\right\}$, $j = 1, 2, \ldots$. Семейство $\{U_j: j = 1, 2, \ldots\}$ образует базу топологии $\mathcal{T}_1$ в точке $*$. Положим $P_k = \left\{\left(\frac{1}{n}, k\right): n = 1, 2, \ldots\right\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Множество $W \subset \Phi$, $W \ni *$, в том и только в том случае принадлежит $\mathcal{T}_2$, если $P_k \setminus W$ конечно для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$. Докажите, что

1) пространство $(\Phi, \mathcal{T}_2)$ гомеоморфно пространству S, построенному в задаче 302 гл. II;

2) $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$;

3) пространства $(\Phi, \mathcal{T}_1)$, $(\Phi, \mathcal{T}_2)$ не бикомпактны, но нормальны.

304. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y и X' подпространство пространства X, а f' — сужение отображения f на X', $f': X' \to Y$. Проверьте, верны ли следующие утверждения:

(а) f' непрерывно;

(б) если X' замкнуто в X и f замкнуто, то и f' замкнуто;

(в) если X' открыто в X и f открыто, то и f' открыто;

(г) если f — факторное отображение и X' — открытое замкнутое в X множество, то и f' — факторное отображение;

(д) если f — факторное отображение и $fX' = Y$, то и f' — факторное отображение.

305. Пусть $f: X \to Y$ — факторное отображение и $Y' \subset Y$, $X' = f^{-1}Y'$, $f' = f \mid X'$, $f': X' \to Y'$. Тогда

*) То есть единственным неодноточечным элементом которого является замкнутое множество $B \subset C$.

(а) если Y' открыто в Y, то f' — факторное отображение;
(б) если Y' замкнуто в Y, то f' — факторное отображение;
(в) если Y' не открыто и не замкнуто в Y, то f' может не быть факторным отображением.

306. (а) Верно ли, что произведение (см. стр. 17) любого множества факторных отображений является факторным отображением?

(б) Верно ли, что произведение любых двух факторных отображений является факторным отображением?

307. Верно ли, что произведение факторного отображения на тождественное отображение произвольного пространства является факторным отображением?

308. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологического пространства X на топологическое пространство Y. Тогда следующие условия равносильны:

(а) для каждого $Y' \subset Y$ сужение f' отображения f на полный прообраз $X' = f^{-1}Y'$ множества Y' является факторным отображением пространства X' на пространство Y';

(б) для каждой точки $y \in Y$ и каждого открытого в X множества U, содержащего $f^{-1}y$, внутренность $\operatorname{Int} f(U)$ образа множества U содержит y (т. е. f псевдооткрыто);

(в) каковы бы ни были множество $A \subset Y$ и точка $y \in Y$ такие, что $y \in [A]$, непременно $f^{-1}y \cap [f^{-1}A] \neq \Lambda$.

309. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, которое некоторое подпространство X' пространства X отображает на все Y псевдооткрыто.

Тогда и f — псевдооткрытое отображение.

310. (а) Верно ли, что произведение любого множества псевдооткрытых отображений является псевдооткрытым отображением?

(б) Верно ли, что произведение двух псевдооткрытых отображений является псевдооткрытым отображением?

311. Образ пространства Фреше — Урысона при непрерывном псевдооткрытом отображении является пространством Фреше — Урысона.

312. Если $f\colon X \to Y$ — факторное отображение и $f(X) = Y$, то $t(Y) \leqslant t(X)$.

313. Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное псевдооткрытое отображение, $f(X) = Y$, $\Phi \subset Y$ и $F = f^{-1}\Phi$, то для любой определяющей системы ξ окрестностей множества F в X семейство $f^{\cdot}\xi = \{\operatorname{Int} fU\colon U \in \xi\}$ является определяющей системой окрестностей множества Φ в Y.

314. Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное псевдооткрытое отображение, $f(X) = Y$, $\Phi \subset Y$ и $F = f^{-1}\Phi$, то характер множества Φ в Y не превосходит характера множества F в X.

315. Каждое непрерывное замкнутое отображение является факторным.

316. Каждое непрерывное замкнутое отображение является псевдооткрытым.

317. Каждое ли замкнутое отображение одного пространства на другое открыто?

318. Покажите, что естественное проектирование π пространства X на пространство Φ-тривиального *) разбиения X замкнуто для любого замкнутого в X множества Φ.

319. Если $f\colon X \to Y$ — замкнутое отображение и $Y' \subset Y$, $X' = f^{-1}Y'$, $f' = f \mid X'$, то и $f'\colon X' \to Y'$ — замкнутое отображение.

320. Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y замкнуто в том и только в том случае, если $[f(A)] \subset f([A])$ для каждого $A \subset X$.

321. Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$, где $Y = f(X)$, замкнуто тогда и только тогда, когда для любого открытого в X множества U множество $f^{\to}U = \{y \in Y\colon f^{-1}y \subset U\}$ открыто в Y.

322. Факторное отображение f T_1-пространства X на T_1-пространство Y замкнуто тогда и только тогда, когда разбиение $a = \{f^{-1}y\colon y \in Y\}$ непрерывно.

323. Если $f\colon X \to Y$ — замкнутое отображение, $\Phi \subset Y$, $F = f^{-1}\Phi$ и U — произвольное открытое множество в X, содержащее F, то существует открытое в Y множество V, для которого $\Phi \subset V$ и $f^{-1}V \subset U$.

324. Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное замкнутое отображение, причем $f(X) = Y$ и $\Phi \subset Y$, $F = f^{-1}\Phi$ и ξ — определяющая система окрестностей множества F в X, η — определяющая система окрестностей множества Φ в Y. Тогда $f^{\cdot}\eta = \{f^{-1}U\colon U \in \eta\}$ — определяющая система окрестностей F в X и $f^{\cdot}\xi = \{\operatorname{Int} fV\colon V \subset \xi\}$ — определяющая система окрестностей множества Φ в Y.

325. Отображение $f\colon X \to Y$ замкнуто в том и только в том случае, если для каждой точки $y \in Y$ и каждой окрестности U множества $f^{-1}y$ существует такая окрестность V точки y, что $f^{-1}(V) \subset U$.

326. Пусть X — пространство, Φ — замкнутое в X множество и Z_Φ — пространство Φ-тривиального разбиения пространства X, $\pi\colon X \to Z_\Phi$ — естественное проектирование, $z^* = \pi(\Phi) \in Z_\Phi$. Тогда характер пространства Z_Φ в точке z^* равен характеру множества Φ в пространстве X.

327. Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное замкнутое отображение, причем $f(X) = Y$, то характер каждой точки $y \in Y$ равен характеру множества $f^{-1}y$ в X.

328. Отображение $f\colon X \to Y$ хаусдорфова пространства X в хаусдорфово пространство Y непрерывно и замкнуто в том и

*) То есть разбиения, единственным нетривиальным элементом которого является замкнутое в X множество Φ.

только в том случае, если замкнутыми отображениями являются проектирования $p_X\colon \Gamma_f \to X$ и $p_Y\colon \Gamma_f \to Y$, где $\Gamma_f = \{(x, f(x))\colon x \in X\}$ — график отображения, несущий топологию подпространства топологического произведения $X \times Y$.

329. Образ нормального пространства при непрерывном замкнутом отображении является нормальным пространством.

330. Проектирование тихоновского произведения на сомножитель является непрерывным открытым отображением (вообще говоря, не замкнутым).

331. Каждое ли открытое отображение одного пространства на другое замкнуто?

332. Каждое непрерывное открытое отображение является псевдооткрытым и тем более факторным отображением.

333. Проектирование π пространства X на его пространство разбиения Z, наделенное фактор-топологией, тогда и только тогда является открытым отображением, когда для любого открытого множества U пространства X его *насыщение* $\hat{U}$ по разбиению Z (т. е. множество $\bigcup\{P \in Z\colon P \cap U \neq \Lambda\}$) открыто в X.

334. Для того чтобы отображение $f\colon X \to Y$ было открытым, необходимо и достаточно, чтобы образ при f каждого элемента некоторой базы пространства X был открытым в Y множеством.

335. Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$ открыто тогда и только тогда, когда для любого множества $B \subset Y$ имеет место включение: $f^{-1}[B] \subset [f^{-1}B]$.

336. Отображение $f\colon X \to Y$ открыто в том и только в том случае, если $f^{-1}(\mathrm{Fr}(B)) = \mathrm{Fr}(f^{-1}(B))$ для всех $B \subset Y$, где $\mathrm{Fr}(B) = [B] \setminus \mathrm{Int}\, B$ — *граница* множества B в Y.

337. Если $f\colon X \to Y$ — открытое отображение и $Y' \subset Y$, $X' = f^{-1}Y'$, $f' = f \mid X'$, то и $f'\colon X' \to Y'$ — открытое отображение.

338. Произведение любого множества открытых отображений является открытым отображением.

339. Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное открытое отображение пространства X на пространство Y, то вес Y не больше веса X.

340. Если $f\colon X \to Y$ — открытое отображение и $X' \subset X$, $[X' \cap f^{-1}y] = f^{-1}y$ для всех $y \in Y$, то и сужение $f \mid X'\colon X' \to Y$ является открытым отображением.

341. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное открытое отображение, Y — T_1-пространство, $f(X) = Y$, $y \in Y$, $x^* \in f^{-1}y$ и $X' = (X \setminus f^{-1}(y)) \cup \{x^*\}$. Тогда отображение $f' = f \mid X'$, $f'\colon X' \to Y$ тоже открыто.

342. Пусть $f\colon X \to Y$ — взаимно однозначное непрерывное отображение пространства X на пространство Y. Тогда следующие условия равносильны: (а) f — факторное отображение; (б) f открыто; (в) f замкнуто; (г) f — гомеоморфизм.

343. Постройте негомеоморфные топологические пространства X и Y, каждое из которых гомеоморфно подпространству другого.

344. Укажите негомеоморфные топологические пространства X и Y, каждое из которых взаимно однозначно и непрерывно отображается на другое.

345. Пусть $[Y] = X$, где X — T_1-пространство и $\varphi\colon X \to Z$ — непрерывное отображение, сужение которого $\varphi \mid Y\colon Y \to \varphi(Y)$ является гомеоморфизмом. Тогда $\varphi(X \setminus Y) \subset Z \setminus \varphi(Y)$.

346. Пусть Z — пространство какого-нибудь непрерывного разбиения некоторого пространства X. Через Z^1 обозначим подпространство пространства Z, образованное всеми элементами разбиения, состоящими ровно из одной точки пространства X. Положим $X^1 = \{x \in X\colon$ существует $z \in Z^1$, для которого $\{x\} = z\}$. Тогда X^1 как подпространство пространства X гомеоморфно Z^1.

347. Верно ли утверждение, получающееся, если в формулировке задачи 346 гл. II опустить требование непрерывности разбиения?

348*. Пусть $X = X_1 \cup X_2$, где X — топологическое пространство, удовлетворяющее T_1-аксиоме отделимости, X_1, X_2 — его замкнутые непересекающиеся подпространства, A_1 — замкнутое множество, лежащее в X_1; A_2 — замкнутое множество, лежащее в X_2, и f — замкнутое отображение пространства A_1 на пространство A_2. Положим $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$, где $Z_1 = \{\{x\}\colon x \in X_1 \setminus A_1\}$, $Z_2 = \{\{x\}\colon x \in X_2 \setminus A_2\}$ и $Z_3 = \{F_x\colon x \in A_2\}$, где $F_x = \{x\} \cup f^{-1}(x)$ для каждого $x \in A_2$.

Покажите, что

(а) Z — непрерывное разбиение пространства X на замкнутые множества;

(б) естественное проектирование π пространства X на пространство разбиения Z осуществляет гомеоморфизм пространства X_2 на замкнутое подпространство пространства Z.

349. Постройте в классе вполне регулярных пространств факторное двукратное отображение, произведение которого на некоторое тождественное отображение не является факторным.

350. Пусть ξ — предфильтр на множестве X и $f\colon X \to Y$ — отображение в хаусдорфово пространство Y. Тогда $\lim_{\xi} f \mid \leqslant 1$.

351. Приведите пример фильтра ξ и вещественной функции f, заданных на множестве R всех вещественных чисел, таких, что f секвенциально непрерывна вдоль ξ, но не непрерывна вдоль ξ.

352. Пусть ξ — счетно порожденный предфильтр (см. стр. 20) на X и $f\colon X \to Y$ — отображение в хаусдорфово пространство Y. Тогда f непрерывно вдоль ξ в том и только в том случае, если оно секвенциально непрерывно вдоль ξ.

§ 5. Тихоновские произведения

В общей топологии важную роль играет целый ряд понятий, принадлежащих частям теории множеств и относящихся к понятию произведения множеств. Зафиксируем $X = \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — некоторое произведение и $x' \in X$, $x'' \in X$. Положим $H(x', x') = \{\alpha \in A\colon x'_\alpha \neq x''_\alpha\}$ и условимся $H(x', x'')$ именовать различающим множеством (точек x' и x''). Очевидно, $H(x', x'') = H(x'', x')$. Запись: $x \mid B = y \mid B$, где $B \subset A$ и $x \in X$, $y \in X$, означает, что $H(x, y) \subset A \setminus B$. Пусть $y \in X$ и $B \subset A$. Множество $\{x \in X\colon H(x, y) \subset B\}$ назовем B-*оболочкой* точки y. Скажем, что $Y \subset X$ не зависит от $B \subset A$, если из $y \in Y$, $x \in X$ и $H(y, x) = B$ всегда следует, что $x \in Y$. Пусть $P \subset Z \subset X = \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$, f — отображение Z в некоторое множество Y. Скажем, что f не зависит от $B \subset A$ на P, если из $x \in P$, $z \in Z$ и $H(x, z) \subset B$ всегда следует, что $f(x) = f(z)$. Если, кроме того, $P = Z = X$, мы говорим просто, что f не зависит от B. Зафиксируем $B \subset A$ и $y \in X$. Отображение $(B, y)\colon X \to X$, называемое *продолжением* (B, y)-*проектированием*, определяется так: если $x \in X$, $z \in X$, то $z = (B, y)(x)$, если $z_\alpha = y_\alpha$ при всех $\alpha \in B$ и $z_\alpha = x_\alpha$ при всех $\alpha \in A \setminus B$ (иначе: $z = (B, y)(x)$, если $H(x, z) \subset B$ и $H(y, z) \subset A \setminus B$).

Множество $P \subset X$ называется B-*открытым*, если из $x \in P$ и $y \in P$ непременно следует, что $(B, y)(x) \in P$. Пусть τ — кардинальное число. Говорят, что P τ-*сводимо*, если P является B-выпуклым для всех $B \subset A$ таких, что $|B| \leqslant \tau$. Для нас в этом параграфе будет очень важно также понятие Σ_x произведения множеств с центром в заданной точке. Напишем говорить, что мы пользуемся всем арсеналом обозначений и терминов, определенных ранее для произведений множеств, и в случае произведений топологических пространств (см. стр. 16, 18, 58).

С понятием топология произведения теснейшим образом связано понятие топологии поточечной сходимости на множестве $\mathcal{E}(X, Y)$ всех отображений одного топологического пространства X в другое Y. Действительно, $\mathcal{E}(X, Y)$ можно отождествить с Y^X — произведением $|X|$ экземпляров пространства Y. Это произведение берется в естественной топологии произведения (которая, очевидно, не зависит от топологии, заданной на X). Прямое описание возникающей так топологии на $\mathcal{E}(X, Y)$ следующее. Фиксируем произвольно конечное множество $K \subset X$. Для каждого $x \in K$ фиксируем произвольно непустое открытое множество $V_x \subset Y$. Множество $\{f \in \mathcal{E}(X, Y)\colon f(x) \in V_x$ для всех $x \in K\}$ есть произвольный элемент стандартной базы некоторой топологии на $\mathcal{E}(X, Y)$. Эта топология и называется, по понятным причинам, топологией поточечной сходимости. Через $C_p(X, Y)$ обозначается подпространство пространства $\mathcal{E}(X, Y)$, образованное всеми непрерывными отображениями X в Y. Топология этого и других подпространств пространства $\mathcal{E}(X, Y)$ тоже называется топологией поточечной сходимости.

В этом параграфе впервые появляются обобщенные канторовы дисконтинуумы, играющие важную роль и в дальнейшем. Так называется тихоновское произведение произвольного множества дискретных пространств, каждое из которых состоит ровно из двух точек. Если число сомножителей равно τ, возникающий обобщенный канторов дисконтинуум обозначается через D^τ. Корректность этого обозначения ясна. Конечно, если $\tau = \tau'$, то D^τ гомеоморфно $D^{\tau'}$.

Противоположного рода образованием по сравнению с обобщенными канторовыми дисконтинуумами являются произведения с большим числом *связных* двоеточий, называемых также *связными* двоеточиями. Связным двоеточием называется топологическое пространство D_0, состоящее из двух точек (обозначаемых обычно через 0 и 1), открытыми множествами которого являются все D_0, пустое множество и одно из двух одноточечных подмножеств. Мы принимаем, что множество $\{0\}$ открыто, а множество $\{1\}$ не является открытым (зато последнее замкнуто). Тихоновское произведение τ экземпляров связного двоеточия обозначается через I^τ.

353. Приведите пример бесконечного пространства, которое нельзя представить в виде произведения пространств, каждое из которых отлично от него.

354. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — тихоновское произведение топологических пространств и U — произвольное стандартное открытое множество (см. стр. 58), $k(U) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\} \subset A$, $U_{\alpha_i} = \pi_{\alpha_i}(U)$, $\alpha \in A$. Тогда $U = \bigcap\{\pi^{-1}_{\alpha_i} U_{\alpha_i}\colon i = 1, \ldots, s\}$.

355. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in M\}$ — тихоновское произведение, $M = \bigcup\{M_\beta\colon \beta \in L\}$, где $M_{\beta'} \cap M_{\beta''} = \Lambda$ при $\beta' \neq \beta''$, $Y_\beta = \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in M_\beta\}$ — тихоновское произведение и Z_β — некоторое подпространство пространства Y_β для каждого $\beta \in L$. Тогда существует *естественный* гомеоморфизм тихоновского произведения $Z = \Pi\{Z_\beta\colon \beta \in L\}$ на подпространство пространства X, совпадающее с X, если для каждого $\beta \in L$ имеет место $Z_\beta = Y_\beta$.

356. В произведении T_i-пространств для любого сомножителя существует замкнутое подпространство, ему гомеоморфное.

357. Пусть $\{X_\alpha\colon \alpha \in M\}$ — семейство топологических пространств и, для каждого $\alpha \in M$, Y_α — всюду плотное подпространство пространства X_α. Тогда тихоновское произведение $Y = \Pi\{Y_\alpha\colon \alpha \in M\}$ всюду плотно в тихоновском произведении $X = \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in M\}$.

358. Произведение счетного множества сепарабельных пространств сепарабельно.

359. Произведение счетного множества пространств со счетной сетью имеет счетную сеть.

360. Вес тихоновского произведения топологических пространств не меньше веса каждого из сомножителей.

361. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in M\}$ — тихоновское произведение и Y_α — замкнутое подпространство пространства X_α для каждого $\alpha \in M$. Тогда тихоновское произведение $Y = \Pi\{Y_\alpha: \alpha \in M\}$ является замкнутым подпространством пространства X.

362. Пусть, для каждого $\alpha \in A$, X_α — топологическое пространство, Y_α — его подпространство и γ_α — семейство множеств типа G_δ в X_α такое, что $\bigcup\{U: U \in \gamma_\alpha\} = X_\alpha \setminus Y_\alpha$. Пусть, далее, $\tilde{U} = U \times \Pi\{X_{\alpha'}: \alpha' \in A \setminus (\alpha)\}$ для каждого $U \in \gamma_\alpha$ и $\tilde{\gamma}_\alpha = \{\tilde{U}: U \in \gamma_\alpha\}$, $\tilde{\gamma} = \bigcup\{\tilde{\gamma}_\alpha: \alpha \in A\}$. $Y = \Pi\{Y_\alpha: \alpha \in A\}$ и $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ (X и Y — тихоновские произведения). Тогда

1) для каждого $\alpha \in A$ и каждого $U \in \gamma_\alpha$, $\tilde{U}$ — множество типа G_δ в X;

2) $X \setminus Y = \bigcup\{\tilde{U}: \tilde{U} \in \tilde{\gamma}\}$.

363. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in M\}$ — произведение топологических пространств X_α по $\alpha \in M$. Проверьте, что топология произведения — наименьшая из всех топологий на X, относительно которых каждое проектирование $\pi_\alpha: X \to X_\alpha$ непрерывно.

364. 1. Докажите, что связное двоеточие является связным T_0-пространством.

Рассмотрим семейство $\{D_\alpha: \alpha \in A\}$, $|A| = \tau$, пространств D_α, каждое из которых есть связное двоеточие, и их тихоновское произведение $\Pi\{D_\alpha: \alpha \in A\} = D^\tau$.

2. Докажите, что T_0-пространство X имеет $\omega(X) \leqslant \tau$ тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно некоторому подпространству в D^τ.

365. Для любого топологического пространства X и непустого множества A пространство X гомеоморфно диагонали $\Delta = \{z \in X^A: \pi_\alpha(z) = x$ для всех $\alpha \in A\}$, рассматриваемой как подпространство тихоновской степени X^A.

366. В любой степени X^A хаусдорфова пространства X ее диагональ Δ является замкнутым множеством.

367. Если X — хаусдорфово пространство и $\mathcal{E}$ — семейство его подпространств, то $Y = \Delta\{U: U \in \mathcal{E}\}$ — с топологией, индуцированной из X, — гомеоморфно замкнутому подпространству тихоновского произведения $Z = \Pi\{U: U \in \mathcal{E}\}$.

368. Пространство X является T_1-пространством в том и только в том случае, если диагональ Δ в тихоновском произведении $X \times X$ является пересечением некоторого семейства открытых множеств.

369. Пусть $X^2 = X \times X$ — произведение множества X на себя и $\Delta = \{(x, y) \in X \times X: x = y\}$ (т. е. Δ — диагональ). Пусть $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ — две хаусдорфовы топологии на X. Тогда

(а) Δ замкнуто в топологическом произведении $(X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T})$;

(б) если $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}'$, то может оказаться, что Δ не замкнуто в топологическом произведении $(X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T}')$ (приведите пример).

370. Пусть на множестве X заданы две топологии $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$. Покажите, что диагональ $\Delta = \{(x, x): x \in X\}$ замкнута в пространстве $(X, \mathcal{T}_1) \times (X, \mathcal{T}_2)$ в том и только в том случае, если выполняется условие:

(а) для любых $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, существуют $Ox_1 \in \mathcal{T}_1$, $Ox_1 \ni x_1$ и $Ox_2 \in \mathcal{T}_2$, $Ox_2 \ni x_2$ такие, что $Ox_1 \cap Ox_2 = \Delta$.

371. X — хаусдорфово пространство в том и только в том случае, если диагональ Δ квадрата $X \times X$ замкнута в $X \times X$.

372. Если X — бикомпактное T_1-пространство и диагональ Δ обладает счетной определяющей системой окрестностей в произведении $X \times X$, то X — пространство со счетной базой.

373. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ — топологическое произведение. Докажите, что если X_α для каждого $\alpha \in A$ удовлетворяет аксиоме отделимости T_0, T_1, Хаусдорфа или регулярно, то той же аксиоме отделимости удовлетворяет и X.

374. Пространство $D^\tau = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in M\}$, где $X_\alpha = \{0, 1\}$ для каждого $\alpha \in M$ и $|M| = \tau$, содержит дискретное подпространство мощности τ.

375. Пространство D^τ имеет мощность 2^τ и вес τ (здесь $\tau \geqslant \aleph_0$).

376. Докажите, что топологическое произведение $X = \Pi\{D_\alpha: \alpha \in A\}$, где $|A| = \tau \geqslant \aleph_0$ и каждое D_α — конечное дискретное пространство, состоящее более чем из одной точки, гомеоморфно обобщенному канторову дисконтинууму D^τ.

377. Пусть τ — кардинальное число, $\tau \geqslant \aleph_0$, и A — множество мощности 2^τ. Тогда на A существует хаусдорфова топология веса τ.

378. Пространство D^τ взаимно однозначно и непрерывно отображается на пространство I^τ.

379. Если $|M| = \tau \geqslant \aleph_0$ и X_α — неодноточечное пространство веса, не большего τ, для каждого $\alpha \in M$, то вес тихоновского произведения $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in M\}$ равен τ.

380. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ — тихоновское произведение, где $X_\alpha = Y$ для каждого $\alpha \in A$, Y — дискретное пространство мощности $\tau \geqslant \aleph_0$ и $|A| = 2^\tau$. Тогда в X есть всюду плотное множество мощности τ.

381. Пусть $\tau \geqslant \aleph_0$ и $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in M\}$ — тихоновское произведение, причем плотность X_α не больше τ для каждого $\alpha \in M$ и $|M| \leqslant 2^\tau$. Тогда в X есть всюду плотное множество мощности, не превосходящей τ.

382. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in M\}$ — тихоновское произведение, причем в каждом X_α есть счетное всюду плотное множество. Пусть, далее, Y — $\aleph_1$-оболочка некоторой точки $x^* \in X$ (см. стр. 18). Тогда, каковы бы ни были кардинальное число $\tau \geqslant \aleph_1$ и множество $A \subset Y$, для которого $|A| \leqslant 2^\tau$, существует множество $\bar{A} \subset X$ такое, что $|\bar{A}| \leqslant \tau$ и $[\bar{A}] \supset A$.

383. Если $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in M\}$ — тихоновское произведение и в каждом X_α есть счетное всюду плотное множество, то мощность произвольного семейства попарно не пересекающихся непустых открытых в X множеств не превосходит $\aleph_0$ (т. е. $c(X) \leqslant \aleph_0$).

384. Если $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in M\}$ — тихоновское произведение и U — элемент стандартной базы пространства X, то U не зависит от $L = M \setminus C$, где C — некоторое конечное множество.

385. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in M\}$ — тихоновское произведение, X_α сепарабельно для каждого $\alpha \in M$ и $A = [U]$, где U — открытое в X множество. Тогда существует такое счетное множество $C \subset M$, что A не зависит от $L = M \setminus C$.

386. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in M\}$ — тихоновское произведение и f — непрерывное отображение пространства X в регулярное пространство Y.

Докажите, что если каждое X_α сепарабельно и Y — регулярное пространство со счетной базой, то существует такое счетное множество $C \subset M$, что f не зависит от $L = M \setminus C$.

387. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ — тихоновское произведение, $P \subset X$, $B \subset A$. Положим, для всех $x \in X$, $\langle B, y\rangle(x) = z$, где $z_\alpha = y_\alpha$ при всех $\alpha \in B$ и $z_\alpha = x_\alpha$ при всех $\alpha \in A \setminus B$. Отображение $\langle B, y\rangle: X \to X$ называется, по понятным причинам, (B,y)-*проектированием*.

Докажите, что

(а) $\langle B, x\rangle$ — непрерывное отображение, при этом если $y' \in X$ и $y' \in Y$, то $y'_\alpha = y_\alpha$ для всех $\alpha \in A \setminus B$, что эквивалентно равенству $\langle B, x\rangle(y') = \langle B, x\rangle(y)$ для любого $x \in X$;

(б) если $\langle B, x\rangle(y') = \langle B, x\rangle(y)$, то $\langle B, x'\rangle(y') = \langle B, x'\rangle(y)$ для любого $x' \in X$;

(в) для любых $x \in X$, $y \in X$ $\langle B, y\rangle\langle B, x\rangle = \langle B, y\rangle$;

(г) если $y' \in |P|$ и $P' = \langle B, y'\rangle(P)$, то $y' \in |P'|$;

(д) если $y' \in |P|$ и $y'' \in X$, $y''_\alpha = y'_\alpha$ при всех $\alpha \in A \setminus B$, то $y'' \in [P']$, где $P' = \langle B, y''\rangle(P)$.

388. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in M\}$ — тихоновское произведение, $Z \subset X$ — его подпространство, $f: Z \to Y$ — непрерывное отображение в хаусдорфово пространство Y, $B \subset Z$, $L \subset M$ и Z является L-выпуклым.

Докажите, что если f не зависит на B от L, то f не зависит от L на $[B]$.

389. Пусть Y — хаусдорфово пространство. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in M\}$ — тихоновское произведение сепарабельных пространств X_α, $Z \subset X$ — его подпространство и $f: Z \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда для каждой точки $x \in Z$ существуют множество $A_x \subset Z$ и множество $C_x \subset M$ такие, что (а) $f(A_x) = f(x)$; (б) A_x не зависит от множества $L_x = M \setminus C_x$; (в) $|C_x| \leqslant |\mathcal{P}|$, где $\mathcal{P}$ — произвольно фиксированное семейство открытых в Y множеств, для которого $\{f(x)\} = \bigcap\{V: V \in \mathcal{P}\}$.

390. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in M\}$ — тихоновское произведение, где каждое X_α, $\alpha \in M$, — пространство со счетной сетью (стр. 55), $Z \subset X$ — $\aleph_1$-выпуклое подпространство пространства X, f — непрерывное отображение пространства Z на хаусдорфово пространство Y, $B \subset Y$ и каждая точка $y \in B$ является множеством типа G_δ в Y (т. е. $\psi(y, Y) \leqslant \aleph_0$).

Какова бы ни была тогда точка $z^* \in Z$, найдется тогда счетное множество $C \subset M$, для которого образ при f некоторого счетного подмножества C-оболочки точки z^* в Z (см. стр. 100) содержится в всюду плотен в B.

391. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in M\}$ — произведение компактов X_α (т. е. метризуемых бикомпактов или, что то же самое, бикомпактов со счетной базой — см. 257 гл. III) и либо $X' = \Sigma_{x_1}$ произведения пространств X_α с центром в некоторой точке $x^* \in X$, либо $X' = X$.

Пусть задано непрерывное отображение $f: X' \to Y$ и множество $Y' \subset Y$, где Y — хаусдорфово пространство, $f(X') = Y$ и характер пространства Y в каждой точке $y \in Y'$ не превосходит $\aleph_0$.

Тогда $[Y']$ — компакт.

392. Тихоновское произведение несчетного множества прямых не нормально.

393. Пусть X_α, $\alpha \in A$, — семейство метризуемых полных метрик пространств и $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ — их топологическое произведение. Докажите, что $\aleph_1$-оболочка любой точки $x \in X$ в X является нормальным пространством.

394. Пусть X_α, $\alpha \in A$, — несчетное семейство сепарабельных метризуемых пространств и $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ — их топологическое произведение. Можно ли утверждать, что $\aleph_1$-оболочка произвольной точки $x \in X$ в X — нормальное пространство?

395. Пусть τ — кардинальное число, $\tau \geqslant \aleph_0$, $\{X_t: t \in T\}$ — семейство топологических пространств, $c(X_t) \leqslant \tau$ для каждого $t \in T$. Тогда $c(X) \leqslant 2^\tau$, где $X = \Pi\{X_t: t \in T\}$.

396. Пусть X — T_1-пространство, Y — множество всех неизолированных точек пространства X и $A = X \setminus Y$. Через ψ_x обозначим какое-нибудь минимально вполне упорядоченное множество мощности $\psi(x, X)$ для $x \in Y$. Далее множества A и ψ_x, где $x \in Y$, наделим дискретной топологией.

Докажите, что A гомеоморфно замкнутому множеству в $X^* = X \times \Pi\{\psi_x: x \in Y\}$.

397. Пусть $C_a[0, 1]$ — множество всех непрерывных отображений обычного отрезка $I = [0, 1]$ в себя, наделенное топологией поточечной сходимости (см. стр. 100). Покажите, что (а) $C_a[0, 1]$ не удовлетворяет первой аксиоме счетности; (б) $C_a[0, 1]$ гомеоморфно подпространству тихоновского произведения $2^{\aleph_0}$ экземпляров отрезка $[0, 1]$; (в) каждая точка $C_a[0, 1]$ является множеством типа G_δ.

398. Пусть X и Y — пространства со счетной базой, причем Y регулярно. Покажите, что тогда пространство $C_a(X, Y)$ всех непрерывных отображений X в Y, наделенное топологией поточечной сходимости *), наследственно сепарабельно, наследственно финально компактно и регулярно.

РЕШЕНИЯ

1. Назовем множество $U \subset X$ открытым, если $C(X \setminus U) = X \setminus U$. Семейство всех определенных таким образом открытых множеств обозначим через $\mathscr{T}$. Покажите сами, что $\mathscr{T}$ — искомая топология на X.

2. Утверждения (а) — (ж) доказываются совсем просто. Для примера, докажем (д). Любое открытое в X множество U содержит все точки множества X, за исключением, быть может, конечного числа. Значит, U содержит и все точки множества A, кроме, быть может, конечного числа их. Так как A бесконечно, можно заключить, что U содержит бесконечно много точек из A. Сказанное относится, в частности, к любой окрестности точки x.

3. (а) Так как из $A \subset \xi$ и $X \supset B \supset A$ следует, что $B \in \xi$, объединение любого множества элементов семейства $\mathscr{T}_\xi$ является элементом этого семейства. Если $U \subset \mathscr{T}_\xi$ и $V \in \mathscr{T}_\xi$, и хотя бы одно из множеств U, V пусто, то $U \cap V = \Lambda \in \mathscr{T}_\xi$. Если $U \neq \Lambda$ и $V \neq \Lambda$, то $U \in \xi$ и $V \in \xi$, и так как ξ — фильтр (см. стр. 20), то $U \cap V \in \xi$, откуда $U \cap V \in \mathscr{T}_\xi$. Значит, пересечение любого конечного множества элементов семейства $\mathscr{T}_\xi$ принадлежит $\mathscr{T}_\xi$. По $\Lambda \notin \xi$, а из того, что ξ — фильтр, следует, что $X \in \xi$. Значит, $X \in \mathscr{T}_\xi$. Мы доказали, что $\mathscr{T}_\xi$ — топология на X.

(б) Пусть $x \in X$. Из $X = (X \setminus \{x\}) \cup \{x\}$ и $X \in \xi$ следует, так как ξ — ультрафильтр (см. задачу 128 гл. I), что либо $X \setminus \{x\} \in \xi$, либо $\{x\} \in \xi$. Но соотношение $\{x\} \subset \xi$ невозможно, ибо ультрафильтр ξ свободен (в противном случае было бы $x \in A$ для любого $A \subset \xi$, откуда следовало бы, что $\xi = \{A \subset X: A \ni x\}$). Значит, $X \setminus \{x\} \in \xi$, и тем более $X \setminus \{x\} \in \mathscr{T}_\xi$. Следовательно, множество $\{x\} = X \setminus (X \setminus \{x\})$ замкнуто в $(X, \mathscr{T}_\xi)$.

(в) $\mathscr{T}_\xi \subset \mathscr{T}_\xi$ в силу задачи 2 гл. II.

(г) Пусть x^* — изолированная точка пространства $(X, \mathscr{T}_\xi)$. Тогда $\{x^*\} \in \mathscr{T}_\xi$, а так как $\{x^*\} \neq \Lambda$, то $\{x^*\} \in \xi$. Но тогда ξ — сингулярный ультрафильтр (как мы видели в (б)). Это противоречие означает, что в пространстве $(X, \mathscr{T}_\xi)$ нет изолированных точек.

(д) Если $U \in \xi$ и $y \in X \setminus U$, то $U \cup \{y\} \in \xi$ (так как ξ — фильтр) и, значит, $U \cup \{y\}$ — открытое в $(X, \mathscr{T}_\xi)$ множество. Но $(U \cup \{y\}) \cap (X \setminus U) = \{y\}$, а это означает, что множество $\{y\}$ открыто в подпространстве $X \setminus U$ пространства $(X, \mathscr{T}_\xi)$, т. е. что y — изолированная точка этого подпространства.

---

*) То же заключение и аналогичное доказательство относятся и к бикомпактной открытой топологии на $C[0, 1]$, которой мы в этой книге не рассматриваем (см. Майкл [3], [4], Архангельский [1]).

(е) Пусть $U \in \mathscr{T} \setminus \mathscr{T}_\xi$. Тогда $U \neq A$ и $U \notin \xi$. Так как ξ — ультрафильтр, то $U \cap V = \Lambda$ для некоторого $V \in \xi$. Выберем $y \in U$. Тогда $V \cup \{y\} \supset V$, и потому $V \cup \{y\} \in \xi$. Но $\xi \subset \mathscr{T}_\xi \subset \mathscr{T}$. Значит, $V \cup \{y\} \in \mathscr{T}$. Тогда и $\{y\} = U \cap (V \cup \{y\}) \subset \mathscr{T}$, т. е. y — изолированная в пространстве $(X, \mathscr{T})$ точка.

4. Пусть η — семейство всех окрестностей точки x в X. Тогда $\xi^x = \xi \cup \eta$ — предфильтр на X и x — точка прикосновения для ξ^x (очевидно). Более того, так как $\xi^x \supset \eta$, то ξ^x сходится к x. Примем за ξ любой ультрафильтр на X, содержащий ξ^x (такой ультрафильтр существует — см. 125, 127, 128 гл. I). Так как ξ^x сходится к x и $\xi \supset \xi^x$, то ξ тоже сходится к x.

6. Очевидно, $\mathscr{T}'$ является топологией, а $\mathscr{T}^*$, вообще говоря, не является топологией.

10. Рассмотрим любое множество, содержащее более одного элемента. Наделим его антидискретной топологией. Получившееся пространство искомое.

11. Пусть N — множество всех целых чисел, $N_k = \{n \in N: n \geqslant k\}$ для каждого $k \in N$. Семейство $\mathscr{T} = \{N\} \cup \{\Lambda\} \cup \{N_k: k \in N\}$ является топологией на N. Пространство $(N, \mathscr{T})$ искомое. Действительно, пусть $m \in N$, $n \in N$ и $m \neq n$. Предположим для определенности, что $m < n$. Тогда если $U \in \mathscr{T}$ и $U \ni m$, то $U \supset N_m \ni n$, и потому $n \in [n]$ (значит, $\{n\}$ не замкнуто в $(N, \mathscr{T})$). Но N_n — окрестность точки n, не содержащая m. Следовательно, $(N, \mathscr{T})$ — T_0-пространство.

13. (а) Пусть σ — база, а точка $x \in X$ и ее окрестность Ox произвольны. Найдется подсистема $\sigma' \subset \sigma$, для которой $Ox = \bigcup \{U: U \in \sigma'\}$. Возьмем какое-нибудь $U \in \sigma'$, для которого $x \in U$. Тогда $x \in U \subset Ox$ и $U \in \sigma$. (б) Пусть $H \subset X$ — произвольное открытое множество. Для каждой точки $x \in H$ зафиксируем какое-нибудь $Ux \in \sigma$, для которого $x \in Ux \subset H$. Тогда $H = \bigcup \{Ux: x \in H\}$. Значит, σ — база пространства X.

16. Очевидно, множество U открыто в том и только в том случае, если вместе с каждой точкой $x \in U$ и U содержится вся прямая, проходящая через x параллельно l.

17. Очевидно, это — дискретная топология.

18. Для решения задачи надо воспользоваться определением топологического пространства и формулами де Моргана (см. 3 гл. I).

20. (а) Пусть $[F] = F$. Тогда $X \setminus F = X \setminus [F]$ и для каждой точки $x \in X \setminus F$ можно зафиксировать окрестность Ux такую, что $Ux \cap F = \Lambda$, т. е. $Ux \subset X \setminus F$. Тогда $X \setminus F = \bigcup \{Ux: x \in X \setminus F\}$ и множество $X \setminus F$ открыто, как объединение открытых множеств, а множество $F = X \setminus (X \setminus F)$ замкнуто.

(б) Пусть F — замкнутое множество. Тогда $X \setminus F$ открыто и для произвольной точки x, не принадлежащей множеству F, множество $X \setminus F$ можно рассматривать как окрестность этой точки, не пересекающуюся с F. Значит, из $x \notin [F]$ следует, что $x \in F$, и потому $[F] = F$.

22. (а) Следует из определения точки прикосновения множества A (всякая точка $x \in A$ является точкой прикосновения множества A).

(б) Следует непосредственно из определения точек прикосновения множеств.

(в) Включение $[A_1] \cup [A_2] \subset [A_1 \cup A_2]$ следует из очевидных включений $A_1 \subset A_1 \cup A_2$, $A_2 \subset A_1 \cup A_2$ и свойства (б).

Пусть $x \in [A_1 \cup A_2]$. Предположим, что $x \notin [A_1] \cup [A_2]$. Это означает, что найдется окрестность Ux точки x, для которой $Ux \cap A_1 = \Lambda$ и $Ux \cap A_2 = \Lambda$. Следовательно, $Ux \cap (A_1 \cup A_2) = \Lambda$, т. е. $x \notin [A_1 \cup A_2]$. Получили противоречие.

(г) Включение $[A] \subset [[A]]$ следует из (а) и (б). Пусть $x \in [[A]]$. Тогда всякая окрестность Ux точки x имеет непустое пересечение с множеством $[A]$.

Рассмотрим $x' \in Ox \cap [A]$. Множество Ox является также окрестностью точки x', поэтому $Ox \cap A \neq \Lambda$. Следовательно, $x \in [A]$ и равенство (c) доказано.

24. См. 13 гл. II и определение точки прикосновения множества.

25. Предположим противное — что нашлась точка $x' \in X$, предельная для множества A. Положим $A^* = A \setminus \{x'\}$. Тогда x^* является предельной точкой и для множества A^*. Тем более, $x^* \in [A^*]$. Но $x^* \notin A^*$. Значит, A^* не замкнуто, что противоречит условию.

26. Действительно, если $A \subset B$ и B замкнуто в X, то $[B] = B$, $[A] \subset [B] = B$, $[A]$ — замкнутое множество и $A \subset [A]$ (20, 22 гл. II). Значит, $[A]$ — наименьшее замкнутое в Y множество, содержащее A.

27. Это следует из задачи 26 гл. II.

32. Нет, не выполнен. В качестве X возьмем вещественную прямую с обычной топологией, за A примем множество всех целых (положительных и отрицательных) чисел. Рассмотрим пробазу $\mathcal{B}$ обычной топологии прямой, образованную всеми множествами вида $(x; x+\varepsilon)$ и $(x; x-\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — любое отличное прямой. Тогда для A, $\mathcal{B}$ и X выполнены все условия, приведенные в формулировке задачи, но $[A] = A \neq X$.

33. Действительно, $U \setminus P = U \cap (X \setminus P)$ и $P \setminus U = P \cap (X \setminus U)$.

35. Очевидно, из 1) вытекает 2) (здесь не важно, что X — T_1-пространство). Если 1) не выполняется, зафиксируем окрестность Ox точки x так, чтобы было $|Ox \cap A| \leqslant \aleph_0$. Положим $A' = A \setminus \{x\}$ и $P = Ox \cap A'$ и для каждой точки $y \in P$ зафиксируем окрестность O_y точки x в X, не содержащую y. Положим $V(x) = \bigcap \{O_y : y \in P\} \cap Ox$. Множество $V(x)$ содержит x и, как пересечение конечного семейства открытых множеств, открыто. Имеем $V(x) \cap A' = (Ox \cap A') \cap \bigcap \{O_y : y \in P\} \subset P \cap (A' \setminus P) = \Lambda$. Значит, и условие 2) не выполняется. Итак доказано, что 1) и 2) равносильны.

36. (a) $\Rightarrow$ (в). Зафиксируем для каждой точки $x \in A$ окрестность Ox такую, как в (a). Положим $G = \bigcup \{Ox : x \in A\}$, $F = [A]$ и покажем, что $A = G \cap F$. Очевидно, $A \subset G \cap F$. Пусть $y \in G \cap F$. Зафиксируем $x^* \in A$, для которого $y \in Ox^*$. Так как Ox^* — открытое множество, то из $y \in F = [A]$ следует, что $y \in [A \cap Ox^*]$. Но $[A \cap Ox^*] \cap Ox^* = A \cap Ox^*$ в силу выбора Ox^*. Значит, $y \in A \cap Ox^* \subset A$.

(в) $\Rightarrow$ (а). Пусть $A = \Phi \cap U$, где Φ замкнуто в X, а U открыто в X. Тогда A замкнуто в U в силу определения топологии подпространства. Значит, $Ox = U$ удовлетворяет (а) для всех $x \in A$.

(б) $\equiv$ (в). Положим $U = X \setminus ([A] \setminus A)$. В силу (б) множество U открыто. Очевидно, $U \cap [A] = A$.

(в) $\equiv$ (б). Пусть $A = \Phi \cap U$, где Φ замкнуто в X, а U открыто в X. Множество A открыто в Φ. Поэтому $[A]_\Phi \setminus A = [A]_\Phi \cap (\Phi \setminus A)$ замкнуто в Φ множестве. Но $[A]_\Phi = [A]$, ибо Φ замкнуто в X. Итак, $[A] \setminus A$ замкнуто.

38. Правдоподобной утверждением задачи 37 гл. II.

39. Это следует из задачи 38 гл. II.

40. Пусть X — любое бесконечное множество. Подмножество множества X назовем открытым, если его дополнение до X конечно. Докажите, что эти сказки определяют топологию на X и что X вместе с этой топологией — весьма топологическое пространство (см. 2 гл. II).

41. В T_1-пространствах и только в них — докажите это сами.

42. Ответ — да. Пусть Y_i, где $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ — дискретные топологические пространства, равномощные X, и каждом из которых отмечено по точке $y_i^0 \in Y_i$. Рассмотрим подмножества Y_i^0 топологического произведения $Y = \prod_{i=1}^{\infty} Y_i$, образованное точками, все координаты которых с номерами, большими i, совпадают с соответствующими y_i^0, и положим $Y^0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i^0$. Тогда $Y_i^0 = Y_1 \times \ldots \times Y_i = X^i$, и поэтому $Y^0 = X^\omega$. Кроме того, нетрудно убедиться в том, что Y^0, как подпространство пространства $Y = \prod_{i=1}^{\infty} Y_i$, не имеет изолированных точек. Остается как-нибудь установить взаимно однозначное отображение множества Y^0 на множество X и объявить открытыми в X образы открытых множеств при этом отображении. Полученная топология искомая.

44. Семейство $(Ox : y \notin M)$ очевидным образом строится по индукции — в соответствии с некоторой нумерацией множества M.

45. Предложение доказывается методом от противного.

47. Очевидно, утверждение 1) равносильно утверждению 2), а утверждение 3) равносильно утверждению 4). Если V открыто в X и $V \cap X = G$, то $[X \setminus G]_X \cap V = \Lambda$. Поэтому из 1) следует, что $G \subset V \setminus [X \setminus G]_X$. Но $(V \setminus [X \setminus G]_X) \cap X = G$, поэтому из 1) следует, что $V \setminus [X \setminus G]_X \subset G$. Значит, утверждения 1) и 3) равносильны.

48. Положим $W_1 = \operatorname{Int}[P]$, $W_2 = \operatorname{Int}[Q]$ и $W = W_1 \cap W_2$. Множество P всюду плотно в W_1. Так как W открыто, то $P \cap W$ всюду плотно в W_2. Аналогично, множество Q всюду плотно в W_2 и поэтому $Q \cap W$ всюду плотно в W. Но $P \cap W$ еще и открыто. Поэтому $P \cap W \cap Q \cap W = P \cap Q \cap W$ — всюду плотное в W множество и $[P \cap Q] \supset W = \operatorname{Int}[P] \cap \operatorname{Int}[Q]$. Но тогда и $\operatorname{Int}[P \cap Q] \supset \operatorname{Int}[P] \cap \operatorname{Int}[Q]$ (см. задачу 37 гл. II). С другой стороны, из $P \cap Q \subset [P]$ следует, что $\operatorname{Int}[P \cap Q] \subset \operatorname{Int}[P]$, а из $P \cap Q = [Q]$ следует, что $\operatorname{Int}[P \cap Q] \subset \operatorname{Int}[Q]$. Значит, $\operatorname{Int}[P \cap Q] \subset \operatorname{Int}[P] \cap \operatorname{Int}[Q]$. Обратное включение уже доказано. Значит, $\operatorname{Int}[P \cap Q] = \operatorname{Int}[P] \cap \operatorname{Int}[Q]$.

49. Если V — непустое открытое в X множество и $V \cap F \neq \Lambda$, то $V' = V \cap U$ — тоже непустое открытое в X множество, $V' \subset V$ и $V' \cap F = \Lambda$.

50. Рассмотрим произвольное непустое открытое в X множество O. Найдется непустое открытое множество $O' \subset O$, для которого $O' \cap A = \Lambda$. Тогда никакая точка $x \in O'$ не является точкой прикосновения множества A, следовательно, $O' \cap [A] = \Lambda$. Значит, $[A]$ — нигде не плотное множество.

51. (а) Пусть замкнутое множество $F \subset X$ всюду не плотно. Тогда для любого непустого открытого в X множества O существует непустое открытое множество $O' \subset O$ такое, что $O' \cap F = \Lambda$ и $O \cap (X \setminus F) \supset O' \neq \Lambda$. Значит, $X \setminus F$ всюду плотно в X.

(б) Пусть $X \setminus F$ всюду плотно в X и F замкнуто в X. Тогда для любого открытого в X множества O непременно $O' = O \cap (\Lambda \setminus F) \neq \Lambda$ и открыто в X. Имеем $O' \subset O$ и $O' \cap F = \Lambda$. Следовательно, F нигде не плотно.

(в) Множество рациональных чисел и его дополнение в пространстве вещественных чисел — множество иррациональных чисел — оба всюду плотны в пространстве вещественных чисел (в последнем борелем нетривиальное).

54. Имеем $|Q^1| = \aleph_0$ и $\mathcal{F} \supset \mathcal{T}$. Так как $\mathcal{T}$ — хаусдорфова топология, $\tilde{\mathcal{F}}$ — тоже хаусдорфова топология. Если бы точка x была изолированной в $(Q^1, \tilde{\mathcal{F}})$, то, для некоторой окрестности Ox этой точки в пространстве $(Q^1, \tilde{\mathcal{F}})$, множество $Ox \setminus \{x\}$ было бы всюду не плотно в (Q^1, ρ), что невозможно, ибо открытое множество может быть всюду не плотным, только если оно пусто (28 гл. II). Если бы в $(Q^1, \tilde{\mathcal{F}})$ нашлась неограниченная сходящаяся последовательность (в точке $x^* \in Q^1$), то эта последовательность сходилась бы к этой точке и в $(Q^1, \mathcal{T})$. Но, очевидно, множество таких никуда сходя-

щейся последовательности в $(Q^2, \mathscr{T})$ никак не плотна в $(Q^2, \mathscr{T})$. Тогда $U = Q^2 \setminus A$, где A — множество точек рассматриваемой последовательности, было бы окрестностью точки x^* в пространстве $(Q^2, \tilde{\mathscr{T}})$, не содержащей точек множества A; получили противоречие.

57. (а) Достаточно показать, что объединение $A_1 \cup A_2$ двух канонических замкнутых множеств A_1 и A_2 пространства X есть множество каноническое замкнутое. Из определения следует, что $A_1 = [\operatorname{Int} A_1]$, $A_2 = [\operatorname{Int} A_2]$. Тогда $A_1 \cup A_2 = [\operatorname{Int} A_1] \cup [\operatorname{Int} A_2] = [\operatorname{Int} A_1 \cup \operatorname{Int} A_2]$, т. е. $A_1 \cup A_2$ есть замыкание открытого в X множества $\operatorname{Int} A_1 \cup \operatorname{Int} A_2$. Таким образом, множество $A_1 \cup A_2$ каноническое замкнутое.

(б) Нет, не всегда. Легко придумать два канонических замкнутых множества, пересечение которых есть замкнутое нигде не плотное,— значит, не каноническое множество. На прямой линии или на плоскости можно придумать два канонических замкнутых множества, пересечение которых состоит ровно из одной точки.

(в) Верно, по определению канонического замкнутого множества.

58. X дискретно: если $x \in X$, то $[X \setminus \{x\}] \neq X$, и следовательно, x — изолированная точка.

64. Обозначим через X и X' рассматриваемые пространство и его подпространство соответственно. Если $X \supset U \neq \Lambda$ и U открыто в X, то $U \cap X'$ бесконечно. Действительно, если $P = U \cap X'$ — конечное множество, то оно замкнуто в X, ибо X — T_1-пространство, и потому множество $U \setminus P$ открыто. Но $(U \setminus P) \cap X' = \Lambda$. Из $[X'] = X$ следует теперь, что $U \setminus P = \Lambda$, т. е. что $U = P$. Значит, U — непустое конечное множество. Выбрав $x^* \in U$, мы заключаем, что $U \setminus \{x^*\}$ — конечное и, следовательно, замкнутое в X множество. Поэтому $\{x^*\} = U \setminus (U \setminus \{x^*\})$ — открытое множество, т. е. x^* — изолированная точка пространства X. Получили противоречие.

65. (а) Положим $\mathscr{S}^* = (V \cap B: V \in \mathscr{S})$. Так как $(V_1 \cap B) \cap (V_2 \cap B = (V_1 \cap V_2) \cap B$, то пересечение любого конечного множества элементов из $\mathscr{S}^*$ является элементом $\mathscr{S}^*$. Из соотношения $\bigcup \{V_\alpha \cap B: \alpha \in M\} = B \cap \bigcup \{V_\alpha: \alpha \in M\}$ следует, что объединение любого множества элементов из $\mathscr{S}^*$ является элементом $\mathscr{S}^*$. Кроме того, если $G \in \mathscr{S}^*$ и $U \subset \mathscr{S}$, то $U \cap G \in \mathscr{S}^*$. Отсюда легко следует, что $\{U \cap C: U \in \mathscr{S}, C \in \mathscr{S}^*\}$ — топология на X и что последняя и есть $\tilde{\mathscr{S}}$.

(б) Пусть $U \in \tilde{\mathscr{S}}$ и $U \supset A = X \setminus B$. В силу (а) существуют $W \in \mathscr{S}$, $V \in \mathscr{S}$, для которых $U = (V \cap B) \cup W$. Но $V \cap B \cap A = V \cap B \cap (X \setminus B) = \Lambda$. Значит, $W \supset A$, W — искомая окрестность.

66. Пусть Q — множество всех рациональных чисел, $\mathscr{T}$ — обычная топология на Q, порожденная естественной метрикой, и $\tilde{\mathscr{T}}$ — B-усиление топологии $\mathscr{T}$, где $B = Q \setminus A$ и $A = \left\{\frac{1}{n}: n \in \mathscr{N}\right\}$. Тогда A замкнуто в $(Q, \tilde{\mathscr{T}})$, но каждая окрестность множества A в $(Q, \tilde{\mathscr{T}})$ содержит некоторую окрестность A в $(Q, \mathscr{T})$. Множества вида $O_\varepsilon(0) \cap B$, где $\varepsilon > 0$, образуют базу точки 0 в $(Q, \tilde{\mathscr{T}})$. Очевидно, каждый элемент этой базы пересекается с каждой окрестностью множества A в пространстве $(Q, \mathscr{T})$ и, следовательно, с каждой окрестностью A в $(Q, \tilde{\mathscr{T}})$ (см. также 64 гл. II).

68. Предположим противное. Пусть точка $x^* \in X$ изолированная в $(X, \mathscr{T}^*)$. Тогда существуют конечное семейство топологий $\mathscr{T}_1, \ldots, \mathscr{T}_k \subset \mathfrak{M}$ и их элементов $U_1 \in \mathscr{T}_1, \ldots, U_k \in \mathscr{T}_k$, для которых $\bigcap \{U_i: i = 1, \ldots, k\} = \{x^*\}$ (в силу определения базы объединения топологий — см. стр. 62). Но $\mathfrak{M}$ — цепь, поэтому существует $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$, для которого $\mathscr{T}_i \subset \mathscr{T}_{i_0}$ при всех $i \in \{1, \ldots, k\}$. Тогда $U_1, \ldots, U_k \in \mathscr{T}_{i_0}$ и $\{x^*\} = \bigcap \{U_i: i = 1, \ldots, k\}$ — открытое в $(X, \mathscr{T}_{i_0})$ множество, т. е. x^* — изолированная точка пространства $(X, \mathscr{T}_{i_0})$. Это приводит к противоречию.

69. Пусть x и O^*x — произвольные точка и ее окрестность в пространстве $(X, \mathscr{T}^*)$. Из определения базы топологии $\mathscr{T}^*$ следует, что существуют $U_1 \in \mathscr{T}_1 \in \mathfrak{M}, \ldots, U_k \in \mathscr{T}_k \in \mathfrak{M}$, для которых $x \in \bigcap \{U_i: i = 1, \ldots, k\} \subset O^*x$. Выберем, пользуясь регулярностью пространств $(X, \mathscr{T}_i)$, $i = 1, \ldots, k$, множества $V_i \in \mathscr{T}_i$, для которых $x \in V_i = [V_i]_{\mathscr{T}_i} \subset U_i$. Положим $V = \bigcap \{V_i: i = 1, \ldots, k\}$. Тогда $[V]_{\mathscr{T}^*} \subset [V]_{\mathscr{T}_i} \subset [V_i]_{\mathscr{T}_i} = V_i \subset U_i$ для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$, ибо $\mathscr{T}^* = \mathscr{T}_i$ при $i = 1, \ldots, k$ (см. 48 гл. II). Значит, $x \in V = [V]_{\mathscr{T}^*} \subset \bigcap \{U_i: i = 1, \ldots, k\} = U \subset O^*x$, т. е. окрестность V точки x искомая.

70. Естественный гомеоморфизм определяется так: произвольной точке $x \in X$ ставится в соответствие цель произведения $\Pi \{(X_\mathscr{T}, \mathscr{T}): \mathscr{T} \in \mathfrak{M}\}$, по координатам которой равны x. Ясно, что это отображение взаимно однозначно. То, что оно гомеоморфно, выводится непосредственно из определений объединения топологий и топологии произведения.

71. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ всех хаусдорфовых топологий $\mathscr{T}'$ на X таких, что $\mathscr{T}' \supset \mathscr{T}$ и $(X, \mathscr{T}')$ не имеет изолированных точек. Ясно, что $\mathfrak{M} \neq \Lambda$, ибо $\mathscr{T} \in \mathfrak{M}$. В $\mathfrak{M}$ есть максимальное (в $\mathfrak{M}$) звено вследствие применения максимального элемента (см. стр. 19). Некоторое такое звено обозначим через $\mathfrak{M}^*$. Тогда объединение $\mathscr{T}^*$ топологий, принадлежащих $\mathfrak{M}^*$,— хаусдорфова топология на X (см. 5 гл. II) и в $(X, \mathscr{T}^*)$ нет изолированных точек (см. 68 гл. II). Из максимальности звена $\mathfrak{M}^*$ следует, что $\mathscr{T}^*$ удовлетворяет и условию (в).

72. Топологии, построенные в задачах 54 и 63 гл. II, играют роль полной регулярной топологии по отношению к обычной (евклидовой) топологии рассматриваемых в этих задачах множеств. Последняя регулярна.

73. Эта задача решается аналогично задаче 71 гл. II, со ссылкой на задачи 69, 68 гл. II.

74. Предположим противное. Положим $X_2 = X \setminus X_1$.

$$\mathscr{S}_1 = \{U \cap X_1: U \in \mathscr{S}\}, \quad \mathscr{S}_2 = \{U \cap X_2: U \in \mathscr{S}\}.$$

Пусть $\mathscr{T}'$ — топология на X, базой которой служит семейство $\mathscr{B} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2$. Тогда $\mathscr{T}' \supset \mathscr{T}$ и $\mathscr{T}' \neq \mathscr{T}$, ибо $X_1 \in \mathscr{T}'$, но $X_1 \notin \mathscr{T}$, так как в противном случае множество X_2 не было бы всюду плотно в $(X, \mathscr{T})$. Но $(X_1, \mathscr{S}_1)$ и $(X_2, \mathscr{S}_2)$ — пространства без изолированных точек (см. задачу 64). Так как $(X_1, \mathscr{S}_1)$ и $(X_2, \mathscr{S}_2)$ — подпространства пространства $(X, \mathscr{T}')$ и $X = X_1 \cup X_2$, то мы заключаем, что в $(X, \mathscr{T}')$ нет изолированных точек. Получили противоречие с максимальностью топологии $\mathscr{T}$, ибо топология $\mathscr{T}'$ хаусдорфова (соответственно регулярная), если топология $\mathscr{T}$ хаусдорфова (соответственно регулярная) (см. сноски на стр. 60 и 70).

75. Пусть λ вписано в γ и $|\lambda| \leqslant \tau$. Выберем для каждого $U \in \lambda$ ровно один элемент семейства γ, его содержащий, и обозначим последний через $\varphi(U)$. Тогда $\mu = \{\varphi(U): U \in \lambda\}$ — подпокрытие покрытия γ и $|\mu| \leqslant |\lambda| \leqslant \tau$.

78. Напомним, что, по определению базы в точке, каждый элемент базы должен содержать эту точку. Если $x \neq y$ и γ — база в x, то $X \setminus \{y\}$ — окрестность точки y. Поэтому найдется $U \in \gamma$, для которого $x \in U \subset X \setminus \{y\}$. Но тогда $U \not\ni y$, следовательно, γ не является базой в y.

79. Так как x — неизолированная точка, то γ не является базой X в x. Значит, существует такая окрестность Ox точки x в X, что в γ нет элемента, содержащегося в Ox и лежащего в Ox. Тогда $\mathscr{B}^* = \{U \in \mathscr{B}: x \in U \subset Ox\} \subset \mathscr{B} \setminus \gamma$, при этом $\mathscr{B}^*$ — база X в x. Тем более, $\mathscr{B} \setminus \gamma$ — база X в x.

80. Это следует из задач 78, 79 гл. II.

83. Из (б) всегда следует (а). Однако из (в), вообще говоря, не следует (б) (54, 66, 64 гл. II).

84. Пусть $\varphi = \{X_i: i \in N^+\}$ — семейство попарно не пересекающихся счетных множеств. Положим $X = \bigcup \{X_i: i \in N^+\}$ и $X^* = X \cup \{x^*\}$, где x^* — какой-нибудь объект, не входящий ни в один элемент семейства φ. Точки множества X объявим изолированными, а произвольную окрестность точки x^* определим как множество вида

$$\{x^*\} \cup (\bigcup \{X_i \setminus A_i: i \in N^+\}), \quad \text{где} \quad (A_i: i \in N^+)$$

— произвольная последовательность конечных множеств, $A_i \subset X_i$. Так определенное топологическое пространство X^* в точке x^* не удовлетворяет первой аксиоме счетности. Предположим противное. Пусть $B = \{U_i: i \in N^+\}$ — база в x^*, где

$$U_i = \{x^*\} \cup (\bigcup \{X_j \setminus A_j^i: j \in N^+\}), \qquad i \in N^+.$$

Определим $\overline{A}_j^i$ как какое-нибудь конечное подмножество множества X_j, строго содержащее A_j^i. Тогда

$$\overline{U} = \{x^*\} \cup (\bigcup \{X_j \setminus \overline{A}_j^i: i \in N^+\})$$

— окрестность точки x^*, не содержащая ни одного U_i:

$$U_i \setminus \overline{U} \supset \overline{A}_i^i \setminus A_i^i \neq \Lambda, \quad i \in N^+.$$

Показано, что построенное пространство паракомпактно.

Другое решение. Пусть N — множество рациональных чисел прямой с обычной топологией и N^+ — множество всех целых чисел. Рассмотрим разбиение Σ пространства N, одноэлементными подмножествами которого являются множество N^- всех иррациональных чисел прямой N и все точки множества N. Докажите, что пространство этого разбиения (см. стр. 59) не удовлетворяет в точке $\{N^-\}$ первой аксиоме счетности и паракомпактно. См. также задачу 54 гл. II.

85. Пусть γ — дизъюнктная система открытых в X множеств, а $A = \{a_i: i \in N^+\}$ — счетное всюду плотное множество в X. Выберем для каждого $U \in \gamma$ точку $x(U) \in U \cap A$. Тем самым множество γ взаимно однозначно отображено в счетное множество A, откуда и следует, что $|\gamma| \leqslant \aleph_0$.

86. Пусть A — всюду плотное подмножество топологического пространства X, топология которого порождена порядком $<$. Тогда семейство $\{o_{a_1}, o_{a_2}: a_1, a_2 \in A\}$, где $(a_1, a_2) = \{a \in X: a_1 < a < a_2\}$, является счетной базой топологии X.

87. Нет, не верно. Рассмотрим несчетное множество A, в котором все точки, кроме одной (которую мы обозначим через ∞), изолированные, и среди множеств, содержащих точку ∞, открыты те, дополнение до которых счетно. Полученное топологическое пространство не дискретно, но всякое счетное множество в нем замкнуто.

88. Предположим, что существует последовательность $\eta = (U_\alpha: \alpha < \xi \leqslant N^+)$ покрытий открытых в X множеств, элементы которой образуют базу пространства $(X, \mathcal{T})$. Заметим, что каждое U_α бесконечно — иначе ультрафильтр ξ не был бы счетно-полным (см. 122, 134 гл. I). Выберем как-нибудь $x_0, y_0 \in U_1$, $x_0 \neq y_0$, и предположим, что уже определены $x_i, y_i \in U_i$ для всех $i < k$. Применим теперь ко x_{k-1}, y_{k-1} любые две различные точки множества $U_{k+1} \setminus \bigcup \{x_i, y_i\}: i = 1, \ldots, k\}$. Положим $A = \{x_i: i \in N^+\}$ и $B = \{y_i: i \in N^+\}$. Тогда $A \cap B = \Lambda$. Так как $A \cap U_i \ni x_i$, то имеем: $(X \setminus (X \setminus A)) \cap U_i = A \cap U_i \neq \Lambda$, $i \in N^+$, а это означает, что множество $X \setminus A$ не содержит ни одного U_i. Тем более, $X \setminus A$ не является объединением никакого семейства множеств U_i. Значит, $X \setminus A \notin \xi$ (так как φ — база топологии $\mathcal{T}$). Но $(X \setminus A) \cap U_i \ni y_i$, $i \in N^+$. Следовательно, A нельзя представить в виде объединения какого-либо семейства элементов последовательности φ, т. е. $A \notin \xi$ (так как φ — база). Но тогда $X = A \cup (X \setminus A) \in \xi$. Получилось противоречие, ибо $X \in \xi$.

89. Пусть A — счетное всюду плотное в $(X, \mathcal{T})$ подмножество множества X. Предположим, что $X \setminus A \neq A$. Из $A \cup (X \setminus A) = X \in \xi$ следует, так как ξ — ультрафильтр (см. 138 гл. I), что если $X \setminus A \notin \xi$, то $A \in \xi$. Ничего рассматриваемого условия в этом случае доказывать не надо. Если же $X \setminus A \in \xi$, то $X \setminus A$ — несчетное открытое в $(X, \mathcal{T})$ множество, не содержащее точек множества A, а это противоречит тому, что A всюду плотно в $(X, \mathcal{T})$. Значит, $X \setminus A \notin \xi$.

Докажем достаточность. Пусть A счетно и $A \in \xi$. Если $U \neq \Lambda$ и $U \in \mathcal{T}$, то $U \in \xi$ и, значит, $U \cap A \neq \Lambda$ (см. 138 гл. I — каждый ультрафильтр является центрированной семейством множеств). Этим доказано, что A всюду плотно в пространстве $(X, \mathcal{T})$.

90. В противном случае $U = X \setminus [B]$ — окрестность множества A, не пересекающаяся с B.

91. Зафиксируем определяющую систему $\mathfrak{S}$ окрестностей множества A в X, для которой $|\mathfrak{S}| = \tau$. Для каждого $U \in \mathfrak{S}$ выберем $x(U) \in U \setminus B$ и положим $C = \{x(U): U \in \mathfrak{S}\}$. Тогда $C \subset B$ и $|C| \leqslant \tau$. Из $U \setminus C \ni x(U)$ следует, что каждая окрестность множества A пересекается с C. Значит (задача 90 гл. II), $A \setminus [C] \neq \Lambda$.

92. Годится любое счетное хаусдорфово пространство, не удовлетворяющее в какой-нибудь точке первой аксиоме счетности (см., например, 54 гл. II).

93. Рассмотрим произвольную окрестность G множества $\Phi \cap Y$. Тогда существует открытое в X множество $\bar{G} \subset X$ такое, что $\bar{G} \cap Y = G$. Положим $G^* = \bar{G} \cup (X \setminus Y)$. Тогда G^* открыто в X и $G^* \cap Y = \bar{G} \cap Y = G$. Кроме того, $F \subset (X \setminus Y) \cup (Y \cap F) = (X \setminus Y) \cup \Phi \subset G \cup (X \setminus Y) = G^*$. Следовательно, существует $U^* \in \gamma$, для которого $F \subset U^* \subset G^*$. Тогда $U^* \cap Y \in \gamma'$ и $\Phi \subset U^* \cap Y \subset G$, что и требовалось.

94. Это сразу следует из задачи 93 гл. II.

95. Воспользуйтесь утверждением задачи 106 гл. I и определением порядковой топологии на стр. 62.

96. Следует сопоставить определения, данные на стр. 57.

97. Из определений следует, что всегда $s(X') \leqslant s(X)$, $t(X') \leqslant t(X)$. Но есть примеры, когда $s(X) < s(X')$ (159 гл. II) и $c(X) < c(X')$. Однако $c(X) \geqslant c(X')$, если X' всюду плотно в X.

99. См. задачу 58 гл. II.

100. Совокупность $\overline{\mathfrak{S}}$ всех множеств, представимых в виде пересечения конечного множества элементов семейства $\mathfrak{S}$, является базой топологии $\mathcal{T}$. Но $|\overline{\mathfrak{S}}| = |\mathfrak{S}|$ в силу задачи 36 гл. I.

101. Пусть σ — произвольная база пространства X, а δ — база пространства мощности, равной весу X: $|\delta| = w(X) = \tau$. Заметим, что $|\delta^2| = \tau$, где $\delta^2 = \delta \cdot \delta$ — произведение множества δ на себя. Пару $(V, V') \in \delta^2$ множеств $V \in \delta$, $V' \subset V$ назовем отмеченной, если существует такое $U \in \sigma$, что $V \supset U \supset V'$. Пусть γ — семейство всех отмеченных пар $(V, V) \in \delta^2$. Имеем $\gamma \subset \delta^2$, следовательно, $|\gamma| \leqslant \tau$ (см. 58 гл. II). Каждой отмеченной паре $(V, V') \in \gamma$ поставим в соответствие какой-нибудь один элемент $U_{V, V'} \in \sigma$, для которого

$$V \supset U_{V, V'} \supset V'.$$

Обозначим

$$\sigma^* = \{U_{V, V'}: (V, V') \in \gamma\}.$$

Имеем $|\sigma^*| = |\gamma| \leqslant \tau$. Докажем, что σ^* — база пространства X. Пусть $x \in X$ и окрестность Ox произвольны. Так как δ и σ — базы пространства X, то существуют (13 гл. II) множества $V \in \delta$, $U \in \sigma$, $V \in \delta$, для которых $x \in V \subset U \subset V \subset Ox$. Тогда $(V, V') \in \gamma$, т. е. σ^* является отмеченной парой.

Следовательно, итак паре состоящей из соответствующих множеств $U_{x,y}$, $y \in \mathcal{P}^* \subset \mathcal{P}$, $x \in X$, таких что $x \in V \subset U_{x,y} \subset F \subset Ox$. Отсюда следует, что $\mathcal{P}^*$ — база пространства X мощности, не большей τ. Так как $w(X) = \tau$, то $|\mathcal{P}^*| = \tau$. Первая часть утверждения доказана. Для доказательства второй достаточно рассмотреть отрезок в обычной топологии: из всех, образованных всеми его одноточечными подмножествами, нельзя выделить счетной (ибо отрезок несчетен).

102. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех непустых открытых в X множеств U, для которых $\bigcup \{V: V \in \mathcal{U}\} = U$. Рассмотрим частичное упорядочение $\prec$ множества $\mathcal{P}$ отношением включения: если $\mathcal{U}' \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{U}'' \subset \mathcal{P}$, то $\mathcal{U}' \prec \mathcal{U}''$ равносильно $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}''$. Очевидно, упорядочение $\prec$ на $\mathcal{P}$ индуктивно (см. стр. 18). Поэтому существует (стр. 18) максимальный по отношению $\prec$ элемент $\mathcal{U}^* \in \mathcal{P}$. Тогда $\bigcup \{V: V \subset \mathcal{U}^*\} = U$ (в силу $\mathcal{U}^* \in \mathcal{P}$) и $\bigcup \{V: V \in \mathcal{U}^*\} \supset U$ — в противном случае $W = U \cap (X \setminus \bigcup \{V: V \in \mathcal{U}^*\})$ — непустое открытое множество и существует $V^* \subset \mathcal{P}$, $V^* \neq \Lambda$, для которого $V^* \subset W$. Тогда $V^* \cap V = \Lambda$ для любого $V \in \mathcal{U}^*$, откуда следует, что $V^* \notin \mathcal{U}^*$ и что $\mathcal{U}^{**} = \mathcal{U}^* \cup \{V^*\} \in \mathcal{P}$, $\mathcal{U}^* \prec \mathcal{U}^{**}$, $\mathcal{U}^{**} \neq \mathcal{U}^*$, в противоречии максимальности $\mathcal{U}^*$ в $(\mathcal{P}, \prec)$.

103. Пусть X — множество точек отрезка $[0, 1]$ и A — множество всех точек вида $\frac{1}{n}$, где $n \in N^+$. Кроме множества, открытых в обычной топологии $\mathcal{T}$ отрезка, объявим открытыми все множества вида $U \cup (X \setminus A')$, где $U \in \mathcal{T}$ и $A' \subset A$. Докажем, что тем самым определена топология на X. Эта топология $\mathcal{T}^*$ хаусдорфово больше открытых множеств, чем обычная топология отрезка. Поэтому пространство $(X, \mathcal{T}^*)$ хаусдорфово. Множество A замкнуто в $(X, \mathcal{T}^*)$ и $0 \notin A$, но любая окрестность точки 0 в $(X, \mathcal{T}^*)$ пересекается с любой окрестностью в $(X, \mathcal{T}^*)$ множества A (определяющую систему окрестностей A в $(X, \mathcal{T}^*)$ образуют открытые в обычной топологии отрезка множества, содержащие A; базу точки 0 в $(X, \mathcal{T}^*)$ образуют множества вида $\{a \in [0, 1]: a < \varepsilon$ и $a \notin A\}$, где $\varepsilon > 0$).

104. Свойства 1), 2), 3), 4) устанавливаются очень просто. Из свойств 2 и 5) следует свойство 6) (в силу 200 гл. III). Из свойств 5) и 7) следует свойство 8) (в силу 213 гл. II). Таким образом, осталось доказать свойства 5) и 7).

5) В силу задачи 200 гл. III достаточно показать, что из любой системы γ базисных открытых множеств пространства X^* можно выделить счетную подсистему γ_0, для которой

$$\overline{\bigcup \gamma_0} = \bigcup \{U: U \in \gamma_0\} = \overline{\bigcup \gamma} = \bigcup \{U: U \in \gamma\}.$$

Каждое $U \in \gamma$ есть подинтервал $[\alpha, \beta)$. Поэтому такое U будем обозначать также и через $U_{\alpha\beta}$. Рассмотрим интервал $V(U) = U_{\alpha\beta} \setminus \{\alpha\}$ и систему $\delta = \{V(U): U \in \gamma\}$ этих интервалов. Заметим, что каждое $V(U)$ тоже открыто в X^*. Из системы δ интервалов можно выделить (172, 213 гл. II; 206 гл. III) счетную подсистему δ_0, для которой

$$\overline{\delta_0} = \bigcup \{V(U): V(U) \in \delta_0\} = \overline{\bigcup \delta} = \bigcup \{V(U): V(U) \in \delta\}.$$

Покажем, что множество $A = \overline{\gamma} \setminus \overline{\delta_0}$ счетно. Действительно, если $\alpha_1 \in A$ и $\alpha_2 \in A$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, а $U_{\alpha_1} \in \gamma$, $U_{\alpha_2} \in \gamma$, то, очевидно, $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} = \Lambda$. Тогда для каждой точки $\alpha \in A$ возьмем только одно $U_\alpha \in \gamma$ (α является левым концом полуинтервала U_α) и обозначим систему этих полуинтервалов через γ_1: $\gamma_1 = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$. Система γ_1 дизъюнктна, поэтому, в силу сепарабельности прямой X, счетна, а потому счетно множество A. Рассмотрим теперь систему $\gamma_2 = \{U: V(U) \in \delta_0\}$ и систему $\gamma_0 = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Система γ_0 счетна, $\gamma_1 \subset \gamma$ и $\overline{\gamma_0} = \overline{\gamma}$, что и требовалось доказать.

7) Покажем, что X не имеет счетной базы. Если бы X^* обладало какой-нибудь счетной базой, то некоторая счетная система σ базисных множеств в X^* (системы полуинтервалов $[\alpha, \beta)$) образовывала бы базу в X^* (см. 101 гл. II). Отсюда следовала бы счетность всего множества X^*. Получили противоречие.

Примечание. Таким же образом можно доказать, что никакое непрерывное пространство X^* не имеет счетной базы, а следовательно, в силу свойства 5) и задачи 213 гл. II несепарабельно.

105. Положим $F = \bigcap \{F(\alpha): \alpha \in T(\omega_1)\}$ и $Y = X \setminus F$. Для каждой точки $y \in Y$ существует $\alpha \in T(\omega_1)$ такое, что $y \notin F(\alpha)$. Тогда можно выбрать окрестность O_y, для которой $O_y \cap F(\alpha) = \Lambda$ (так как $F(\alpha)$ замкнуто). Из открытого покрытия $\{O_y: y \in Y\}$ множества Y можно выделить счетное (так как Y финально компактно), обозначим последнее через γ. Тогда для определенного элемента γ для каждого $U \in \gamma$ можно выбрать такое $\alpha(U) \in T(\omega_1)$, что $U \cap F(\alpha(U)) = \Lambda$. Существует $\alpha^* \in T(\omega_1)$, для которого $\alpha(U) < \alpha^*$ при всех $U \in \gamma$, так как $|\gamma| < \aleph_0$ (см. 81 гл. I). Тогда $F(\alpha^*) \subset \bigcap \{F(\alpha(U)): U \in \gamma\}$. Отсюда и из формул де Моргана следует, что $F(\alpha^*) \cap \bigcup \{U: U \in \gamma\} = \Lambda$, т. е. что $F(\alpha^*) \cap Y = \Lambda$. Значит, $F(\alpha^*) = F = \bigcap \{F(\alpha): \alpha \in T(\omega_1)\}$ и $F(\alpha^*) = F(\alpha)$ для всех α, больших α^*.

106. Ясно, что из (а) следует (б). Выведем из (б) утверждение (а). Положим $\bar{A} = \{y:$ существует $A' \subset A$, для которого $y \in [A']$ и $|A'| < \tau\}$ и докажем, что $\bar{A}$ замкнуто. Предположим противное. Тогда, в силу (б), найдутся $y^* \in [\bar{A}] \setminus \bar{A}$ и $A^* \subset \bar{A}$, для которых $|A^*| < \tau$ и $y^* \in [A^*]$. Выберем для каждого $y \in A^*$ множество $A(y) \subset A$ такое, что $y \in [A(y)]$ и $|A(y)| < \tau$ — это возможно в силу определения $\bar{A}$. Положим $A' = \bigcup \{A(y): y \in A^*\}$. Тогда $A' \subset A$, $|A'| < \tau$ и $y^* \in [A']$ — значит, $y^* \in \bar{A}$. Получили противоречие. Следовательно, $\bar{A}$ замкнуто, что доказано (а).

108. Нет. Рассмотрим какое-нибудь счетное хаусдорфово пространство без изолированных точек и без нетривиальных сходящихся последовательностей (54 гл. II). Очевидно, оно искомое.

109. Нет — см. задачу 113 гл. II.

110. Положим $A' = A \setminus \{x\}$. Если $y \notin A'$ и $y \neq x$, то $y \notin A$ и, так как A замкнуто в X, то $d(y, A) \neq 0$. Тем более, $d(y, A') \neq 0$. Если бы было $d(x, A') \neq 0$, то можно было бы заключить, что $d(y, A') \neq 0$ для всех $y \notin A'$, т. е. что A' замкнуто в X. Но тогда $x \notin [A']$, т. е. точка x изолирована в A.

111. Пусть U — любое открытое в X множество, содержащее x. Тогда $P = X \setminus U$ замкнуто и $x \notin P$. Поэтому $d(x, P) > 0$. Выберем номер n^* так, чтобы $d(x_n, x) < d(x, P)$ при всех $n \geq n^*$. Тогда, очевидно, $x_n \in U$ при всех $n \geq n^*$. Значит, ξ сходится к x.

112. Пусть $A \subset X$ и A не замкнуто в X. Тогда существует $x \in [A] \setminus A$, для которого $d(x, A) = 0$. Поэтому существует последовательность $\xi = \{x_n: n \in N^+\}$ точек множества A таких, что $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ при всех $n \in N^+$. Тогда $\lim_{n=\infty} d(x_n, x) = 0$ и, в силу задачи 111 гл. II, последовательность ξ сходится к x. Значит, X секвенциально.

113. Утверждение 1) ясно. Так как $|Z| = \aleph_1$, то достаточно доказать, что Z регулярно. Но, легко видеть, Z имеет базу из открыто замкнутых множеств. Имеем: $\delta(\theta, X) = 1$, но $d(\theta, Y) = 0$ и $d(y_n, X) = 0$ для всех $n \in N^+$. Значит, $\theta \in [Y]$, $Y \subset |Y|$, и потому $\theta \in [X]$. Отсюда из условия задач 112 гл. II и 114 гл. II заключаем, что верно 3) (впрочем, 3) легко доказать и прямым рассуждением — сделайте это). Чтобы доказать 4), определим две метрики на Z: ρ_1 и ρ_2. Полагаем $\rho_1 | (Y \times \{\theta\}) = d | (Y \cup \{\theta\}) \in \rho_1 | (X \cup \{\theta\}) = \delta | (X \cup \{\theta\})$. Если $x' \in Y$ и $x'' \in X$ (или наоборот), то $\rho_1(x', x'') = 1$. Далее, полагаем $\rho_2 | (Y \cup Y) = d | (Y \cup Y)$ и $\rho_2(\theta, x) = 1$, $\rho_2(x, \theta) = 1$ при $x \neq \theta$. Проверьте, что $\rho_1 \cap \rho_2$ — метрика. Ясно, что

$d(x', x'') = \min(\rho_1(x', x''), \rho_2(x', x''))$ для любых $x', x'' \in Z$. Отсюда легко выводится, что топология $\mathcal{S}$, построенная выше на Z, является пересечением топологий $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$, порожденных на Z метриками ρ_1 и ρ_2 соответственно. Очевидно, пространства $(Z, \mathcal{S}_1)$ и $(Z, \mathcal{S}_2)$ обладают перечисленными в 4) свойствами. Для доказательства 5) заметим, что свободная сумма пространств $(Z, \mathcal{T}_1)$ и $(Z, \mathcal{S}_1)$ отображается на $(Z, \mathcal{T})$ посредством взятия такого отображения, какое нам нужно (см. 301 гл. II).

114. Из (а), очевидно, следует (б). Выведем (в) из (б). Всегда $[A] \supset \supset \{y \in X: d(y, A) = 0\}$. Пусть $x \in [A] \setminus A$. В силу (б) существует последовательность $\{x_n: n \in N^+\}$ точек множества A, сходящаяся к x. Множество S, состоящее из всех точек этой последовательности и точки x, замкнуто в X (так как X — хаусдорфово пространство). Из $x \notin A$ следует, что точка x не изолирована в S. Следовательно (110 гл. II), $d(x, S \setminus \{x\}) = 0$. Но $S \setminus \{x\} \subset \subset A$. Значит, $d(x, A) = 0$ и $|A| = \{y \in X: d(y, A) = 0\}$. Выведем (г) из (в). Если $x \in \operatorname{Int} O_x x$, то $x \in [X \setminus O_x x]$. В силу (в) $d(x, X \setminus O_x x) = 0$ и, значит, $O_x x \cap (X \setminus O_x x) \neq \Lambda$ — получили противоречие. Из (г) и того, что топология X порождена симметрией d, следует, что семейство $\{\operatorname{Int} O_x x: \varepsilon$ — положительное вещественное число$\}$ для каждого $x \in X$ образует базу в X. Значит, из (г) следует (а).

115. Нет; см. задачи 13, 14, 87, 115 гл. III и задачу 52 гл. IV.

116. Пусть Y — произвольное всюду плотное в X подпространство. Каждый элемент U из π-базы $\mathcal{B}$ пересекается с Y. Выберем в их пересечении произвольную точку, обозначим ее через $x(U)$. Тогда $\{x(U): U \in \mathcal{B}\}$ — искомое счетное всюду плотное в Y множество.

117. Обозначим через Q какое-нибудь счетное всюду плотное в X множество. Для каждого $x \in Q$ зафиксируем γ_x — счетную базу в точке x. Тогда $\gamma = \bigcup \{\gamma_x: x \in Q\}$ — счетное семейство открытых в X множеств, плотное в X, т. е. γ — счетная π-база (это очевидно). Но всякое всюду плотное подпространство пространства со счетной π-базой сепарабельно (118 гл. II).

118. Зафиксируем $C \subset X$, для которого $|U| \leqslant \tau$ и $[C] = X$. Для каждого $y \in C$ выберем $B(y) \subset Y$ таких, что $[B(y)] \ni y$ и $|B(y)| \leqslant \tau$, что возможно, так как $y \in [Y]$ и $t(X) \leqslant \tau$. Положим $B = \bigcup \{B(y): y \in C\}$. Тогда $B \subset Y$, $|B| \leqslant \tau$, $[B] \supset [C] \supset Y$. Значит, $s(Y) \leqslant \tau$.

119. Нет — стрелка (см. 104 гл. II) является наследственно сепарабельным пространством, но ее квадрат обладает замкнутым несчетным дискретным в себе подпространством (вторая диагональ). См. задачу 14 гл. III.

120. Нет. Пространство $\mathcal{S}$ из задач 100, 101 гл. V сепарабельно (в нем всюду плотно счетное множество S_0) и содержит замкнутое дискретное подпространство $\mathcal{S}_1$ мощности $2^{\aleph_0}$. См. также задачи 11 и 13 гл. III.

121. Предположим противное — что взятое множество A мощности $2^{\aleph_0}$, каждое подмножество которого замкнуто в X. Зафиксируем счетное множество S, всюду плотное в X. Так как X нормально, то для каждого $P \subset A$ можно выбрать открытое в X множество $\varphi(P)$ такое, что $P = [\varphi(P)] \subset \subset [\varphi(P)] \subset X \setminus (A \setminus P)$. Положим $\chi(P) = \varphi(P) \cap S$. Так как $[S] = X$, то $[\varphi(P)] \cap A = P$. Поэтому, если $P' \subset A$, $P'' \subset A$ и $P' \neq P''$, то $\chi(P') \neq \chi(P'')$. Итак, нами построено взаимно однозначное отображение множества $\exp A$ всех подмножеств множества A в множество $\exp S$ всех подмножеств множества S. Но тогда $2^{2^{\aleph_0}} = |\exp A| \leqslant \exp S = 2^{\aleph_0}$ — получили противоречие.

122. Для каждого $x \in X$ положим $\psi(x) = \{P: P \subset A$ и $[P] \ni x\}$. Тогда ψ — взаимно однозначное отображение множества X в множество $\exp\exp A$. Действительно, если $x_1 \neq x_2$, то найдутся открытые в X множества U_1 и U_2, для которых $U_1 \cap U_2 = \Lambda$, $x_2 \notin U_1$, $x_1 \notin U_2$. Положим $P_1 = U_1 \cap A$, $P_2 = U_2 \cap A$. Тогда (см. 28 гл. II) $[U_1] = [P_1] \supset U_1 \ni x_1$, $[U_2] = [P_2] \supset U_2 \ni x_2$. Следовательно, $P_1 \in \psi(x_1)$, $P_2 \in \psi(x_2)$. Но $P_1 \notin \psi(x_2)$, ибо $[P_1] = [U_1] \subset \subset X \setminus U_2$. Значит, $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$. Доказано тем самым, что множество X равномощно некоторому подмножеству множества $\exp\exp A$, откуда $|X| \leqslant |\exp\exp A| = 2^{2^{|A|}}$.

123. Зафиксируем в X базу $\mathcal{B}$ мощности τ. Для каждого $x \in X$ положим $\varphi(x) = \{U: U \in \mathcal{B}$ и $U \ni x\}$ *). Тогда $\varphi(x) \in \exp\mathcal{B}$ и φ — взаимно однозначное отображение множества X в множество $\exp\mathcal{B}$. В самом деле, если $x_1 \neq x_2$, то существуют открытые в X множества U_1 и U_2 такие, что $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \Lambda$. Тогда $U_2 \in \varphi(x_2)$, но $U_2 \notin \varphi(x_1)$, ибо $x_2 \notin U_2$. Следовательно, $\varphi(x_2) \neq \varphi(x_1)$. Значит, X равномощно подмножеству множества $\exp\mathcal{B}$, т. е. $|X| \leqslant |\exp\mathcal{B}| = 2^\tau$. 124. См. 125 гл. II.

125. Недавно венгерский тополог И. Юхас при некоторых предположениях, не противоречащих принятым аксиомам теории множеств, построил пример наследственно нормального, наследственно сепарабельного пространства X, для которого $|X| = 2^{2^{\aleph_1}} > 2^{\aleph_1}$.

126. Рассмотрим $\mathcal{F}(\aleph_1)$ — минимально вполне упорядоченное множество мощности $\aleph_1$. Положим $M_1 = M$. Пусть $\beta \in \mathcal{F}(\aleph_1)$, а для всех $\alpha < \beta$ уже определено M_α. Положим $L_\beta = \bigcup \{M_\alpha: \alpha < \beta\}$ и $M_\beta = \{x \in X:$ в L_β существует последовательность, сходящаяся к $x\}$. Очевидно, $M \subset M_\alpha \subset M_\beta$ при $\alpha < \beta$. Если $|M_\alpha| \leqslant 2^{\aleph_\alpha}$ для всех $\alpha < \beta$, то и $|L_\beta| \leqslant \leqslant 2^{\aleph_\beta}$. Зафиксировав для каждого $x \in M_\beta$ последовательность $\xi(x)$ в L_β, сходящуюся к x, мы получаем взаимно однозначное отображение ξ множества M_β в множество всех счетных подмножеств множества L_β. Так как $(2^{\aleph_\beta})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_\beta}$, то заключаем, что $|M_\beta| \leqslant 2^{\aleph_\beta}$. Поэтому, если для всех $\alpha \in \mathcal{F}(\aleph_1)$ множества M_α определены в согласии с описанной процедурой и $M^* = \bigcup \{M_\alpha: \alpha \in \mathcal{F}(\aleph_1)\}$, то $|M^*| \leqslant 2^{\aleph_1}$. Очевидно, $M \subset M^* \subset [M]$. Покажем, что M^* секвенциально замкнуто. Пусть $x_i \in M^*$, $i \in N^+$, и $x = \lim\limits_{i \to \infty} \{x_i\}$. Тогда $x_i \in M_{\alpha_i}$ для некоторых $\alpha_i \in \mathcal{F}(\aleph_1)$ при $i \in N^+$. Существует $\alpha^* \in \mathcal{F}(\aleph_1)$ такой, что $\alpha_i < \alpha^*$ при всех $i \in N^+$ (91 гл. I). Последовательность $\{x_i: i \in N^+\}$ целиком лежит в L_{α^*}, а потому ее предел — точка x — принадлежит M_{α^*}. Тем более, $x \in M^*$ и M^* секвенциально замкнуто.

127. Пусть M всюду плотно в X и $|M| \leqslant \aleph_1$. Каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие счетную последовательность ее окрестностей $O(x) = \{U_i x: i \in N^+\}$ таким образом, чтобы $\{x\} = \bigcap \{U_i x: i \in N^+\}$ и $[U_{i+1} x] \subset \subset U_i x$ (здесь мы воспользовались условием $\psi(x, X) = \kappa_1$ для каждой точки $x \in X$ и регулярностью пространства). Обозначим $M_i x = U_i x \cap M$. Ясно, что $M_i x \subset M$, $|M_i x| \leqslant \kappa_1$, $x \in [M_i x]$. Теперь точке x поставим в соответствие последовательность $\gamma(x) = \{M_i x: i \in N^+\}$ счетных множеств $M_i x$. Обозначим через $\Sigma(X)$ систему $\{\gamma(x): x \in X\}$ построенных последовательностей $\gamma(x)$ для каждой точки $x \in X$. Так как $|M| \leqslant \aleph_1$, то $|M^{\aleph_0}| \leqslant c$ и $|(M^{\aleph_0})^{\aleph_0}| \leqslant c$, следовательно, $|\Sigma(X)| \leqslant |(M^{\aleph_0})^{\aleph_0}| \leqslant c$. Докажем, что указанное соответствие $\gamma: X \to \Sigma(X)$ взаимно однозначно. Пусть $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Рассмотрим такое i_1, чтобы $x_2 \notin [U_{i_1} x_1]$, где $U_{i_1} x_1 \in \theta(x_1)$. Возьмем такое i_2, чтобы $x_1 \notin [U_{i_2} x_2]$, где $U_{i_2} x_2 \in \theta(x_2)$. Из двух натуральных чисел i_1 и i_2 заведомо одно больше другого. Пусть $i_2 \geqslant i_1$. Тогда ясно, что $x_1 \in [U_{i_2} x_2]$ и $x_2 \notin [U_{i_2} x_1]$. Рассмотрим $M_{i_2} x_2 = U_{i_2} x_2 \cap M$, $M_{i_2} x_1 = U_{i_2} x_1 \cap M$. Так как $x_1 \in [M_{i_2} x_1]$, $x_2 \in [M_{i_2} x_2]$ и $x_1 \in [U_{i_2} x_1]$, $x_2 \notin U_{i_2} x_1$, то $x_1 \in [M_{i_2} x_1]$, $x_2 \notin [M_{i_2} x_1]$, следовательно, $M_{i_2} x_1 \neq M_{i_2} x_2$, т. е. последовательности $\gamma(x_1)$ и $\gamma(x_2)$ различны. Итак, соответствие $\gamma: X \to \Sigma(X)$ взаимно однозначно. Значит, $|X| \leqslant |\Sigma(X)| \leqslant c$, что и требовалось доказать.

*) Смысл его всегда ясен из, что используются оба наложенных ограничения.

128. Ответ авторам неизвестен.

129. Пусть $M \subset X$ таково, что $[M] = X$, $|M| \leqslant \tau$. Тогда для любой точки $x \in X$ (следствие того, что $t(X) = \aleph_0$) существует такое $M_x \subset M$, что $|M_x| \leqslant \aleph_0$ и $x \in [M_x]$. Так как $\psi(x', X) \leqslant \aleph_0$ для любой точки $x' \in X$ и $\pi([M_x]) \leqslant \aleph_0$, то $|[M_x]| \leqslant \tau$ (см. 127 гл. II). Через $\Sigma(M)$ обозначим множество всевозможных не более чем счетных множеств, принадлежащих множеству M. Так как $|M| \leqslant \tau$ и $c^{\aleph_0} = c$, то $|\Sigma(M)| \leqslant c$. Далее, так как для каждой точки $x \in X$ существует счетное множество $M_x \subset \Sigma(M)$, для которого $x \in [M_x]$, то $X = \bigcup \{[N]: N \in \Sigma(M)\}$. Но $|\Sigma(M)| \leqslant c$ и $|[N]| \leqslant c$ для любого $N \in \Sigma(M)$, поэтому $|X| \leqslant c$. Всё доказано.

130. Рассмотрим замкнутое в X множество $[M]$. Ясно, что $\pi([M]) \leqslant \tau$ и $\psi(x, [M]) \leqslant \aleph_0$ для любой точки $x \in [M]$. Кроме того, $t([M]) = \aleph_0$. Поэтому, пользуясь задачей 129 гл. II, утверждаем, что $|[M]| \leqslant c$, что и требовалось доказать.

131. Для каждой точки $x \in X$ зафиксируем счетную базу γ_x пространства X в x, содержащую пересечение любых двух своих элементов, и положим $\mathcal{G} = \{\gamma_x: x \in X\}$. Если $|X| > 2^{\aleph_0}$, то для $\mathcal{G}$ выполняются все посылки утверждения задачи 122 гл. I. Заключение задачи 122 гл. I означает теперь, что в X существует дизъюнктное семейство непустых открытых множеств, а это противоречит тому, что X удовлетворяет условию Суслина.

132. Пусть $x \in X$, $V \in \mathcal{T}$ и $x \in V$. Выберем $W \in \mathcal{T}_x$, для которого $x \in W \subset [W] \subset V$. Положим $U = W \cap X'$. Тогда $U \in \mathcal{T}'$ и $[U] = [W]$ (см. 29 гл. II). Следовательно, $\operatorname{Int}[U] = \operatorname{Int}[W] \supset W \ni x$ и $\operatorname{Int}[U] = \operatorname{Int}[W] \subset [W] \subset V$. Итак, $x \in \operatorname{Int}[U] \subset V$. Кроме того, $\operatorname{Int}[U] \in \bar{\mathcal{T}}'$, по определению $\bar{\mathcal{T}}'$. Значит, $\bar{\mathcal{T}}'$ — база топологии $\mathcal{T}$.

133. Пусть $\mathcal{B}'$ — база пространства X'. Для каждого $U \in \mathcal{B}'$ зафиксируем (в силу определения подпространства это возможно) такое открытое множество $\bar{U}$, что $\bar{U} \cap X' = U$. Тогда $\bar{U} \subset [U]$ в силу задачи 29 гл. II. Положим $\mathcal{B} = \{\bar{U}: U \in \mathcal{B}'\}$. Если $x \in V$, где $x \in X'$ и V открыто в X, то существует открытое в X множество W, для которого $x \in W \subset [W] \subset V$ (в силу регулярности X). Положим $W' = W \cap X'$. Множество W' открыто в X' и $x \in W'$. Значит, существует $U' \in \mathcal{B}'$, для которого $x \in U' \subset W'$. Тогда $x \in \bar{U}' \subset [U'] \subset [W] \subset V$ и $\bar{U}' \in \mathcal{B}$. Этим доказано, что $\mathcal{B}$ — внешняя база пространства X' в X. Очевидно, $|\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}|$.

134. Решение следует из задачи 132 гл. II.

135. См. решение задачи 133 — рассуждайте аналогично.

137. Только в дискретных. Действительно, совокупность всех одноточечных подмножеств пространства всегда является сетью в нем. Если же эта *сеть* — база, то все точки пространства X изолированные.

140. Годится счетное нормальное пространство без счетной базы, построенное в задаче 113 гл. II.

143. Эта задача решается аналогично задаче 75 гл. II.

145. Нет. Рассмотрим множество всех точек вещественной прямой с топологией, базу которой образуют всевозможные интервалы и их пересечения со множеством иррациональных чисел. Это — хаусдорфово пространство со счетной базой, в котором множество Q всех рациональных чисел замкнуто, но не является пересечением счетного множества открытых множеств.

146. Нет. Годится пространство, описанное в задаче 145 гл. II.

147. Пусть $\mathcal{S}$ — сеть в $(X, \mathcal{T})$ мощности τ. Для произвольной пары (s_1, s_2) элементов сети S зафиксируем пару $\varphi(s_1, s_2) = (U_1, U_2)$ открытых в X множеств таких, что $s_1 \subset U_1$, $s_2 \subset U_2$ и $U_2 \cap U_1 = \Lambda$, если это возможно. В противном случае положим $\varphi(s_1, s_2) = (\Lambda, \Lambda)$. Положим $\mathcal{B} = \bigcup \{\varphi(s_1, s_2): (s_1, s_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}\}$, т. е. $U \in \mathcal{B} \iff U \in \varphi(s_1, s_2)$ для некоторых $s_1 \in S$, $s_2 \in S$. Так как $|S \times S| = |S| = \tau$ (см. 52 гл. I), то $|\mathcal{B}| \leqslant \tau$. Семейство $\mathcal{B} \cup \{X\}$ является предбазой некоторой топологии $\mathcal{T}^*$ на X (см. 14 гл. II), причем $w(X, \mathcal{T}^*) \leqslant |\mathcal{B}| \leqslant \tau$ (см. 58 гл. I) и $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$, ибо $\mathcal{B} \cup \{X\} \subset \mathcal{T}$. Пусть $x_1 \neq x_2$. Существуют $U_1 \subset \mathcal{T}$, $U_2 \subset \mathcal{T}$, для которых $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \Lambda$. Так как S — сеть в $(X, \mathcal{T})$, то $x_2 \in s_1' \subset U_1$, $x_2 \in s_2' \subset U_2$ для некоторых $s_1' \in \mathcal{S}$, $s_2' \in \mathcal{S}$. Но тогда $\varphi(s_1', s_2') = (U_1, U_2) \neq (\Lambda, \Lambda)$ и $s_1' \subset U_1$, $s_2' \subset U_2$, $U_1 \cap U_2 = \Lambda$, $U_1 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T}^*$, $U_2 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T}^*$. Значит, $\mathcal{T}^*$ — хаусдорфова топология.

148. Пусть S — сеть мощности τ в $(X, \mathcal{T})$. Можно считать, что $\{X\} \in S$ (ибо $\tau \geqslant \aleph_0$). В силу 14 гл. II S является предбазой некоторой топологии $\mathcal{T}'$ веса, не большего $|S| = \tau$. Но, в силу определения сети, каждый элемент топологии $\mathcal{T}$ является объединением некоторого множества элементов семейства S. Значит, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Из $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ следует, что $\mathcal{T}'$ — хаусдорфова топология.

149. См. задачи 148, 282 гл. II.

150. См. задачи 149, 282 гл. II.

194. Случай конечного числа сомножителей сводится к случаю, когда этих сомножителей $\aleph_0$, добавлением одноточечных сомножителей в количестве $\aleph_1$. Будем поэтому считать, что для каждого $i \in N^+$ задано метризуемое топологическое пространство X_i, причем мы предположим также, что на X_i зафиксирована метрика ρ_i, порождающая топологию $\mathcal{T}_i$, заданную на X_i. Предположим также, что диаметр X_i по отношению к ρ_i не превосходит 1 (см. 190 гл. II). На $X = \Pi\{X_i: i \in N^+\}$ определим метрику ρ следующим правилом. Если $x' = \{x_i': i \in N^+\} \in X$ и $x'' = \{x_i'': i \in N^+\} \in X$, то $\rho(x', x'') = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i(x_i', x_i'')}{2^i}$. В силу задачи 193 гл. II ρ — метрика на X. Сравним теперь тихоновскую топологию $\mathcal{T}$ на X и топологию $\mathcal{T}_\rho$, порожденную метрикой ρ. Зафиксируем $x = \{x_i: i \in N^+\} \in X$ и рассмотрим множество $O_\varepsilon x = \{x' \in X: \rho(x, x') < \varepsilon\}$. Подберем $n \in N^+$ так, чтобы было $\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. В каждом X_i, где $i \leqslant n$, рассмотрим окрестность $O_{\varepsilon/2} x_i = \left\{x_i' \in X_i: \rho_i(x_i, x_i') < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Так как ρ_i порождает на X_i топологию $\mathcal{T}_i$, то $O_{\varepsilon/2} x_i \in \mathcal{T}_i$. Следовательно, множество $U = \Pi\{O_{\varepsilon/2} x_i: 1 \leqslant i \leqslant n\} \times \Pi\{X_i: n+1 \leqslant i < \infty\}$ принадлежит топологии произведения $\mathcal{T}$. Но $x \in U$ и если $x' \in U$, то $\rho_i(x_i, x_i') < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $i \leqslant n$ и $\rho_i(x_i, x_i') \leqslant 1$ при $i > n$. Поэтому $\rho(x, x') < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Следовательно, $x \in U \subset O_\varepsilon x$. Отсюда показано, что $O_\varepsilon x \in \mathcal{T}_\rho$ — т. е. что $\mathcal{T}_\rho \subset \mathcal{T}$. С другой стороны, все отображения проектирования $\pi_i: X \to X_i$ непрерывны — из определения ρ сразу следует, что $2^i \rho(x, x') \geqslant \rho_i(\pi_i x, \pi_i x')$. Но $\mathcal{T}$ — наименьшая из всех топологий на множестве X, относительно которых проектирование на каждый сомножитель непрерывно (см. 383 гл. II). Значит, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\rho$ и окончательно $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$. Доказано, что топология произведения $\mathcal{T}$ на X метризуема.

211. Пересечение шаровых окрестностей радиуса $\frac{1}{n}$, где $n \in N^+$, замкнутого множества A равно A — ибо если $x \notin A$, то $\rho(x, A) > 0$ (а шаровые окрестности — открытые множества).

212. Пусть X — множество, ρ — метрика на нем и $\mathscr{T}_\rho$ — топология, порожденная на X метрикой ρ. Мы должны доказать, что $(X, \mathscr{T}_\rho)$ — нульмерное пространство. Рассмотрим произвольное замкнутое и $(X, \mathscr{T}_\rho)$ непересекающиеся множества F и Φ. Тогда $\varepsilon_x = \rho(x, \Phi) > 0$ для каждого $x \in F$ и $\varepsilon_y = \rho(y, F) > 0$ для каждого $y \in \Phi$. Положим $O_x = \left\{z \in X: \rho(x, z) < \frac{1}{2}\varepsilon_x\right\}$ при $x \in F$, $O_y = \left\{z \in X: \rho(y, z) < \frac{1}{2}\varepsilon_y\right\}$ при $y \in \Phi$ и $U = \bigcup \{O_x: x \in F\}$, $V = \bigcup \{O_y: y \in \Phi\}$. Множества U и V открыты в $(X, \mathscr{T}_\rho)$ и $F \subset U$, $\Phi \subset V$. Покажем, что $U \cap V = \Lambda$. Предположим противное — т. е., что нашлось $z \in U \cap V$. Тогда $z \in O_x \cap O_y$ для некоторых $x \in F$ и $y \in \Phi$. Имеем: $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) < \frac{1}{2}\rho(x, \Phi) + \frac{1}{2}\rho(y, F) \leqslant \frac{1}{2}\rho(x, y) + \frac{1}{2}\rho(y, x) = \rho(x, y)$. Итак, $\rho(x, y) < \rho(x, y)$ — получили противоречие.

213. (a) 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $A = \{a_i: i \in N^+\}$ — счетное всюду плотное множество в X, а ρ — метрика на пространстве X, совместимая с его топологией. Для каждого i и рационального числа $0 \leqslant r \leqslant 1$ рассмотрим окрестность $O_r a_i = \{x \in X: \rho(x, a_i) < r\}$ точки $a_i \in A$. Положим $\sigma = \{O_r a_i: 0 \leqslant r \leqslant 1, i \in N^+\}$. Система σ счетна, как объединение счетного множества счетных систем $\sigma_i = \{O_r a_i: 0 \leqslant r \leqslant 1\}$. Докажем, что σ — база пространства X. Пусть фиксированы точка $x_0 \in X$ и ее окрестность $O_\varepsilon x_0 = \{x: \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$. Рассмотрим рациональные числа r_1, r_2, для которых $r_1 < \frac{\varepsilon}{4} < r_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, и точку $a_{i_0} \in A$, для которой $\rho(a_{i_0}, x_0) < r_1$. Тогда $x_0 \in O_{r_2} a_{i_0} \subset O_\varepsilon x_0$, что и требовалось доказать.

(б) 2) $\Rightarrow$ 3) очевидно (см. 77 гл. II).

(в) 3) $\Rightarrow$ 1). Для каждой точки $x \in X$ рассмотрим окрестность $O_i x = \left\{x' \in X: \rho(x', x) < \frac{1}{i}\right\}$ и открытое покрытие $\omega_i = \{O_i x: x \in X\}$. Пользуясь финальной компактностью пространства X, из ω_i выделим счетное подпокрытие $\omega_i^0 = \{O_i x_i: i \in N^+\}$. Из каждого множества $O_i x_j$ возьмем по точке $a_{ij} \in O_i x_j$. Легко видеть, что счетное множество $A = \{a_{ij}: i \in N^+, j \in N^+\}$ всюду плотно в X. Кроме того, очевидно, из 2') следует 1), а из 2) следует 2').

214. Ясно, что любое сепарабельное, не обязательно метризуемое пространство удовлетворяет условию Суслина. Докажем обратное утверждение для метрических пространств. Рассмотрим для каждого $n \in N^+$ открытое покрытие ω_n пространства X множествами диаметра, меньшего $\frac{1}{n}$. Воспользуемся утверждением задачи 103 гл. II, в силу которого существует такая дизъюнктная система ω_n' открытых в X множеств, вписанная в покрытие ω_n, что открытое множество $\bigcup \{U: U \in \omega_n'\}$ плотно в X. Так как X удовлетворяет условию Суслина, то $|\omega_n'| \leqslant \aleph_0$. Возьмем для каждого $U \in \omega_n'$ точку $a(U) \in U$ и рассмотрим множество $A_n = \{a(U): U \in \omega_n'\}$. Ясно, что $|A_n| \leqslant \aleph_0$. Заметим, что $\operatorname{diam} U < \frac{1}{n}$ для каждого $U \in \omega_n'$. Легко получаем, что $A = \bigcup \{A_n: n \in N^+\}$ — счетное всюду плотное в X множество.

215. Так как всякое подпространство пространства X со счетной базой также имеет счетную базу, а всякое пространство со счетной базой сепарабельно, то (даже без предположения о метризуемости X) из 1) следует 2). Импликации 2) $\Rightarrow$ 3), 3) $\Rightarrow$ 4) очевидны (без предположения о метризуемости пространства X). Докажем импликацию 4) $\Rightarrow$ 5). Пусть $\gamma = \{U_i: i \in Y\}$ — дизъюнктная система открытых в X множеств. Не нарушая общности, можно предположить, что $U_i = U_{\varepsilon(i)}(x_i)$, где $U_{\varepsilon(i)}(x_i)$ — шаровая окрестность радиуса $\varepsilon(i)$ некоторой точки $x_i \in X$. Обозначим через A множество всех точек x_i, $i \in Y$, а через A_i — множество всех тех точек x_i, для которых $\varepsilon(i) \geqslant \frac{1}{i}$. Ясно, что $A = \bigcup \{A_i: i \in N^+\}$, и каждое A_i — замкнутое дискретное подпространство пространства X. По условию, $|A_i| \leqslant \aleph_0$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда $|A| \leqslant \aleph_0$, следовательно, $|\gamma| \leqslant \aleph_0$.

Осталось доказать импликацию 5) $\Rightarrow$ 1), но она следует из задач 214, 215 гл. II.

216. С помощью задачи 213 гл. II легко доказывается, что существует счетное покрытие $\omega = \{U_1, \ldots, U_i, \ldots\}$ пространства X открыто-замкнутыми множествами диаметра, меньшего ε. Далее полагаем $V_1 = U_1$, $V_2 = U_2 \setminus V_1, \ldots, V_n = U_n \setminus \bigcup \{V_i: i = 1, \ldots, n-1\}, \ldots$. Очевидно, система $\omega^* = \{V_i: i \in N^+\}$ дизъюнктна и состоит из открыто-замкнутых множеств. Так как $V_n \subset U_n$ для любого $n \in N^+$, то $\operatorname{diam} V_n < \varepsilon$ для всех $n \in N^+$. Легко видеть, что ω^* — покрытие X.

227. Задачу можно решать, например, так. Пусть $f: I \to Y$ — открытое непрерывное отображение отрезка I на хаусдорфово пространство Y. Для каждой точки $y \in Y$ рассмотрим $s(y) = \sup f^{-1}y$. В силу того, что множество $f^{-1}y$ замкнуто в I, непрерывна $s(y) \in f^{-1}y$. Обозначим $X = \{s(y): y \in Y\} \subset I$. Очевидно, отображение f, рассматриваемое только на X, есть взаимно однозначное непрерывное отображение подпространства X на все Y.

Несколько труднее доказать, что X замкнуто в I, после чего можно утверждать, что $f = f \mid X$ — гомеоморфизм X на Y. Теперь остается сослаться на задачу 225 гл. II.

233. Пусть Γ — произвольное открытое подпространство полного метрического пространства (X, ρ). Для каждой точки $x \in \Gamma$ обозначим $\rho_x = \rho(x, X \setminus \Gamma)$. Это число положительно. Для каждой пары $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$ определим

$$\rho^*(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{\rho(x, y) + \rho_x + \rho_y}.$$

Положим $\rho^{**}(x, y) = \max\{\rho(x, y), \rho^*(x, y)\}$. Читателю предлагается доказать, что ρ^{**} — искомая метрика на Γ (см. Х в у о р и ф [2]).

234. Если $M = \bigcap \{U_i: i \in N^+\}$, где U_i — открытые подмножества полного метрического пространства (X, ρ), то M как подпространство пространства (X, ρ) гомеоморфно замкнутому гиперпространству топологического произведения пространств U_i по $i \in N^+$ (см. 367 гл. II). Но каждое U_i метризуемо полной метрикой (234 гл. II). Теперь остается сослаться на задачи 188, 187 гл. II. Предлагаем другое доказательство, пользуясь задачей 235 гл. II.

235. Зафиксируем на Y полную метрику ρ, которая порождает топологию, индуцированную на Y из X. Для каждого $n \in N^+$ обозначим через γ_n семейство всех открытых в X множеств, пересекающихся с Y по множеству, диаметр которого не превосходит $\frac{1}{n}$. Положим

$$O_n = \bigcup \{U: U \in \gamma_n\} \quad \text{и} \quad \overline{Y} = \bigcap \{G_n: n \in N^+\}.$$

Ясно, что γ_n покрытие Y. Поэтому $G_n \supset Y$ при всех $n \in N^+$ и, следовательно, $\overline{Y} \supset Y$. Множества G_n открыты в X для всех $n \in N^+$. Покажем, что $\overline{Y} = Y$. Зафиксируем $x \in \overline{Y}$. Для каждого $n \in N^+$ выберем $U_n \in \gamma_n$ такое, что $x \in U_n$. Тогда $\lambda = \{U_n: n \in N^+\}$ — центрированное семейство открытых в X множеств. Положим $F_n = [U_n \cap Y]_Y$, $n \in N^+$. Так как $[Y] = X$, то $\mu = \{F_n: n \in N^+\}$ — центрированное семейство замкнутых в Y множеств, причем диаметр множества F_n не превосходит $\frac{1}{n}$. Так как (Y, ρ) полно, то существует

точка $y \in Y$ такая, что $\cap \{F_n : n \in N'\} = \{y\}$ (см. 187 гл. II). Покажем от противного, что $y = x$. Пусть $y \neq x$. Найдутся теперь непересекающиеся открытые в X множества U и V, для которых $y \in U$ и $x \in V$. Но $y \in Y$ и $U \cap Y$ — окрестность точки y в пространстве (Y, ρ). Поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что $O_\varepsilon y = \{y' \in Y : \rho(y, y') < \varepsilon\} \subset U$. Тогда $[O_\varepsilon x]_X \cap$ $\cap F = A \neq \varnothing$, так быть, $[O_\varepsilon x]_X \not\ni x$. Выберем $n \in N'$, для которого $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Тогда из $F_n \ni y$ (так как диаметр F_n не превосходит $\frac{1}{n}$) следует, что $F_n \subset$ $\subset [O_\varepsilon y]$. Поэтому $[F_n]_X \subset [O_\varepsilon x]$. Но $[F_n]_X = [U_n \cap Y]_X \supset U_n \ni x$, так как Y всюду плотно в X. Следовательно, $[O_\varepsilon x]_X \ni x$, что противоречит полученному ранее. Итак, $y = x \in X$, т. е. $Y = \bar{Y} = \cap \{G_n : n \in N'\}$.

276. (а) Пусть f равномерно непрерывно. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда можно выбрать $\delta > 0$ такое, что если $\rho(x', x'') < \delta$, то $\rho'(fx', fx'') < \varepsilon$. Но из $\rho(A, B) = 0$ следует, что найдутся $x' \in A$ и $x'' \in B$, для которых $\rho(x', x'') < \delta$. Тогда $\rho'(fA, fB) \leqslant \rho'(fx', fx'') < \varepsilon$. Так как это верно для любого $\varepsilon > 0$, то мы получаем, что $\rho'(fA, fB) = 0$.

(б) Предположим, что отображение f не равномерно непрерывно и $\varepsilon > 0$ выбрано так, что для любого $\delta > 0$ существуют точки $x' \in X$ и $x'' \in X$ такие, что $\rho(x', x'') < \delta$, но $\rho'(fx', fx'') > \varepsilon$. Мы по (обычной) индукции построим сейчас в X две последовательности точек $\xi = \{x_n : n \in N'\}$ и $\eta = \{y_n : n \in$ $\in N'\}$ так, чтобы выполнялись условия: (i$_1$) $\rho'(fx_m, fy_k) \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$ при всех $m \in$ $\in N'$, $k \in N'$ и (i$_2$) $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ при всех $n \in N'$.

Рассмотрим предварительно две вспомогательные возможности.

I) В пространстве (Y, ρ') существует точка $a \in Y$, для которой справедливо утверждение I) из задачи 275 гл. II. В этом случае мы выберем x_n, $y_n \in X$ для всех $n \in N'$ произвольно, заботясь лишь о соблюдении условий (i$_2$), (i$_1$): $\rho'(fx_n, fy_n) > \varepsilon$ при всех $n \in N'$ и (i$_1$): $\rho'(fx_n, a) < \frac{\varepsilon}{3}$. Из неравенства треугольника следует, что тогда будет выполняться и условие (i$_1$). Обозначим через A множество точек последовательности ξ и через B — множество точек последовательности η. Тогда $\rho(A, B) = 0$ (в силу (i$_2$)), но $\rho'(fA, fB) \geqslant$ $\geqslant \frac{\varepsilon}{3}$ (в силу (i$_1$)).

II) По отношению к тройке f, (X, ρ), (Y, ρ') и поэтому и выполняется утверждение II) из задачи 275 гл. II. В этом случае ξ и η строятся по (обычной) индукции. Пусть $n \in N'$ и для всех $m < n$ точки $x_m \in X$ и $y_m \in X$ уже определены. Положим $A = \{x_m : m < n\} \cup \{y_m : m < n\}$ (если $n = 1$, то $A = \Lambda$). На основании II) задачи 275 гл. II выберем x_n и y_n так, чтобы было $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, $\rho'(fx_n, fy_n) > \varepsilon$ и $\rho'(fx_n, A) \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$ и $\rho'(fy_n, A) \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Далее применим рассуждение, как выше.

281. (а) 1) $\Rightarrow$ 2) очевидно.

(б) 2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $x_1 \in X$ и окрестность V точки fx_1 выбрана произвольно. Рассмотрим какое-нибудь $V_1 \in \sigma$, для которого $fx_1 \in V_1 \subset V$ (см. 13 гл. II). В силу 2) множество $f^{-1}V_1$ открыто в X. Кроме того, $x_0 \in f^{-1}V_1$; следовательно, $f^{-1}V_1$ — окрестность точки x_1, для которой $f(f^{-1}V_1) = V_1 \subset V$.

(в) 3) $\Rightarrow$ 4). Пусть $x_1 \in [A]$. Надо доказать, что $fx_0 \in [fA]$. Рассмотрим произвольную окрестность V точки fx_0. Выберем на основании 3) окрестность $U x_0$ точки x_0, для которой $f(Ux_0) \subset V$. Так как $x_0 \in [A]$, то $Ux_0 \cap A \neq \Lambda$. Тогда $fUx_0 \cap fA \neq \Lambda$. Следовательно, $V \cap fA \neq \Lambda$, т. е. $fx_0 \in [fA]$. Утверждения 4) и 4'), очевидно, равносильны.

(г) 4) $\Rightarrow$ 5). Имеем в силу 4) и инвариантность Φ:

$$f[f^{-1}\Phi] \subset [ff^{-1}\Phi] = [\Phi] = \Phi.$$

Отсюда следует, что $[f^{-1}\Phi] \subset f^{-1}\Phi$. Значит, множество $f^{-1}\Phi$ замкнуто.

(д) 5) $\Rightarrow$ 1). Непрерывность отображения f следует из равенства $f^{-1}V = X \setminus f^{-1}(Y \setminus V)$ и того, что замкнутые множества — это множества, дополнительные к открытым.

283. Нет, не следует. Пусть X состоит из двух (непересекающихся) открыто-замкнутых в X частей X_1 и X_2, причем все точки множества X_1 изолированы в X, $f(X_1) = Y$, а сужение f на X_2 не непрерывно. Очевидно добиться, чтобы обе эти условия выполнялись, нетрудно — ведь, определяя f, можно задать его на X_1 и на X_2 независимо. Тогда любое замкнутое в X множество A содержит X_1, поэтому $fA = fX_1 = Y$ — всюду плотно в Y множество. Отображение f не является непрерывным, так как его сужение на X_2 не непрерывно.

287. Пусть $x \in X$ и $y_1 = f_1(x) \neq y_2 = f_2(x)$. Выберем непересекающиеся открытые множества U_1 и U_2 в Y, для которых $y_1 \in U_1$, $y_2 \in U_2$. В силу непрерывности f_i, где $i = 1, 2$, существует окрестность V_i точки x в X, для которой $f_i(V_i) \subset U_i$, $i = 1, 2$. Но тогда $f_1(V_1) \cap f_2(V_2) = \Lambda$. С другой стороны, $V_1 \cap V_2$ — непустое открытое множество (ибо $x \in V_1 \cap V_2$) и, в силу предположения, множество $A' = V_1 \cap V_2 \cap A$ не пусто. Но тогда $f_1 \mid A' =$ $= f_2 \mid A'$ и, следовательно, $f_1(A') = f_2(A') \neq \Lambda$. Но $f_1(V_1) \supset f_1(A')$ и $f_2(V_2) \supset$ $\supset f_2(A')$. Значит, $f_1(V_1) \cap f_2(V_2) \neq \Lambda$ — получилось противоречие.

288. Необходимость ясна. Докажем достаточность. Так как Z — хаусдорфово пространство, то для каждого $x \in X$ продолжение f до непрерывного отображения $\bar{f}$ пространства $Y \cup \{x\}$ единственно (и, по условию, существует). Будем через $\bar{f}(x)$ обозначать образ точки x при этом отображении. В результате определено отображение $\bar{f} : X \to Z$. Покажем, что оно непрерывно. Зафиксируем $x^0 \in X$ и положим $z^0 = \bar{f}(x^0)$. Пусть Oz^0 — произвольная окрестность точки z^0 в пространстве Z и $O^2 z^0$ — окрестность этой точки такая, что $[O^2 z^0] \subset Oz^0$. Так как отображение $f \mid (Y \cup \{x^0\})$ непрерывно, то существует окрестность U точки x^0 в X, для которой $f(U \cap Y) \subset O^2 z^0$. Рассмотрим любую точку $x' \in U$. Тогда $x' \in [U \cap Y]$ (либо $[Y] = X$), и из непрерывности отображения $\bar{f}$ $(Y \cup \{x'\})$ следует, что $\bar{f}(x') \in \overline{f(U \cap Y)} = [f(U \cap$ $\cap Y)] \subset [O^2 z^0] \subset Oz^0$. Итак, $\bar{f}(U) \subset Oz^0$, т. е. доказано, что отображение $\bar{f}$ непрерывно.

291. (а) Отображение $\varphi : X \to \Gamma_f$, определенное правилом: $\varphi(x) =$ $= (x, f(x))$ для всех $x \in X$, непрерывно, и обратное к φ отображение тоже непрерывно. Действительно, ясно, что φ взаимно однозначно отображает X на Γ_f. Пусть теперь Ox — произвольная окрестность точки x в X и W — произвольная окрестность точки $\varphi(x) = (x, f(x)) \in \Gamma_f$. Тогда существуют открытое в X множество U и открытое в Y множество V, для которых $x \in U$, $f(x) \in$ $\in V$, $(U \times V) \cap \Gamma_f \subset W$, $U \subset Ox$ и $f(U) \subset V$, — выполнение последних двух условий всегда можно достигнуть, уменьшая U. Положим $W' = (U \times$ $\times V) \cap \Gamma_f$. Тогда $(x, f(x)) \in W'$ и $x \in \varphi^{-1}(W') \subset U \subset Ox$, откуда следует, что φ^{-1} непрерывно. Далее, $\pi(U) = U \times f(U) \subset U \times V$ и $\varphi(U) = \Gamma_f$, значит, $\varphi(U) \subset (U \times V) \cap \Gamma_f \subset W$. Следовательно, φ непрерывно, т. е. φ — гомеоморфизм.

(б) Мы пользуемся тем же обозначением, что и выше. Пусть $(x, y) \in$ $\in \Gamma_f$. Значит, $y_1 = f(x) \neq y$. По предположению, существуют непересекающиеся открытые в Y множества V_1 и V, для которых $y_1 \in V_1$, $y \in V$. Так как f непрерывно, то найдется множество U, открытое в X, для которого $f(U) \subset$ $\subset V_1$, $x \in U$. Тогда $\varphi(U) \subset U \times V_1$. Отсюда и из $V_1 \cap V = \Lambda$ следует, что $(U \times V) \cap \Gamma_f = \Lambda$ (поэтому $(x, y) \in U \times V$).

293. Отображение π непрерывно и открыто в силу тех же соображений, что и отображение f в задаче 292 гл. II (см. также общее утверждение задачи 320 гл. II). Но f не замкнуто. Убедимся в этом. Обозначим через A и C концы стороны Y_0 и через B — середину стороны равностороннего квадрата, противоположной Y_1. Тогда множество всех точек из X_1, лежащих вне треугольника ABC или на его границе, замкнуто в X_0, но его образ есть $Y_0 \setminus \{D\}$, где D — середина стороны Y_1. Множество $Y_1 \setminus \{D\}$ не замкнуто в Y_1.

301. Если $U \in \mathcal{T}_1$ то $U \in \mathcal{T}_\alpha$ при всех $\alpha \in M$. Имеем $\pi^{-1}U = \bigcup \{i_\alpha(U): \alpha \in M\}$ — открытое в $\overline{X}_\xi$ множество. Обратно, если $\pi^{-1}A$ открыто в $\overline{X}_\xi$ для некоторого $A \subset X$, то $\pi^{-1}A \cap i_\alpha(X)$ открыто в $i_\alpha(X)$, т. е. $A \in \mathcal{T}_\alpha$ для каждого $\alpha \in M$. Значит, $A \in \bigcap \{\mathcal{T}_\alpha: \alpha \in M\} = \mathcal{T}$. Этим проверено, что π — факторное отображение. Заметим, что если $\mathcal{T}_\alpha \neq \mathcal{T}$, то сужение отображения π на открыто-замкнутое в X_ξ подпространство $i_\alpha(X)$ не является факторным отображением — в противном случае это сужение было бы гомеоморфизмом, т. е. было бы $\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T}$.

302. Утверждение 4) — частный случай утверждения задачи 348 гл. II. Вес S в точке $\pi(B)$ равен характеру множества B в пространстве C, так как f замкнуто (см. 328 гл. II). Но (81 гл. VI) характер B в C несчетен, так как $B = \operatorname{Fr} B$ — вполне несвязное *) подпространство нормального пространства C (пространство C нормально как всякое метризуемое пространство — см. 242 гл. II). Следовательно, S неметризуемо. Ясно, что π — не открытое отображение, иначе S было бы пространством со счетной базой (см. 333 гл. II).

303. 1) Положим $f(\pi(B)) = *$ и $f(a) = a$ для всех $a \in A$. Очевидно, f — взаимно однозначное отображение множества S на множество Φ. Топология пространства $(\Phi, \mathcal{T}_1)$ может быть описана как наибольшая из всех, для которых каждое $P_a \cup (*)$ является бикомпактом с единственной неизолированной точкой $*$. Легко доказать, что аналогичное описание имеет место для топологии пространства S. Отсюда и следует 1).

2) Точка $*$ имеет в $(\Phi, \mathcal{T}_1)$ счетную базу (такова семейство $\{U_j: j = 1, 2, \ldots\}$), а в $(\Phi, \mathcal{T}_2)$ характер $*$ несчетен (302 гл. II). Значит, $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$.

3) Бесконечное множество $\{(1, k): k = 0, 1, 2, \ldots\}$ не имеет предельной точки ни в $(\Phi, \mathcal{T}_1)$, ни в $(\Phi, \mathcal{T}_2)$. Поэтому $(\Phi, \mathcal{T}_1)$ и $(\Phi, \mathcal{T}_2)$ не бикомпактны. Оба эти пространства нормальны, как всякое пространство с единственной неизолированной точкой.

304. Утверждения (а), (б) и (в) справедливы. Утверждения (г) и (д) не верны.

305. Утверждения (а) и (б) доказываются легко. В связи с (в) см. задачи 308 гл. II и 24' гл. VI или решение задачи 347 гл. II.

306. И на тот, и на другой вопрос ответ отрицателен. См. задачу 307 гл. II.

307. Нет. Рассмотрим отображения $\pi: C \to (\Phi, \mathcal{T}_2)$, $i: (\Phi, \mathcal{T}_1) \to (\Phi, \mathcal{T}_1)$, $(\pi \times i): C \times (\Phi, \mathcal{T}_1) \to (\Phi, \mathcal{T}_2) \times (\Phi, \mathcal{T}_1)$, $(\pi \times i)(x, y) = [\pi(x), i(y)]$ для всех $(x, y) \in C \times (\Phi, \mathcal{T}_1)$, где C, Φ, $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ — те же, что и в задачах 302, 303 гл. II. Мы при этом пишем $(\Phi, \mathcal{T}_2)$ вместо S и $\pi: C \to (\Phi, \mathcal{T}_2)$ вместо $\pi: C \to S$, имея в виду, что S отождествлено с Φ посредством естественного отображения (см. решение задачи 303 гл. II). Отображение π факторное и даже замкнутое (302 гл. II), а i — тождественное отображение. Покажем, что $\delta = \pi \times i$ не является факторным отображением.

Положим (см. 302 гл. II) $A_{m,l} = \left\{\left(\frac{1}{n}, k\right): \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{n}$ и $l \leqslant k\right\}$ и $\left(\frac{1}{r}, m\right) \times A_{m,r} = B_{m,r}$, где l, m, r — любые целые положительные

*) См. задачи 253, 254 гл. III.

числа, $F_r = \bigcup \{B_{r,m}: m = 1, 2, \ldots\}$, $F = \bigcup \{F_r: r = 1, 2, \ldots\}$. Множество F можно рассматривать и как подмножество множества $C \times \Phi$ и как подмножество $\Phi \times \Phi$; при этом, очевидно, $(\pi \times i)^{-1}\pi F = F$. Но F замкнуто в $C \times (\Phi, \mathcal{T}_1)$ и F не замкнуто в $(\Phi, \mathcal{T}_2) \times (\Phi, \mathcal{T}_1)$ — в самом деле, точка $(x, *) \in [F] \setminus F$. Проверьте все это сами. Другое решение в задаче 349 гл. II.

308. (а) $\Rightarrow$ (б). Положим $A = Y \setminus f(U)$, $Y' = A \cup (y)$, $X' = f^{-1}(Y')$; $B = f^{-1}A$. Тогда $X' = B \cup f^{-1}y$ и $U \cap B = \Lambda$, $U \supset f^{-1}y$. Значит, $f^{-1}y$ открыто в X' и из (а) следует, что (y) открыто в Y', т. е. что $y \notin [A]$ и $y \in Y \setminus [Y \setminus fU] = \operatorname{Int} f(U)$.

(б) $\Rightarrow$ (а). Если $f^{-1}y \cap [f^{-1}A] = \Lambda$, то $U = X \setminus [f^{-1}A] \supset f^{-1}y$ и U открыто в X. Тогда $fU \cap A = \Lambda$ и, в силу (б), $\operatorname{Int} fU \ni y$. Но $\operatorname{Int} U \cap A = \Lambda$ следует теперь, что $y \notin [A]$.

(в) $\Rightarrow$ (а). Пусть $A \subset Y$, $B = f^{-1}A \subset X'$ и B замкнуто в X'. Положим $\widetilde{B} = [B]$. Тогда из $f^{-1}Y' = X'$ следует, что $f\widetilde{B} \cap Y' = A$. Если $y \in [A]$, то, в силу (в), $f^{-1}y \cap \widetilde{B} \neq \Lambda$, и, следовательно, $f\widetilde{B} \ni y$. Значит, если $y \in [A] \cap Y'$, то $y \in f\widetilde{B} \cap Y' = A$, т. е. A замкнуто в Y', что и требовалось доказать (см. 288 гл. II).

309. Если U — открытое множество в X и $U \supset f^{-1}y$, где y — некоторая фиксированная точка пространства Y, а $f' = f \mid X'$, $U' = U \cap X'$, то $\operatorname{Int} fU \supset \operatorname{Int} fU' = \operatorname{Int} f'U' \ni y$, что и требовалось установить.

310. Ответ отрицателен и на тот, и на другой вопрос. См. задачу 348 гл. II и решение задачи 307 гл. II.

311. Пусть $f: X \to Y$ — несжимающее непрерывное отображение, $f(X) = Y$, $y \in Y$, $B \subset Y$ и $y \in [B]$. Положим $A = f^{-1}B$, $P = f^{-1}y$. Тогда [302 гл. II] $[A] \cap P \neq \Lambda$. Зафиксируем $x \in [A] \cap P$. Если X — пространство Фреше — Урысона, то существует последовательность $\{x_n: x_n \in A\} \subset A$, сходящаяся к x. Положим $y_n = fx_n$. Так как f непрерывно, то $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

313. Пусть G — любая окрестность множества Φ. Так как f непрерывно, существует окрестность U множества F, для которой $fU \subset G$. Выберем $W \in \xi$, для которого $F \subset W \subset U$. Тогда $fW \subset G$ и $W \supset F \supset f^{-1}y$ для любой точки $y \in \Phi$. Поэтому $\operatorname{Int} fW \ni y$ и, следовательно, $\operatorname{Int} fW \supset \Phi$. Итак, $\Phi = \operatorname{Int} fW \subset G$, причем $\operatorname{Int} fW \in f^*\xi$.

314. Это следует из задачи 313 гл. II.

316. Это следует из задачи 321 гл. II.

317. Нет. Если X — граница квадрата, а π — проектирование этого квадрата на одну из его сторон параллельно другой стороне, то сужение π на X непрерывно и замкнуто, но, очевидно, не является открытым отображением (сторона (без вершин) квадрата, параллельно которой осуществляется проектирование, является открытым в X множеством, но отображается в неизолированную точку образа).

320. Если P замкнуто в X, то $f(P) = f([P])$. Из $[f(P)] = f([P])$ следует теперь, что $f(P) \supset [f(P)]$. Значит, $f(P)$ замкнуто. Если f — замкнутое отображение и $A = X$ выбрано произвольно, то $f([A])$ замкнуто. Но $f(A) \subset f([A])$ (так как $A \subset [A]$). Значит, $[f(A)] \subset [f([A])] = f([A])$.

321. Действительно, так как $f(X) = Y$, то для любого $P \subset X$ имеет место $fP = Y \setminus f^*(X \setminus P)$.

322. Пусть f замкнуто, $y \in Y$, $F = f^{-1}y \subset U$ — произвольное открытое в X множество, содержащее F. Тогда $G = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U))$ открыто в X, $F \subset G \subset U$ и $f^{-1}fG = G$. Следовательно, если $\Phi \in \alpha$ и $\Phi \cap G \neq \Lambda$, то $\Phi \subset G$. Значит, α — непрерывное разбиение.

Будем исходить теперь из предположения, что α — непрерывное разбиение. Пусть P — замкнутое в X множество и $y \notin fP$. Тогда $f^{-1}y \subset U = X \setminus P$. Так как U открыто в X, $f^{-1}y \in \alpha$ и α непрерывно, то в X существует открытое множество V, для которого $f^{-1}y \subset V \subset U$, причем V таково,

что если $\Phi \subset \alpha$ и $\Phi \cap V \neq \Lambda$, то $\Phi \subset V$. Но тогда $f^{-1}fV = V$ и из факторности f следует, что fV открыто в Y. Но $F \cap P = f^{-1}fV \cap P = \Lambda$ и, значит, $fx \cap fU = \Lambda$. Так как $f^{-1}y \subset V$, то $y \notin fV$. Итак, fV — окрестность точки y в пространстве Y, не пересекающаяся с множеством P. Следовательно, последнее замкнуто.

323. Положим $P = X \setminus U$ и $Q = fP$, $V = Y \setminus Q$. Множество P замкнуто в X, значит, Q замкнуто в Y и V открыто в Y. Очевидно, $Q \cap \Phi = \Lambda$, поэтому $V \supset \Phi$. Кроме того, $f^{-1}V \cap P = \Lambda$, поэтому $f^{-1}V \subset U$.

324. Надо воспользоваться задачами 323 и 321 гл. II.

325. Пусть p_X и p_Y замкнуты. Имеем $p_X^{-1}(x) = (x, f(x))$ и $p_Y p_X^{-1}(x) = p_Y(x, f(x)) = f(x)$ для всех $x \in X$. Значит, $f = p_Y \circ p_X^{-1}$ (заметим, что область определения отображений p_Y и p_X у нас всюду в этой задаче ограничена множеством Γ_f, поэтому p_X — взаимно однозначное отображение на, и определено отображение p_X^{-1}). Пусть A замкнуто в X. Тогда $f(A) = p_Y(p_X^{-1}A)$, и так как p_Y непрерывно, а p_X замкнуто, то $f(A)$ замкнуто в Y. Значит, f — замкнутое отображение. Пусть B замкнуто в Y. Тогда $f^{-1}B = p_X p_Y^{-1}(B)$. Так как p_Y непрерывно, а p_X замкнуто, то $f^{-1}(B)$ замкнуто в X. Значит, f — непрерывное отображение.

Предположим теперь, что $f\colon X \to Y$ непрерывно и замкнуто. Отображение $p_X\colon \Gamma_f \to X$ тогда является гомеоморфизмом (см. 281 гл. II) — здесь важна только непрерывность отображения f. Тем более, p_X — замкнутое отображение. Пусть $\Phi \subset \Gamma_f$ и Φ замкнуто в Γ_f. Тогда $p_Y(\Phi) = f(p_X\Phi)$. Но f замкнуто и $p_X\Phi$ замкнуто в X. Следовательно, $f(p_X\Phi) = p_Y(\Phi)$ замкнуто в Y и p_Y — замкнутое отображение.

326. Пусть $f\colon X \to Y$ — такое отображение, причем $f(X) = Y$ и F_1, F_2 — замкнутые множества в X, $F_1 \cap F_2 = \Lambda$. Положим $\Phi_1 = f^{-1}F_1$, $\Phi_2 = f^{-1}F_2$. Множества Φ_1, Φ_2 замкнуты в X и $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \Lambda$. Так как X нормально, то существуют открытые множества $U_1 \subset X$, $U_2 \subset X$ такие, что $U_1 \cap U_2 = \Lambda$, $\Phi_1 \subset U_1$, $\Phi_2 \subset U_2$. В силу задачи 323 гл. II существуют открытые множества V_1 и V_2 в Y, для которых $F_1 \subset V_1$, $F_2 \subset V_2$ и $f^{-1}V_1 \subset U_1$, $f^{-1}V_2 \subset U_2$. Тогда $V_1 \cap V_2 = \Lambda$.

331. Нет. Пусть α — ортогональное проектирование плоскости P, на которой введена привычная декартова система координат, на ось абсцисс и F — график функции $y = \frac{1}{x}$ (т. е. P — гипербола). Тогда F замкнуто в P, но αF есть ось абсцисс без начала координат — незамкнутое множество (топологии обычные). См. также задачу 293 гл. II.

335. (а) Если f открыто, то $f(X \setminus [f^{-1}B])$ открыто и, очевидно, $f(X \setminus [f^{-1}B]) \cap B = \Lambda$. Поэтому $B \cap [B] \cap f(X \setminus [f^{-1}B]) = \Lambda$, т. е. $f[B] \subset [f^{-1}B]$.

(б) Пусть U открыто в X. Положим $B = Y \setminus fU$. Тогда $f^{-1}B \cap U = \Lambda$, а так как U открыто, то $[f^{-1}B] \cap U = \Lambda$. Из $f^{-1}[B] \subset [f^{-1}B]$ теперь следует, что $f^{-1}[B] \cap U = \Lambda$, т. е. что $[B] \cap fU = \Lambda$. Но $fU = Y \setminus B$. Значит, $[B] \subset B$ и $B = [B]$.

337. Пусть $U \subset X'$, U открыто в X'. Тогда $U = \tilde{U} \cap X'$ для некоторого открытого в X множества $\tilde{U}$. Из $X' = f^{-1}Y'$ следует, что $f(X \setminus X') \subset Y \setminus Y'$ и $fU \subset Y'$. Поэтому $f\tilde{U} \cap Y' = fU = fU$. Но $f\tilde{U}$ открыто в Y, так как f — открытое отображение. Значит, fU открыто в Y'.

338. Если $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$ — открытое отображение для каждого $\alpha \in M$ и $U = \Pi\{U_\alpha : \alpha \in M\}$ — стандартное открытое множество в $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in M\}$, а $f = \Pi\{f_\alpha : \alpha \in M\}$ — произведение отображений f_α, $\alpha \in M$, $f\colon X \to Y = \Pi\{Y_\alpha : \alpha \in M\}$, то $fU = \Pi\{f_\alpha U_\alpha : \alpha \in M\}$ — очевидно, стандартное открытое множество в Y (мы предполагаем, для простоты, что $U_\alpha X_\alpha = Y_\alpha$ для каждого $\alpha \in M$). Теперь сошлемся на задачу 334 гл. II.

339. Пусть $\mathscr{B}$ — база пространства X, мощность которой равна весу X. Тогда $\mathscr{B}' = \{fU : U \in \mathscr{B}\}$ — база пространства Y, причем $|\mathscr{B}'| \leqslant |\mathscr{B}|$; отсюда следует заключение.

340. Пусть U' — любое открытое в X' множество и U открыто в X, $U \cap X' = U'$. Покажем, что тогда $fU = fU'$, чем и будет доказано, что fU' — открытое множество. Если $y \in fU$, то $U \cap f^{-1}y \neq \Lambda$. Из условия следует, что $U \cap f^{-1}y \cap X' \neq \Lambda$. Значит, $fU' \ni y$ и $fU' = fU$, т. е. $f = f \mid X'$ открыто.

341. Рассмотрим произвольное открытое в X' множество U' и такое открытое в X множество U, что $X' \cap U = U'$. Если $U' \supset f^{-1}y = \Lambda$, то можно за U принять U' (ибо тогда $U' \subset X \setminus f^{-1}y \subset X'$, причем $X \setminus f^{-1}y$ открыто в X множество). Если $U' \cap f^{-1}y \neq \Lambda$, то $U \setminus U' \subset f^{-1}y$, причем $y \notin fU \cap fU'$. Поэтому в обоих случаях $fU' = fU$, и множество fU' открыто в Y, так как f — открытое отображение.

343. Пусть X — прямая, а Y — ее отрезок. Тогда Y есть подпространство пространства X, а X гомеоморфно интервалу, получающемуся из Y удалением концевых точек. Но X и Y не гомеоморфны, так как Y — бикомпакт, а X — нет (см. 228 гл. II).

344. Пусть B — пространство иррациональных чисел с обычной топологией. Положим $X = (\bigcup\{(3n : n \in \mathbb{N}) \cup (\bigcup\{(1-3n, 2-3n) : n \in \mathbb{N}\})$ и $Y = (3n : n \in \mathbb{N}) \cup (\bigcup\{(1 + 3n, 2 + 3n) : n \in \mathbb{N}\})$. Пространства X и Y (вместе с топологией, индуцированной из R) не гомеоморфны. В самом деле, компонента точки $\frac{3}{2}$ в X есть интервал $(1, 2)$, а в Y нет точек, компонента которой была бы гомеоморфна интервалу. Но при гомеоморфизме компоненты гомеоморфно отображаются на компоненты. Это означает невозможность гомеоморфизма между X и Y.

Но X можно непрерывно и взаимно однозначно отобразить на Y, например, так: все точки интервалов переходят в себя, а изолированные точки пространства X делятся на два бесконечных подмножества, из коих первое как-нибудь (не взаимно однозначно) отображается на множество изолированных точек пространства Y, а второе взаимно однозначно отображается на множество концов полуинтервалов.

Построенное отображение X на Y неясно. Чуть сложнее строится взаимно однозначное непрерывное отображение пространства Y на пространство X. При этом множество $\{[3n + 1, 3n + 2) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ полуинтервалов разбивается как-нибудь на счетное множество счетных множеств A_k, $k = 1, 2, \ldots$, т. е. так, что каждое A_k — счетное семейство полуинтервалов. Каждый интервал $(3n + 1, 3n + 2)$, входящий в A_k, разбивается на счетное множество попарно не пересекающихся полуинтервалов C_i^k, где $C_i^k = \left[(3n + 1) + \frac{1}{i-1}, 3n + 1 + \frac{1}{i}\right)$.

Между семейством $C^k = (C_i^k : i = 1, 2, \ldots)$ и A_k устанавливается какое-нибудь взаимно однозначное соответствие и каждый полуинтервал, входящий в A_k, гомеоморфно отображается на соответствующий ему полуинтервал из семейства C^k. Иррациональные точки пространства Y отображаются на иррациональные точки пространства X посредством какого-нибудь взаимно однозначного соответствия. Построенное отображение Y на X искомое.

345. Предположим, что $x \in X \setminus Y$, $y \in Y$ и $\varphi(x) = \varphi(y) = z \in \varphi(X)$. Выберем непересекающиеся окрестности Ox и Oy точек x, y в пространстве X. Положим $V = Oy \cap Y$. Тогда $\varphi(V)$ — окрестность точки z в $\varphi(Y)$, и потому существует открытое в Y множество U такое, что $U \cap \varphi(Y) = \varphi(V)$. Так как $x \notin U$, $\varphi(x) = z = \varphi$ — непрерывное отображение, то существует открытое в X множество W, для которого $x \in W \subset Ox$ и $\varphi(W) \subset U$. Тогда $W \cap Y \neq \Lambda$ и $\varphi(W \cap Y) \subset \varphi(V)$, и потому $\varphi(W \cap Y) \subset U \cap \varphi(Y) = \varphi(V)$.

Итак, $(W \cap Y) \times Y \subset F$, но $\varphi(W \cap Y) \cap \varphi(Y) \neq \Lambda$, а это противоречит тому, что $\varphi \mid Y$ — взаимно однозначное отображение.

346. Пусть $\pi: X \to Z$ — естественное отображение. Оно замкнуто (322 гл. II). При этом $X^1 = \pi^{-1}Z^1$, т. е. X^1 является полным прообразом при π подпространства $Z^1 \subset Z$. Следовательно, $\pi^1 = \pi \mid X^1$ — сужение π на X^1 — является взаимно однозначным замкнутым непрерывным отображением пространства X^1 на пространство Z^1 (см. 319 гл. II). Значит, π^1 — гомеоморфизм (342 гл. II).

347. Пусть X — обычное пространство неотрицательных вещественных чисел, и для каждого целого положительного n рассмотрим двухточечное множество $F_n = \left\{n, \frac{1}{n}\right\}$. Через Z обозначим пространство разбиения X, неизолированными (неодноточечными) элементами которого служат все множества F_n и только они. Пусть $\pi: X \to Z$ — естественное проектирование. Далее мы пользуемся обозначениями из решения задачи 343 гл. II. Очевидно, $X^1 = \{0\} \cup Y_1 \cup Y_2$, где $Y_1 = \left\{x \in X: x < 1 \text{ и } x \neq \frac{1}{n} \text{ при всех } n = 1, 2, \ldots\right\}$, $Y_2 = \{x \subset X: x > 1 \text{ и } x \neq n \text{ при всех } n = 1, 2, \ldots\}$. Очевидно, $0 \in [Y_1]$, но $0 \notin [Y_2]$. Однако $[\pi(Y_2)]_Z = [\{\pi(x): n = 1, 2, \ldots\}] = \left[\left\{\pi\left(\frac{1}{n}\right): n = 1, 2, \ldots\right\}\right] \ni \pi(0)$. Итак, $0 \in [Y_2]$, но $\pi(0) \in [\pi(Y_2)]_Z$, т. е. сужение π на X^1 не является гомеоморфизмом. Но $\pi^{-1}(Z^1) = X^1 \setminus 0$ — факторное отображение. Мы заключаем поэтому, что сужение факторного отображения на полный прообраз не является факторным отображением (ср. в связи с этим задачу 305 гл. II).

348. Пусть X_1 — интервал $(0, 1)$, X_2 — множество $\left\{2, 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{3}, \ldots, 2+\frac{1}{n}, \ldots\right\}$, $X = X_1 \cup X_2$, при этом X_1, X_2 и X наделены обычной топологией. Через Y обозначим пространство разбиения, элементами которого служат пары $\left(\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right)$ и прочие элементы — отдельные точки пространства X. Через Z обозначим совокупность всех точек полуинтервала $[0, 1)$, отличных от $\frac{1}{n}$ при всех $n \in N$. Произведение $\pi \times i_Y$ естественного фактор-отображения $\pi: X \to Y$ и тождественного отображения i_Y пространства Z на себя не является факторным отображением. Действительно, множество $F = \{(\pi(x), x): x \in Z, x > 0\}$ не замкнуто в $Y \times Z$, ибо $(\pi(2), 0) \in [F] \setminus F$, хотя $(\pi \times i_Y)^{-1}F$ замкнуто в $X \times Z$ (очевидно, $(\pi \times i_Y)^{-1}F = \left\{(x, x): x \in (0, 1), x \neq \frac{1}{n}, n \subset N^+\right\}$).

351. Пусть N — множество всех натуральных чисел и ξ — семейство всех открытых, по отношению к обычной топологии, подмножеств U множества R, для которых $N \setminus U$ конечно. Определим f на R так: $f(x) = 0$, если $x \in N$, и $f(x) = 1$, если $x \in R \setminus N$. Легко показать теперь, что если $\{x_n: n \in N^+\}$ — последовательность в R, конфинальная ξ, то непременно найдется номер k, для которого $x_n \subset N$ при всех $n \geq k$. Но тогда $\lim \{f(x_n): n \subset N^+\} = 0$. Значит, функция f, рассматриваемая как отображение множества R в обычное пространство R, секвенциально непрерывна вдоль ξ. Однако она не является непрерывной вдоль ξ, ибо $fU \ni 0$ и $fU \ni 1$ для любого $U \subset \xi$.

352. Зафиксируем счетный предфильтр η, являющийся базисом для ξ. Тогда $\eta \subset \xi$, причем каждый элемент предфильтра ξ содержит некоторый элемент предфильтра η. Поэтому последовательность $\{x_n: n \in N^+\}$ конфинальна ξ в том и только в том случае, если она конфинальна η. Значит, секвенциальная непрерывность отображения f вдоль ξ равносильна его секвенциальной непрерывности вдоль η. Аналогично, непрерывность f вдоль ξ равносильна непрерывности f вдоль η. Ясно также, что из непрерывности f вдоль η следует секвенциальная непрерывность f вдоль η (это верно для любого предфильтра — не только для η). Предположим теперь, что отображение f не непрерывно вдоль η, но секвенциально непрерывно вдоль η. Занумеруем элементы η: $\eta = \{U_n: n \in N^+\}$. Изменив, если нужно, η, можно добиться, чтобы было $U_{n+1} \subset U_n$, $n \in N^+$. Выберем произвольно $x_n \in U_n$. Тогда $\{x_n: n \in N^+\}$ — последовательность, конфинальная ξ, и существует точка $y \in Y$, любая окрестность которой содержит все члены последовательности $\{fx_n: n \in N^+\}$, начиная с некоторого. Но $y \notin \lim_\eta f$, ибо $\lim_\eta f = \Lambda$. Следовательно, найдется окрестность O^*y, для которой $f(U_n) \setminus O^*y \neq \Lambda$, $n \in N^+$. Зафиксируем $y_n \in U_n$, для которого $fy_n \notin O^*y$. Последовательность $\{y_n: n \in N^+\}$ конфинальна η, и потому $\{fy_n: n \in N^+\}$ сходится к некоторой точке $y' \in Y$. Очевидно, $y' \neq y$. Положим теперь $z_0 = x_0$, если n четно, и $z_n = y_n$, если n нечетно. Очевидно, $\{z_n: n \in N^+\}$ — последовательность, конфинальная ξ, поэтому последовательность $\{fz_n: n \in N^+\}$ сходится в Y. Но последняя содержит подпоследовательность, сходящуюся к y', и содержит подпоследовательность, сходящуюся к y, причем $y \neq y'$. Ввиду хаусдорфовости пространства Y это невозможно.

353. Достаточно взять простейший бесконечный счетный бикомпакт, лишь одна точка которого не изолирована.

360. Проектирование произведения пространства на сомножитель является непрерывным открытым отображением. Но в таком случае вес сомножителя не превосходит веса произведения (см. 359 гл. II).

364. 1. Элементарно (см. стр. 101).

2. Заметим, что I^τ есть T_0-пространство веса τ (даже бикомпактное — см. 75 гл. III), так как тихоновское произведение T_0-пространств также является T_0-пространством, и $w(I^\tau) = |A|$ (см. 379 гл. II). Тогда всякое подпространство $X \subset I^\tau$ — также T_0-пространство и $w(X) \leqslant w(I^\tau) = \tau$. Обратно, пусть X — T_0-пространство и $w(X) \leqslant \tau$. Рассмотрим базу $\sigma = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$ пространства X. Можно считать, что $|A| = \tau$. Строим теперь топологическое отображение f пространства X в I^τ. Пусть $p \in X$ — произвольная точка. Для каждого $\alpha \in A$ полагаем $x_\alpha(p) = 0$, если $p \in U_\alpha$, и $x_\alpha(p) = 1$, если $p \notin U_\alpha$. Положим $fp = \{x_\alpha(p): \alpha \in A\} \in I^\tau$.

(а) Докажем, что f взаимно однозначно. Пусть $p \in X$, $p' \subset X$ и $p' \neq p$. Так как X — T_0-пространство, то существует такое $\alpha \in A$, что U_α содержит одну из точек p или p' и не содержит другой. Пусть, например, $p \subset U_\alpha$, $p' \subset X \setminus U_\alpha$. Тогда $x_\alpha(p) = 0$, $x_\alpha(p') = 1$ и, следовательно, точки fp, fp' различны в I^τ.

(б) Отображение f непрерывно. Пусть $f(p) = \xi \subset I^\tau$. Возьмем произвольную базисную окрестность $U^\varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s} = \{\xi' \in I^\tau: \xi'_{\alpha_1} = 0, \ldots, \xi'_{\alpha_s} = 0\}$ точки $f(p) = \xi$ в I^τ. Тогда $f(\bigcap \{U_{\alpha_i}: i = 1, \ldots, s\}) \subset U^\varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}$, откуда и следует непрерывность отображения f в точке $p \subset X$.

(в) Обратное отображение f^{-1} непрерывно. Действительно, достаточно показать, что fU_α открыто в $fX \subset I^\tau$ для любого $\alpha \in A$ (ибо $\sigma = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$ — база пространства X), но это следует из очевидного равенства $fU_\alpha = U^\varepsilon_\alpha \cap fX$.

365. Естественный гомеоморфизм φ между X и Δ дается правилом: $\varphi(x) = z \Longleftrightarrow x_\alpha(z) = x$ для всех $\alpha \in A$.

366. Если $x \in X^A \setminus A$, то найдутся $\alpha_1 \in A$, $\alpha_2 \in A$, для которых $x_{\alpha_1} = x_{\alpha_2}$ ($x_{\alpha_1}(x) \neq x_{\alpha_2}(x) = x_{\alpha_2}$). Выберем непересекающиеся окрестности в X у точек x_{α_1} и x_{α_2} — соответствующая этой паре стандартная окрестность точки $x \in X^A$ не содержит точек множества Δ.

367. Каждой точке $y \in Y$ поставим в соответствие точку $\varphi(y) \in Z$, все координаты которой равны y. Очевидно, отображение φ — гомеоморфизм пространства Y в пространство Z. Замкнутость множества $\varphi(Y)$ в Z легко извлекается из хаусдорфовости пространства X — существенно при этом, что у каждой точки из $Z \setminus \varphi(Y)$ найдутся две не равные координаты (несложно сообразить). (Затем надо взять стандартную окрестность в Z, соответствующую каким-нибудь непересекающимся окрестностям этих координат.)

368. Если X — T_2-пространство, то $X \times X$ — T_2-пространство, и потому любое множество в $X \times X$ является пересечением некоторого семейства открытых множеств. Пусть X не является T_2-пространством. Выберем пару x, y точек из X такую, что каждая окрестность точки x в X содержит y. Рассмотрим произвольное открытое в $X \times X$ множество U, содержащее Δ. Тогда $U \ni (x, x)$ и, в силу определения топологии произведения, найдутся такие открытые в X множества $O'x$ и $O''x$, что $(x, x) \in O'x \times O''x \subset U$. Но $y \in O'x \cap O''x$ по условию. Значит, $(x, y) \in U$ — т. е. точка (x, y) произведения $X \times X$, не лежащая, очевидно, на диагонали Δ, принадлежит пересечению всех открытых в $X \times X$ множеств, содержащих Δ.

369. Доказательство (α) может быть предоставлено читателю. Пример, требуемый в (β), можно построить так. Пусть множество X состоит из элементов некоторой последовательности $(x_n : n \in N^+)$ и еще двух точек: y и z. Топологию $\mathcal{T}$ определим так, чтобы последовательность $(x_n : n \in N^+)$ сходилась к y, а все точки, отличные от y, были изолированными. Аналогично определяется топология $\mathcal{T}'$ так, чтобы $(X, \mathcal{T}')$ было биконнектом и единственной неизолированной в $(X, \mathcal{T}')$ точкой была точка z. Проверьте, что точка (y, z) является предельной для диагонали $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ в пространстве $(X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T}')$.

370. Если выполняется условие (α), то $Ox_1 \times Ox_2$ — окрестность точки (x_1, x_2) в пространстве $(X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T}')$, не пересекающаяся с Δ. Следовательно, Δ замкнуто.

Обратно, если известно, что Δ замкнуто, то для произвольной пары $(x_1, x_2) \in (X \times X) \setminus \Delta$ непременно $x_1 \neq x_2$ и существует множество $U = Ox_1 \times Ox_2 \ni (x_1, x_2)$, для которого $U \cap \Delta = \Delta \cap Ox_1 \in \mathcal{T}_1$, $Ox_2 \in \mathcal{T}_2$. Очевидно, тогда $x_1 \in Ox_1$, $x_2 \in Ox_2$ и $Ox_1 \cap Ox_2 = \Delta$.

371. Для каждого $\alpha_0 \in M$ определим $\varphi(\alpha_0) \in D^\tau$ так: $x = \varphi(\alpha_0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_{\alpha_0} = 1$ и $x_\alpha = 0$ при $\alpha \neq \alpha_0$. Положим, далее, $U_{\alpha_0} = \{x \in D^\tau : x_{\alpha_0} = 1\}$ и $A = \{\varphi(\alpha) : \alpha \in M\}$. Тогда из $\varphi(\alpha') \neq \varphi(\alpha'')$ при $\alpha' \neq \alpha''$ следует, что $|A| = |M| = \tau$. Ясно, что $U_\alpha \cap A = \{\varphi(\alpha)\}$ для каждого $\alpha \in M$. Имея в виду определение подпространства и то, что каждое U_α открыто в D^τ, мы заключаем, что A — дискретное подпространство пространства D^τ.

372. (α) Пусть $X_\alpha = \{0, 1\}$ для каждого $\alpha \in M$, где $\{0\}$, $\{1\}$ — открытые в X_α множества и $|M| = \tau$. Для каждого $x \in D^\tau = \prod \{X_\alpha : \alpha \in M\}$ положим $\varphi(x) = \{\alpha \in M : x_\alpha = 1\}$. Ясно, что φ — взаимно однозначное отображение множества X на множество $\exp M$. Следовательно, $|D^\tau| = |\exp M| = 2^\tau$.

(β) Будем пользоваться теми же обозначениями, что и в (α). Рассмотрим стандартную базу $\mathcal{B}$ пространства D^τ. Произвольному элементу $U \in \mathcal{B}$ поставим в соответствие пару $d(U) = (N, t)$, где N — конечное подмножество множества M и ψ — отображение множества N в множество $\{0, 1\}$ такие, что $U = \{x \in D^\tau : x_\alpha = \psi(\alpha)$ при всех $\alpha \in N\}$. Пара $d(U)$ существует для каждого $U \in \mathcal{B}$ и в силу определения стандартной базы $\mathcal{B}$ произведения,

мы получили взаимно однозначное отображение d множества $\mathcal{B}$ и множество (на самом деле, на множество) $L \times Q$, где L — множество всех конечных подмножеств множества M, а $Q = \bigcup \{Q_N : N \in L\}$, причем Q_N — множество всех отображений множества N в множество $\{0, 1\}$. Из $|L| = |M| = \tau$ (ибо M бесконечно), и $|Q_N| \leqslant \aleph_0$ для всех $N \in L$, имеем $|Q| = |L| = \tau$. Следовательно, и $|L \times Q| = \tau$. Так как $\mathcal{B}$ равномощно подмножеству множества $L \times Q$, то $|\mathcal{B}| \leqslant \tau$. Следовательно, вес пространства D^τ не больше τ.

(γ) Пространство D^τ содержит дискретное подпространство мощности τ (см. 374 гл. I); так как вес такого подпространства равен τ и вес подпространства всегда не больше, чем вес самого пространства, то вес D^τ также τ.

376. Существует (см. 60 гл. I) семейство $\mathcal{P}$ такое, что $\bigcup \{P : P \in \mathcal{P}\} = A$, $|P| = \aleph_0$ для всех $P \in \mathcal{P}$, $|\mathcal{P}| = A^{\aleph_0} = \tau$ и $P \cap P' = \Delta$, если $P \in \mathcal{P}$, $P' \in \mathcal{P}$, $P \neq P'$. Тогда (см. 335 гл. II) $X = \prod \{X_P : P \in \mathcal{P}\}$, где $X_P = \prod \{D_\alpha : \alpha \in P\}$. На каждом X_P гомеоморфно канторову совершенному множеству (см. 301 гл. III). Значит, X_P гомеоморфно $\prod \{D_\alpha : \alpha \in P\}$, где каждое D_α — дискретное пространство, состоящее из двух точек. Тогда X гомеоморфно произведению $\prod \{D_\alpha : \alpha \in A\}$, а последнее есть D^τ.

377. Рассмотрим D^τ — тихоновское произведение τ экземпляров дискретных двухточечных пространств. Пространство D^τ хаусдорфово, вес его равен τ (см. 375 гл. II), а мощность множества всех точек D^τ равна 2^τ. Значит, A и D^τ равномощны, т. е. существует взаимно однозначное отображение f пространства D^τ на множество A. Это отображение позволяет как вместе исходную топологию в A, так и обычным образом все подмножества множества A, являющиеся образами при f открытых в D^τ множеств.

378. Зафиксируем в каждом X_α базу $\mathcal{B}_\alpha = \{U_\alpha^\beta : \beta < M\}$ мощности τ. Для каждого конечного подмножества N множества M обозначим через Q_N множество всех отображений множества N в множество M. Очевидно, $|Q_N| = |M^{|N|}|$. Следовательно, $|Q_N| = \tau$. Положим $L = \{N \subset M : |N| < \aleph_0\}$ и $U(N, \psi) = \{x \in X : x_\alpha \in U_\alpha^{\psi(\alpha)}$ при всех $\alpha \in N\}$, $N \in L$, $\psi \in Q_N$. Имеем: $|L| = \tau$ и, следовательно, $|\bigcup \{Q_N : N \in L\}| = \tau$. Поэтому мощность множества $\mathcal{B} = \{U(N, \psi) : N \in L, \psi \in Q_N\}$ не превосходит τ. Но $\mathcal{B}$, очевидно, — база пространства X. Следовательно, вес X не превосходит τ. Из 360 гл. II следует теперь, что вес X равен τ.

380. Зафиксируем на A хаусдорфову топологию веса τ — это возможно в силу 377 гл. II. Пусть $\mathcal{B}$ — база мощности τ пространства A. Обозначим через $\mathcal{C}$ множество всевозможных конечных наборов попарно не пересекающихся элементов базы $\mathcal{B}$. Тогда (см. 58 гл. I) $|\mathcal{C}| = \tau$. Для каждого $S \in \mathcal{C}$ обозначим через Q_S множество всех отображений множества S в Y. Тогда $|Q_S| = |Y^S| = |Y| = \tau$ (см. 53 гл. I). В каждом X_α зафиксируем некоторую точку x_α^0. Имеем: $|\bigcup \{Q_S : S \in \mathcal{C}\}| = \tau$ (57 гл. I), поэтому множество $\mathcal{P} = \{(S, \psi) : S \in \mathcal{C}, \psi \in Q_S\}$ имеет мощность τ. Каждому элементу $p = (S, \psi) \in \mathcal{P}$ поставим в соответствие точку $\varphi(p) \in X$, определенную следующим образом: $x = \varphi(p)$ тогда и только тогда, когда $x_\alpha = \psi(U)$, если $\alpha \in U \in S$, и $x_\alpha = x_\alpha^0$, если $\alpha \in \bigcup (U : U \in \mathcal{S})$. Это определение корректно, ибо различные элементы семейства S не пересекаются. Положим $R = \{\varphi(p) : p \in \mathcal{P}\}$. Тогда $R = |\mathcal{P}| = \tau$ и R плотно в X — последнее проверяется непосредственно.

381. Зафиксируем дискретное пространство Z мощности τ. В каждом X_α выберем всюду плотное подпространство Y_α мощности $\leqslant \tau$. Положим $Z_\alpha = Z$ для каждого $\alpha \in M$ и обозначим через f_α какое-нибудь отображение пространства Z_α на пространство Y_α — это автоматически непрерывно (см. 264 гл. II).

Рассмотрим тихоновское произведение $Z = \prod \{Z_\alpha: \alpha \in M\}$ и его отображение f в пространства X, являющееся произведением отображений f_α, т. е. $f = \prod \{f_\alpha: \alpha \in M\}$. Это отображение непрерывно, ибо каждый сомножитель является непрерывным отображением. Пусть в Z есть всюду плотное множество мощности $\leqslant \tau$ (см. 320 гл. II). Следовательно, и в подпространстве (Zf) пространства X есть всюду плотное множество мощности $\leqslant \tau$. Заметим теперь, что $[f(Z)] = A$ — это следует из определения отображения f и того, что множество $f_\alpha[Z_\alpha] = Y_\alpha$ всюду плотно в X_α (см. 357 гл. II).

382. Для каждого $x \in A$ положим $M_x = \{\alpha \in M: x_\alpha \neq x^0_\alpha\}$. Из $A \subset Y$ и определения Y следует, что $|M_x| \leqslant \aleph_0$. Положим $M_A = \bigcup \{M_x: x \in A\}$. Тогда (см. 57 гл. I) $|M_A| \leqslant 2^\tau$. Положим $A^* = \{x \in X: x_\alpha = x^0_\alpha$ при $\alpha \notin M_A\}$. Пространство A^* как подпространство пространства X гомеоморфно тихоновскому произведению $\prod \{X_\alpha: \alpha \in M_A\}$ (доказать это аккуратно!). При этом $A \subset A^*$. Но в $\prod \{X_\alpha: \alpha \in M_A\}$, а значит, и в A^* существует всюду плотное множество мощности, не превосходящей τ (см. 381 гл. II).

383. Пусть $\mathfrak{V} = \{V_\beta: \beta \in L\}$. $\overline{V_{\beta'}} \cap \overline{V_{\beta''}} = \Lambda$ при $\beta' \neq \beta''$, V_β — непустое открытое в X множество для каждого $\beta \in L$. Предположим, что $|L| \geqslant \aleph_1$, и выберем $L_1 \subset L$, для которого $|L_1| = \aleph_1$. Зафиксируем теперь некоторую точку $x^* \in X$. Ее $\aleph_1$-окрестность $\sum(x^*)$ всюду плотна в X и, следовательно, пересекается с каждым V_β. Для каждого $\beta \in L_1$ выберем в $\sum(x^*) \cap V_\beta$ точку x^β и положим $A = \{x^\beta: \beta \in L_1\}$. Тогда $x^{\beta'} \neq x^{\beta''}$ при $\beta' \neq \beta''$, и потому $|A| = |L_1| = \aleph_1$. Из $A \subset \sum(x^*)$ и $|A| = \aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$ следует (см. 382 гл. II), что существует $\overline{A} \subset X$, для которого $|\overline{A}| \leqslant \aleph_1$ и $[\overline{A}] \supset A$. Но тогда $[\overline{A}] \ni x_\beta$, и так как $V_\beta \ni x_\beta$, то $\overline{A} \cap V_\beta \neq \Lambda$ для каждого $\beta \in L_1$. Однако, так как $V_{\beta'} \cap V_{\beta''} = \Lambda$ при $\beta' \neq \beta''$ и $|L_1| = \aleph_1$, мы заключаем, что множество $\overline{A}$ должно быть несчетным, получили противоречие.

385. Пусть $\mathfrak{B}$ — стандартная база пространства X. В силу 102 гл. II существует семейство $\mathfrak{V}$ попарно не пересекающихся элементов базы $\mathfrak{B}$ такое, что $\bigcup \{V: V \in \mathfrak{V}\} = U \subset [\bigcup \{V: V \in \mathfrak{V}\}] = [U] = A$. Так как каждое X_α сепарабельно, то множество любого дизъюнктного семейства непустых открытых подмножеств пространства X не происходит $\aleph_0$ (383 гл. II). Значит, $|\mathfrak{V}| \leqslant \aleph_0$. В силу 384 гл. II для каждого $V \in \mathfrak{V} \subset \mathfrak{B}$ существует конечное множество $C_V \subset M$ такое, что V не зависит от $L_V = M \setminus C_V$. Но тогда множество $W = \bigcup \{V: V \in \mathfrak{V}\}$ не зависит от множества $L = \bigcap \{M \setminus C_V: V \in \mathfrak{V}\} = M \setminus \bigcup \{C_V: V \in \mathfrak{V}\} = M \setminus C$, где $C = \bigcup \{C_V: V \in \mathfrak{V}\}$ — счетное множество. Легко показать, что и $[W]$ не зависит от L (см. также 328 гл. II). Но $[W] = A$, ибо $A = [U]$ и $[U] = [W]$, как это видно из включения: $W \subset U \subset [W]$.

386. Пусть $\mathfrak{B} = \{V_i: i \in N^+\}$ — счетная база в Y. Положим $U_i = f^{-1}V_i$, $A_i = [U_i]$, $i \in N^+$. В силу 385 гл. II для каждого $i \in N^+$ существует счетное множество $C_i \subset M$ такое, что A_i не зависит от $L_i = M \setminus C_i$. Положим $C = \bigcup \{C_i: i \in N^+\}$, $L = M \setminus C$ и покажем, что f не зависит от L.

Предположим, что нашлись $x' \in X$, $x'' \in X$, для которых, при всех $\alpha \in C = M \setminus L$, имеет место равенство $x'_\alpha = x''_\alpha$ и $f(x') = x' \neq x'' = f(x'')$. Так как $\mathfrak{B}$ — база в Y, то можно выбрать $i' \in N^+$ и $i'' \in N^+$ такие, что $x' \in V_{i'}$, $x'' \in V_{i''}$ и $[V_{i'}] \cap [V_{i''}] = \Lambda$. Тогда $f^{-1}[V_{i'}] \cap f^{-1}[V_{i''}] = \Lambda$ и, в силу непрерывности f, получим $A_{i'} = [f^{-1}V_{i'}] \subset f^{-1}[V_{i'}]$, $A_{i''} = [f^{-1}V_{i''}] \subset f^{-1}[V_{i''}]$. Следовательно, $A_{i'} \cap A_{i''} = \Lambda$. Из $C \supset (C_{i'} \cup C_{i''})$ и того, как выбраны точки x' и x'', следует, что $x'_\alpha = x''_\alpha$ при всех $\alpha \in C_{i'}$. Но $x' \in A_{i'}$. Следовательно, $x'' \in A_{i'}$, а это противоречит тому, что $x'' \in A_{i''}$ и $A_{i'} \cap A_{i''} = \Lambda$.

387. Для доказательства утверждений (а), (б), (в) и (г) достаточно сопоставить соответствующие определения. Докажем (д). Из (г) следует, что $y' \in [P']$. В силу (в) $P' = (B, y')(P) = (B, y')(B, y')(P) = (B, y')(P')$. Из (а) следует, что $(B, y')(y') = y''$. Так как отображение (B, y') непрерывно и, в силу (г), $y' \in [P']$, то $y'' \in [P']$.

388. Пусть $x' \in [B]_L$ и $x'' \in Z$, $x''_\alpha = x'_\alpha$ при всех $\alpha \in M \setminus L$ и $f(x') = y' \neq y'' = f(x'')$. Выберем открытые в Y множества V' и V'', для которых $V' \ni y'$, $V'' \ni y''$ и $V' \cap V'' = \Lambda$. Положим $U' = f^{-1}V'$. Множество U' открыто в X, $U' \ni x'$ и, следовательно, $U' \cap B \neq \Lambda$. Положим $A = U' \cap B$. Тогда $x' \in [A]$ и $fA \subset fU' = V' \subset X \setminus V''$, откуда следует, что $y'' \notin [fA]$.

Рассмотрим теперь множества $A' = (L, x')(A)$ и $A'' = (L, x'')(A)$, содержащиеся в Z, ибо Z является L-выпуклым. Из $A \subset B$ следует, что f не зависит на A от L. Поэтому $fA' = fA = fA''$. Но $x' \in [A']$ (см. (д) задачи 387 гл. II), поэтому $y'' = fx'' \in [fA'] = [fA]$ — получили противоречие.

389. Положим $y = f(x)$. Пусть $\mathfrak{B}$ — стандартная база топологии пространства X. Для каждого элемента $V \in \mathfrak{B}$ зафиксируем такой элемент $\overline{V} \in \mathfrak{B}$, что $x \in \overline{V}$ и $f(\overline{V} \cap Z) \subset V$ (это возможно в силу непрерывности отображения f). Положим $Q = \{\overline{V}: V \in \mathfrak{B}\}$ и $A_x = \bigcap \{\overline{V} \cap Z: \overline{V} \in Q\}$. Тогда $Q \subset \mathfrak{B}$, $|Q| \leqslant |\mathfrak{B}|$, $A_x \ni x$ и $f(A_x) \subset \bigcap \{f(\overline{V} \cap Z): \overline{V} \in Q\} \subset \bigcap \{V: V \in \mathfrak{B}\} = \{y\}$. Множество $\overline{V}$ не зависит от множества $L_{\overline{V}} = M \setminus M(\overline{V})$ (см. стр. 58). Положим $C_x = \bigcup \{M(\overline{V}): \overline{V} \in Q\}$. Тогда $|C_x| \leqslant |\mathfrak{B}|$, и из $A_x \subset \{\overline{V}: \overline{V} \in Q\}$ следует, что A_x не зависит от $L_x = M \setminus C_x$.

390. Положим $A = f^{-1}B$. Зафиксируем для каждой точки $x \in A$ множество $A_x \subset A$ и множество $C_x \subset M$ такие, что (а) $f(A_x) = f(x)$, (б) $|C_x| \leqslant \aleph_1$ и (в) A_x не зависит от $M \setminus C_x$ (это возможно — см. 388 гл. II). Определим теперь по индукции последовательность $\{A_i: i \in N^+\}$ счетных подмножеств множества A и последовательность $\{C_i: i \in N^+\}$ счетных подмножеств множества M так, чтобы для всех i выполнялись условия: 1) $A_i \subset A_{i+1}$, 2) $C_i = \bigcup \{C_x: x \in A_i\}$ и 3) $\pi_{C_i}(A_{i+1})$ всюду плотно в $\pi_{C_i}(A) = \prod \{X_\alpha: \alpha \in C_i\}$. Начнем с $A_1 = (x_1)$, где x_1 — произвольно выбранная точка множества A, и $C_1 = (A)$.

Шаг индукции не вызывает затруднений, ибо $\prod \{X_\alpha: \alpha \in C_i\}$ — каждый раз пространство со счетной сетью и, следовательно, всякое его подпространство обладает счетным всюду плотным множеством. Очевидно, из $A_i \subset A_{i+1}$ следует, что $C_i \subset C_{i+1}$ для всех i. Положим $A_\infty = \bigcup \{A_i: i \in N^+\}$, $C_\infty = \bigcup \{C_i: i \in N^+\}$ и $A^* = \bigcup \{A_x: x \in A_\infty\}$.

Заметим, что $|C_\infty| \leqslant \aleph_0$, $|A_\infty| \leqslant \aleph_0$ и $f(A_\infty) = fA^*$. Очевидно, множества A_∞ не зависят от $M \setminus C_\infty$ и отображение f не зависит от $M \setminus C_\infty$ на A_∞ (см. определение C_i). С другой стороны, $\pi_{C_\infty}(A^*)$ всюду плотно в $\pi_{C_\infty}(A) \subset \prod \{X_\alpha: \alpha \in C_\infty\}$ — это сразу следует из определения топологии произведения, соотношений $C_i \subset C_{i+1}$, $C_\infty = \bigcup \{C_i: i \in N^+\}$ и того, что $\pi_{C_i}(A^*)$ всюду плотно в $\pi_{C_i}(A_i)$ для каждого i (последнее имеет место, так как $A^* \supset A_{i+1}$). Но из $\aleph_0$-выпуклости (и следующей из нее C_∞-выпуклости) множества Z и полученности A^* от $M \setminus C_\infty$ (и соотношения $A^* \subset A$) вытекает тогда, что A^* всюду плотно в A. Поэтому $fA^* = B^*$ всюду плотно в B. Но $B^* = fA^* = fA_\infty$ (см. определение A_∞). Значит, $|B^*| \leqslant |A_\infty| \leqslant \aleph_1$. Наконец, положим $(M \setminus C_\infty)^* = (A_\infty) = \overline{A}$. Тогда $\overline{A} \supset Z$, так как Z является C_∞-выпуклым, и $B^* = fA_\infty = f\overline{A}$, так как f не зависит от $M \setminus C_\infty$. Очевидно, $|\overline{A}| \leqslant |A_\infty| \leqslant \aleph_0$, т. е. C_∞ и $\overline{A}$ — искомые множества.

391. В силу 380 гл. II для произвольно взятой точки $x^* \in X$ найдутся счетное множество $C \subset M$ и счетное множество Q, лежащие в C-оболочке точки x^*, такие, что $[fQ] \supset Y$. Но из предположений следует, что $[Q]$ —

компакт. Так как f непрерывно, то $f(Q)$ — тоже компакт, но Y — хаусдорфово пространство, следовательно, $f(Q)$ замкнуто в Y. Из этих утверждений следует, что $f(Q) = \overline{f(Q)} \supset [Y]$, значит, $[Y]$ — компакт. См. при этом задачи 265, 232, 58, 92 гл. III.

392. Пусть Y_α — обычное пространство вещественных чисел для каждого $\alpha \in M$, $|M| \geqslant \aleph_1$ и Z_α — множество всех иррациональных чисел, $Z_\alpha \subset Y_\alpha$. Тогда Z_α — замкнутое дискретное подпространство пространства X_α. Поэтому тихоновское произведение $Z = \prod \{Z_\alpha : \alpha \in M\}$ естественно гомеоморфно замкнутому подпространству пространства $X = \prod \{Y_\alpha : \alpha \in X\}$ (см. 361 гл. II). Следовательно (см. 82 гл. II), достаточно доказать, что Z не компактно. Положим $A = \{x \in Z : |\{\alpha \in M : x_\alpha = 0\}| \leqslant 1$ для каждого $i \geqslant 1\}$ и $B = \{x \in Z : |\{\alpha \in M : x_\alpha = i\}| \leqslant 1$ для каждого $i \neq 1\}$. Тогда $A \cap B = \varnothing$, A замкнуто в Z и B замкнуто в Z. Предположим теперь, что пространство Z нормально. Тогда существует непрерывная вещественная функция f на Z, для которой $f(A) = 0$ и $f(B) = 1$ (см. 25 гл. III). В силу 386 гл. II найдется счетное множество $L \subset M$ такое, что если $z \in Z$, $z' \in Z$ и $z \mid L = z' \mid L$, то $f(z) = f(z')$.

Рассмотрим теперь $z^0 \in Z$ и $z^1 \in Z$, которые отображаются L взаимно однозначно в множество всех целых чисел, больших единицы, и удовлетворяют условиям: $z^0(M \setminus L) = 0$, $z^1(M \setminus L) = 1$. Тогда $z^0 \in A$, и потому $f(z^0) = 0$; $z^1 \in B$, и потому $f(z^1) = 1$; $z^1 \mid L = z^0 \mid L$, следовательно, $f(z^0) = f(z^1)$, т. е. $0 = 1$ — получили противоречие.

393. См. Горсон [1] и Комбаров [1], [2].

394. Да. Утверждать можно то доказано недавно в работе Комбарова и Малыхина [1].

395. Рассмотрим произвольное семейство γ непустых открытых в X попарно не пересекающихся множеств. Предположим, что $|\gamma| \geqslant 2^{\mathfrak{c}}$. Пусть все $U \in \gamma$ имеют вид $U = \prod \{U_t : t \in T\}$, где U_t открыто в X_t и $U_t \neq Y_t$ лишь для конечного множества значений $t \in T$ — это предположение, очевидно, не является ограничением. Пусть $U' \in \gamma$, $U'' \in \gamma$ и $U' \neq U''$. Тогда $U' \cap U'' = \varnothing$ и из $U' = \prod \{U'_t : t \in T\}$, $U'' = \prod \{U''_t : t \in T\}$ следует, что $U'_{t_0} \cap U''_{t_0} = \varnothing$ для некоторого $t_0 \in T$. Зафиксируем такое t_0 и положим $f(U', U'') = t_0$. Отображение f определено на множестве всех неупорядоченных пар различных элементов семейства γ. Для каждого $U' \in \gamma$ множество $\{f(U', U'') : U' \subset \gamma,\ U'' \neq U'\} \subset \{t \in T : U'_t \neq X_t\} = T'$ конечно. Следовательно, разбиение множества неупорядоченных пар различных элементов γ на множества $f^{-1}t$, где t пробегает T, удовлетворяет ограничениям из задачи 122 гл. I. Поэтому существует $\gamma^* \subset \gamma$ и $t^* \in T$ такие, что $|\gamma^*| \geqslant \aleph_1$ и если $V' \in \gamma^*$, $V'' \in \gamma^*$, $V' \neq V''$, то $f(V', V'') = t^*$. Тогда $\gamma_{t^*} = \{V_{t^*} : V \in \gamma^*\}$ — семейство попарно не пересекающихся непустых открытых в X_{t^*} множеств и $|\gamma^*_{t^*}| = |\gamma^*| \geqslant \aleph_1$ — получилось противоречие.

396. Пусть $\{V_\alpha(x) : x \in \Psi_x\}$ — точная система окрестностей точки $x \in Y$, что $\bigcap \{V_\alpha(x) : x \in \Psi_x\} = \{x\}$. Введем следующие обозначения: $E_\alpha(x) = \bigcup \{V_\alpha(z) : z \prec x,\ z \in \Psi_x\} \setminus V_\alpha(x)$ и $U_\alpha(x) = X \setminus E_\alpha(x)$. Очевидно, $\{E_\alpha(x) : x \in \Psi_x\}$ — семейство попарно не пересекающихся множеств; объединение его элементов есть $X \setminus \{x\}$. Кроме того, $U_\alpha(x) \supset V_\alpha(x)$ и, следовательно, $U_\alpha(x)$ — окрестность точки x. Для $x \in A$ и $x \in Y$ определим $c_x(x)$ как тот — единственный — элемент множества Ψ_x, для которого $x \in E_\alpha(c_x(x))$. Теперь мы можем определить искомое λ множества A в X^ω следующим правилом: $\lambda(x) = (a, \{c_\alpha(x) : \alpha \in Y\})$ для всех $x \in A$. Так как точки множества A индексированы в X, то λ — действительно вложение, т. е. гомеоморфизм A на $\lambda(A)$; $\pi^{-1}(x)$ — окрестность точки x, для которой $\pi^{-1}(x) \mid \lambda(A) = \{\lambda(x)\}$, где $\pi : X^\omega \to X$ — естественное проектирование произведения на сомножитель. Через π_X условимся обозначать естественное проектирование $X^\omega \to \Psi_X$. Напомним, что $\lambda(A)$ замкнуто в X^ω. Пусть $z \in X^\omega \setminus \lambda(A)$. Положим для случая: I) $\pi(z) \in A$ и II) $\pi(z) \in Y$. Рассмотрим I). Положим $a = \pi(z)$. Существует $y_1 \in Y$, для которого $x_{\alpha_0}(z) \neq c_{y_1}(a)$ — иначе было бы $z = \lambda(a) \in \lambda(A)$. Но тогда $\pi^{-1}(a) \cap \pi^{-1}_{\alpha_0}(\iota_{y_1}(z))$ — окрестность точки z в X^ω, не пересекающаяся с $\lambda(A)$.

Рассмотрим II). Тогда $z(\alpha) = y_0 \in Y$. Положим $\iota_1 = \pi_{\alpha_0}(z)$. Множество $\pi^{-1}(U_{y_0}(\iota_0)) \cap \pi^{-1}_{\alpha_0}(\iota_1)$ — окрестность точки z и X^ω, не имеющая общих точек с множеством $\lambda(A)$, ибо из $a \in U_{y_1}(\iota_0) \cap A$ следует всегда, что $\iota_{y_0}(a) \neq \iota_1$, т. е. что $\pi_{\alpha_0}(\lambda(a)) \neq \iota_1$. Итак, $\lambda(A)$ замкнуто в X^ω.

397. (а) Рассмотрим нулевую функцию $0 \in C_p[0, 1]$: $0(x) = 0$. Если бы в 0 выполнялась первая аксиома счетности, то нашлось бы счетное множество $\mathfrak{B}$ элементов стандартной предбазы пространства $C_p[0, 1]$ такое, что семейство $\overline{\mathfrak{B}}$ всех множеств, являющихся пересечениями конечного числа элементов $\mathfrak{B}$, составляет базу в 0. Пусть $\mathfrak{B} = \{(x_i, U_i) : i \in N^+\}$, где $x_i \in I$ и U_i — некоторая окрестность нуля в I. Отрезок множеств; зафиксируем $x^0 \subset I \setminus \{x_i : i \in N^+\}$; положим $U^0 = [0, \frac{1}{2}(x^0)) \subset I$ (т. е. $U^0 = \{x \in I : 0 \leqslant x < \frac{1}{2}(x^0)\}$). Покажем, что окрестность (x^0, U^0) точки 0 не содержит никакого множества, принадлежащего $\overline{\mathfrak{B}}$.

Рассмотрим произвольный конечный набор $((x_{i_1}, U_{i_1}), \ldots, (x_{i_k}, U_{i_k}))$ элементов семейства $\mathfrak{B}$. Так как $x^0 \notin \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$, то найдется такое непрерывное отображение $f : I \to I$, что $f(x^0) = 1$ и $f(x_{i_j}) = 0 \in U_{i_j}$ при всех $j = 1, \ldots, k$. Тогда $f \in \bigcap \{(x_{i_j}, U_{i_j}) : j = 1, \ldots, k\}$ и $f(x^0) \notin U^0$, т. е. $f \notin (x^0, U^0)$. Следовательно, $\bigcap \{(x_{i_j}, U_{i_j}) : j = 1, \ldots, k\} \not\subset (x^0, U^0)$.

Утверждение (б) вытекает из того, что $|I| = 2^{\aleph_0}$, и из определения тихоновского произведения: $2^{\aleph_0}$ экземпляров отрезка (элементы этого произведения суть не что иное, как отображения произвольно фиксированного множества мощности $2^{\aleph_0}$ в I). Ничто не мешает взять в качестве такого множества сам отрезок I. Топология произведения при этом превращается как раз в топологию поточечной сходимости. Определив $C_p[0, 1]$, мы оставляем только непрерывные отображения отрезка в себя, т. е. переходим к подпространству указанного произведения. Следовательно, $C_p[0, 1]$ вполне регулярно (задача 32 гл. III). Для доказательства (в) достаточно представить $\{0\}$ как пересечение счетного семейства открытых в $C_p[0, 1]$ множеств.

Пусть $Q = \{x_i : i \in N^+\}$ — какое-нибудь счетное всюду плотное в I множество. Положим $U_i = [0, x_i)$, $i \in N^+$. Тогда $\{0\} = \bigcap \{(U_{x_i}, i) : i \in N^+;\ i \in N^+\}$, ибо если $f \in C_p[0, 1]$ и f принадлежит правой части, то $f(Q) = \{0\}$, и по непрерывности f следует, что $f(I) = \{0\}$, т. е. что $f = 0$.

398. Так же как и в задаче 397 гл. II, можно показать, что $C_k(X, Y)$ гомеоморфно подпространству пространства $Y^{|X|}$. Так как произведение любого множества регулярных пространств регулярно и подпространство регулярного пространства регулярно, то $C_0(X, Y)$, как и любое его подпространство, регулярно. Найдется теперь множество $\mathcal{C}[0, 1]$ всех элементов пространства $C_0(X, Y)$ новой топологией $\mathcal{T}^*$. Ее предбаза $\mathcal{P}$ состоит из всех множеств вида (U, V), где $U \in \mathcal{B}_1$ и $V \in \mathcal{B}_2$. Причем $(U, V) = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] : f(U) \subset V\}$, а $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ — произвольно фиксированные счетные базы в X и Y соответственно. Тогда $\mathcal{P} \mid \leqslant \aleph_0$ (см. 58 гл. I), и значит, $(\mathcal{C}[0, 1], \mathcal{T}^*)$ — пространство со счетной базой. Проверим, что $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$. Достаточно убедиться, что $(x, V) \in \mathcal{T}^*$ для любого $V \in \mathcal{B}_2$. Пусть $f \in (x, V)$. Тогда $f(x) \in V$. Так как отображение $f : X \to Y$ непрерывно, то найдется окрестность Ox точки x, для которой $f(Ox) \subset V$. Тогда $f \in (Ox, V) = (x, V)$. Значит, $(x, V) \in \mathcal{T}^*$ и $\mathcal{T}^* \supset \mathcal{T}$. Но тогда пространство $C_p(X, Y)$ как умножение пространства со счетной базой обладает счетной сетью. Но всякое пространство со счетной сетью вполне финально компактно и наследственно сепарабельно (133, 142, 96 гл. II).

ГЛАВА III

БИКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ПОДПРОСТРАНСТВА. ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С БИКОМПАКТНОСТЬЮ

§ 1. Функциональная отделимость. Вполне регулярные и нормальные пространства

Здесь мы рассмотрим особенно важный для топологии и ее приложений вид отделимости — *функциональную отделимость*, или, как мы будем ее называть, α-*отделимость*. Скажем, что подмножество A топологического пространства X *α-отделено* от подмножества B этого пространства, если на X существует непрерывная вещественная функция f такая, что $f(A)=\{0\}$ и $f(B)=\{1\}$. Семейство ξ подмножеств пространства X называется α-*семейством*, если для каждого $C\in\xi$ существует $B\in\xi$ такое, что B α-отделено от $A=X\setminus C$ (при этом, очевидно, $B\subset C$). Если $A\subset B$ и A α-отделено от $X\setminus B$, то B называется α-*окрестностью* множества A. Мы будем говорить об α-*фильтрах* и α-*предфильтрах*, имея в виду фильтры, соответственно предфильтры, которые являются α-семействами. Но α-*ультрафильтр* — это α-фильтр, который не содержится ни в каком отличном от него α-фильтре. Вообще говоря, α-ультрафильтр не обязан быть ультрафильтром. Последние определения можно отнести к подсемействам фиксированного семейства $\mathscr{E}$ множеств (как на стр. 20). Так, по семейству всех открытых в X множеств (в роли $\mathscr{E}$) определяются *открытые* α-*фильтры*, *открытые* α-*ультрафильтры* и т. д. *).

Важную роль играет понятие отделимости точки от множества посредством семейства отображений. Скажем, что семейство $\mathscr{F}$ отображений пространства X в какие-то топологические пространства *отделяет* точку $x\in X$ от множества $A\subset X$, если существует $f\in\mathscr{F}$, $f\colon X\to Y_f$, такое, что $f(x)\in[f(A)]_{Y_f}$.

Далее, это семейство $\mathscr{F}$ называется *регулярным*, если все $f\in\mathscr{F}$ непрерывны и $\mathscr{F}$ отделяет каждую точку множества X от каждого не содержащего ее замкнутого в X множества P. Если, кроме того, все $f\in\mathscr{F}$ являются вещественными функциями на X, мы говорим, что $\mathscr{F}$ — *регулярное* (или *расчленяющее*) семейство функций на X.

*) Все эти понятия восходят к работе Александрова [1].

Если на T_1-пространстве X существует регулярное семейство функций, пространство X называется *вполне регулярным* (см. также стр. 56).

Рассматривая непрерывные вещественные функции на топологических пространствах, мы с необходимостью выделяем в этих пространствах подмножества специального вида — так называемые нуль-множества и конуль-множества. Множество $A\subset X$ называется *нуль-множеством*, если существует непрерывная вещественная функция f на X такая, что $A=f^{-1}(0)$. Множество $B\subset X$ называется *конуль-множеством*, если $X\setminus B$ — нуль-множество.

Внешней псевдобазой множества A в топологическом пространстве X, его содержащем, называется любое семейство γ открытых в X множеств, для которого $[x]=\bigcap\{U: U\in\gamma \text{ и } x\in U\}$ для любого $x\in X$.

Наконец, совершенно исключительную роль будут играть, начиная с этого параграфа, во всей книге *тихоновские кубы* I^τ — здесь τ — любое кардинальное число и I^τ — тихоновское (топологическое) произведение τ экземпляров отрезков. Очевидно, когда τ — конечное кардинальное (т. е. натуральное) число, I^τ — обычный куб в τ-мерном евклидовом пространстве.

1. У функционально отделенных множеств имеются непересекающиеся α-окрестности.

2. Семейство ξ_A всех α-окрестностей множества A в пространстве X является α-семейством на X.

3. Каждое центрированное α-семейство на пространстве X содержится в некотором α-ультрафильтре на X.

4. Каждый α-фильтр является фильтром.

5. Пусть β — α-ультрафильтр на пространстве X, A — некоторое множество и ξ — семейство всех его α-окрестностей в X. Тогда если $A\cap U\neq\Lambda$ при всех $U\in\beta$, то $\xi\subset\beta$.

6. Если β_1 и β_2 — α-фильтры на пространстве X, причем $U_1\cap U_2\neq\Lambda$ для любых $U_1\in\beta_1$, $U_2\in\beta_2$, то $\beta_1\cup\beta_2$ — также α-семейство.

7. T_1-пространство X вполне регулярно в том и только в том случае, если для каждой точки $x\in X$ семейство α всех открытых в X множеств, содержащих эту точку, является α-фильтром.

8. Каждое подпространство вполне регулярного пространства вполне регулярно.

9. Приведите пример регулярного, но не вполне регулярного пространства.

10. Пусть X — вполне регулярное пространство, $F\subset X$, $Y=X\setminus F$, β — α-ультрафильтр на X и $\beta'=\{U\cap Y: U\in\beta\}$. Тогда верно хотя бы одно из следующих утверждений: 1) β' — α-ультрафильтр на Y; 2) каждый элемент семейства β пересекается с F.

11. Докажите, что $X^*\times X^*$ не нормально (здесь X^* — пространство из задачи 104 (с. 11)), но вполне регулярно.

12. Пусть X — вполне регулярное пространство, F — бикомпакт, $F \subset X$ и P — замкнутое в X множество, не пересекающееся с F. Тогда на X существует непрерывная вещественная ограниченная функция f такая, что $f(F) = 0$ и $f(P) = 1$.

13. Пусть X — множество точек полуплоскости, ограниченной прямой l, и $Y = X \setminus l$. Через $O(x, r)$, где r — положительное вещественное число и $x \in l$, будем обозначать внутренность круга радиуса r, лежащего в Y и касающегося l в точке x. Положим $\bar{O}(x, r) = O(x, r) \cup \{x\}$, $\mathscr{L} = \{\bar{O}(x, r): x \in l, r > 0\}$; через $\mathscr{U}$ обозначим семейство всех открытых в обычной топологии плоскости множеств, лежащих в Y. Покажите, что 1) $\mathscr{B} = \mathscr{L} \cup \mathscr{U}$ — база некоторой топологии $\mathscr{T}$ на X, содержащей обычную топологию; 2) l — дискретное подпространство пространства X; 3) топология, индуцированная $(X, \mathscr{T})$ на Y, совпадает с топологией, индуцированной на Y обычной топологией плоскости; 4) X является суммой двух метризуемых подпространств, из которых одно замкнуто, а другое открыто, и является множеством типа F_σ; 5) X вполне регулярно; 6) X не нормально. (Пространство Немыцкого.)

14. Каждое пространство X, обладающее базой $\mathscr{B}$ из открыто-замкнутых множеств, вполне регулярно.

15. Каждое T_1-пространство X, только одна точка x_0 которого не изолирована, нормально.

16. Если X — хаусдорфово пространство и множество всех неизолированных точек пространства X конечно, то X нормально.

17. Всякое ли счетное хаусдорфово пространство нормально?

18. Каждое ли счетное регулярное пространство нормально?

19. Регулярное финально компактное пространство X нормально. Если X регулярно, $A_1 \subset X$, $A_2 \subset X$ — финально компактные подпространства $A_1 \cap [A_2] = A$, $A_2 \cap [A_1] = A$, то у A_1 и A_2 имеются непересекающиеся окрестности.

20. Докажите, что регулярное пространство X со счетной базой совершенно нормально (см. стр. 58).

21. Если X — нормальное пространство и $\gamma = \{U_1, \ldots, U_k\}$ — произвольное его конечное открытое покрытие, то существуют замкнутые множества $F_1, \ldots, F_k$ такие, что $\bigcup \{F_i: i = 1, \ldots, k\} = X$ и $F_i \subset U_i$, $i = 1, \ldots, k$.

22. Если $A = \{x_n: n \in N^+\}$ — замкнутое счетное дискретное подпространство нормального пространства X, причем $x_{n'} \neq x_{n''}$, если $n' \neq n''$, то существует семейство $\{U_n: n \in N^+\}$ открытых в X множеств такое, что $x_n \in U_n$ при всех $n \in N^+$ и, кроме того, у всякой точки $x \in X$ имеется окрестность, пересекающаяся не более чем с одним элементом этого семейства.

23. Если тихоновское произведение $X \times Y$ пространств X и Y наследственно нормально, то либо Y совершенно нормально, либо каждое счетное множество, лежащее в X, замкнуто.

24. Пусть X — нормальное пространство, а U_0 и U_1 — два его открытых множества, для которых $[U_0] \subset U_1$.

(а) Постройте для каждого двоично-рационального числа $r = \frac{q}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, $q = 1, 2, \ldots, 2^n$, открытые множества U_r таким образом, чтобы $[U_{r'}] \subset U_r$, как только $r' < r$.

(б) Покажите, что открытые множества $U_t = \bigcup \{U_r: r \leqslant t\}$, если $t \in [0, 1]$, и $U_t = X$, если $t \geqslant 1$, обладают тем же свойством: $[U_{t'}] \subset U_{t''}$, как только $t' < t''$.

(в) Покажите, что функция $f(x) = \inf \{t: x \in U_t\}$ непрерывна на X и равна нулю в точках множества $[U_0]$.

25. Докажите, что пространство X нормально тогда и только тогда, когда для любых двух непересекающихся замкнутых в X множеств F_0 и F_1 существует непрерывная на всем X функция $f(x)$: $|f(x)| \leqslant 1$, $f(x) = 0$, если $x \in F_0$, и $f(x) = 1$, если $x \in F_1$.

26. Покажите, что всякое нормальное пространство вполне регулярно.

27. Докажите, что следующие утверждения о пространстве X равносильны:

(А) каждое подпространство пространства X нормально;

(Б) каждое открытое подпространство пространства X нормально.

28. Если X — нормальное пространство и Y — его подпространство типа F_σ (т. е. $Y = \bigcup \{F_i: i \in N^+\}$, где все F_i замкнуты в X), то Y тоже нормально.

29. Каждое подпространство совершенно нормального пространства X нормально.

30. Докажите, что замкнутое подмножество F нормального пространства X имеет тип G_δ тогда и только тогда, когда оно является нуль-множеством.

31. Пусть X — нормальное пространство, A, B — замкнутые в нем непересекающиеся множества, c — положительное вещественное число. Тогда существует непрерывная вещественная функция на X такая, что $f(A) = \{-c\}$, $f(B) = \{c\}$ и $f(X) \subset [-c, c]$.

32. Пусть X — нормальное пространство, A — его замкнутое подпространство, c — положительное вещественное число и f_0 — непрерывная вещественная функция на пространстве A такая, что $|f_0(x)| \leqslant c$ при всех $x \in A$. Тогда существует такая вещественная функция g, определенная и непрерывная на всем X, что $|g(x)| < \frac{1}{3} c$ при всех $x \in X$ и $|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2}{3} c$ при всех $x \in A$.

33. Докажите, что всякую ограниченную непрерывную вещественную функцию f, определенную на замкнутом множестве F

нормального пространства X, можно продолжить до непрерывной функции на всем X.

34. Если X — нормальное пространство и A — его замкнутое подпространство, то всякое непрерывное отображение f пространства A в обычное пространство R вещественных чисел можно продолжить до непрерывного отображения $\tilde{f}$ всего X в R.

35. Докажите, что произведение $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ любого множества вполне регулярных пространств вполне регулярно.

36. Докажите, что вполне регулярное пространство X веса τ имеет расчленяющее семейство непрерывных вещественных ограниченных функций мощности, не большей τ.

37. Пусть задано пространство X и T_2-пространства $\{Y_\alpha: \alpha \in A\}$ и для каждого $\alpha \in A$ определено непрерывное отображение $f_\alpha: X \to Y_\alpha$. Докажите, что в случае, когда система отображений $f_\alpha: X \to Y_\alpha$ является расчленяющей, диагональное произведение $f: X \to \Pi\{Y_\alpha: \alpha \in A\}$ есть гомеоморфизм.

38. Докажите, что пространство X вполне регулярно в том и только в том случае, если оно гомеоморфно подпространству некоторого тихоновского куба.

39. Докажите, что регулярное пространство со счетной базой метризуемо (теорема Урысона).

40. Пусть X — вполне регулярное пространство, а σ — система нулей множеств в X мощности $|\sigma| \leqslant \tau$. Докажите, что существует пространство Y_σ веса $w Y_\sigma \leqslant \tau$ и непрерывное произведение $f_\sigma: X \xrightarrow{\text{on}} Y_\sigma$, при котором каждое $U \in \sigma$ отмечено, т. е. $f_\sigma U$ открыто в Y_σ и $f_\sigma^{-1}[f_\sigma U] = U$, если $U \in \sigma$.

41. Пусть X — вполне регулярное пространство, $M \subset X$ — подмножество, σ — система нулей-множеств пространства X, образующая внешнюю псевдобазу множества M (см. стр. 137). Пусть $|\sigma| \leqslant \tau$. Докажите, что существует пространство Y_M, $w Y_M \leqslant \tau$, и непрерывное отображение $f_M: X \xrightarrow{\text{на}} Y_M$, при котором $M = f_M^{-1} f_M M$ и $f_M^{-1} f_M x = x$, если $x \in M$.

§ 2. Бикомпактность

Точка x пространства X называется *точкой полного накопления* для множества $A \subset X$, если $|Ox \cap A| = |A|$ для каждой ее окрестности Ox.

Важным инструментом исследования бикомпактов (и финально компактных пространств) являются свободные последовательности: вполне упорядоченное множество $(A, \prec)$ точек пространства X называется *свободной последовательностью*, если $|\{x \in A: x \prec y\}| \cap |\{x \in A: x \succcurlyeq y\}| = A$ и $|\{x \in A: x \prec y\}| < |A|$ для любого $y \in A$. При этом мощность множества A называется *длиной свободной последовательности* $(A, \prec)$.

Одно из самых интересных семейств бикомпактов составляют *диадические бикомпакты*. Так называются хаусдорфовы пространства, на которые можно отобразить обобщенные канторовы дисконтинуумы. Мотивировкой к их рассмотрению является не только любопытнейшие свойства, которыми они обладают, но и тот факт (он будет установлен в § 4), что *каждый* компакт (т. е. метризуемый бикомпакт) является непрерывным образом канторова совершенного множества — т. е. простейшего из всех дисконтинуумов. Таким образом, понятие диадического бикомпакта является обобщением понятия компакта.

Точка x пространства X называется *точкой его локальной бикомпактности*, если существуют открытое в X множество U и бикомпактное подпространство Φ пространства X такие, что $x \in U \subset \Phi$. Множество всех точек локальной бикомпактности пространства X обозначается через $G(X)$, а множество всех точек нелокальной бикомпактности пространства X, т. е. множество $X \setminus G(X)$, — через $R(X)$. Ясно, что $G(X)$ открыто в X, а $R(X)$ замкнуто в X. Пространство X *локально бикомпактно*, если $G(X) = X$.

Мы знаем, что каждое подмножество топологического пространства само очень естественно превращается в топологическое пространство (стр. 55). Но не менее важно и интересно рассматривать топологические пространства, которые данное пространство содержит в качестве подпространства. Пространство Y называется *расширением* пространства X, если X является всюду плотным подпространством пространства Y (или если задано такое топологическое вложение $f: X \to Y$, что образ $f(X)$ пространства X при f всюду плотен в Y). Если расширение Y пространства X бикомпактно, то оно называется *бикомпактным расширением*. Расширения пространства X, являющиеся хаусдорфовыми пространствами, называются *хаусдорфовыми расширениями*.

Пространство X называется *плотным в смысле Чеха*, если в некотором своем бикомпактном хаусдорфовом расширении оно является множеством типа G_δ. С понятием бикомпактности тесно связано понятие *абсолютной замкнутости*, или *H-замкнутости*.

Хаусдорфово пространство X называется *H-замкнутым*, если при всяком топологическом вложении f его в произвольное хаусдорфово пространство Y образ $f(X)$ замкнут в Y. Это же можно выразить и так: хаусдорфово пространство H-замкнуто, если оно замкнуто в каждом объемлющем его хаусдорфовом пространстве.

Усилением аксиомы отделимости Хаусдорфа является аксиома отделимости Урысона: говорят, что X удовлетворяет *аксиоме отделимости Урысона* или *вполне хаусдорфовой* аксиоме отделимости, если для любых двух различных точек x_1 и x_2 пространства X существуют такие их окрестности Ux_1 и Ux_2, что $[Ux_1] \cap [Ux_2] = A$. Всякое регулярное пространство, очевидно, удовлетворяет этой аксиоме отделимости; обратное неверно. Другим ослаблением

регулярности является так называемая *полурегулярность* (или *семирегулярность*): пространство X полурегулярно, если в нем канонические открытые множества (см. стр. 62) образуют базу.

С понятием бикомпактности тесно связано также понятие неуплотняемости. Хаусдорфово пространство X называется *неуплотняемым*, или *минимальным хаусдорфовым пространством*, если всякое его взаимно однозначное непрерывное отображение на хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.

Наконец, в этом параграфе впервые нам встретится следующее понятие. Пространство X называется *топологически однородным*, если для любых двух его точек x и y существует гомеоморфизм f пространства X на себя, при котором $f(x) = y$. Топологически однородны, например, все обобщенные канторовы дисконтинуумы (см. стр. 104), включая обычное канторово совершенное множество (см. 185 гл. II).

42. Пусть X — бесконечное множество, наделенное следующей топологией $\mathscr{T}_X$: $U \in \mathscr{T}_X$ в том и только в том случае, если $U \subset X$ и либо $U = \Lambda$, либо $X \setminus U$ — конечное множество (см. 2 гл. II). Докажите, что

(а) каждое подпространство пространства $(X, \mathscr{T}_X)$ бикомпактно;

(б) любое бесконечное $M \subset X$ всюду плотно в $(X, \mathscr{T}_X)$.

43. Если бикомпактное пространство дискретно, то множество его точек конечно.

44. Для того чтобы пространство X было бикомпактно, (необходимо и) достаточно, чтобы из любого покрытия X элементами некоторой фиксированной базы можно было выделить конечное покрытие.

45. Докажите, что пространство X бикомпактно тогда и только тогда, когда всякая центрированная система замкнутых в X множеств имеет непустое пересечение.

46. Докажите, что пространство X бикомпактно в том и только в том случае, когда всякая центрированная система произвольных множеств имеет точку прикосновения (см. стр. 53).

47. Докажите, что пространство X бикомпактно тогда и только тогда, когда всякая максимальная центрированная система множеств имеет точку прикосновения в X.

48. Пространство X бикомпактно в том и только в том случае, если для каждого бесконечного множества $M \subset X$ существует точка полного накопления в X.

49. В каждом бесконечном бикомпакте X существует счетное незамкнутое множество.

50. Пусть X — вполне регулярное пространство, A — его подмножество и каждое бесконечное подмножество C множества A имеет точку полного накопления в X. Верно ли, что тогда $[A]_X$ — бикомпакт?

51. Пусть X — вполне регулярное пространство, A — его подмножество и каждое центрированное семейство ξ подмножеств множества A имеет точку прикосновения в X. Следует ли отсюда, что $[A]_X$ — бикомпакт (ср. с 50 гл. III)?

52. Если пространство X обладает предбазой $\mathscr{B}$ такой, что из любого покрытия X элементами семейства $\mathscr{B}$ можно выбрать конечное подпокрытие, то X бикомпактно.

53. Пусть $\mathscr{F}(X)$ — множество всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства X. Если $A \subset \mathscr{F}(X)$ и $B \in \mathscr{F}(X)$, положим $\mathscr{U}(A, B) = \{C \in \mathscr{F}(X): C \cap A \neq \Lambda$ и $C \subset B\}$ и $\mathscr{B} = \{\mathscr{U}(A, B): A \subset \mathscr{F}(X), B \in \mathscr{F}(X)\}$.

Докажите, что если X бикомпактно, то $\mathscr{F}(X)$, наделенное топологией, предбазой замкнутых множеств которой служит [*]) семейство $\mathscr{B}$, бикомпактно.

54. Докажите, что замкнутое подпространство бикомпактного пространства бикомпактно.

55. Пусть X — хаусдорфово пространство, F — бикомпактное подпространство пространства X, а $x_0 \in X$ — точка, которая не принадлежит F. Докажите, что существуют окрестность UF множества F в X и окрестность Ux_0 точки $x_0 \in X$, для которых $UF \cap Ux_0 = \Lambda$.

56. Докажите, что всякое бикомпактное подпространство хаусдорфова пространства X является замкнутым в X множеством.

57. Незамкнутое подпространство хаусдорфова пространства не бикомпактно.

58. Для каждой неизолированной точки x произвольного бикомпакта X существует множество $A \subset X$ такое, что x является единственной точкой полного накопления для A.

59. Каждое регулярное небикомпактное пространство $(X, \mathscr{T})$ можно представить как незамкнутое подпространство некоторого хаусдорфова пространства.

60. Регулярное H-замкнутое пространство бикомпактно.

61. Докажите, что хаусдорфово пространство X является H-замкнутым тогда и только тогда, когда из любого открытого покрытия ω этого пространства можно выделить конечную подсистему $\omega' \subset \omega$, замыкания элементов которой покрывают X.

62. Докажите, что каноническое замкнутое подмножество $[U]_X$ H-замкнутого пространства X является H-замкнутым подпространством.

63. Пусть X — хаусдорфово пространство, каждое замкнутое подпространство которого H-замкнуто. Докажите, что X бикомпактно.

---

[*]) Семейство $\mathscr{B}$ множеств пространства X образует предбазу замкнутых в X множеств, если семейство $\{X \setminus U: U \in \mathscr{B}\}$ — предбаза топологии пространства X (см. стр. 53).

64. Докажите нормальность хаусдорфова бикомпактного пространства.

65. Пусть X — топологическое пространство, Φ — бикомпакт, $\Phi \subset X$ и $\{U_n: n \in N\}$ — определяющая система его окрестностей в X. Зафиксируем произвольно $x_n \in U_n$. Тогда любая подпоследовательность $\{x_{n_k}: k \in N\}$ последовательности $\{x_n: n \in N\}$ обладает предельной точкой в Φ.

66. Пусть X — бикомпактное пространство и ξ — предфильтр, состоящий из замкнутых в X множеств. Тогда, каково бы ни было открытое в X множество U, содержащее множество $\Phi = \bigcap\{P: P \in \xi\}$, существует $P_0 \in \xi$, для которого $P_0 \subset U$.

67. Пусть X — бикомпакт, а ξ — центрированная система непустых замкнутых в нем множеств. Докажите, что для любой окрестности OF_0 множества $F_0 = \bigcap\{F: F \in \xi\}$ существует такой конечный набор элементов $F_1, \ldots, F_s \in \xi$, что $F_0 \subset \bigcup\{F_i: i = 1, \ldots, s\} \subset OF_0$.

68. В бикомпакте X псевдохарактер $\psi(F, X)$ любого замкнутого множества F всегда равен его характеру $\chi(F, X)$ (в частности, псевдохарактер и характер любой точки $x \in X$ совпадают).

69. Пусть X — бикомпакт, Φ замкнуто в X, $\Phi \neq A$, и $U \supset \Phi$, U открыто в X. Тогда существует бикомпакт F счетного характера в X такой, что $\Phi \subset F \subset U$.

70. Пусть X — хаусдорфово пространство, Φ и F — его бикомпактные подпространства, τ — кардинальное число, $\tau \geqslant \aleph_0$, $F \subset \Phi$, характер F в Φ не превосходит τ и характер Φ в X не превосходит τ (т. е. $\chi(F, \Phi) \leqslant \tau$, $\chi(\Phi, X) \leqslant \tau$). Тогда и характер F в X не превосходит τ.

71. Если X — бикомпакт, τ — кардинальное число и Q — множество типа G_τ в X, то для любого $x \in Q$ найдется бикомпакт $\Phi \subset X$ такой, что $x \in \Phi \subset Q$ и $\chi(\Phi, X) \leqslant \tau$.

72. Если X — пространство с первой аксиомой счетности и F — его счетное бикомпактное подпространство, то характер F в X не превосходит $\aleph_0$.

73. Если X — бикомпактное T_1-пространство и F — замкнутое в X множество, то существует такое семейство γ открытых в X множеств, что $|\gamma| \leqslant \tau$, где τ — вес X, и $F = \bigcap\{U: U \in \gamma\}$.

74. Во всяком ли топологическом пространстве (в том числе и нехаусдорфовом) пересечение любых двух бикомпактных подпространств является бикомпактным подпространством?

75. Докажите, что топологическое произведение $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ семейства $\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ бикомпактных пространств также бикомпактно (первая теорема Тихонова).

76. Если A и B — бикомпактные подпространства топологических пространств X и Y и W — произвольная окрестность множества $A \times B$ в произведении $X \times Y$, то существуют окрестность U множества A в X и окрестность V множества B в Y, для которых $U \times V \subset W$.

77. Пусть $\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ — некоторое семейство топологических пространств, Φ_α — бикомпактное подпространство пространства X_α при каждом $\alpha \in A$, $\Phi = \Pi\{\Phi_\alpha: \alpha \in A\}$ — подпространство произведения $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ и W — окрестность множества Φ в X. Тогда существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$ и открытые в X_{α_i} множества U_{α_i}, содержащие Φ_{α_i}, такие, что

$$\Pi\{U_{\alpha_i}: i = 1, \ldots, k\} \times \Pi\{X_\alpha: \alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}\} \subset W.$$

78. Пусть F — бикомпакт, $\mathscr{E} = \{f_\alpha: \alpha \in A\}$ — семейство непрерывных отображений бикомпакта F в обычный отрезок $I = [0, 1]$ вещественных чисел, $J = (0, 1] = [0, 1] \setminus \{0\}$ — полуинтервал, $X = \{x \in F: f_\alpha(x) \neq 0$ при всех $\alpha \in A\}$ и $f: F \to I^{|A|}$ — отображение, определенное правилом: $f(x) = \{f_\alpha(x): \alpha \in A\}$ при всех $x \in F$. Тогда

1) $f^{-1}(J^{|A|}) = X$;

2) $f(X)$ — замкнутое в $J^{|A|}$ множество;

3) отображение $\varphi: X \to J^{|A|}$, где $\varphi(x) = f(x)$ для всех $x \in X$, замкнуто (и непрерывно).

79. Пусть F — бикомпакт и $\{\Phi_\alpha: \alpha \in A\}$ — семейство бикомпактов, лежащих в F. Предположим, что $\chi(\Phi_\alpha, F) \leqslant \aleph_0$ для всех $\alpha \in A$. Тогда пространство $X = F \setminus \bigcup\{\Phi_\alpha: \alpha \in A\}$ гомеоморфно замкнутому подпространству тихоновского произведения $R^{|A| \cdot \tau}$, где R — прямая и τ — вес пространства X.

80 (пример — две окружности П. С. Александрова). Точками пространства X являются точки двух концентрических окружностей: S_0 (внутренняя) и S_1 (внешняя). Окрестностью точки $x \in S_0$ является объединение содержащего эту точку интервала окружности S_0 и центральной проекции этого интервала на S_1, из которой удалена проекция точки x. Все точки окружности S_1 объявляются изолированными.

Докажите, что X — бикомпактное хаусдорфово пространство без счетной базы, во всех точках удовлетворяющее первой аксиоме счетности и являющееся суммой (не свободной) двух своих метризуемых подпространств.

81. Пусть X' и X^* — два экземпляра одного и того же бикомпакта X. Рассмотрим множество $A(X) = X' \cup X^*$. Точку $x \in X$, рассматриваемую как элемент в X', обозначаем через x', а рассматриваемую как элемент в X^* — через x^*. Аналогично и множество $M \subset X$ обозначаем M', если мы его рассматриваем в экземпляре X', и M^*, если в X^*. Вводим в $A(X)$ топологию аналогично 80 гл. III. Базу топологии образуют одноточечные множества $\{x'\}$, $x' \in X'$, и множества вида $(U' \cup U^*) \setminus \{x^*\}$, где U — произвольная окрестность точки x бикомпакта X.

Докажите последовательно

(а) $A(X)$ — хаусдорфово пространство;

(б) X' в индуцированной с $A(X)$ топологии гомеоморфно бикомпакту X, а значит, само бикомпактно и замкнуто в $A(X)$;

(в) X'' — дискретное подпространство, открытое в $A(X)$;

(г) $A(X)$ — бикомпакт.

82 (пример — пространство Хелли). Пусть X — множество всех неубывающих отображений отрезка $[0, 1]$ в себя ($x \in X \leftrightarrow f(x) \geqslant f(y)$ при $x \geqslant y$). Наделим X топологией поточечной сходимости (см. стр. 100), — что то же, топологией, индуцированной из топологического произведения $[0, 1]^{[0,1]}$.

Покажите, что X — неметризуемый сепарабельный бикомпакт с первой аксиомой счетности. Другой пример такого бикомпакта см. в 87 гл. III.

83. Любое вполне упорядоченное множество $(X, \prec)$, обладающее наибольшим элементом $x_{\max}$, будучи наделено порядковой топологией, становится бикомпактом.

84. Пусть $T(\omega_1)$ — минимально вполне упорядоченное множество мощности $\aleph_1$, наделенное порядковой топологией, $\alpha \in T(\omega_1)$ и $\Phi_\alpha = \{x \in T(\omega_1): x \leqslant \alpha\}$. Тогда Φ_α как подпространство пространства $T(\omega_1)$ является бикомпактом.

85. Пусть $(X, \prec)$ — линейно упорядоченное пространство с порядковой топологией. Тогда следующие условия равносильны:

(а) X бикомпактно;

(б) каждое замкнутое в X непустое множество B имеет наибольший и наименьший элемент;

(в) для каждого непустого $A \subset X$ существует $\sup A$ и $\inf A$ в $(X, \prec)$.

86. Любое бикомпактное подпространство стрелки (см. 104 гл. II) счетно.

87. Пример (две стрелки Александрова). Рассмотрим два полуинтервала $X = [0, 1)$, $X' = (0, 1]$, расположенные друг под другом. Множество всех точек этих двух интервалов обозначим через X^{**}. Топологизируем X^{**} следующим образом: базу топологии составляют всевозможные множества вида

$$\Gamma_1 = [\alpha, \beta) \cup (\alpha', \beta'), \quad \Gamma_2 = (\alpha, \beta) \cup (\alpha', \beta'],$$

Здесь $[\alpha, \beta)$ — полуинтервал в X, а (α', β') — проекция интервала (α, β) на X'; $(\alpha', \beta']$ — полуинтервал в X', а (α, β) — проекция интервала (α', β') в X. Докажите следующие свойства топологического пространства X^{**}:

1) X^{**} — хаусдорфово пространство;

2) X^{**} — бикомпакт;

3) X^{**} допускает совершенное отображение на отрезок числовой прямой;

4) X^{**} наследственно финально компактно;

5) X^{**} совершенно нормально;

6) X^{**} — пространство с первой аксиомой счетности;

7) X^{**} сепарабельно;

8) X^{**} не имеет счетной базы;

9) X^{**} неметризуемо;

10) всякое метризуемое подпространство пространства X^{**} не более чем счетно;

11) квадрат этого пространства наследственно нормален.

88. Всякий бикомпакт обладает свойством Бэра (см. стр. 77).

89. Если X — непустой бикомпакт и $|X| \leqslant \aleph_\omega$, то в X есть изолированная точка.

90. Покажите, что всякое полное в смысле Чеха вполне регулярное пространство X обладает свойством Бэра.

91. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение бикомпактного пространства X на пространство Y. Докажите, что Y бикомпактно.

92. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение бикомпактного пространства в хаусдорфово пространство Y. Докажите, что отображение f замкнуто. Разбиение бикомпакта X непрерывно тогда и только тогда, когда пространство этого разбиения хаусдорфово (тогда естественное проектирование на пространство разбиения замкнуто).

93. Докажите, что взаимно однозначное непрерывное отображение f бикомпакта X на хаусдорфово пространство Y является гомеоморфизмом.

94. Пусть $f: X \to Y$ — отображение бикомпакта X на бикомпакт Y. Докажите, что f непрерывно тогда и только тогда, когда график отображения f замкнут в произведении $X \times Y$.

95. Пусть $(Y, \mathscr{T})$ — произвольное бикомпактное T_1-пространство. Всегда ли существует топология $\mathscr{T}'$ на Y такая, что $(Y, \mathscr{T}')$ — бикомпакт и $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$?

96. Всегда ли взаимно однозначное непрерывное отображение одного бикомпактного пространства на другое является гомеоморфизмом?

97. (а) Докажите, что любая непрерывная функция на бикомпакте X ограничена и достигает своих точных верхней и нижней граней.

(б) Существует ли небикомпактное нормальное пространство, всякая непрерывная функция на котором ограничена?

98. Если бикомпакты X и Y равномощны и имеют ровно по одной неизолированной точке, то X и Y гомеоморфны.

99. Если X — бикомпакт, только одна точка x_0 которого не изолирована, то содержащее x_0 множество $U \subset X$ открыто в том и только в том случае, если $X \setminus U$ — конечное множество.

100. Докажите, что образ H-замкнутого пространства при непрерывном отображении — H-замкнутое пространство.

101. Докажите, что хаусдорфово неуплотняемое пространство X, удовлетворяющее урысоновской аксиоме отделимости, бикомпактно.

102. Докажите, что для того, чтобы хаусдорфово пространство X было неуплотняемо, необходимо и достаточно, чтобы X было H-замкнуто и полурегулярно.

103. Пусть X — бикомпакт с первой аксиомой счетности и $D \subset X$ — произвольное его счетное подмножество. Можно ли утверждать, что подпространство $X_0 = X \setminus D$ уплотняется на некоторый бикомпакт?

104. Пусть X состоит из всех точек (x, y) евклидовой плоскости, координаты которых удовлетворяют условию $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1$, и еще двух точек p^+ и p^-. Для точек (x, y) евклидовой плоскости, входящих в X, берутся окрестности те же, которые они имеют на евклидовой плоскости. Окрестности у точек p^+ и p^- следующие:

$$U_n p^- = \{p^-\} \cup \left\{(x, y) \in X: 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{n},\ y \geqslant 0\right\},$$

$$U_n p^- = \{p^-\} \cup \left\{(x, y): 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{n},\ y \leqslant 0\right\}.$$

По определению, все рассматриваемые окрестности образуют базу топологии на X. Докажите, что X с такой топологией — хаусдорфово неуплотняемое и небикомпактное пространство.

105. Счетный бикомпакт имеет счетную базу, а потому метризуем.

106. Если в бикомпакте X есть сеть мощности, не большей τ, то в нем есть и база мощности, не большей τ.

107. Вес бикомпакта всегда не превосходит его мощности.

108. Если X — бесконечный бикомпакт и $X = X_1 \cup X_2$, то $wX = \max\{wX_1, wX_2\}$.

109. Если X — бикомпакт, τ — кардинальное число, $\tau \geqslant \aleph_0$ и $X = \bigcup\{X_\alpha: \alpha \in M\}$, где $wX_\alpha \leqslant \tau$ для каждого $\alpha \in M$ и $|M| \leqslant \tau$, то $wX \leqslant \tau$.

110. Существует ли счетное бикомпактное T_1-пространство без счетной базы?

111. Если бикомпакт Y является образом при непрерывном отображении пространства со счетной базой X, то $wY \leqslant \aleph_0$.

112. Если $f: X \to Y$ — непрерывное отображение, $f(X) = Y$ и Y — бикомпакт, то $wY \leqslant wX$.

113. При непрерывном отображении бикомпакта X на хаусдорфово пространство Y вес не увеличивается.

114. Если X — бикомпакт и диагональ $\Delta \subset X \times X$ является множеством типа G_δ, то Δ имеет счетную базу.

115. Всякий ли сепарабельный бикомпакт наследственно сепарабелен?

116. Пусть X — бикомпакт, τ — кардинальное число, $a(F) \leqslant \tau$ для каждого замкнутого в X подпространства F. Тогда $a(Y) \leqslant \tau$ для каждого $Y \subset X$.

117. Может ли наследственно сепарабельный бикомпакт иметь мощность большую, чем $2^{\aleph_0}$?

118. Верно ли, что если мощность бикомпакта больше, чем $2^{\aleph_0}$, то у этого бикомпакта существует дискретное подпространство несчетной мощности?

119. Существует сепарабельный не наследственно нормальный бикомпакт.

120. Если X — бикомпактное T_1-пространство, τ — кардинальное число, $\tau \geqslant \aleph_0$, и $\mathscr{B}$ — база пространства X такая, что $|\mathscr{B}_x| \leqslant \tau$ для всех $x \in X$, где $\mathscr{B}_x = \{U \in \mathscr{B}: U \ni x\}$, то $|\mathscr{B}| \leqslant \tau$.

121. Пусть X — бикомпакт, τ — кардинальное число, $\tau \geqslant \aleph_0$, и $\mathscr{E}$ — семейство открытых в X множеств такое, что для всех $x \in X$ попеременно $|\mathscr{E}_x| \leqslant \tau$ и $\{x\} = \bigcap\{U: U \in \mathscr{E}_x\}$, где $\mathscr{E}_x = \{U \in \mathscr{E}: U \ni x\}$. Тогда $|\mathscr{E}| \leqslant \tau$.

122. Пусть X — бикомпакт и $\mathscr{B}$ — псевдобаза пространства X (т. е. $\{x\} = \bigcap\{U \in \mathscr{B}: U \ni x\}$ для всех $x \in X$). Тогда в X существует и база $\mathscr{B}^*$, для которой $|\mathscr{B}^*| \leqslant |\mathscr{B}|$.

123. Если бикомпакт X обладает псевдобазой $\mathscr{B}$ (см. 122 гл. III), для которой $|\mathscr{B}_x| \leqslant \tau$ при всех $x \in X$ (τ — кардинальное число, $\tau \geqslant \aleph_0$ и $\mathscr{B}_x = \{U \in \mathscr{B}: U \ni x\}$), то вес этого бикомпакта не превосходит τ.

124. Докажите, что вес любого нульмерного бикомпакта X равен мощности семейства всех его открыто-замкнутых множеств.

125. В каждом бикомпакте F без изолированных точек можно выделить замкнутые непересекающиеся подпространства F_0 и F_1, в которых тоже нет изолированных (в F_0, соответственно в F_1) точек.

126. Если бикомпакт X не имеет изолированных точек, то мощность этого бикомпакта не меньше $2^{\aleph_0}$.

127. Приняв, что $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, докажите, что всякий бикомпакт мощности, не большей $2^{\aleph_0}$, хотя бы в одной точке удовлетворяет первой аксиоме счетности.

128. Если бикомпакт X удовлетворяет первой аксиоме счетности (во всех точках), то либо $|X| \leqslant \aleph_0$, либо $|X| \geqslant 2^{\aleph_0}$.

129. Каждое бикомпактное T_1-пространство X веса, не превосходящего τ, где $\tau \geqslant \aleph_0$, обладает сетью мощности, не превосходящей τ, все элементы которой — замкнутые множества.

130. Бикомпактное T_1-пространство X со счетной базой либо счетно, либо имеет мощность $2^{\aleph_0}$.

131. Приведите пример бикомпакта S, обладающего следующими свойствами:

(а) в S нет изолированных точек;

(б) в S есть счетная π-база;

(в) в S нет ни одной нетривиальной сходящейся последовательности.

132. Приведите пример бикомпакта X, в котором нет ни одной нетривиальной сходящейся последовательности, но есть последовательность $\{A_i: i \in N\}$ конечных множеств, удовлетворяющая условиям:

1) $A_{i'} \cap A_{i''} = A$ при $i' \neq i''$ и

2) для каждого непустого открытого в X множества V существует $k \in N$ такое, что $V \cap A_i \neq A$ при всех $i \geqslant k$.

133. Для каждого кардинального числа $\tau \geqslant \aleph_1$ существует секвенциальный (см. стр. 57) бикомпакт B_τ мощности τ, который во всех точках, кроме одной, удовлетворяет первой аксиоме счетности.

134. Каждый ли секвенциальный бикомпакт является пространством Фреше — Урысона (см. стр. 57)?

135. Всякий ли бикомпакт счетной тесноты является секвенциальным пространством?

136. Каждый ли бесконечный бикомпакт счетной тесноты содержит нетривиальную сходящуюся последовательность?

137. Если топология бикомпакта X порождается некоторой симметрикой d, то X удовлетворяет первой аксиоме счетности.

138. Если X — бикомпакт, топология которого порождена некоторой симметрикой d, то X имеет счетную сеть.

139. Всякий симметризуемый бикомпакт метризуем.

140. Длина произвольной свободной последовательности в бикомпакте X не превосходит его тесноты $t(X)$.

141. Пусть X — бикомпакт, $A \subset X$, τ — кардинальное число и $A = \bigcup\{[B]: B \subset A \text{ и } |B| \leqslant \tau\} \neq [A]$. Тогда

I) если $x \in [A] \cap Q$ и Q — множество типа G_δ в X (см. стр. 57), то $Q \cap A \neq \Lambda$;

II) в X существует свободная последовательность длины τ^+, все элементы которой лежат в A.

142. Теснота $t(X)$ произвольного бикомпакта X равна точной верхней грани длин свободных последовательностей в нем.

143. Если X — секвенциальный бикомпакт и U — непустое открытое множество в X, то найдется замкнутое в X множество F типа G_δ в X и мощности, не большей $2^{\aleph_0}$, лежащее в U.

144. Каждый секвенциальный бикомпакт X на всюду плотном множестве точек имеет характер не больший, чем $2^{\aleph_0}$.

145. Если $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, то всякий секвенциальный бикомпакт X удовлетворяет первой аксиоме счетности на всюду плотном множестве точек.

146. Предположим, что $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Каждый ли бикомпакт счетной тесноты удовлетворяет первой аксиоме счетности на всюду плотном множестве точек?

147. Предположим, что $2^{\aleph_1} = \aleph_1$. Каждый ли наследственно сепарабельный бикомпакт имеет счетную π-базу?

148. Если в хаусдорфовом пространстве X задано семейство $\mathscr{F}$ попарно не пересекающихся непустых бикомпактов счетного характера в X и X удовлетворяет условию Суслина, то $|\mathscr{F}| \leqslant 2^{\aleph_0}$.

149. Если секвенциальный бикомпакт X удовлетворяет условию Суслина, то $|X| \leqslant 2^{\aleph_1}$.

150. Пусть бикомпакт X удовлетворяет условию Суслина и имеет счетную тесноту. Верно ли тогда, что $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$?

151. Если бикомпакт X является секвенциальным пространством и характер его во всех точках не превосходит $2^{\aleph_0}$, то $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$.

152. Если однородный бикомпакт X секвенциален, то либо он состоит из конечного числа точек, либо его мощность равна $2^{\aleph_0}$.

153. Если X — бикомпакт, τ — кардинальное число и $\chi(x, X) \leqslant \tau$ для всех $x \in X$, то $|X| \leqslant 2^\tau$.

154. Если X — однородный бикомпакт и $\tau = |X|$, то найдется $\tau' < \tau$, для которого $\tau \leqslant 2^{\tau'}$.

155. Приняв обобщенную континуум-гипотезу (G. C. H.) $2^\tau = \tau^+$ для любого кардинального числа $\tau \geqslant \aleph_0$, докажите, что не существует однородного бикомпакта, мощность которого была бы предельным кардинальным числом.

156. Если кардинальное число τ сильно недостижимо (т. е. $cf(\tau) = \tau$ и $2^{\tau'} < \tau$ всегда, когда $\tau' < \tau$) и X — такой бикомпакт, что $\chi(x, X) < \tau$ для всех $x \in X$, то $|X| \leqslant \tau$.

157. В предположении, что верна обобщенная континуум-гипотеза (см. стр. 29), выясните, существуют ли бикомпакт X и кардинальное число $\tau \geqslant \aleph_0$ такие, что $\chi(x, X) < \tau$ при всех $x \in X$, но $|X| > \tau$.

158. Верно ли, что всякое несчетное бикомпактное T_1-пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности (во всех точках), имеет мощность, не меньшую чем $2^{\aleph_0}$?

159. Образ диадического бикомпакта при непрерывном отображении является диадическим бикомпактом.

160. Произведение любого множества диадических бикомпактов является диадическим бикомпактом.

161. Каждый компакт (т. е. метризуемый бикомпакт) является диадическим бикомпактом.

162. Произведение любого множества компактов является диадическим бикомпактом.

163. Каждый тихоновский куб является диадическим бикомпактом.

164. Диадические бикомпакты составляют наименьшее семейство пространств, содержащее все компакты, произведение любого множества своих элементов и непрерывный образ любого своего элемента, удовлетворяющий аксиоме отделимости Хаусдорфа.

165. Каждый бикомпакт гомеоморфен замкнутому подпространству некоторого диадического бикомпакта.

166. Каждый диадический бикомпакт обладает свойством Суслина.

167. Если диадический бикомпакт X удовлетворяет первой аксиоме счетности во всех точках, то он имеет счетную базу.

168. Если X — диадический бикомпакт, $Y \subset X$ и характер пространства X в каждой точке множества Y счетен, то $[Y]$ — бикомпакт со счетной базой, т. е. компакт.

169. Приведите пример бикомпакта, не являющегося диадическим.

170. Если $2^{\aleph_1} \geqslant 2^{\aleph_0}$, то каждый диадический бикомпакт мощности $2^{\aleph_0}$ обладает счетной базой.

171. Если $2^{\aleph_1} \geqslant 2^{\aleph_0}$, то каждый сепарабельный диадический бикомпакт X обладает счетной базой.

172. Верно ли, что каждый сепарабельный диадический бикомпакт метризуем, без предположения, что $2^{\aleph_1} \geqslant 2^{\aleph_0}$?

173. Пусть X — произвольный диадический бикомпакт, а $D \subset X$ — его произвольное счетное подмножество. Можно ли утверждать, что подпространство $X_0 = X \setminus D$ уплотняется на некоторый бикомпакт (на некоторый диадический бикомпакт)?

174. Для всякого ли диадического бикомпакта X пространство его замкнутых множеств (см. 53 гл. III) является диадическим бикомпактом?

§ 3. Понятия, близкие к бикомпактности

Естественным ослаблением бикомпактности является финальная компактность (см. стр. 58).

Ослаблением бикомпактности в противоположном направлении является счетная компактность: пространство X *счетно компактно*, если из любого счетного открытого покрытия этого пространства можно выделить конечное подпокрытие. Ясно, что бикомпактны те и только те пространства, которые одновременно финально компактны и счетно компактны.

Важным примером счетно компактного небикомпактного пространства является пространство, обозначаемое всюду в дальнейшем через $T(\omega_1)$. Фиксируем минимально вполне упорядоченное множество мощности, равной $\aleph_1$, и наделим его порядковой топологией (стр. 63). Получившееся пространство и есть $T(\omega_1)$ (см. 94 гл. I, 84 гл. III).

Известно (см. 97 гл. III), что любая непрерывная вещественная функция на бикомпакте X ограничена. Обратное, однако, не верно: существуют небикомпактные нормальные пространства, на которых любая непрерывная функция ограничена (188, 187, 185 гл. III). Вполне регулярное пространство X называется

псевдокомпактным, если всякая вещественная функция, определенная и непрерывная на X, ограничена. В классе нормальных пространств объемы понятий счетной компактности и псевдокомпактности совпадают (192 гл. III).

В этом параграфе впервые встречается важное понятие локально конечной в данном пространстве системы множеств. Особенно важную роль это понятие будет играть в главе V. Система μ множеств пространства X называется *локально конечной* в X, если для всякой точки $x \in X$ существует такая ее окрестность Ux, что $|\{A \in \mu: Ux \cap A \neq \Lambda\}| < \aleph_0$ (т. е. Ux имеет непустое пересечение лишь с конечным числом множеств из μ).

Система ξ множеств пространства X *называется счетно центрированной* (сравните с определением центрированной системы множеств, стр. 20), если всякая счетная подсистема ξ' системы ξ имеет непустое пересечение.

Бикомпактные пространства и бикомпактные подмножества топологических пространств, как было отмечено еще раньше, играют чрезвычайно большую роль и при изучении небикомпактных пространств. Существует очень широкий класс пространств (называемых k-пространствами), топология которых однозначно реставрируется, если указана только система всех их бикомпактных подмножеств. Топологическое пространство называется *k-пространством*, если множество в нем замкнуто тогда и только тогда, когда пересечение его с любым бикомпактным подмножеством есть бикомпактное подмножество этого пространства. Класс k-пространств достаточно широк: ему принадлежат все бикомпакты, все локально бикомпактные пространства, все пространства, полные в смысле Чеха (см. стр. 141), все пространства с первой аксиомой счетности. Мы рассматриваем в этом параграфе только k-пространства, удовлетворяющие аксиоме отделимости Хаусдорфа.

Пусть $M \subset X$. Обозначим через $[M]^1$ множество всех точек x пространства X, для каждой из которых существует такое бикомпактное множество $F \subset X$, что $x \in [F \cap M]$. На первый взгляд представляется ясным, что множество $[M]^1$ замкнуто в X, если X является k-пространством. Однако это, вообще говоря, не так.

Естественно пространство X назвать k_1-пространством, если для всякого $M \subset X$ множество $[M]^1$ замкнуто в X. Всякое k_1-пространство является и k-пространством.

Особое место среди k-пространств занимают пространства *точечно счетного типа* (счетного), если для всякой точки $x \in X$ (для всякого бикомпакта $\Phi \subset X$) существует такой бикомпакт $F \subset X$, что $x \in F$ ($\Phi \subset F$) и $\chi(F, X) \leqslant \aleph_0$.

Наконец, в рассмотрениях этого параграфа определенную роль будет играть понятие псевдобазы пространства X в точках

задающего множества $A \subset X$ или, что то же самое, понятие цепной псевдобазы множества A в пространстве X, его содержащем. Это понятие введено на стр. 137, и здесь нет нужды его повторять.

Множество $A \subset X$ имеет тип F_σ в X, если множество $X \setminus A$ имеет тип G_δ в X (см. стр. 57).

175 (пример). Пусть X — полуплоскость, ограниченная прямой l и $Y = X \setminus l$. По отношению к обычной топологии на X выделим в X счетное всюду плотное множество Q, лежащее в Y, и для каждой точки $x \in l$ зафиксируем последовательность $q(x) = \{q_n(x): n \in N^+\}$ точек множества Q, сходящуюся к x. Определим теперь на множестве $Z = l \cup Q$ новую топологию $\mathcal{T}$ следующим образом: все точки множества Q изолированные в Z, а базу в произвольной точке $x \in l$ образуют множества $Q_k(x) = \{q_n(x): n \geqslant k\}$, $k \in N^+$.

Проверьте, что

1) $(Z, \mathcal{T})$ — локально бикомпактное хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности;

2) $(Z, \mathcal{T})$ обладает базой из открыто-замкнутых множеств;

2′) $(Z, \mathcal{T})$ вполне регулярно;

3) $(Z, \mathcal{T})$ локально метризуемо и локально обладает счетной базой;

4) $(Z, \mathcal{T})$ является суммой двух своих дискретных подпространств, из которых одно замкнуто, а другое открыто и является множеством типа F_σ, а именно: $Z = l \cup Q$;

5) $(Z, \mathcal{T})$ сепарабельно, но не имеет счетной базы;

6) $(Z, \mathcal{T})$ неметризуемо;

7) $(Z, \mathcal{T})$ не финально компактно.

176. У каждого локально бикомпактного хаусдорфова пространства X существует бикомпактное хаусдорфово расширение αX такое, что $|\alpha X \setminus X| \leqslant 1$ (бикомпактификация Александрова).

177. Каждое локальное бикомпактное хаусдорфово пространство вполне регулярно.

178. Открытое подпространство Y бикомпакта X локально бикомпактно.

179. Пусть bX — бикомпактное хаусдорфово расширение пространства X. Докажите, что X локально бикомпактно в том и только в том случае, если X открыто в bX.

180. Подпространство Y локально бикомпактного хаусдорфова пространства X в том и только в том случае локально бикомпактно, когда Y открыто в $[Y]_X$.

181. Множество $G(X)$ всех точек, в которых пространство X локально бикомпактно, открыто в X и образует локально бикомпактное подпространство пространства X. Соответственно множество $R(X)$ всех точек, в которых пространство X не локально бикомпактно, замкнуто в X.

182. Произведение $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ бесконечного множества локально бикомпактных небикомпактных T_1-пространств X_α не локально бикомпактно ни в одной точке.

183. Если пространство X бикомпактно, а Y — любое пространство, то множество $R(X \times Y)$ точек нелокальной бикомпактности произведения $X \times Y$ есть $X \times R(Y)$, где $R(Y)$ — множество точек нелокальной бикомпактности пространства Y.

184. Любая (счетная) последовательность $\varphi = \{x_n: n \in N^+\}$ точек пространства $T(\omega_1)$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке пространства $T(\omega_1)$.

185. Пространство $T(\omega_1)$ не бикомпактно.

186. Докажите, что

(а) любые два замкнутых в пространстве $T(\omega_1)$ множества F_1, F_2 мощности $\aleph_1$ пересекаются;

(б) любая непрерывная вещественная функция f на $T(\omega_1)$ финально постоянна, т. е. для нее существует такое α_0, что $f(\alpha) = f(\alpha_0)$ при всех $\alpha \geqslant \alpha_0$.

187. Пространство $T(\omega_1)$ нормально.

188. Каждая непрерывная вещественная функция, заданная на пространстве $T(\omega_1)$, ограничена, т. е. $T(\omega_1)$ псевдокомпактно.

189. Докажите, что топологическое пространство X счетно компактно тогда и только тогда, когда всякое его бесконечное подмножество имеет в X предельную точку.

190. Приведите пример счетно компактного нормального небикомпактного пространства.

191. Докажите, что пространство Y, являющееся образом счетно компактного пространства X при непрерывном отображении, является счетно компактным.

192. Докажите, что нормальное пространство X счетно компактно тогда и только тогда, когда X псевдокомпактно.

193. Пространство $T(\omega_1)$ счетно компактно.

194. Докажите, что для топологического пространства X следующие свойства эквивалентны:

(а) X счетно компактно;

(б) всякая счетная центрированная система замкнутых в X множеств имеет непустое пересечение;

(в) всякая счетная убывающая последовательность замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

195. Докажите, что вполне регулярное пространство X счетно компактно, если не только само X, но и всякое его замкнутое подпространство псевдокомпактны.

196. Докажите, что вполне регулярное пространство псевдокомпактно в том и только в том случае, когда всякая локально конечная система γ открытых в X множеств (см. стр. 153) конечна.

197. Вполне регулярное пространство X псевдокомпактно в том и только в том случае, когда для каждого центрирован-

ного счетного семейства ξ открытых в X множеств имеет место $\overline{\bigcup\{U\colon U\in\xi\}}=A$.

198. Пусть X — нормальное пространство, F — замкнутое множество в X и $\Phi=\operatorname{Fr}F=F\cap[X\setminus F]$. Тогда если Φ псевдокомпактно, то характер множества F в X несчетен.

199. Приведите пример финально компактного, но не бикомпактного пространства.

200. Если X — финально компактное пространство, то для каждого несчетного множества $A\subset X$ найдется точка $y\in X$, любая окрестность которой пересекается с A по несчетному множеству (т. е. y — точка конденсации множества A).

201. Может ли регулярное наследственно финально компактное пространство не удовлетворять первой аксиоме счетности?

202. Докажите, что замкнутое подмножество финально компактного пространства является финально компактным пространством.

203. Докажите, что пространство Y, являющееся образом финально компактного пространства X при непрерывном отображении, само финально компактно.

204. Приведите пример регулярного пространства, удовлетворяющего условию Суслина, но не финально компактного.

205. Приведите пример регулярного сепарабельного пространства, не являющегося финально компактным.

206. Докажите, что следующие условия, наложенные на регулярное пространство X, эквивалентны:

1) X финально компактно и совершенно нормально;

2) X финально компактно, и всякое его открытое подмножество является финально компактным подпространством;

3) из всякой системы γ открытых в X множеств можно выделить счетную подсистему $\gamma_0\subset\gamma$, объединение элементов которой совпадает с объединением всех элементов системы γ;

4) X финально компактно и всякое его подпространство финально компактно.

207. Докажите, что совершенно нормальное финально компактное пространство удовлетворяет условию Суслина.

208. Докажите, что пространство, являющееся объединением счетного семейства финально компактных подпространств, само финально компактно.

209. Пусть $I=[0,1]$ — отрезок числовой прямой с естественной топологией. Определим на I новую топологию следующим образом. Пусть $A\subset I$ — вполне несовершенное множество (см. стр. 164) в I мощности, равной мощности континуума (существование такого множества доказывается в 285 гл. III). Базу новой топологии на множестве I (новое пространство будем обозначать через I^*) образуют, по определению, все открытые множества отрезка

в естественной топологии и, кроме того, отдельные точки $x\in A$ (т. е. каждое одноточечное множество $\{x\}$, если $x\in A$, открыто и замкнуто в новой топологии). Докажите:

(а) I^* — регулярное топологическое пространство;

(б) I^* финально компактно;

(б′) I^* нормально;

(в) I^* имеет точечно счетную базу (см. стр. 70);

(г) I^* не имеет счетной базы;

(д) I^* неметризуемо;

(е) I^* не совершенно нормально;

(ж) I^* не наследственно финально компактно.

210. Приведите пример совершенно нормального финально компактного пространства, в котором каждый бикомпакт имеет счетный характер, негомеоморфного никакому подпространству совершенно нормального бикомпакта.

211. Пусть X — финально компактное T_3-пространство, F — замкнутое в X множество, $|F|\leqslant 2^{\aleph_0}$ и каждая точка $x\in F$ является пересечением семейства γ_x открытых в X множеств, где $|\gamma_x|\leqslant 2^{\aleph_0}$. Тогда и F является пересечением не более чем $2^{\aleph_0}$ открытых множеств.

212. Если X — финально компактное хаусдорфово пространство, которое (а) сепарабельно и (б) во всех точках имеет характер, не больший чем $2^{\aleph_0}$, то $|X|\leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$.

213. Каждое хаусдорфово финально компактное пространство с первой аксиомой счетности имеет мощность, не бо́льшую чем $2^{\aleph_0}$.

214. Пусть X — произвольное регулярное финально компактное пространство счетного псевдохарактера. Можно ли X уплотнить на хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности?

215. Пусть X — регулярное финально компактное пространство и $\psi(x,X)\leqslant\aleph_0$ для любой точки $x\in X$. Верно ли, что тогда $|X|\leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$?

216. Покажите, что пространство X финально компактно тогда и только тогда, когда всякая счетно центрированная система замкнутых множеств этого пространства имеет непустое пересечение.

217. Пусть X — финально компактное пространство, а $f\colon X\to Y$ — его непрерывное отображение на регулярное пространство Y веса $wY=\tau$, где τ — допустимое кардинальное число (т. е. $\tau^{\aleph_0}=\tau$). Докажите, что существует замкнутое подмножество $F\subset X$, для которого $fF=Y$ и $w(F)\leqslant wY=\tau$.

218. Пусть X — хаусдорфово финально компактное пространство, обладающее двумя свойствами: а) $d(X)\leqslant\aleph_0$; (б) для любого $M\subset X$, $|M|\leqslant\mathfrak{c}$, непременно $|[M]|\leqslant\mathfrak{c}$.

Пусть A — некоторое множество, $|A|=\aleph_1$, вполне упорядоченное, т. е. $A=T(\omega_1)$. Пусть для каждого $\lambda\in A$

построены пространство Y_λ, непрерывное отображение $f_\lambda\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y_\lambda$ и замкнутое в X множество F_λ таким образом, что:

1) $s(F_\lambda) \leqslant \mathfrak{c}$ для каждого $\lambda \in A$,
2) $f_\lambda F_\lambda = Y_\lambda$ для каждого $\lambda \in A$,
3) $F_\lambda \subset F_{\lambda'}$, если $\lambda \prec \lambda'$,
4) $f_{\lambda'} f_\lambda^{-1} f_\lambda F_\lambda = F_{\lambda'}$, если $\lambda \prec \lambda'$,
5) $f_{\lambda'} f_\lambda^{-1} f_\lambda x \subset f_{\lambda'}^{-1} f_{\lambda'} x$ для любой точки $x \in X$, если $\lambda \prec \lambda'$.

Докажите, что $|X| \leqslant \mathfrak{c}$.

219. Пусть X — регулярное финально компактное пространство, которое удовлетворяет следующим двум условиям:

(а) $t(X) \leqslant \aleph_0$; (б) для всякого $\mathcal{M} \subset X$, $|\mathcal{M}| \leqslant \mathfrak{c}$, непременно $|\overline{\mathcal{M}}| \leqslant \mathfrak{c}$. Тогда если $\psi(x, X) \leqslant \mathfrak{c}$ для любой точки $x \in X$, то $|X| \leqslant \mathfrak{c}$.

220. Пусть X — регулярное финально компактное пространство, $\psi(x, X) \leqslant \aleph_0$ для любой точки x и $l(X) = \aleph_0$. Докажите, что $|X| \leqslant \mathfrak{c}$.

221. Всякое метризуемое подпространство Y совершенно нормального бикомпакта обладает счетной базой.

222. Пусть Y — подпространство некоторого совершенно нормального бикомпакта и топология Y порождается некоторой симметрикой. Верно ли тогда, что Y имеет счетную базу?

223. Каждый совершенно нормальный бикомпакт удовлетворяет (во всех точках) первой аксиоме счетности.

224. Каждое замкнутое множество в совершенно нормальном бикомпакте обладает счетной определяющей системой окрестностей.

225. Мощность любого совершенно нормального бикомпакта не превосходит $2^{\aleph_0}$ (теорема Александрова).

226. Мощность множества всех замкнутых подмножеств совершенно нормального бикомпакта X не превосходит $2^{\aleph_0}$ (предложение справедливо, если X — совершенно нормальное финально компактное пространство с первой аксиомой счетности, в частности, если X имеет счетную базу).

227. Существует ли совершенно нормальный бикомпакт, универсальный в том смысле, что каждый совершенно нормальный бикомпакт гомеоморфен его замкнутому подпространству? Докажите, что существует семейство мощности, большей $2^{\aleph_0}$, попарно негомеоморфных совершенно нормальных бикомпактов.

228. Если X — совершенно нормальный бикомпакт и Y его подпространство, обладающее сетью $\mathcal{S}$ мощности, не большей τ, то Y имеет и внешнюю базу (см. стр. 70) в X мощности, не большей τ. Тем более, вес Y не превосходит τ.

229. Никакое неметризуемое подпространство X совершенно нормального бикомпакта нельзя представить в виде объединения счетного семейства метризуемых подпространств.

230. Пусть $(X, \mathcal{T})$ — бикомпакт с первой аксиомой счетности, причем $|U| \geqslant \aleph_0$ для каждого непустого $U \in \mathcal{T}$ (в качестве $(X, \mathcal{T})$ для этой задачи можно отрезок с обычной топологией). Положим

$$\tilde{\mathcal{T}} = \{U \setminus A\colon U \in \mathcal{T},\ A \subset X \text{ и } |A| \leqslant \aleph_0\}.$$

Покажите, что $(X, \tilde{\mathcal{T}})$ — хаусдорфово топологическое пространство, обладающее следующими свойствами:

0) Каждое счетное множество A, лежащее в $(X, \tilde{\mathcal{T}})$, замкнуто в $(X, \tilde{\mathcal{T}})$;
1) $\varepsilon(Y) \leqslant \mathfrak{c}$ для каждого $Y \subset X$ (т. е. $cc(X) = \aleph_0$);
2) $s(Y) \geqslant \aleph_0$, если $Y \subset X$ и $|Y| \geqslant \aleph_0$;
3) каждое подпространство Y пространства X финально компактно;
4) пространство $(X, \tilde{\mathcal{T}})$ не удовлетворяет первой аксиоме счетности ни в одной точке, но во всех точках имеет счетный псевдохарактер;
5) $\pi(X, \tilde{\mathcal{T}}) \geqslant \aleph_0$;
6) $[A]_{\aleph_0} = \bigcup \{[B]_{(X, \tilde{\mathcal{T}})}\colon B \subset A \text{ и } |B| \leqslant \aleph_0\} = A$ для всех $A \subset X$;
7) $[A]^{\aleph_0} = \{y \in X$: если $Q \subset X$, $y \in Q$ и Q — множество типа G_δ в $(X, \tilde{\mathcal{T}})$, то $Q \cap A \neq \Lambda\} = [A]_{(X, \tilde{\mathcal{T}})}$ и, значит, $[[A]_{\aleph_0}]^{\aleph_0} = [A]_{(X, \tilde{\mathcal{T}})}$ для всех $A \subset X$ (ср. с 141 гл. III);
8) $\mathcal{T} \subset \tilde{\mathcal{T}}$, но $\mathcal{T} \neq \tilde{\mathcal{T}}$ — т. е. тождественное на X отображение $(X, \tilde{\mathcal{T}}) \to (X, \mathcal{T})$ является нетривиальным уплотнением;
9) пространство $(X, \tilde{\mathcal{T}})$ является H-замкнутым;
10) $[V]_{(X, \mathcal{T})} = [V]_{(X, \tilde{\mathcal{T}})}$ для всех $V \in \tilde{\mathcal{T}}$.

231. При непрерывном отображении в совершенно нормальный бикомпакт вес не увеличивается.

232. Если хаусдорфово пространство Y является образом совершенно нормального бикомпакта X при непрерывном отображении f, то Y — тоже совершенно нормальный бикомпакт.

233. При непрерывном отображении совершенно нормального бикомпакта X на хаусдорфово пространство Y вес никакого подпространства пространства X не возрастает.

234. Если произведение бесконечных бикомпактов X и Y наследственно нормально, то и X, и Y совершенно нормальны.

235. Если X — бикомпакт и $X \times X \setminus X$ — наследственно нормальное пространство, то X имеет счетную базу.

236. Если тихоновское произведение пространства X на себя является совершенно нормальным бикомпактом, то X обладает счетной базой.

237. Докажите, что каждое пространство с первой аксиомой счетности является k-пространством.

238. Докажите, что каждое локально бикомпактное хаусдорфово пространство является k-пространством.

239. Замкнутое подпространство k-пространства является k-пространством.

240. Докажите, что всякое хаусдорфово пространство точечно счетного типа является k-пространством.

241. Каждое полное в смысле Чеха пространство является пространством точечно счетного типа.

242. Покажите, что каждое пространство, полное в смысле Чеха, является k-пространством.

243. Если X — k-пространство и x — его неизолированная точка, то существует бикомпакт $\Phi \subset X$, для которого $x \in [\Phi \setminus \{x\}]$.

244. Каждое ли хаусдорфово k-пространство является k_2-пространством?

245. Каждое ли полное в смысле Чеха пространство является k_2-пространством?

246. Образ k-пространства при факторном отображении является k-пространством.

247. Докажите, что хаусдорфово пространство тогда и только тогда является k-пространством, когда оно есть фактор-пространство некоторого локально бикомпактного хаусдорфова пространства.

248. Открытое подпространство хаусдорфова k-пространства является k-пространством.

249. Верно ли, что каждое подпространство k-пространства, удовлетворяющего аксиоме отделимости Хаусдорфа, является k-пространством?

250. Если каждое подпространство хаусдорфова пространства X является k-пространством, то X — пространство Фреше — Урысона.

251. Если Y — k-пространство и $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение вполне регулярного пространства X на Y, то и X — k-пространство.

252. Пусть X — k-пространство и Y — локально бикомпактное хаусдорфово пространство. Тогда $X \times Y$ — тоже k-пространство.

§ 4. Компакты

Компактами мы называем метризуемые бикомпакты. Наш основной пример компакта — *гильбертов кирпич*. Так называется множество Q^τ всех точек $x = \{x_i\colon i = 1, 2, \ldots\}$ гильбертова пространства l^2 (см. 249 гл. II), для которых $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{2^i}$, вместе с топологией, индуцированной из l_2.

При изучении компактов определенную роль играет понятие точки конденсации. Точка пространства называется его точкой *конденсации*, если каждая ее окрестность несчетна. Множество M, лежащее в пространстве X, называется *совершенно несовершенным* (в X), если оно не содержит никакого совершенного в X множества. При этом (см. стр. 77) множество A называется *совершенным* в X, если оно замкнуто в X и как подпространство пространства X не имеет изолированных точек.

В этом параграфе важную роль будет играть понятие канторова совершенного множества, определенное в гл. II, § 3, задача 186.

Как мы увидим в дальнейшем, следующее понятие в некотором смысле противостоит понятию канторова совершенного множества. Пространство X называется *σ-бикомпактным*, если оно является объединением счетного семейства своих дискретных подпространств (замкнутыми эти подпространства могут не быть).

Наконец, в этом параграфе впервые встречается понятие неприводимого отображения. Оно будет играть особенно важную роль в главе VI. Отображение f пространства X на пространство Y называется *неприводимым*, если Y не является образом никакого замкнутого в X множества F, отличного от X. Будут рассматриваться только непрерывные неприводимые отображения.

Докажите следующие утверждения (253—276).

253. Полное вполне ограниченное метрическое пространство (X, ρ) счетно компактно (см. стр. 60, 61, 152).

254. Счетно компактное метризуемое пространство бикомпактно.

255. Метрическое пространство (X, ρ) бикомпактно тогда и только тогда, когда оно полно и вполне ограничено.

256. Подпространство X гильбертова пространства H^α является компактом тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено в H^α.

257. Бикомпакт X метризуем тогда и только тогда, когда имеет счетную базу.

258. Замкнутое подпространство компакта само является компактом.

259. Метрическое пространство (X, ρ) счетно компактно тогда и только тогда, когда из всякой последовательности $\{x_i\colon i \in N^+\}$ его точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

260. Метрическое пространство (X, ρ) является компактом тогда и только тогда, когда всякая его убывающая последовательность непустых замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

261. Метрическое пространство (X, ρ) бикомпактно тогда и только тогда, когда всякая непрерывная функция на (X, ρ) ограничена.

262. Метризуемое пространство X бикомпактно тогда и только тогда, когда всякая метрика на X, совместимая с его топологией, ограничена.

263. Пополнение метрического пространства (X, ρ) бикомпактно тогда и только тогда, когда (X, ρ) вполне ограничено.

264. Всякий компакт замкнут в объемлющем метрическом пространстве.

265. Топологическое произведение счетного семейства компактов есть компакт.

266. Подпространство Q^ω (гильбертов кирпич) гильбертова пространства l^2 является компактом. Всякое ли замкнутое ограниченное подпространство гильбертова пространства l^2 является компактом (сравните с 256 гл. III)?

267. Класс компактов совпадает с классом замкнутых подпространств гильбертова кирпича.

268. Любой компакт, являющийся подпространством пространства иррациональных точек числовой прямой, нигде не плотен в этом пространстве.

269. Пространство иррациональных точек числовой прямой или отрезка нельзя представить в виде объединения счетного семейства его бикомпактных подпространств.

270. Всякое открытое множество Γ компакта X есть локально бикомпактное пространство со счетной базой.

271. Метрическое пространство X со счетной базой локально бикомпактно тогда и только тогда, когда является объединением такой счетной последовательности растущих компактов: $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $F_n \subset F_{n+1}$, $n \in N^1$, что каждая точка $x \in X$ внутренняя для некоторого F_n.

272. Локально бикомпактное метризуемое пространство X со счетной базой может быть дополнено одной точкой до компакта.

273. Метризуемое локально бикомпактное пространство X локально имеет счетную базу, т. е. для каждой точки $x \in X$ существует окрестность Ux, которая как подпространство X имеет счетную базу.

274. Метризуемое пространство локально бикомпактно и имеет счетную базу тогда и только тогда, когда гомеоморфно открытому всюду плотному множеству некоторого компакта.

275. В пространстве иррациональных точек числовой прямой или отрезка нет точек локальной бикомпактности.

276. Гильбертово пространство l^2 не имеет точек локальной бикомпактности, а евклидово пространство R^n конечной размерности локально бикомпактно во всякой своей точке.

277. Приведите пример локально бикомпактного подпространства X числовой прямой R^1, для которого дополнение $Y = R^1 \setminus X$ — не локально бикомпактное пространство.

278. Укажите не локально бикомпактное подпространство X числовой прямой R^1, являющееся объединением двух локально бикомпактных подпространств.

279. Всякое нульмерное (см. стр. 56) полное сепарабельное метрическое пространство (Y, ρ) без точек локальной бикомпактности гомеоморфно бэровскому пространству $B(\aleph_0)$ счетного веса (теорема Александрова).

280. Пространство иррациональных точек гомеоморфно бэровскому пространству $B(\aleph_0)$.

281. Всякое открытое подпространство бэровского пространства $B(\aleph_0)$ гомеоморфно $B(\aleph_0)$.

282. Нульмерное сепарабельное метрическое пространство X гомеоморфно подпространству $B(\aleph_0)$.

283. (а) Множество $X_1 \subset X$ всех точек компакта X, не являющихся его точками конденсации, есть открытое счетное множество.

(б) Дополнительное множество $X_0 = X \setminus X_1$, т. е. множество всех точек конденсации компакта X, — совершенное множество (непустое, если X несчетно).

284. Любой несчетный компакт X имеет мощность, равную мощности континуума.

285. (а) На числовой прямой R^1 имеется семейство γ мощности $\mathfrak{c}$ попарно негомеоморфных компактов; (б) на прямой R^1 имеется *вполне несовершенное* множество Z мощности, равной мощности континуума.

286. Если (X, ρ) — метрическое пространство, а $F \subset (X, \rho)$ — его бикомпактное подпространство, то для любой точки $x \in X$ найдется такая точка $y^* \in F$, что $\rho(x, y^*) = \inf\{\rho(x, y): y \in F\} = \rho(x, F)$.

287. Если (X, ρ) — бикомпактное метрическое пространство, то в (X, ρ) найдутся две точки $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, для которых $\rho(x_1, x_2) = \operatorname{diam}(X, \rho)$.

288. Если (X, ρ) — метрическое пространство, $F_1 \subset X$, $F_2 \subset X$ — два его замкнутых непересекающихся подмножества, то $\rho(F_1, F_2) \geq 0$, если одно из этих множеств бикомпактно.

289. Расстояние между любыми двумя непересекающимися бикомпактными подпространствами метрического пространства (X, ρ) положительно и достигается.

290*. Для всякого конечного открытого покрытия $\omega = \{U_1, \ldots, U_s\}$ компакта (X, ρ) можно найти такое число $\eta(\omega) > 0$, что всякое множество $A \subset X$ диаметра $< \eta(\omega)$ содержится хотя бы в одном элементе покрытия ω.

291*. Для всякого конечного замкнутого покрытия α компакта (X, ρ) найдется такое число $\delta(\alpha) > 0$, что для каждого множества $A \subset X$, для которого $\operatorname{diam} A \leq \delta(\alpha)$, система множеств $\alpha_A = \{F \subset \alpha: F \cap A \neq \Lambda\}$ имеет непустое пересечение.

292. Хаусдорфово пространство Y, являющееся непрерывным образом компакта X, само является компактом.

293. Всякое непрерывное отображение f компакта (X, ρ) на компакт (Y, ρ') равномерно непрерывно.

294. Всякая непрерывная функция на компакте (X, ρ) равномерно непрерывна.

295. Сжатое отображение f компакта (X, ρ) в себя есть отображение на собственную часть этого компакта.

296. Всякая изометрия компакта (X, ρ) в (X, ρ) есть изометрия на весь компакт (X, ρ). Можно ли то же самое утверждать для случая, когда (X, ρ) — полное метрическое пространство?

297. Если (X, ρ) — компакт, а f — такое отображение X в себя, что $\rho(fx, fy) < \rho(x, y)$ для любых двух различных точек x и y из X, то f имеет в X единственную неподвижную точку.

298*. Если f — отображение компакта (X, ρ) на себя, при котором $\rho(fx, fy) \leqslant \rho(x, y)$ для любых двух точек $x \in X$, $y \in X$, то f — изометрия.

299. Всякий компакт X является непрерывным образом канторова совершенного множества (теорема Александрова).

300. Нульмерный компакт Y без изолированных точек гомеоморфен канторову совершенному множеству (теорема Александрова).

301. Докажите, что

(а) канторово совершенное множество гомеоморфно произведению счетного числа изолированных двоеточий;

(б) произведение счетного числа конечных хаусдорфовых пространств также гомеоморфно канторову совершенному множеству;

(в) произведение счетного числа пространств, каждое из которых гомеоморфно канторову совершенному множеству, снова гомеоморфно канторову совершенному множеству.

302. Канторово совершенное множество топологически однородно.

303. Компакт Y тогда и только тогда является образом канторова совершенного множества C при неприводимом непрерывном отображении, когда он не имеет изолированных точек.

304. Полное метрическое пространство без изолированных точек содержит топологический образ канторова совершенного множества. Если X — произвольное полное метрическое пространство, то либо X содержит канторово совершенное множество, либо X является объединением счетного числа дискретных подпространств.

305. Если X — метризуемый бикомпакт и $A \subset X$ — его счетное подмножество, то подпространство $X_0 = X \setminus A$ допускает взаимно однозначное непрерывное отображение на некоторый метризуемый бикомпакт.

306. Можно ли утверждать, что пространство замкнутых множеств (см. 53 гл. III) отрезка числовой прямой гомеоморфно гильбертову кирпичу?

307. Гомеоморфны ли пространства замкнутых множеств отрезка числовой прямой и квадрата?

308. Придумайте семейство мощности $2^{\aleph_0}$ попарно негомеоморфных компактов, пространства замкнутых множеств которых гомеоморфны.

§ 5. Непрерывные функции на бикомпактах

Как известно, всякая непрерывная функция на бикомпакте X ограничена и достигает своей точной верхней и нижней грани (см. 97 гл. III). Всякая непрерывная функция на бикомпакте X *равномерно непрерывна* в следующем смысле: для всякого действительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное открытое покрытие α бикомпакта X, что $|fx_1 - fx_2| < \varepsilon$, если только x_1 и x_2 принадлежат одному и тому же элементу покрытия α (доказано). На любые топологические пространства переносится понятие равномерной сходимости последовательности вещественных функций. Последовательность функций $\{f_n : n \in N\}$, определенных на топологическом пространстве X, *равномерно сходится* к функции f на X, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 \in N$, что $|fx - f_n x| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$ и всех $x \in X$. Равномерно сходящаяся последовательность $\{f_n : n \in N\}$ непрерывных функций на пространстве X имеет своим пределом непрерывную функцию (см. 310 гл. III).

Говорят, что множество C_0 функций на X *разделяет точки пространства* X, если для любых двух различных точек x_1 и x_2 этого пространства найдется такая функция $f \in C_0$, что $fx_1 \neq fx_2$. Множество C_0 функций на X *сильно разделяет точки пространства* X, если для любых двух точек $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, и любых двух действительных чисел a и b, $a \neq b$, найдется такая функция $f \in C_0$, что $fx_1 = a$, $fx_2 = b$.

Главным предметом изучения в этом параграфе является множество (всегда в дальнейшем обозначаемое через $C(X)$) всех непрерывных вещественных функций, определенных на бикомпакте X. Это множество превращается естественным образом в линейное коммутативное кольцо (точнее говоря, в алгебру), если за операцию сложения принять обычное (поточечное) сложение двух функций (заметим, что сумма двух непрерывных на X функций есть функция непрерывная), а за операцию умножения принять обычное (поточечное) умножение двух функций (опять надо заметить, что произведение двух непрерывных функций — всегда функция непрерывная). Кроме того, естественным образом определяется умножение функции $f \in C(X)$ на действительное число. В каче-

стве единичного элемента в $C(X)$ фигурирует функция, тождественно равная единице, а в качестве нуля — функция, тождественно равная нулю. Нетрудно убедиться в том, что $C(X)$ вместе с определенным там сложением и умножением на действительное число представляет собой линейное пространство. Операция произведения двух элементов из $C(X)$ удовлетворяет условию коммутативности. Множество $C(X)$ вместе с перечисленными выше операциями, превращающими его в коммутативное линейное кольцо с единицей (в другой терминологии — в алгебру), называется линейным кольцом непрерывных функций на бикомпакте X (или алгеброй непрерывных функций на бикомпакте X).

Алгебра $C(X)$ (X — бикомпакт) играет совершенно исключительную роль не только в общей топологии, но и в функциональном анализе. Приведем точное определение линейного кольца (точнее, алгебры — см. П а й м а р к [1]). Линейное кольцо — это некоторое множество X, в котором, во-первых, определены операция сложения и операция умножения на действительные числа, превращающие это множество в линейное пространство, во-вторых, на X определена еще одна операция — операция умножения, сопоставляющая каждой упорядоченной паре элементов x, y из X элемент $x \circ y$ также из X. При этом требуется выполнение следующих аксиом: (а) $\alpha(x \circ y) = (\alpha x) \circ y$; (б) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$; (в) $(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$; г) $x \circ (y + z) = x \circ y + x \circ z$ для любых $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$ и любых чисел α. Если имеется такой элемент $e \in X$, что $x \circ e = e \circ x = x$ для любого $x \in X$, и, кроме того, $x \circ y = y \circ x$ для любых двух элементов $x \in X$, $y \in X$, то линейное кольцо X называется линейным коммутативным кольцом с единицей (или коммутативной алгеброй с единицей).

Все дальнейшие понятия мы будем относить к алгебре $C(X)$ непрерывных функций на бикомпакте X. Подмножество $C_0 \subset C(X)$ называется *подкольцом*, если $f - g \in C_0$, $f \cdot g \in C_0$, $-f \in C_0$ для любых $f \in C_0$, $g \in C_0$.

Подкольцо $C_0 \subset C(X)$ называется *идеалом*, если $g \cdot f \in C_0$ для любых $g \in C_0$, $f \in C(X)$. Другими словами, подкольцо $C_0 \subset C(X)$ называется идеалом, если $C_0 \cdot C(X) \subset C_0$. Идеал $C_0 \subset C(X)$ называется *нетривиальным*, если $C_0 \neq C(X)$ и C_0 состоит более чем из одной функции. Наконец, нетривиальный идеал $C_0 \subset C(X)$ называется *максимальным идеалом*, если C_0 не содержится ни в каком (отличном от C_0) нетривиальном идеале. Понятно, что всё $C(X)$ есть тривиальный идеал, тривиален также идеал, состоящий лишь из одной функции (которая необходимо есть функция, тождественно равная нулю, т. е. нулевой элемент в $C(X)$). Заметим, что у нас, по определению, максимальные идеалы — нетривиальные идеалы. Через C_x, $x \in X$, обозначается множество всех непрерывных на бикомпакте X функций, обращающихся в точке x в нуль, т. е. $C_x = \{f \in C(X) : fx = 0\}$.

На $C(X)$ определяется стандартная метрика (и даже норма). Полагаем

$$|f| = \max\{|fx| : x \in X\},$$

$$\rho(f, g) = \max\{|fx - gx| : x \in X\} = |f - g|$$

для любых $f \in C(X)$, $g \in C(X)$, помня при этом, что любая непрерывная функция на бикомпакте X ограничена и достигает своей точной верхней грани. (Заметим также, что функция $\varphi(x) = |fx|$ непрерывна, если f — непрерывная функция.)

Так определенная метрика на $C(X)$ называется *метрикой равномерной сходимости* или чебышевской метрикой. Всюду в дальнейшем $C(X)$ считается наделенным именно этой метрикой. Итак, с одной стороны, $C(X)$ — коммутативная алгебра с единицей, с другой стороны, $C(X)$ — метрическое пространство. Легко проверяется, что операции, определенные на $C(X)$, непрерывны в метрике равномерной сходимости. Это означает, что отображение φ, в силу которого произвольной паре (f, g) функций $f \in C(X)$, $g \in C(X)$ соответствует функция $f - g$, и отображение ψ, в силу которого (f, g) ставится в соответствие функция $f \cdot g$, являются непрерывными отображениями произведения $C(X) \times C(X)$ на пространство $C(X)$.

Полезны также следующие понятия: множество $C_0 \subset C(X)$ *равномерно ограничено* на X, если существует такое действительное число $K \geq 0$, что $|fx| \leq K$ для любой функции $f \in C_0$ и любой точки $x \in X$; множество $C_0 \subset C(X)$ *равностепенно непрерывно*, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное открытое покрытие ω бикомпакта X, что $|fx_1 - fx_2| < \varepsilon$ для любой функции $f \in C_0$ и любых двух точек $x_1, x_2 \in X$, содержащихся в одном и том же элементе покрытия ω.

Часто рассматриваются непрерывные функции или отображения, определенные на бикомпакте X, являющемся топологическим произведением семейства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ бикомпактов X_α, $\alpha \in A$. Пусть f — непрерывное отображение пространства $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ на пространство Y. Говорят, что f зависит только от координат, принадлежащих множеству $A' \subset A$, если оно не зависит от координат, принадлежащих множеству $A \setminus A'$ (см. стр. 110). Иначе говоря, f зависит только от $A' \subset A$, если имеется такое непрерывное отображение $g: \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A'\} \to Y$, что $f = g\pi_{A'}$, где $\pi_{A'}$ — естественное проектирование всего произведения $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ на A'-грань $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in A'\}$. Мы будем также говорить, что $f: \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\} \to Y$ зависит только от τ координат (τ — кардинальное число), если имеется такое множество $A' \subset A$, $|A'| = \tau$, что f зависит только от координат на множестве $A' \subset A$.

309. Проверьте, что $C(X)$ (с определенными на стр. 165, 166 операциями) образует коммутативную алгебру.

310. Функция f_ξ на пространстве X, являющаяся пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных на X функций, также непрерывна.

311. Пусть X — бикомпакт, $C(X)$ — алгебра непрерывных на X функций с метрикой, определенной на стр. 167.

(а) Покажите, что $C(X)$ — метрическое пространство.

(б) Покажите, что последовательность $\{f_n: n \in N\}$ функций на $C(X)$ сходится к функции $f_\xi \in C(X)$ по метрике в $C(X)$ тогда и только тогда, когда эта последовательность сходится к функции f_ξ равномерно.

(в) Докажите полноту метрического пространства $C(X)$.

312. Всякое подкольцо $C_0 \subset C(X)$, разделяющее точки бикомпакта X и содержащее все функции, тождественно равные константам, сильно разделяет точки X.

313. Пусть X — бикомпакт, а $C_0 \subset C(X)$ — подкольцо, содержащее все константы и являющееся замкнутым подмножеством в метрическом пространстве $C(X)$. Докажите, что функция $\varphi(x) = |f(x)|$ принадлежит C_0, если $f \in C_0$.

314. Пусть f и g — две непрерывные функции на бикомпакте X. Определим функции $M_{f,g}$ и $m_{f,g}$ следующим образом: $M_{f,g}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $m_{f,g}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Докажите равенства:

$$m_{f,g}(x) = \frac{1}{2}\{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\},$$

$$M_{f,g}(x) = \frac{1}{2}\{|f(x) - g(x)| - f(x) - g(x)\}.$$

315. Пусть $C_0 \subset C(X)$ — замкнутое подкольцо (т. е. C_0 — подкольцо, являющееся замкнутым множеством в метрическом пространстве $C(X)$). Покажите, что $M_{f,g} \in C_0$ и $m_{f,g} \in C_0$, если $f \in C_0$, $g \in C_0$ (см. определение функций $M_{f,g}$ и $m_{f,g}$ в 314 гл. III).

316. Пусть семейство $\mathfrak{A} \subset C(X)$ непрерывных функций на бикомпакте X удовлетворяет двум условиям:

1) $\mathfrak{A}$ сильно разделяет точки в X;

2) если $f \in \mathfrak{A}$ и $g \in \mathfrak{A}$, то и $M_{f,g} \in \mathfrak{A}$, $m_{f,g} \in \mathfrak{A}$.

Докажите, что $\mathfrak{A}$ всюду плотно в метрическом пространстве $l(X)$, т. е. $[\mathfrak{A}]_{C(X)} = C(X)$.

317. Пусть $C_0 \subset C(X)$ — подкольцо, X — бикомпакт. Пусть C_0 содержит все константы и разделяет точки X. Докажите, что C_0 всюду плотно в метрическом пространстве $C(X)$.

318. Выведите из 317 гл. III следующие *классические аппроксимационные теоремы Вейерштрасса*:

1) всякая непрерывная функция на отрезке $[0, 1]$ есть предел равномерно сходящейся последовательности многочленов;

2) всякая непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, принимающая одинаковые значения на концах этого отрезка, есть предел равномерно сходящейся последовательности тригонометрических многочленов.

319. Докажите, что пространство $C(I)$ непрерывных функций на отрезке сепарабельно (а следовательно, имеет счетную базу).

320. Бикомпакт X метризуем в том и только в том случае, когда $C(X)$ сепарабельно.

321. Всякая непрерывная функция на произведении $\Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\} = X$ семейства бикомпактов $\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ зависит от счетного числа координат.

322. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ — произведение бикомпактов $\{X_\alpha: \alpha \in A\}$, а $f: X \to Y$ — непрерывное отображение на бикомпакт веса $w(Y) = \tau$, где $\tau \leqslant |A|$, $\tau \geqslant \aleph_0$. Докажите, что отображение f зависит от τ координат.

323. Всякий диадический бикомпакт X веса $w(X) = \tau$ является непрерывным образом обобщенного канторова дисконтинуума D^τ веса τ.

324. Пусть X — диадический бикомпакт, а $f: X \to Y$ — его непрерывное отображение на бикомпакт. Докажите существование замкнутого подмножества X_f в X, для которого $w(X_f) = w(Y)$ и $fX_f = Y$.

325. Если $f: X \to Y$ — непрерывное неприводимое (см. стр. 161) отображение диадического бикомпакта X на бикомпакт Y, то $w(X) = w(Y)$.

326. Всякий бикомпакт X, π-вес которого равен τ, допускает непрерывное неприводимое отображение на бикомпакт веса $\leqslant \tau$.

327. Покажите, что π-вес любого диадического бикомпакта совпадает с его весом.

328. Всякий диадический бикомпакт счетного π-веса метризуем.

329. Всякое замкнутое подмножество X типа G_ξ обобщенного канторова дисконтинуума D^τ веса τ, большего $\aleph_\xi$, гомеоморфно этому D^τ.

330. Для каждого замкнутого множества X типа G_δ в каноровом дисконтинууме D^τ существует ретракция D^τ на X, т. е. непрерывное отображение $\varphi: D^\tau \to X$, тождественное на самом X.

331. Замкнутое подпространство типа G_δ диадического бикомпакта является диадическим бикомпактом.

332. Пусть $C(X)$ — алгебра всех непрерывных на бикомпакте X функций. Тогда:

(а) для любой точки $x_0 \in X$ множество функций $C_{x_0} = \{f \in C(X): f(x_0) = 0\}$ есть идеал в $C(X)$;

(б) каждый центрированный идеал C_0 в $C(X)$ содержится в идеале вида C_{x_0};

(в) все максимальные идеалы в $C(X)$ есть идеалы вида C_{x_0}.

333. Пусть $C(X)$ — алгебра всех непрерывных функций на бикомпакте X. Пусть $A \subset X$ произвольно. Покажите, что $x_0 \in [A]$ тогда и только тогда, когда $C_{x_0} \supset \bigcap \{C_x : x \in A\}$.

334. Два бикомпакта X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда их алгебры $C(X)$ и $C(Y)$ изоморфны.

335*. Пусть X, Y — два бикомпакта, $C(X)$, $C(Y)$ — их алгебры непрерывных функций с метрикой равномерной сходимости. Покажите, что всякое непрерывное отображение $\varphi: X \to Y$ порождает изоморфное вложение $C(Y)$ в $C(X)$ в качестве замкнутого подкольца, и, наоборот, всякое вложение $C(Y)$ в $C(X)$ в качестве замкнутого подкольца порождает непрерывное отображение X на Y.

336. Пусть X, Y — два метрических пространства; $C(X, Y)$ — множество всех ограниченных отображений X в Y. Положим $\delta(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)): x \in X\}$ для любых двух отображений $f \in C(X, Y)$, $g \in C(X, Y)$ (здесь ρ — метрика в метрическом пространстве Y). Тогда:

(а) $C(X, Y)$ с так определенной функцией расстояния есть метрическое пространство;

(б) $C(X, Y)$ — полное метрическое пространство, если (Y, ρ) — полное метрическое пространство.

337*. Пусть I — отрезок $[0, 1]$ числовой прямой. $C(I)$ — пространство всех непрерывных на I функций. Докажите, что подпространство $\Phi \subset C(I)$ является компактом тогда и только тогда, когда Φ замкнуто в $C(I)$, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

§ 6. Связность

Этот параграф озаглавлен «связность», а не «связные пространства» не случайно. Понятие связности служит не только для выделения связных пространств в отдельный класс. Оно имеет определенное — иногда очень большое — значение и для изучения не связных пространств. Прежде всего в каждом топологическом пространстве могут быть выделены максимальные связные части — так называемые связные компоненты (или просто компоненты).

Множество A, лежащее в топологическом пространстве X, называется *компонентой* этого пространства, если оно связно и не существует связного множества B в X, строго содержащего множество A. Иногда говорят о *компонентах множества* C, являющегося частью пространства X, имея в виду при этом компоненты C как подпространства пространства X. Впрочем, допускается двоякое понимание и терминология: *компонентой точки* x (в пространстве, в множестве) называют всегда ту компоненту (этого пространства, множества), которая содержит x.

Важно также понятие *квазикомпонента точки* (в пространстве) — это пересечение всех открыто-замкнутых (в этом пространстве) множеств, содержащих рассматриваемую точку. Пространство называется *вполне несвязным*, если квазикомпонента каждой его точки содержит только ее.

Связные бикомпакты иначе еще называются *континуумами*. Континуум C называется *неразделимым между* своими точками $x \in y$, если всякий континуум C', лежащий в C и содержащий обе точки x, y, совпадает с C.

Пространство X называется *локально связным*, если для всякой точки $x \in X$ и любой ее окрестности существует связная окрестность, включающаяся в данное множество. Пространство X называется *линейно связным*, если для каждых двух различных точек x, y множества X найдется гомеоморфное обычному отрезку подпространство C в X, их содержащее. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ называется *монотонным*, если $f^{-1}y$ связно для любого $y \in Y$.

338. Пространство X не связно в том и лишь в том случае, если существует непустое открыто-замкнутое подмножество пространства X, отличное от всего X.

339. Пространство связно, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств.

340. Приведите пример связных множеств, объединение которых не связно.

341. Приведите пример связных множеств, пересечение которых не связно.

342. Если непрерывная вещественная функция f, определенная на связном пространстве X, принимает как положительные, так и отрицательные значения, то в некоторой точке она обращается в нуль.

343. Пространство X не связно в том и только в том случае, когда его можно непрерывно отобразить на хаусдорфово пространство, состоящее из двух точек.

344. Верно ли, что образ несвязного пространства при непрерывном отображении является пространством несвязным?

345. (Вер Кнастера — Куратовского.) По отношению к заданной на плоскости прямоугольной декартовой системе координат определяется следующее множество X: $X = (c^*) \cup C_0 \cup \bigcup (A_c : c \in C_0)$, где $c^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, C_0 — множество точек канторова совершенного множества, расположенного обычным образом на отрезке $[(0, 0), (1, 0)]$ оси Ox и A_c — подмножество отрезка с концами в точках c^* и c, причем, если c — точка первого рода, т. е. концевая точка некоторого смежного к C_0 интервала (см. 183, 180 гл. II), то A_c состоит из всех точек рассматриваемого отрезка,

ординаты которых рациональны, и если c — точка второго рода, то A_c состоит из всех точек, ординаты которых иррациональны. Докажите, что множество X (в топологии, индуцированной обычной топологией плоскости) связно, но что только одноточечные подмножества пространства $X \setminus \{c^*\}$ связны.

346. Пусть X — топологическое пространство и $\{A_\alpha : \alpha \in M\}$ — семейство его связных подмножеств, причем существует $\alpha_0 \in M$ такое, что $A_{\alpha_0} \cap A_\alpha \neq \emptyset$ для всех $\alpha \in M$. Тогда $\bigcup \{A_\alpha : \alpha \in M\}$ — связное множество.

347. Пусть M — связное множество пространства X. Докажите связность множества $[M]_X$. Докажите, что если $M \subset Y \subset [M]_X$, то Y связно.

348. Если A и B — связные подмножества пространства X и $[A] \cap B \neq \emptyset$, то $A \cup B$ связно.

349. Пусть X — топологическое пространство, x — его точка и $\mathcal{E}_x$ — семейство всех связных подмножеств пространства X, содержащих точку x. Тогда $K_x = \bigcup \{P : P \in \mathcal{E}_x\}$ — компонента пространства X.

350. Докажите, что компонента пространства X замкнута в X. Покажите, что любые две компоненты пространства или совпадают, или не пересекаются.

351. Покажите, что множество всех компонент пространства X его покрывает.

352. Если A и B — замкнутые в X множества, объединение и пересечение которых являются связными множествами, то и сами A и B — связные множества. Покажите на примере, что предположение о замкнутости существенно.

353. Приведите пример счетного хаусдорфова связного пространства. Существует ли регулярное связное счетное пространство? Существует ли метрическое счетное связное пространство?

354. Докажите, что пересечение элементов предфильтра, состоящего из связных бикомпактов, есть связный бикомпакт.

355. Пересечение убывающей последовательности связных бикомпактов есть связный бикомпакт.

356. Приведите пример связного, но не локально связного бикомпакта.

357. Покажите, что для любых двух точек x, y связного бикомпакта X существует неприводимый между ними континуум, их содержащий.

358. Пусть X — связный бикомпакт и U — открытое в X множество, отличное от X. Тогда замыкание произвольной компоненты множества U пересекает множество $X \setminus U$.

359. Связный бикомпакт X нельзя представить в виде объединения счетного семейства своих попарно непересекающихся замкнутых подмножеств, отличных от X.

360. Пусть пространство X является подпространством плоскости R^2: $X = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\} \times [0,\ 1]\right)\right) \cup \{0, 0\} \cup \{0, 1\}$. Докажите, что

(а) X гомеоморфно полному метрическому пространству;

(б) X является объединением счетного числа компактов;

(в) X имеет только две точки, в которых оно не локально бикомпактно;

(г) X нельзя уплотнить ни на какой компакт.

361. Пусть X' — подпространство пространства X и $x \in X'$. Тогда компонента точки x в X' содержится в компоненте точки x в пространстве X.

362. На плоскости с фиксированной декартовой системой координат рассмотрим (вместе с индуцированной топологией) множество X, являющееся объединением прямой $y = 0$ (оси абсцисс), семейства замкнутых отрезков I_n, $n \in N$, где концами I_n служат точки $(0, 1)$ и $\left(n, \frac{1}{n}\right)$, и семейства полупрямых $x = n$, $y = \frac{1}{1+n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Докажите, что X — связное пространство и что некоторая компонента дополнения до точки $(0,1)$ не имеет ее своей точкой прикосновения.

363. Приведите пример пространства, в котором квазикомпонента точки отлична от ее компоненты.

364. Покажите, что компонента K_x бикомпакта X, содержащая произвольную его точку x_0, совпадает с квазикомпонентой точки x_0.

365. Если X — бикомпакт, то разбиение Z пространства X на его компоненты непрерывно.

366. Пространство разбиения бикомпакта X на его компоненты является нульмерным бикомпактом.

367. Укажите пример метрического пространства Y, разбиение которого на компоненты (так же, как и разбиение на квазикомпоненты) не является непрерывным.

368. Если X — связный бикомпакт и A, B — непустые непересекающиеся замкнутые в нем множества, то существует компонента множества $X \setminus (A \cup B)$, замыкание которой пересекается и с A, и с B.

369. Каждое локально связное пространство X является свободной суммой связных локально связных пространств, а именно — своих компонент.

370. Доказать, что следующие два ограничения на пространство X равносильны:

(а) компоненты открытых множеств являются открытыми множествами;

(б) для каждой точки x и каждой ее окрестности Ox найдется такое связное множество V, что $x \in \operatorname{Int} V \subset V \subset Ox$.

373. Связное локально связное пространство и A, B пересекающиеся замкнутые в X множества, то компонента множества $X \setminus (A \cup B)$, замыкание которой содержит и $c \in A$, и $c \in B$.

374. Докажите, что образ связного локально связного пространства при непрерывном отображении может не быть локально связным пространством.

375. Доказать, что фактор-пространство локально связного пространства локально связно.

376. Докажите, что хаусдорфово пространство X, являющееся образом отрезка при непрерывном отображении, связно и локально связно.

377. Произведение локально связных пространств локально связно в том и только в том случае, если все сомножители, за исключением, быть может, конечного числа, связны.

378. Докажите, что всякий связный локально связный компакт является непрерывным образом отрезка числовой прямой.

РЕШЕНИЯ

1. Если f — непрерывная вещественная функция на X, $A \subset X$, $B \subset X$ и $f(A) = 0$, $f(B) = 1$, то $V = \left\{x \in X: f(x) < \frac{1}{2}\right\}$ и $W = \left\{x \in X: f(x) > \frac{1}{2}\right\}$ — пересекающиеся α-окрестности множеств A и B.

2. Пусть $U \in \xi_A$. Выберем непрерывную неотрицательную вещественную функцию f на X, для которой $f(A) = 0$ и $f(X \setminus U) = 1$. Положим $V = \left\{x \in X: f(x) < \frac{1}{2}\right\}$; $\varphi(x) = 2f(x)$, если $f(x) < \frac{1}{2}$, и $\varphi(x) = 1$, если $f(x) \geqslant \frac{1}{2}$; $\psi(x) = 0$, если $x \in V$, и $\psi(x) = 2\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)$, если $x \in V$. Функция φ отделяет A от $X \setminus V$, а функция ψ отделяет V от $X \setminus U$. Поэтому $V \in \xi_A$ и ξ_A является α-семейством.

3. Воспользуйтесь леммой Куратовского — Цорна.

4. Чтобы доказать, что пересечение множеств U_1 и U_2 α-фильтра ξ ему принадлежит, надо взять пересечение элементов V_1 и V_2 этого α-фильтра, α-отделенных от $X \setminus U_1$, соответственно от $X \setminus U_2$, и, рассмотрев произведение отделяющих функций, отвечающих U_1, V_1, соответственно U_2, V_2, выяснить, что оно отделяет $X \setminus (U_1 \cap U_2)$ от $V_1 \cap V_2$.

5. В силу 2 гл. III $\xi = \alpha$-семейство на X (может быть, пустое). Но тогда $\xi \subset \beta$ — центрированное α-семейство. Но $\beta = \alpha$-ультрафильтр, следовательно, $\beta = \xi \cup \beta$, т. е. $\xi \subset \beta$.

9. Пусть на плоскости R^2, по отношению к некоторой прямоугольной декартовой системе координат, заданы следующие множества и точки: $L_n = \left\{(x, y): 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\right\}$, где n — любое целое четное число, $L = \bigcup (L_n:$ n четно$)$; $p_{n,k} = \left(n, 1 - \frac{1}{k}\right) \in R^2$, $T_{n,k} = \left\{\left(n \pm t, 1 - t - \frac{1}{k}\right): 0 \leqslant t \leqslant \right.$ $\left. \leqslant 1 - \frac{1}{k}\right\} \subset R^2$, где n целое нечетное и k целое, $k \geqslant 2$. Положим $S = \{p_{n,k}:$ n нечетное, k целое, $k \geqslant 2\}$, $T = \bigcup (T_{n,k}:$ n нечетное, k целое, $k \geqslant 2)$. Каждое $T_{n,k}$ состоит из двух боковых сторон равнобедренного прямоугольного треугольника, основание (гипотенуза) которого лежит на оси абсцисс, а вершина находится в точке $p_{n,k}$. При этом $p_{n,k} \in T_{n,k}$. Очевидно, $S \cap T = T \cap L = L \cap S = \Lambda$. Присоединим к множеству $S \cup T \cup L$ две какие-нибудь новые точки a^* и b^*. Положим $X = S \cup T \cup L \cup \{a^*\} \cup \{b^*\}$. Определим топологию на X топологию, мы укажем ее базу во всех точках множества X.

1) Каждая точка множества T объявляется изолированной в X.

2) Базисная окрестность каждой точки $p_{n,k}$ состоит из $p_{n,k}$ и всех точек соответствующего множества $T_{n,k}$, за исключением какого-нибудь конечного множества их.

3) Базу в точке $(x, y) \in L_n$ образуют семейства всех множеств вида $\{(x, y)\} \cup (A_{x,y} \setminus K)$, где $A_{x,y} = \{(x, y') \in T: y' = y$ и $|x - x| < 1\}$, а K — любое конечное множество.

4) Базу в точке a^* образуют множества $U_n = \{(x, y) \in X: x < n\}$, n четно.

5) Базу в точке b^* образуют множества вида $V_n = \{(x, y) \in X: x > n\}$, n четно.

Легко проверить, что этими условиями определяется некоторая топология на X; если $\mathscr{B}$ — совокупность всех определенных выше окрестностей в X и $x \in V_1 \cap V_2$, $V_1 \in \mathscr{B}$, $V_2 \in \mathscr{B}$, то существует $V_3 \in \mathscr{B}$, что $x \in V_3 \subset V_1 \cap V_2$; поэтому $\mathscr{B}$ — база некоторой топологии на X (см. 14 гл. II). Очевидно, замыкания множеств из $\mathscr{B}$ образуют сеть в X. Следовательно, X регулярно. Покажем, что произвольная непрерывная вещественная функция f на пространстве X принимает одинаковые значения в точках a^* и b^*. (Это будет означать, что X не вполне регулярно.)

(a) Множество $T^x_{n,k} = \{(x, y) \in T_{n,k}: f(x, y) \neq f(p_{n,k})\}$ счетно. Поэтому существует y^*, для которого $0 \leqslant y^* < \frac{1}{2}$ и $A_{x,y^*} \cap T^x = \Lambda$, где $X_{x,y} = \{(x, y) \in X: y = y^*\}$ и $T^x = \bigcup (T^x_{n,k}:$ n нечетно и k целое, $k \geqslant 2\}$. Через φ_n обозначим отражение плоскости R^2 относительно прямой $x = n$, где n нечетно. Тогда $\varphi_n(X) = X$ и $\varphi_n: X_{y^*} \to X_{y^*}$ — непрерывное отображение. Множество $X_{y^*} \cap T_{n,k}$ состоит ровно из двух точек; обозначим через $z'_{n,k}$ ту из них, абсцисса которой меньше n, и через $z''_{n,k}$ ту, абсцисса которой больше n. Очевидно, $\varphi_n(z'_{n,k}) = z''_{n,k}$. В силу выбора y^* будем иметь $f(z'_{n,k}) = f(z''_{n,k})$ — ведь точки $z'_{n,k}$ и $z''_{n,k}$ принадлежат множеству $T_{n,k} \setminus T^x_{n,k}$. Положим $a_n = I_x \cap X_{y^*}$. Тогда $\varphi_{n+2}(a_n) = a_{n+2}$. Кроме того, $\lim\limits_{k \to \infty} z'_{n+2,k} = a_n$ и $\lim\limits_{k \to \infty} z''_{n+1,k} = a_{n+2}$. Так как $f_{n+2}(z'_{n+1,k}) = f_{n+2}(z''_{n+1,k})$ и f непрерывно, мы заключаем, что $f(a_n) = f(a_{n+2})$ для всех четных n. Значит, $f(a_n) = f(a_0)$ для любых четных n и k. Но $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a^*$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = b^*$. Поэтому $f(a^*) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(b^*)$.

10. Предположим, что 2) не верно. Тогда $\Lambda \in \beta'$. Зафиксируем $V \in \beta$, для которого $V \cap \Lambda = \Lambda$, и выберем $W \in \beta$, α-отделенное от $X \setminus V$. Зафиксируем также какой-нибудь α-ультрафильтр β^* на Y, содержащий β'. Тогда $V \in \beta' \subset \beta^*$ и $W \in \beta' \subset \beta^*$. Пусть $U^* \in \beta^*$. Положим $V^* = W \cap U^*$ и выберем множество $W^* \in \beta^*$, α-отделенное в Y от $Y \setminus V^*$. Тогда $F = \alpha$-окрестность в X множества W и $V^* = \alpha$-окрестность в Y множества $W^* \subset W$. Поэтому (см. 63 гл. IV) $V^* = \alpha$-окрестность множества $W^* \cap X$. Но W^* пересекается с каждым элементом семейства β' (ибо $\beta^* \ni W^*$ и $\beta^* \supset \beta'$, $\beta^* = \alpha$-ультрафильтр). Тем более, $W^* \cap U \neq \Lambda$ для всех $U \in \beta$. Но тогда $V^* \in \beta$ (см. 5 гл. III). Следовательно, и $U^* \in \beta$ (ибо $V^* \subset U^* = Y$). Мы доказали, что $\beta^* = \beta$. Значит, $\beta^* \subset \beta'$, т. е. $\beta^* = \beta' = \beta$ — ультрафильтр на Y.

11. Полная регулярность пространства $X^* \times X^* = Y^*$ является следствием полной регулярности пространства X^* и утверждения задачи 6) гл. III. Докажем ненормальность пространства $X^* \times X^*$. Рассмотрим в $X^* \times X^*$ множество R всех точек $y = (x, 1-x)$, $x \in X^*$. Подпространство $R \subset X^* \times X^*$, очевидно, дискретно и замкнуто в $X^* \times X^*$. Представим R в виде объединения: $R = R_1 \cup R_2$ рациональных точек R_1 и иррациональных R_2. Множества R_1 и R_2, очевидно, замкнуты в $X^* \times X^*$ и $R_1 \cap R_2 = \Lambda$. Покажем, что их нельзя отделить непересекающимися окрестностями в $X^* \times X^*$. Предположим противное: пусть имеются окрестности VR_1 и VR_2 этих множеств, для которых $VR_1 \cap VR_2 = \Lambda$. Для каждой точки $y \in R_2$ рассмотрим такую окрестность $V_y = U_x \times U_{1-x}$, где U_x — полуинтервал $[x, x')$ в X^*, а U_{1-x} — полуинтервал $[1-x, x')$, чтобы $V_y \subset VR_2$ и чтобы длины полуинтервалов U_x и U_{1-x} были равны. Обозначим $V'R_2 = \bigcup \{V_y : y \in R_2\}$. Множество $V'R_2$ открыто в $X^* \times X^*$, $R_2 \subset V'R_2$ и $VR_1 \cap V'R_2 = \Lambda$. Для каждой построенной окрестности V_y, $y \in R_2$, через $r(y)$ обозначим действительное число, равное длине полуинтервалов U_x и U_{1-x}. Рассмотрим множества $A_k = \left\{ y \in R_2 : r(y) \geqslant \frac{1}{k} \right\}$. Имеем $R_2 = \bigcup \{A_k : k \in N^+\}$. Если R_2 рассмотреть с обычной топологией числовой прямой, то R_2 метризуемо полной метрикой (237 гл. II) и, следовательно, R_2 нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств (238 гл. II). Значит, некоторое A_{k_0} плотно в некотором интервале (a, b) пространства R, рассматриваемого в обычной топологии числовой прямой. Внутри этого интервала лежат некоторая рациональная точка, т. е. точка $y_1 = (x_0, 1-x_0) \in R_1$. Теперь, если V_{y_1} — произвольная базисная окрестность этой точки в $X^* \times X^*$, то найдется точка $y^* = (x^*, 1-x^*) \in A_{k_0} \subset R_2$, для которой построенная выше окрестность V_{y^*} пересекается с V_{y_1}. (Здесь мы воспользовались всюду плотностью множества A_{k_0} в интервале (a, b), и тем, что для всех $y \in A_{k_0}$ непременно $r(y) \geqslant \frac{1}{k_0}$.) Отсюда следует, что $V_{y^*} \cap VR_1 \neq \Lambda$, а тогда, тем более, $VR_1 \cap V'R_2 \neq \Lambda$. Получили противоречие. Итак, пространство $X^* \times X^*$ не нормально.

12. На основании бикомпактности F и вполне регулярности X без труда строятся открытые множества $U_1, \ldots, U_k$ (в конечном числе), покрывающие и замкнутости F, и непрерывные ограниченные вещественные функции $f_1, \ldots, f_k$ на X такие, что $f_i(U_i) = 0$, $f_i(F) = 1$, $i = 1, \ldots, k$. Функция $f = f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_k$ (обычное произведение функций $f_1, \ldots, f_k$) искомая.

13. Пусть $V_1 \subset V_2 \in \mathscr{B}$ и $x \in V_1 \cap V_2$. Тогда существует такое $V_3 \in \mathscr{B}$, что $x \in V_3 \subset V_1 \cap V_2$. Значит, $\mathscr{B}$ — база в X. Вторая часть утверждения 1) очевидна. Так как $(x) = \bar{O}(x, \varepsilon) \cap I$ для всех $x \in I$, то справедливо 2). Утверждение 3) очевидно. Имеем $X = I \cup Y$, где I дискретно, и потому метризуемо и замкнуто в X, а Y метризуемо (и имеет счетную базу) в силу 3) и является открытым множеством типа F_σ. Это доказывает 4).

Вполне регулярность X в точках множества Y вытекает из вполне регулярности Y, ибо полная функция, непрерывная на X по отношению к обычной топологии, непрерывна и по отношению к $\mathscr{S}$. Рассмотрим теперь произвольное $O(x, \varepsilon)$. Проведем всевозможные хорды в $O(x, \varepsilon)$, начинающиеся в x. Определим вещественную функцию f на X следующими соглашениями: $f_{x, \varepsilon}(X \setminus O(x, \varepsilon)) = 1$, $f_{x, \varepsilon}(x) = 0$, а на указанных хордах определим f из линейности. Легко проверяется, что $f_{x, \varepsilon}$ — непрерывная функция $\left(\text{если } \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ то } \operatorname{diam}(f(\bar{O}(x, \varepsilon'))) < \varepsilon \right)$.

Представим I в виде $I = R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2 = \Lambda$, где R_1 — рациональные точки в I, а R_2 — иррациональные. Ясно, что R_1 и R_2 — замкнутые непересекающиеся множества. Так же как и в 11 гл. III, доказывается, что их нельзя отделить непересекающимися окрестностями.

15. Если множества F и Φ замкнуты в X, причем $F \cap \Phi = \Lambda$, то по крайней мере одно из множеств F или Φ должно состоять из изолированных точек. Пусть таково F. Положим $U_1 = F$ и $U_2 = X \setminus F$; очевидно, U_1 и U_2 — непересекающиеся окрестности множества F и Φ.

16. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество всех неизолированных точек пространства X. Так как X хаусдорфово, то существуют попарно непересекающиеся окрестности Ox_i точек x_i, $i = 1, \ldots, k$. Если теперь F и Φ замкнутые непересекающиеся множества в X, то $OF = F \cup (\bigcup \{Ox_i : x_i \in F\}) \setminus \Phi$ и $O\Phi = \Phi \cup (\{\bigcup Ox_i : x_i \in \Phi\}) \setminus F$ — непересекающиеся окрестности множеств F и Φ.

17. Нет. Рассмотрим счетное счетно хаусдорфово пространство X (такое существует, см. 353 гл. III). Если бы X было вполне регулярно, то существовала бы непрерывная вещественная функция f на X, отличная от константы. Положим $f(X) = Y$. Тогда Y — счетное по мощности подпространство вещественной прямой. Следовательно, Y несвязно (221, 224 гл. II), а потому и X несвязно — получили противоречие. Значит, X не нормально (см. 26 гл. III). См. другой пример в 66 гл. II.

18. Да: счетное пространство финально компактно (208 гл. III), а регулярное финально компактное пространство нормально (18 гл. III).

19. Пусть замкнутые в X множества A и B не пересекаются. Для каждой точки $x \in A$ зафиксируем окрестность Ox, замыкание которой не пересекается с B; соответственно для $x \in B$ окрестность Ox выберем так, чтобы было $[Ox] \cap A = \Lambda$. Положим: $\gamma = \{Ox : x \in A\}$, $\lambda = \{Ox : x \in B\}$. Так как $\gamma \cup (X \setminus A)$ и $\lambda \cup (X \setminus B)$ — открытые покрытия пространства X и $A \cap (X \setminus A) = \Lambda$, $B \cap (X \setminus B) = \Lambda$, то существуют счетные семейства $\gamma^* \subset \gamma$ и $\lambda^* \subset \lambda$, для которых $\bigcup \{U : U \in \gamma^*\} \supset A$ и $\bigcup \{V : V \in \lambda^*\} \supset B$. Перенумеруем элементы γ^* и λ^*: $\gamma^* = \{U_i : i \in N^+\}$, $\lambda^* = \{V_i : i \in N^+\}$ (допускается, чтобы было $U_i = U_j$ при $i \neq j$). Положим $G_i = V_i \setminus \bigcup \{\bar{U}_j : j \leqslant i\}$ и $H_i = U_i \setminus \bigcup \{\bar{V}_j : j \leqslant i\}$. В силу выбора окрестностей Ox будем иметь: $A \subset \bigcup \{G_i : i \in N^+\} = G$, $B \subset \bigcup \{H_i : i \in N^+\} = H$. Очевидно, $G_i \cap H_j = \Lambda$ при любых i и j. Значит, $G \cap H = \Lambda$. Итак, множества G и H — непересекающиеся окрестности множеств A и B. Второе утверждение доказывается точно так же.

20. См. 77 гл. II; 19, 208 гл. III.

21. Если $k = 1$, то утверждение очевидно. Предположим, что для всех нормальных пространств X и для всех их открытых покрытий λ, состоящих менее чем из n элементов, утверждение доказано, и пусть $k = n$, т. е. $\lambda = \{U_1, \ldots, U_n\}$. Положим $F_n = X \setminus \bigcup \{U_i : i = 1, \ldots, n-1\}$. Тогда F_n замкнуто в X и $F_n \subset U_n$; поэтому существует открытое в X множество V, для которого $F_n \subset V \subset [V] \subset U_n$. Положим $X' = X \setminus V$ и $U_i' = U_i \cap X'$, $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда X' замкнуто в X, и потому, вместе с индуцированной на X' топологией, является нормальным пространством, причем $X' = \bigcup \{U_i' : i = 1, \ldots, n-1\}$, т. е. $(U_1', \ldots, U_{n-1}')$ — открытое покрытие пространства X'. По индуктивному предположению, существуют замкнутые в X' множества $F_i' \subset X'$ такие, что $F_i' \subset U_i'$ и $\bigcup \{F_i' : i = 1, \ldots, n-1\} = X'$. Множества F_i', $i = 1, \ldots, n-1$, замкнуты и в X (так как X' замкнуто в X), и $F_i' \subset U_i$. Положим $F_i = F_i'$ при $i = 1, \ldots, n-1$ и $F_n = [V]$. Очевидно, семейство $\{F_1, \ldots, F_n\}$ искомое.

22. Так как X регулярно, то существует семейство $\lambda = \{V_n : n \in N^+\}$ попарно непересекающихся открытых множеств, для которых $x_n \in V_n$ при всех $n \in N^+$ (44 гл. II). Тогда $A \subset G = \bigcup \{V_n : n \in N^+\}$ и G открыто в X.

Так как Y нормально, то существует открытое в A множество W, для которого $A \subset W \subset [W] \subset G$. Положим $U_n = V_n \cap W$. Очевидно, $x_0 \in U_n \subset U_n$ открыто в X при всех $n \in N^+$. Проверим, что семейство $\gamma = \{U_n : n \in N^+\}$ дискретно. Очевидно, $\bigcup \{U_n : n \in N^+\} = W$. Пусть $x \notin [W]$. Тогда $X \setminus [W]$ — окрестность точки x, не пересекающаяся ни с одним элементом семейства γ. Предположим теперь, что $x \in [W]$. Тогда $x \in G_k$, и потому $x \in V_k$ для некоторого $V_k \in \lambda$. Тогда V_k — окрестность точки x, пересекающаяся лишь с одним элементом семейства γ — а именно, U_k. Действительно, если $n \neq k$, то $U_n \subset V_n$, и из $V_k \cap V_n = \Lambda$ следует, что $U_k \cap V_n = \Lambda$.

23. Пространство Y нормально — оно гомеоморфно замкнутому подпространству пространства $X \times Y$. Предположим, что нашлось замкнутое в Y множество M, не являющееся пересечением счетного семейства открытых в Y множеств, и нашлось счетное множество $N \subset X$, не замкнутое в X. Зафиксируем $x^* \in [N] \setminus N$ и рассмотрим множества $A = N \times M$ и $B = \{x^*\} \times (Y \setminus M)$. Из определения тихоновской топологии на $X \times Y$ ясно, что в A нет предельных точек для B и в B нет предельных точек для A. Значит, A и B — замкнутые непересекающиеся подмножества пространства $(X \times Y) \setminus F$, где $F = [A] \cap [B]$ (замыкания берутся в $X \times Y$). Так как $X \times Y$ нормально, то существуют непересекающиеся открытые (в $(X \times Y) \setminus F$ — а значит, и в $X \times Y$) множества U и V, для которых $A \subset U$, $B \subset V$. Рассмотрим теперь множества $M_x = \{(x', y) : x' = x, y \in M\}$, где $x \in N$. Каждое M_x замкнуто в $X \times Y$ (ибо M замкнуто в Y) и $M_x \subset A \subset U$. Из определения топологии произведения следует, что найдется для каждого $x \in N$ открытое в Y множество U_x, содержащее M, такое, что $M_x \subset \{x\} \times U_x \subset U$. Семейство $\{U_x : x \in N\}$ счетно. Поэтому (и в силу выбора M) $\bigcap \{U_x : x \in N\} \setminus M \neq \Lambda$. Зафиксируем $y^* \in \bigcap \{U_x : x \in N\} \setminus M$. Тогда $(x^*, y^*) \in [N \times \{y^*\}]$. Так как $(x^*, y^*) \in \{x\} \times U_x \subset U$ для всех $x \in N$, то $N \times \{y^*\} \subset U$ и, значит, $(x^*, y^*) \in [U]$. Но $(x^*, y^*) \in B$ — ведь $y^* \notin M$ и $B = \{x^*\} \times (Y \setminus M)$. Поэтому $(x^*, y^*) \in V$ и $V \cap [U] \neq \Lambda$. Так как V открыто в X, то мы заключаем, что $V \cap U \neq \Lambda$ — получили противоречие.

24. (а) Построение открытых множеств U_r, $r = \frac{q}{2^n}$, $n \in N^+$, $q = 1, 2, \ldots, 2^n$, ведется по индукции с использованием малой леммы Урысона (45 гл. II). Если, допустим, построены множества $U_{q/2^{n-1}}$, $q = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, с тем свойством, что $[U_{q_1/2^{n-1}}] \subset U_{q_2/2^{n-1}}$, как только $\frac{q_1}{2^{n-1}} < \frac{q_2}{2^{n-1}}$, то множества $U_{q/2^n}$, $q = 1, 2, \ldots, 2^n$, строятся следующим образом: для каждой пары $\frac{q}{2^{n-1}}$, $\frac{q+1}{2^{n-1}}$, по малой лемме Урысона (45 гл. II), берется открытое множество $U_r \left(r = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{2^{n-1}} + \frac{q+1}{2^{n-1}}\right) = \frac{2q+1}{2^n}\right)$, для которого $U_{q/2^{n-1}} \subset [U_{q/2^{n-1}}] \subset U_r \subset [U_r] \subset U_{(q+1)/2^{n-1}}$.

(б) При доказательстве утверждения (б) надо воспользоваться тем фактом, что между любыми двумя действительными числами находится много двоично-рациональных чисел, т. е. чисел вида $q/2^n$, и утверждением (а) нашей задачи.

(в) То, что функция $f(x) = \inf\{t : x \in U_t\}$ равна нулю в точках множества $[U_0]$, следует просто из ее определения. Доказываем непрерывность функции $f(x)$ в произвольной точке $x_0 \in X$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Рассмотрим открытое множество $U_{f(x_0)+\varepsilon} \setminus U_{f(x_0)-\varepsilon}$ и открытое множество $Ux_0 = U_{f(x_0)+\varepsilon} \setminus [U_{f(x_0)-\varepsilon}]$. Нетрудно убедиться в том, что $x_0 \in Ux_0$, и для любой точки $x \in Ux_0$ непременно $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, что и означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0. Все доказано.

25. (а) Пусть X нормально, а F_0, F_1 замкнуты в X и $F_0 \cap F_1 = \Lambda$. Рассмотрим $U_1 = X \setminus F_1$ и открытое множество U_0, для которого $F_0 \subset U_0 \subset [U_0] \subset U_1$ (см. 45 гл. II). Далее, пользуясь 24 гл. III, строим непрерывную на X функцию $f: X \to [0, 1]$, для которой $f(x) = 0$, если $x \in [U_0]$, и $f(x) = 1$, если $x \in X \setminus U_1 = F_1$. Тогда $f(x)$ — искомая функция.

(б) Пусть для любых двух непересекающихся замкнутых в X множеств F_0 и F_1 существует непрерывная на X функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in F_0, \\ 1, & \text{если } x \in F_1, \\ 0 < f(x) < 1. \end{cases}$$

Рассмотрим множества $UF_0 = \left\{x \in X : f(x) < \frac{1}{2}\right\}$, $UF_1 = \left\{x \in X : f(x) > \frac{1}{2}\right\}$. Множества UF_0, UF_1, очевидно, открыты в X, $F_0 \subset UF_0$, $F_1 \subset UF_1$ и $UF_0 \cap UF_1 = \Lambda$.

26. Полная регулярность нормального пространства, очевидно, следует из утверждения задачи 25 гл. III.

28. Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые в Y множества. Пространство Y_1, в силу замкнутости, является нормальным пространством. По индукции легко могут быть построены открытые в X множества U_t и V_t, где $t \in N^+$, так, чтобы выполнялись условия: 1) $U_t \supset (A \cap F_2) \cup [U_{\frac{t}{2}}]$; 2) $[U_t] \cap (B \cup [V_{t-\frac{1}{2}}]) = \Lambda$; 3) $V_t \supset (B \cap F_2) \cup [V_{t-\frac{1}{2}}]$; 4) $[V_t] \cap (A \cup [U_t]) = \Lambda$ (на каждом этапе этого построения — вполне очевидно и соответственно — мы пользуемся нормальностью пространства X). Затем следует взять множества $U = \bigcup \{U_t : t \in N^+\}$ и $V = \bigcup \{V_t : t \in N^+\}$; тогда $U \supset A$, $V \supset B$, U и V открыты в X и $U \cap V = \Lambda$. Множества $U \cap Y$ и $V \cap Y$ искомые.

29. Каждое открытое подпространство совершенно нормального пространства является множеством типа F_σ, и потому нормально (28 гл. III). Рассмотрим теперь произвольное подпространство Y пространства X и замкнутые в Y непересекающиеся множества A и B. Тогда $[A]_X \cap B = \Lambda$ и $[B]_X \cap A = \Lambda$ — иначе A и B не были бы замкнуты в $A \cup B$ и, тем более, в $Y \supset A \cup B$. Положим $F = [A]_X \cap [B]_X$ и $\overline{Y} = X \setminus F$. Из сказанного выше следует, что $\overline{Y} \supset A \cup B$. Положим $\overline{A} = [A]_{\overline{Y}}$ и $\overline{B} = [B]_{\overline{Y}}$. Из $\overline{A} \cap \overline{B} = [A]_{\overline{Y}} \cap [B]_{\overline{Y}} = [A] \cap [B] - F = X \setminus \overline{Y}$ и $[A]_{\overline{Y}} \cap [B]_{\overline{Y}} \subset \overline{Y}$ следует, что $\overline{A} \cap \overline{B} = \Lambda$. Итак, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — замкнутые непересекающиеся подмножества пространства $\overline{Y}$, которое открыто в X и потому нормально. Следовательно, существуют открытые в $\overline{Y}$ множества U и V, для которых $U \supset \overline{A} = A$, $V \supset \overline{B} = B$ и $U \cap V = \Lambda$. Тогда U и V открыты в X и $U \cap Y$, $V \cap Y$ — искомые окрестности множеств A и B. Коэль. мы доказали утверждение, содержащееся в задаче 27 гл. III.

30. (а) Пусть X — нормальное пространство, а $F \subset X$ — его замкнутое множество типа G_δ: $F = \bigcap \{U_i : i \in N^+\}$, где U_i, $i \in N^+$, открыты в X. В силу теоремы Урысона (25 гл. III) для каждого i существует непрерывная на всем X функция $f_i(x)$: $0 \leqslant f_i(x) \leqslant 1$, $x \in X$, для которой $f_i(x) = 0$, если $x \in F$, $f_i(x) = 1$, если $x \in X \setminus U_i$. Рассмотрим на всем X функцию $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f_i(x)$. Функция $f(x)$ непрерывна на X и $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ для любой точки $x \in X$. Кроме того, очевидно, $f(x) = 0$ для любой точки $x \in F$. Пусть

$x_0 \notin F$. Тогда $x_0 \notin U_{\xi_0}$ для некоторого номера ξ_0, следовательно, $f_{\xi_0}(x_0) = 1$. По тому $f(x_0) \neq 0$. Таким образом, $F = f^{-1}(0)$.

(б) Пусть теперь X нормально и для множества $F \subset X$ существует непрерывная на X функция $f(x)$, для которой $F = f^{-1}(0)$. Рассмотрим $U_i = \left\{x \in X: |f(x)| < \frac{1}{i}\right\}$. Тогда множества U_i, $i \in N^+$, открыты в X и $F = \bigcap \{U_i: i \in N^+\}$.

31. В самом деле, на X существует непрерывная вещественная функция g, для которой $g(A) = 0$, $g(B) = 1$ и $g(X) \subset [0, 1]$. Положим $f(x) = 2 \cdot \left(g(x) - \frac{1}{2}\right)$ при всех $x \in X$. Функция f искомая.

32. Положим $A_1 = \left\{x \in A: -\varepsilon \leqslant f_1(x) \leqslant -\frac{1}{3}\varepsilon\right\}$, $A_2 = \left\{x \in A: \frac{1}{3}\varepsilon \leqslant f_1(x) \leqslant \varepsilon\right\}$. Множества A_1 и A_2 не пересекаются; они замкнуты в A и, следовательно, в X. Поэтому существует непрерывная вещественная функция g на X такая, что $g(A_1) = \left\{-\frac{1}{3}\varepsilon\right\}$, $g(A_2) = \left\{\frac{1}{3}\varepsilon\right\}$ и $g(X) \subset \left[-\frac{1}{3}\varepsilon, \frac{1}{3}\varepsilon\right]$. Функция g, очевидно, искомая.

33. Будем считать для определенности, что $f(A) \subset [-1, 1]$. Применим к f утверждение задачи 32 гл. III (где $\varepsilon = 1$ и f играет роль f_0). Обозначим полученную функцию через g_1. Положим $f_1(x) = f(x) - g_1(x)$ при всех $x \in A$. Тогда $f_1(A) \subset \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$. Применим теперь снова утверждение задачи 32 гл. III к f_1 в роли f_0 и с $\varepsilon = \frac{2}{3}$ — получим функцию g_2. Продолжим этот процесс по индукции: если уже определены $g_1, \ldots, g_n$, то прежде $f - \left(\sum_{i=1}^{n} g_i \mid A\right)$ за f_n и выберем g_{n+1} в соответствии с доказательством задачи 32 гл. III. Тогда $|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ при всех $x \in X$ и $\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ при всех $x \in A$ (и всех n). Поэтому ряд $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$ равномерно сходится на X к некоторой функции g; так как все члены этого ряда непрерывны, то g — тоже непрерывная функция — это доказывается так же, как и соответствующая теорема анализа. Очевидно, $g(x) = f(x)$ при всех $x \in A$ и $-1 \leqslant g(x) \leqslant 1$ при всех $x \in X$.

34. Определим отображение i пространства R на интервал $J = (-1, 1)$ формулой: $i(x) = \frac{x}{1+|x|}$ при всех $x \in R$. Очевидно, i — гомеоморфизм R на J. Тогда $g = fi$ можно рассматривать как непрерывное отображение пространства A в отрезок $[-1, 1]$. В силу 33 гл. III существует непрерывное отображение F_1 пространства X в $[-1, 1]$, являющееся продолжением отображения g. Так как $g(A) \subset (-1, 1)$, то $B = F_1^{-1}([1, -1])$ — замкнутое в X множество, не пересекающееся с A. Выберем на X непрерывную вещественную функцию $h(x)$, для которой $h(A) = 1$, $h(B) = 0$, $h(X) \subset [0, 1]$. Положим $F(x) = h(x) \cdot F_1(x)$ при всех $x \in X$. На A функция F, как и F_1, совпадает с $g = fi$. Кроме того, $F(X) \subset (-1, 1)$. Тогда $\overline{f} = i^{-1}F$ — непрерывное отображение пространства X в R, на A совпадающее с $i^{-1}fi = f$.

35. Рассмотрим любую точку $x^* \in X$, $x^* = \{x_\alpha: \alpha \in A\}$ и любую ее окрестность Ox^* в X. Найдутся $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$ и открытые в X_{α_i} множества U_{α_i}, $i = 1, \ldots, k$, для которых $x^* \in \left(\bigcap \{\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}): i = 1, \ldots, k\}\right) \subset Ox^*$, где π_α — естественное проектирование X на X_α. Так как X_{α_i} вполне регулярно, то существует непрерывное отображение $f_i: X_{\alpha_i} \to [0, 1]$, для которого $f_i(x_{\alpha_i}) = 0$, $f_i(X_{\alpha_i} \setminus U_{\alpha_i}) = \{1\}$ при всех $i = 1, \ldots, k$. Тогда и $f_i^* = f_i \pi_{\alpha_i}: X \to [0, 1]$ — непрерывное отображение. Очевидно, функция f^*, заданная правилом: $f^*(x) = \max(f_i^*(x): i = 1, \ldots, k)$, искомая: $f(X \setminus Ox^*) = \{1\}$ и $f(x^*) = 0$.

36. Пусть $\sigma = \{U_\lambda: \lambda \in \Gamma\}$ — база множества τ, равной весу данного пространства X. Пару $\{U_\lambda, U_{\lambda'}\}$, где $U_\lambda \in \sigma$, $U_{\lambda'} \in \sigma$, назовем отмеченной, если существует непрерывная функция $f: X \to [0, 1]$, которая равна нулю во всех точках множества $[U_\lambda]$ и единице во всех точках множества $X \setminus U_{\lambda'}$. Очевидно, $[U_\lambda] \subset U_{\lambda'}$. Множество всех отмеченных пар обозначим через δ. Очевидно, $|\delta| \leqslant |\delta^2| = |\sigma \times \sigma| = \tau$. Паре отмеченной пары $\{U_\lambda, U_{\lambda'}\} \in \delta$ поставим в соответствие какую-нибудь определенную непрерывную функцию $f_{\lambda\lambda'}: X \to [0, 1]$, для которой $f_{\lambda\lambda'}(x) = 0$, если $x \in [U_\lambda]$, и $f_{\lambda\lambda'}(x) = 1$, если $x \in X \setminus U_{\lambda'}$. Множество всех отобранных таким образом непрерывных функций обозначим через Ξ. Очевидно, $|\Xi| = |\delta| \leqslant \tau$, поэтому, что Ξ — разделяющее семейство функций. Действительно, пусть $x_0 \in X$ и окрестность Ox_0 произвольна. Возьмем такие $U_\lambda \in \sigma$, чтобы $x_0 \in U_{\lambda'} \subset Ox_0$. В силу вполне регулярности пространства X существует непрерывная функция $f: X \to [0, 1]$, для которой $f(x_0) = 0$ и $f(x) = 1$, если $x \in X \setminus U_{\lambda'}$. Рассмотрим окрестность $Ux_0 = \left\{x \in X: f(x) < \frac{1}{2}\right\}$ точки x_0. Очевидно, $[Ux_0] \subset U_{\lambda'}$. Теперь остается взять $U_\lambda \in \sigma$, для которого $x_0 \in U_\lambda \subset Ux_0$. Докажем, что пара $\{U_\lambda, U_{\lambda'}\}$ отмеченная. Строим функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(x) = 1, \\ 0, & \text{если } f(x) \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2\left(f(x) - \frac{1}{2}\right), & \text{если } \frac{1}{2} < f(x) < 1. \end{cases}$$

Функция $f_1(x)$ непрерывна, $0 \leqslant f_1(x) \leqslant 1$ для всех $x \in X$; $f_1(x) = 0$, если $x \in [U_\lambda]$; $f_1(x) = 1$, если $x \in X \setminus U_{\lambda'}$. Значит, пара $\{U_\lambda, U_{\lambda'}\}$ отмеченная. Тогда, по построению Ξ, существует $f_{\lambda\lambda'} \in \Xi$, для которой $f_{\lambda\lambda'}(x) = 0$, если $x \in [U_\lambda]$, и $f_{\lambda\lambda'}(x) = 1$, если $x \in X \setminus U_{\lambda'}$. Все доказано.

37. (а) Диагональное отображение f взаимно однозначно. Действительно, если $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, то найдется такое $\alpha \in A$, что $f_\alpha x_1 \neq f_\alpha x_2$. Но тогда $fx_1 \neq fx_2$. Кроме того, f непрерывно (250 гл. II).

(б) Докажем непрерывность обратного отображения $f^{-1}: fX \to X$. Пусть F — замкнутое в X множество. Надо доказать, что множество fF замкнуто в $fX \subset \Pi\{Y_\alpha: \alpha \in A\}$. Пусть $y^0 = fx_0$ — произвольная fF. Тогда $x_0 \notin F$ и существует такое $\alpha_0 \in A$, что $f_{\alpha_0} x_0 \notin [\pi_{\alpha_0} F]_{Y_{\alpha_0}}$. Рассмотрим проектирование $\pi_{\alpha_0}: fX \to Y_{\alpha_0}$. Имеем $f_{\alpha_0} = \pi_{\alpha_0} f$. Тогда $f_{\alpha_0}[F] \subset [\pi_{\alpha_0} fF] = [f_{\alpha_0} F]$ (в силу непрерывности f_{α_0}). Так как $f_{\alpha_0} x_0 \in [f_{\alpha_0} F]_{Y_{\alpha_0}}$, то $f_{\alpha_0} x_0 \in \pi_{\alpha_0}[fF]_{fX}$, но тогда $fx_0 \notin [fF]_{fX}$. Таким образом, $[fF]_{fX} = fF$ для любого замкнутого множества F в X.

38. Пространство X вполне регулярно тогда и только тогда, когда на X существует расщепляющее семейство непрерывных вещественных ограниченных функций $f_\lambda: X \to I_\lambda$, $\lambda \in \Gamma$. Поэтому вполне регулярное пространство X гомеоморфно отображается с помощью диагонального отображения f (см. 37 гл. III) в тихоновский куб $Y = \Pi\{I_\lambda: \lambda \in \Gamma\}$ (в связи с $[fX]_Y$). Оставшаяся часть утверждения следует из 35 и 5 гл. III.

39. Регулярное пространство X со счетной базой $\sigma = \{U_i: i \in N\}$ совершенно нормально (23 гл. III). Пользуясь задачей 30 гл. III, строим для каждого i непрерывную функцию $f_i(x)$ на X: $0 \leqslant f_i(x) \leqslant 1$, для которой $X \setminus U_i = f_i^{-1}(0)$. Системы $\{f_i: i \in N\}$ этих функций, очевидно, является расщепляющей. Тогда диагональное отображение f гомеоморфно отображает пространство X в произведение счетного множества отрезков: $\prod_{i=1}^{\infty} I_i$, т. е. в заведомо метризуемое пространство (194 гл. II). Таким образом, и сами X метризуемо.

40. Прежде всего заметим, что всякий нуль-множество пространства X открыто в X. Для каждого $U \in \sigma$ рассмотрим непрерывную на всем X функцию $f_U: X \to I_U$ (здесь I_U — отрезок $[0, 1]$ числовой прямой, снабженный индексом U), для которой $f_U(X \setminus U) = 0$, а $f_U x \neq 0$, если $x \in U$. Рассмотрим топологическое произведение $\Pi\{I_U: U \in \sigma\} = Y$ (тихоновский куб веса, равного $|\sigma| \geqslant \aleph_0$. Ясно, что $wY = |\sigma| \leqslant \tau$ (см. 379 гл. II). Далее рассмотрим диагональное произведение $f_\sigma: X \to \Pi\{I_U: U \in \sigma\}$ для семейства отображений $f_U: X \to I_U$, $U \in \sigma$. Ясно, что $w(f_\sigma X) \leqslant \tau$. В качестве Y_σ берем $f_\sigma(X) = \Pi(I_U: U \in \sigma)$. Отображение $f_\sigma: X \to Y_\sigma$ непрерывно, как диагональное произведение семейства непрерывных отображений. Остается показать, что $f_\sigma U$ открыто в Y_σ и $f_\sigma^{-1} f_\sigma U = U$, если, конечно, $U \in \sigma$. Но это уже не представляет труда.

41. Рассмотрим (пользуясь 40 гл. III) пространство Y_σ, $wY_\sigma \leqslant \tau$, и непрерывное отображение $f_\sigma: X \xrightarrow{\text{на}} Y_\sigma$, при котором $f_\sigma U$ открыто в Y_σ и $f_\sigma^{-1} f_\sigma U = U$, если $U \in \sigma$. Так как σ — внешняя несвязная множества $M \subset X$, то $f_\sigma^{-1} f_\sigma(x) = x$, если $x \in M$. В частности, $f_\sigma^{-1} f_\sigma M = M$. Все доказано.

Замечание. Пусть $\mathscr{B}$ — база пространства X и γ — его открытое покрытие. Очевидно, в γ можно вписать покрытие, составленное из элементов базы $\mathscr{B}$. Если из этого последнего можно выделить конечное покрытие, то, разумеется, и в исходном покрытии γ есть конечное подпокрытие.

45. (а) Пусть X бикомпактно, а $\xi = \{F_\lambda: \lambda \in A\}$ — произвольная центрированная система замкнутых в X множеств. Если бы система ξ имела пустое пересечение, то система $\omega = \{X \setminus F_\lambda: \lambda \in A\}$ открытых в X множеств образовывала бы открытое покрытие пространства X. Тогда в силу бикомпактности пространства X из покрытия ω можно было бы выделить конечное подпокрытие $\omega_1 = \{X \setminus F_{\lambda_1}, \ldots, X \setminus F_{\lambda_n}\}$ пространства X. Отсюда следовало бы $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i} = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus F_{\lambda_i}) = X \setminus X = \Lambda$, т. е. получалось бы противоречие с центрированностью системы ξ.

(б) Пусть вполне центрированная система замкнутых множеств пространства X имеет пустое пересечение. Докажем бикомпактность пространства X. Пусть $\gamma = \{U_\lambda: \lambda \in A\}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. Надо выделить из него конечное подпокрытие. Предположим противное, пусть всякая конечная подсистема системы ω не является покрытием пространства X. Тогда система $\xi = \{X \setminus U_\lambda: \lambda \in A\}$ центрирована и состоит из замкнутых множеств, следовательно, $\bigcap\{(X \setminus U_\lambda): \lambda \in A\} \neq \Lambda$. Но тогда $X \setminus \bigcap\{X \setminus U_\lambda): \lambda \in A\}) = \bigcup\{(X \setminus (X \setminus U_\lambda)): \lambda \in A\} = \bigcup\{U_\lambda: \lambda \in A\} \neq X$, что противоречит тому, что ω — покрытие пространства X.

46. Для решения задачи надо заметить только, что точка прикосновения центрированной системы замкнутых множеств принадлежит всем множествам этой системы, что из центрированности системы множеств следует центрированность системы замыканий этих множеств, и далее воспользоваться задачей 45 гл. III.

47. Для решения этой задачи надо только заметить, что всякая центрированная система множеств содержится в максимальной центрированной системе (127 гл. I), и далее воспользоваться предыдущей задачей.

48. (а) Обозначим через A множество всех точек X, не являющихся точками полного накопления для M. Для каждого $x \in A$ зафиксируем такую окрестность Ox (в X), что $|Ox \cap M| < |M|$. Если $A = X$, то $\gamma = \{Ox: x \in A\}$ — открытое покрытие пространства X. Выберем из него конечное подпокрытие $\lambda = \{Ox_1, \ldots, Ox_n\} \subset \gamma$. Тогда $M \subset \bigcup\{Ox_i \cap M: i = 1, \ldots, n\}$ и $|M| = \max\{|Ox_i \cap M|: i = 1, \ldots, n\}$ (см. 20 гл. I) — получили противоречие. Следовательно, $X \setminus A \neq \Lambda$, т. е. у M есть точка полного накопления в X.

(б) Пусть имеется открытое покрытие γ пространства X, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия. Положим $\tau^* = \min\{|\lambda|: \lambda \subset \gamma$ и λ — покрытие $X\}$. Зафиксируем $\lambda^* \subset \gamma$, для которого $|\lambda^*| = \tau^*$ и $\bigcup\{U: U \in \lambda^*\} = X$. Тогда, по предположению, $\tau^* \geqslant \aleph_1$. Вполне упорядочим множество λ^* минимальным — некоторым отношением $\prec$. Тогда, в силу выбора λ^* и отношения $\prec$, будем иметь: $\bigcup\{V: V \in \lambda^*$ и $V \prec U\} \neq X$ для каждого $U \in \lambda^*$. Определим точку $x(U) \in X \setminus \bigcup\{V \cup \{x(V)\}: V \in \lambda^*$ и $V \prec U\}$ для каждого $U \in \lambda^*$ — это возможно, ибо иначе на λ^* можно было бы выбрать покрытие меньшей мощности. Положим $M = \{x(U): U \in \lambda^*\}$. Пусть $p \in X$. Покажем, что p не является точкой полного накопления для M. Непременно $p \in U^*$ для некоторого $U^* \in \lambda^*$, так как λ^* покрывает X. Но $x(U) \notin U^*$ следует, по выбору $x(U)$, что $U \prec U^*$. Значит, $\{U: U \in \lambda^*$ и $x(U) \in U^*\} \subset \{U: U \in \lambda^*$ и $U \prec U^*\}$. Но $|\{U: U \in \lambda^*$ и $U \prec U^*\}| < |\lambda^*|$ в силу минимальности $\prec$. Следовательно, $|M \cap U^*| < |\lambda^*|$. Но $|M| = |\lambda^*| \geqslant \aleph_1$, ибо из $V' \neq V''$, V', $V'' \in \lambda^*$, следует, что $x(V') \neq x(V'')$. Итак, у M нет точек полного накопления в X.

49. Выберем в X произвольное счетное бесконечное множество A. В X для A есть точка полного накопления — пусть такова точка $a' \in X$. Положим $A' = A \setminus \{a'\}$. Множество A' искомое. Возможно и другое решение, не опирающееся на задачу 48 гл. III.

50. Нет. Пример: в X пространство $\mathscr{P}$, определенное в 100 гл. V, и A — его подпространство $\mathscr{T}_0$. Тогда каждое бесконечное подмножество C множества A имеет предельную точку в $\mathscr{P}$, а последняя будет и точкой полного накопления для C, ибо $|C| \leqslant |A| = \aleph_1$. Но $[A]_X = X$, а X бикомпактно.

51. Да. Предположим, что $Y = [A]_X$ не бикомпакт. Из $X = Y$ следует, что Y вполне регулярно. Рассмотрим какое-нибудь бикомпактное хаусдорфово расширение bY пространства Y (см., например, 14 гл. IV). Выберем $z \in bY \setminus Y$ и положим $\xi = \{Oz \cap A: Oz$ — окрестность точки z в $Y\}$. Так как $[A]_{bY} \supset Y$, то $bY = [A]_{bY}$ и, следовательно, семейство ξ центрировано. Очевидно, единственной точкой прикосновения для ξ в bY является z, значит, и Y имеет точки прикосновения для ξ — получили противоречие.

52. Через $\mathscr{K}$ обозначим совокупность всех таких семейств открытых в X множеств, никакое конечное подсемейство которых не покрывает пространства X. На $\mathscr{K}$ имеется естественное частичное упорядочение — по включению. Очевидно, $\mathscr{K}$ индуктивно по отношению к нему. В соответствии с принципом Куратовского — Цорна (см. стр. 13) в $\mathscr{K}$ есть максимальный элемент, содержащий любой наперед заданный элемент семейства $\mathscr{K}$. Пусть таков γ^*. Итак, никакое конечное семейство элементов γ^* не составляет

покрытия X, но если к γ^* добавить какое угодно открытое множество, ему не принадлежащее, то получающееся семейство уже будет содержать конечное открытое пространство X. Нам достаточно показать, что γ^* не покрывает X. Рассмотрим $\lambda = \gamma^* \cap \mathscr{B}$. Так как $\lambda \subset \gamma^*$ и $\lambda \subset \mathscr{B}$, то из свойств γ^* и $\mathscr{B}$ следует, что λ не покрывает X. Пусть, например, $x \notin \bigcup\{U: U \in \gamma^*\} \supset \bigcup\{V: V \in \lambda\}$. Если $x \in U \in \gamma^*$, то найдутся такие $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{B}$, что $x \in V_1 \cap \ldots \cap V_k \subset U$ (здесь $\mathscr{B}$ — предбаза). Ясно $V_i \notin \gamma^*$ при всех $i = 1, \ldots, k$, т. к. для каждого i из $\{V_i\} \cup \gamma^*$ можно, в силу выбора γ^*, выбрать конечное открытое пространства X. Но тогда, очевидно, и из покрытия $\gamma^* \cup \{U_i: i = 1, \ldots, k\}$ можно выделить конечное открытое X. Тем более, конечное покрытие X можно выделить из $\gamma^* \cup \{U\} = \gamma^+$ — получили противоречие. Значит, при некотором i^0, где $1 \leqslant i^0 \leqslant k$, неизменно $V_{i^0} \in \gamma^*$. Но тогда $V_{i^0} \in \lambda$ и $x \in \bigcup\{V: V \in \lambda\}$. Соотношение $\bigcup\{V: V \in \gamma^*\} \subset \bigcup\{r: r \in \lambda\}$ доказано. Так как λ не покрывает X, то γ^* тоже не покрывает X.

53. В силу задач 15, 52 гл. III (надо только перейти к дополнениям) достаточно обнаружить, что можно центрированное семейство ξ элементов $\mathscr{S}$ имеет непустое пересечение. Пусть $\xi = \{\mathscr{H}(A_\alpha, B_\alpha): \alpha \in \mathfrak{M}\}$. Покажем, что семейство $\tau_\beta = \{A_\beta\} \cup \{B_\alpha: \alpha \in \mathfrak{M}\}$ замкнутых подмножеств пространства X центрировано при любом $\beta \in \mathfrak{M}$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathfrak{M}$. Тогда $\mathscr{H}(A_\beta, B_\beta), \mathscr{H}(A_{\alpha_1}, B_{\alpha_1}), \ldots, \mathscr{H}(A_{\alpha_k}, B_{\alpha_k}) \in \xi$, и потому $\mathscr{H}(A_\beta, B_\beta) \cap \bigcap\left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathscr{H}(A_{\alpha_i}, B_{\alpha_i})\right) \neq \Lambda$; значит, существует $C \in \mathscr{S}(X)$, для которого $C \subset \bigcap\{B_{\alpha_i}: i = 1, \ldots, k\}$, $C \cap A_\beta \neq \Lambda$. Но тогда $A_\beta \cap (\cap\{B_{\alpha_i}: i = 1, \ldots, k\}) = C \cap A_\beta \neq \Lambda$. Итак, каждое семейство η_β центрировано. Поэтому $\bigcap\{B_\alpha: \alpha \in \mathfrak{M}\} = B^0 \neq \Lambda$, $A_\beta \cap B^0 \neq \Lambda$ для любого $\beta \in \mathfrak{M}$. Но тогда $B^0 \in \bigcap\{\mathscr{H}(A_\alpha, B_\alpha): \alpha \in \mathfrak{M}\}$, т. е. ξ имеет непустое пересечение.

55. X — хаусдорфово пространство, $x_1 \in X$, P — бикомпактное подпространство пространства X и $x_0 \in X$. В силу хаусдорфовости пространства X для каждой точки $x \in P$ и точки x_1 берем окрестности Ox точки x и $U_x x_1$ точки x_1, для которых $Ox \cap U_x x_1 = \Lambda$. Рассмотрим открытое покрытие $\{Ox: x \in P\}$ бикомпактного подпространства P и выберем из него конечное подпокрытие $\{Ox_i: i = 1, 2, \ldots, s\}$: $\bigcup_{i=1}^{s} Ox_i \supset P$. Далее рассмотрим соответствующие окрестности $U_{x_1} x_1, \ldots, U_{x_s} x_1$ точки x_1. Имеем $Ox_i \cap \cap U_{x_i} x_1 = \Lambda$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Тогда $\bigcup_{i=1}^{s} Ox_i \cap \bigcap_{i=1}^{s} U_{x_i} x_1 = \Lambda$. Следовательно, обозначив $Ox = \bigcup_{i=1}^{s} Ox_i$, $U_{x_0} = \bigcap_{i=1}^{s} U_{x_i} x_1$, получим непересекающиеся окрестности Ox множества P и U_{x_0} точки x_0, что и требовалось доказать.

56. Следует из задачи 55.

58. Множество $X \setminus \{x\}$ не замкнуто в хаусдорфовом пространстве Y. Следовательно, $Y = X \setminus \{x\}$ как подпространство пространства X не бикомпактно (57 гл. III), и в Y существует бесконечное множество A, для которого никакая точка $y \in Y$ не является точкой полного накопления (49 гл. III). Но в X у A есть точка полного накопления, так как X бикомпактно (18 гл. III), и, по доказанному, этой точкой может быть только x.

59. Зафиксируем какое-нибудь открытое покрытие γ пространства X, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Для каждой точки x выберем ее окрестность Ox такую, что $[Ox] \subset G$ для некоторого $G \in \gamma$. Пусть $\lambda = \{[Ox]: x \in X\}$. Тогда λ — открытое пространства X, вписанное в γ, и потому никакое конечное множество элементов λ не покрывает X. Следовательно, $\xi = \{Y \setminus P: P \in \lambda\}$ — центрированная система открытых в X множеств. Через x^* обозначим любой элемент, не принадлежащий X; положим $X^* = X \cup \{x^*\}$ и $\mathscr{U} = \mathscr{T} \cup \xi^*$, где $\xi^* = \{U \cup \{x^*\}: U \in \xi\}$. Очевидно, $\mathscr{U}$ — предбаза некоторой топологии $\mathscr{T}^*$ на X^* и $(X, \mathscr{T})$ является подпространством пространства $(X^*, \mathscr{T}^*)$. Семейство ξ^* является предбазой окрестностей x^* в точке x^*. Мы видим, что $U^* \cap X \in \xi$ для любого $U^* \in \xi^*$. Так как все элементы семейства ξ не пусты, то отсюда следует, что x^* принадлежит замыканию множества X в пространстве $(X^*, \mathscr{T}^*)$. Далее, если $x', x'' \in X$, то у точек x', x'' есть непересекающиеся окрестности в пространстве $(X^*, \mathscr{T}^*)$; понятными будут непересекающиеся окрестности этих точек в $(X, \mathscr{T})$. Если $x \in X$, то $X \setminus [Ox] = Ox^*$ — окрестность точки x^* в $(X^*, \mathscr{T}^*)$, не пересекающаяся с множеством Ox, которое является окрестностью в $(X, \mathscr{T})$ точки x и $[Ox] \in \lambda$. Значит, $(X^*, \mathscr{T}^*)$ — хаусдорфово пространство.

60. Следует из задачи 59 гл. III.

61. Принадлежащее множеству X ядро одну точку ξ. Получим множество $\bar{X} = X \cup \{\xi\}$. Теперь пусть $\omega = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. Определим на $\bar{X}$ топологию $\mathscr{T}(\omega)$ следующим образом: каждое открытое в X множество открыто и в $\bar{X}$, кроме того, открыто в $\bar{X}$ всякое множество вида $\bar{X} \setminus [U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_s}]_X$, где $\alpha_1 \in A, \ldots, \alpha_s \in A$. Нетрудно убедиться в том, что пространство $\bar{X}$ с топологией $\mathscr{T}(\omega)$, базу которой образуют описанные выше множества, хаусдорфово. При этом точка ξ изолирована в $\bar{X}$ тогда и только тогда, когда из ω можно выделить конечную подсистему, замыкания элементов которой покрывают пространство X. Отсюда следует требуемое утверждение.

62. Пусть ω — произвольное покрытие подмножества $[U]_X$ открытыми в X множествами. Рассмотрим открытое покрытие Ω пространства X, состоящее из всех элементов системы ω и еще множества $X \setminus [U]_X$. Пользуясь H-замкнутостью пространства X и задачей 61 гл. III, выберем конечную подсистему $\Omega_1 \subset \Omega$, замыкания элементов которой покрывают X. Последнее означает, что множество $\bar{\Omega}_0 = \bigcup\{U: U \in \Omega_0\}$ плотно в X. Ясно, что $\bar{\Omega}_0 \supset U$ плотно в U, а значит, и в $[U]_X$. Поэтому элементы системы $\omega_0 = \{U: U \in \Omega_0$ и $U \cap [U]_X \neq \Lambda\}$ покрывают подпространство $[U]_X$. Ясно, что $\omega_0 = \omega_1$, $|\omega_1| \leqslant \aleph_0$. Последнее (61 гл. III) подпространство $[U]_X$ является H-замкнутым.

63. Смотрите, например, Александров и Фомин [1].

64. См. решение задачи 55 гл. III. Рассуждайте аналогично. (Решение следует также из 16 гл. III.)

65. Предположим противное. Тогда для каждой точки $x \in \Phi$ можно зафиксировать окрестность Ox так, чтобы было $Ox \cap \{x_{\alpha_k}: k \in \mathcal{N}\} = \Lambda$. Из покрытия $\{Ox: x \in \Phi\}$ множества Φ выделим конечное подпокрытие — пусть это $\{Ox_1, \ldots, Ox_s\}$. Тогда $V = \bigcup\{Ox_i: i = 1, \ldots, s\}$ — окрестность множества $\Phi \subset X$, не пересекающаяся с $\{x_{\alpha_n}: n \in \mathcal{N}\}$. Но существует n^0, для которого $U_{n^0} \subset V$. При этом $x_{n^0} \in U_{n^0} \subset V$ — получили противоречие.

66. Положим $\eta = \{(X \setminus U) \cap P: P \in \xi\}$. Семейство η состоит из замкнутых в X множеств, и $\bigcap\{Q: Q \in \eta\} \subset (X \setminus U) \cap \Phi = \Lambda$ в силу определения η и Φ. Так как X бикомпактно, то мы заключаем, что семейство η не центрировано. Значит, существуют $P_1, \ldots, P_k \in \xi$, для которых $\bigcap_{i=1}^{k} (P_i \cap (X \setminus U)) = \Lambda$. Но ξ — предфильтр, значит, существует $P^* \in \xi$

таков, что $P^* \subset \bigcap_{i=1}^{n} P_i$. Тогда $P^* \cap (X \setminus U) \subset \bigcap_{i=1}^{n} (P_i \cap (X \setminus U)) = \Lambda$, т. е. $P^* \subset U$.

67. Пусть $\overline{\xi}$ — семейство всех множеств, являющихся пересечением конечного числа элементов семейства ξ. Тогда $\overline{\xi}$ — предфильтр, все элементы его замкнуты в $F_0 = \bigcap \{P\colon P \in \overline{\xi}\}$. Остается сослаться на задачу 66 гл. III.

68. Пусть $F = \bigcap \{U\colon U \in \gamma\}$, где γ — семейство открытых в X множеств и F замкнуто в X. Для каждого $U \in \gamma$ зафиксируем открытое множество $V(U)$ такое, что $F \subset V(U) \subset [V(U)] \subset U$ — это возможно, так как пространство X нормально. Тогда $F = \bigcap \{[V(U)]\colon U \in \gamma\}$. В силу задачи 67 гл. III, каково бы ни было открытое в X множество OF, содержащее F, найдется конечный набор $U_1, \ldots, U_k$ элементов γ, для которого $\bigcap \{V(U_i)\colon i = 1, \ldots, k\} \subset OF$. Тем более, тогда $\bigcap \{[V(U_i)]\colon i = 1, \ldots, k\} \subset OF$. Значит, приняв за λ семейство $\{V(U)\colon U \in \gamma\}$ и за $\overline{\lambda}$ — семейство всех множеств, представимых как пересечение конечного числа элементов λ, мы вправе утверждать, что (a) $|\overline{\lambda}| = |\lambda| \leqslant |\gamma|$ (58 гл. I) и (б) $\overline{\lambda}$ образует определяющую систему окрестностей множества F в X. Можно дополнительно предположить, что $|\gamma|$ — псевдохарактер множества F в X.

69. Положим $U_1 = U$ и предположим, что уже определены открытые множества U_i для всех $i = 1, \ldots, k$, где k — некоторое целое положительное число. Пусть, кроме того, $U_k \supset \Phi$ и $[U_{i+1}] \subset U_i$ для всех $i < k$. Примем тогда за U_{k+1} любое открытое множество такое, что $\Phi \subset U_{k+1} \subset [U_{k+1}] \subset U_k$. Если последовательность $\{U_i\colon i \in N^+\}$ построена в соответствии с описанной процедурой, то $\bigcap \{U_i\colon i \in N^+\} = \bigcap \{[U_i]\colon i \in N^+\}$ — бикомпакт счетного характера в X (ибо он является множеством типа G_δ в X, см. также 68 гл. III), содержащий Φ и лежащий в $U_1 = U$.

70. Пусть $\psi = \{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — определяющая система окрестностей множества Φ в X, $\psi = \{V_\beta\colon \beta \in B\}$ — определяющая система окрестностей множества F в Φ и $|A| \leqslant \tau$, $|B| \leqslant \tau$. Для каждой точки $x \in \Phi \setminus F$ зафиксируем ее окрестность Ox в X, для которой $[Ox] \cap F = \Lambda$. Из $\gamma_\beta = \{V_\beta\} \cup \{Ox\colon x \in \Phi \setminus F\}$ можно выделить конечное покрытие бикомпакта Φ; пусть это $\omega_\beta = \{V_\beta, Ox_1^\beta, \ldots, Ox_{n(\beta)}^\beta\}$. Положим $M_\beta = \bigcup \{Ox_i^\beta\colon i = 1, \ldots, n(\beta)\}$. Заметим, что множество M_β открыто в X и $[M_\beta] \cap F = \Lambda$. Для каждого элемента (α, β) множества $C = A \times B$ положим $W_{(\alpha,\beta)} = U_\alpha \setminus [M_\beta]$. Покажем, что $\{W_{(\alpha,\beta)}\colon (\alpha, \beta) \in C\}$ — определяющее семейство окрестностей множества F в X. Пусть G — любое открытое в X множество, содержащее F. Зафиксируем $V_{\beta^*} \in \psi$, для которого $V_{\beta^*} \subset G$. Тогда $M_{\beta^*} \cup G$ — окрестность множества Φ в X. Зафиксируем $\alpha^* \in A$, для которого $U_{\alpha^*} \subset M_{\beta^*} \cup G$. Тогда $F \subset U_{\alpha^*} \setminus [M_{\beta^*}] \subset G$, т. е. $F \subset W_{(\alpha^*,\beta^*)} \subset G$. Цель достигнута — ведь $|C| = |A \times B| \leqslant \tau$.

71. Пусть $Q = \bigcap \{\Gamma_\alpha\colon \alpha \in A\}$, где $|A| \leqslant \tau$, Γ_α открыты в X. Для каждого $\alpha \in A$ зафиксируем такой бикомпакт F_α счетного характера в X, что $x \in F_\alpha \subset \Gamma_\alpha$ (см. 69 гл. III). Тогда $\Phi = \bigcap \{F_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — искомый бикомпакт (см. 70 гл. III).

72. Для каждой точки $x \in F$ зафиксируем некоторую счетную базу γ_x точки x в X. Положим $\gamma = \bigcup \{\gamma_x\colon x \in F\}$. Тогда $|\gamma| \leqslant \aleph_0$. Очевидно, семейство γ^* всех множеств, представимых как объединение конечного числа элементов γ, счетно и содержит определяющую систему окрестностей множества F в X.

73. В силу 129 гл. III в X есть сеть $\mathscr{S}$ из замкнутых множеств, для которой $|\mathscr{S}| \leqslant \tau$. Положим $\mathscr{S}_X = \{P \in \mathscr{S}\colon P \cap F = \Lambda\}$. Тогда, очевидно, $|\mathscr{S}_X| \leqslant |\mathscr{S}| \leqslant \tau$ и $F = \bigcap \{X \setminus P\colon P \in \mathscr{S}_X\}$. Таким образом, $\gamma = \{X \setminus P\colon P \in \mathscr{S}_X\}$ — искомое семейство множеств.

74. Нет. Пусть X — произвольное бесконечное множество и y, z — любые две точки, отличные друг от друга и от всех элементов X. Объявим любое подмножество множества X открытым в $\overline{X} = X \cup \{y\} \cup \{z\}$. Кроме того, пусть в $\overline{X}$ открыты те множества, дополнения до которых конечны, а также пустое множество. Этим $\overline{X}$ превращено в топологическое пространство. Очевидно, $Y = \overline{X} \setminus \{y\}$ и $Z = \overline{X} \setminus \{z\}$ — его бикомпактные подпространства. Но $Y \cap Z = X$ и X, как подпространство пространства $\overline{X}$, плотно и, значит, небикомпактно (ведь $|X| \geqslant \aleph_1$).

75. В силу 47 гл. III достаточно показать, что всякая максимальная центрированная система ξ множеств пространства X имеет точку прикосновения. Для каждого $\alpha \in A$ рассмотрим систему $\xi_\alpha = \{\pi_\alpha M\colon M \in \xi\}$ множеств пространства X_α (здесь $\pi_\alpha\colon \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in A\} \to X_\alpha$ — естественное проектирование). Понятно, что ξ_α — центрированная система, следовательно, для нее имеется (в силу бикомпактности пространства X_α — см. 49 гл. III) точка прикосновения $x_\alpha \in X_\alpha$. Рассмотрим точку $x = \{x_\alpha\colon \alpha \in A\} \in X$. Докажем, что x — точка прикосновения системы ξ. Пусть $Ox = \bigcap_{i=1}^{s} \pi_{\alpha_i}^{-1} U^{\alpha_i}$ — произвольная окрестность точки x из стандартной тихоновской базы (см. 354 гл. II). Понятно, что $x_{\alpha_1} \in U^{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_s} \in U^{\alpha_s}$, следовательно,

$$(1) \qquad \pi_{\alpha_1} M \cap U^{\alpha_1} \neq \Lambda, \ \ldots, \ \pi_{\alpha_s} M \cap U^{\alpha_s} \neq \Lambda$$

для любого $M \in \xi$. Но тогда

$$(2) \qquad \pi_{\alpha_1}^{-1} U^{\alpha_1} \cap M \neq \Lambda, \ \ldots, \ \pi_{\alpha_s}^{-1} U^{\alpha_s} \cap M \neq \Lambda$$

для любого $M \in \xi$. Воспользуемся максимальностью центрированной системы ξ (см. 128 гл. I), тогда из (2) будет следовать, что $\pi_{\alpha_i}^{-1} U^{\alpha_i} \in \xi$, $i = 1, 2, \ldots, s$, откуда $Ox = \bigcap_{i=1}^{s} \pi_{\alpha_i}^{-1} U^{\alpha_i} \in \xi$ и $x \in Ox \cap M$ для любого $M \in \xi$, т. е. $Ox \cap M \neq \Lambda$ для любого $M \in \xi$. Учитывая, что Ox — произвольная базисная окрестность точки x в X, получаем $x \in [M]_X$ для любого $M \in \xi$, т. е. $x = \{x_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — точка прикосновения системы ξ.

76. Для каждой пары (x, y) точек $x \in A$, $y \in B$ существуют открытые (в X, соответственно в Y) множества Ox, Oy, для которых $\overline{Ox} \times \overline{Oy} \subset W$. Зафиксируем также множества. Из семейства $\gamma^x = \{O^x y\colon y \in B\}$, покрывающего B, можно выделить конечное покрытие λ множества B (ибо B бикомпактно). Пусть $\lambda = \{O^x y_1, \ldots, O^x y_k\}$. Множество $Ux = \bigcap \{O^{x_i} x\colon i = 1, \ldots, k\}$ — окрестность точки x в X. Положим $V^x = \bigcup \{O^x y_i\colon i = 1, \ldots, k\}$; V^x — окрестность множества B в Y. Имеем при этом $Ux \times V^x \subset W$. Будем считать, что такие Ux и V^x, как выше, зафиксированы для каждой точки $x \in A$. Тогда $\gamma = \{Ux\colon x \in A\}$ — открытое покрытие бикомпактного множества A. Выделим из него конечное подпокрытие $\mu = \{Ux_i\colon i = 1, \ldots, l\}$. Положим $V = \bigcap \{V^{x_i}\colon i = 1, \ldots, l\}$ и $U = \bigcup \{Ux_i\colon i = 1, \ldots, l\}$. Тогда U — окрестность A в X, V — окрестность B в Y и $U \times V \subset W$.

77. В силу 75 гл. III Φ — бикомпактное подпространство пространства X. Каждая точка p множества Φ входит в W вместе с некоторой своей стандартной окрестностью Op (зафиксируем последнюю). Через Ap обозначим конечное подмножество множества A, соответствующее Op (см. стр. 58). Из покрытия $\{Op\colon p \in \Phi\}$ множества Φ выделим конечное покрытие $\{Op_1, \ldots, Op_k\}$. Положим $A^* = \bigcup \{Ap_i\colon i = 1, \ldots, k\}$. Множество $W^* = \bigcup \{Oq_i\colon i = 1, \ldots, k\}$ — окрестность Φ в X, содержащаяся в W и не

зависящих от элементов множества $A \setminus A^*$ (см. стр. 103 и задачу 384 гл. II). Рассмотрим $\bar{X} = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A^*\}$, $\bar{\Phi} = \Pi\{\Phi_\alpha : \alpha \in A^*\}$ и $\bar{W} = \pi_{A^*} W^*$, где $\bar{W}$ является проекцией множества W^* на грань $\bar{X}$ произведения X. Тогда $\bar{W}$ — окрестность $\bar{\Phi}$ в $\bar{X}$ и $\Phi \subset \bar{W} \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A \setminus A^*\} \subset W^* \subset W$. Этим рассуждением решение данной задачи сведено к случаю, когда множество A конечно.

Когда $|A| \leqslant 1$, утверждение тривиально. Для $|A| = 2$ задача решена раньше (78 гл. III). Пусть при $|A| \leqslant k$ утверждение доказано. Предположим, что $|A| = k+1$. Зафиксируем $\alpha' \in A$ и положим $A' = A \setminus \{\alpha'\}$, $X' = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A'\}$, $\Phi' = \Pi\{\Phi_\alpha : \alpha \in A'\}$. Тогда $X = X' \times X_{\alpha'}$, $\Phi = \Phi' \times \Phi_{\alpha'}$, и W' — окрестность множества Φ' в X'. В силу 76 гл. III найдутся множества $W' \subset X'$, $U_{\alpha'} \subset X_{\alpha'}$, открытые в X' и в $X_{\alpha'}$ соответственно, для которых $W' \supset \Phi'$, $U_{\alpha'} \supset \Phi_{\alpha'}$ и $W' \times U_{\alpha'} \subset W$. Но $|A'| = k$. По индуктивному предположению, существуют открытые в X_α множества U_α, содержащие Φ_α, для которых $\Pi\{U_\alpha : \alpha \in A'\} \subset W'$. Тогда $\Pi\{U_\alpha : \alpha \in A\} \subset W' \times U_{\alpha'} \subset W$. Задача решена.

78. Отображение f непрерывно, как диагональное произведение непрерывных отображений. Так как X бикомпакт (а $J^{|A|}$ — хаусдорфово пространство), то f замкнуто (82 гл. III). Если верно 1), то из 349 гл. II следует, что $\varphi = f|X$, $\varphi : X \to J^{|A|}$ является замкнутым отображением, и потому $f(X) = \varphi(X)$ — замкнутое в $J^{|A|}$ множество. (Просто: $f(X) = J^{|A|} \cap \overline{f(X)}$.) Итак, достаточно доказать 1). Но 1) непосредственно вытекает из определения X.

79. Так как характер Φ_α в F счетен, каждый бикомпакт Φ_α можно представить как множество всех нулей некоторой непрерывной вещественной функции f_α, определенной на пространстве F (см. 30 гл. III). Далее, так как вес X равен τ, а F нормально, то существует семейство $\{\psi_\beta : \beta \in B\}$ непрерывных вещественных функций на F такое, что 1°) $\psi_\beta(F) \ni 0$ при всех $\beta \in B$; 2°) $|B| = \tau$; 3°) существует $\beta_0 \subset B$, для которого $\psi_{\beta_0}(A) = \{1\}$; 4°) для любых $x_1, x_2 \in X$ существует $\beta' \subset B$ такое, что $\psi_{\beta'}(x_1) \neq \psi_{\beta'}(x_2)$. Положим $A' = A \times B$, и для каждого $\alpha' = (\alpha, \beta) \in A'$ положим $f_{\alpha'} = f_\alpha \cdot \psi_\beta$. Ясно, что $|A'| = |A| \cdot \tau$. Далее, очевидно, $X = \{x \in F : f_{\alpha'}(x) \neq 0$ при всех $\alpha' \in A'\}$.

Из 78 гл. III следует, что условие φ на X отображения f — диагональное произведение отображений $f_{\alpha'}$ по всем $\alpha' \in A'$ — является непрерывным замкнутым отображением пространства X в пространство $J^{|A'|}$, где $J = [0, 1]$. Но, в силу 3°) и 4°), семейство $\{f_{\alpha'} : \alpha' \in A'\}$ разделяет точки множества X (для любых $x_1, x_2 \in X$ найдется $\alpha' \subset A'$ такое, что $f_{\alpha'}(x_1) \neq f_{\alpha'}(x_2)$). Поэтому φ взаимно однозначно и непрерывно, а значит, учитывая предыдущее, заключаем, что φ — гомеоморфизм пространства X на замкнутое подпространство пространства $J^{|A'|} = J^{|A| \cdot \tau}$. Но подкуб веса J гомеоморфен замкнутому лучу — замкнутому подпространству прямой R. Поэтому $J^{|A| \cdot \tau}$ гомеоморфно замкнутому подпространству произведения $R^{|A| \cdot \tau}$ и, следовательно, X гомеоморфно замкнутому подпространству последнего.

80. S_1 как подпространство пространства X представляет собой обычную окружность (окружность с обычной топологией). Поэтому из любого открытого покрытия пространства X элементами его базы, указанной в определении X, можно выделить конечное семейство $\{Ox_1, \ldots, Ox_k\}$, покрывающее S_1. Но тогда автоматически и всё S_1, за исключением конечного множества точек, оказывается покрытым множествами $Ox_1, \ldots, Ox_k$. Теперь достаточно присоединить к $\{Ox_1, \ldots, Ox_k\}$ конечное число элементов рассматриваемого покрытия — чтобы покрыть исключенные точки, — и получится искомое конечное подпокрытие пространства X. Значит, X бикомпактно (44 гл. III). Ясно, что X — хаусдорфово пространство и что во всех его точках выполняется первая аксиома счетности. Кроме того, $X = S_0 \cup S_1$ и S_1 метризуемо как дискретное пространство, а S_0 метризуемо как обычная окружность. Но в X нет счетной базы — в противном случае счетная база была бы и в S_1, которое несчетно, дискретно и потому счетной базы не имеет.

81. Собственно говоря, требует доказательства только утверждение (г). Пусть ω — открытое покрытие пространства $A(X)$ базисными множествами (определенными в условии задачи). Рассмотрим в ω как покрытие подпространства X' открытых в $A(X)$ множеств. Подпространство X' гомеоморфно бикомпакту X. Поэтому из ω можно извлечь конечное подсемейство $\omega' \subset \omega$, покрывающее бикомпактное подпространство X'. Так как ω' состоит из базисных множеств, конечно и покрывает подпространство X', то непременно (по определению открытой точки $x' \in X'$ в $A(X)$) оказался, быть может, только конечное число точек $x' \in X'$. Поэтому, добавив, если нужно, к ω' еще конечное число элементов из ω, гарантирующее это конечное число точек, мы получим конечное подпокрытие $\omega_0 \subset \omega$ пространства $A(X)$.

82. При естественной интерпретации X как подпространства пространства $[0, 1]^{[0, 1]}$ пространство X замкнуто в $[0, 1]^{[0, 1]}$ — ведь функции, являющиеся пределами для множества неубывающих функций, сами непременно неубывающие. Следовательно, X — бикомпакт (см. 54, 75 гл. III). Для доказательства того, что X удовлетворяет первой аксиоме счетности, надо опереться на следующее утверждение: каждая неубывающая вещественная функция, определенная на $[0, 1]$, имеет не более счетного множества точек разрыва. Наконец, счетное всюду плотное множество в X строится так же, как и решении задачи 380 гл. II, — надо взять те отображения, аналитические в λ, которые принимают лишь конечное множество значений, причем каждое из этих значений является рациональным числом. Требуется дополнительно, чтобы все прообразы точек при взятых отображениях были либо рациональной точкой, либо интервалом с рациональными концами.

83. Пусть $M \subset X$, $|M| \geqslant \aleph_0$. Положим $A = \{x \in X : |M \cap \bar{f}(x)| = |M|\}$ (см. стр. 19). Тогда $x_m \in A$, и потому $A \neq \Lambda$. Пусть $x^* = \min A$, $x' \prec x^*$, $x' \neq x^*$ и $U = \{y \in X : x' \prec y \prec x^*\}$. Тогда $|\bar{f}(x') \cap M| < |M| = |\bar{f}(x^*) \cap M| = |M|$. Но $\bar{f}(x^*) \cap M = (\bar{f}(x') \cap M) \cup (U \cap M)$. Значит, $|U \cap M| = |M|$ (см. 90 гл. I). По определению порядковой топологии, это означает, что x^* является точкой полного накопления для M. Следовательно, пространство X бикомпактно (см. 48 гл. III). Очевидно, оно хаусдорфово (7 гл. II).

84. Это утверждение легко выводится из 81 гл. III.

85. (а) $\Rightarrow$ (б). Положим $F(\beta) = \{\beta' : \beta \leqslant \beta'$ и $\beta' \in B\}$ для каждого $\beta \in B$. Для любых β_1, $\beta_2 \in B$ либо $F(\beta_1) \subset F(\beta_2)$, либо $F(\beta_2) \subset F(\beta_1)$. Кроме того, $F(\beta) \neq \Lambda$ и $F(\beta)$ замкнуто в X при всех $\beta \in B$. Следовательно, $\{F(\beta) : \beta \in B\}$ — центрированная система непустых замкнутых в X множеств и множество $\Phi = \bigcap\{F(\beta) : \beta \in B\}$ не пусто. Зафиксируем любой элемент $\beta^* \in \Phi$ и покажем, что $\beta^* \geqslant \beta$ для любого $\beta \in B$ (заметим, что $\beta^* \in \Phi \subset B$ в силу определения множества $F(\beta)$). Предполагая противное: пусть найдется $\bar{\beta} \in B$, для которого $\beta^* \prec \bar{\beta}$. Тогда $F(\bar{\beta}) \ni \beta^*$, и из $\Phi \subset F(\bar{\beta})$ следует, что $\Phi \ni \beta^*$ и противоречие с выбором β^*. Значит, β^* — наибольший элемент множества B. Аналогично находится наименьший элемент в B.

(б) $\Rightarrow$ (в). Положим $B = [A]$. В силу (б) в B существует наибольший элемент β^*. Покажем, что $\beta^* = \sup A$. Из $A \subset B$ следует, что $\alpha \leqslant \beta^*$ для всех $\alpha \in A$. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 \in X$ и $\alpha_1 \prec \beta^* \prec \alpha_2$. Но $\beta^* \in B = [A]$ и определения топологии в X следует, что существует $\alpha \in A$, для которого $\alpha_1 \prec \alpha \prec \alpha_2$.

Тогда непременно $\alpha_1 \prec \alpha \prec \beta^*$. Этим доказано, что $\beta^* = \sup A$. Аналогично доказывается существование $\inf A$, $A \subset (X, \prec)$.

$(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$. Рассмотрим произвольное бикомпактное множество $A \subset X$ и покажем, что A имеет точку полного накопления в X. Для каждого $x \in X$ положим $F(x) = \{x' \in A: x \prec x'\}$. Рассмотрим множество $C = \{x \in X: |F(x)| = |A|\}$. Заведомо $\inf A \in C$; поэтому $C \neq \Lambda$. В силу (α) существует $c^* = \sup C$. Покажем, что c^* — точка полного накопления для A. Пусть $\beta_1, \beta_2 \subset X$; $\beta_1 \prec c^* \prec \beta_2$. Тогда существует $c \in C$, для которого $\beta_1 \prec c \prec \beta_2$. С другой стороны, $\beta_2 \notin C$ в силу определения c^*. Значит, $|\{x \in A: x \succcurlyeq c\}| = |A|$, но $|\{x \in A: x \succcurlyeq \beta_2\}| \prec |A|$. Следовательно, $|\{x \in A: \beta_1 \prec x \prec \beta_2\}| = |A|$. Этим доказано, что интервал с концами в β_1 и β_2 пересекает множество A по множеству, равномощному A. В силу определения топологии в X это означает, что c^* — точка полного накопления для A.

86. Множество элементов отрезка мы отождествляем, как обычно, с полуинтервалом $[0, 1)$ множества вещественных чисел. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение $(*)$: для каждого несчетного подмножества $A \subset [0, 1)$ существует $x \in A$, для которого множество $A_x = \{y \in A: x \prec y\}$ несчетно. Легко доказывается, что множество $\bar{A}$ точек множества A, являющихся точками конденсации (см. стр. 181) для A (по отношению к топологии на A, индуцированной обычной топологией отрезка), несчетно. Зафиксируем $x \in \bar{A}$, $z \in \bar{A}$, $x \neq z$. Тогда либо $x \prec z$, либо $z \prec x$. Пусть $x \prec z$. Множество A_x, очевидно, в этом случае несчетно. Утверждение $(*)$ доказано. С помощью $(*)$ легко строится в каждом несчетном множестве $A \subset [0, 1)$ монотонно возрастающая (строго) последовательность элементов $\{x_\alpha: \alpha \in N^+\}$. Очевидно, по отношению к топологии отрезка, у последовательности $(x_\alpha: \alpha \in N^+)$ нет предельных точек в $[0, 1)$, тем более нет их и в A. Значит, A, как подпространство отрезка, не бикомпактно.

87. 1) и 7) устанавливаются непосредственно. 7) следует из 5), ибо совершенный прообраз бикомпактного пространства бикомпактен (38 гл. VI).

7) Устанавливается следующим образом: под каждым двумя полуинтервалами рисуется отрезок с обычной топологией (также длины 1). Искомое отображение заключается в проектировании нашего пространства на этот отрезок. Непосредственно проверяются непрерывность и совершенность указанного отображения (см. определение на стр. 59).

Для дальнейшего заметим, что полуинтервалы X и X' в наследственной топологии гомеоморфны отрезку (104 гл. II). Поэтому свойства 4), 5), 8), 9), 10) являются следствием соответствующих свойств отрезка (104 гл. II) и некоторых утверждений (см. 208, 209 гл. III, 213 гл. II). Свойство 6) является следствием совершенной нормальности бикомпакта X^{**} (см. 88 гл. III), а свойство 11) получается, если заметить, что квадрат пространства X^{**} топологически содержит квадрат отрезка, не являющийся нормальным пространством (11 гл. III).

88. Пусть открытые множества U_ξ, $\xi \in N^+$, всюду плотны в X. Определим по индукции последовательность $\{V_i: i \in N\}$ непустых открытых в X множеств так, чтобы выполнялись условия: (α) $[V_i] \subset U_i$ для всех значений i, и (β) $[V_i] \supset V_j$ при всех $i \geqslant j \geqslant 1$. При построении V_i мы существенно опираемся на то, что X регулярно и U_i всюду плотно в X. Зафиксируем произвольно непусто открытое множество $W \subset X$. За V_1 примем любое непустое открытое множество, для которого $[V_1] \subset W \cap U_1 \neq \Lambda$. Предположим, что множества V_i определены для всех $i \leqslant n$. Обозначим тогда через V_{n+1} любое непустое открытое множество, для которого $[V_{n+1}] \subset V_n \cap \bigcap U_{n+1}$ (множества $V_n \cap U_{n+1}$ не пусты, ибо U_{n+1} всюду плотно в X). Пусть V_i определены по указанному правилу для всех $i \in N^+$. Имеем теперь: $W \cap (\bigcap \{U_i: i \subset N^+\}) \supset \bigcap \{V_i: i \in N^+\} = \bigcap \{[V_i]: i \in N^+\}$. Но стоящее справа множество не пусто, ибо X — бикомпакт и семейство $\{V_i: i \subset N^+\}$ центрировано (см. 45 гл. III). Значит, $W \cap (\bigcap \{U_i: i \in N^+\}) \neq \Lambda$ для любого открытого в X множества W, т. е. $\bigcap \{U_i: i \subset N^+\}$ всюду плотно в X.

89. Верно более сильное утверждение — см. 128 гл. III.

90. Пусть U_i, $i \subset N^+$,— всюду плотные открытые в полном (в смысле Чеха) вполне регулярном пространстве X множества; βX — бикомпактное расширение пространства (например, расширение Стоуна — Чеха — см. 14 гл. IV). Тогда $X = \bigcap \{\Gamma_i: i \in N^+\}$, где Γ_i, $i \in N^+$,— некоторые открытые в βX множества. Для каждого i рассмотрим открытое в βX множество $O(U_i)$, для которого $O(U_i) \cap X = U_i$. Обозначим $O^*(U_i) = O(U_i) \cap \Gamma_i$. Очевидно, что $O^*(U_i) \cap X = U_i$. Но, кроме того, уже $O^*(U_i) = \Gamma_i$. Покажем теперь, что $O^*(U_i)$ всюду плотно в βX. Пусть Γ — произвольное открытое в βX множество. Тогда, в силу плотности X в βX и U_i в X, получаем, что $\Gamma \cap U_i \neq \Lambda$, значит, тем более, $\Gamma \cap O^*(U_i) \neq \Lambda$, т. е. $O^*(U_i)$ всюду плотно в βX. Тогда $\bigcap \{O^*(U_i): i \in N^+\} \neq \Lambda$ и всюду плотно в βX (69 гл. III). Но $\bigcap (O^*(U_i): i \in N^+) \subset \bigcap (\Gamma_i: i \in N^+) = X$, следовательно, $\bigcap (O^*(U_i): i \in N^+) = X \cap \bigcap (O^*(U_i): i \in N^+) = \bigcap (U_i: i \in N^+) =$ значит, множество $\bigcap (U_i: i \in N^+) = \bigcap \{O^*(U_i): i \in N^+\}$ всюду плотно в X. Что доказано.

92. Пусть $F \subset X$ — произвольное замкнутое подмножество бикомпактного пространства X. Подпространство F бикомпактно (см. 54 гл. III). Тогда и fF — бикомпактное подпространство хаусдорфова пространства Y (91 гл. III), которое, следовательно (см. 58 гл. III), замкнуто в Y. Второе утверждение получается из первого и задачи 222 гл. II.

93. Из задачи 92 гл. III следует замкнутость отображения $f: X \to Y$. Поэтому f — гомеоморфизм.

94. (а) Если $f: X \to Y$ непрерывно, то график отображения f замкнут в $X \times Y$ (см. 291 гл. II), причем бикомпактность пространств X и Y несущественна.

(б) Пусть график D отображения $f: X \to Y$ замкнут в произведении бикомпактов X и Y. Рассмотрим отображения $p_X: D \to X$, $p_Y: D \to Y$. Отображение $p_X: D \to X$ взаимно однозначно и непрерывно. Ибо, вследствие того, что график D — бикомпактное множество, получаем, что непрерывное отображение $p_X: D \to Y$ замкнуто, а отображение $p_X: D \to X$ — гомеоморфизм. Кроме того, отображение $f: X \to Y$ есть суперпозиция отображений p_X^{-1} и p_Y, т. е. $f = p_Y p_X^{-1}$. Пусть V — произвольное открытое в Y множество. Тогда $f^{-1}V = p_X p_Y^{-1} V$, $p_Y^{-1}V$ открыто в D; $p_X p_Y^{-1} V = f^{-1}V$ открыто в X. Непрерывность отображения f доказана. Заметим, что для доказательства непрерывности отображения $f: X \to Y$ мы воспользовались только тем, что проектирование графика этого отображения на пространство X есть топологическое отображение.

95. Не всегда. Пусть X — пространство рациональных чисел с обычной топологией, и $Y = bX = \xi \cup X$ — бикомпактное T_1-расширение пространства X, определенное в задаче 4 гл. IV. При этом базу топологии bX в точках множества X образуют окрестности этих точек в X (т. е. X открыто в bX), а произвольная открытая окрестность точки ξ является дополнением до некоторого бикомпактного (следовательно, замкнутого) подпространства пространства X. Обозначим топологию пространства bX через $\mathcal{S}$ и рассмотрим произвольную топологию $\bar{\mathcal{S}}$ на множестве точек bX, для которой $\mathcal{S} \subset \bar{\mathcal{S}}$ и пространство $(bX, \bar{\mathcal{S}})$ бикомпактно. Пусть $U \subset \bar{\mathcal{S}}$. Тогда $bX \setminus U$ замкнуто в $(bX, \bar{\mathcal{S}})$, а потому бикомпактно. Но тогда $bX \setminus U$ является бикомпактным подпространством пространства $(bX, \mathcal{S})$ (ибо образ бикомпактного пространства при непрерывном отображении является бикомпактным пространством — см. 91 гл. III). Покажем теперь, что каждое бикомпактное подпространство F пространства $(bX, \mathcal{S})$ замкнуто. Если $\xi \notin F$, то $F \subset X$ и F является бикомпактным подпространством пространства X. Тогда F замкнуто в $(bX, \mathcal{S})$ по определению топологии $\mathcal{S}$. Если $F \ni \xi$ и F не замкнуто в $(bX, \mathcal{S})$, то найдется последовательность $(x_\alpha: \alpha \in N^+)$ точек

множества $F \setminus \xi$, сходящаяся к некоторой точке $x^* \in X \setminus F$ (в смысле топологии $\mathscr{T}$, т. е. в смысле обычной топологии рациональных чисел). Тогда $\Phi = \{x^*\} \cup \{x_n : n \in N^+\}$ — бикомпактное подпространство пространства X и, следовательно, $O\xi = bX \setminus \Phi$ — окрестность точки ξ. Но $O\xi$ не содержит ни одного элемента последовательности $\{x_n : n \in N^+\}$. Значит, в F нет ни одной предельной точки для $\{x_n : n \in N^+\}$ — получили противоречие. Следовательно, F замкнуто в $(bX, \mathscr{T})$. Локальное свойство топологии $\mathscr{T}$ позволяет, вернувшись к определенному ранее множеству $bX \setminus U$, заключить, что оно замкнуто в $(bX, \mathscr{T})$. Значит, $U \in \mathscr{T}$. Тем самым доказано, что $\overline{\mathscr{T}} \subset \mathscr{T}$. Следовательно, $\mathscr{T} = \overline{\mathscr{T}}$. Но $(bX, \mathscr{T})$ не удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа (так как X не локально бикомпактно; см. 173 гл. III). Значит, и $(bX, \mathscr{T})$ не является бикомпактом.

96. Нет. Пусть $\mathscr{T}_A$ (см. 2 гл. II, 42 гл. III). Тогда естественное (тождественное) отображение отрезка $[0, 1]$, взятого с обычной топологией, на пространство $([0, 1], \mathscr{T}_A)$ непрерывно, взаимно однозначно и не является гомеоморфизмом.

97. (а) Пусть f — непрерывная функция на бикомпакте X: $f: X \to R$, где R — числовая прямая. Подпространство $fX \subset R$ бикомпактно (91 гл. III), а следовательно (206 гл. III), множество fX на прямой R замкнуто и ограничено. Тогда $a = \inf fX$ и $b = \sup fX$ существуют и принадлежат множеству fX, т. е. функция f ограничена: $a \leqslant f(x) \leqslant b$ для всех $x \in X$ и $fx_1 = a$, $fx_2 = b$ для некоторых $x_1 \in X$, $x_2 \in X$.

(б) Да, существуют (см. 188, 185 гл. III). Такие пространства называются псевдокомпактными.

98. Пусть x_0 — неизолированная точка пространства X и y_1 — неизолированная точка пространства Y. Тогда множества $X \setminus \{x_0\}$ и $Y \setminus \{y_1\}$ равномощны; мы обозначим через φ какое-нибудь взаимно однозначное отображение $X \setminus \{x_0\}$ на $Y \setminus \{y_1\}$. Определим $\overline{\varphi}: X \to Y$ так: $\overline{\varphi}(x_0) = y_1$, $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in X \setminus \{x_0\}$. Покажем, что $\overline{\varphi}$ — гомеоморфизм. Так как φ взаимно однозначно и $\overline{\varphi}(X) = Y$, то достаточно проверить, что $\overline{\varphi}$ непрерывно. Пусть U — произвольное открытое в Y множество. Если $U \not\ni y_1$, то $\overline{\varphi}^{-1}U \not\ni x_0$, и потому $\overline{\varphi}^{-1}U$ открыто в X_1 (ведь $X_1 = X \setminus \{x_0\}$ дискретно и открыто в X). Если $U \ni y_1$, то y_1 не является точкой полного накопления для множества $Y \setminus U$. Никакая другая точка множества Y также не является точкой полного накопления для $Y \setminus U$ (так как все точки из $Y \setminus \{y_1\}$ неизолированные). Значит, $Y \setminus U$ — конечное множество. Следовательно, и $X \setminus \overline{\varphi}^{-1}U$ конечно. Значит, $X \setminus \overline{\varphi}^{-1}U$ замкнуто, а $\overline{\varphi}^{-1}U$ открыто в X.

100. Воспользуйтесь задачами 61 гл. III и 281 гл. II.

101. Вследствие задачи 102 гл. III наше пространство X H-замкнуто и полурегулярно, ибо оно неуплотняемое. Докажем теперь, пользуясь вторым нашим условием, что оно регулярно. Пусть $x_0 \in X$ произвольно. Возьмем произвольную окрестность Ox_0 точки x_0. Так как X полурегулярно, то существует окрестность $O'x_0 \subset Ox_0$, являющаяся каноническим открытым множеством. Тогда $X \setminus O'x_0$ — каноническое замкнутое множество (см. 58 гл. II). Поэтому $X \setminus O'x_0$ — H-замкнутое подпространство (см. 62 гл. III). Для каждой точки $x \in X \setminus O'x_0$ и для точки x_0 возьмем окрестности Ux и $U_x x_0$ таким образом, чтобы $[Ux] \cap [U_x x_0] = \Lambda$. Рассмотрим открытое покрытие $\omega = \{Ux : x \in X \setminus O'x_0\}$ H-замкнутого подпространства $X \setminus O'x_0$. Пользуясь задачей 61 гл. III, выделим конечную подсистему $\omega_0 = \{Ux_1, Ux_2, \ldots, Ux_s\}$, для которой $X \setminus O'x_0 \subset \bigcup_{i=1}^{s} [Ux_i]$. Рассмотрим соответствующие окрестности точки x_0: $U_{x_1}x_0, U_{x_2}x_0, \ldots, U_{x_s}x_0$. Имеем $[U_{x_1}x_0] \cap [Ux_1] = \Lambda$,

$i = 1, 2, \ldots, s$. Обозначим $O'x_0 = \bigcap_{i=1}^{s} U_{x_i}x_0$. Нетрудно убедиться в том, что $x_0 \in O'x_0 = [O'x_0]_X \subset O'x_0 \subset Ox_0$. Итак, X регулярно и H-замкнуто, а потому бикомпактно (см. 60 гл. III). Все доказано.

102. (а) Пусть хаусдорфово пространство X является H-замкнутым и полурегулярным. Пусть $f: X \to Y$ — взаимно однозначное непрерывное отображение на хаусдорфово пространство Y. Докажем, что f — гомеоморфизм. Так как X полурегулярно, то канонические открытые множества образуют базу в X. Для доказательства топологичности отображения f надо показать, что образ fU канонического открытого в X множества U — открытое в X множество. Множество $X \setminus U$ каноническое замкнутое в X, значит, $X \setminus U$ является H-замкнутым подпространством (см. 62 гл. III). Тогда $f(X \setminus U)$ является H-замкнутым подпространством хаусдорфова пространства Y (см. 130 гл. III), и частности, $f(X \setminus U)$ замкнуто в Y, следовательно, $fU = Y \setminus f(X \setminus U)$ открыто в Y (мы все время помним, что f взаимно однозначно).

(б) Пусть X неуплотняемое.

1) Докажем прежде всего, что X полурегулярно. Определим на X топологию $\mathscr{T}$, базой которой являются канонические открытые множества хаусдорфова пространства X. Ясно, что $(X, \mathscr{T})$ — хаусдорфово пространство, а $f: X \to (X, \mathscr{T})$ — взаимно однозначное непрерывное отображение. Так как X неуплотняемое, то f — гомеоморфизм, откуда получаем, что канонические открытые множества в X образуют базу в X, т. е. пространство X полурегулярно.

2) Докажем H-замкнутость пространства X. Предположим, что X не H-замкнуто. Тогда, присоединив к X неизолированную точку ξ, можно расширить пространство X до хаусдорфова пространства $\overline{X}$. Рассмотрим разбиение пространства $\overline{X}$, все элементы которого одноточечны, кроме одного, который состоит из двух точек: точки ξ и еще одной точки $x_i \in X$. Это разбиение непрерывно. Пространство этого разбиения обозначим через Y, естественное отображение пространства $\overline{X}$ на пространство Y заданного разбиения — через $\overline{f}$. Так как определенное выше разбиение непрерывно, то отображение $\overline{f}: \overline{X} \to Y$ непрерывно и замкнуто (см. 322 гл. II). Пространство Y хаусдорфово (нетрудно убедиться в этом). Рассмотрим сужение $\overline{f} \mid X = f$. Ясно, что $fX = Y$, $f: X \to Y$ взаимно однозначно. Кроме того, f — незамкнутое отображение, в чем нетрудно убедиться, воспользовавшись тем, что ξ — неизолированная точка в $\overline{X}$; значит, X плотно в $\overline{X}$. Итак, мы построили взаимно однозначное непрерывное неотображающее отображение нашего пространства X на хаусдорфово пространство Y, что противоречит неуплотняемости пространства X.

103. Ответ авторам неизвестен.

104. Аксиома отделимости Хаусдорфа проверяется без труда. Без труда также показывается, что замыкания любых двух окрестностей точек p и p^- пересекаются, т. е. что Λ не удовлетворяет урысоновской аксиоме отделимости. Далее легко показать, что X полурегулярно. Теперь покажем, что X является H-замкнутым. Для этого воспользуемся критерием H-замкнутости (61 гл. III). Пусть ω — произвольное открытое покрытие пространства X базисными открытыми множествами. Рассмотрим две точки p^+ и p^-, $p^+ \in U_{\omega_1}(p^+) \in \omega$, $p^- \in U_{\omega_2}(p^-) \in \omega$. Можно считать, не нарушая общности, что $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Тогда подпространство $X \setminus \left(U_\omega p^- \cup U_\omega p^- \cup \left\{(x, y): x^2 + y^2 < \frac{1}{n}, y = 0\right\}\right) = \left\{(x, y): \frac{1}{n} \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$ — бикомпакт, и мы можем выделить из ω конечную подсистему ω_0, покрывающую это бикомп-

пактное подпространство. Рассмотрим конечную систему ω_1, состоящую из всех элементов системы ω_0 и всех двух множеств $U_x x^-$ и $U_x x^-$, входящих в ω. Ясно, что $\omega_1 \subset \omega$, $|\omega_1| < \aleph_1$. Так как множество $\left\{(x, y): 0 < x^2 + y^2 < \frac{1}{n}, y = 0\right\}$ нигде не плотно в X, то замыкания элементов системы ω_1 покрывают X. Итак, X будет H-замкнутым, полурегулярным и не удовлетворяет урысоновской аксиоме отделимости. Поэтому X неустранимо (ниже, ср. задачи 102 гл. III), в вследствие задачи 64 гл. III бикомпактен. Все доказано.

105. См. задачи 107 и 93 гл. III.

106. В силу задачи 147 гл. II хаусдорфово пространство, обладающее сетью мощности, меньшей или равной τ, можно уплотнить на хаусдорфово пространство с базой мощности, меньшей или равной τ. Но каждое уплотнение бикомпакта на хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом (83 гл. III). Значит, в самом X есть база мощности, меньшей или равной τ. Ясно, что мы воспользовались только неуплотняемостью пространства X.

107. В самом деле, множества всех одноточечных подмножеств бикомпакта образуют сеть в нем. Заключение следует теперь из задачи 106 гл. III.

108. Пусть $\mathscr{B}_1$ — база пространства X_1 и $\mathscr{B}_2$ — база пространства X_2, причем $|\mathscr{B}_1| \leqslant \tau = \max(wX_1, wX_2)$ и $|\mathscr{B}_2| \leqslant \tau$. Тогда $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ — сеть в пространстве X (141 гл. II) и $|\mathscr{B}| \leqslant \tau$ (так как $\tau \geqslant \aleph_0$). Значит (см. 106 гл. III), и X есть и база мощности, меньшей или равной τ. Ясно, что все X не может быть меньше, чем все X_1 или чем все X_2.

109. Рассуждение аналогично проведенному в решении задачи 108 гл. III.

110. Да, существует. Пусть $(X, \mathscr{T})$ — произвольное небикомпактное счетное T_1-пространство без счетной базы (см. 84, 113 гл. III). Тогда $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{T}})$, определенное в задаче 1 гл. IV, — счетное бикомпактное T_1-пространство без счетной базы — если бы последнее не имело места, то счетная база существовала бы и в $(X, \mathscr{T})$, как в подпространстве пространства $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{T}})$.

111. При непрерывном отображении пространства по счетной сети переходит в пространства со счетной сетью. Значит, есть счетная сеть в Y. Но тогда в Y есть и счетная база (106 гл. III).

114. Пусть $U_i \supset \Delta$, U_i открыто в $X \times X$ и $\bigcap \{U_i: i \in N\} = \Delta$. Можно считать, кроме того, что $[U_j] \subset U_i$ при $j \geqslant i$. Тогда для каждого открытого в $X \times X$ множества G, содержащего Δ, можно найти такое i_0, что $U_{i_0} \subset G$ (см. 87 гл. III). Для каждой точки $x \in X$ и каждого значения i зафиксируем такую окрестность $O^i x$ точки x в X, что $O^i x \times O^i x \subset U_i$. Покажем, что семейство $\gamma = \{O^i x: i \in N, x \in X\}$ — база пространства X. Рассмотрим произвольную окрестность Ox^0 произвольно зафиксированной точки x^0. Тогда $U^0 = (Ox^0 \times Ox^0) \cup ((X \times X) \setminus (X \times x^0))$ — окрестность множества Δ в $X \times X$. Существует i^0, для которого $U_{i^0} \subset U^0$. Покажем, что $O^{i^0} x^0 \subset Ox^0$. По определению, $O^{i^0} x^0 \times O^{i^0} x^0 = U_{i^0} \subset U^0$ и $O^{i^0}_{x^0} \ni x^0$. Следовательно, каково бы ни было $y \in O^{i^0} x^0$, будем иметь: $(y \times x^0) \in U^0 = (Ox^0 \times Ox^0) \cup ((X \times X) \setminus (X \times x^0))$. Но тогда $(y \times x^0) \in Ox^0 \times Ox^0$ и, значит, $y \in Ox^0$. Доказано, что $O^{i^0} x^0 \subset Ox^0$. При этом $O^{i^0} x^0 \in \gamma$. Следовательно, γ — база пространства X. Теперь для каждого $i \in N$ рассмотрим покрытие $\gamma_i^0 = \{O^i x_j: j = 1, \ldots, s(i)\}$. Тогда $\gamma^0 = \bigcup \{\gamma_i^0: i \in N\}$ — также база пространства X, $\gamma^0 \subset \gamma$ и $|\gamma^0| \leqslant \aleph_1$. Все доказано.

115. Нет. Для примера рассмотрим семейства $(D_\alpha: \alpha \in A)$, $|A| = \tau$, изолированных двоеточий: $D_\alpha = \{0_\alpha, 1_\alpha\}$. Как известно, $D^\tau = \Pi(D_\alpha: \alpha \in A)$ — сепарабельный бикомпакт (см. 381 гл. II). Для каждой точки $x \in \Pi(D_\alpha: \alpha \in A)$ обозначим $h(x) = \{\alpha \subset A: x_\alpha \neq 0\}$. Рассмотрим множество $M = \{x \in \Pi(D_\alpha: \alpha \in A): |h(x)| < \aleph_0\}$. Покажем, что подпространство $M \subset \Pi(D_\alpha: \alpha \in A)$ не сепарабельно. Пусть M' — счетное подмножество множества M. Обозначим $h(M') = \bigcup \{h(x): x \in M'\}$. Ясно, что $h(x_0) \subset h(M')$, если $x_0 \in [M']_M$. Но $|h(M')| \leqslant \aleph_0 \cdot \alpha |A| = \mathfrak{c} > \aleph_1$, поэтому, взяв $x_0 \in M$ такое, чтобы $h(x_0) \cap h(M') = \Lambda$, получим точку множества M, не принадлежащую множеству $[M']_M$. Заметим, что M всюду плотно в D^τ.

116. Множество A точек любой свободной последовательности составляет открытое дискретное подпространство в $\bar{A} = [A]_X$. По условию, существует $C \subset F$, для которого $[C] = \bar{A} \cap |C| \leqslant \tau$. Из непрерывности точек A в F и $[C] \supset A$ следует, что $C = A$. Значит, $|A| \leqslant \tau$ и верхняя грань мощностей свободных последовательностей в X не превосходит τ. Тогда и $d(X) \leqslant \tau$ (142 гл. III). В $\Phi = [Y]$ выберем всюду плотное множество S такое, что $|S| \leqslant \tau$. Для каждого $y \in S$ зафиксируем множество $B(y) \subset Y$ со свойством: $|B(y)| \leqslant \tau$ и $[B(y)] \ni y$ (это возможно, так как $d(X) \leqslant \tau$). Положим $B = \bigcup \{B(y): y \in S\}$. Тогда $|B| \leqslant \tau$, $B \subset Y$ и $[B] \supset [S] = \Phi = Y$. Следовательно, $s(Y) \leqslant \tau$.

117. Ответ авторам не известен.

118. Ответ авторам не известен.

119. Существуют вполне регулярные нормальные сепарабельные пространства — таково, например, пространство Немицкого $(Z, \mathscr{S})$ из задачи 13 гл. III. У $(Z, \mathscr{S})$ существует бикомпактное хаусдорфово расширение (14 гл. IV) — последнее и является, очевидно, искомым бикомпактом. Другой пример: произведение $2^{\aleph_0}$ экземпляров обычного отрезка — сепарабельный бикомпакт (391 гл. II). Он содержит гомеоморфный образ любого вполне регулярного пространства веса, меньшего или равного $2^{\aleph_0}$ (26, 27 гл. III), — в среде таких есть нормальное (13, 14 гл. III).

120. Покрытие λ пространства X назовем минимальным, если из $\gamma \subset \lambda$ и $\gamma \neq \lambda$ следует, что γ не покрывает X. Множество всех минимальных покрытий пространства X, составленных из элементов базы $\mathscr{B}$, обозначим через $\mathscr{J}$. Ясно, что каждое минимально открытое покрытие бикомпактного пространства конечно. Поэтому $\mathscr{J} = \bigcup \{\mathscr{J}_n: n \in N\}$, где $\mathscr{J}_n = \{\lambda \in \mathscr{J}: |\lambda| = n\}$. Легко доказывается, что $|\mathscr{J}| = |\mathscr{B}|$ (см. 58 гл. I; мы учитываем, что каждое $\lambda \in \mathscr{J}$ конечно, и что в X выполнена T_3-аксиома отделимости). Предположим, что $|\mathscr{B}| > \tau$. Тогда $|\mathscr{J}| > \tau$ и, значит, $|\mathscr{J}_{n_0}| > \tau$ для некоторого n_0 (90 гл. I). Положим (для произвольного $\gamma \subset \mathscr{B}$) $\mathscr{J}^\gamma_{n_0} = \{\lambda \in \mathscr{J}_{n_0}: \gamma \supset \lambda\}$. Мы покажем сейчас по индукции, что для каждого $i = 0, 1, \ldots, n_0$ существует $\gamma_i \subset \mathscr{B}$ со свойствами: (α) $|\gamma_i| = \tau$, (β) $|\mathscr{J}^{\gamma_i}_{n_0}| > \tau$. Пусть $k = 0$; полагаем $\gamma_0 = \Lambda$ — условие (β) выполняется, ибо $\mathscr{J}^{\gamma_0}_{n_0} = \mathscr{J}_{n_0}$ и $|\mathscr{J}_{n_0}| > \tau$. Предположим, что уже определено γ_i для некоторого $i < n_0$, причем $|\mathscr{J}^{\gamma_i}_{n_0}| > \tau$ и $|\gamma_i| = i < \aleph_0$. Тогда $\bigcup \{U: U \in \gamma_i\} \neq X$, иначе, в силу определения $\mathscr{J}^{\gamma_i}_{n_0} \subset \mathscr{J}_{n_0}$, семейство $\mathscr{J}^{\gamma_i}_{n_0}$ было бы пусто. Зафиксируем $x^0 \in X \setminus \bigcup \{U: U \in \gamma_i\}$. Так как $\mathscr{J}^{\gamma_i}_{n_0} = \mathscr{J}_{n_0}$, то $\mathscr{J}^{\gamma_i}_{n_0} = \bigcup \{\mathscr{J}^{\gamma_i \cup \{V\}}_{n_0}: V \in \mathscr{B}_{x^0}\}$. Но $|\mathscr{B}_{x^0}| \leqslant \tau$, а $|\mathscr{J}^{\gamma_i}_{n_0}| > \tau$. Значит (88 гл. I), существует $V^0 \in \mathscr{B}_{x^0}$, для которого $|\mathscr{J}^{\gamma_i \cup \{V^0\}}_{n_0}| > \tau$. Очевидно, $V^0 \notin \gamma_i$ (ибо $x^0 \in V^0$ и $x^0 \notin \bigcup \{U: U \in \gamma_i\}$). Следовательно, $\gamma_i \cup \{V^0\} = \gamma_{i+1}$, т. е. $\gamma_{i+1} = \gamma_i \cup \{V^0\} = \mathscr{B}$ — искомое семейство. Эта процедура приводит нас, наконец, к системе $\gamma_{n_0} \subset \mathscr{B}$, для которой $|\gamma_{n_0}| = n_0$ и $|\mathscr{J}^{\gamma_{n_0}}_{n_0}| > \tau$. Но так как $\gamma_{n_0} \subset \gamma$ и $|\gamma| = n_0$, то

для любого $\gamma \in \mathscr{S}_{\alpha_1}^{\tau_{\alpha_0}}$ мы заключаем, что $\gamma = \gamma_{\alpha_1}$, при всех $\gamma \in \mathscr{S}_{\alpha_2}^{\tau_{\alpha_0}}$, т. е. что $\mathscr{S}_{\alpha_0}^{\tau_{\alpha_0}} = \{\gamma_{\alpha_1}\}$ и $|\mathscr{S}_{\alpha_0}^{\tau_{\alpha_0}}| = 1$ — противоречие с $|\mathscr{S}_{\alpha_0}^{\tau_{\alpha_0}}| > \tau \geqslant \aleph_0 > 1$.

121. Обозначим через $\overline{\mathscr{R}}$ совокупность всех множеств, являющихся пересечениями конечного числа элементов семейства $\mathscr{C}$. Семейство $\overline{\mathscr{C}}$ служит базой некоторой топологии $\overline{\mathscr{T}}$ на X (14 гл. II). Так как $\{x\} = \bigcap \{U: U \in \mathscr{C}_x\}$ для всех $x \in X$, то пространство $(X, \overline{\mathscr{T}})$ удовлетворяет T_1-аксиоме отделимости. В силу задачи 58 гл. I $|\overline{\mathscr{C}}| = |\mathscr{C}|$ и $\overline{\mathscr{T}} \subset \mathscr{T}$, где $\mathscr{T}$ — исходная топология на X. Последнее означает, что $(X, \overline{\mathscr{T}})$ бикомпактно. Очевидно, $|\overline{\mathscr{C}}_x| \leqslant \tau$ для всех $x \in X$, где $\overline{\mathscr{C}}_x = \{V \in \overline{\mathscr{C}}: V \ni x\}$. Заключаем (120 гл. III), что $|\overline{\mathscr{C}}| \leqslant c$. Следовательно, $|\mathscr{C}| \leqslant \tau$.

122. Будем считать, что $|X| \geqslant \aleph_0$. Положим $\mathscr{F} = \{X \setminus U: U \in \mathscr{B}\}$. Очевидно, для каждой точки $x \in X$ имеет место $\chi(x) = \bigcap \{F \in \mathscr{F}: F \ni x\}$. Рассмотрим семейство $\overline{\mathscr{F}}$ всех множеств, являющихся пересечениями конечного множества элементов из $\mathscr{F}$. Тогда $|\overline{\mathscr{F}}| = |\mathscr{F}| = |\mathscr{B}|$. Все элементы семейства $\overline{\mathscr{F}}$ — замкнутые множества. Покажем, что $\overline{\mathscr{F}}$ — сеть в X. Пусть точка $x \in X$ и ее окрестность Ox выбраны произвольно. Рассмотрим $\xi = \{P \cap (X \setminus Ox): P \in \overline{\mathscr{F}}$ и $P \ni x\}$. Очевидно, $\bigcap \{Q: Q \in \xi\} \subset \bigcap \{P \in \overline{\mathscr{F}}: P \ni x\} = \bigcap \{P' \in \mathscr{F}: P' \ni x\} = \{x\}$. С другой стороны, $\bigcap \{Q: Q \in \xi\} \subset X \setminus Ox \subset X \setminus \{x\}$. Следовательно, $\bigcap \{Q: Q \in \xi\} = \Lambda$. Так как все элементы ξ — замкнутые множества, то семейство ξ не центрировано (45 гл. III). Значит, найдутся $P_1, \ldots, P_k \in \overline{\mathscr{F}}$, для которых $\bigcap \{P_i: i = 1, \ldots, k\} \cap \bigcap (X \setminus Ox) = \Lambda$. Но тогда $x \in \bigcap \{P_i: i = 1, \ldots, k\} \subset Ox$ и $\bigcap \{P_i: i = 1, \ldots, k\} \in \overline{\mathscr{F}}$. Итак, $\overline{\mathscr{F}}$ — сеть в X. Поэтому (103 гл. III) существует база $\mathscr{B}^*$ пространства X, для которой $|\mathscr{B}^*| \leqslant |\mathscr{B}|$.

123. Пусть δ — семейство всех открыто-замкнутых в X множеств. Так как X нульмерно, то δ образует базу пространства X. Возьмем такое подсемейство $\delta_0 \subset \delta$ мощности $|\delta_0| = w(X)$, чтобы δ_0 также образовывало базу в X (см. 101 гл. II), и δ_1 — семейство, состоящее из всевозможных объединений конечного числа множеств из δ_0. Очевидно, $\overline{\delta}_1$ состоит из открыто-замкнутых множеств, т. е. $\overline{\delta}_1 = \delta$, образует базу бикомпакта X и $|\overline{\delta}_1| = |\delta_1| = w(X)$. Покажем, что $\overline{\delta}_0 = \delta$. Пусть $V \in \delta$ произвольно. Для каждой точки $x \in V$ возьмем такое $U_x \in \delta_0$, чтобы $x \in U_x \subset V$, и рассмотрим открытое покрытие $\gamma(V) = \{U_x: x \in V\}$ пространства V. Так как V открыто-замкнуто в бикомпакте X, то V — бикомпакт; следовательно, существует конечное подпокрытие $(U_{x_1}, \ldots, U_{x_s})$ покрытия $\gamma(V)$ подпространства V. Тогда $V = \bigcup \{U_x: U_x \in \gamma(V)\} = \bigcup_{i=1}^{s} U_{x_i}$. Так как каждое $U_{x_i} \in \delta_0$, $i = 1, 2, \ldots, s$, то $\bigcup_{i=1}^{s} U_{x_i} = V \in \overline{\delta}_0$. Итак, $\delta = \overline{\delta}_0$. Значит, $|\delta| = |\overline{\delta}_0| = |\delta_1| = w(X)$. Все доказано.

126. На основании 125 гл. III выделим непересекающиеся замкнутые множества $F_0 \subset X$ и $F_1 \subset X$, которые в топологии, порожденной на X, не имеют вложенных типа δ. Применяя снова задачу 125 гл. III к пространствам F_0 и F_1, в отдельности — получим замкнутые непересекающиеся множества $F_{00} \subset F_0$, $F_{01} \subset F_0$, $F_{10} \subset F_1$, $F_{11} \subset F_1$, каждое из которых как подпространство пространства X не имеет изолированных точек. Продолжая очевидным образом этот процесс по индукции, мы каждому упорядоченному набору $i_0, i_1, \ldots, i_k$ из нулей и единиц поставим в соответствие замкнутое в X множество, которое в топологии, индуцированной на X, не имеет вложенных. При этом будут выполняться условия: (α) $F_{i_0 i_1 \ldots i_k} \subset F_{i_0 i_1 \ldots i_{k-1}}$ и (β) $F_{i_0 i_1 \ldots i_{k-1} 0} \cap F_{i_0 i_1 \ldots i_{k-1} 1} = \Lambda$, если $i_0 = \alpha_1$, где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, i_0, i_1, \ldots, i_k$ любым образом можно заменить на нули и единицы и $k = 0, 1, 2, \ldots$. Из (α) следует, что для любой последовательности $\xi = \{i_0, i_1, \ldots, i_k, \ldots\}$, состоящей из нулей и единиц, множество $\Phi_\xi = \bigcap \{F_{i_0 i_1 \ldots i_k}: k = 0, 1, 2, \ldots\}$ не пусто (подр. Y — бикомпакт). В силу (β), если $\xi \neq \xi'$, то $\Phi_\xi \cap \Phi_{\xi'} = \Lambda$. Так как множество всех различных последовательностей из нулей и единиц имеет мощность $2^{\aleph_0}$ (см. 92 гл. I: это множество можно отождествить с $D^{\aleph_0}$ — произведением $\aleph_0$ двоеточий), то $|Y| \geqslant |\bigcup \{\Phi_\xi: \xi$ — любая последовательность из нулей и единиц$\}| \geqslant 2^{\aleph_0}$.

127. Нам понадобятся следующие замечания: 1) Если мощность бикомпакта больше единицы, то в нем найдутся два непересекающихся непустых замкнутых множества типа G_δ (ранее неоднократно выручавшая нас 89 гл. III).

2) Пересечение счетной центрированной системы замкнутых множеств типа G_δ в бикомпакте является непустым замкнутым множеством типа G_δ в этом бикомпакте.

3) Если $\Phi \subset F \subset X$ и F — множество типа G_δ в X, а Φ — множество типа G_δ в F, то Φ — множество типа G_δ в X (см. 70 гл. III).

4) Если $F = \{x\}$ — множество типа G_δ в бикомпакте X, то X в точке x удовлетворяет первой аксиоме счетности (см. 88 гл. III).

Рассмотрим теперь вполне упорядоченное множество $(A, \prec)$ мощности $\aleph_1$. Для каждого $x \in A$ через $Q(x)$ обозначим множество всех функций со значениями 0 или 1, определенных на $I(x) = \{y \in A: y \prec x, y \neq x\}$. Если $f \in Q(x)$ и $y \prec x$, $y \neq x$, то через (f, y) будет обозначаться сужение функции f на множество $I(y)$, а через f^{-1}, соответственно через f^{0} будет обозначаться функция, определенная на $\overline{I}(x) = I(x) \cup \{x\} = I(x + 1)$ и на $I(x)$ совпадающая с f, а на x равная соответственно нулю или единице. Будем считать теперь, что бикомпакт X ни в одной точке не удовлетворяет первой аксиоме счетности. По индукции относительно $(A, \prec)$ можно построить отображение φ множества $Q = \bigcup \{Q(x): x \in A\}$ в множество $\mathscr{C}$ всех непустых замкнутых множеств типа G_δ в X так, что для всех $f \in Q$ будут выполнены условия: (α): $\varphi(f^0) \cap \varphi(f^1) = \Lambda$; ($\beta$): $\varphi(f, y) \supset \varphi(f)$; $|\varphi(f, y)| \geqslant 1$ — при этом следует воспользоваться замечаниями 1) — 4) и сделанным предположением. Детали построения предоставляются читателю.

Рассмотрим теперь множество $\overline{Q}$ всех отображений множества A в множество $D = \{0, 1\}$. Через (g, x), для каждого $g \in \overline{Q}$ и каждого $x \in A$, условимся по правилу обозначать сужение отображения g на множество $I(x)$ и определим отображение $\overline{\varphi}$ множества $\overline{Q}$ в множество $\overline{\mathscr{C}}$ непустых замкнутых подмножеств пространства X следующим образом: $\overline{\varphi}(g) = \bigcap \{\varphi(g, x): x \in A\}$. Из ($\beta$) следует, что $\overline{\varphi}(g) \neq \Lambda$ для всех $g \in \overline{Q}$, а из (α) вытекает, что $\overline{\varphi}(g) \cap \overline{\varphi}(g') = \Lambda$, коль скоро $g \neq g'$. Но $|\overline{Q}| = |D|^{|A|} = 2^{\aleph_1}$. Из $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ следует, что $2^{\aleph_1} > \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Получаем $|\bigcup \{\overline{\varphi}(g): g \in \overline{Q}\}| \geqslant |\overline{Q}| > 2^{\aleph_0}$ — пришли к противоречию.

128. Мы покажем, что если в условиях задачи X несчетно, то в X существует замкнутое подпространство без изолированных точек.

Через X^s обозначим множество всех точек $x \in X$, обладающих окрестностью Ox такой, что $|Ox| \leqslant \aleph_0$. Покажем, что $|X \setminus X^s| > 1$. Каждое замкнутое в X множество F, содержащееся в X^s, счетно. Если $X \setminus X^s = \{x^0\}$, то $\{x^0\} = \bigcap \{U_n: n = 1, 2, \ldots\}$, где все U_n открыты в X, и, следовательно, $X^s = X \setminus \{x^0\} = \bigcup \{X \setminus U_n: n = 1, 2, \ldots\}$. По выбранному ранее каждое $X \setminus U_n$ счетно, следовательно, X^s и X также счетны. Из полученного

нию противоречия следует $|X \setminus X^*| \geqslant 1$. Понятно, что подпространство $X \setminus X^*$ замкнуто и не имеет изолированных точек. Теперь см. 123 гл. III.

129. Пусть $\mathcal{A}$ — база пространства X и $|\mathcal{B}| \leqslant \tau$. Семейство всех множеств, представимых в виде объединения конечного числа элементов из $\mathcal{B}$, обозначим через $\overline{\mathcal{B}}$. Тогда (58 гл. I) $|\overline{\mathcal{B}}| \leqslant \tau$, и так как X — бикомпактное T_1-пространство, то для любых $x \in X$ и $F \subset X$, где $x \notin F$ и F замкнуто в X, найдется $V \in \overline{\mathcal{B}}$ такое, что $x \in V$, $F \subset V$. Следовательно, $\mathcal{F} = \{X \setminus V: V \in \overline{\mathcal{B}}\}$ — сеть в X. Очевидно, все элементы $\mathcal{F}$ замкнуты в X и $|\mathcal{F}| = |\overline{\mathcal{B}}| \leqslant \tau$.

130. В X существует счетная сеть $\mathcal{F}$ замкнутых множеств (129 гл. III). Предположим, что X несепарабельно.

Множество $A = \bigcup \{P: P \in \mathcal{F} \text{ и } |P| \leqslant \aleph_1\}$ счетно. Выберем $y \in X \setminus A$, $z \in X \setminus A$, $y \neq z$. Так как $Y = T_4$-пространство, то $X \setminus \{y\}$ — открытое множество, содержащее z. Поэтому существует $P_0 \in \mathcal{F}$, для которого $z \in P_0 \subset X \setminus \{y\}$. Множество $X \setminus P_0$ тоже открыто в X и содержит точку y. Поэтому найдется $P_1 \in \mathcal{F}$, для которого $y \in P_1 \subset X \setminus P_0$. Но $y \notin A$, $z \in P_1 \in \mathcal{F}$ и $z \notin A$, $z \in P_0 \in \mathcal{F}$ следует, что $\aleph_1 \leqslant |P_0|$ и $\aleph_1 \leqslant |P_1|$.

Мы доказали, таким образом, утверждение (*): если бикомпактное T_1-пространство со счетной базой несепарабельно, то в нем можно найти два замкнутых непересекающихся несчетных подпространства. Последние также бикомпактны, имеют счетную базу и удовлетворяют T_4-аксиоме отделимости. К ним снова можно применить утверждение (*). Проводя построение по индукции и рассуждая так же, как в решении задачи 126 гл. III, мы заключаем, что X содержит подмножество мощности $2^{\aleph_0}$. Поэтому мощность T_1-пространства со счетной базой не превосходит $2^{\aleph_0}$; это доказывается без труда. Значит, $|X| = 2^{\aleph_0}$.

131. Родился, например, абсолют канторова совершенного множества — см. 221, 239, 167 гл. VI.

132. Пример на X пространства $\mathcal{S}$ из задачи 131 гл. III — абсолют канторова совершенного множества. Зафиксируем в X счетную π-базу $\xi = \{U_\alpha: \alpha \in N^+\}$ — она там имеется и силу задачи 253 гл. VI. Будем считать, что $U_\alpha \neq \Lambda$ при всех $\alpha \in N^+$. Так как в X нет изолированных точек (см. 220 гл. VI), то тогда $U_\alpha \mid \geqslant \aleph_0$ для всех $\alpha \in N^+$. Положим $A_1 = \{x_1\}$, где x_1 — какая-нибудь точка множества U_1. Пусть уже определены конечные множества A_α для всех $\alpha \leqslant \gamma$, где γ — некоторый элемент из N^+. В $U_{\gamma+1} \setminus \bigcup \{A_\alpha: \alpha \leqslant \gamma\}$ выберем точку $y^1_{\gamma+1}$, и полагаем $A_{\gamma+1} = \{y^n_{\gamma+1}: n = 1, \ldots, r\} = 1\}$. Последовательность $\{A_\gamma: \gamma \in N^+\}$, которая возникает таким образом по индукции, искомая: если $V \neq \Lambda$ и V открыто в X, то $U_{\alpha^0} \subset V$ для некоторого $\alpha^0 \in N^+$ (так как ξ является π-базой), и тогда $A_\alpha \cap U_{\alpha^0} \neq \Lambda$ при всех $\alpha \geqslant \alpha^0$. Тем более, $A_\alpha \cap V \neq \Lambda$ при всех $\alpha \geqslant \alpha^0$. Ясно, что и остальные требования выполняются.

133. Через B_τ обозначим бикомпактификацию Александрова (см. 276 гл. III) дискретного пространства X_τ мощности τ. Пусть $\{\xi_\tau\} = B_\tau \setminus X_\tau$. Тогда все точки множества X_τ изолированные в B_τ. Окрестности точки ξ_τ в B_τ — это дополнения в B_τ до всевозможных конечных подмножеств множества X_τ. Так как $|X_\tau| = \tau \geqslant \aleph_0$, то счетной базы у B_τ в ξ_τ нет. Но ведь $\xi_\tau \in [A]$, где $A \subset X_\tau$, то $|A| \geqslant \aleph_0$. Выбрав любое $A' \subset A$, для которого $|A'| = \aleph_0$, будем иметь $\xi_\tau \in [A']$. Значит, B_τ секвенциально — оно является даже пространством Фреше — Урысона (см. стр. 57).

134. Нет. Рассмотрим пространство $\mathcal{S}^1$, построенное в задаче 100 гл. V. Оно хаусдорфово и локально бикомпактно. Пусть $B = \mathcal{S}^1 \cup \{\xi^*\}$ — бикомпактное хаусдорфово расширение пространства $\mathcal{S}^1$ в смысле П. С. Александрова (точкой точек; см. 176 гл. III). Покажем, что пространство B секвенциально, но не является пространством Фреше — Урысона. Так как $\mathcal{S}^1_0$ всюду

плотно в $\mathcal{S}^1$, то $\xi^* \subset [\mathcal{S}^1_0]$. Но никакая последовательность точек множества $\mathcal{S}^1_0$ не сходится к ξ^* — ибо в $\mathcal{S}^1_0$ всегда есть подпоследовательность, сходящаяся в некоторой точке из $\mathcal{S}^1$. Если $A = B$ и A не замкнуто в B, то либо $[A] \setminus A) \cap \mathcal{S}^1 \neq \Lambda$, либо $|A \cap \mathcal{S}^1_1| = \aleph_1$ и $[A] \setminus A = \{\xi^*\}$. В первом случае воспользуемся тем, что $\mathcal{S}^1$ — локально метризуемое пространство и, следовательно, пространство Фреше — Урысона. Во втором случае поступим так же, что любое бесконечное счетное множество из $\mathcal{S}^1_1$, будучи перенумеровано, становится последовательностью, сходящейся к ξ^* (это сразу следует из определения топологии в $\mathcal{S}^1 \cup \{\xi^*\}$ и дискретности множества $\mathcal{S}^1_1$ в $\mathcal{S}^1$).

135. Сейчас ответ авторам не известен.

136. Ответ автором не известен.

137. Достаточно доказать (см. 68 гл. III), что каждая точка $x_0 \in X$ является пересечением счетного семейства открытых в X множеств. Пространство X регулярно, поэтому у каждой точки $x \in X \setminus \{x_0\}$ можно выбрать окрестность Ox, лежащую с замыканием в $X \setminus \{x_0\}$. Семейство $\xi = \{Ox: x \in X \setminus \{x_0\}\}$ покрывает множество $X \setminus \{x_0\}$. Пусть $\prec$ — некоторое вполне упорядочение на ξ (см. стр. 19). Для каждого $U \in \xi$ положим $\overline{U} = U \setminus \bigcup \{V \in \xi: V \prec U\}$. Если $U_1 \in \xi$, $U_2 \in \xi$ и $U_2 \neq U_1$, то, очевидно, $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \Lambda$. Кроме того, $\bigcup \{\overline{U}: U \in \xi\} = X \setminus \{x_0\}$. (Конечно, может быть $U \neq \Lambda$, но $\overline{U} = \Lambda$.) Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Если $U \in \xi$ и существует точка $x \in \overline{U}$, для которой $d(x, X \setminus U) \geqslant \varepsilon$, то зафиксируем некоторую такую точку, обозначим ее через $x_\varepsilon(U)$. Множества $A_\varepsilon = \{x_\varepsilon(U): U \in \xi$ и $x_\varepsilon(U)$ определено$\}$, как выясняется, конечны. Ясно, что если $x' \in A_\varepsilon$, $x'' \in A_\varepsilon$ и $x' \neq x''$, то $d(x', x'') > \varepsilon$. Покажем сначала, что A_ε замкнуто. Предположим противное. Тогда существует $x^* \in X \setminus A_\varepsilon$, для которого $d(x^*, A_\varepsilon) = 0$. Если $x_\varepsilon(U)$ определено, то из $x_\varepsilon(U) \in U \subset X \setminus \{x_0\}$ следует, что $d(x_\varepsilon(U), x_0) \geqslant \varepsilon$. Значит, $d(x_0, A_\varepsilon) \geqslant \varepsilon \in x^* \neq x_0$. Поэтому семейство $\xi^* = \{U \in \xi: x^* \in U\}$ не пусто. Через U^* обозначим его первый элемент. Множество $F^* = X \setminus U^*$ замкнуто и $x^* \notin F^*$. Следовательно, существует $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$ такое, что $d(x^*, F^*) \geqslant \delta$. Так как $d(x^*, A_\varepsilon) = 0$, то найдутся $U_1 \in U_2 \in \xi$, для которых $\overline{U}_2 \prec U_1$, $x_\varepsilon(U_1) \in A_\varepsilon$, $x_\varepsilon(U_2) \in A_\varepsilon$ и $d(x^*, x_\varepsilon(U_1)) < \delta < \varepsilon$, $d(x^*, x_\varepsilon(U_2)) < \delta < \varepsilon$. Тогда соотношение $U^* \prec U_2$ не может выполняться, иначе было бы $x_\varepsilon(U_2) \in U^*$ и $d(x^*, x_\varepsilon(U_2)) \geqslant \delta$ — противоречие. Значит, $U_1 \prec U^* \prec U^*$. Но $d(x_\varepsilon(U_1), X \setminus U_1) \geqslant \varepsilon$ и $d(x^*, x_\varepsilon(U_1)) < \varepsilon$ следует, что $x^* \in U_1$, а это противоречит определению U^*. Следовательно, множество A_ε замкнуто. Рассмотрим A_ε как подпространство топологического пространства X. Его топология порождена сужением симметрики d на A_ε (так как A_ε замкнуто в X — см. стр. 59). Если некоторая точка x' не изолирована в A_ε, то $d(x', A_\varepsilon \setminus \{x'\}) = 0$ в силу 110 гл. II, и существует $x'' \in A_\varepsilon \setminus \{x'\}$, для которого $d(x', x'') < \varepsilon$, что противоречит определению A_ε. Следовательно, A_ε дискретно. Так как X — бикомпакт, заключаем, что A_ε — конечное множество.

Положим $\overline{U}_n = \left\{x \in \overline{U}: d(x, X \setminus U) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$ для каждого $U \in \xi$. Тогда $\overline{U} = \bigcup \{\overline{U}_n: n \in N^+\}$ и, значит, $\bigcup \{\overline{U}_n: U \in \xi, n \in N^+\} = X \setminus \{x_0\}$. Но $\gamma_n = \{U \in \xi: \overline{U}_n \neq \Lambda\}$ — конечное множество, как следует из проведенного рассуждения об A_ε при $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Следовательно, семейство $(\overline{U}_n: U \in \gamma_n, n \in N^+$ и $\overline{U}_n \neq \Lambda\}$ счетно. Так как оно покрывает $X \setminus \{x_0\}$ и замыкания его элементов не содержат точки x_0, заключаем, что $\{x_0\}$ — множество типа G_δ в X.

138. Для каждого $n \in N^+$ и каждого $x \in X$ зафиксируем открытое в X множество $U_{n,x}$ такое, что

$$x \in U_{n,x} \subset \bigcup \{U_{n,x}: U \in \xi, U_{n,x} \cap \overline{U}_n = \left\{y \in X: \ d(y, x) < \frac{1}{n}\right\}.$$

— это возможно в силу регулярности X и утверждения задачи 13 гл. III. Из открытого покрытия $\{U_\alpha x\colon x \in A\}$ бикомпакта X выберем конечное покрытие $\gamma_x = \{U_\alpha x_i\colon i = 1, \ldots, k_x\}$. Положим $\Gamma^\alpha \alpha_i = U_\alpha \gamma_i$ и рассмотрим семейство $\varphi = \{\Gamma^\alpha \alpha_i\colon i = 1, \ldots, k_x;\ x \in A^+\}$. Пополним φ пересечениями всевозможных конечных подсемейств семейства φ, получившееся семейство обозначим через $\bar{\varphi}$. Очевидно, $|\bar{\varphi}| \leqslant \aleph_0$. Покажем, что $\bar{\varphi}$ есть в X. Пусть $x^* \in A$. Зафиксируем при каждом $\alpha < \Omega^+$ множество $F^\alpha x_{\xi(\alpha)} \subset \gamma_0 \subset \bar{\varphi}$ так, чтобы было $x^* \in F^\alpha x_{\xi(\alpha)}$ (это возможно, так как каждое γ_0 покрывает X). Тогда $x^* \subset \Phi = \bigcap \{F^\alpha x_{\xi(\alpha)}\colon \alpha < \Omega^+\}$. Покажем, что $\Phi = \{x^*\}$. Пусть $x' \in \Phi$. Тогда $x' \subset F^\alpha x_{\xi(\alpha)}$ и потому $d(x', x_{\xi(\alpha)}) < \frac{1}{n}$. Следовательно, $\lim_{\alpha \to \infty} d(x_{\xi(\alpha)}, x') = 0$ и потому (141 гл. II) $\lim_{\alpha \to \infty} x_{\xi(\alpha)} = x'$. В частности, $x^* = \lim_{\alpha \to \infty} x_{\xi(\alpha)}$. Но X — хаусдорфово пространство, поэтому каждая сходящаяся последовательность в X имеет лишь один предел. Значит, $x^* = x'$ для всех $x' \in \Phi$, т. е. $\Phi = \{x^*\}$. Рассмотрим произвольную открытую окрестность V точки x^*. Семейство $\{F^\alpha x_{\xi(\alpha)} \setminus V\colon \alpha \in A^+\}$ не центрированно (иначе было бы $\Phi \setminus V \neq \Lambda$). Поэтому существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_i \in A^+$ такие, что $F = \bigcap \{F^{\alpha_j} x_{\xi(\alpha_j)}\colon j = 1, \ldots, i\} \subset V$. Но $F \in \bar{\varphi}$. Следовательно, $\bar{\varphi}$ — сеть в X.

139. Это следует из 138, 109 и 30 гл. III.

140. Предположим, что $\xi = \{x_\alpha\colon \alpha < \zeta\ J(\zeta)\}$ — свободная последовательность в X и $t(X) < \tau$ (здесь $J(\tau)$ — минимально вполне упорядоченное множество мощности τ). Существует тогда регулярное кардинальное число τ^*, для которого $t(X) < \tau^* \leqslant \tau$ (см. 103 гл. I). Множество точек свободной начальности $\frac{1}{2}^\alpha = \{x_\beta\colon \alpha \in J(\tau^*)\}$ (которая является частью свободной последовательности ξ) обозначим через A. Тогда $|A| = \tau^* \geqslant t(X)$ и некоторая точка x^* $\subset X$ является точкой полного накопления для A (см. 48 гл. III). Так как $t(X) < \tau^*$, то существует множество $A^* \subset A$, для которого $|A^*| < \tau^*$ и $[A^*] \ni x^*$. Но τ^* регулярно, поэтому найдется такое $\beta^* \in J(\tau^*)$, что $A^* \subset \{x_\alpha\colon \alpha < \beta^*\}$. Тогда $x^* \in [A^*] \subset [\{x_\alpha\colon \alpha < \beta^*\}] \subset X \setminus [\{x_\alpha\colon \beta^* \leqslant \alpha\}]$ и, следовательно, $U^* = X \setminus [\{x_\alpha\colon \beta^* \leqslant \alpha\}]$ — окрестность точки x^*, содержащая менее чем τ^* элементов множества A, а это противоречит тому, что x^* — точка полного накопления для A.

141. Так как X — бикомпакт, а Q — множество типа G_δ в нем, то найдется $\Phi \subset X$, для которого $x \in \Phi \subset Q$ и $\chi(\Phi, X) \leqslant \tau$ (71 гл. III). Но $x \in [A]$ и $x \in [A]$ следует, что каждая окрестность множества Φ пересекается с A. Поэтому (91 гл. II) существует $C \subset A$, для которого $|C| \leqslant \tau$ и $[C] \supset \Phi \neq \Lambda$. Но тогда, в силу предположения об A, $[C] \subset A$, и мы получаем $Q \cap A \supset \supset [C] \cap \Phi \neq \Lambda$. Этим доказано I). Выведем II) из I). Зафиксируем $x \in [A] \setminus A$. Положим $V_0 = X$ и выберем $x_0 \in A$ произвольно. Пусть $\beta \in J(\tau^+)$ и для всех $\alpha < \beta$ уже определены открытые множества $V_\alpha \ni x$ и точки $x_\alpha \in A$. Положим $P_\beta = \{x_\alpha\colon \alpha < \beta\}$. Из $|P_\beta| < \tau^+$ и $P_\beta \subset A$ следует, что $x \in [P_\beta]$. За V_β примем любое открытое множество, для которого $x \in V_\beta \subset [V_\beta] \subset X \setminus [P_\beta]$. Множество $Q_\beta = \bigcap \{V_\alpha\colon \alpha < \beta\}$ — множество типа G_δ в X и $x \in Q_\beta$, поэтому, в силу I), $Q_\beta \cap A \neq \Lambda$. За x_β примем произвольную точку множества $Q_\beta \cap A$. Так мы определяем $V_\alpha \subset X \ni x_\alpha \in A$ при всех $\alpha < J(\tau^+)$. Из $x_\alpha \in Q_\alpha \subset Q_\beta$ при $\beta \leqslant \alpha$ следует, что $|\{x_\alpha\colon \beta \leqslant \alpha\}| \subset [Q_\beta] \subset [V_\beta] \subset X \setminus [P_\beta] \subset X \setminus |\{x_\alpha\colon \alpha < \beta\}|$. Итак, $|\{x_\alpha\colon \alpha < \beta\}| \cap |\{x_\alpha\colon \beta \leqslant \alpha\}| = \Lambda$ и при всех $\beta \in J(\tau^+)$, т. е. $\{x_\alpha\colon \alpha \in J(\tau^+)\}$ — свободная последовательность в X длины τ^+, все элементы которой лежат в A. II) доказано.

142. Обозначим через τ^* нижнюю грань длин свободных последовательностей в X. Тогда $\tau^* \leqslant t(X)$ в силу задачи 140 гл. III. Пусть теперь τ — произвольное кардинальное число, меньшее чем $t(X)$. Тогда существует $A \subset X$, для которого $A = \bigcup \{[B]\colon B \subset A$ и $|B| < \tau\} \neq [A]$. Поэтому

(141 гл. III) в X есть свободная последовательность длины τ^+. Отсюда следует, очевидно, нужное заключение.

143. Зафиксируем вполне упорядоченное вполне упорядоченное множество $(A, <)$ мощности $\aleph_1$. Предположим теперь, что доказываемое утверждение не верно. По индукции относительно $<$ можно определить отображение f множества A в X и отображение φ множества A в множество $\mathfrak{B}$ всех взятых внутри подмножеств типа G_δ пространства X так, чтобы выполнялись условия: 1) $[f(x)] \cap \varphi(x) = A$ для всех $x \in A$; 2) $\varphi(x') \supset \varphi(x')$ при $x < x'$; 3) $\varphi(x) \supset \varphi(x')$, $\varphi(x) \neq \varphi(x')$ при всех $x < x'$, $x \neq x'$. Предположим, что $f \in \varphi$ с указанными свойствами уже построены. Тогда из условий 1), 2) и замкнутости всех $\varphi(x)$ следует, что $|U(x) \cap [f(A \setminus U(x))]| = A$ для всех $x \in A$. Множество fA имеет мощность $\aleph_1$, ибо $|A| = \aleph_1$ и $f(x') \neq f(x')$ при $x' \neq x'$ (см. 1) и 2)). Если x^* — точка полного накопления для fA, то найдется счетное множество $A' \subset A$, для которого $x^* \in [fA']$, так как пространство X сепарабельно (а значит имеет счетную тесноту — см. задачу 107 гл. II). Но существует $a^* \subset A$, для которого $a < a^*$ при всех $a \in A'$ (см. 94 гл. I). Тогда $[f(a^*)] \ni x^*$ и $[fA \setminus f(a^*)] \ni x^*$; значит, x^* не является точкой полного накопления для множества fA. Получили противоречие. Укажем, как построить нужные нам f и φ. Существенную роль будут играть следующие простые утверждения: (α) мощность замыкания счетного множества в хаусдорфовом сепарабельном пространстве не превосходит $2^{\aleph_0}$ (126 гл. II); (β) пересечение счетного семейства множеств типа G_δ есть множество типа G_δ; (γ) для любых $x \in X$, $p \in U$ существует непустое замкнутое множество типа G_δ, содержащее p, не содержащее x и лежащее в U (см. 69 гл. III). Предположим, что для $a_0 \in A$ и для всех $a < a_0$ определены уже $f(a)$; $\varphi(a) \subset U$, где $\varphi(a)$ — непустое замкнутое множество типа G_δ и $\varphi(a) \supset \supset \varphi(a')$ при $a < a' < a_1$. Положим $\Phi(a_1) = \bigcap \{\varphi(a')\colon a' < a_1\}$. $F(a_1) = \{f(a')\colon a' < a_1\}$. Имеем $|F(a_0)| \leqslant 2^{\aleph_0}$ (120 гл. II). Так как X — бикомпакт, то $\Phi(a_0)$ — непустое замкнутое множество типа G_δ. Тогда, по предположению, $|\Phi(a_0)| > 2^{\aleph_1}$. Значит, $\Phi(a_1) \setminus F(a_0) \neq \Lambda$. Выберем в $\Phi(a_0) \setminus F(a_0)$ непустое замкнутое множество типа G_δ и примем его за $\varphi(a_0)$ (здесь мы снова воспользовались задачами 69, 70 гл. III). За $f(a_0)$ примем какую-нибудь точку множества $\varphi(a_0)$.

144. Пусть $U \subset X$, U открыто и не пусто, то найдется непустое замкнутое множество F типа G_δ, лежащее в U, для которого $|F| \leqslant 2^{\aleph_1}$ (143 гл. III). Тогда $\{p\} = F \cap (\bigcap \{X \setminus [x]\colon x \in F$ и $x \neq p\})$ для всех $p \in F$. Значит, каждая точка множества F является пересечением не более чем $2^{\aleph_1}$ открытых в X множеств. Но тогда (69 гл. III) для всех $p \in F$ непременно $\chi(p, X) \leqslant 2^{\aleph_1}$.

145. Каково бы ни было непустое открытое множество $U \subset X$, существует замкнутое множество F типа G_δ и мощности, не большей чем $2^{\aleph_1}$, лежащее в U (143 гл. III). Но всякий бикомпакт мощности, не большей чем $2^{\aleph_1}$, тем бы и одной точке удовлетворяет первой аксиоме счетности — в предположении, что $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ (127 гл. III). Следовательно, в F есть точка y типа G_δ в F. Но так как F имеет тип G_δ в X, то $\{y\}$ — множество типа G_δ в X. Значит (68 гл. III), пространство X и точка y удовлетворяют первой аксиоме счетности. При этом $y \in F \subset U$.

146. Ответ авторам не известен.

147. Да, каждый и даже без всяких дополнительных теоретико-множественных предположений. Это недавно доказано Е. Шапировским.

148. Надо применить утверждение задачи 122 гл. I аналогично тому, как это было сделано в решении задачи 101 гл. II.

149. Для каждого непустого открытого в X множества U существует бикомпакт $F \subset U$ такой, что $1 \leqslant |F| \leqslant 2^{\aleph_1}$ и $\chi(F, X) \leqslant \aleph_0$ (145 гл. III). С помощью леммы Куратовского — Цорна (стр. 18) и всего утверждения без труда строится двухиндексное семейство $\mathcal{N}$ непустых бикомпактов счетного

характера в X такое, что $Y = \bigcup \{F: F \in \mathcal{F}\}$ всюду плотно в X и $|F| \leqslant 2^{\aleph_0}$ для всех $F \in \mathcal{F}$. Но раз X удовлетворяет условию Суслина, то $|\mathcal{F}| \leqslant 2^{\aleph_0}$ (см. 148 гл. III). Следовательно, $|Y| \leqslant 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ и из $|Y| = X$ и сепарабельности X следует, что $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$ (128 гл. II).

150. Ответ автором не известен.

151. Это следует из 212 гл. III или из 219 гл. III.

152. В силу задачи 144 гл. III существует точка $y \in X$, характер пространства X в которой не превосходит $2^{\aleph_0}$. Так как X однородно, то мы заключаем, что характер пространства X во всех точках не превосходит $2^{\aleph_0}$. Но в задаче 151 гл. III доказано, что всякий сепарабельный бикомпакт с этим свойством имеет мощность, не большую чем $2^{\aleph_0}$. Если в X есть изолированная точка, то X дискретно, и потому $|X| \leqslant \aleph_1$. Если в X нет изолированных точек, то $|X| \geqslant 2^{\aleph_0}$ (см. 126 гл. III). Вместе с доказанным выше это позволяет заключить, что тогда $|X| = 2^{\aleph_0}$.

153. Рассуждение проводится без каких-либо осложнений по схеме решения задачи 212 или 219 гл. III, вместо $\aleph_1$ фигурирует, разумеется, τ^+. См. также Архангельский [8].

154. Достаточно рассмотреть случай, когда $\tau \geqslant \aleph_0$. Если $\chi(x, X) = \tau$ для всех $x \in X$, то (см. 123 гл. III) $|X| \geqslant 2^\tau \geqslant \tau$ и получается противоречие. Значит, $\chi(x^*, X) < \tau$ для некоторой точки $x^* \in X$. Положим $\tau' = \chi(x_1, X)$. В силу однородности X тогда $\chi(x, X) = \tau'$ при всех $x \in X$. Значит (153 гл. III), $|X| \leqslant 2^{\tau'}$, т. е. $\tau \leqslant 2^{\tau'}$.

155. Следует из задачи 154 гл. III.

156. Отличаясь небольшими и естественно возникающими техническими упрощениями, рассуждение ведется по схеме решения задачи 212 или 219 гл. III. В качестве множества $(A, <)$, вдоль которого ведется построение по индукции, берется любое минимальное вполне упорядоченное множество мощности τ.

157. Да, существует. В самое последнее время эта проблема решена положительно авторами (см., например, Ю х а ш [2]).

158. Каков ответ на этот вопрос — авторам не известно.

160. Действительно, произведение бикомпактных канторовых дисконтинуумов является обобщенным канторовым дисконтинуумом и произведение непрерывных отображений является непрерывным отображением.

161. Действительно, каждый компакт является непрерывным образом канторова совершенного множества (299 гл. III), а последнее гомеоморфно $D^{\aleph_0}$ (301 гл. III).

162. См. 161, 160 гл. III.

163. См. 162 гл. III.

165. Тихоновские кубы веса τ являются дискретными бикомпактами (165 гл. III); любой бикомпакт гомеоморфно вкладывается в один из таких кубов (см. 38 гл. III).

166. Каждый обобщенный канторов дисконтинуум D^τ обладает свойством Суслина в силу задачи 383 гл. II. Очевидно, образ пространства со свойством Суслина при непрерывном отображении тоже обладает свойством Суслина.

167. В силу задачи 391 гл. II λ тогда является непрерывным образом некоторого бикомпакта со счетной базой. Поэтому (111 гл. III) и X обладает счетной базой.

168. Из задачи 391 гл. II следует, что $[\lambda]$ является непрерывным образом некоторого бикомпакта со счетной базой. Следовательно, и $|Y|$ имеет счетную базу (111 гл. III).

169. В силу задач 167 и 168 гл. III достаточно взять любой нормируемый бикомпакт с первой аксиомой счетности (например, сферу окружающего

П. С. Александрова) или любой бикомпакт, не обладающий свойством Суслина, например, $\beta(\omega_1) \setminus \{\omega_1\}$ (см. 90, 84, 184, 185, 186, 187, 188 гл. III, 24 гл. IV).

170. Если $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$, то каждый диадический бикомпакт мощности $2^{\aleph_1}$ удовлетворяет на всюду плотном множестве точек первой аксиоме счетности (127 гл. III). Следовательно, он метризуем в силу задачи 165 гл. III.

171. В силу задачи 145 гл. III X удовлетворяет первой аксиоме счетности в точках всюду плотного множества. Поэтому (168 гл. III) X имеет счетную базу.

172. Да, Архангельский и Пономарев [1] или Архангельский [7].

173. Да, можно утверждать. Проблема решена в самое последнее время Белугиным.

174. Ответ автором не известен.

175. Утверждения 1) — 4) почти очевидны (при этом 2') выпекает из 2) — см. 14 гл. III). Докажем 5) — 7). В $(Z, \mathcal{S}')$ есть дискретное несчетное подпространство — а именно, I. Значит (89 гл. II), в $(Z, \mathcal{S}')$ нет счетной базы. Но $(Z, \mathcal{S})$ сепарабельно, ибо $[Q]_{(Z, \mathcal{S})} = Z$, $|Q| = \aleph_0$. Пространство $(Z, \mathcal{S})$ нетметризуемо, ибо любое сепарабельное метризуемое пространство обладает счетной базой. Если бы $(Z, \mathcal{S}')$ было финально компактно, то из его покрытия открытыми множествами, обладающими счетной базой, можно было бы выделить счетное подпокрытие, что привело бы нас к счетной базе в $(Z, \mathcal{S})$, а это противоречит 6).

176. Достаточно рассмотреть случай, когда X не бикомпактно. По X можно построить T_1-пространство $\tilde{X}$, содержащее X в качестве открытого подпространства, для которого $\tilde{X} \setminus X = \{\xi\}$, причем окрестности точки ξ суть дополнения в $\tilde{X}$ до бикомпактных подмножеств пространства X (все бикомпактные подмножества пространства X замкнуты в нем, так как X удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа). Выведем из наших предположений о пространстве X, что $\tilde{X}$ — хаусдорфово пространство. Пусть $x, y \in \tilde{X}$. Если точки x, y принадлежат X, то в X у них есть непересекающиеся окрестности — они же будут окрестностями этих точек и в $\tilde{X}$, так как X открыто в $\tilde{X}$. Если $y = \xi$, $x \neq \xi$, то $x \in X$ и у точки x найдется окрестность Ox в X, замыкание которой бикомпактно. Тогда $O\xi = X \setminus [Ox]_X$ — окрестность точки ξ, не пересекающаяся с Ox. Легко понять, также, что $\tilde{X}$ бикомпактно.

177. Мы доказали (170 гл. III), что каждое локально бикомпактное хаусдорфово пространство обладает бикомпактным хаусдорфовым расширением. Но такое подпространство бикомпакта вполне регулярно (8 гл. III).

178. Пространство X регулярно, поэтому у любой точки $x \in Y$ существует окрестность Ox, замыкание которой (в X) содержится в Y. Множество $[Ox]$ бикомпактно, т. е. Ox — искомая окрестность.

179. Если X открыто в δX, то X локально бикомпактно (см. 178 гл. III). Докажем обратное утверждение. Положим $F = \delta X \setminus X$; возьмем произвольную точку $x \in X$. У нее есть окрестность Ox, для которой $\Phi = [Ox]_X$ бикомпактно. Множество Φ замкнуто в X и в δX, ибо оно пространство удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа. Положим $G = X \setminus \Phi$. Тогда $G \cup \Phi = X$. Поэтому $[G]_{\delta X} \cup [\Phi]_{\delta X} = [X]_{\delta X} = \delta X$. Но $[\Phi]_{\delta X} = \Phi$ и $[G]_X \cap X = [G]_X \setminus Ox \subset X \setminus \{x\}$. Значит, $x \notin [G]_{\delta X}$ и $[G]_{\delta X} \cup \Phi = \delta X$, т. е. $x \in \delta X \setminus [G]_{\delta X} \subset \Phi = X$ и X — открыто в δX множество.

182. Каждое открытое в X множество U содержит стандартное открытое в X множество $V = \Pi\{U_\alpha: \alpha \in A\}$; здесь $U_\alpha \neq X$ при всех $\alpha \in A$ и $U_\alpha = X_\alpha$ при $\alpha \in A \setminus A^*$, где A^* — некоторое конечное множество. Зафиксируем $\alpha^* \in A \setminus A^*$ и выберем $y_\alpha \in U_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Тогда U содержит замкнутое в X подпространство, гомеоморфное X_{α^*} — таково

$Y^* = X_{\alpha^*} \times \Pi\{\bar{y}_\alpha\colon \alpha \in A \setminus \{\alpha^*\}\}$ (замкнутость множества Y^* в X следует из того, что каждое X_α является T_4-пространством). Но Y^* не бикомпактно; поэтому никакое объемлющее U подпространство пространства X не бикомпактно.

183. Надо сопоставить определения и учесть, что при проектировании произведения на сомножитель бикомпактное подпространство отображается на бикомпактное подпространство (см. 332 гл. II, 91 гл. III).

184. Существует $\alpha \in T(\omega_1)$, для которого $\gamma \subset \bar{T}(\alpha)$. Но $\bar{T}(\alpha)$ — счетный бикомпакт (84 гл. III). Значит, $\bar{T}(\alpha)$ — компакт, т. е. имеет счетную базу и метризуем (105 гл. III), а заключение следует отсюда (см. также 259 гл. III).

185. Из открытого покрытия $\gamma = \{U(x)\colon x \in T(\omega_1)\}$ пространства X нельзя выделить конечного подпокрытия. Другое решение: для множества всех точек пространства $T(\omega_1)$ в $T(\omega_1)$ нет ни одной точки полного накопления.

186. (а) Из $|F_1| = |F_2| = \aleph_1$ следует, что F_1 кофинально $T(\omega_1)$ и F_2 кофинально $T(\omega_1)$. Так как $F_1 \cap F_2 = A$, то можно тогда выбрать такую последовательность $\{\alpha_n\colon \alpha \in N^*\}$ точек из $T(\omega_1)$, чтобы $\alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq \alpha_3 \preceq \ldots \preceq \alpha_{2k} \preceq \alpha_{2k+1} \preceq \ldots$ (в смысле отношения $\preceq$, индуцированного на $T(\omega_1)$) и $\alpha_{2n} \in F_2$, $\alpha_{2n-1} \in F_1$ для всех $n \in N^*$. Пусть α^* — наименьший элемент множества $T(\omega_1)$ такой, что $\alpha_k \preceq \alpha^*$ для всех $k \in N^*$ (см. 91 гл. I). Тогда $\alpha^* \in [\{\alpha_{2n}\colon n \in N^*\}] \subset [F_2] = F_2$ и $\alpha^* \in [\{\alpha_{2n-1}\colon n \in N^*\}] = [F_1] = F_1$. Следовательно, $\alpha^* \in F_1 \cap F_2$, т. е. $F_1 \cap F_2 \neq \Lambda$ — получили противоречие.

(б) Для каждого $\alpha \in T(\omega_1)$ положим $F_\alpha = \{\beta \in T(\omega_1)\colon \alpha \preceq \beta\}$. Из определения топологии в $T(\omega_1)$ следует, что каждое F_α замкнуто. Так как вещественная прямая I — каноническое пространство счетной тесноты, то $f(F_{\alpha'})$ замкнуто в I для каждого $\alpha' \in T(\omega_1)$ (см. 73 гл. VI). Очевидно, если $\alpha' \preceq \alpha''$, то $f(F_{\alpha''}) \subset f(F_{\alpha'})$. Следовательно (105 гл. II), существует $\alpha^* \in T(\omega_1)$ такое, что $f(F_{\alpha^*}) = f(F_\beta)$ при всех β, больших чем α^*. Тогда $\bigcap\{f(F_\alpha)\colon \alpha \in T(\omega_1)\} = f(F_{\alpha^*}) \neq \Lambda$. Поэтому, что $f(F_{\alpha^*})| = 1$. Если $x \neq y$, $x \in f(F_{\alpha^*})$, $y \in f(F_{\alpha^*})$, то $F_x = f^{-1}(x)$, $F_y = f^{-1}(y)$ — непересекающиеся замкнутые множества, конфинальные $T(\omega_1)$, а это противоречит (а).

187. Пусть F_1 и F_2 замкнуты и $T(\omega_1)$ и $F_1 \cap F_2 = \Lambda$. В силу задачи 186 тл. III любые два замкнутых в $T(\omega_1)$ множества мощности $\aleph_1$ пересекаются. Поэтому можно предположить, что $|F_1| \preceq \aleph_0$. Выберем $\alpha_1 \in T(\omega_1)$, для которого $F_1 \subset \bar{T}(\alpha_1) = \{x \in T(\omega_1)\colon x \preceq \alpha_1\}$ (такое α_1 существует — см. 91 гл. I, 84 гл. III). Полагаем $F_2' = F_2 \cap \bar{T}(\alpha_1)$. Подпространство $\bar{T}(\alpha_1)$ открыто-замкнуто в $T(\omega_1)$ и является бикомпактом. Следовательно, $\bar{T}(\alpha_1)$ нормально, и существуют открытые в $\bar{T}(\alpha_1)$ — а следовательно, открытые и в $T(\omega_1)$ — множества U_1 и U_2, для которых $\bar{T}(\alpha_1) \supset U_1 \supset F_1$, $U_2 \supset F_2'$ и $U_1 \cap U_2 = \Lambda$. Положим $U_2 = U_2' \cup \{x \in T(\omega_1)\colon \alpha_1 \prec x\}$. Тогда U_2 открыто в $T(\omega_1)$, $U_2 \supset F_2$ и $U_1 \cap U_2 = \Lambda$.

188. В силу 183 гл. III, если f — такая функция, то найдется $\alpha_1 \in T(\omega_1)$, для которого $f(\alpha) = f(\alpha_1)$ при всех $\alpha \succ \alpha_1$. Но $\bar{T}(\alpha_1) = \{x \in T(\omega_1)\colon x \preceq \alpha_1\}$ — бикомпактное подпространство пространства $T(\omega_1)$ (см. 84 гл. III). Значит, $f | \bar{T}(\alpha_1)$ — ограниченная функция. Следовательно, и f ограничена.

189. (а) Пусть пространство X счетно компактно, а $D \subset X$ — его бесконечное подмножество. Если D не имеет предельных точек в X, то D замкнуто в X и у каждой точки $\delta \in D$ существует окрестность $U\delta$, для которой $U\delta \cap D = \{\delta\}$. Тогда из счетного открытого покрытия, состоящего из построенных окрестностей $U\delta$, $\delta \in D_0$, где $D_1 \subset D$, $|D_1| = \aleph_0$, и еще открытого в X множества $X \setminus D_0$, нельзя выбрать конечного подпокрытия. Получили противоречие.

(б) Обратно, пусть всякое бесконечное множество пространства X имеет предельную в X точку. Пусть $\omega = \{U_i\colon i \in N^*\}$ — счетное открытое покрытие пространства X, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия.

Не нарушая общности, можно считать, что $U_i \subset \bigcup_{j<i}\{U_j\colon j \preceq i\}$ для любого $i \in N^*$. Возьмем для каждого i точку $x_i \in U_i \setminus \bigcup\{U_j\colon j \preceq i\}$. Множество $D = \{x_i\colon i \in N^*\}$ бесконечно, следовательно, имеет в X предельную точку x_0. Рассмотрим первое такое i_0, что $x_0 \in U_{i_0}$. Тогда $x_i \in U_{i_0}$ для всех $i \succ i_0$ (в силу выбора x_i) и, следовательно, точка x_0 не может быть предельной для множества D. Получили противоречие.

190. Таким пространством является $T(\omega_1)$ — это следует из задач 188, 185, 184 гл. III.

192. (а) Пусть пространство X счетно компактно, а $f(x)$ — непрерывная функция на X, т. е. непрерывное отображение пространства X в вещественную прямую R. Образ $Y = fX$ пространства X при отображении f счетно компактен (см. 194 гл. III). Таким образом, $Y = fX$ — счетно компактное подпространство метрического пространства R, а потому бикомпактно и ограничено в R (см. 254, 256 гл. III). Следовательно, $\sup Y \preceq \infty$ и $\inf Y \succ -\infty$, т. е. f — ограниченная функция.

(б) Обратно, пусть нормальное пространство X не является счетно компактным. Тогда в X существует бесконечное счетное подмножество $D \subset X$ без предельных точек (см. 189 гл. III), т. е. D — дискретное подпространство. Тогда можно отобразить D на натуральный ряд N посредством некоторого отображения $f\colon D \to N$. Это отображение является непрерывным отображением замкнутого в X множества D в прямую. Следовательно, так как X нормально, существует непрерывное отображение $\tilde{f}\colon X \to R$, для которого $\tilde{f} | D = f$ (34 гл. III). Функция $\tilde{f}$ не ограничена.

194. (а) $\Rightarrow$ (б). Пусть $\xi = \{F_i\colon i \in N^*\}$ — счетная центрированная система замкнутых в X множеств. Если $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \Lambda$, то система $\{X \setminus F_i\colon i \in N^*\}$ — счетное открытое покрытие пространства X, из которого нельзя (в силу центрированности ξ) выделить конечного подпокрытия.

(б) $\Rightarrow$ (в) очевидно.

(в) $\Rightarrow$ (а). Пусть $\omega = \{U_i\colon i \in N^*\}$ — произвольное счетное открытое покрытие. Рассмотрим замкнутые в X множества $F_i = X \setminus \bigcup_{j=1}^{i} U_j$, $i \in N^*$. Очевидно, $F_{i-1} \subset F_i$, $i \in N^*$. В силу того, что ω — покрытие всего пространства X, выполнено $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{i} U_j\right) = \Lambda$. Но тогда для некоторого i_0 множество $F_{i_0} = X \setminus \bigcup_{j=1}^{i_0} U_j = \Lambda$, т. е. $\{U_1, \ldots, U_{i_0}\}$ — конечное подпокрытие покрытия ω.

196. (а) Пусть X псевдокомпактно, а $\gamma = \{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — локально конечная в X система открытых множеств. Предположим, что γ — бесконечная система. Не нарушая общности, можно считать, что γ — счетная система: $\gamma = \{U_i\colon i \in N^*\}$. Для каждого $i \in N^*$ возьмем точку $x_i \in U_i$ таким образом, чтобы $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, переходя, если нужно, к бесконечной же подсистеме системы γ. Рассмотрим такие непрерывные на X функции f_i, $i \in N^*$, что $0 \preceq f_i(x) \preceq i$ для любой точки $x \in X$, $f_i(x_i) = i$, $f_i(x) = 0$, если $x \notin U_i$ (такие функции существуют вследствие полной регулярности пространства X). Далее рассмотрим функцию $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$. Пусть $x_0 \in X$ произвольно. Так как γ — локально конечная система, то существует окрестность Ux_0 точки x_0 в X, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов из системы γ. Значит, $f(x_0) \preceq \infty$. Пусть $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ — все элементы из γ, с кото-

ранее пересекалась окрестность Ux_0. Тогда $f_i(x_0) = 0$, если $i \neq i_1, i_2, \ldots, i_k$ и $f(x_0) = f_{i_1}(x_0) + f_{i_2}(x_0) + \ldots + f_{i_k}(x_0)$. Кроме того, очевидно, $f(x) = f_{i_1}(x) + \ldots + f_{i_k}(x)$ для любой точки $x \in Ux_0$. Поэтому, если $\varepsilon > 0$ произвольно, то, пользуясь непрерывностью функции $g_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) = f_{i_1}(x) + f_{i_2}(x) + \ldots + f_{i_k}(x)$, берем окрестность $U x_0$ такую x_0, для которой $U x_0 \subset Ux_0$ и $|g_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) - g_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x_0)| < \varepsilon$, если $x \in U x_0$. Тогда и $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, если $x \in U x_0$. Тем самым доказана непрерывность функции $f(x)$ на X. Кроме того, очевидно, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, ибо $f_i(x_i) = i$. Это противоречит псевдокомпактности пространства X.

(б) Пусть f — непрерывная функция на нашем регулярном пространстве X. Для каждого $n \in N^+$ рассмотрим интервал $(n, n+1)$ числовой прямой. Очевидно, система всех таких интервалов локально конечна на числовой прямой. Рассмотрим открытые в X (вследствие того, что f — непрерывная функция) множества $U_n = f^{-1}((n, n+1)) = \{x \in X: n < f(x) < n+1\}$. Система $\gamma = \{U_n: n \in N^+\}$ открытых в X множеств, очевидно, локально конечна в X. Значит, по условию γ конечна. Это означает, что, начиная с некоторого натурального числа $n \in N^+$, всегда $(X \setminus (n, n+1)) = \Lambda$, т. е. f — ограниченная функция. Все доказано.

197. Предположим, что X несвязно, и $\bigcap \{[U]: U \in \xi\} = \Lambda$. Перенумеруем элементы семейства ξ: $\xi = \{U_1, \ldots, U_n, \ldots\}$. Не нарушая общности, можно предположить, что $U_{n+1} \subset U_n$, $n \in N^+$. Так как $\bigcap \{[U_n]: n \in N^+\} = \Lambda$, то $Y = \bigcup \{V_n: n \in N^+\}$, где $V_n = X \setminus [U_n]$. Кроме того, $V_{n-1} \supset V_n$, $n \in N^+$, ибо $U_{n-1} \subset U_n$, $n \in N^+$. Пусть $x_1 \in X$ произвольно. Рассмотрим первое такое $i_0 \in N^+$, чтобы $x_1 \in V_{i_0}$. Тогда $U_{i_0} \cap U_i = \Lambda$ для всех $i \geqslant i_0$, поэтому $V_{i_0} \cap U_i \neq \Lambda$ может быть только для $i < i_0$. Значит, семейство ξ локально конечно в Λ, откуда следует его конечность (см. 186 гл. III). Получаем противоречие с центрированностью семейства ξ.

Обратно, пусть в X для любой счетной центрированной системы ξ открытых в X множеств $\bigcap \{[U]: U \in \xi\} \neq \Lambda$. Докажем псевдокомпактность X. Если X не псевдокомпактно, то в X существует бесконечная локально конечная система γ открытых в X множеств (см. 186 гл. III). Тогда в X существует бесконечная счетная локально конечная система γ открытых множеств $\gamma = \{V_1, \ldots, V_i, \ldots\}$, для которой $V_i \subset V_{i+1}$, $i \in N^+$, и $X = \bigcup \{V_i: i \in N^+\}$. Вследствие локальной конечности системы γ в X только конечное число $V_i \in \gamma$ может обладать свойством $[V_i] = X$. Выбросим такие V_i из γ, если таковые имеются, можем теперь считать, что $[V_i] \neq X$ для любого $i \in N^+$. Тогда $U_i = X \setminus [V_i] \neq \Lambda$. Так как $V_i \subset V_{i+1}$, $i \in N^+$, то $U_i \supset U_{i+1}$, $i \in N^+$, значит, $\xi = \{U_i: i \in N^+\}$ — бесконечная центрированная система. Так как $X = \bigcup \{V_i: i \in N^+\}$, то $\bigcap \{[U_i]: i \in N^+\} = \Lambda$. Пришли к противоречию.

198. Пусть Φ не является счетно компактным. Тогда в Φ существует счетное множество $A = \{a_n: n \in N^+\}$, образующее дискретное подпространство пространства X. По индукции легко строится семейство $\{V_n: n \in N^+\}$ попарно непересекающихся окрестностей точек множества A: $V_n \ni a_n$ (см. 22 гл. III), причем такие, что семейство $\{V_n: n \in N^+\}$ дискретно в X. Последнее означает, что для любой точки $x \in X$ имеется окрестность Ox, которая пересекается не более чем с одним множеством из $\{V_n: n \in N^+\}$ — см. 22 гл. III. Значит, при любом выборе $a_n \in V_n$ множество $\{a_n: n \in N^+\}$ дискретно и замкнуто. Предположим теперь, что задана счетная система $\{G^k: k \in N^+\}$ окрестностей множества F в X. Положим $V_n^k = G^k \cap V_n$. Так как $a_n \in F \subset G^k$ и V_n^k — окрестность точки a_n, то $V_n^k \cap (X \setminus F) \neq \Lambda$. Для каждого $n \in N^+$ выберем $b_n \in V_n^k \cap (X \setminus F)$ и положим $B = \{b_n: n \in N^+\}$. Множество B замкнуто (легко это объяснить) и $B \cap F = \Lambda$. Следовательно, $G = X \setminus B$ — окрестность множества F. Но $G^k \cap (X \setminus G) = G^k \cap$

$\cap B = V_n^k \cap B \neq \Lambda_{n_k}$, т. е. $G^k \supset (X \setminus G) \neq \Lambda$ для всех $k \in N^+$, и следовательно, $\{G^k: n \in N^+\}$ не есть определяющая система окрестностей множества F.

199. Таково, в частности, любое небикомпактное пространство со счетной базой.

200. Предположим противное. Зафиксируем для каждого $x \in X$ какую-нибудь окрестность Ox, для которой $|Ox \cap A| \leqslant \aleph_1$. Из покрытия $\gamma = \{Ox: x \in X\}$ пространства A можно выделить счетное подпокрытие λ. Тогда $A \subset \bigcup \{U \cap A: U \in \lambda\}$ и $|\lambda| \leqslant \aleph_0$, $|U \cap A| \leqslant \aleph_1$. Следовательно, $|A| \leqslant \aleph_1 \cdot \aleph_0 = \aleph_1$. Получили противоречие.

201. Да. В качестве примера годится любое регулярное счетное пространство без первой аксиомы счетности — см. 115 гл. II.

204. Так как нижнее сепарабельное пространство удовлетворяет условию Суслина, то годится пространство $(Z, \mathcal{S})$ из задачи 175 гл. III.

205. Такого пространство $(Z, \mathcal{T})$ из задачи 175 гл. III.

206. (а) 1) $\to$ 2). Пусть $U \subset X$ открыто. Так как X совершенно нормально, то $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, где F_i замкнуты в X, следовательно, финально компактны. Отсюда следует (в силу задачи 205 гл. III) финальная компактность подпространства U.

(б) 2) $\to$ 3). Пусть γ — произвольная система открытых в X множеств. Рассмотрим открытое в X множество $\widetilde{\gamma} = \bigcup \{U: U \in \gamma\}$, которое, в силу условия 2), является финально компактным подпространством. Поэтому из системы γ можно выделить счетную подсистему γ_0, для которой $\widetilde{\gamma}_0 = \bigcup \{U: U \in \gamma_0\} = \widetilde{\gamma}$.

(в) 3) $\to$ 4). Пусть $A = Y$ — произвольное подпространство пространства X. Рассмотрим произвольное покрытие γ множества A открытыми в X множествами. Из системы γ (в силу условия 3)) выделим счетную подсистему $\gamma_0 \subset \gamma$, для которой $\widetilde{\gamma}_0 = \bigcup \{U: U \in \gamma_0\} = \widetilde{\gamma} = \bigcup \{U: U \in \gamma\}$. Тогда γ_0 — счетное подпокрытие покрытия γ подпространства A.

(г) 4) $\to$ 1). Пусть $\Gamma = Y$ — произвольное открытое в X множество. Рассмотрим покрытие γ подпространства Γ открытыми в X множествами так, чтобы $[U] \subset \Gamma$ для всякого $U \in \gamma$ (такое покрытие множества Γ существует, ибо X регулярно, а Γ открыто в X). Пользуясь финальной компактностью подпространства Γ (условие 4)), из γ выделим счетное подпокрытие γ_0 этого подпространства. Тогда $|\gamma_0| \leqslant \aleph_1$ и $\Gamma = \bigcup \{[U]: U \in \gamma_0\}$, т. е. Γ имеет тип F_σ. Следовательно, пространство X совершенно нормально.

207. Следует из задачи 206 гл. III.

208. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где X_i, $i \in N^+$, — финально компактные подпространства. Возьмем произвольное открытое покрытие ω пространства X. Рассмотрим систему $\omega_i = \{U \in \omega: U \cap X_i \neq \Lambda\}$, покрывающую подпространство X_i. Выделим из покрытия ω_i подпространства X_i счетное подпокрытие ω_i^0. Тогда $\omega^0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i^0$ покрывает все пространство, $\omega^0 \subset \omega$ и $|\omega^0| \leqslant \aleph_0$.

209. (а) Заметим, что A открыто в I^*, а $I^* \setminus A$ замкнуто в I^*. Кроме того, подпространство A дискретно — все это следует из определения пространства. Если Γ — интервал или полуинтервал на отрезке I, то его замыкание $[U]_{I^*}$ в топологии пространства I^* является одним из отрезков $[U]_I$ (это обстоятельство очень легко усмотреть, если помнить определение топологии пространства I^*). Из всего сказанного элементарно следует регулярность пространства I^*.

(б) Прежде чем доказывать финальную компактность, заметим, что в пространстве I^τ базу топологии образует система, состоящая из всевозможных интервалов отрезка $[0, 1]$, полуинтервалов вида $[0, \alpha)$ и $(\beta, 1]$, $\alpha \in I$, $\beta \in I$, и одноточечных множеств $\{x\}$, $x \in A$. Эту базу топологии пространства I^τ обозначим через σ. Поэтому для доказательства финальной компактности пространства I^τ достаточно выбрать счетное подсемейство из любого покрытия пространства I^τ элементами базы σ. Пусть ω — произвольное покрытие пространства I^τ элементами базы σ. Рассмотрим подпространство $I \setminus A$ пространства I^τ. Это подпространство имеет ту же топологию, что и топология $I \setminus A$ как подпространства числовой прямой. Следовательно, $I \setminus A$ как подпространство и I^τ имеет счетную базу, значит, финально компактно (см. 77 гл. II). Пусть $\omega_1 \subset \omega$ — счетная подсистема, покрывающая множество $I \setminus A$. Множество $V = \bigcup \{U: U \in \omega_1\}$ открыто как в обычной топологии отрезка I, так и в I^τ. Множество $F = I \setminus V$ бикомпактно в топологии отрезка и, поэтому, $F \subset A$. Так как A вполне несчетно, то $F \leqslant \aleph_1$. Поэтому нашу систему ω_1 до системы ω', $\omega' \subset \omega$, одноточечными множествами $\{x\}$, $x \in F$. Очевидно, $|\omega'| \leqslant \aleph_1$, ω' и ω' — покрытие пространства I^τ. Финальная компактность пространства доказана.

(б') Нормальность I^τ следует из его регулярности и финальной компактности (19 гл. III).

(в) Для того чтобы построить точечно счетную базу в I^τ, надо взять счетную базу σ_1 отрезка I в естественной топологии, рассмотреть систему σ_2 одноточечных множеств $\{x\}$, $x \in A$. Тогда $\sigma_3 = \sigma_1 \cup \sigma_2$ есть искомая база пространства I^τ.

(г), (д), (е) и (ж) следуют из того, что в I^τ имеется нигде не плотное совершенное подпространство, а именно A (см. при этом 99 и 219 гл. II, 206 гл. III).

210. На плоскости рассмотрим круг K. Пусть C — ограничивающая его окружность. Внутренность круга K обозначим через O,— таким образом, $O = K \setminus C$. Определим нашу топологию на множестве K следующим образом. Базу в точках множества O образуют множества, открытые в обычной топологии. Произвольную окрестность произвольной точки $x \in C$ получим, проведя как-нибудь из x две хорды xy' и xy'' (где $y' \in C$ и $y'' \in C$) и взяв W — дополнение в круге K до множества всех его точек, лежащих внутри или на границе угла $y'xy''$ и пересечение множества $W \cup \{x\}$ с произвольной окрестностью точки x в обычной топологии. Легко проверяется (непосредственно), что получилось регулярное пространство. Топология, индуцированная на C и O из этого пространства, совпадает с обычной для C и O топологией — это тоже легко. Следовательно (141 гл. II), построенное пространство K имеет счетную сеть. Значит, оно нормально (19 гл. III), финально компактно (143 гл. II) и даже совершенно нормально. Выделим теперь в C какое-нибудь вполне несовершенное подмножество C_0, $|C_0| \geqslant \aleph_1$ (см. 235 гл. III). Вильмем такое счетное между плотное в O множество $O_1 \subset O$. Рассмотрим множество $X = C_0 \cup O_1$ вместе с топологией, индуцированной из K. Пространство X имеет счетную сеть, удовлетворяет первой аксиоме счетности, каждый бикомпакт, лежащий в нем, счетен, но само X несчетно и не имеет счетной базы — последнее следует из рассмотрения топологии в точках C_0 и несчетности C_0. Как подпространство нашего регулярного пространства, X вполне регулярно. Так как счетный бикомпакт в любом пространстве с первой аксиомой счетности имеет счетный характер (72 гл. III), характер любого бикомпакта в X счетен. Но X не складывается в совершенно нормальный бикомпакт, как пространство со счетной сетью и без счетной базы (228 гл. III).

211. Положим $\gamma = |\{\gamma_{\overline{x}}: x \in F\}$. Для любого $y \in X \setminus F$ найдется $\lambda \subset \gamma$ такое, что $P \subset \bigcup \{U: U \in \lambda\} \subset X \setminus \{y\}$,— ведь X является T_1-пространством. Но F само финально компактно, как замкнутое подпространство

финально компактного пространства. Следовательно, найдется $\lambda_y \subset \lambda$, для которого $P \subset \bigcup \{U: U \in \lambda_y\} \subset X \setminus \{y\}$ и $|\lambda_y| \leqslant \aleph_0$. Зафиксируем также λ_y для каждого $y \in X \setminus F$ и положим $G_0 = \bigcup \{U: U \in \lambda_0\}$. Тогда, очевидно, $\bigcap \{G_y: y \in X \setminus P\} = F$. С другой стороны, λ_0 является счетным подсемейством семейства γ, а мощность γ не превосходит $2^{\aleph_0}$. Так как мощность множества всех счетных подсемейств семейства мощности $2^{\aleph_0}$ имеет тоже мощность $2^{\aleph_0}$, то различных λ_y имеется не более чем $2^{\aleph_0}$. Доказательство закончено.

212. Зафиксируем минимально вполне упорядоченное множество $(A, \prec)$ мощности $\aleph_1$ и множество M мощности $2^{\aleph_0}$. Пусть $Q(a)$ для каждого $a \in A$ — множество всех отображений множества $\overline{I}(a) = \{a' \in A: a' \preccurlyeq a\}$ в M. Если $f' \in Q(a')$ и $f'' \in Q(a'')$, где $a' \preccurlyeq a''$, $a' \neq a''$ и сужение f'' на $\overline{I}(a')$ равно f', то будем писать $f' \prec f''$, а также $f' = (f'', a')$. Положим $Q = \bigcup \{Q(a): a \in A\}$. Если $f \in Q(a)$, то скажем, что длина f равна a, и напишем $l(f) = a$. Через $\mathcal{E}$ обозначим множество всех отображений A в M. Если $\varphi \in \mathcal{E}$ и $a \in A$, то $\langle \varphi, a \rangle$ есть сужение отображения φ на $\overline{I}(a)$, значит, $\langle \varphi, a \rangle \in Q(a)$. Далее $\mathcal{F}$ — семейство всех замкнутых в X множеств, ξ — некоторый фиксированный выбор, в силу которого каждому непустому $P \subset X$ соответствует одноточечное подмножество $\xi(P) = \{x\} \subset P$. Позволим себе писать при $P = x$, $\xi(P) = x$. Положим также $\xi(\Lambda) = \Lambda$. Для всех тех $R \subset X$, для которых это возможно, зафиксируем замкнутые в X множества R_m, где $m \in M$, так, чтобы было $R = \bigcup \{R_m: m \in M\}$. Множество всех $R \subset X$, для которых представление (1) определено, обозначим через $\mathcal{R}$. Можно при этом считать, что в (1), если $|R| > 1$, то $R_m \neq R$ для всех $m \in M$ (здесь нужна аксиома отделимости Хаусдорфа).

Замечание (II): если F замкнуто в X и Φ замкнуто в X, причем $|\Phi| \leqslant 2^{\aleph_0}$ (например, $\Phi = A$), то $F \setminus \Phi \in \mathcal{R}$ (это вытекает из 211 гл. III в силу предложения о характере точек в X). Теперь надо рассмотреть отображение $\psi: Q \to \mathcal{F}$ со следующими свойствами. (III) Если $f' \prec f''$, то $\psi(f') \supset \psi(f'')$ и если, кроме того, $|\psi(f')| > 1$, то $\psi(f') \neq \psi(f'')$. (IV) Для всех $f \in Q$ справедливо $|\eta(f)| \cap \psi(f) = \Lambda$ — здесь и в дальнейшем $\eta(f) = \bigcup \{\psi(f'): f' \prec f\}$. (V) Для каждого $a \in A$ имеет место $X = \bigcup \{\eta(f)\} \cup \bigcup \psi(f): f \in Q(a)\}$. Заметим, что $|Q(a)| \leqslant 2^{\aleph_0}$ и $|\eta(f)| \leqslant \aleph_0$. Поэтому $|Q| \leqslant 2^{\aleph_0}$ и $|\eta(f)| \leqslant 2^{\aleph_0}$ (см. 126 гл. II). Следовательно, $|X \setminus \bigcup \{\eta(f): f \in Q\}| \leqslant 2^{\aleph_0}$. Соотношение (IV) можно будет дополнить так: (IV') для любого $f \in Q$ справедливо $\psi(f) \setminus [\eta(f)] = \bigcup \{\psi(f'): f \prec f' \text{ и } l(f') = l(f) + 1\}$. Отображение ψ легко строится по индукции вдоль $(A, \prec)$ — совершенно аналогично 211 гл. III. Если 0 — первый элемент A, то для всех $f \in Q(0)$ по-прежнему $\eta(f) = X$. Пусть отображение ψ определено пока на множестве $\bigcup \{Q(a): a < a^*, a \neq a^*\}$. Для произвольного $f \in Q(a^*)$ пусть $F' = \bigcap \{\psi(f'): f' \prec f\}$, $R' = F' \setminus [\eta(f)]$ (где $\eta(f)$ определено в согласии с (IV')). Так как $|\eta(f)| \leqslant 2^{\aleph_0}$, то $R' \subset \mathcal{R}$. Положим $\psi(f) = R'$. Определение ψ завершено. Читатель не встретит трудностей, проверяя, что соотношения (III), (IV), (IV') и (V) выполняются. Предположим, что $|X| > 2^{\aleph_0}$. Тогда существует $x^* \in X \setminus (\bigcup \{\eta(f): f \in Q\} \cup \bigcup \{\psi(f): |\psi(f)| \leqslant 1 \text{ и } f \in Q\})$. Из (IV') следует, что можно (по индукции вдоль $(A, \prec)$) так выбрать $f_a \in Q(a)$ для каждого $a \in A$, чтобы было $f_{a'} \prec f_{a''}$, если $a' \preccurlyeq a''$, $a' \neq a''$ и $\psi(f_a) \ni x^*$ при всех $a \in A$. Положим $\psi(f_a) = F_a$. В силу выбора x^* будем иметь $|F_a| > 1$ при всех $a \in A$, и из (III) следует теперь, что $F_{a'} \supset F_{a''}$, $F_{a'} \neq F_{a''}$, когда $a' \preccurlyeq a''$, $a' \neq a''$, значит, для каждого $a \in A$ определен элемент $x_a = \xi(F_a \setminus F_{a+1}) \in F_a$ (здесь, как обычно, $a + 1$ — первый относительно $\preccurlyeq$ элемент множества A, больший чем a). Для каждого $a_1 \in A$ либо $\{x_a: a \preccurlyeq a_1\} = \eta(f_{a_1})$, если у a_1 нет

непосредственно предшествующего элемента, либо $\{x_\alpha: \alpha \prec \alpha_0\} = \eta(U_{\alpha_0}) \cup x_{\alpha_0}$, если $\alpha_0 = \alpha' + 1$ для некоторого $\alpha' \in A$. Но, в силу (IV), $[\eta(U_{\alpha_0})] \cap F_{\alpha_0} = \Lambda$. Так как $x_{\alpha'} \in F_{\alpha_0}$, то мы заключаем, что всегда $[\{x_\alpha: \alpha \preccurlyeq \alpha_0\}] \cap F_{\alpha_0} = \Lambda$. Но при $\alpha_1 \preccurlyeq \rho$ непременно $x_\alpha \in F_{\alpha_1}$ и F_{α_1} замкнуто в X. Значит, для всех $\alpha_1 \subset A$ имеет место (VI) $[\{x_\alpha: \alpha \prec \alpha_1\}] \cap [\{x_\alpha: \alpha_1 \preccurlyeq \alpha\}] = \Lambda$. Очевидно, $|\{x_\alpha: \alpha \in A\}| = \aleph_1$. Так как X финально компактно, то в X есть точка полного накопления для множества $\{x_\alpha: \alpha \in A\}$ (200 гл. III). Обозначим некоторую такую точку через y^*. Тогда, так как X сепарабельно, то существует счетное множество $A' \subset A$, для которого $y^* \in [\{x_\alpha: \alpha \in A'\}]$ (см. 30, гл. II). Найдется (31 гл. I) $\alpha^* \in A$, для которого $\alpha \preccurlyeq \alpha^*$ при всех $\alpha \in A'$. Имеем теперь $y^* \in [\{x_\alpha: \alpha \in A'\}] \subset [\{x_\alpha: \alpha \preccurlyeq \alpha^*\}]$, а потому (см. (V)) $y^* \in [\{x_\alpha: \alpha^* \prec \alpha\}]$, но это означает, так как множество $\{x_\alpha: \alpha \preccurlyeq \alpha^*\}$ счетно, что y^* не является точкой полного накопления для $\{x_\alpha: \alpha \in A\}$ — получили противоречие.

Если X регулярно, то возможно другое решение этой задачи, вытекающее из задачи 219 гл. III. Требование $\chi(x, X) \preccurlyeq 2^{\aleph_0}$ можно заменить на требование $\psi(x, X) \preccurlyeq 2^{\aleph_0}$.

213. Это частный случай утверждения задачи 212 гл. III.

214—215. Ответ авторам не известен.

216. Решение аналогично задаче 45 гл. III.

217. Пусть σ — база пространства Y, для которой $|\sigma| = \tau \geqslant \aleph_0$. Через Σ обозначим систему множеств пространства Y, являющихся пересечением не более чем счетного числа элементов базы σ. Так как $|\sigma| = \tau \geqslant$ допустимое кардинальное число, то $|\Sigma| = \tau^{\aleph_0} = \tau$. Теперь для каждого непустого множества $B \subset \Sigma$ возьмем некоторую точку $s(B) \in \bar{f}^{-1}B$. Обозначим $M = \{s(B): B \in \Sigma,\ B \neq \Lambda\}$. Ясно, что $|M| = \tau$. Рассмотрим замкнутое в X множество $F = [M]_X$. Ясно, что $s(F) \preccurlyeq \tau$. Докажем, что $fF = Y$. Прежде всего заметим, что множество fM всюду плотно в Y, значит, и Y всюду плотно в множестве fF. Пусть теперь $y_0 \in Y$ — произвольная точка, а $\sigma_{y_0} = \{V \in \sigma: y_0 \in V\}$. Ясно, что $\sigma_{y_0} = \sigma$, $|\sigma_{y_0}| \preccurlyeq \tau$ и σ_{y_0} — база в точке y_0. Кроме того, понятно, что $f^{-1}y_0 = \bigcap \{f^{-1}V: V \in \sigma_{y_0}\}$. Так как Y регулярно, а отображение f непрерывно, то

(1) $$f^{-1}y_0 = \bigcap \{f^{-1}V: V \in \sigma_{y_0}\} = \bigcap \{[f^{-1}V]_X: V \in \sigma_{y_0}\}.$$

Для доказательства равенства $fF = Y$ надо доказать, что $f^{-1}y_0 \cap F \neq \Lambda$ для любой точки $y_0 \in Y$. Для этого мы покажем, что система замкнутых множеств $\{([f^{-1}V]_X \cap F): V \in \sigma_{y_0}\}$ счетно центрирована. Действительно, рассмотрим произвольное счетное подсемейство $\gamma = \{[f^{-1}V_i]_X: i \in \mathcal{N}\} \subset \{[f^{-1}V]_X: V \in \sigma_{y_0}\}$. Так как $\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i \neq \Lambda$ (ибо $y_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i$, $V_i \in \sigma$, $i \in \mathcal{N}$), то имеется точка $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i\right) \cap M = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}V_i\right) \cap M$, откуда следует, что

(2) $$\bigcap_{i=1}^{\infty} [f^{-1}V_i]_X \cap F \neq \Lambda.$$

Итак, система замкнутых в X множеств $\{([f^{-1}V]_X \cap F): V \in \sigma_{y_0}\}$ счетно центрирована. Так как X финально компактно (см. 216 гл. III), то

(3) $$\bigcap \{([f^{-1}V]_X \cap F): V \in \sigma_{y_0}\} \neq \Lambda.$$

Из (3) и (1) тогда и следует, что $f^{-1}y_0 \cap F \neq \Lambda$.

218. Так как $s(F_\lambda) \preccurlyeq \tau$, а X удовлетворяет условию (б), то $|F_\lambda| \leqslant \mathfrak{c}$ для каждого $\lambda \in A$. Рассмотрим множество

(1) $$\Phi = \bigcup \{F_\lambda: \lambda \in A\}.$$

Понятно, что $|\Phi| \leqslant \mathfrak{c}$. Замкнутость множества Φ в X. Пусть $x_0 \in [\Phi]_X$. Так как X удовлетворяет условию (а), то найдется $\Phi' \subset \Phi$, для которого $|\Phi'| \preccurlyeq \aleph_1$ и $x_0 \in [\Phi']_X$. Тогда найдется такое $\lambda_0 \in A$, что $\Phi' \subset F_{\lambda_0}$, а следовательно, так как F_{λ_0} замкнуто, $x_0 \in F_{\lambda_0} \subset \Phi$. Итак, множество Φ замкнуто в X. Мы докажем теперь, что

(2) $$\Phi = X.$$

Пусть $x_0 \in X$ произвольно. Из условия 2) задачи следует, что

(3) $$f_\lambda^{-1}f_\lambda x_0 \cap F_\lambda \neq \Lambda \quad \text{для любого} \quad \lambda \in A.$$

Тогда и подавно

(4) $$\Phi_\lambda = f_\lambda^{-1}f_\lambda x_0 \cap \Phi \neq \Lambda \quad \text{для любого} \quad \lambda \in A.$$

Из 5) следует, что $\Phi_\lambda \subset \Phi_{\lambda'}$, если $\lambda \prec \lambda'$. В частности, получаем, что система $(\Phi_\lambda: \lambda \in A)$ непустых замкнутых в X множеств счетно центрирована. Так как X финально компактно (см. 216 гл. III), то

(5) $$\bigcap \{\Phi_\lambda: \lambda \in A\} = \bigcap \{f_\lambda^{-1}f_\lambda x_0 \cap \Phi): \lambda \in A\} \neq \Lambda.$$

Пусть $x' \in \bigcap \{\Phi_\lambda: \lambda \in A\}$. Тогда $x' \in \Phi$ и

(6) $$f_\lambda x' = f_\lambda x_0$$

для любого $\lambda \in A$. Поэтому $x' \in F_{\lambda_0}$ для некоторого $\lambda_0 \in A$. Возьмем $\lambda_1 \geqslant \lambda_0$. Вследствие условия 4) получаем $f_{\lambda_1}^{-1}f_{\lambda_1}F_{\lambda_0} = F_{\lambda_0}$, следовательно, $f_{\lambda_1}^{-1}f_{\lambda_1}x' \subset F_{\lambda_0}$, ибо $x' \in F_{\lambda_0}$. Так как (вследствие равенства (6)) $f_{\lambda_1}x' = f_{\lambda_1}x_0$, то $x_0 \in f_{\lambda_1}^{-1}f_{\lambda_1}x' \subset \subset F_{\lambda_0} = \Phi$, ибо $f_{\lambda_1}^{-1}f_{\lambda_1}x' = f_{\lambda_1}^{-1}f_{\lambda_1}x_0$. Итак, $x_0 \in \Phi$. Тем самым мы доказали равенство (2). Так как $|\Phi| \leqslant \tau$, то и $|X| \leqslant \tau$. Все доказано.

219. Сведем это утверждение к утверждению задачи 215 гл. III. Воспользовавшись полной регулярностью пространства X (само пространство даже нормально, см. 19 гл. III), поставим в соответствие каждой точке $x \in X$ такую систему $\theta(x)$ открытых в X множеств, что $|\theta(x)| \leqslant \tau$, $\{x\} = \bigcap \{U: U \in \theta(x)\}$, $X \setminus U$ — вполне изолированно при любом $U \in \theta(x)$. Далее зафиксируем некоторое вполне упорядоченное множество A мощности $|A| = \aleph_1$. Пусть α^* — первый элемент этого множества. Рассмотрим пространство Y_0, $wY_0 \leqslant \mathfrak{c}$, и непрерывное отображение $f_0: X \xrightarrow{\text{на}} Y_0$ (например, в качестве f_0 можно взять любую непрерывную на X функцию, тогда Y_0 — подпространство числовой прямой). Воспользовавшись тем, что $\mathfrak{c}^{\aleph_1} = \mathfrak{c}$, и леммой 217 гл. III, будем называть в X множество F_α, для которого $s(F_\alpha) \preccurlyeq \mathfrak{c}$ и $f_0[F_\alpha] = Y_0$. Предположим теперь, что для каждого $\alpha \in A$, $\alpha \prec \alpha^*$, $\alpha^* \in A$ построены такие пространства Y_α, $wY_\alpha \leqslant \mathfrak{c}$, непрерывные отображения $f_\alpha: X \xrightarrow{\text{на}} Y_\alpha$, замкнутые в X множества F_α, что выполняются условия 1) — 5) из задачи 215 гл. III. Рассмотрим множество $M_{\alpha^*} = \bigcup \{F_\alpha: \alpha \prec \alpha^*\}$ и систему $\theta(M_{\alpha^*}) = \bigcup \{\theta(x): x \in M_{\alpha^*}\}$. Так как $s(F_\alpha) \preccurlyeq \mathfrak{c}$, то по условию (б) получим $|F_\alpha| \leqslant \mathfrak{c}$ для любого $\alpha \prec \alpha^*$. Тогда $|M_{\alpha^*}| \leqslant \mathfrak{c}$, ибо множество M_{α^*} является объединением счетного семейства $\{F_\alpha: \alpha \prec \alpha^*\}$ множеств M_α мощности $|M_\alpha| \leqslant \mathfrak{c}$. По тогда $|\theta(M_{\alpha^*})| \leqslant \tau$, ибо $|M_{\alpha^*}| \leqslant \mathfrak{c}$ и $|\theta(x)| \leqslant \mathfrak{c}$ для любой точки $x \in M_{\alpha^*}$. Для каждого $U \in \theta(M_{\alpha^*})$ зафиксируем непрерыв-

ную на X функцию $g_U\colon X \to I_\tau$, для которой $X \setminus U = g_U^{-1}(0)$. Ясно, что $g_U(U)$ открыто в $g_U X$ и $U = g_U^{-1} g_U U$. Рассмотрим диагональное отображение f_{α^*} пространства X для семейства функций $\{g_U\colon U \in \mathcal{O}(M_{\alpha^*})\}$ и семейства отображений $\{f_\alpha\colon \alpha \preceq \alpha^*\}$. Так как $|\mathcal{O}(M_{\alpha^*})| \leqslant \mathfrak{c}$, а $|\{f_\alpha\colon \alpha \preceq \alpha^*\}| \leqslant \aleph_0$ и $w Y_\alpha \leqslant \tau$, то $w(\Pi\{I_U\colon U \in \mathcal{O}(M_{\alpha^*})\} \times \Pi\{Y_\alpha\colon \alpha \preceq \alpha^*\}) \leqslant \mathfrak{c}$, следовательно, $w Y_{\alpha^*} \leqslant \mathfrak{c}$, где $Y_{\alpha^*} = f_{\alpha^*}(X)$. Кроме того, $f_{\alpha^*} U$ открыто в Y_{α^*} и $f_{\alpha^*}^{-1} f_{\alpha^*} U = U$ для любого $U \in \mathcal{O}(M_{\alpha^*})$. Поэтому $f_{\alpha^*}^{-1} f_{\alpha^*} x = x$, если $x \in M_{\alpha^*}$. Точно так же $f_\alpha^{-1} f_{\alpha^*} x = f_\alpha^{-1} f_\alpha x$ для любой точки $x \in X$, если $\alpha \preceq \alpha^*$. Итак, выполнены следующие условия: 4) $f_\alpha^{-1} f_{\alpha^*} P_\alpha = P_\alpha$, если $\alpha \preceq \alpha^*$, и 5) $f_{\alpha^*}^{-1} f_{\alpha^*} x = f_\alpha^{-1} f_\alpha x$ для любой точки $x \in X$ и любого $\alpha \preceq \alpha^*$. Воспользуемся задачей 217 гл. III, возьмем замкнутое в X множество P_{α^*}, для которого 1) $\chi(P_{\alpha^*}) \leqslant \mathfrak{c}$, 2) $f_{\alpha^*}(P_{\alpha^*}) = Y_{\alpha^*}$. Проверим выполнение условия 3). Действительно, если $x \in M_{\alpha^*}$, то $f_{\alpha^*}^{-1} f_{\alpha^*} x = x$; поэтому если $f_{\alpha^*}(P_{\alpha^*}) = Y_{\alpha^*}$, то $M_{\alpha^*} \subset P_{\alpha^*}$. Значит, 3) $P_\alpha \subset P_{\alpha^*}$, если $\alpha \preceq \alpha^*$. Итак, для всякого $\alpha \in (A, \preceq]$ построены пространство Y_α, $w Y_\alpha \leqslant \tau$, непрерывное отображение $f_\alpha\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y_\alpha$, замкнутое в X множество P_α таким образом, что выполнены все условия задачи 216 гл. III, поэтому вследствие утверждения этой задачи получаем $|X| \leqslant \mathfrak{c}$. Доказательство завершено.

Другое занятное дает повторение рассуждения из решения задачи 212 гл. III; причем требование регулярности может при этом быть ослаблено до требования хаусдорфовости.

220. Следует из 130 гл. II и 213 гл. III или 212 гл. III.

221. Действительно, любое гиперпространство совершенно нормального бикомпакта финально компактно (206 гл. III). Но все метризуемые финально компактные пространства обладают счетной базой (213 гл. II).

222. Ответ автору не известен.

223. Действительно, характер и псевдохарактер замкнутого множества в бикомпакте всегда совпадают (68 гл. III).

225. Это утверждение — частный случай аналитичного утверждения о всех бикомпактах, удовлетворяющих первой аксиоме счетности (см. 213 гл. III и 220 гл. III). Прямое (и оригинальное) доказательство дали в книге Александрова и Урысона [1].

226. Действительно, $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$ (см. 225 гл. III). Поэтому вес X тоже не превосходит $2^{\aleph_0}$ (107 гл. II). Пусть $\mathcal{B}$ — база X, для которой $|\mathcal{B}| \leqslant 2^{\aleph_0}$. Можно, не ограничивая общности, считать, что объединение любого счетного множества элементов базы $\mathcal{B}$ снова является ее элементом. Тогда каждому замкнутому в X множеству F можно поставить в соответствие некоторое счетное семейство γ_F элементов базы $\mathcal{B}$ так, чтобы было $F = \cap\{U\colon U \in \gamma_F\}$. При этом из $F_1 \neq F_2$, очевидно, следует, что $\gamma_{F_1} \neq \gamma_{F_2}$. Значит, мы взаимно однозначно отобразили множество всех замкнутых подмножеств пространства X в множество всех счетных подмножеств множества мощности $2^{\aleph_0}$. А последнее само имеет мощность $2^{\aleph_0}$ (см. 93 гл. I).

227. Нет, не существует. Филиппов [1] построил $2^{\mathfrak{c}}$ попарно не гомеоморфных совершенно нормальных бикомпактов. А мощность множества всех замкнутых подмножеств любого фиксированного совершенно нормального бикомпакта не превосходит $2^{\aleph_0}$ (226 гл. III).

228. Можно считать, что $\tau \geqslant \aleph_1$. Положим $\mathcal{F} = \{[P]\colon P \in \mathcal{P}\}$. Так как X регулярно, то для каждой точки $x \in V$ и каждого открытого в X множества U, не содержащего x, найдется $F \in \mathcal{F}$ такое, что $x \in \Gamma \subset U$. Зафиксируем теперь для каждого $F \in \mathcal{F}$ счетную определяющую систему γ_F окрестностей

в X (см. стр. 53) и положим $\gamma = \cup\{\gamma_F\colon F \in \mathcal{F}\}$. Тогда $|\gamma| \leqslant \max(\aleph_0, \tau) = \tau$ и существует $V \in \gamma_F \subset \gamma$, для которого $x \in F \subset V \subset U$. Так как точка x и окрестность U были выбраны произвольно, это означает, что γ — внешняя база пространства X в X.

229. В самом деле, каждое подпространство совершенно нормального бикомпакта финально компактно (206 гл. III). Следовательно, все метризуемые подпространства совершенно нормальных бикомпактов имеют счетную базу. Но сумма счетного множества пространств со счетной базой имеет счетную сеть. Следовательно, X обладает счетной сетью. Но тогда X имеет и счетную базу (226 гл. III).

230. Ясно, что $\tilde{\mathcal{T}}$ — топология на X и что $(X, \tilde{\mathcal{T}})$ удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа (ведь $\mathcal{T} \subset \tilde{\mathcal{T}}$). Очевидно, каждое счетное множество замкнуто в $(X, \tilde{\mathcal{T}})$. Следовательно, в $(X, \tilde{\mathcal{T}})$ тем более сходящаяся последовательность. С другой стороны, никакая точка пространства $(X, \tilde{\mathcal{T}})$ не изолирована (так как $|U| \geqslant \aleph_1$ для всех непустых $U \in \mathcal{T}$). Следовательно, $(X, \tilde{\mathcal{T}})$ не удовлетворяет первой аксиоме счетности. Но псевдохарактер пространства $(X, \tilde{\mathcal{T}})$ равен $\aleph_0$, ибо $\mathcal{T} \subset \tilde{\mathcal{T}}$, а $(X, \mathcal{T})$ удовлетворяет первой аксиоме счетности. Из 0) и всего рассуждения следует также, что $t(X) \geqslant \aleph_0$. Кроме того, из 0) и 4) сразу вытекают соотношения 9), 7) и 8). Утверждение 1) следует из 3) (см. 206, 207 гл. III), значит, остается доказать 2), 3), 5), 10). Но 2) прямо следует из 0) — каждое счетное подмножество A множества Y замкнуто в Y (наделенном топологией, индуцированной из $(X, \tilde{\mathcal{T}})$) и открытое в Y множество $Y \setminus A$ не пусто (так как $|Y| \geqslant \aleph_1 > |A|$) и не содержит точек множества A. Доказано 2).

Пусть даны произвольное семейство элементов $\tilde{\mathcal{T}}$, γ, т. е. семейство вида $\xi = \{U_\alpha \setminus A_\alpha\colon \alpha \in M\}$. Положим $Y = \cup\{F\colon F \in \xi\}$. Рассмотрим семейство $\eta = \{U_\alpha\colon \alpha \in M\}$ и положим $\tilde{Y} = \cup\{F\colon F \in \eta\}$. Тогда $\tilde{Y} \supset Y$ и, кроме того, так как $U_\alpha \in \mathcal{T}$ для всех $\alpha \in M$, то существует счетное множество $M' \subset M$, для которого $\cup\{U_\alpha\colon \alpha \in M'\} = \tilde{Y}$. Очевидно, тогда $\cup\{U_\alpha \setminus A_\alpha\colon \alpha \in M'\} \supset \tilde{Y} \setminus B \supset Y \setminus B$, где $B = \cup\{A_\alpha\colon \alpha \in M'\}$ — счетное множество. Но каждый элемент из B покрыт некоторым элементом семейства ξ; зафиксируем последний и обозначим через F_y. Тогда $\xi' = \{U_\alpha \setminus A_\alpha\colon \alpha \in M'\} \cup \{F_y\colon y \in B\}$ — счетное подсемейство семейства ξ и $\cup\{F\colon F \in \xi'\} = Y - \cup\{F\colon F \in \xi\}$. Заключаем (см. 206 гл. III), что $(X, \tilde{\mathcal{T}})$ пиклотерминально финально компактно.

Докажем 9), т. е. что $(X, \tilde{\mathcal{T}})$ является H-замкнутым пространством, предположив, что соотношение 10) уже проверено. Пусть $\gamma = \{U_\alpha \setminus A_\alpha\colon \alpha \in M\}$ — произвольное покрытие множества X непустыми элементами семейства $\tilde{\mathcal{T}}$. Тогда $\tilde{\gamma} = \{U_\alpha\colon \alpha \in M\}$ — открытое покрытие бикомпакта $(X, \mathcal{T})$; и, следовательно, существует конечное множество $M^* \subset M$, для которого $\cup\{U_\alpha\colon \alpha \in M^*\} = X$. Тогда $\cup\{U_\alpha \setminus A_\alpha\colon \alpha \in M^*\}$, тем более, плотно в $(X, \mathcal{T})$ и, значит, $X = [\cup\{U_\alpha \setminus A_\alpha\colon \alpha \in M^*\}]_{(X, \mathcal{T})} = \cup\{[U_\alpha \setminus A_\alpha]_{(X, \mathcal{T})}\colon \alpha \in M^*\} = \cup\{[U_\alpha \setminus A_\alpha]_{(X, \tilde{\mathcal{T}})}\colon \alpha \in M^*\}$ (последний переход сделан на основании соотношения 10)). Следовательно (см. 61 гл. III), $(X, \tilde{\mathcal{T}})$ является H-замкнутым.

Докажем 10). Пусть даны непустые $U_1 \in \mathcal{T}$, $U_2 \in \mathcal{T}$, $A_1 = X$, $A_2 = X$ и известно, что $x \in [U_1 \setminus A_1]_{(X, \tilde{\mathcal{T}})}$, $x \in U_2 \setminus A_2$. Тогда $U_1 \cap U_2 \neq \Lambda$; $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, и потому $(U_1 \setminus A_1) \cap (U_2 \setminus A_2) = (U_1 \cap U_2) \setminus (A_1 \cup A_2) \neq \Lambda$ (так как $|A_1 \cup A_2| \leqslant \aleph_1$). Значит, $x \in [U_1 \setminus A_1]_{(X, \mathcal{T})} \cap [U_2 \setminus A_2]_{(X, \mathcal{T})} = [U_1 \setminus A_1]_{(X, \tilde{\mathcal{T}})}$.

231. Если $f: X \to Y$ — непрерывное отображение, где Y — совершенно нормальный бикомпакт, то в $f(X)$ есть всюду плотное множество, мощность которого не превосходит веса пространства X. Но вес пространства $f(X)$ не превосходит мощности $\mathscr{M}$, ибо $f(X)$ лежит в совершенно нормальном бикомпакте (224 гл. III). Значит, вес $f(X)$ не больше, чем вес X.

232. Пространство Y — бикомпакт (91 гл. III). Отображение f замкнуто (92 гл. III) и $fX = Y$, поэтому для каждого $A \subset Y$ имеем $\chi(f^{-1}A, X) = \chi(A, Y)$ (см. 324 гл. II). Если A замкнуто в Y, то $f^{-1}A$ замкнуто в X и $\chi(f^{-1}A, X) \leqslant \aleph_0$. Значит, и $\chi(A, Y) \leqslant \aleph_0$.

233. См. 230, 231 гл. III.

234. В каждом бесконечном бикомпакте есть счетное незамкнутое множество (60 гл. III). Применяя теперь утверждение 23 гл. III дважды (второй раз X и Y меняются ролями), мы получим доказываемое утверждение.

235. В силу 234, 23 гл. III (и того, что $X \times X \times X = (X \times X) \times X$) либо произведение $X \times X$ совершенно нормально, либо в X каждое счетное множество замкнуто. Второе невозможно, ибо X — бикомпакт (как раннее привели только интересный случай — когда множество типа пространства X бикомпактно). Значит, верно первое, т. е. $X \times X$ совершенно нормально. А тогда X обладает счетной базой — см. 114 гл. III.

236. См. 114 гл. III.

237. Если $x \in [M] \setminus M$ и $\{U_n: n \in N^+\}$ — база в x, причем $U_j \subset U_i$ при $j > i$, то, выбрав $x_n \in U_n \cap M$ при каждом $n = 1, 2, \ldots$, мы придем к бикомпактному подпространству $\Phi = \{x\} \cup \{x_n: n \in N^+\}$, причем $\Phi \cap M = \{x_n: n = 1, 2, \ldots\}$ и, значит, $x \in [\Phi \cap M]$. Заметим, что таким образом доказано несколько более сильное утверждение, чем требовалось: X является $\aleph_1$-пространством (см. стр. 156).

238. Пусть $x \in [M]$. Выберем Ox — окрестность точки x, замыкание которой $[Ox]$ бикомпактно. Тогда $x \in [M \cap Ox] = [M \cap [Ox]]$, откуда и следует, по определению, что рассматриваемое пространство является $\tilde{\aleph}$-пространством (также $\aleph_0$-пространством).

240. Пусть X — пространство точечно счетного типа и $P \subset X$. Предположим, что $P \cap \Phi$ — бикомпакт для любого бикомпакта Φ, лежащего в X. Пусть $x_0 \in [P]$. Не ограничивая, существует бикомпакт $\Phi_0 \subset X$, который содержит x_0 и характер которого в X счетен. Пусть U — произвольная окрестность точки x_0. Множество $U_1 = U \cap \Phi_0$ открыто в Φ_0. Поэтому (63 гл. III) и U_1 найдется бикомпакт F_1 счетного характера в Φ_0, содержащий x_0. Тогда и характер F_1 в X счетен (70 гл. III). Пусть $\gamma = \{U_i: i \in N^+\}$ — некоторая счетная определяющая система окрестностей бикомпакта F_1 в X, для которых $U_j \subset U_i$ при $j > i$. Так как $x_0 \in [P]$ и $U_2 \ni x_0$ для каждого i, то найдется точка $x_i \in U_i \cap P$. Полученная последовательность $\{x_i: i \in N^+\}$ имеет в F_1 хотя бы одну предельную точку y, так же как и любая ее подпоследовательность (63 гл. III). Значит, $F_2 = F_1 \cup \{x_n: n = 1, 2, \ldots\}$ — бикомпакт. Но тогда $F_2 \cap P$ замкнуто по предположению. Поэтому $F_1 \cup P \supset \{x_n: n = 1, 2, \ldots\}$, а так как $[\{x_n: n = 1, 2, \ldots\}] \cap F_1 \neq \Lambda$, то мы заключаем, что $F_2 \cap P \neq \Lambda$. Тем самым мы показали, что для любой окрестности U точки x_0 найдется точка, принадлежащая $U \cap P \cap \Phi_0$. А это и означает, что $x_0 \in [P \cap \Phi_0]$. В силу предположения о множестве P будет иметь $[P \cap \Phi_0] = P \cap \Phi_0$. Значит, $x_0 \in P$ и P — совершенно множество.

241. Пусть $X \subset bX$, где bX — бикомпакт и $X = \bigcap \{G_i: i \in N^+\}$, где каждое G_i — открытое в bX множество. Зафиксируем $x \in X$. Положим $U_0 = bX$. Предположим, что содержащие x открытые в bX множества U_i определены для всех $i = 0, 1, \ldots, k$. Правим тогда за U_{k+1} любое открытое в bX множество, для которого $x \subset U_{k+1} \subset [U_{k+1}] \subset U_k \cap G_{k+1}$. Пусть последовательность $\{U_i: i = 0, 1, \ldots\}$ определена в соответствии с указанной процедурой. Положим $F = \bigcap \{[U_i]: i = 0, 1, \ldots\}$. Тогда $F \subset \bigcap \{[G_i]: i \in N^+\} \subset X$ и $F = \bigcap \{U_i: i = 0, 1, \ldots\}$, т. е. F — бикомпакт счетного характера в bX (см. 70 гл. III) и $x \in F \subset X$. Следовательно, X — пространство точечно счетного типа.

244. Нет. Показать это — значит построить хаусдорфово $\aleph$-пространство X, в котором есть такая точка x и множество M, что $x \in [M] \setminus M$, но $x \notin [\Phi \cap M]$ ни для какого бикомпактного подпространства Φ пространства X. Этим требованиям удовлетворяет пространство, рассмотренное в задаче 103 гл. II. В качестве M надо взять множество всех его неотделимых точек, а в качестве x — точку 0 (см. при этом 250 гл. III). Другой пример указан в задаче 66 гл. IV (см. при этом 59 гл. IV и 242 гл. III).

245. Нет. См. 60 и 59 гл. IV.

246. Пусть $f: X \to Y$ — рассматриваемое отображение, причем $f(X) = Y$. Если $M \subset Y$ и $M \cap \Phi$ замкнуто в Φ для любого бикомпактного подпространства Φ пространства Y, то $f^{-1}M \cap F$ должно быть замкнуто в F для любого бикомпактного подпространства F пространства X. Действительно, $f^{-1}M \cap F = f_F^{-1}(M \cap fF)$, где f_F — сужение отображения f на подпространство F. Так как f_F непрерывно, то fF бикомпактно, $M \cap fF$ замкнуто в fF и $f^{-1}M \cap F$ замкнуто в F. Но X является $\aleph$-пространством. Значит, $f^{-1}M$ замкнуто в X. Так как f — факторное отображение, M замкнуто в Y. Следовательно, Y является $\aleph$-пространством.

247. Надо доказать только, что каждое $\aleph$-пространство является фактор-пространством некоторого хаусдорфова локально бикомпактного пространства. Обратное утверждение следует из двух следующих: 1) каждое локально бикомпактное хаусдорфово пространство является $\aleph$-пространством (248 гл. III) и 2) фактор-пространство $\aleph$-пространства является $\tilde{\aleph}$-пространством (243 гл. III).

Пусть $\mathscr{B} = \{F_\alpha: \alpha \in M\}$ — семейство всех бикомпактных подпространств пространства X. Рассмотрим свободную сумму $Z = \sum \{F_\alpha: \alpha \in M\}$ топологических пространств F_α (см. стр. 55). По определению, элементами Z являются всевозможные пары (x, α), где $x \in F_\alpha$, $\alpha \in M$. Множество $F'_\alpha = \{(x, \alpha): x \in F_\alpha\}$ естественно отображается на F_α по правилу $\varphi_\alpha(x, \alpha) = x$ при всех $x \in F_\alpha$. Это значит, описанное отображение позволяет перенести топологию с F_α на F'_α — возникающую таким образом на F'_α топологию мы обозначим через $\mathscr{T}_\alpha$. Тогда $\bigcup \{\mathscr{T}_\alpha: \alpha \in M\}$ является базой пространства Z. Через f обозначается естественное отображение пространства Z на X, сужение которого на любое F'_α совпадает с φ_α. Отображение f непрерывно: если U открыто в X, то $U \cap F_\alpha$ открыто в F_α, поэтому и $\varphi_\alpha^{-1}(U \cap F_\alpha)$ открыто в Z. Но, очевидно, $f^{-1}(U) = \bigcup \{\varphi_\alpha^{-1}(U \cap F_\alpha): \alpha \in M\}$. Значит, $f^{-1}(U)$ — открытое множество. Предположим теперь, что $P \subset \Lambda$ и $f^{-1}P$ замкнуто в Z. Тогда $f^{-1}P \cap F'_\alpha$ замкнуто. Поэтому (так как φ_α — гомеоморфизм) $\varphi_\alpha(f^{-1}P \cap F'_\alpha)$ замкнуто в F_α. Но $\varphi_\alpha(f^{-1}P \cap F'_\alpha) = P \cap F_\alpha$. Итак, $P \cap F_\alpha$ замкнуто для каждого бикомпактного подпространства пространства X. Так как X является $\tilde{\aleph}$-пространством, то P замкнуто в X. Доказанное означает, что f — факторное отображение.

248. Пусть C — открытое подпространство $\tilde{\aleph}$-пространства X. В силу 247 гл. III существует факторное отображение $f: Z \to X$ некоторого локально бикомпактного хаусдорфова пространства Z на X. Положим $Y = f^{-1}C$ и $\Gamma = f \mid Y$, $\Gamma: Y \to C$. Так как f непрерывно, то Y открыто в Z; значит, Y — локально бикомпактное (130 гл. III) хаусдорфово пространство. Ясно тоже, что Γ — факторное отображение, ибо Y — полный прообраз открытого множества (см. 305 гл. II). Поэтому и C является $\aleph$-пространством (247 гл. III).

249. Нет, не верно — такие пространства суть в точности пространства Фреше — Урысона (см. 250 гл. III). Пример см. в 113 гл. II.

250. Итак, пусть $x \subset X$, $M \subset \Lambda \cap x \subset [M] \setminus M$. Можно найти множество $L \subset M$ такое, что выполняются следующие условия: (1) $x \subset [L]$; (2) есть

$L' \subset M$ и $x \subset [L']$, то $|L| \leqslant |L'|$. Так как $L \setminus \{x\}$ есть λ-пространство, то существует бикомпакт $\Phi \subset L \setminus \{x\}$, для которого $x \in [\Phi \setminus \{x\}]$ (243 гл. III). В силу (3), очевидно, $|\Phi| = \tau$ и покажем, что $\tau = \aleph_0$. Этим все будет доказано, ибо тогда Φ — метризуемый бикомпакт (см. 155 и 39 гл. III). Точка x не изолирована в Φ; ее характер в Φ равен τ — это следует из $|\Phi| = \tau$ и 88 гл. III. Зафиксируем какую-нибудь базу $\mathcal{B} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ точки x в Φ, мощность которой равна τ. Предположим, что A минимально вполне упорядочено некоторым отношением $\prec$. Теперь мы осуществим построение по индукции вдоль $(A, \prec)$. Пусть $1 = \min(A, \prec)$. Зафиксируем окрестность $O_1 x$ точки x так, чтобы было $[O_1 x] \subset U_1$. Выберем $x_1 \in O_1 x \setminus \{x\}$. Предположим, что $\beta \in A$ и для всех $\alpha \prec \beta$, $\alpha \subset A$, определены окрестности $O_\alpha x$ точки x и точки $x_\alpha \in \Phi \setminus \{x\}$. Тогда, в силу (β), $|\{x_\alpha : \alpha \prec \beta\}] \ni x$ (ибо $|\{x_\alpha : \alpha \prec \beta\}| < \tau$). Пространство Φ регулярно, выберем окрестность $O_\beta x$ точки x так, чтобы было $[\{x_\alpha : \alpha \prec \beta\}] \cap [O_\beta x] = \Lambda$ и $[O_\beta x] \subset U_\beta$. Так как $|\{\alpha \in A : \alpha \prec \beta\}| < \tau$ и характер x в Φ равен τ, то $\bigcap \{O_\alpha x : \alpha \prec \beta\} \setminus \{x\} \neq \Lambda$. Примем за x_β любой элемент множества $\bigcap \{O_\alpha x : \alpha \prec \beta\} \setminus \{x\}$. Таким образом можно определить x_α и O_α для всех $\alpha \in A$. Рассмотрим подпространство $X^* = \{x_\alpha : \alpha \subset A\} \cup \{x\}$ пространства X. Точка x не изолирована в X^*. С другой стороны, для любого $\beta \in A$ множество $X \setminus [\{x_\alpha : \alpha \prec \beta,\ \alpha \neq \beta\}] \cup [O_\beta x]$ — окрестность точки x_β, не содержащая точек множества $X^* \setminus \{x_\beta\}$. Значит, все $x' \in X^* \setminus \{x\}$ изолированы в X^*. Но X^* есть λ-пространство. Поэтому (243 гл. III) существует бикомпакт $F \subset X^*$, для которого $x \in [F \setminus \{x\}]$. Но $F \setminus \{x\} \subset M$. Из определения τ следует, что $|F| = \tau$. Выберем в $F \setminus \{x\}$ бесконечное счетное подмножество P. В F у P (в силу бикомпактности F) есть предельная точка, но никакая точка из $F \setminus \{x\}$ таковой быть не может. Значит, $[P] \ni x$. Но $P \subset M$. Следовательно, в силу условия (β), $\tau = \aleph_0$.

252. Пространство X можно представить как фактор-пространство некоторого локально бикомпактного хаусдорфова пространства $\tilde{X}$ (247 гл. III). Обозначим соответствующее факторное отображение через f, через i обозначим тождественное отображение пространства Y на себя. Тогда $f \times i$ $\tilde{X} \times Y \to X \times Y$ — факторное отображение (26 гл. VI). Но $\tilde{X} \times Y$ — локально бикомпактное хаусдорфово пространство, поэтому (см. 247 гл. III) $X \times Y$ есть λ-пространство.

279. Рассмотрим $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. Согласно 218 гл. II существует счетное дизъюнктное покрытие ω_1 пространства (Y, ρ) открыто-замкнутыми множествами диаметра, не большего $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. Вследствие того, что (Y, ρ) не бикомпактно, покрытие ω_1 можно предположить бесконечным. Итак, пусть $\omega_1 = \{U_{i_1} : i_1 \in N^+\}$ — бесконечное счетное дизъюнктное покрытие пространства (Y, ρ) открыто-замкнутыми множествами, $\operatorname{diam} U_{i_1} \leqslant \frac{1}{2}$, $U_{i_1} \neq \Lambda$ для любого $i_1 \subset N^+$ и $U_{i_1} \cap U_{i'_1} = \Lambda$, если $i_1 \neq i'_1$. Теперь для каждого $U_{i_1} \in \omega_1$ и $\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}$ рассмотрим счетную систему $\{U_{i_1 i_2} : i_2 \in N^+\}$ открыто-замкнутых в U_{i_1} (значит, и в X) множеств, для которой $\operatorname{diam} U_{i_1 i_2} \leqslant \frac{1}{4}$ для любого $i_2 \in N^+$ и $U_{i_1 i_2} \cap U_{i_1 i'_2} = \Lambda$, если $i_2 \neq i'_2$, и $U_{i_1} = \bigcup \{U_{i_1 i_2} : i_2 \in N^+\}$. Так как U_{i_1} бикомпактно, то $\{U_{i_1 i_2} : i_2 \in N^+\}$ можно выбрать таким образом, чтобы $U_{i_1 i_2} \neq \Lambda$ для любого $i_2 \in N^+$. Заметим, что $Y = \bigcup \{U_{i_1 i_2} : i_1 \in N^+,\ i_2 \in N^+\}$. Продолжим то же построение для каждого $U_{i_1 i_2}$, $i_2 \subset N^+$, $i_1 \in N^+$, и

$\varepsilon_3 = \frac{1}{2^3}$ и т. д. В результате мы для каждой конечной последовательности натуральных чисел $i_1, \ldots, i_n$ будем иметь открыто-замкнутые в X множества $U_{i_1 \ldots i_n}$. При этом будут выполнены следующие условия:

(1) $U_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n} \cap U_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i'_n} = \Lambda$, если $i_n \neq i'_n$;

(2) $U_{i_1 \ldots i_{n-1}} = \bigcup \{U_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n} : i_n \in N^+\}$;

(3) $Y = \bigcup \{U_{i_1} : i_1 \subset N^+\}$;

(4) $\operatorname{diam} U_{i_1 \ldots i_n} \leqslant \frac{1}{2^n}$;

(5) $U_{i_1, \ldots, i_n} \neq \Lambda$ для любых $i_1 \in N^+, \ldots, i_k \in N^+$.

Последнее, т. е. условие (5), мы получаем вследствие того, что на каждом шаге получаются бикомпактные множества. Рассмотрим теперь бесконечное счетное семейство $\{X_n : n \in N^+\}$ бесконечных счетных дискретных пространств (т. е. каждое X_n гомеоморфно пространству N натуральных чисел). Тогда каждая точка x топологического произведения $\Pi\{X_n : n \in N^+\}$ есть счетная последовательность натуральных чисел: $x = \{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\}$.

Положим $fx = U_{i_1} \cap U_{i_1 i_2} \cap \ldots \supset U_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{i_1 \ldots i_n}$. Вследствие условий (1) — (5) и полноты пространства (Y, ρ), для каждой точки $x \in \Pi(X_n : n \subset N^+)$ множество fx непусто и состоит ровно из одной точки $p \in Y$. Таким образом, мы построили отображение $f : B(\aleph_0) \to Y$ (напомним, что $B(\aleph_0) = \Pi\{X_n : n \in N^+\}$). Из условий (3) и (2) следует, что f — отображение на все Y, а из (1) следует его взаимная однозначность. В пространстве $B(\aleph_0) = \Pi\{X_n : n \in N^+\}$ множества $V_{i_1 \ldots i_n} = \{x = \{i_n : n \in N^+\} \subset \Pi(X_n : n \in N^+) : i_1 = i_1^0, \ldots, i_n = i_n^0\}$ образуют стандартную открытую базу, а множества $U_{i_1, \ldots, i_n}$, $i_k \subset N^+$, $i_1, \ldots, i_n \in N^+$, — базу пространства X (в чем совсем нетрудно убедиться). Тогда топологичность построенного отображения $f : B(\aleph_0) \to Y$ вытекает из равенства $fV_{i_1^0 \ldots i_n^0} = U_{i_1^0 \ldots i_n^0}$, которое легко установить, пользуясь условиями (1) — (5).

282. См. решение задачи 279 гл. III.

285. (а) Пусть $\delta = (F_n : n \in N^+)$ — бесконечное счетное семейство бикомпактов, лежащих на прямой, причем $|F| \geqslant \aleph_1$ для каждого $F \in \delta$ и любые два множества из δ не гомеоморфны (такое семейство, очевидно, существует). Для каждой счетной последовательности $\xi = \{n_k : k \in N^+\}$ натуральных чисел рассмотрим свободное объединение A_ξ (см. стр. 38) всех бикомпактов $F_{n_k} \subset \delta$ и бикомпактификацию Александрова (176 гл. III) Φ_ξ пространства A_ξ. Нетрудно убедиться в том, что Φ_ξ — континуум, содержащийся в прямой. Семейство всех континуумов, построенных таким образом по всем последовательностям ξ натуральных чисел, обозначим через γ. Семейство γ искомое.

(б) Пусть α — система всех бикомпактных подмножеств $F \subset R^1$, $|F| \geqslant \aleph_0$. (Заметим, см. 294 гл. III, что для бикомпактного метризуемого пространства F, $|F| \geqslant \aleph_0$, непременно $|F| = c$.) Опираясь на утверждение (а), выведем, что $|\mu| = c$. Упорядочим систему μ бикомпактов $F \in \mu$ (причем, как всегда, рассматриваем минимальное упорядочение):

(1) $\mu = \{F_1, F_2, \ldots, F_\lambda, \ldots\}$.

Аналогичным образом упорядочиваем множество всех точек числовой прямой

(2) $R^1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots\}$.

Через c_1 обозначим первую точку в упорядочении (1), для которой $p_1 \subset F_{c_1}$ и q_1 — первая точка в упорядочении (2), для которой $q_1 \subset \delta_1 \setminus p_1$. Далее, если мы построили точки p_λ и q_λ для всех $\lambda < \lambda^*$, то берем в качестве точки p_{λ^*} первую точку в упорядочении (2), для которой $p_{\lambda^*} \subset F_{c_{\lambda^*}} \setminus (\{p_\lambda\colon \lambda < \lambda^*\} \cup \{q_\lambda\colon \lambda < \lambda^*\})$, а первую точку q_{λ^*} в упорядочении (2), для которой $q_{\lambda^*} \subset F_{c_{\lambda^*}} \setminus (\{p_\lambda\colon \lambda \leqslant \lambda^*\} \cup \{q_\lambda\colon \lambda < \lambda^*\})$. Нетрудно понять, пользуясь тем, что $|F_\xi| = c$ для любого $F_\xi \subset \mu$, и тем, что (1) и (2) — минимальные упорядоченные множества K^2 и μ мощности c, что такое индуктивное построение вполне корректно. В результате мы получаем множество Z, состоящее из всех построенных точек p_λ. При этом, очевидно, $|Z| = |\mu| = c$. Пусть теперь F — несчетный бикомпакт, лежащий на прямой R^1; тогда $F \subset \mu$, следовательно, по построению множества Z непременно $(R^1 \setminus Z) \cap F \neq \Lambda$, т. е. $F \not\subset Z$. Таким образом всякий бикомпакт, содержащийся в Z, не более чем счетен, т. е. Z — вполне несовершенное множество.

269. Пусть ρ — метрика на компакте X. Предположим компакт X, получив задачей 230 гл. II в виде объединения замкнутых подмножеств $\Phi_{i_1}, \ldots, \Phi_{i_s}$ диаметра, меньшего $1/2$ (при этом мы можем предположить, что s_1 есть степень двойки, т. е. $s_1 = 2^{\alpha_1}$, допуская в представлении $X = \bigcup_{i_1=1}^{s_1} \Phi_{i_1}$ некоторые слагаемые совпадающими). Компакты $\Phi_{i_1}, \ldots, \Phi_{i_{s_1}}$ назовем компактами первого ранга. Каждый компакт Φ_{i_1} первого ранга разобьем на компакты $\Phi_{i_1 1}, \ldots, \Phi_{i_1 2^{\alpha_2}}$ диаметра $< \frac{1}{2^2}$: $\Phi_{i_1} = \Phi_{i_1 1} \cup \ldots \cup \Phi_{i_1 2^{\alpha_2}}$. При этом каждый из компактов первого ранга мы разбиваем на одно и то же (а именно 2^{α_2}) число замкнутых подмножеств, допуская, конечно, и совпадающие слагаемые. Таким образом весь компакт X мы представили в виде объединения $s_2 = 2^{\alpha_1+\alpha_2}$ подкомпактов второго ранга (все компакты второго ранга имеют диаметр, не большей $\frac{1}{2^2}$). Продолжаем так и дальше. Таким образом, для любого натурального числа m мы будем иметь представление всего нашего компакта X в виде объединения $s_m = 2^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m}$ подкомпактов $\Phi_{i_1 \ldots i_m}$ ранга m, причем каждый компакт $\Phi_{i_1 \ldots i_{m-1}}$ ранга $m-1$ будет представлен в виде 2^{α_m} компактов ранга m: $\Phi_{i_1 \ldots i_{m-1}} = \bigcup_{i_m=1}^{2^{\alpha_m}} \Phi_{i_1 \ldots i_m}$, а диаметр всякого компакта ранга m строго меньше $\frac{1}{2^m}$. Теперь вспомним задачу 180 гл. II, где проводилось построение канторова совершенного множества. При построении канторова совершенного множества мы имели отрезки ранга 1, 2, $\ldots$, k, $\ldots$: два отрезка первого ранга, четыре отрезка второго ранга, $\ldots$, 2^n отрезков ранга n и т. д. Эти отрезки мы обозначали через $\Delta_{j_1 \ldots j_m}$, где $j_1, j_2, \ldots, j_m$ могут принимать значения или 0 или 1.

Рассмотрим теперь для каждого натурального m число m отрезков $\Delta_{i_1 \ldots i_m}$ ранга r_m в компакте $s_m = 2^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m} = 2^{r_m}$ (все они имеют длину $\frac{1}{2^{r_m}}$). Каждый такой отрезок обозначим для удобства через $\Delta_{i_1 \ldots i_m}$, где i_k принимает значения $1, 2, 3, \ldots, 2^{r_k}$ (нетрудно понять, что тем самым такое пере-

[обозначение]. Теперь каждая точка x канторова совершенного множества C [является] пересечением однозначно определенной последовательности $\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \Delta_{i_1 \ldots i_m} \supset \ldots$ отрезков, ее содержащих, а эта последовательность в свою очередь определяет последовательность подкомпактов [компакта] X: $\Phi_{i_1} \supset \Phi_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \Phi_{i_1 i_2 \ldots i_m} \supset \ldots$, а следовательно, точку $x \in X$ — точку пересечения этих компактов. Таким образом определено [отображение] $f\colon C \to X$ канторова совершенного множества C и компакта X. Ясно, [что] очевидно, что это отображение на весь компакт. Действительно, [если] точка $x \in X$ произвольна. Эта точка принадлежит некоторому подкомпакту Φ_{i_1} ранга 1 (хотя, вообще говоря, не единственному компакту ранга 1), некоторому подкомпакту $\Phi_{i_1 i_2} = \Phi_{i_2}$ ранга 2 и т. д. Тогда мы рассмотрим соответствующую последовательность $\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \Delta_{i_1 \ldots i_m} \supset \ldots$ отрезков и точку t канторова совершенного множества, определяемую как пересечение отрезков из этой последовательности. Очевидно, $f(t) = x$. Докажем непрерывность отображения f. Для произвольного $\varepsilon > 0$ [найдется] такое натуральное число m, чтобы $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Определим $\delta = \frac{1}{3^{r_m}}$. Тогда, если $|t - t'| < \delta$, то точки t и t' канторова совершенного множества [принадлежат] принадлежат некоторому одному и тому же отрезку $\Delta_{i_1 \ldots i_m}$ ранга r_m, следовательно, точки x и x' принадлежат одному и тому же компакту $\Phi_{i_1 \ldots i_m}$ ранга m. Таким образом, $\rho(x, x') \leqslant \operatorname{diam} \Phi_{i_1 \ldots i_m} < \frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Отображение $f\colon C \to X$ непрерывно. Все доказано.

300. См. решение задачи 299 гл. III. Если бы при построении (в этом решении) мы сумели бы выбрать компакты $\Phi_{i_1 \ldots i_m}$ таким образом, чтобы любые два компакта одного и того же ранга имели пустое пересечение, то тогда бы каждая точка $y \in Y$ однозначно определялась последовательностью $\Phi_{i_1} \supset \Phi_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \Phi_{i_1 \ldots i_m} \supset \ldots$ компактов различных рангов, содержащих эту точку y. По этой причине построенное в указанном решении отображение f было бы взаимно однозначным, значит, топологическим (ибо f непрерывно, а канторово совершенное множество и пространство Y — компакты). Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ надо уметь представить любую нульмерную компакт Y без изолированных точек в виде объединения конечного числа пересекающихся совершенных открыто-замкнутых подмножеств диаметра, меньшего ε, так, чтобы число слагаемых (без повторений) было степенью двойки. Это производится довольно просто (предоставляю сами).

303. (а) Пусть $f\colon C \to Y$ — непрерывное непрерывно отображение канторова совершенного множества C на компакт Y. Канторово совершенное множество C не имеет изолированных точек (см. 185 гл. II), значит, его непрерывный образ также не имеет изолированных точек (см. 111 гл. VI).

(б) Пусть компакт Y не имеет изолированных точек. В силу 299 гл. III существует непрерывное отображение $f\colon C \to Y$ канторова совершенного множества C на Y. Найдется такое замкнутое множество $C_1 \subset C$, что $fC_1 = Y$ и $f|C_1\colon C_1 \to Y$ непрерывно (см. 32 гл. VI). Если C_1 непрерывно отображается на компакт Y без изолированных точек, то C_1 также не имеет изолированных точек (см. 111 гл. VI). Значит, C_1 удовлетворяет условию задачи 303 гл. III, в силу которой C_1 гомеоморфно канторову совершенному множеству C. Таким образом композиция $(f|C_1) \cdot h$ (где $h\colon C \to C_1$ — гомеоморфизм) — непрерывное непрерывно отображение канторова совершенного множества C на Y.

304. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство без изолированных точек. Так же, как и в решении задачи 128 гл. III, мы строим для каждой конечной последовательности $i_2, \ldots, i_k$, $k \in \mathcal{N}$, состоящей из нулей или

единиц, нигде не плотные в X множества $F_{i_1 \dots i_k}$ без изолированных точек таким образом, что (а) каждое $F_{i_1 \dots i_k}$ — замыкание открытого в X множества, (б) $F_{i_1 \dots i_k i_{k+1}} \subset F_{i_1 \dots i_k}$ для любых $i_1, \dots, i_k$ и $k \in N^+$, (в) $F_{i_1 \dots i_k} \cap F_{j_1 \dots j_s} = \Lambda$, если $(i_1, \dots, i_k) \neq (j_1, \dots, j_s)$. Кроме того, в нашем случае можно предположить, что (г) $\operatorname{diam} F_{i_1 \dots i_k} < \frac{1}{2^k}$, $k \in N^+$. Тогда для любой бесконечной последовательности $\xi = (i_1, \dots, i_k, \dots)$ нулей и единиц $\bigcap \{F_{i_1 \dots i_k} : k \in N^+\}$ пусто в силу равенства не одной точки. Обозначив через Ξ множество всевозможных последовательностей ξ из нулей и единиц (Ξ можно интерпретировать как множество точек произведения счетного числа изолированных двоеточий, т. е. как канторово совершенное множество — см. 301 гл. III); легко показать, что подпространство $P = \bigcup \{\bigcap \{F_{i_1 \dots i_k} : k \in N^+\} : \xi \in \Xi\}$ гомеоморфно метрическому совершенному множеству.

Второе утверждение нашей задачи легко сводится к первому. Поступаем следующим образом: точку $x \in X$ назовем точкой σ-дискретности пространства X, если существует такая окрестность Ox этой точки, что подпространство Ox является объединением счетного семейства дискретных подпространств. Предположим, что X не представляется в виде объединения счетного семейства дискретных подпространств, обозначим через X^* множество всех точек в X, не являющихся точками σ-дискретности. Нетрудно показать, что при этом предположении X^* — непустое замкнутое в X подпространство, не имеющее изолированных точек. Итак, второе утверждение нашей задачи сведено к первому.

305. Пусть ρ — некоторая метрика на метризуемом бикомпакте A. Предполагаем, не нарушая общности, что любая точка $a \in A$ не изолирована в X. Занумеруем точки множества A каким-нибудь образом в виде последовательности: $A = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$. Так как a_n не изолирована в X, то открытое в X множество $\Gamma_n = X \setminus \{a_n\}$ всюду плотно в X. Значит, всюду плотно в X множество $X_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n = X \setminus A$ (см. 28 гл. III). Значит, для каждого $k \in N^+$ мы можем взять такую точку $x_k \in X_1$, чтобы $\rho(x_k, a_k) < \frac{1}{k}$. Определим разбиение на X: его элементы суть двуточечные множества вида (a_n, x_k), остальные элементы разбиения — одноточечные множества. Докажем непрерывность этого разбиения. Пусть (x_0) — одноточечный элемент разбиения. Предположим, что x_0 — изолированная точка для точек $(a_n : n \in N^+)$. Рассмотрим произвольную ε-окрестность $U_\varepsilon x_0$ этой точки. Возьмем такое n, чтобы $\frac{2}{n} < \varepsilon$. Тогда, если $\rho(a_n, x_k) < \frac{1}{k}$, то $\rho(a_n, a_k) < \rho(a_n, x_k) + \rho(x_k, a_k) < \frac{2}{k} < \varepsilon$, т. е. всякий элемент разбиения, пересекающий окрестность $U_{\frac{1}{n}} x_0$, содержится в окрестности $U_\varepsilon x_0$. Пусть теперь (x_{n_0}, a_{n_0}) — некоторый двуточечный элемент разбиения. Рассмотрим окрестности $U_\varepsilon x_{n_0}$ и $U_\varepsilon a_{n_0}$. Возьмем n такое, что $\frac{2}{n} < \varepsilon$, и рассмотрим пересечения $U_{\frac{1}{n}} x_{n_0}$, $U_{\frac{1}{n}} a_{n_0}$. Нетрудно убедиться в том, что всякий элемент разбиения, пересекающийся с окрестностью $U_{\frac{1}{n}} x_{n_0} \cup U_{\frac{1}{n}} a_{n_0}$ элемента (x_{n_0}, a_{n_0}) разбиения, содержится в окрестности $U_\varepsilon x_{n_0} \cup U_\varepsilon a_{n_0}$ этого элемента разбиения. Итак, определенное выше разбиение метризуемого бикомпакта X непрерывно. Пространство Y этого разбиения хаусдорфово (см. 33 гл. III). Так как X имеет счетную базу и бикомпактно, то и Y будет иметь счетную базу (как бикомпакт, являющийся непрерывным образом метризуемого бикомпакта X, см. 282 гл. III).

Рассмотрим сужение $f \mid Y_0 = f_0$ отображения f на подпространство X_1. Ясно, что $fX_0 = Y$ и $f_0 : X_0 \to Y$ — взаимно однозначное непрерывное отображение на компакт Y. Все доказано.

306. Ответ авторам не известен.

307. Ответ авторам не известен.

308. См. Пелчинский [1].

312. Пусть $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ и a, b — два действительных числа, $a \neq b$. Возьмем функцию $f \in C_0$, для которой $f(x_1) \neq f(x_2)$. Нужную функцию будем искать в виде $g = \alpha f + \beta$, где α и β — пока не известные константы (точнее, функции, тождественно равные константам α и β). Очевидно, всякая функция g, таким образом определенная, принадлежит C_0. Для нахождения α и β имеем равенства $g(x_1) = \alpha f(x_1) + \beta = a$, $g(x_2) = \alpha f(x_2) + \beta = b$. Так как $f(x_1) \neq f(x_2)$, то α и β находятся однозначно.

313. Пусть $f \in C_0$. Обозначим $\| f \| = \max_{x \in X} |f(x)| = c$. Далее $\sqrt{f^2(x)} = \sqrt{c^2 - c^2 + f^2(x)} = c\sqrt{1 - \left(1 - \frac{f^2(x)}{c^2}\right)}$. Обозначим $g(x) = 1 - \frac{f^2(x)}{c^2}$. Имеем $g \in C_0$ и $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ для любой точки $x \in X$. Далее $|f(x)| = c\sqrt{1 - g(x)} = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} g^n(x)$ (здесь мы воспользовались разложением функции $\sqrt{1-y}$ в ряд по степеням y). Заметим, что все члены ряда принадлежат C_0, а сам ряд равномерно сходится к функции $|f(x)|$, ибо $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$. Отсюда вследствие замкнутости C_0 в $C(X)$ следует $|f(x)| \in C_0$.

315. Следует из 313 и 314 гл. III.

316. Пусть $f \in C(X)$ — произвольная непрерывная на X функция и $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Надо найти такую функцию $g \in V$, чтобы $\rho(f, g) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Воспользовавшись условием 1), для каждой пары x, y точек из X возьмем такую функцию $g_{xy} \in \Pi$, чтобы $g_{xy}(x) = f(x)$, $g_{xy}(y) = f(y)$. В силу непрерывности функций g_{xy} и f в точке x, соответственно в y, найдутся такая окрестность $U_{xy}(x)$ точки x, соответственно окрестность $V_{xy}(y)$ точки y, что

(1) $g_{xy}(t) < f(t) + \varepsilon$ для всех $t \in U_{xy}(x)$;

(2) $g_{xy}(t) > f(t) - \varepsilon$ для всех $t \in V_{xy}(y)$.

Зафиксируем $y \in X$, а x заставим пробегать весь бикомпакт X. Тогда получим открытое покрытие $\{U_{xy}(x) : x \in X\}$ бикомпакта X, из которого выделим конечное подпокрытие

(3) $U_{x_1 y}(x_1), \dots, U_{x_s y}(x_s)$.

Рассмотрим функцию

(4) $g_y(t) = \min\{g_{x_1 y}(t), \dots, g_{x_s y}(t)\} = m_{x_1 x_2 \dots x_s y}(t)$.

В силу условия 2) задачи непременно $g_0 \in \mathfrak{A}$; кроме того, вследствие (3), (4) и того, что (3) — покрытие бикомпакта X, получаем неравенство

(6) $\qquad g_0(x) < f(x) + \varepsilon \quad$ для всех $\quad x \in X.$

Для каждой точки $y \in X$ рассмотрим окрестность

(5) $$V_y(x) = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i y}(x).$$

Полагая $x = y$ в (2), (4) и (5), заключаем, что

(7) $\qquad g_0(x) > f(x) - \varepsilon \quad$ для любого $\quad x \in V_y(y).$

Рассмотрим открытое покрытие $\{V_y(y) : y \in X\}$ бикомпакта X. Выделим из него конечное подпокрытие

(8) $$V_{y_1}(y_1), \ldots, V_{y_k}(y_k).$$

Рассмотрим функцию

(9) $$g(x) = M_{g_{y_1}, \ldots, g_{y_k}}(x).$$

По условию 2) задачи $g \in \mathfrak{A}$. Получаем (7), (9) и тот, что (8) — покрытие, получаем неравенство $g(x) > f(x) - \varepsilon$ для всех $x \in X$. Кроме того, из (5) и (6) следует, что $g(x) < f(x) + \varepsilon$ для всех $x \in X$. Итак, $g \in \mathfrak{A}$ и $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in X$, т. е. $\rho(f, g) < \varepsilon$. Задача решена.

317. В силу 312 гл. III C_0 сильно разделяет точки из X. Рассмотрим $\mathfrak{A} = [C_0]_{C(X)}$. Семейство $\mathfrak{A}$ удовлетворяет всем условиям задачи 316 гл. III (и действительности $\mathfrak{A}$ — даже замкнутое подкольцо). Тогда $[\mathfrak{A}]_{C(X)} = [[C_0]_{C(X)}]_{C(X)} = C(X)$. Задача решена.

318. Решение проста. Надо только проверить, что множество всех многочленов, равно как и множество всех тригонометрических многочленов, удовлетворяют условиям задачи 317 гл. III. Указанным образом надо принять, что эти множества функций разделяют точки соответствующих отрезков (нетрудно убедиться, что в первом случае многочлен $y = x$ разделяет точки отрезка $[0, 1]$, во втором случае два тригонометрических многочлена $y = \sin x$ и $y = \cos x$ разделяют точки отрезка $[-\pi, \pi)$.

319. Для доказательства надо рассмотреть подкольцо $C_0 \subset C(X)$ всех многочленов с рациональными коэффициентами и показать, что C_0 разделяет точки в I, а потом воспользоваться задачей 317 гл. III.

321. Пусть $C(X)$ — все непрерывные функции на $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, а $C_0 \subset C(X)$ — все непрерывные функции, зависящие от счетного числа координат. Прежде всего заметим, что все функции на X, тождественно равные константам, зависят от счетного числа координат, так что C_0 содержит все константы. Кроме того, легко установить, что C_0 — подкольцо кольца $C(X)$. Так, например, если $f_1 \in C_0$ зависит от счетного числа координат, к примеру от координат из $A_1 \subset A$, $|A_1| \leqslant \aleph_0$, а $f_2 \in C_0$ от координат из $A_2 \subset A$, $|A_2| \leqslant \aleph_0$, то функция $f_1 + f_2$ зависит только от $A_1 \cup A_2$, т. е. тоже от счетного числа координат, значит, $(f_1 + f_2) \in C_0$. Кроме всего прочего, C_0 — замкнутое подкольцо, т. е. если последовательность $\{f_n : n \in N\}$, $f_n \in C_0$ (f_n зависит от координат из $A_n \subset A$, $|A_n| \leqslant \aleph_0$), равномерно сходится к функции $f_0(x)$, то $f_0(x)$ — непрерывная функция, зависящая от координат из $A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $|A_0| \leqslant \aleph_0$ (а это означает, что $f_0 \in C_0$). Итак, C_0 — замкнутое подкольцо кольца $C(X)$, содержащее все константы, разделяющее точки бикомпакта X (что легко проверить). Значит, по теореме Вейерштрасса — Стоуна (см. 317 гл. III) $C_0 = C(X)$. Задача решена.

322. По теореме Тихонова (см. 38, 75 гл. III) бикомпакт Y можно топологически вложить в тихоновский куб $I^\tau = \Pi\{I_\beta : \beta \in B\}$, $|B| = w(Y)$. Тогда отображение $f : X \to Y$, $Y \subset I^\tau$ можно представить себе как семейство $\{f_\beta : \beta \in B\}$ непрерывных на X функций. Каждая функция f_β, $\beta \in B$, зависит от счетного числа координат (321 гл. III). Следовательно, отображение f зависит от $\tau \cdot \aleph_1 = \tau$ координат. Задача решена.

323. Действительно, X является образом некоторого обобщенного континуума $D^m = \Pi\{D_\alpha : \alpha \in A\}$, $|A| = m$ (какого-то веса m). Из 113 гл. III следует, что $m \geqslant \tau$. В силу 322 гл. III отображение f зависит от τ координат, где $w(X) = \tau$, т. е. найдется такое $A_0 \subset A$, $|A_0| \leqslant \tau$, и такое непрерывное отображение $g : \Pi\{D_\alpha : \alpha \in A_0\} \to X$, что $f = g\pi_{A_0}$, где $\pi_{A_0} : \Pi\{D_\alpha : \alpha \in A\} \to \Pi\{D_\alpha : \alpha \in A_0\}$ — проектирование. Так как $|A_0| \leqslant \tau = w(X)$, то $w(\Pi\{D_\alpha : \alpha \in A_0\}) \leqslant \tau$, а так как при непрерывных отображениях бикомпактов вес не повышается, то $w(\Pi\{D_\alpha : \alpha \in A_0\}) = \tau$. Задача решена.

324. Пусть $w(X) = m$, а $w(Y) = n$. Очевидно (см. 113 гл. III), $m \geqslant n$. Пусть далее $g : D^m \to X$ — непрерывное отображение обобщенного канторова дисконтинуума $D^m = \Pi\{D_\alpha : \alpha \in A\}$, $|A| = m$, на тот диадический бикомпакт X (см. 323 гл. III). Обозначим через $h = gf$ композицию отображений f и g. В силу 322 гл. III существуют такие $A_0 \subset A$, $|A_0| = n$, и непрерывное отображение $h_0 : \Pi\{D_\alpha : \alpha \in A_0\} \to Y$, что $h = h_0\pi_{A_0}$ (здесь $\pi_{A_0} : \Pi\{D_\alpha : \alpha \in A\} \to \Pi\{D_\alpha : \alpha \in A_0\}$ — проектирование). Обозначим $X_f = g(\Pi\{D_\alpha^* : \alpha \in A\})$, где $D_\alpha^* = D_\alpha$, если $\alpha \in A_0$, и $D_\alpha^* = (a)$, если $\alpha \in A \setminus A_0$ (D_α — изолированное совершенное). Очевидно, $\Pi\{D_\alpha^* : \alpha \in A\}$ гомеоморфно $\Pi\{D_\alpha : \alpha \in A_0\}$. Следовательно, $w(\Pi\{D_\alpha^* : \alpha \in A\}) = w(\Pi\{D_\alpha : \alpha \in A_0\}) = |A_0| = n$, поэтому $w(X_f) \leqslant n$ (при непрерывных отображениях бикомпактов вес не повышается), значит, $w(X_f) = n = w(Y)$. Очевидно, $fX_f = Y$. Задача решена.

325. В силу 113 гл. III вес бикомпактов при непрерывных отображениях не повышается. Далее надо вспомнить определение непрерывного отображения и воспользоваться задачей 324 гл. III.

326. Пусть $\mathfrak{B} = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ есть π база бикомпакта X, для которой $|\mathfrak{B}| = \tau$ (см. стр. 50). Пару $(U_\alpha, U_{\alpha'})$ элементов этой π-базы назовем отмеченной, если $[U_\alpha] \subset U_{\alpha'}$. Очевидно, мощность системы σ отмеченных пар $(U_\alpha, U_{\alpha'})$ элементами U_α ($U_{\alpha'}$) $\in \mathfrak{B}$ не превосходит τ. Каждой отмеченной паре $(U_\alpha, U_{\alpha'}) \in \sigma$ поставим в соответствие (пользуясь 25 гл. III и нормальностью бикомпакта X, см. 64 гл. III) непрерывную функцию $f_{\alpha\alpha'}$, для которой $0 \leqslant f_{\alpha\alpha'}(x) \leqslant 1$ для всех $x \in X$, а $f_{\alpha\alpha'}(x) = 0$, если $x \in [U_\alpha]$, и $f_{\alpha\alpha'}(x) = 1$, если $x \in X \setminus U_{\alpha'}$. Система отображенных таким образом функций имеет мощность, меньшую или равную τ. Диагональное отображение f для этой системы функций (см. 290 гл. II) есть отображение бикомпакта X в бикомпакт веса, не превосходящего τ. Легко проверить, что построенное отображение f непрерывно (здесь надо воспользоваться определением непрерывного отображения — см. стр. 151, определением диагонального отображения — см. стр. 17, указанным выше построением, а также плотностью системы $\mathfrak{B}$ в X).

327. Пусть X — диадический бикомпакт. Его π-вес (как, впрочем, любого топологического пространства) не превосходит веса. С другой стороны, в силу 326 гл. III бикомпакту X допускает непрерывное отображение на бикомпакт Y, для которого $w(Y)$ не превосходит π-веса X. Тогда, используя 325 гл. III, заключаем, что вес диадического бикомпакта X равен весу Y. Из всего сказанного получаем неравенства $w(Y) \leqslant \pi w(X) \leqslant w(X)$ и $w(Y) = w(Y)$, откуда $w(X) = \pi w(X)$ (здесь $\pi w(X)$ обозначает π-вес пространства X).

328. Следует из задачи 327 гл. III и метризационной теоремы Урысона (см. 39 гл. III).

329. Пусть $X \subset \Pi\{D_\alpha: \alpha \in A\}$ — замкнутое множество типа G_δ и $|A| = m \geqslant \aleph_1$. Рассмотрим непрерывную функцию f на $\Pi\{D_\alpha: \alpha \in A\}$, которая обращается в нуль в точках множества X и только в точках множества X (см. 30 гл. III). Функция f зависит от счетного числа координат (см. 324 гл. III), т. е. существуют такие $A_1 \subset A$, $|A_1| = \aleph_0$, и непрерывная функция f_1 на $\Pi\{D_\alpha: \alpha \in A_1\}$, что $f = f_1 \pi_{A_1}$, где π_{A_1}, как всегда, естественное проектирование. Рассмотрим множество $X_1 = f_1^{-1}(0)$. Далее легко показать, что $X = X_1 \times \Pi\{D_\alpha: \alpha \in A \setminus A_1\}$. Затем надо воспользоваться тем, что произведение $X_0 \times D^{\aleph_0}$ любого нульмерного бикомпакта X_0 на континуум совершенных множеств снова гомеоморфно континууму совершенных множеств. Тогда получим $X = X_0 \times D^m \approx X_1 \times D^{\aleph_0} \times D^m \approx D^{\aleph_0} \times D^m \approx D^m$. Задача решена.

330. Пусть $D^m = \Pi\{D_\alpha: \alpha \in A\}$, $|A| = m$. Так как, как и в решении задачи 329 гл. III, рассмотрим такое $A_1 \subset A$, $|A_1| = \aleph_0$, чтобы $X = X_0 \times \Pi\{D_\alpha: \alpha \in A \setminus A_1\}$, где X_0 — замкнутое множество в канторовом совершенном множестве $D^{\aleph_0} = \Pi\{D_\alpha: \alpha \in A_1\}$ (очевидно, X_0 имеет тип G_δ). Пользуясь 77 гл. VI, рассмотрим ретракцию $r: \Pi\{D_\alpha: \alpha \in A_1\} \to X_0$. Легко заметить, что $D^m = \Pi\{D_\alpha: \alpha \in A\} = \Pi\{D_\alpha: \alpha \in A_1\} \times \Pi\{D_\alpha: \alpha \in A \setminus A_1\}$. Тогда каждая точка ξ есть пара (x, y), где $x \in \Pi\{D_\alpha: \alpha \in A_1\}$, $y \in \Pi\{D_\alpha: \alpha \in A \setminus A_1\}$. Определим $g(\xi)$ правилом: $g(\xi) = g(x, y) = (r(x), y)$. Пара $(r(x), y)$ есть снова точка в D^m. Понятно, что $(r(x), y) \in X_0 \times \Pi\{D_\alpha: \alpha \in A \setminus A_1\} = X$ и $g(\xi) = \xi$, если $\xi \in X$. Таким образом, g — отображение D^m на X, тождественное на самом X. Ясно также, что g непрерывно.

331. Следует из 328 гл. III.

332. Утверждение (а) устанавливается непосредственной проверкой того, что C_{x_0} есть подкольцо кольца $C(X)$. Так же просто показать, что C_{x_0} — идеал.

(б) Пусть $C_1 \subset C(X)$ — нетривиальный идеал. Если C_1 не является идеалом вида C_{x_0}, то для любой точки $x \in X$ найдется функция $f_x \in C_1$, для которой $f_x(x) \neq 0$. Тогда, пользуясь непрерывностью функции f_x, построим такую окрестность Ox точки x, чтобы $f_x(x') \neq 0$ для любой точки $x' \in Ox$. Из бикомпактного открытого покрытия $\{Ox: x \in X\}$ выделим конечное $\{Ox_1, \ldots, Ox_k\}$. Рассмотрим непрерывную функцию $g = f_{x_1} + f_{x_2} + \ldots + f_{x_k}$. Очевидно, $g \in C_0$ и $g(x) > 0$ для всех $x \in X$. Пусть теперь h — произвольная непрерывная функция. Ее можно записать в виде $h = \frac{h}{g} \cdot g$. Так как $g \in C_1$, а C_1 — идеал, то $h \in C_1$. Значит, $C_1 = C(X)$. Получили противоречие с тем, что C_1 — нетривиальный идеал.

(в) Докажем прежде всего, что всякий идеал вида C_{x_0} максимален. Действительно, если C_1 — максимальный идеал, то существует нетривиальный идеал C_2, содержащий идеал C_1. Согласно (б) идеал C_2 содержится в идеале вида $C_{x'}$: $C_2 \subset C_{x'}$. Надо доказать, что $x = x'$. Если бы это было не так, то в силу полной регулярности X нашлась бы функция f, равная нулю в x, но равная 1 в точке x'. Тогда получили бы противоречие с включением $C_{x'} \subset C_2 \subset C_{x'}$. Итак, всякий идеал вида C_x максимален. Пусть теперь C_0 — произвольный максимальный идеал. Согласно (б) C_0 содержится в некотором идеале вида C_{x_0}. Значит (вследствие максимальности), C_0 есть некоторый идеал вида C_{x_0}.

333. (а) Пусть $x_0 \in [A]$ и $f \in \bigcap\{C_x: x \in A\}$. Отсюда получаем, что $f(x) = 0$ для любой точки $x \in A$. Тогда (по непрерывности) $f(x_0) = 0$, если $x_0 \in [A]$.

(б) Пусть x_0 — такая точка, что $C_{x_0} \supset \bigcap\{C_x: x \in A\}$. Предположим, что $x_0 \notin [A]$. Пользуясь полной регулярностью бикомпакта X, найдем непрерывную функцию f: $f(x_0) = 1$ и $f(x) = 0$, если $x \in [A]$. Тогда $f \in \bigcap\{C_x: x \in A\}$, но $f \notin C_{x_0}$. Получили противоречие.

334. Пусть $\varphi: C(X) \to C(Y)$ — изоморфизм алгебры $C(X)$ на алгебру $C(Y)$. Очевидно, при этом изоморфизме образ простого идеала (максимального идеала) будет идеалом (минимальным идеалом). Заметим (пользуясь 332 гл. III), что все максимальные идеалы в $C(X)$ и $C(Y)$ представляют собой идеалы вида C_{x_0}, $x_0 \in X$; C_{y_0}, $y_0 \in Y$. Тогда для любой точки $x \in X$ рассмотрим минимальный идеал C_{y_0}. Изоморфный образ (при рассмотрении φ) максимального идеала C_x есть максимальный идеал C_{y_0}. Положим $y = fx$. Итак, изоморфизм $\varphi: C(X) \to C(Y)$ порождает, очевидно, взаимно однозначное отображение $f: X \to Y$ (на Y). Покажем, что f — гомеоморфизм. Пусть $x_0 \in [A]$, $A \subset X$. Пользуясь 333 гл. III, получим $C_{x_0} = \bigcap\{C_x: x \in A\}$. При изоморфизме φ это включение перейдет во включение $C_{y_0} = \bigcap\{C_y: y \in fA\}$, что означает (333 гл. III) $fx_0 \in [fA]$. Итак, f непрерывно, взаимно однозначно и, значит, является гомеоморфизмом. Обратное утверждение тривиально.

337. См. Колмогоров и Фомин [1], стр. 105.

342. Множество $f(X)$ — связное подмножество числовой прямой (221 гл. II). По условию, существует отрицательное число a и положительное число b, принадлежащие $f(X)$. Но тогда, в силу 223 гл. II, весь отрезок, соединяющий точки a и b (а он содержит число 0), принадлежит $f(X)$; значит, $0 \in f(X)$, т. е. существует точка $x_0 \in X$, для которой $0 = f(x_0)$.

344. Нет: хаусдорфово пространство, состоящее из двух точек, можно отобразить на пространство, состоящее лишь из одной точки.

345. Пусть P — открыто-замкнутое подмножество пространства X, содержащее точку c^*. В силу замкнутости P множество $C = \{c \in C_0: A_c \subset P\}$ замкнуто. Поэтому множество $C' = C_0 \setminus C$ открыто в компакте C_0. Рассмотрим $C' = \{c \in C': c$ — точка второго рода в $C_0\}$. Тогда $C' \subset C'$ и $C' \setminus C''$ — счетное всюду плотное в C' множество. Значит, C'' — всюду не локально компактное множество типа G_δ в компакте. Заметим, что если $\overline{C} \neq C_0$, то C'' — открытое множество (это следует из того, что каждая точка канторова совершенного множества является его точкой конденсации). Мы сейчас представим пространство C'' в виде суммы счетного множества замкнутых и тем самым покажем, что $\overline{C} \neq C_0$ и приведем предположение $\overline{C} \neq C_0$ к противоречию (см. 23б гл. II).

Назовем точку отрезка I_c, соединяющую c и c^*, *критической*, если в любой ее окрестности есть как точки из $A_c \setminus P$, так и точки из $A_c \setminus P$. На каждом I_c при $c \in C''$ существует критическая точка в силу связности отрезка I_c и определения C'. Зафиксируем ее и обозначим через $\varphi(c)$. Из определения C'', A_c и открытости P следует, что ордината $y(\varphi(c))$ точки $\varphi(c)$ — рациональное число. Поэтому, для каждого рационального числа r, $C'_r = \{c \in C'': y(\varphi(c)) = r\}$. Из замкнутости и открытости множества P следует, что C'_r — замкнутое и C_0 множество, т. е. компакт. Очевидно, $C'' = \bigcup\{C'_r: r$ — рациональное число$\}$ — получили противоречие.

При доказательстве того, что только одноточечные подмножества пространства $X \setminus \{c^*\}$ связны, можно сначала установить, что каждое $A_c \cap (X \setminus \{c^*\})$ является пересечением открыто-замкнутых в $X \setminus \{c^*\}$ множеств (это с очевидностью вытекает из того, что каждая точка канторова множества является пересечением открыто-замкнутых в канторовом множестве множеств,— надо взять цилиндры над последними), и заметить затем, что в каждом A_c связными подмножествами являются только точки. Следует заметить, что квазикомпактны (см. стр. 171) подпространства $X \setminus \{c^*\}$ многоточечны.

346. Положим $B_\alpha = A_\alpha \cup A_{\alpha_1}$. Тогда, в силу 220 гл. II, B_α — связное множество для каждого $\alpha \in M$. Кроме того, $\bigcap\{B_\alpha: \alpha \in M\} \supset A_{\alpha_0} \neq \Lambda$. Поэтому из 220 гл. II следует, что $\bigcup\{B_\alpha: \alpha \in M\}$ — связное множество. Но, очевидно, $\bigcup\{B_\alpha: \alpha \in M\} = \bigcup\{A_\alpha: \alpha \in M\}$.

349. Так как (x) связно и $x \in (x)$, то $\mathfrak{B}_x \ni \{x\}$ и $\mathfrak{B}_x \neq \Lambda$. Очевидно, $K_x \ni x$. Множество K_x связно в силу 220 гл. II (ибо $x \in \bigcap\{P: P \in \mathfrak{B}_x\}$ и

каждое $P \in \mathfrak{C}_x$ связно). Если $Q \supset K_x$ и Q связно, то $Q \cap x_1 \neq \emptyset$ и потому $Q \subset K_x$. Следовательно, $Q = K_x$. Этим доказано, что K_x — максимальное связное множество в X.

350. (а) Действительно, если K — компонента пространства X, т. е. максимальное связное в X множество, то $[K]$ также связно (213 гл. II), следовательно, $[K] = K$.

(б) Второе утверждение задачи является следствием задачи 220 гл. II и определения компонент пространства.

351. Это следует из 349 и 350 гл. III.

352. Пусть A не связно. Тогда $A = A_1 \cup A_2$, где $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ и A_1, A_2 замкнуты в A и, следовательно, в X. Либо $A_1 \cup B = A$, либо $A_2 \cup B = A$ — в противном случае множество $A \cap B = (A_1 \cup A_2) \cap B$ было бы несвязным. Будем считать, что $A_1 \cap B = A$. Тогда $A_1 \supset C = \overline{B \setminus A_2}$ — пересекающиеся непустые замкнутые в X и, тем более, в $A \cup B$ множества, и $A_1 \cup C = A \cup B$ — а это противоречит связности множества $A \cup B$. Пример: $A = \{x: 0 \leqslant x < 1\}$, $B = \{0, 1\}$. Тогда B не связно, но $A \cap B = \{0\}$ — связное множество и $A \cup B = \{x: 0 \leqslant x < 1\}$ — связное множество.

353. Рассмотрим гиперпространство Z плоскости π, снабженной прямоугольной декартовой системой координат, образованное всеми точками, первые координаты которых рациональны, а вторые рациональны и неотрицательны. Множества Z счетно. Введем в него необычную топологию $\mathcal{T}^*$. Зафиксируем иррациональное число α (точно, для определенности, считать, что $\alpha = \sqrt{3}$). Положим $Z' = \{(x, 0) \in \pi: x$ рационально$\}$. Все множества, открытые в Z' относительно обычной топологии, индуцированной из плоскости, мы объявим открытыми в Z — т. е. элементами топологии $\mathcal{T}^*$. Совокупность всех интервалов, лежащих на оси Ox, обозначим через $\mathfrak{B}$. Для каждого $U \in \mathfrak{B}$ положим $U^+ = \{(x', y') \in Z \setminus Z'$: прямая $(y - y') = \alpha(x - x')$ пересекает $U\}$ и $U^- = \{(x', y') \in Z \setminus Z'$: прямая $(y - y') = -\alpha(x - x')$ пересекает $U\}$. Все множества вида $\{z\} \cup (U \cap Z') \cup (V^+ \cap Z')$, где U, $V \in \mathfrak{B}$ и $z \in U^- \cap V^-$, мы назовем открытыми в Z. Все множества, дополнения которых открыты в Z, образуют базу некоторой топологии на Z (проверьте сами!). Эта топология наименьшая. Проверим, что Z — хаусдорфово пространство. Пусть $z_1 \in Z$, $z_2 \in Z$ и $z_1 \neq z_2$. Случай $z_1 \in Z'$ и $z_2 \in Z'$ ясен. Если $z_1 \notin Z'$, а $z_2 \in Z'$, то прямые l и l', проходящие через точку z_1 и образующие с осью абсцисс углы, тангенсы которых равны соответственно $+\alpha$ и $-\alpha$, пересекают ось Ox в точках $(x, 0)$ и $(x', 0)$, отличных от z_2 (ибо α — иррациональное число!). Выбрав интервалы $U \ni (x, 0)$, $V \ni (x', 0)$ и $W \ni z_2$ непересекающиеся, мы заключаем, что $\{z_1\} \cup (U \cap Z') \cup (V \cap Z')$ и W — искомые окрестности.

Аналогичное рассуждение проходит для случая, когда $z_1, z_2 \in Z \setminus Z'$.

Докажем, что Z связно. Пусть $Z = Z_1 \cup Z_2$, где Z_1 и Z_2 — непустые непересекающиеся открытые подмножества пространства Z. Так как $[Z'] = Z$ (это сразу следует из определения топологии $\mathcal{T}^*$), то $Z' \cap Z_1 \neq \Lambda$ и $Z' \cap Z_2 \neq \Lambda$, причем $Z' \cap Z_1$ и $Z' \cap Z_2$ — открытые множества. Выберем на оси Ox интервалы U и V, для которых $U \cap Z' \subset Z' \cap Z_1$ и $V \cap Z' \subset Z' \cap Z_2$. Тогда, с одной стороны, $[U \cap Z'] = [Z_1] = Z_1$ и $[V \cap Z'] \subset [Z_2] = Z_2$, и потому $[U \cap Z'] \cap [V \cap Z'] = \Lambda$. С другой стороны, ясно, что $[U \cap Z'] \supset U^+ \cup U^-$ и $[V \cap Z'] \supset V^+ \cup V^-$. Теперь достаточно написать множества U^+, U^-, V^+ и V^-, чтобы убедиться, что, каковы бы ни были интервалы U и V, непременно $(U^- \cup U^-) \cap (V^+ \cup V^-) \neq \Lambda$. Получили противоречие. Итак существу, мы показали, что замыкания любых двух открытых в Z множеств пересекаются.

Счетного регулярного связного пространства X не существует. Действительно, если X — счетное регулярное пространство, то оно нормально (18, 19 гл. III), а следовательно, существует непрерывная функция на X, отличная от константы. Тогда $f(X)$ — многоточечное счетное подмножество

на числовой прямой, а следовательно, несвязное множество (223 гл. II). Теперь остается сослаться на задачу 221 гл. II.

354. Пусть ξ — рассматриваемый предфильтр. Зафиксируем некоторый элемент $X_0 \in \xi$. Положим $\xi_0 = \{\Phi \in \xi: \Phi \subset X_0\}$. Тогда ξ_0, — очевидно, предфильтр на X_0 (см. стр. 20) и $\bigcap \{\Phi: \Phi \in \xi_0\} = \bigcap \{\Phi: \Phi \in \xi\}$ — это сразу вытекает из основного свойства предфильтров. Но пространство X_0 нормально (как всякий бикомпакт — см. 64 гл. III), а все $\Phi \in \xi_0$ замкнуты в X_0 (см. 56 гл. III). В этом преимущества X_0 и ξ_0 перед ξ и исходным топологическим пространством X, на котором был задан предфильтр ξ и о котором мы не предполагали ничего. Положим $F = \bigcap \{\Phi: \Phi \in \xi_0\}$. Множество F замкнуто в X_0 и является бикомпактом. Предположим, что F не связно. Тогда $F = F_1 \cup F_2$, где $F_1 \neq \Lambda$, $F_2 \neq \Lambda$, $F_1 \cap F_2 = \Lambda$, F_1 и F_2 замкнуты в F и, значит, в X_0, и $F_1 \cap F_2 = \Lambda$. Существуют (55 и 19 гл. III) открытые в X_0 множества U_1 и U_2, такие, что $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$ и $[U_1] \cap [U_2] = \Lambda$. Положим $U = U_1 \cup U_2$. Тогда $U \supset F$. Из 86 гл. III следует, что существует $\Phi \in \xi_0$, для которого $F \supset \Psi \subset U$. Положим $\Phi_1 = \Phi \cap [U_1]$ и $\Phi_2 = \Phi \cap [U_2]$. Так как $\Phi \subset [U_1] \cup [U_2]$, то $\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi$. Из $[U_1] \cap [U_2] = \Lambda$ следует, что $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \Lambda$. Множества Φ_1 и Φ_2 замкнуты в X_0, так как множества Φ, $[U_1]$ и $[U_2]$ замкнуты в X_0. Наконец, $\Phi_1 \neq \Lambda$, ибо $\Phi_1 \supset F_1 \neq \Lambda$; $\Phi_2 \neq \Lambda$, ибо $\Phi_2 \supset F_2 \neq \Lambda$. Следовательно, Φ не связно — получили противоречие (возникшее от того, что мы предположили F несвязным).

355. Элементы убывающей последовательности связных бикомпактов составляют предфильтр. Поэтому утверждение вытекает из задачи 354 гл. III.

356. Пусть π — плоскость с фиксированной декартовой системой координат xOy. Положим $\mathcal{F} = \left\{(x, y) \in \pi: 0 < x \leqslant 1, y = \sin \frac{1}{x}\right\}$, $S = \{(x, y) \in \pi: x = 0, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ и $\Phi = \mathcal{F} \cup S$. Множество Φ — замкнутое ограниченное подмножество плоскости π, следовательно, Φ — компакт. Пространство Φ связно. Действительно, пространство $\mathcal{F}$ является непрерывным образом $\left(\text{при отображении } x \to \left(x, \sin \frac{1}{x}\right)\right)$ полуинтервала $(0, 1]$, т. е. связного множества, и потому связно. Но $\Phi = [\mathcal{F}]$. Следовательно (212 гл. II, 347 гл. III), Φ связно. Но Φ не локально связно ни в одной из точек множества S. Например, рассмотрим открытое подмножество U пространства Φ, являющееся пересечением полосы $\Pi = \left\{(x, y) \in \pi: -\infty < x < +\infty, -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}\right\}$ с Φ. Очевидно, компонента точки $(0, 0) \in U$ в пространстве U есть множество $\left\{(x, y): x = 0, -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}\right\}$, не открытое в U. Следовательно, Φ не локально связно (см. 370 гл. III).

357. Рассмотрим семейство $\mathfrak{C}$ всех связных бикомпактных подмножеств пространства X, содержащих обе точки x, y. $\mathfrak{C} \neq \Lambda$, ибо $X \in \mathfrak{C}$. В классе всех гнезд, образованных из элементов семейства $\mathfrak{C}$, существует максимальное гнездо (это следует из принципа Куратовского — Цорна — см. стр. 18). Пусть ξ — такое максимальное гнездо. Это означает, что (а) если A, $B \in \xi$, то либо $A \subset B$, либо $B \subset A$; (б) $\xi \subset \mathfrak{C}$ и (в) если $\{C\} \cup \xi$ — гнездо и $C \in \mathfrak{C}$, то $C \in \xi$. Положим $\Phi = \bigcap \{F: F \in \xi\}$. В силу 354 гл. III Φ — связный бикомпакт и $\Phi \ni x$, $\Phi \ni y$, ибо все элементы семейства ξ содержат x и y. Рассмотрим произвольный бикомпакт C, лежащий в Φ и отличный от всего Φ. Тогда $\xi \cup \{C\}$ — гнездо (не утверждается, что в $\mathfrak{C}$), и $C \notin \xi$. Значит, $C \notin \mathfrak{C}$, т. е. либо C не связен, либо $C \not\supset \{x, y\}$. Значит, бикомпакт Φ неприводим между x и y.

358. Пусть P — компонента множества U и $[P] \subset U$. Тогда $P = [P]$ (см. 347 гл. III). Существует бикомпакт $V \subset U$, открытое ядро V^0 которого содержит P (т. е. $V^0 \supset P$). Рассмотрим точку $x^* \in P$ и ее компоненту C_{x^*}

в пространстве V. Тогда $C_{x^*} \subset P \subset V^0$ (см. 349 гл. III) и потому $C_{x^*} = P$. Рассмотрим пространство разбиения Z пространства V на компоненты и естественное отображение $\pi: V \to Z$ (365 гл. III). Положим $F = V \setminus V_0$, $\Phi = \pi(F)$, $z^* = \pi(C_{x^*})$. Из $C_{x^*} \cap F = \Lambda$ следует, что $\Phi \not\ni z^*$. При этом Z — бикомпакт, обладающий базой из открыто-замкнутых множеств (см. 366 гл. III), и Φ замкнуто в Z как бикомпактное подпространство пространства Z (Φ бикомпактно как непрерывный образ бикомпакта F). Следовательно, существует открыто-замкнутое в Z множество $Oz^* \ni z^*$, для которого $\Phi \cap Oz^* = \Lambda$. Положим $W = \pi^{-1}Oz^*$. Тогда $P \subset W \subset V^0$ и W открыто в V. Тем более, W открыто в V^0. Но V^0 открыто в X. Значит, W открыто в X. С другой стороны, W замкнуто в V как прообраз замкнутого множества Oz^* при непрерывном отображении π. Так как V замкнуто в X, то W замкнуто в X. Значит, W открыто-замкнуто в X, $W \supset P \ni x^*$, т. е. $W \neq \Lambda$ и $X \setminus W \supset X \setminus V \neq \Lambda$, т. е. $W \neq X$, что противоречит связности X.

359. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$. Достаточно рассмотреть случай, когда все X_i не пусты. Так как $X_2 \cap X_1 = \Lambda$, то существует открытое в X множество U, для которого

$$X_2 \subset U \subset [U] \subset X \setminus X_1. \tag{1}$$

Выберем точку $x \in X_2$ и рассмотрим компоненту C пространства U, содержащую x. Положим $\Phi_1 = [C]$. Тогда, в силу (1), $\Phi_1 \cap X_1 = \Lambda$, в силу 358 гл. III $\Phi_1 \supset (X \setminus U) \neq \Lambda$ и потому $\Phi_1 \not\subset X_2$, но $\Phi_1 \cap X_2 \neq \Lambda$, ибо $x \in \Phi_1 \cap X_2$. Ясно, что Φ_1 — связный бикомпакт. Предположим, что уже определен связный бикомпакт Φ_i, для которого $\Phi_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i} X_j\right) = \Lambda$ и $\Phi_i \not\subset X_j$ при $j \geqslant i$. Положим $j_0 = \min\{j: \Phi_i \cap X_j \neq \Lambda\}$. Тогда существует $j' \neq j_0$, для которого $\Phi_i \cap X_{j'} \neq \Lambda$. Через V обозначим открытое множество, содержащее множество $\Phi_i \cap X_{j'}$ и такое, что $[V] \cap X_{j_0} = \Lambda$. Тогда Φ_{i+1} определяется как замыкание в X компоненты какой-нибудь точки $x \in \Phi_i \cap X_{j'}$ в пространстве $V \cap \Phi_i$. Тогда Φ_{i+1} — связное бикомпактное множество, для которого $\left(\bigcup_{j=1}^{i+1} X_j\right) \cap \Phi_{i+1} = \Lambda$, $\Phi_{i+1} \cap X_{j'} \neq \Lambda$, $\Phi_{i+1} \cap (\Phi_i \setminus V) \supset \Phi_{i+1} \cap (\Phi_i \setminus X_{j'}) \supset \Phi_{i+1} \cap (\Phi_i \setminus X_{j'}) \supset \Phi_{i+1} \cap (\Phi_i \setminus V) \neq \Lambda$ и $\Phi_{i+1} \not\subset \Phi_i$. Описанное построение по индукции дает убывающую последовательность $\{\Phi_i: i \in N^+\}$ непустых замкнутых множеств, для которой $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Phi_i$ — непусто множество, не пересекающееся с множеством $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ — получили противоречие.

360. (а) Присоединим к X весь отрезок $I_0 = \{0\} \times [0, 1]$. Получим компакт $\tilde{X}$. Интервал $I_0 \setminus (\{(0, 0)\} \cup \{(0, 1)\})$ в этом компакте есть множество типа G_δ. Тогда наше пространство X в этом компакте имеет тип G_δ. Значит, вследствие 234 гл. II, X гомеоморфно полному метрическому пространству.

(б) Обозначим через X_0 — $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left\{\frac{1}{n}\right\} \times [0, 1]\right)$. Ясно, что X_0 есть объединение счетного числа отрезков, а все пространство X является объединением счетного числа отрезков и одиночных компактов $\{0, 0\}$ и $\{0, 1\}$.

(в) Рассмотрим точки $(0, 0)$ и $(0, 1)$ в X. Нетрудно убедиться в том, что для любой окрестности U точки $(0, 0)$ или точки $(0, 1)$ замыкание $[U]_X$ бикомпактно. Однако у любой другой точки существует окрестность, замыкание которой бикомпактно.

(г) Теперь докажем, что X нельзя отобразить ни на какой бикомпакт. Предположим, что существует бикомпакт Y и взаимно однозначное непрерывное отображение $f: X \to Y$ на Y. Ясно, что Y необходимо метризуем. Обозначим $I_n = \left\{\frac{1}{n}\right\} \times [0, 1]$, точки $(0, 0) = a_1$, $(0, 1) = a_2$. Отображение f, рассматриваемое на каждом отрезке I_n, есть гомеоморфизм, ибо f непрерывно, а I_n — бикомпактное подпространство. Значит, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} fI_n \cup fa_1 \cup fa_2$, где fI_n гомеоморфно отрезку числовой оси. Обозначим через B множество всех точек $y \in Y$, полная окрестность которых имеет непустое пересечение с бесконечным числом отрезков fI_n, $n = 1, 2, \ldots$. Пользуясь непрерывностью отображения, легко можно показать, что $fa_1 \subset B$ и $fa_2 \in B$, откуда получаем, что $B \neq \Lambda$. Ясно, кроме того, что B замкнуто в компакте Y. Докажем, что B — связное множество. Предположим противное, пусть $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \Lambda$, $B_1 \neq \Lambda$, $B_2 \neq \Lambda$, B_1 и B_2 — замкнутые множества. Рассмотрим, пользуясь нормальностью, открытые в Y множества V_1 и V_2, для которых $B_1 \subset V_1$, $B_2 \subset V_2$, $V_1 \cap V_2 = \Lambda$. Рассмотрим также окрестность $V(B) = V_1 \cup V_2$ замкнутого множества B. Утверждаем, что окрестность $V(B)$ (как и любая окрестность множества B) содержит все отрезки fI_n, начиная с некоторого номера n_1. Если бы это было не так, то нашлась бы последовательность номеров $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ и точек $\{y_{n_k}: k \in N^+\}$, для которой $y_{n_k} \in fI_{n_k} \cap (Y \setminus V(B))$. Тогда предельная точка y_0 для последовательности $(y_{n_k}: k \in N^+)$, существующая вследствие компактности Y (см. 258 гл. III), не принадлежит B, вопреки определению этого множества.

Итак, все отрезки fI_n, начиная с некоторого номера n_1, содержатся в $V(B)$. Кроме того, всякая окрестность как точки fa_1, так и точки fa_2 пересекает все отрезки fI_n, начиная с некоторых номеров. Вследствие этого найдется такое $n^* \in N^+$, что $fI_{n^*} \subset V(B)$ и $fI_{n^*} \cap V_1 \neq \Lambda$, $fI_{n^*} \cap V_2 \neq \Lambda$. Учитывая, что $V_1 \cap V_2 = \Lambda$, получаем противоречие со связностью отрезка fI_{n^*} (см. 222 гл. II). Итак, множество B непусто, связно и замкнуто в компакте Y. Кроме того, $B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} fI_n = \Lambda$, ибо в противном случае B можно было бы представить в виде объединения счетного семейства попарно не пересекающихся замкнутых множеств, что противоречит задаче 359 гл. III.

362. Воспользуйтесь утверждением: пространство, гомеоморфное прямой, связно; объединение связных множеств, пересечения которых не пусты, связно (346 гл. III); замыкание связного множества связно (233 гл. II, 347 гл. III). Искомая компонента дополнения до точки $(0, 1)$ — прямая $y = 1$.

363. На плоскости с прямоугольной декартовой системой координат xOy выделим подпространство $X = \{(0, 0), (1, 0), (x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1, y = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots\}$. Компонента точки $(0, 0)$ в пространстве X состоит из нее одной (доказать это аккуратно!). Но квазикомпонента точки $(0, 0)$ в X состоит из двух точек: $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Мы проверим только, что если U — открыто-замкнутое в X множество, содержащее точку $(0, 0)$, то и $(1, 0) \in U$. Так как $U \ni (0, 0)$ и U открыто в X, существует целое n_0 такое, что $U \cap I_n \neq \neq \Lambda$ при всех $n \geqslant n_0$, где $I_n = \left\{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1, y = \frac{1}{n}\right\}$. Из открыто-

замкнутости U в связности I_0 (см. 222 гл. II) следует, что тогда $U \supset I_0$ при всех $n \geqslant n_0$. Но U замкнуто в $\left[\bigcup \{I_n: n > n_0\}\right] \ni (1, 0)$. Значит, $U \ni (1, 0)$. Другой пример — пространство $X \setminus \{c^*\} = X_1$ из задачи 345 гл. III.

364. Пусть σ_{x_0} — система всех открыто-замкнутых в X множеств, содержащих точку x_0. Покажем прежде всего, что замкнутое множество $P_{x_0} = \bigcap \{U: U \in \sigma_{x_0}\}$ связно. Предположим противное, тогда $P_{x_0} = F_1 \cup F_2$, где $F_1 \cap F_2 = \Lambda$, $F_1 \neq \Lambda$, $F_2 \neq \Lambda$, F_1, F_2 замкнуты в P_{x_0} (значит, и в X). В силу нормальности бикомпакта X существуют окрестности $U(F_1)$, $U(F_2)$ этих множеств (в X), для которых $\overline{U(F_1)} \cap \overline{U(F_2)} = \Lambda$. Рассмотрим окрестность $U(P_{x_0}) = U(F_1) \cup U(F_2)$ замкнутого множества P_{x_0}. Пользуясь 66 и 67 гл. III, находим $U \in \sigma_{x_0}$, для которого $U \subset U(P_{x_0})$. Тогда $U' = U(F_1) \cap U$, $U^* = U(F_2) \cap U$ открыты в X, $U = U' \cup U^*$ и $U' \cap U^* = \Lambda$. Следовательно, U' и U^* открыто-замкнуты в X и $U' \neq \Lambda$, $U^* \neq \Lambda$. Кроме того, $F_1 \subset U'$, $F_2 \subset U^*$. Поэтому если $x_1 \in F_1 \subset U'$, то $P_{x_1} = F_1 \cup F_2 \subset U'$, так как $U' \cap U^* = \Lambda$. Получили противоречие с определением множества P_{x_1}. Итак, P_{x_0} связно. Так как K_{x_0} — связная компонента точки x_0, то $P_{x_0} \subset K_{x_0}$.

Остается доказать обратное включение $K_{x_0} \subset P_{x_0} = \bigcap \{U: U \in \sigma_{x_0}\}$. Если бы $K_{x_0} \not\subset U$ для некоторого $U \in \sigma_{x_0}$, то мы бы получили собственное непустое открыто-замкнутое в K_{x_0} множество $U \cap K_{x_0}$, что противоречило бы связности множества K_{x_0}. Следует заметить, что существуют даже метризуемые пространства со счетной базой, для которых наше предложение неверно (см. 363 гл. III).

365. Пусть $A \in Z \in U$ — открытое в X множество. $U \supset A$. Рассмотрим семейство $\mathfrak{B}$ открыто замкнутых в X множеств, содержащих множество A. В силу 364 гл. III $A = \bigcap \{Q: Q \in \mathfrak{B}\}$. Из последнего соотношения и того, что $\mathfrak{B}$ — семейство замкнутых в бикомпакте X множеств, содержащее пересечение любого конечного множества своих элементов, следует (см. 87 гл. III), что $Q_0 \subset U$ для некоторого $Q_0 \in \mathfrak{B}$. Но если $A' \subset Z$ и $A' \cap Q_0 \neq \Lambda$, то $A' \subset Q_0$ — это следует из связности множества A' и открыто-замкнутости множества Q_0. Этим непрерывность разбиения Z доказана.

366. Рассматриваемое разбиение непрерывно (см. 365 гл. III), а потому пространство разбиения Z — бикомпакт (91, 92 гл. III). Пусть $z \in Z$. Рассмотрим z как подмножество $\tilde{z}$ пространства X. Тогда произвольной окрестности Oz точки z в Z соответствует открытое в X множество $\overline{Oz}$, содержащее множество $\tilde{z}$. Существует (см. решение задачи 365 гл. III) открыто замкнутое в X множество $\overline{U}$ такое, что $\tilde{z} = \overline{U} \subset \overline{Oz}$. Множество $\overline{U}$ является объединением элементов рассматриваемого разбиения (т. е. оно естественное — см. стр. 91). Значит, множество U тех точек пространства Z, прообразы которых содержатся в $\overline{U}$ (при естественном проектировании $\pi: X \to Z$ — см. стр. 58), открыто-замкнуто в Z (см. определение факторного отображения). Очевидно, $z \in U \subset Oz$.

367. Такое пространство указано в решении задачи 363 гл. III.

368. См. Б у р б а к и [2], стр. 225.

368. В силу 350 гл. III различные компоненты произвольного пространства не пересекаются. Эти компоненты в рассматриваемом случае являются открытыми множествами (370 гл. III). Но открытое подпространство локально связного пространства локально связно. Добавим, что каждая точка пространства принадлежит некоторой его компоненте и что все компоненты связны. Наконец, ясно, что пространство является свободной суммой элементов любого своего дизъюнктного открытого покрытия.

370. (а) $\Rightarrow$ (б). Рассмотрим компоненту V открытого множества Ox, содержащую точку x. В силу условия (а) V открыто и $x \in \operatorname{Int} V = V \subset Ox$.

(б) $\Rightarrow$ (а). Пусть $x \in W$, где W — компонента открытого множества U. Пусть U за Ox. Из условия (б) тогда следует, что существует связное множество V, для которого $x \in \operatorname{Int} V \subset V \subset U$. Множество $W \cup V$ связно как объединение двух пересекающихся связных множеств. Но $W \cup V \subset U$. Так как W — компонента множества U, мы заключаем, что $W \cup V = W$, т. е. что $V \subset W$. Окончательно, $x \in \operatorname{Int} V \subset W$; значит, W — открытое множество.

371. См. В у р б а к и [2], стр. 183.

372. Воспользуемся обозначениями из решения задачи 356 гл. III. Рассмотрим квазиотрезок $X = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 4\}$ с обычной топологией. Пусть $I_1 = \{(x, y): x = 1, \ -2 \leqslant y \leqslant \sin 1\}$, $I_2 = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1, \ y = -2\}$, $I_3 = \{(x, y): x = 0, \ -2 \leqslant y \leqslant +1\}$. Отобразим отрезок $I_0 = \{x: 1 \leqslant x \leqslant 4\}$ на пространство $I_1 \cup I_2 \cup I_3$ посредством некоторого гомеоморфизма φ, при котором $\varphi(1) = (1, \sin 1)$, $\varphi(4) = (0, +1)$. Полуинтервал $P_1 = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ отобразим на множество $\mathcal{S}$ по правилу $\psi(x) = \left(x, \sin \frac{1}{x}\right)$. Тогда φ и ψ непрерывны и согласуются на $P_1 \cap I_0 = \{1\}$. Значит, $f: X \to Y = \mathcal{S} \cup I_1 \cup I_2 \cup I_3$, где $f(x) = \psi(x)$ при $1 \leqslant x \leqslant 4$ и $f(x) = \varphi(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ — непрерывное отображение. Пространство X локально связно и связно, а пространство Y не локально связно — это доказывается точно таким же образом, каким при решении задачи 356 гл. III было доказано, что Φ не локально связна.

373. Пусть X — локально связное пространство, $f: X \to Y$ — факторное отображение, $f(X) = Y$ и V — открытое в Y множество. Через C обозначим произвольную компоненту множества V. Покажем, что $f^{-1}(C)$ — открытое в X множество. Если $x \in f^{-1}(C)$, то $x \in f^{-1}(V) = U$. Множество U открыто, поэтому к компоненте K множества U, содержащей x, является открытым множеством (это вытекает из локальной связности X). Но тогда $f(K)$ — связное множество и $U \supset f(K) \ni f(x)$. Из $f(x) \subset C$ заключаем, что $f(K) \cap C \neq \Lambda$. Следовательно (см. 368 гл. III), $f(K) \cup C$ — связное множество, лежащее в V, и потому $f(K) \cup C = C$, т. е. $f(K) \subset C$. Значит, $x \in K \subset f^{-1}(C)$, т. е. множество $f^{-1}(C)$ открыто. Так как отображение f факторное, то множество C тоже открыто. А это означает, что пространство Y локально связно (см. 370 гл. III).

374. Отрезок связен (222 гл. II). Поэтому и X связно (224 гл. II). Далее, отображение f замкнуто (82 гл. III) и, следовательно, является факторным отображением (315 гл. II). Но отрезок локально связен (230 гл. II). Значит, и пространство X локально связно (370 гл. III).

376. См. Х а у с д о р ф [1], стр. 186, или К у р а т о в с к и й [1], т. 2, стр. 261.

ГЛАВА IV

БИКОМПАКТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ

Пространство Y называется расширением топологического пространства X, если Y содержит X в качестве всюду плотного подпространства. Иногда удобнее такое определение: Y — расширение пространства X, если задан гомеоморфизм X на всюду плотное подпространство пространства Y. Первое и второе определения очевидным образом равносильны. Если при этом Y удовлетворяет T_i-аксиоме отделимости, то Y называют T_i-расширением пространства X. Соответственно, если Y — хаусдорфово пространство, то говорят, что Y — хаусдорфово расширение пространства X. Особенно важны бикомпактные хаусдорфовы расширения пространства X, т. е. те бикомпакты, которые содержат X в качестве всюду плотного подпространства. Символ bX с модификациями — обычное обозначение для того или иного бикомпактного хаусдорфова расширения пространства X, в то время как через $\bar{X}$ или через rX (с модификациями) мы будем обозначать произвольное расширение пространства X.

Нарастом над A в его расширении $\bar{X}$, или просто *нарастом* расширения $\bar{X}$ (имеется в виду — по отношению к заданному X) называется пространство $\bar{X} \setminus X$, снабженное топологией, индуцированной из $\bar{X}$.

К числу важных и общих относится задача продолжения непрерывных отображений топологических пространств на их расширения. Пусть f — непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y и заданы $\bar{X}$, $\bar{Y}$ — некоторые расширения этих пространств. *Продолжением* отображения f на $\bar{X}$ называется тогда любое *непрерывное* отображение $\bar{f}\colon \bar{X} \to \bar{Y}$ такое, что $\bar{f} \mid X = f$ (т. е. $\bar{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in X$). Таким образом, термин «продолжение» включает в себя уже предположение о непрерывности. Расширения r_1X и r_2X одного и того же пространства X называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм φ пространства r_1X на пространство r_2X такой, что $\varphi(x) = x$ для всех $x \in X$ (т. е. $\varphi \mid X$ — тождественное отображение). Понятие эквивалентности расширений очень важно, как и следующее его обобщение.

Скажем, что расширение r_1X *подчинено* расширению r_2X или меньше, чем расширение r_2X (и пишем $r_1X \preceq r_2X$), если существует непрерывное отображение ψ пространства r_2X на пространство r_1X такое, что $\psi^{-1}(x) = x$ для всех $x \in X$. Термин «меньшее» не имеет здесь смысла «строго меньшее».

Рекомендуем читателю, прежде чем он приступит к решению задач из этой главы, перечитать теоретическое введение к § 1 гл. III — вопросы, связанные с функциональной отделимостью (c-отделимостью), играют ниже самую существенную роль.

§ 1. Общие конструкции и общие задачи

1. Докажите, что любое T_1-пространство одной точкой может быть дополнено до бикомпактного T_2-пространства (сравните с задачей 176 гл. III).

2. Пусть X есть T_1-пространство. Покажите, что

(а) всякая центрированная система замкнутых в X множеств содержится в некоторой максимальной центрированной системе замкнутых множеств.

Пусть ξ — максимальная центрированная система замкнутых в X множеств. Покажите, что

(б) если $F_1 \in \xi$, $F_2 \in \xi$, то $F_1 \cap F_2 \in \xi$;

(в) если $F_1 \subset \xi$ и $F_2 \supset F_1$, то $F_2 \in \xi$;

(г) если $F_0 \cap F \neq \Lambda$ для любого $F \in \xi$, то $F_0 \in \xi$.

3. Пусть X — T_1-пространство, ωX — совокупность всех максимальных центрированных систем замкнутых в X множеств. Для каждого замкнутого в X множества F положим

$$\Phi_F = \{\xi \in \omega X\colon F \in \xi\}.$$

Для каждого открытого в X множества U положим

$$W_U = \omega X \setminus \Phi_{X \setminus U}.$$

(а) Докажите, что для любой конечной системы $\{F_1, \ldots, F_s\}$ замкнутых в X множеств всегда

$$\bigcap_{i=1}^{s} \Phi_{F_i} = \Phi_{\bigcap_{i=1}^{s} F_i}.$$

(б) Докажите, что $W_U = \{\xi \in \omega X$: существует такое $F_0 \in \xi$, что $F_0 \subset U\}$.

(в) Семейство всех множеств вида W_U, где U открыто в X, является базой некоторой топологии на ωX. Докажите, что ωX — бикомпактное T_2-пространство по отношению к этой топологии. Множество ωX всегда будет считаться наделенным указанной топологией.

(г) Покажите, что система $(\varkappa)$ всех замкнутых в X множеств, содержащих точку $x \in X$, есть максимальная центрированная система, и соответствие $x \to (\varkappa)$ есть топологическое отображение пространства X на всюду плотное подпространство пространства ωX. В дальнейшем пространство X мы отождествляем с этим топологическим образом и называем ωX *расширением Уэмэя* пространства X.

4. Если T_1-пространства X и Y гомеоморфны, то и их уолмэновские расширения ωX и ωY гомеоморфны.

5. (а) Покажите, что для любого замкнутого в X множества F непременно $[F]_{\omega X} = \theta_{\omega_X}$ (см. 3 тл. IV), где ωX — уолмэновское расширение пространства X.

(б) Покажите также, что для любых непересекающихся замкнутых в X множеств F_1 и F_2 непременно $[F_1]_{\beta X} \cap [F_2]_{\beta X} = \Lambda$.

6. Покажите, что уолмэновское расширение T пространства X хаусдорфово тогда и только тогда, когда X нормально.

7. Каждое ли хаусдорфово пространство со счетной базой может быть представлено как подпространство бикомпактного T_1-пространства со счетной базой?

8. Докажите, что каждое вполне регулярное пространство веса τ имеет бикомпактное хаусдорфово расширение веса τ.

9. Вполне регулярны те и только те пространства, которые гомеоморфны подпространствам бикомпактов.

10. Бикомпактные хаусдорфовы расширения b_1X и b_2X вполне регулярного пространства X эквивалентны в том и только в том случае, если соотношения $[P]_{b_1X} \cap [P']_{b_2X} = \Lambda$ и $[P]_{b_2X} \cap [P']_{b_1X} = \Lambda$ равносильны для всех $P, P' \subset X$.

11. Пусть X — вполне регулярное пространство и f — его непрерывное отображение в некоторый бикомпакт Y. Тогда существуют бикомпактное хаусдорфово расширение bX пространства X (имеющее вес, не больший чем максимум весов X и Y) и непрерывное отображение $\tilde{f}: bX \to Y$, для которых $\tilde{f} \mid X = f$.

12. У каждого вполне регулярного пространства X существует бикомпактное хаусдорфово расширение bX такое, что каждое непрерывное отображение f пространства X в бикомпакт продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f}$ всего bX в этот бикомпакт.

13. Если b_1X и b_2X — бикомпактные хаусдорфовы расширения пространства X, каждое из которых обладает тем свойством, что любая непрерывная ограниченная вещественная функция, определенная на X, продолжается до непрерывной функции, определенной на всем b_1X (соответственно на всем b_2X), то b_1X и b_2X эквивалентны (см. стр. 232). В соответствии с этим утверждением о единственности, каждое из бикомпактных хаусдорфовых расширений, обладающих указанным свойством продолжения,

называется *расширением Стоуна — Чеха* пространства X и обычно обозначается через βX.

14. Пусть X — вполне регулярное пространство и $\mathscr{F} = (I_\alpha: \alpha \in A)$ — семейство всех непрерывных вещественных функций на X, все значения которых заключены на отрезке $I = [0, 1]$. Положим $I_\alpha = I = [0, 1]$ для всех $\alpha \in A$ и рассмотрим диагональное произведение φ всех элементов семейства $\mathscr{F}$, $\varphi: X \to \Pi (I_\alpha: \alpha \in A) = I^{|\mathscr{F}|}$. Тогда φ — гомеоморфизм «в», т. е. X гомеоморфно $\varphi(X)$, где $\varphi(X)$ рассматривается как подпространство пространства $I^{|\mathscr{F}|}$, а $b_{\varphi(X)}|_{I^{|\mathscr{F}|}}$ — расширение Стоуна — Чеха пространства $\varphi(X)$ (или пространства X — если отождествить X с $\varphi(X)$ посредством φ).

15. Бикомпактное хаусдорфово расширение bX пространства X является его расширением Стоуна — Чеха в том и только в том случае, когда для любых двух функционально отделимых в X множеств P и P' выполняется условие $[P]_{bX} \cap [P']_{bX} = \Lambda$.

16. Бикомпактное хаусдорфово расширение bX нормального пространства X является его расширением Стоуна — Чеха в том и только в том случае, если замыкания в bX любых двух замкнутых в X непересекающихся множеств не пересекаются.

17. Покажите, что уолмэновское расширение ωX нормального пространства X совпадает с расширением Стоуна — Чеха βX.

18. Если бикомпактное хаусдорфово расширение bX пространства X является расширением Стоуна — Чеха, то любое непрерывное отображение пространства X в бикомпакт можно продолжить до непрерывного отображения всего bX в этот бикомпакт.

19. Если βX — расширение Стоуна — Чеха пространства X, $P \subset X$ и P замкнуто в X, то $[P]_{\beta X}$ является расширением Стоуна — Чеха пространства P в том и только в том случае, если каждая непрерывная ограниченная вещественная функция, определенная на P, продолжается до непрерывной ограниченной вещественной функции, определенной на всем X. Покажите, что последнее условие выполняется не всегда.

20. Если X нормально, а A замкнуто в X, то $[A]_{\beta X}$ совпадает с βA (здесь βX — расширение Стоуна — Чеха пространства X, а βA — расширение Стоуна — Чеха пространства A).

21. Если βX — расширение Стоуна — Чеха вполне регулярного пространства X и $X \subset Y \subset \beta X$, то βX также является расширением Стоуна — Чеха пространства Y.

22. Если bX — произвольное бикомпактное хаусдорфово расширение пространства X и βX — расширение Стоуна — Чеха этого пространства, то существует и единственно непрерывное отображение $f: \beta X \to bX$, для которого $f(x) = x$ при всех $x \in X$.

Это f будет в дальнейшем именоваться *стандартным* (или *естественным*) *отображением* βX на bX.

23. Вполне регулярное пространство X имеет более одного (с точностью до эквивалентности) бикомпактного хаусдорфова расширения в том и только в том случае, если существуют замкнутые функционально отделимые в X множества P_1 и P_2, ни одно из которых не бикомпактно.

24. Покажите, что пространство $T(\omega_1)$ (см. стр. 152) имеет единственное бикомпактное хаусдорфово расширение (а именно, $T(\omega_1) \cup \{\omega_1\}$).

25. Если X — нормальное пространство, βX — его расширение Стоуна — Чеха и P — замкнутое в X множество типа G_δ в X, то существует множество $\tilde{P}$ типа G_δ в βX такое, что $\tilde{P} \cap X = P$ и $\tilde{P} = [P]_{\beta X}$.

26. Если вполне регулярное пространство X имеет только одно бикомпактное хаусдорфово расширение (с точностью до эквивалентности), то X локально бикомпактно и псевдокомпактно.

27. Пусть b_1X, b_2X — бикомпактные хаусдорфовы расширения пространства X и $f\colon b_1X \to b_2X$ — естественное непрерывное отображение. Тогда $f^{-1}X = X$.

28. Пусть пространство X является множеством типа G_δ в некотором своем бикомпактном хаусдорфовом расширении vX. Докажите, что тогда X имеет тип G_δ в каждом своем бикомпактном хаусдорфовом расширении.

29. Если $f\colon bX \to \beta X$ — естественное непрерывное отображение бикомпактного хаусдорфова расширения bX пространства X на расширение Стоуна — Чеха βX этого пространства, то f — гомеоморфизм.

30. Расширение Стоуна — Чеха вполне регулярного пространства X — единственное (с точностью до эквивалентности) его бикомпактное хаусдорфово расширение, которое при неподвижных точках X может быть непрерывно отображено на каждое бикомпактное хаусдорфово расширение этого пространства.

31. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение одного вполне регулярного пространства в другое. Тогда существует и единственно непрерывное отображение $\tilde{f}\colon \beta X \to bY$ (где βX — расширение Стоуна — Чеха пространства X и bY — произвольное бикомпактное хаусдорфово расширение пространства Y) такое, что $\tilde{f} \mid \lambda = f$.

32. Если вполне регулярные пространства X и Y гомеоморфны, то и их расширения Стоуна — Чеха βX и βY тоже гомеоморфны.

33. Если βX — расширение Стоуна — Чеха пространства X и $\beta X \setminus X \neq A$, то ни в одной точке $x \in \beta X \setminus X$ пространство βX не удовлетворяет первой аксиоме счетности.

34. Вполне регулярные пространства X и Y, каждое из которых удовлетворяет первой аксиоме счетности во всех точках, гомеоморфны в том и только в том случае, если гомеоморфны их расширения Стоуна — Чеха βX и βY.

35. Пусть X — регулярное финально компактное пространство и βX — его расширение Стоуна — Чеха. Тогда никакое бесконечное счетное подмножество множества $\beta X \setminus X$ не замкнуто в βX.

36. Никакое бесконечное счетное множество, лежащее в $\beta N \setminus N$, не замкнуто в βN (где N — бесконечное счетное дискретное пространство).

37. Пусть $\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — семейство метризуемых бикомпактов, $\prod \{X_\alpha\colon \alpha \in A\} = X$ — их топологическое произведение, $p = \{p_\alpha\colon \alpha \in A\} \in X$ — произвольная точка в этом произведении и $\Sigma(p)$ — κ_1-оболочка точки p в X (см. стр. 18). Докажите, что расширение $\beta(\Sigma(p))$ Стоуна — Чеха подпространства $\Sigma(p)$ пространства X совпадает с X.

38. Если X — вполне регулярное пространство с первой аксиомой счетности и bX — его бикомпактное хаусдорфово расширение, являющееся диадическим бикомпактом, то X и bX — пространства со счетной базой.

39. Если X — пространство со счетной сетью, но без счетной базы, то никакое расширение пространства X не является совершенно нормальным бикомпактом.

40. Если X — метризуемое пространство без счетной базы, то никакое расширение пространства X не является совершенно нормальным бикомпактом.

41. Сформулировать в терминах, относящихся к топологии самого пространства, критерий существования у него расширения, являющегося совершенно нормальным бикомпактом.

42. У вполне регулярного пространства X существует бикомпактное хаусдорфово расширение bX такое, что $bX \setminus X$ — финально компактное пространство в том и только в том случае, если X — пространство счетного типа (см. стр. 153).

43. Пусть X — вполне регулярное пространство, bX — его бикомпактное хаусдорфово расширение и $R(X)$ — множество всех точек, в которых X не локально бикомпактно. Тогда $R(X) = [bX \setminus X]_{bX} \setminus (bX \setminus X)$.

44. Пусть X — вполне регулярное пространство и bX — его бикомпактное хаусдорфово расширение. Тогда $bX \setminus X$ является пространством счетного типа в том и только в том случае, если множество всех точек, в которых X не локально бикомпактно, составляет финально компактное подпространство пространства X.

45. Пусть каждое бикомпактное хаусдорфово расширение вполне регулярного пространства X обладает следующим свойством (см. также 42 и 44 гл. IV):

(*) для любой точки $x \in bX \setminus X$ существует бикомпакт $\Phi \subset bX \setminus X$ такой, что $x \in \Phi$ и $\chi(\Phi, bX) \leqslant \aleph_0$.

Тогда X финально компактно.

46. X — финально компактное пространство тогда и только тогда, когда некоторое, а значит, и каждое его бикомпактное расширение bX обладает следующим свойством:

(**) для каждого бикомпакта $\Phi \subset bX \setminus X$ существует бикомпакт $F \subset bX \setminus X$ такой, что $\Phi \subset F$ и $\chi(F, bX) \leqslant \aleph_0$.

47. Для того чтобы вполне регулярное пространство X было финально компактно, необходимо и достаточно, чтобы каждое его бикомпактное хаусдорфово расширение удовлетворяло условию (*) из 45 гл. 4 (см. также 46 гл. IV).

§ 2. Задачи, связанные с расширением βN Стоуна — Чеха счетного дискретного пространства

Через N всюду в этой главе обозначается множество всех натуральных целых чисел, наделенное дискретной топологией и рассматриваемое, таким образом, как топологическое пространство. Расширение Стоуна — Чеха пространства N обозначается через βN.

48. Каждый сепарабельный бикомпакт Φ является непрерывным образом пространства βN.

49. Существует семейство $\mathscr{E}$ подмножеств множества R всех рациональных чисел такое, что 1) $|\mathscr{E}| = 2^{\aleph_0}$, 2) если $A \in \mathscr{E}$, $B \in \mathscr{E}$ и $A \neq B$, то $|A \cap B| < \aleph_0$, и 3) $|A| = \aleph_0$ для всех $A \in \mathscr{E}$.

50. Существует семейство $\mathscr{E}$ бесконечных подмножеств множества N такое, что 1) $|\mathscr{E}| = 2^{\aleph_0}$ и 2) если $A \in \mathscr{E}$, $B \in \mathscr{E}$ и $A \neq B$, то $|A \cap B| < \aleph_0$ *).

51. Пусть $A \subset N$ и $B \subset N$. Тогда 1) $[A]_{\beta N}$ — открытое в βN множество, и 2) если $|A \cap B| < \aleph_0$, то $[A]_{\beta N} \cap [B]_{\beta N} \cap (\beta N \setminus N) = \Lambda$, 3) если $|A| = \aleph_0$, то $[A]_{\beta N} \cap (\beta N \setminus N) \neq \Lambda$.

52. Докажите, что пространство $\beta N \setminus N$ имеет систему мощности $2^{\aleph_0}$ попарно не пересекающихся открытых в $\beta N \setminus N$ множеств (т. е. $\beta N \setminus N$ не удовлетворяет условию Суслина).

53. Каков вес пространства βN? Какова мощность βN?

54. Пусть $X = \beta N \setminus N$ — подпространство пространства βN. Тогда если γ — счетное семейство открытых в X множеств, для которого $\bigcap \{U : U \in \gamma\} \neq \Lambda$, то $\bigcap \{U : U \in \gamma\}$ содержит непустое открытое множество.

*) Семейства множеств, удовлетворяющих второму условию, можно было бы называть почти дизъюнктными.

55. Если $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, то в пространстве $X = \beta N \setminus N$ есть такая точка x^0, что пересечение любого счетного множества ее окрестностей снова является ее окрестностью.

56. Покажите, что пространство βN не является наследственно нормальным.

57. Пусть $p \in \beta N \setminus N$ и $X = N \cup \{p\}$ наделено топологией, индуцированной из βN. Каждое хаусдорфово пространство Y, содержащее X в качестве всюду плотного подпространства, несепарабельно.

58. Пусть $y \in \beta N \setminus N$ и $Y = \beta N \setminus \{y\}$ — подпространство пространства βN. Тогда Y — локально бикомпактное счетно компактное, но не бикомпактное пространство и βN — его расширение Стоуна — Чеха.

59. Пусть X — подпространство пространства βN, причем $N \subset X \subset \beta N$ и X является k_1-пространством (см. стр. 153). Тогда множество X открыто в βN и, следовательно (178 гл. III), пространство X локально бикомпактно.

60. В βN постройте подпространство, полное в смысле Чеха, содержащее N и не локально бикомпактное.

61. Пусть R — обычное пространство всех вещественных чисел, N — его подпространство, образованное натуральными числами, βR — расширение Стоуна — Чеха пространства R и $\beta N = |N|_{\beta R}$ (см. 20 гл. IV) — расширение Стоуна — Чеха пространства N. Докажите, что пространство $X = \beta R \setminus (\beta N \setminus N)$ псевдокомпактно, но несчетно компактно.

62. Пусть $N^* = \{1, 2, \ldots\}$ и каждому $n \in N^*$ поставлено в соответствие бесконечное множество $E_n \subset N^*$ так, что $E_{n'} \cap E_{n''} = \Lambda$ при $n' \neq n''$, $n', n'' \in N^*$. Тогда существуют бесконечные множества $N^{**} \subset N^*$, $N^{***} \subset N^*$, где $N^{***} = N \setminus N^{**}$ и

$$|N^{**} \cap E_n| < \aleph_0 \text{ для каждого } n \in N^{**},$$

$$|N^{***} \cap E_n| < \aleph_0 \text{ для каждого } n \in N^{***}.$$

63. Пусть M — дискретное подпространство пространства $\beta N \setminus N$, $|M| = \aleph_0$ и точка x^* предельная для M. Тогда пространства $X = \{x^*\} \cup N$ и $Y = \{x^*\} \cup M$ (наделенные топологией из βN) негомеоморфны.

64. Докажите, что теснота βN равна $2^{\aleph_0}$ (см. стр. 57).

64'. Если $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, то любой нормированный диадический бикомпакт (см. стр. 141) содержит топологический образ βN.

65. Пусть $f : N \to N$ — отображение натурального ряда, причем f^2 — тождественное отображение. Тогда условимся через $C_f(N)$ обозначать пространство следующего разбиения Z расширения Стоуна — Чеха βN дискретного пространства N: $Z = \{\{x, \tilde{f}(x)\} : x \in \beta N \setminus N\} \cup \{\{x\} : x \in N\}$ (где $\tilde{f}$ — продолжение f на βN). Покажите, что $C_f(N)$ естественно интерпретируется как

бикомпактное хаусдорфово расширение пространства N. Верно ли, что $C_f(N)$ и βN всегда гомеоморфны?

66. Пусть f_1 и f_2 — два отображения множества N на себя, квадраты которых являются тождественными отображениями. Предположим также, что при f_1 нет неподвижных точек, а при f_2 ровно одна точка a неподвижна. Пространства $C_{f_1}(N)$ и $C_{f_2}(N)$ определяются по f_1 и f_2 в соответствии с задачей 65 гл. IV. Докажите тогда, что расширения $C_{f_1}(N)$ и $C_{f_2}(N)$ пространства N неэквивалентны.

67. Пусть f — отображение натурального ряда на себя, описываемое правилами: если n четно, то $f(n) = n - 1$, и если n нечетно, то $f(n) = n - 1$. Через C обозначим пространство $C_f(N)$ (см. 65 гл. IV). Через C^* обозначим пространство, получающееся при присоединении к C некоторой точки ξ, не принадлежащей множеству C, в качестве изолированной. Докажите, что C не гомеоморфно C^* (хотя C содержит бесконечно много изолированных точек).

68. Покажите, что если к пространству C, определенному в задаче 67 гл. IV, добавить две новые изолированные точки, то получится пространство, гомеоморфное C.

§ 3. Бикомпактные расширения и α-фильтры

Напомним читателю некоторые сведения из § 1 гл. III и дополним их.

Подмножества A и B топологического пространства X называются α-отделенными (в X), если на X существует непрерывная вещественная функция f такая, что $f(A) = \{0\}$ и $f(B) = \{1\}$. Соответственно множество $U \subset X$ называется α-окрестностью множества A, если A и $B = X \setminus U$ α-отделены. Семейство ξ подмножеств пространства X называется α-семейством, если для каждого $U \in \xi$ существует такое $A \in \xi$, что U является α-окрестностью множества A. Фильтр на X называется α-фильтром, если он является α-семейством и состоит из открытых в X множеств. Если α-фильтр не содержится в качестве подсемейства ни в каком отличном от него α-фильтре на X, то его называют α-ультрафильтром.

69. Пусть X — пространство, $P \subset X$, $P^* \subset P$, V — α-окрестность множества P в X и $V^* \subset V$ — α-окрестность множества P^* в V. Тогда V^* — α-окрестность множества P^* в X.

70. Пусть X — вполне регулярное пространство, bX — его бикомпактное хаусдорфово расширение, $z \in bX$ и $b_z = \{U \cap X: U$ открыто в bX и $U \ni z\}$. Проверьте, что b_z — α-семейство на X.

71. Пусть X — вполне регулярное пространство, βX — его расширение Стоуна — Чеха и β — α-фильтр на X. Тогда для каждого $U \in \beta$ найдется $V \in \beta$ такое, что $[V]_{\beta X} \cap [X \setminus U]_{\beta X} = \Lambda$.

72. Пусть X — вполне регулярное пространство, βX — его расширение Стоуна — Чеха, $z \in \beta X$ и $\beta_z = \{U \cap X: U$ открыто в βX и $U \ni z\}$. Покажите, что β_z — α-ультрафильтр на X.

73. Пусть X — вполне регулярное пространство, βX — его расширение Стоуна — Чеха и β — произвольный α-ультрафильтр на X. Тогда $\beta = \beta_z$ (см. 72 гл. IV) для некоторой точки $z \in \beta X$, причем $z = \bigcap \{[G]_{\beta X}: G \in \beta\}$.

74. Пусть X — вполне регулярное пространство, βX — его расширение Стоуна — Чеха, G — открытое в X множество и $\tilde{G}$ — минимальное открытое в βX множество, дающее в пересечении с X множество G (см. 149 гл. IV). Докажите, что α-ультрафильтр β на X содержит множество G в том и только в том случае, если $\beta = \beta_z$ (см. 72 гл. IV) для некоторого $z \in \tilde{G}$ (см. 149, 72 гл. IV).

75. Пусть X — вполне регулярное пространство и bX — его бикомпактное хаусдорфово расширение. Пусть для каждого $z \in bX$ семейство b_z является α-ультрафильтром на X. Покажите, что тогда bX — расширение Стоуна — Чеха пространства X.

76. Пусть X — вполне регулярное пространство, bX — его бикомпактное хаусдорфово расширение, $z \in bX$. Докажите, что b_z является α-ультрафильтром в том и только в том случае, если не существует функционально отделенных в X множеств $P \subset X$ и $Q \subset X$ таких, что $z \in [P]_{bX} \cap [Q]_{bX}$.

77. Пусть X — вполне регулярное пространство, F — его бикомпактное подпространство и $Y = X \setminus F$. Пусть, далее, βX — расширение Стоуна — Чеха пространства X, $z \in \beta X \setminus X$ и $\beta_z^Y = \{U \cap Y: U$ открыто в βX и $U \ni z\}$. Тогда β_z^Y — α-ультрафильтр на пространстве Y.

78. Пусть X вполне регулярно. Положим $B = \{\beta_z: z \in \beta X\}$ и определим отображение $\varphi: \beta X \to B$ правилом: $\varphi(z) = \beta_z$ для каждого $z \in \beta X$. Далее, пусть $\mathscr{T} = \{\varphi U: U \subset \beta X$ и U открыто в $\beta X\}$, $\mathscr{B} = \{V \subset \beta X: V = \bigcup \{W \subset \beta X: W$ открыто в βX и $W \cap X = V \cap X\}\}$ и $\mathscr{B} = \{\varphi V: V \in \mathscr{B}\}$. Кроме того, для каждого открытого в X множества G через $\psi(G)$ обозначим множество всех α-ультрафильтров на X, содержащих G в качестве элемента.

Докажите следующие утверждения:

1) Отображение φ взаимно однозначно и $\varphi(\beta X) = B$.

2) $\varphi(V) = \psi(X \cap V)$ для каждого $V \in \mathscr{B}$.

3) $\mathscr{B} = \{\psi(G): G$ — открытое в X множество$\}$.

4) B — множество всех α-ультрафильтров на X.

5) $\mathscr{T}$ — топология на B, $\mathscr{B}$ — ее база и $(B, \mathscr{T})$ — бикомпакт, причем $\varphi: \beta X \to (B, \mathscr{T})$ — гомеоморфизм. При этом гомеоморфизме произвольная точка пространства X отождествляется с семейством всех открытых в X множеств, ее содержащих.

§ 4. Q-пространства и расширение Хьюитта

Вполне регулярное пространство X называется Q-пространством (функционально замкнутым пространством), если для каждого вполне регулярного пространства Y, содержащего X в качестве всюду плотного подпространства, на X существует непрерывная вещественная функция f, которую нельзя продолжить до непрерывной вещественной функции на всем Y.

В характеристиках и описаниях свойств Q-пространств фундаментальную роль играют следующие понятия.

Фильтр ξ называется $\varkappa_0$-простым, если существует $\eta \subset \xi$, для которого $|\eta| \leqslant \varkappa_0$ и $\bigcap \{A: A \in \eta\} = \Lambda$.

Пусть $(X, \mathscr{T})$ — топологическое пространство. Семейство $\mathscr{T}_{\varkappa_0}$ всех множеств типа $G_{\varkappa_0}$ в $(X, \mathscr{T})$ составляет базу некоторой (однозначно определенной) топологии $\mathscr{T}_{\varkappa_0}$ на X. Топологию $\mathscr{T}_{\varkappa_0}$ мы будем называть $\varkappa_0$-модификацией топологии $\mathscr{T}$. Соответственно пространство $(X, \mathscr{T}_{\varkappa_0})$ будет называться $\varkappa_0$-модификацией пространства $(X, \mathscr{T})$. Обычно $\varkappa_0$-модификацию произвольного пространства X будет обозначаться коротко: через $(X)_{\varkappa_0}$.

Для произвольного вполне регулярного пространства X обозначим символом $Q(X)$ множество всех его бикомпактных хаусдорфовых расширений bX таких, что X замкнуто в $(bX)_{\varkappa_0}$. Если $Q(X) \neq \Lambda$, то нижняя грань весов пространств, принадлежащих $Q(X)$, называется Q-весом пространства X. Все элементы семейства $Q(X)$ называются Q-расширениями пространства X.

Для произвольного бикомпактного хаусдорфова расширения bX пространства X обозначим через $\mathscr{F}(bX, X)$ множество всех бикомпактов, лежащих (в качестве подпространств) в $bX \setminus X$, характер которых в bX счетен. Если семейство $\mathscr{F}(bX, X)$ покрывает $bX \setminus X$, то нижняя грань мощностей подпокрытий пространства $bX \setminus X$, содержащихся в $\mathscr{F}(bX, X)$, называется Q-дефектом пространства X в расширении bX и обозначается через $Q\text{-def}(X, bX)$. В теории Q-пространств определенную роль играют некоторые специальные понятия, связанные с кардинальными числами.

Кардинальное число τ называется *измеримым*, если на множестве X мощности τ существует σ-ультрафильтр (т. е. ультрафильтр, пересечение любого счетного множества элементов которого не пусто) с пустым пересечением. В противном случае кардинальное число τ называется *неизмеримым*. Кардинальное число λ называется *сильно недостижимым*, если $\lambda \geqslant \varkappa_0$, λ регулярно, т. е. $cf(\lambda) = \lambda$, и для каждого τ такого, что $\tau < \lambda$, непременно $2^\tau < \lambda$. Наконец, для кардинального числа τ через $Q(\tau)$ мы обозначаем Q-вес дискретного пространства мощности τ, если этот Q-вес определен (в противном случае символ $Q(\tau)$ объявляется лишенным смысла).

79. Каждый бикомпакт является Q-пространством.

80. Каждое псевдокомпактное Q-пространство X бикомпактно.

81. Вполне регулярное пространство X является Q-пространством в том и только в том случае, если для всякого вполне регулярного расширения $\overline{X}$ пространства X, отличающегося от X одной точкой (т. е. такого, что $|\overline{X} \setminus X| = 1$), существует непрерывная вещественнозначная функция f на X, которую нельзя продолжить на $\overline{X}$.

82. Вполне регулярное пространство X является Q-пространством в том и только в том случае, если для каждой точки $x^* \in \beta X \setminus X$ (где βX — расширение Стоуна — Чеха пространства X) существует бикомпакт $F \subset \beta X \setminus X$, содержащий x^*, характер которого в βX счетен.

83. Пространство $T(\omega_1)$ (см. стр. 152) не является Q-пространством.

84. Пространство X является Q-пространством в том и только в том случае, если множество X замкнуто в $\varkappa_0$-модификации расширения Стоуна — Чеха βX пространства X.

85. Вполне регулярное пространство X является Q-пространством в том и только в том случае, если $\varkappa_0$-прост каждый свободный α-ультрафильтр ξ на X (см. стр. 242).

86. Дискретное пространство X является Q-пространством в том и только в том случае, если $|X|$ — неизмеримое кардинальное число (см. стр. 242).

87. Если X — Q-пространство и βX — его расширение Стоуна — Чеха, то $\beta X \setminus X$ — пространство точечно счетного типа.

88. Для того чтобы вполне регулярное пространство X было Q-пространством, необходимо и достаточно, чтобы существовало бикомпактное хаусдорфово расширение bX этого пространства, удовлетворяющее следующему условию:

(*) для каждой точки $x \in bX \setminus X$ существует бикомпакт F такой, что 1) $x \in F \subset bX \setminus X$ и 2) $\chi(F, bX) < \varkappa_0$.

89. Для того чтобы вполне регулярное пространство X было Q-пространством, необходимо и достаточно, чтобы нарост $bX \setminus X$ этого пространства в некотором бикомпактном хаусдорфовом расширении bX представлялся как объединение множеств типа G_δ в bX.

90. Каждое регулярное пространство X со счетной базой является Q-пространством.

91. Каждое регулярное финально компактное пространство X является Q-пространством.

92. Если у пространства X есть бикомпактное хаусдорфово расширение, во всех точках удовлетворяющее первой аксиоме счетности, то X — Q-пространство.

93. Если X — вполне регулярное пространство с первой аксиомой счетности и bX — его бикомпактное хаусдорфово расширение, то $Y = bX \setminus X$ — Q-пространство.

94. Если X — вполне регулярное пространство без точек локальной бикомпактности, bX — некоторое бикомпактное хаусдорфово расширение этого пространства и $bX \setminus X$ — пространство точечно счетного типа, то X — Q-пространство.

95. Если X — пространство точечно счетного типа и bX — какое нибудь его бикомпактное хаусдорфово расширение, то $Y = bX \setminus X$ — Q-пространство.

96. Замкнутое подпространство Y Q-пространства X является Q-пространством.

97. Произведение любого множества $\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ Q-пространств является Q-пространством.

98. Пространство X является Q-пространством в том и только в том случае, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству тихоновского произведения некоторого множества прямых.

99. Пусть X — вполне регулярное пространство, βX — его расширение Стоуна — Чеха и $\mathscr{E}$ — семейство всех бикомпактов, лежащих в $\beta X \setminus X$, характер которых в βX счетен.

Положим $\overline{\mathscr{E}} = \bigcup\{F: F \in \mathscr{E}\}$ и $\nu X = \beta X \setminus \overline{\mathscr{E}}$. Тогда

0) $X \subset \nu X$;

1) νX — Q-пространство;

2) если Y — Q-пространство и $X \subset Y \subset \beta X$, то $\nu X \subset Y$.

Построенное таким образом расширение νX пространства X называется его расширением Хьюитта.)

100. Пусть X — вполне регулярное пространство, νX — его расширение Хьюитта, и βX — расширение Стоуна — Чеха. Тогда νX является расширением Хьюитта и для любого пространства Y такого, что $X \subset Y \subset \nu X$.

101. Вполне регулярное пространство является Q-пространством в том и только в том случае, если оно совпадает со своим расширением Хьюитта.

102. Если $f: X \to Y$ — непрерывное отображение на, $B \subset Y$, $A = f^{-1}B$, причем X и B — Q-пространства, то и A является Q-пространством.

103. Прообраз Q-пространства при совершенном отображении является Q-пространством.

104. Каждое непрерывное отображение f вполне регулярного пространства X во вполне регулярное пространство Y может быть продолжено (единственным образом) до непрерывного отображения $\tilde{f}$ расширения Хьюитта νX пространства X в расширение Хьюитта νY пространства Y.

105. Каждое непрерывное отображение вполне регулярного пространства X в Q-пространство Y может быть продолжено до непрерывного отображения νX в это Y (см. 104 гл. IV).

106. Пространство νX (см. 99 гл. IV) является наибольшим среди всех подпространств пространства βX, содержащих X, на которые может быть непрерывно продолжена каждая непрерывная вещественная функция, заданная на X.

107. Пусть X — вполне регулярное пространство и νX — его расширение Хьюитта (см. 99 гл. IV). Докажите, что νX состоит в точности из всех тех точек y расширения Стоуна — Чеха βX пространства X, для которых каждая непрерывная вещественная функция, определенная на X, может быть продолжена до непрерывной вещественной функции на $X \cup \{y\}$.

108. Для каждого вполне регулярного пространства X следующие утверждения равносильны:

1) любое подпространство пространства X является Q-пространством;

2) любое открытое подпространство пространства X является Q-пространством;

3) для любой точки $x \in X$ пространство $X \setminus \{x\}$ — Q-пространство.

109. Каждое ли локально бикомпактное хаусдорфово пространство мощности, не превосходящей $2^{\aleph_0}$, является Q-пространством?

110. Если X — Q-пространство и $A \subset X$ — множество всех точек, в которых обращается в нуль некоторая непрерывная вещественная функция f, определенная на X, то $X \setminus A$ — Q-пространство.

111. Если X — Q-пространство и каждая точка $x \in X$ имеет тип G_δ в X, то каждое подпространство пространства X является Q-пространством.

112. Верно ли, что если каждое подпространство вполне регулярного пространства X является Q-пространством, то каждая точка в X является множеством типа G_δ в X (ср. с 111 гл. IV)?

113. Если псевдохарактер регулярного финально компактного пространства во всех точках счетен, то каждое подпространство этого пространства является Q-пространством.

114. Если X — вполне регулярное пространство, F — его бикомпактное подпространство, $X \supset Y \supset X \setminus F$ и Y — Q-пространство, то и X — Q-пространство.

115. Если $f: X \to Y$ — непрерывное бикомпактное отображение вполне регулярного пространства X на пространство Y, причем каждое подпространство последнего является Q-пространством, то и X — Q-пространство.

116. Если вполне регулярное пространство X уплотняется на пространство Y, причем каждое $Z \subset Y$ является Q-пространством, то и каждое подпространство пространства X является Q-пространством.

117. Каждое дискретное пространство мощности, меньшей или равной $2^{\aleph_0}$, является Q-пространством.

118. Пространство Немыцкого (см. 13 гл. III), как и любое его подпространство, является Q-пространством.

119. Если X — регулярное финально компактное пространство, псевдохарактер которого в каждой точке счетен, то $|X|$ — измеримое кардинальное число.

120. Объединение двух дискретных Q-пространств, из которых одно открыто и счетно, а другое замкнуто, может не быть Q-пространством (даже если оно вполне регулярно).

121*. Если нормальное пространство X является объединением счетного семейства своих замкнутых подпространств X_i, где $i \in N$, являющихся Q-пространствами, то X само является Q-пространством.

122*. Сохранит ли силу заключительная часть утверждения задачи 121 гл. IV, если предположение о нормальности X ослабить до предположения о его вполне регулярности?

123*. Верно ли, что если вполне регулярное пространство X является суммой двух своих замкнутых подпространств, каждое из которых есть Q-пространство, то и X — Q-пространство?

124. Если X замкнуто в Q-пространстве Y, bY — Q-расширение пространства Y, то и $bX = |X|_{bY}$ — Q-расширение пространства X, причем Q-дефект X в bX не превосходит Q-дефекта Y в bY.

125. Q-вес замкнутого подпространства Y Q-пространства X не превосходит Q-веса X.

126. Q-вес любого полного хаусдорфова пространства X со счетной базой равен $\aleph_0$.

127. Q-вес Q-пространства X не превосходит кардинального числа τ, где $\tau \geqslant \aleph_0$, в том и только в том случае, если вес X не больше τ и существует такое бикомпактное хаусдорфово расширение bX пространства X, что Q-дефект X в bX не превосходит τ.

128*. Если $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ — тихоновское произведение Q-пространств X_α, Q-вес каждого из которых не превосходит τ, где $\tau \geqslant \aleph_0$, то Q-вес пространства X не больше $\max\{\tau, |A|\}$.

129*. Q-вес Q-пространства X не превосходит τ, где $\tau \geqslant \aleph_0$, в том и только в том случае, если X гомеоморфно замкнутому подпространству тихоновского произведения τ экземпляров вещественной прямой R.

130*. Если $X = \Sigma\{X_t: t \in T\}$ — свободная топологическая сумма (см. стр. 58) вполне регулярных пространств X_t, то Q-вес X не больше $\max\{\sup\{Q\text{-вес } X_t: t \in T\}, Q\text{-вес дискретного пространства } T\}$.

131. Всякий нульмерный (см. стр. 58) бикомпакт X, вес которого не превосходит τ, гомеоморфен замкнутому множеству D^τ.

132*. Пусть τ — кардинальное число, $\tau \geqslant \aleph_0$, и A — дискретное пространство мощности $\lambda = 2^\tau$, а B — дискретное пространство мощности τ. Докажите, что A гомеоморфно замкнутому подпространству пространства B^λ (B^λ — тихоновское произведение λ экземпляров пространства B).

133*. Если дискретное пространство A мощности τ является Q-пространством, то и дискретное пространство B мощности 2^τ является Q-пространством.

134*. Если мощность дискретного пространства A меньше мощности первого сильно недостижимого (см. стр. 242) кардинального числа τ^*, то Q-вес A не превосходит $\|A\| = \sup\{2^\tau: \tau < |A|\}$.

135*. Если τ неизмеримо, то Q-вес дискретного пространства мощности τ не превосходит 2^τ.

136. Выведите из утверждений задач 133 гл. IV и 86 гл. IV, что если τ — неизмеримое кардинальное число, то и 2^τ неизмеримо (это иначе доказано ранее — в задаче 142 гл. I).

137*. Если $Q(\tau) = \lambda$, то $Q(\tau + 1) \leqslant (\tau + 1) \cdot \lambda$. Здесь $Q(\tau)$ — Q-вес дискретного пространства мощности τ.

138*. Если τ^* — первое сильно недостижимое кардинальное число и для каждого $\tau < \tau^*$ имеет место $\tau^\tau = 2^\tau$, то Q-вес любого дискретного пространства A мощности, меньшей τ^*, равен $|A|$ (т. е. $Q(\tau) = \tau$ для всех $\tau < \tau^*$).

139*. Пусть θ — наименьшее неизмеримое регулярное (см. стр. 29) кардинальное число. Докажите, что если мощность дискретного пространства A меньше θ, то Q-вес A равен $|A|$.

§ 5. Подчинения

Говорят, что на вполне регулярном пространстве X определено отношение ν подчинения (или задано *подчинение* ν), если для всех пар вида (F, H), где F — замкнутое, а H — открытое в X множество, известно, ν-подчинено F множеству H или нет (в первом случае пишем $F <_\nu H$, а во втором — $F \not<_\nu H$). При этом требуется выполнение следующих аксиом (*аксиом подчинения*):

К1. Если $F <_\nu H$, то $X \setminus H <_\nu X \setminus F$.

К2. Если $F <_\nu H$, то $F \subset H$.

К3. Если $F_1 \subset F <_\nu H <_\nu H_1$, то $F_1 <_\nu H_1$.

К4. Если $F_1 <_\nu H_1$ и $F_2 <_\nu H_2$, то $F_1 \cup F_2 <_\nu H_1 \cup H_2$.

К5. Если $F <_\nu H$, то существует такая окрестность OF множества F в X, что $F <_\nu OF$ и $[OF] <_\nu H$.

К6. $A <_\nu A$.

К7. Для всякой точки $x \in X$ и любой ее окрестности Ux непременно $\{x\} <_\nu Ux$.

Заметим, что из аксиом К1 и К6 следует, что $X <_\nu X$ и что из $F_1 <_\nu H_1$ и $F_2 <_\nu H_2$ вытекает $F_1 \cap F_2 <_\nu H_1 \cap H_2$.

Напомним, что два множества A и B пространства X называются функционально отделимыми, если существует такая непрерывная функция $f: X \to [0, 1]$, что $f(x) = 0$, если $x \in A$, и $f(x) = 1$,

если $x \subset B$. Скажем теперь, что замкнутое множество F β-*подчинено* открытому множеству H, если множества F и $X \setminus H$ функционально отделимы. Указанное отношение β подчинения (всякому подчинению для β проверяется в 141 гл. IV) называется *элементарным подчинением*.

Пусть теперь ν — некоторое отношение подчинения на вполне регулярном пространстве X. Система $\hat{\xi}$ открытых в X множеств называется ν-*правильной*, если для всякого $H_1 \in \hat{\xi}$ найдется такое $H_2 \in \hat{\xi}$, что $[H_2] \ll_\nu H_1$. Система $\hat{\xi}$ открытых в X множеств называется ν-*концом* пространства X (или ν-*фильтром*), если $\hat{\xi}$ — ν-правильная центрированная система и максимальная система по отношению к ν-правильности и центрированности, т. е. $\hat{\xi}$ — такая ν-правильная центрированная система, которая не содержится ни в какой отличной от $\hat{\xi}$ ν-правильной центрированной системе открытых в X множеств. Если X — вполне регулярное пространство, а ν — подчинение, определенное на X, то через νX обозначается множество всех ν-концов пространства X. Тогда если H_0 — открытое в X множество, то полагаем $O_{H_0} = \{\xi \in \nu X : H_0 \in \xi\}$ (иногда множество O_{H_0} обозначаем через $O^{\nu}_{H_0}$). На множестве νX определяется топология, базу которой образуют всевозможные множества вида O_H, где H открыто в X. Если F — замкнутое в X множество, то через Φ_F обозначается множество всех $\hat{\xi} \in \nu X$, для которых $H \cap F \neq \Lambda$ для любого $H \in \hat{\xi}$.

Пространство X топологически содержится в νX и является в нем всюду плотным множеством (см. 147 гл. IV), если каждой точке $x_0 \in X$ поставить в соответствие ν-конец (x_0), состоящий из всевозможных окрестностей точки x_0 в X. В дальнейшем каждая точка $x \in X$ отождествляется с ν-концом (x). В задаче 132 гл. IV показывается, что νX — хаусдорфово бикомпактное расширение вполне регулярного пространства X. Будем говорить, что νX — *бикомпактное расширение пространства, порожденное подчинением* ν на X.

Если ν — отношение подчинения на пространстве X, то множества $A_1 \subset X$, $A_2 \subset X$ называются ν-*далекими* (в этом случае пишем $A_1 \overline{\nu} A_2$) в том случае, когда $[A_1] \ll_\nu X \setminus [A_2]$. Если множества $A_1 \subset X$, $A_2 \subset X$ не являются ν-далекими, то они, по определению, ν-*близки* (в этом случае будем писать $A_1 \nu A_2$). Часто приходится на одном и том же вполне регулярном пространстве X рассматривать два или более отношений подчинения. Пусть на данном пространстве X определены подчинение ν_1 и подчинение ν_2. Будем говорить, что *подчинение* ν_2 *не менее подчинения* ν_1 (и писать в этом случае $\nu_2 \geqslant \nu_1$), если для любых замкнутого множества $F \subset X$ и открытого $H \supset X$, для которых $F \ll_{\nu_1} H$ (т. е. F подчинено H в смысле подчинения ν_1), непременно и $F \ll_{\nu_2} H$ (т. е. F подчинено H и в смысле подчинения ν_2). Через $\mathscr{P}(X)$ мы будем обозначать семейство всевозможных отношений подчинения, которые можно определить на данном вполне регулярном пространстве X. Мы будем считать, что семейство $\mathscr{P}(X)$ снабжено порядком, указанным выше. Нетрудно видеть, что этот порядок — частичный порядок на $\mathscr{P}(X)$.

Пусть теперь даны вполне регулярное пространство X вместе с определенным на нем подчинением ν и вполне регулярное пространство Y с подчинением ω. Отображение $f: X \xrightarrow{\text{на}}_{\nu,\omega} Y$ называется (ν, ω)-*равномерно непрерывным*, если для любых ν-близких множеств $A_1 \subset X$, $A_2 \subset X$ множества fA_1 и fA_2 ω-близки в Y. В задаче 159 гл. IV доказывается, что отображение $f: X \to Y$ в том и только в том случае (ν, ω)-равномерно непрерывно, когда оно непрерывно и из $\Phi \ll_\omega O$ ($\Phi \subset Y$ замкнуто в Y, а O открыто в Y) всегда следует $f^{-1}\Phi \ll_\nu f^{-1}O$ в X. Поэтому, если ν_1 и ν_2 — два отношения подчинения на одном и том же пространстве X, то $\nu_2 \geqslant \nu_1$ в том и только в том случае, когда тождественное отображение $e: X \to X$ является (ν_2, ν_1)-равномерно непрерывным. Кроме того, отображение $f: X \xrightarrow{\text{на}}_{\nu,\omega} Y$ будем называть (ν, ω)-*совершенным*, если всегда из $F \ll_\nu H$ в пространстве X следует $[fF]_Y \ll_\omega \ll_\omega \operatorname{Int}_Y [fH]_Y$ в пространстве Y.

Пусть теперь X^* — некоторое бикомпактное расширение вполне регулярного пространства. Если $H \subset X$ — открытое в X множество, то через $O(H)$ (или через $O_{X^*}(H)$) обозначается *наименьшее открытое в* X^* *множество*, для которого $O(H) \cap X = H$. Пусть X^* есть бикомпактное расширение пространства X, порожденное некоторым подчинением ν на X, т. е. $X^* = \nu X$ для некоторого подчинения ν. Тогда в задаче 149 гл. IV доказывается, что $O^{\nu}_H = O_{\nu X}(H)$ для любого открытого множества H в X, после чего мы уже не различаем между собой множества O^{ν}_H и $O_{\nu X}(H)$.

Важным для нас является следующее определение: бикомпактное расширение X^* вполне регулярного пространства X называется *совершенным относительно открытого в* X *множества* H, если имеет место равенство $[\operatorname{Fr} H]_{X^*} = \operatorname{Fr}_{X^*} O_{X^*}(H)$. Если же X^* совершенно относительно любого открытого в X множества, то оно называется *совершенным бикомпактным расширением* пространства.

Важными являются также следующие понятия.

База σ пространства X называется *алгебраически замкнутой*, если для любых двух элементов $U_1 \in \sigma$, $U_2 \in \sigma$ непременно $U_1 \cup U_2 \in \sigma$, и для любого $U \in \sigma$ непременно $X \setminus [U] \in \sigma$.

База σ пространства X называется *периферически бикомпактной* или коротко π-*бикомпактной*, если подпространство $\operatorname{Fr} U$ бикомпактно для любого $U \in \sigma$. Пространство, имеющее π-бикомпактную базу, называется π-*бикомпактным пространством*.

140. Пусть $\mathscr{B}(X)$ — семейство всех бикомпактных расширений вполне регулярного пространства X.

Докажите, что порядок следования одного бикомпактного расширения за другим (см. определение на стр. 233) есть частичный порядок на $\mathfrak{B}(X)$.

141. Докажите, что элементарное подчинение β на вполне регулярном пространстве X удовлетворяет всем аксиомам подчинения (см. стр. 248). Покажите, что в случае, когда пространство X нормально, $F \prec_\beta H$ (здесь F замкнуто, а H открыто в X) тогда и только тогда, когда $F \subset H$.

142. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Положим $F \prec_\rho H$ в том и только в том случае, когда $\rho(F, X \setminus H) > 0$.

(а) Покажите, что ρ — подчинение на X.

(б) Покажите, что на вполне регулярном пространстве могут существовать различные отношения подчинения.

143. Покажите, что только на вполне регулярном пространстве можно ввести отношение подчинения. В дальнейшем все пространства в этом параграфе вполне регулярны.

144. Покажите, что на бикомпакте X единственное существующее подчинение есть элементарное подчинение.

145. Пусть X — вполне регулярное пространство, а $\mathfrak{P}(X)$ — система всех подчинений на пространстве X. Докажите, что порядок $\prec$ в $\mathfrak{P}(X)$ (см. стр. 248) есть частичный порядок.

146. Пусть (X, v) — топологическое пространство вместе с определенным на нем подчинением v.

(а) Покажите, что любая v-правильная система содержится в некотором v-конце (вообще говоря, в многих v-концах).

(б) Пусть ξ — v-конец. Тогда

1) если $H_1 \subset \xi$ и $H_2 \in \xi$, то $H_1 \cap H_2 \in \xi$;

2) если $H_1 \in \xi$ и $H \supset H_1$, то $H \in \xi$.

147. Пусть v — подчинение на пространстве X, а vX — семейство всех v-концов.

Докажите: (а) $O_{H_1} \cap O_{H_2} = O_{H_1 \cap H_2}$, где H_1 и H_2 — произвольные открытые в X множества;

(б) если $H_1 \subset H_2$, то $O_{H_1} \subset O_{H_2}$;

(в) vX — топологическое T_1-пространство;

(г) если $x_0 \in X$, то система (x_0) всех окрестностей точки x_0 в X — v-конец;

(д) отображение k: $X \to vX$, определенное равенством $kx = (x)$, где $x \in X$, есть топологическое отображение пространства X на всюду плотное подпространство пространства vX.

В дальнейшем $k(X)$ отождествляется с X.

148. Докажите, что для любого открытого в vX множества Γ всегда

$$1) \quad [O_{X \setminus \Gamma}]_{vX} = [\Gamma]_{vX} \quad \text{и} \quad 2) \quad O_{X \cap \Gamma} \subset [\Gamma]_{vX}.$$

149. Пусть X^* — какое-нибудь расширение пространства X. Пусть H — произвольное открытое, а F — замкнутое в X множество.

(а) Покажите, что $O(H)$ (см. стр. 249) есть объединение всех открытых в X^* множеств Γ, для которых $\Gamma \cap X = H$.

(б) Покажите, что $X^* \setminus O(H) = [X \setminus H]_{X^*}$ и $[F]_{X^*} = X^* \setminus O(X \setminus F)$.

(в) Если $H_1 \neq H_2$, то $O(H_1) \neq O(H_2)$.

(г) $H_1 \subset H_2$ тогда и только тогда, когда $O(H_1) \subset O(H_2)$.

(д) $F_2 \subset F_1$ (где F_2 и F_1 — замкнутые в X множества) тогда и только тогда, когда $[F_2]_{X^*} \subset [F_1]_{X^*}$.

(е) $O(H_1 \cap H_2) = O(H_1) \cap O(H_2)$.

(ж) Покажите, что в случае, когда $X^* = vX$, где v — некоторое подчинение на пространстве X, непременно $O(H) = O_H$ для любого открытого множества $H \subset X$ и $\Phi_F = [F]_{vX}$.

150. Пусть (X, v) — пространство с подчинением v и vX — пространство, построенное в задаче 147 гл. IV.

(а) Докажите равенство $[O_{H_0}]_{vX} = \{\xi \in vX: H \cap H_0 \neq \Lambda$ для любого $H \in \xi\}$.

(б) Покажите, что из $F \prec_v H_0$ (F замкнуто, а H_0 открыто в X) следует $\Phi_F \subset O_{H_0}$ (что равносильно — см. 149 гл. IV — тому, что $[F]_{vX} \subset O(H_0)$).

(в) Докажите регулярность пространства vX.

151. Пусть v — подчинение на пространстве X, а F — произвольное замкнутое в X множество. Докажите равенства $F = \bigcap \{OF: F \prec_v UF\}$ и $[F]_{vX} = \bigcap \{O_{OF}: F \prec_v UF\}$.

152. Докажите бикомпактность пространства vX.

153. Докажите, что $F \prec_v H$ в том и только в том случае, когда $[F]_{vX} \subset O_H$.

154. Покажите, что для различных подчинений v_1 и v_2 на данном пространстве X бикомпактные расширения v_1X и v_2X различны.

155. Пусть X — вполне регулярное пространство, а X^* — произвольное его бикомпактное расширение. Положим $F \prec_v H$ (F замкнуто, а H открыто в X) в том и только в том случае, когда $[F]_{X^*} \subset O(H)$. Докажите, что

(а) v — подчинение, удовлетворяющее всем аксиомам К1 — К7 (см. стр. 247);

(б) бикомпактное расширение vX совпадает с бикомпактным расширением X^*.

156. Покажите, что оператор v, сопоставляющий каждому подчинению $v \in \mathfrak{P}(X)$ на X бикомпактное расширение vX этого пространства, осуществляет взаимно однозначное отображение системы $\mathfrak{P}(X)$ всех подчинений на X на систему $\mathfrak{B}(X)$ всех бикомпактных хаусдорфовых расширений этого пространства.

157. Покажите, что бикомпактное расширение vX, построенное по данному подчинению v на X, тогда и только тогда является максимальным (т. е. расширением Стоуна — Чеха), когда v совпадает с элементарным подчинением на X.

158. Пусть υ — отношение подчинения на пространстве X. Докажите, что множества $A \subset X$, $B \subset X$ тогда и только тогда υ-дальки (определение см. на стр. 248), когда $[A]_{\upsilon X} \cap [B]_{\upsilon X} = \emptyset$.

159. Пусть (X, υ) и (Y, ω) — два пространства с подчинениями соответственно υ и ω. Докажите, что отображение $f: X \to Y$ на Y тогда и только тогда (υ, ω)-равномерно непрерывно, когда оно непрерывно и всегда из $\Phi \prec_{\upsilon} O$ в Y (Φ замкнуто, а O открыто в Y) следует $f^{-1}\Phi \prec_{\upsilon} f^{-1}O$.

160. Пусть (X, υ) и (Y, ω) — два пространства, на которых определены подчинения соответственно υ и ω, а $f: (X, \upsilon) \to (Y, \omega)$ — (υ, ω)-равномерно непрерывное отображение на все Y. Положим (*) $f\xi = \bigcap \{[fU]_{\omega Y}: U \subset \xi\}$ для каждой точки $\xi = \xi \upsilon X$.

Тогда

(а) $f\xi \neq \emptyset$ для любого $\xi \in \upsilon X$;

(б) точка $\eta \in \omega Y$ тогда и только тогда принадлежит $\overline{f}\xi$, когда $\varphi = \{f^{-1}V: V \in \eta\} \subset \xi$;

(в) множество $\overline{f}\xi$ состоит из одной точки для любого $\xi \in \upsilon X$;

(г) $\overline{f}$ — непрерывное отображение расширения υX на расширение ωY;

(д) $\overline{f}$ — продолжение отображения $f: (X, \upsilon) \to (Y, \omega)$.

161. Пусть (X, ρ) и (Y, μ) — два метрических пространства с метриками ρ и μ соответственно. Пусть ρ — подчинение в X, порожденное метрикой ρ, а μ — подчинение в Y, порожденное метрикой μ (см. 142 гл. IV). Докажите, что $f: (X, \rho) \to (Y, \mu)$ является (ρ, μ)-равномерно непрерывным тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\mu(fx, fy) < \varepsilon$, как только $\rho(x, y) < \delta$.

162. Докажите, что отображение $f: (X, \upsilon) \xrightarrow{\text{на}} (Y, \omega)$ тогда и только тогда (υ, ω)-равномерно непрерывно, когда существует непрерывное отображение $f: \upsilon X \to \omega Y$ бикомпактного расширения υX на бикомпактное расширение ωY пространства Y, являющееся продолжением отображения f.

163. Пусть $k: \upsilon X \to \omega X$ — естественное непрерывное отображение бикомпактного расширения υX пространства X на бикомпактное расширение ωX того же пространства X. Докажите равенство $kO_{\upsilon}(U) = O_{\omega}(U)$ для любого открытого в X множества U. Как всегда, $kO_{\upsilon}[U] = \{\eta \in \omega X: k^{-1}\eta \subset O_{\upsilon}(U)\} = \omega X \setminus k(\upsilon X \setminus O_{\upsilon}(U))$.

164. Покажите, что оператор υ, который сопоставляет (см. 155 гл. IV) каждому подчинению $\upsilon \in \mathscr{P}(X)$ на пространстве X бикомпактное расширение $\upsilon X \in \mathscr{B}(X)$, осуществляет изоморфизм частично упорядоченных множеств $\mathscr{P}(X)$ и $\mathscr{B}(X)$.

165. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение пространства X на пространство Y.

1) Докажите, что f является (β, β')-равномерным, где β и β' — элементарные подчинения на X, соответственно на Y.

2) Выведите отсюда, что всякое непрерывное отображение $f: X \to Y$ допускает непрерывное продолжение $\overline{f}: \beta X \to \beta Y$ на расширения Стоуна — Чеха этих пространств.

166. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение нормального пространства X на нормальное пространство Y, а $\overline{f}: \beta X \to \beta Y$ — его непрерывное продолжение на расширения Стоуна — Чеха этих пространств. Покажите, что f — замкнутое отображение в том и только в том случае, когда $\overline{f}^{-1}y = [f^{-1}y]_{\beta X}$ для любой точки $y \in Y$.

167. Пусть $f: X \to Y$ — (υ, ω) равномерно непрерывное отображение пространства X с подчинением υ на пространство Y с подчинением ω. Докажите, что f тогда и только тогда (υ, ω)-открыто, когда единственное существующее (см. 162 гл. IV) непрерывное продолжение $\overline{f}: \upsilon X \to \omega Y$ отображения f на соответствующие подчинениям υ и ω бикомпактные расширения υX и ωY открыто.

168. Если $f: X \to Y$ — открыто-замкнутое отображение пространства X на пространство Y, то единственное существующее непрерывное продолжение $\overline{f}: \beta X \to \beta Y$ отображения f на расширения Стоуна — Чеха этих пространств открыто.

169. Если $f: X \to Y$ — замкнутое монотонное (см. стр. 174) отображение пространства X на пространство Y, то единственное существующее непрерывное продолжение $\overline{f}: \beta X \to \beta Y$ этого отображения на расширения Стоуна — Чеха этих пространств также монотонно.

170. Докажите, что бикомпактное расширение υX пространства X, порожденное подчинением υ, тогда и только тогда совершенно относительно открытого в X множества U, когда для любого замкнутого в X множества F, для которого $F \subset U$ и $F \prec_{\upsilon} X \setminus \mathrm{Fr}U$, непременно и $F \prec_{\upsilon} U$.

171. Докажите, что расширение βX Стоуна — Чеха любого (вполне регулярного) пространства X является совершенным.

172. Докажите, что бикомпактное расширение υX пространства X тогда и только тогда совершенно, когда для любых двух непересекающихся открытых в X множеств U_1 и U_2 выполнено равенство $O(U_1 \cup U_2) = O(U_1) \cup O(U_2)$.

173. Пусть υ — некоторое подчинение на X, а υX — соответствующее этому подчинению бикомпактное расширение.

Докажите, что равенство

$$O(U \cup V) = O(U) \cup O(V) \tag{1}$$

выполнено для любых двух открытых в X множеств U и V в том и только в том случае, когда пространство X нормально, а подчинение υ совпадает с элементарным подчинением β на X

(а следовательно, $\sigma X = \beta X$ — бикомпактное расширение Стоуна — Чеха пространства X).

174. Докажите, что бикомпактное расширение σX пространства X в том и только в том случае совершенно, когда естественное отображение $h: \beta X \to \sigma X$ расширения Стоуна — Чеха βX этого пространства на расширение σX монотонно (см. стр. 171).

175. Пусть σ — алгебраически замкнутая π-бикомпактная база регулярного пространства X. Положим $F \prec_\sigma H$ (где F замкнуто, а H открыто в X) в случае, когда существует такое $U \in \sigma$, что $F \subset U \subset [U] \subset H$.

Докажите, что введенное отношение σ есть отношение подчинения. Расширение σX, порожденное каким-либо подчинением (т. е. подчинением на основе некоторой алгебраически замкнутой π-бикомпактной базы σ в X), называется π-*расширением* пространства X.

176. Докажите, что π-бикомпактное хаусдорфово пространство вполне регулярно.

177. Пусть σX — π-расширение пространства X, построенное на основе алгебраически замкнутой π-бикомпактной базы σ (см. 175 гл. IV). Докажите, что σX совершенно относительно любого $U \in \sigma$.

178. Пусть X — π-бикомпактное пространство, σ — база пространства из всех открытых в X множеств с бикомпактной границей. Докажите, что база σ алгебраически замкнута, а бикомпактное расширение σX, порожденное этой базой (см. 175 и 176 гл. IV), совершенно.

179. Докажите, что в условиях предыдущей задачи описанное бикомпактное расширение σX пространства X, предшествующее расширению σX, не является совершенным.

180. Пусть X — π-бикомпактное пространство, σ — алгебраически замкнутая π-база пространства, σ — подчинение, определяемое базой σ (см. 175 гл. IV), а σX — бикомпактное расширение, порожденное этим подчинением. Докажите, что семейство $\Sigma = \{O_x(U): U \in \sigma\}$ — база бикомпакта σX, причем множества $O_x(U) \cap (\sigma X \setminus X)$ открыто замкнуты в подпространстве $\sigma X \setminus X$. Выведите отсюда, что всякое связное подмножество, принадлежащее $\sigma X \setminus X$, одноточечно.

181. Пусть X — π-бикомпактное пространство, σ — база пространства X, состоящая из всех открытых в X множеств с бикомпактной границей, а σX — бикомпактное расширение пространства X, порожденное этой базой (см. 175 гл. IV). Докажите, что всякое совершенное бикомпактное расширение γX пространства X допускает непрерывное отображение на расширение σX.

182. Докажите, что для любого π-бикомпактного вполне регулярного пространства X существует и единственно такое бикомпактное расширение γX, что

1) γX совершенно;

2) всякое бикомпактное расширение, предшествующее расширению γX, не совершенно;

3) всякое совершенное бикомпактное расширение, отличное от γX, следует за γX.

183. Всякое ли бикомпактное расширение σX пространства X, следующее за совершенным расширением θX, также совершенно?

184. Пусть R — интервал числовой прямой с естественной топологией. Докажите, что подпространство $\beta R \setminus R$ состоит из двух компонент связности.

РЕШЕНИЯ

1. Пусть X есть T_1-пространство и ξ — некоторый элемент. Рассмотрим множество $\overline{X} = X \cup \{\xi\}$. Определим топологию на $\overline{X}$. В X топологию оставляем прежней, т. е. множества $U \subset X$ считаем открытыми в $\overline{X}$ тогда и только тогда, когда U открыто в X. Окрестностями точки ξ считаем всякое множество $V \subset \overline{X}$, $\xi \in V$, для которого $\overline{X} \setminus V$ состоит из конечного числа точек. Нетрудно убедиться в том, что $\overline{X}$ — топологическое T_1-пространство, содержащее X в качестве открытого множества. Докажем бикомпактность пространства $\overline{X}$. Пусть ω — произвольное открытое покрытие пространства $\overline{X}$. Пусть $U_{\alpha_0} \in \omega$ таково, что $\xi \in U_{\alpha_0}$. Тогда $\overline{X} \setminus U_{\alpha_0}$ конечно: $\overline{X} \setminus U_{\alpha_0} = \{x_1, \ldots, x_s\}$. Рассмотрим по одному такому элементу $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s}$ из ω, чтобы $x_1 \in U_{\alpha_1}, \ldots, x_s \in U_{\alpha_s}$. Тогда $\omega_0 = \{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s}, U_{\alpha_0}\}$ — конечное подпокрытие покрытия ω пространства $\overline{X}$. Все доказано. Заметим также, что цель будет достигнута, если взять на $\overline{X}$ другую топологию, которая определяется на X так же, как в задаче 176 гл. III, т. е. за окрестность точки ξ принимаются те множества $V \subset \overline{X}$, для которых $\xi \in V$ и $X \setminus V$ — замкнутое бикомпактное подпространство пространства X. Множество $\overline{X}$ с такой топологией (она, как правило, сильнее первой, т. е. содержит первую) является хаусдорфовым пространством тогда и только тогда, когда X — локально бикомпактное хаусдорфово пространство.

2. (а) Доказывается на основе принципа максимального элемента (см. стр. 18). Пусть $\mathfrak{E}$ — совокупность всех центрированных систем замкнутых множеств, содержащих центрированную систему ξ замкнутых множеств. $\mathfrak{E}$ частично упорядочивается следующим образом: $\xi_2 \succ \xi_1$, $\xi_1 \in \mathfrak{E}$, $\xi_2 \in \mathfrak{E}$, если $\xi_2 \supset \xi_1$. Легко показывается, что всякая цепь (см. стр. 18) в $\mathfrak{E}$ с этим порядком имеет максимальный элемент. Тогда, в силу принципа максимального элемента (стр. 18), максимальный элемент имеет и цепь $\mathfrak{B}$, т. е. существует максимальная центрированная система замкнутых в X множеств, которая содержит данную систему ξ.

(б) Пусть ξ — максимальная центрированная система замкнутых множеств. Рассмотрим систему $\overline{\xi} = \xi \cup \{F_1 \cap F_2: F_1 \in \xi, F_2 \notin \xi\}$. Легко проверяется, что $\overline{\xi}$ центрирована. Значит, $\xi = \overline{\xi}$. Следовательно, если $F_1 \in \xi$, $F_2 \in \xi$, то $F_1 \cap F_2 \in \xi$.

(в) Доказывается аналогично (б).

Докажем (г). Пусть ξ — максимальная центрированная система и $F_0 \cap F \neq \Lambda$ для любого $F \in \xi$. Рассмотрим систему $\overline{\xi} = \xi \cup \{F_0 \cap F: F \in \xi\}$. Покажем, что $\overline{\xi}$ центрирована. Пусть $F_1, \ldots, F_n \in \overline{\xi}$ и еще заданы

$F_k \cap F_{k+1}, \ldots, F_k \cap F_{k+l}$. Тогда $F_k' = F_k \cap \ldots \cap F_k \in \xi$, $F_{k-1} \cap \ldots \ldots \cap F_{k-l} = F' \in \xi$ (в силу (ii)). Поэтому $F_0 \cap F_1 \cap \ldots \supset F_k \cap (F_1 \cap \ldots \cap F_{k-1}) \cap \ldots \supset (F_1 \cap F_{k+1}) = F' \cap F_k \cap F'' = F''' \cap F_0 \neq \Lambda$, где $F''' = F' \cap F''$ (также в силу (i)) принадлежит ξ. Итак, ξ центрирована и состоит из замкнутых в X множеств; следовательно, вследствие максимальности ξ имеем $\overline{\xi} = \xi$, откуда и получаем, что $F_0 \in \xi$.

3. (a) Если ξ таково, что $\xi \in \bigcap_{i=1}^{s} \Phi_{F_i}$, то $F_i \subset \xi$, $i = 1, \ldots, s$. Значит, в силу 2 гл. IV непременно $\bigcap_{i=1}^{s} F_i \in \xi$; следовательно, $\xi \subset \Phi_{\bigcap_{i=1}^{s} F_i}$. Обратно, если $\xi \subset \Phi_{\bigcap_{i=1}^{s} F_i}$, то $\bigcap_{i=1}^{s} F_i \in \xi$. Тогда, так как $\bigcap_{i=1}^{s} F_i \subset F_1, \ldots, \bigcap_{i=1}^{s} F_i \subset F_s$, то, в силу (ii) задачи 2 гл. IV, получим $F_1 \in \xi, \ldots, F_s \in \xi$, т. е. $\xi \in \bigcap_{i=1}^{s} \Phi_{F_i}$.

(б) Так как $W_U = \omega X \setminus \Phi_{X \setminus U}$, то $W_U = \{\xi \in \omega X: F \cap U \neq \Lambda$ для любого $F \in \xi\}$. Покажем, что найдется такое $F_0 \subset \xi$, что $F_0 \subset U$. Если $F \not\subset U$ для любого $F \in \xi$, то $F \cap (X \setminus U) \neq \Lambda$ для любого $F \in \xi$, но тогда в силу (i) задачи 2 гл. IV будем иметь $X \setminus U \in \xi$. Мы пришли к противоречию. Значит, $W_U = \{\xi \in \omega X:$ существует $F_0 \subset \xi$, для которого $F_0 \subset U\}$. Обратное включение очевидно.

(в) То, что ωX становится тихоновским T_3-пространством, если множества вида W_U (где U открыто в X) объявить базой, доказывается элементарно. Заметим, что множества вида Φ_F, где F замкнуто в X, замкнуты в ωX (или образуют замкнутую базу в X). Замкнутыми в ωX будут и всевозможные множества, являющиеся пересечением какого-то числа множеств вида Φ_F. Для доказательства бикомпактности пространства ωX достаточно доказать, что любая центрированная система множеств вида Φ_F имеет непустое пересечение. Пусть $(\Phi_{F_\alpha}: \alpha \in A)$ — произвольная центрированная система таких множеств. Пользуясь утверждением (а) этой задачи, выводим центрированность системы $(F_\alpha: \alpha \in A)$. Пополним ее (см. 2 гл. IV) до максимальной центрированной системы ξ замкнутых в X множеств, получим $\xi \in \bigcap (\Phi_{F_\alpha}: \alpha \in A)$, т. е. $\bigcap (\Phi_{F_\alpha}: \alpha \in A) \neq \Lambda$.

(г) Система $(x]$ всех замкнутых в X множеств, содержащих точку $x \in X$, очевидно, центрирована и максимальна по отношению к этому свойству, ибо $(x) \in (x]$. Значит, (x) — точка ωX. Остальное легко выводится (самым) разом.

5. Прежде всего заметим, что для любого замкнутого в X множества F всегда $\Phi_F \cap X = F$.

(а) 1) Пусть $\xi_0 \in \Phi_{F_2}$. Это значит, что $F_2 \subset \xi_0$. Пусть W_U, где U открыто в X, — произвольная базисная окрестность точки ξ_0 в ωX, $\xi_0 \in W_U$. Это означает (см. 3 гл. IV), что существует такое $F_0' \in \xi_0$, что $F_0' \subset U$. Но так как $F_2 \in \xi_0$, то $F_0' \cap F_2 \neq \Lambda$. Поэтому $U \cap F_2 \neq \Lambda$. Значит, $W_U \cap F_1 \neq \Lambda$. Отсюда следует $\xi_0 \in [F_1]_{\omega X}$.

2) Так как $F_1 \subset \Phi_{F_2}$, то $[F_1]_{\omega X} \subset [\Phi_{F_2}] = \Phi_{F_2}$, т. е. если $\xi_0 \in [F_1]_{\omega X}$, то $\xi_0 \in \Phi_{F_2}$.

Из 1) и 2) получаем $[F_2]_{\omega X} = \Phi_{F_2}$.

(б) Пусть F_1 и F_2 — два замкнутых в X множества, для которых $F_1 \cap F_2 = \Lambda$. Имеем $[F_1]_{\omega X} = \Phi_{F_1} = \{\xi \subset \omega X: F_1 \in \xi\}$, $[F_2]_{\omega X} = \Phi_{F_2} = \{\xi \subset \omega X: F_2 \in \xi\}$. Поэтому, раз $F_1 \cap F_2 = \Lambda$, то и $\Phi_{F_1} \cap \Phi_{F_2} = \Lambda$, т. е. $[F_1]_{\omega X} \cap [F_2]_{\omega X} = \Lambda$.

6. (а) Пусть X тихоново и ξ_1, ξ_2 — две различные точки из ωX. Так как ξ_1 и ξ_2 различны, то найдутся $F_1' \in \xi_1$ и $F_2' \in \xi_2$, для которых $F_1' \cap F_2' = \Lambda$. Пользуясь нормальностью пространства X, берем окрестности UF_1' и UF_2' множеств F_1' и F_2' в X, для которых $UF_1' \cap UF_2' = \Lambda$. Рассмотрим окрестность $W_{UF_1'}$ точки ξ_1 в ωX и окрестность $W_{UF_2'}$ точки ξ_2 в ωX. Утверждаем, что $W_{UF_1'} \cap W_{UF_2'} = \Lambda$, ибо если некоторое $\xi \subset \omega X$ принадлежало бы их пересечению, то для некоторых $F_0 \in \xi$ мы имели бы одновременно $F_0 \subset UF_1'$, $F_0 \subset UF_2'$, что противоречило бы пустоте пересечения UF_1' и UF_2'.

(б) Обратно, пусть ωX — хаусдорфово пространство. Тогда оно является бикомпактом. Пусть F_1 и F_2 — два непересекающихся замкнутых в X множества. Имеем $[F_1]_{\omega X} \cap [F_2]_{\omega X} = \Lambda$ (см. 5 гл. IV). Пользуясь нормальностью бикомпакта ωX, возьмем открытые в ωX множества W_1 и W_2 таким образом, чтобы было

$$[F_1]_{\omega X} \subset W_1, \quad [F_2]_{\omega X} \subset W_2$$

и

$$W_1 \cap W_2 = \Lambda.$$

Тогда $U_1 = W_1 \cap X$ и $U_2 = W_2 \cap X$ открыты в X, не пересекаются и $F_1 = [F_1]_{\omega X} \cap X \subset U_1$, $F_2 = [F_2]_{\omega X} \cap X \subset U_2$.

7. Нет. В бикомпактном T_1-пространстве со счетной базой есть счетная сеть из замкнутых множеств (см. 129 гл. III). По свойству иметь такую сеть сохраняется при переходе к любому подпространству. Достаточно теперь взять любое хаусдорфово пространство без счетной сети из замкнутых множеств (см., например, задачу 146 гл. II).

8. Если вес вполне регулярного пространства X равен τ, то в X существует расщепляющее семейство (см. 36 гл. III) $\{f_\alpha: \alpha \in A\}$ функций $f_\alpha: X \to I_\alpha$ мощности τ. Диагональное произведение f отображений из этого семейства есть гомеоморфизм в бикомпакт $Y = \Pi\{I_\alpha: \alpha \in A\}$ веса τ (см. 37 гл. III и 349 гл. II). Тогда $[fX]_Y$ — бикомпакт также веса τ, который тихоновским образом X в качестве всюду плотного подпространства.

9. Каждый бикомпакт является нормальным (см. 64 гл. III) и потому (28 гл. III) вполне регулярным пространством. По подпространство вполне регулярного пространства вполне регулярно (3 гл. III). Следовательно, все подпространства бикомпактов вполне регулярны. Обратное утверждение следует из 32 и 75 гл. III или из 8 гл. IV.

10. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Для каждого $x \in b_1X$ обозначим через ξ_x семейство всех множеств вида $X \cap Ox$, где Ox — окрестность x в b_1X. Положим $\varphi(x) = \bigcap\{[P]_{b_2X}: P \in \xi_x\}$. Семейство ξ_x центрировано, поэтому $\varphi(x) \neq \Lambda$. Покажем, что $|\varphi(x)| = 1$. Если $y \in \varphi(x)$, $z \in \varphi(x)$ и $y \neq z$, то у точек y и z найдутся окрестности Oy и Oz в b_2X, замыкания которых в b_2X не пересекаются. Тогда $P_1 = [Oy]_{b_2X} \cap X$ и $P_2 = [Oz]_{b_2X} \cap X$ — замкнутые в X непересекающиеся множества, причем $P_1 \cap P \neq \Lambda$ для любого $P \in \xi_x$ и $i = 1, 2$. Из определения ξ_x следует теперь, что $x \in [P_1]_{b_1X}$ и $x \in [P_2]_{b_1X}$, т. е. $[P_1]_{b_1X} \cap [P_2]_{b_1X} \neq \Lambda$ — получили противоречие. Итак, $|\varphi(x)| = 1$. Если $x \in X$, то, очевидно, $\varphi(x) \ni x$ и потому $\varphi(x) = \{x\}$. Условимся понимать теперь под $\tilde{\varphi}(x)$ тот элемент, из которого состоит множество $\varphi(x)$. Тогда $\tilde{\varphi}$ — отображение пространства b_1X в пространство b_2X, причем точно на X является тождественным отображением. Докажем, что $\tilde{\varphi}$ непрерывно. Пусть $x \in b_1X$ и $y = \tilde{\varphi}(x)$. Зафиксируем окрестность Oy точки y в b_2X. Так как $\bigcap\{[P]_{b_2X}: P \in \xi_x\} = \{y\}$ и семейство ξ_x

является предбазисом (а $b_\lambda X$ бикомпактно), то найдется $P_1 \in \mathfrak{P}_{x_1}$, для которого $[P_1]_{b_\lambda X} \subset O_y$. Но $P_1 = O_{x'} \cap X$, где $O_{x'}$ — некоторая окрестность точки x' в $b_\lambda X$. Каково бы ни было $x' \in O_{x'}$, неизменно $P_1 \in \mathfrak{P}_{x'}$, а потому $\tilde{\varphi}(x') \in [P_1]_{b_\lambda X} \subset O_y$. Итак, $\tilde{\varphi}(O_{x'}) \subset O_y$ — непрерывность $\tilde{\varphi}$ доказана. Проверим, что $\tilde{\varphi}$ взаимно однозначно. Если $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in b_\lambda X$, то $[O_{x_1}]_{b_\lambda X} \cap [O_{x_2}]_{b_\lambda X} = \Lambda$ для некоторых окрестностей точек x_1 и x_2 в $b_\lambda X$. Положим $O_{x_1} \cap X = P_1$ и $O_{x_2} \cap X = P_2$. Тогда $[P_1]_{b_\lambda X} \cap [P_2]_{b_\lambda X} = \Lambda$, и потому $[P_1]_{b_\lambda X} \cap [P_2]_{b_\lambda X} = \Lambda$. Но $P_1 \in \mathfrak{P}_{x_1}$, $P_2 \in \mathfrak{P}_{x_2}$, следовательно, $\tilde{\varphi}(x_1) \in [P_1]_{b_\lambda X}$ и $\tilde{\varphi}(x_2) \in [P_2]_{b_\lambda X}$. Заключаем, что $\tilde{\varphi}(x_1) \neq \tilde{\varphi}(x_2)$. Из $\tilde{\varphi}(x) = x$ для всех $x \in X$ следует, что $\tilde{\varphi}(b_\lambda X) \supset X$. Но $\tilde{\varphi}(b_\lambda X)$ — бикомпактно и, значит (50 гл. III), замкнуто в подпространстве $b_\lambda X$. Следовательно, $\tilde{\varphi}(b_\lambda X) = b_\lambda X$. Будучи взаимно однозначным непрерывным отображением бикомпакта $b_\lambda X$ на бикомпакт $b_\lambda X$, $\tilde{\varphi}$ есть гомеоморфизм между ними.

11. Через δX обозначим какое-нибудь бикомпактное хаусдорфово расширение пространства X (вес которого равен весу X — см. 8 гл. IV). Рассмотрим график Γ_f отображения f. Тогда $\Gamma_f = \{x, f(x)\}: x \in X\}$ — подпространство произведения $X \times Y \subset \delta X \times Y$, причем правило $\varphi(x) = \{x, f(x)\}$ описывает гомеоморфизм между X и Γ_f (231 гл. II).

Заметим, что $f(x) = \pi_Y \varphi(x)$ для всех $x \in X$, где π_Y: $\delta X \times Y \to Y$ — проектирование на второй сомножитель. Положим $Z = [\Gamma_f]_{\delta X \times Y}$. Тогда Z — бикомпактное хаусдорфово расширение пространства Γ_f, и $\pi_Y | Z$ — непрерывное отображение Z в Y, причем $\mathrm{tw}\, Z$ не превосходит максимума чисел X и Y. Значит теперь в Z каждую точку $\{x, f(x)\}$ множества Γ_f вы x, а топологию сохраним. Тогда Z превратится в бикомпактное хаусдорфово расширение пространства X, отображение $\pi_Y | Z$ превратится в непрерывное отображение $\tilde{f}: \delta X \to Y$, сужение которого на X совпадает с f.

12. Через $\mathfrak{F}$ обозначим какое-нибудь семейство непрерывных отображений пространства X в бикомпакты, удовлетворяющее условию:

(γ) если $f: X \to Y$ — непрерывное отображение в Y — бикомпакт, то существуют $f' \in \mathfrak{F}$, $f': X \to Y'$, и гомеоморфизм φ бикомпакта Y' в Y такие, что $\varphi f' = f$.

Конечно, в качестве $\mathfrak{F}$ годится семейство всех непрерывных отображений пространства X в бикомпакты, однако последнее не является множеством. Для нас важно, что $\mathfrak{F}$, удовлетворяющее условию (γ), можно выбрать так, чтобы оно было множеством (см. стр. 19).

Для каждого $f \in \mathfrak{F}$ зафиксируем некоторое бикомпактное хаусдорфово расширение $\delta_f X$ пространства X, на которое f продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f}$ (см. 11 гл. IV). Рассмотрим произведение ψ отображений $\tilde{f}$ по всем $f \in \mathfrak{F}$. Через Y_f будем обозначать образ при $\tilde{f}$, через Y — произведение $\Pi\{Y_f: f \in \mathfrak{F}\}$, через δX — произведение $\Pi\{\delta_f X: f \in \mathfrak{F}\}$. При этом δX — проектирование пространства X на Y_f, а множество $\Delta \subset \delta X$ состоит из всех тех точек $\delta(x)$, каждая координата которых совпадает с некоторым $x \in X$. Соответствие $x \leftrightarrow \delta(x)$ есть гомеоморфизм между множеством Δ как подпространством пространства δX и пространством X. Ограничение построенного этого гомеоморфизма $\lambda \circ \Delta$. Тогда $i = (\lambda \circ \Delta) | X$. Но отображение $\lambda \circ \Delta$ определено и непрерывно и на $[X]_{\delta X}$. Итак, каково бы ни было $f \in \mathfrak{F}$ имеет непрерывное продолжение (а именно, $(\lambda \circ \Delta) | [X]_{\delta X}$) на бикомпактное хаусдорфово расширение $[X]_{\delta X}$ пространства X. Ясно, что условие (γ) теперь гарантирует нам, что каждое непрерывное отображение пространства X в бикомпакт продолжается до непрерывного отображения пространства $\delta X = [X]_{\delta X}$.

13. Это сразу следует из утверждений задач 15, 10 гл. IV.

14. Семейство $\mathfrak{F}$ является счетным, так как X — вполне регулярное пространство. Следовательно, φ — гомеоморфизм пространства X

на его образ Y (37 гл. III). Теперь достаточно доказать, что каждая непрерывная вещественная функция $g(y)$, определенная на Y и такая, что $g(\psi(X)) \subset [0, 1]$, может быть продолжена до непрерывной вещественной функции, определенной на всем β — $[\psi(X)]_{\beta Y}$ (см. 15 гл. IV; ясно, что β — бикомпактное хаусдорфово расширение пространства $\psi(X)$). Положим $f = g\psi$. Тогда f — непрерывная вещественная функция на X и $f(X) \subset [0, 1]$. Значит, $f \in \mathfrak{F}$. Выберем $\alpha^* \in A$, для которого $f_{\alpha^*} = f$. Рассмотрим π_{α^*}: $\gamma | \delta Y |_\gamma \to I_{\alpha^*}$ — проектирование на сомножитель I_{α^*}. По определению диагональности произведения отображений, $\pi_{\alpha^*} \varphi = f_{\alpha^*}$. Значит, $\pi_{\alpha^*} \psi = g\psi$, откуда $g_{\alpha^*}(y) = g(y)$ для всех $y \in \psi(X)$. Итак, g является сужением отображения π_{α^*} на $\psi(X)$. Но π_{α^*} определено и непрерывно на всем β — в частности, и на $\beta = [\psi(X)]_{\beta Y}$. Следовательно, $\pi_{\alpha^*} | \beta$ — искомое продолжение отображения g.

15. Если P и P' функционально отделимы и f — непрерывная вещественная функция на X, для которой $f(P) = \{0\}$, $f(P') = \{1\}$ и $f(X) \subset [0, 1]$, то для непрерывного продолжения f функция $\tilde{f}$ на δX имеет место соотношение: $\tilde{f}([P]_{\delta X}) = \{\{0\}\} = \{0\} \subset \tilde{f}([P']_{\delta X}) = \{\{1\}\} = \{1\}$. Значит, $[P]_{\delta X} \cap [P']_{\delta X} = \Lambda$. Мы доказали необходимость.

Докажем достаточность. Существует (см. 12 гл. IV) бикомпактное хаусдорфово расширение δX, на которое непрерывно продолжаются любые непрерывные вещественные ограниченные функции. В силу уже доказанной необходимости $[P]_{\delta X} \cap [P']_{\delta X} = \Lambda$ и том и только в том случае, если P и P' функционально отделимы в X, т. е. (в данном ряду при доказываемой достаточности) тогда и только тогда, когда $[P]_{\delta X} \cap [P']_{\delta X} = \Lambda$. Значит (13 гл. IV), расширения δX и δX эквивалентны, и потому и на δX можно непрерывно продолжить любое непрерывное отображение пространства X в бикомпакт.

16. В нормальном пространстве множества P и P' функционально отделимы в том и только в том случае, если их замыкания в этом пространстве не пересекаются (7 гл. III). Отсюда заключение следует в силу 15 гл. IV.

17. Если X нормально, то βX — хаусдорфово бикомпактное расширение пространства X (см. 8 гл. IV), а в силу 5 гл. IV для любых двух непересекающихся замкнутых в X множеств их замыкания в βX тоже не пересекаются; следовательно (см. 16 гл. IV), βX совпадает с βX.

18. Необходимость. Если $[P]_{\beta X}$ — расширение Стоуна — Чеха пространства P и f — непрерывная ограниченная вещественная функция на P, то существует $\tilde{f}$ — непрерывная вещественная функция, продолжающая на $[P]_{\beta X}$ и совпадающая на P с f. Но βX — нормальное пространство, значит $\tilde{f}$ можно продолжить с замкнутого в βX множества $[P]_{\beta X}$ до непрерывной вещественной функции $\tilde{\tilde{f}}$, определенной на всем βX (см. 34 гл. III). Последняя ограничена. Тогда $\tilde{\tilde{f}} | X$ — искомое продолжение функции f на X.

Достаточность. Зафиксируем непрерывную ограниченную вещественную функцию f, определенную на P. По условию, ее можно продолжить до некоторой непрерывной ограниченной вещественной функции $\tilde{f}$, определенной на всем X. Последняя непрерывно продолжается на βX до некоторой функции φ. Тогда $\varphi | [P]_{\beta X}$ — продолжение функции f до непрерывной функции, заданной на всем пространстве $[P]_{\beta X}$. Существование такого продолжения влечет правильность построения при выборе f, означает, что $[P]_{\beta X}$ — расширение Стоуна — Чеха пространства P (см. 20 гл. IV).

20. Все следует из 33 гл. III и 19 гл. IV.

21. Чтобы продолжить на βX непрерывную ограниченную вещественную функцию, заданную на Y, достаточно взять ее сужение на X и продолжить на βX это последнее.

22. Тождественное отображение пространства X на себя, рассматриваемое как отображение в бикомпакт bX, можно продолжить до непрерывного отображения $f\colon \beta X \to bX$ (12 и 13 гл. IV). Единственность f следует из того, что любые два непрерывные отображения в хаусдорфово пространство, которые совпадают на всюду плотном множестве, совпадают везде (287 гл. II).

23. Рассмотрим βX — расширение Стоуна — Чеха пространства X. Положим $F_1 = [P_1]_{\beta X}$ и $F_2 = [P_2]_{\beta X}$. Тогда $F_1 \cap P_2 = \Lambda$ (см. 15 гл. IV) и $F_1 \setminus P_1 \neq \Lambda$, $F_2 \setminus P_2 \neq \Lambda$. Следовательно, $|\beta X \setminus X| \geqslant 2$. Зафиксируем $z_1 \in F_1 \setminus P_1$ и $z_2 \in F_2 \setminus P_2$. Рассмотрим разбиение пространства βX, единственным нетривиальным (неодноточечным) элементом которого является множество $A = \{z_1, z_2\}$. Пространство этого разбиения можно рассматривать (см. 348, 323 гл. II и 92 гл. III) как бикомпактное хаусдорфово расширение пространства X. Обозначим его через b^*X. Имеем $A \in [P_1]_{b^*X}$ и $A \in [P_2]_{b^*X}$ в силу определения топологии в b^*X. Значит, $[P_1]_{b^*X} \cap [P_2]_{b^*X} \neq \Lambda$ и расширения βX, b^*X не эквивалентны. Этим доказана достаточность рассматриваемого условия. Докажем его необходимость. Пусть b_1X и b_2X — неэквивалентные бикомпактные хаусдорфовы расширения пространства X. По определению, это означает, что существуют множества $P_1 \subset X$, $P_2 \subset X$ такие, что $[P_1]_{b_1X} \cap [P_2]_{b_1X} = \Lambda$, но $[P_1]_{b_2X} \cap [P_2]_{b_2X} \neq \Lambda$. Очевидно, P_1 и P_2 можно считать замкнутыми в X множествами. Из наших предположений сразу следует, что $[P_1]_{b_2X} \setminus P_1 \neq \Lambda$ и $[P_2]_{b_2X} \setminus P_2 \neq \Lambda$, т. е. P_1 и P_2 не замкнуты и b_2X и, следовательно, ни одно из них не бикомпактно. Множества $[P_1]_{b_1X}$ и $[P_2]_{b_1X}$ функционально отделимы в b_1X как непересекающиеся замкнутые подмножества нормального пространства b_1X. Тем более P_1 и P_2 функционально отделимы в X.

24. Каждая непрерывная вещественная функция, определенная на $T(\omega_1)$, финально постоянна, т. е. для некоторого $\alpha \in T(\omega_1)$ и всех x, y, больших α, $f(x) = f(y)$. Следовательно, если f продолжить на пространство $T(\omega_1) \cup \{\omega_1\}$, являющееся одноточечной бикомпактификацией П. С. Александрова пространства $T(\omega_1)$ (см. 176 гл. III), положив $f(\omega_1) = f(x)$, где x больше α, $\overline{f} \mid T(\omega_1) = f$, то мы получим непрерывную функцию $\overline{f}$. Значит, $T(\omega_1) \cup \{\omega_1\}$ — расширение Стоуна — Чеха пространства $T(\omega_1)$. Если $b(T(\omega_1))$ — произвольное бикомпактное хаусдорфово расширение $T(\omega_1)$, то существует непрерывное тождественное на $T(\omega_1)$ отображение $\varphi\colon T(\omega_1) \cup \{\omega_1\} \to b(T(\omega_1))$. Имеем $\varphi(\{\omega_1\}) = b(T(\omega_1)) \setminus T(\omega_1)$ (27 гл. IV), т. е. φ — взаимно однозначное отображение. Следовательно, φ — гомеоморфизм, точнее, эквивалентность. Возможно короткое решение этой задачи, основанное на 25 гл. IV и 186, 184 гл. III и на очевидном факте: счетно компактное счетное пространство бикомпактно.

25. Пусть $P = \bigcap \{G_\xi\colon U_\xi \in \mathcal{N}^+\}$, где каждое U_ξ — открытое в X множество. Тогда $[P]_{\beta X} \cap [X \setminus U_\xi]_{\beta X} = \Lambda$, ибо X нормально, а P и $X \setminus U_\xi$ — непересекающиеся замкнутые в X множества. Тогда $\overline{P} = \bigcap \{\beta X \setminus [X \setminus U_\xi]_{\beta X}\colon \xi \in \mathcal{N}^+\}$, очевидно, — взаимно множество.

26. Пусть bX — бикомпактное хаусдорфово расширение пространства X и $|bX \setminus X| \geqslant 2$. Зафиксируем $z_1 \in bX \setminus X$, $z_2 \in bX \setminus X$, $z_1 \neq z_2$, и рассмотрим пространство Z непрерывного разбиения пространства bX, единственным неодноточечным элементом которого является множество $A = \{z_1, z_2\}$ (см. 348, 322 гл. II).

Зафиксируем окрестности Oz_1 и Oz_2 точек z_1 и z_2, для которых $[Oz_1]_{bX} \cap [Oz_2]_{bX} = \Lambda$. Положим $P_1 = X \cap [Oz_1]_{bX}$, $P_2 = [Oz_2]_{bX} \cap X$. Тогда P_1 и P_2 — непересекающиеся замкнутые в X множества, причем

$z_1 \in [P_1]_{bX}$ и $z_2 \in [P_2]_{bX}$. Рассуждая далее, как при решении задачи 23 гл. IV, мы приходим к выводу, что Z можно рассматривать как некоторое бикомпактное хаусдорфово расширение b^*X пространства X, причем

$$[P_1]_{b^*X} \cap [P_2]_{b^*X} \neq \Lambda.$$

Следовательно, b^*X и bX — неэквивалентные расширения пространства X (10 гл. IV), т. е. у X имеется по крайней мере два бикомпактных хаусдорфовых расширения, что противоречит условию. Значит, $|bX \setminus X| \leqslant 1$. Поэтому множество $bX \setminus X$ замкнуто, а множество $X = bX \setminus (bX \setminus X)$ открыто в bX. Следовательно, пространство X попросту бикомпактно. Предположим теперь, что X не псевдокомпактно. Тогда на X существует неограниченная непрерывная вещественная функция f. В $fX \subset R$ тогда можно выбрать два непересекающихся замкнутых в R (где R — обычное пространство всех вещественных чисел) подмножества A и B, ни одно из которых не бикомпактно (тем более не пусто). Тогда $P = f^{-1}A$ и $Q = f^{-1}B$ — непересекающиеся замкнутые множества в X, ни одно из которых не бикомпактно (ибо образ бикомпактного пространства при непрерывном отображении является бикомпактным пространством). Но P и Q функционально отделимы — достаточно взять композицию функции f и функции φ на fX, отделяющей A от B. Получили противоречие (см. 23 гл. IV).

27. Предположим, что $y \in b_1X \setminus X$ и $f(y) = x \in X$. Тогда $y \neq x$ и существуют окрестности $Oy \ni y$ и $Ox \ni x$ точек $x \in y$ в b_1X, для которых $[Oy]_{b_1X} \cap [Ox]_{b_1X} = \Lambda$. Положим

$$P_1 = [Oy]_{b_1X} \cap X \quad \text{и} \quad P_2 = [Ox]_{b_1X} \cap X.$$

Имеем $y \in [P_1]_{b_1X}$, $x \notin P_1$. Поэтому, в силу непрерывности f, получим $x = f_y \in [fP_1]_{b_1X}$. Но $fP_1 = P_1$, $x \in X$, а так как P_1 замкнуто в X, то $x \in P_1$ — получили противоречие. См. также 345 гл. II.

28. Рассмотрим расширение Стоуна — Чеха $\beta\lambda$ пространства X и его естественное непрерывное отображение f на $\nu\lambda$. Пусть bX — произвольное бикомпактное хаусдорфово расширение пространства X и $g\colon \beta X \to bX$ — естественное отображение. Зафиксируем счетное семейство γ открытых в νX множеств, для которого $X = \bigcap \{V\colon V \subset \gamma\}$. Положим $\lambda = \{f^{-1}V\colon V \in \gamma\}$. Так как f непрерывно, то λ — семейство открытых в $\beta\lambda$ множеств (счетное). Имеем $\bigcap \{U\colon U \in \lambda\} = \bigcap \{f^{-1}V\colon V \in \gamma\} = f^{-1}(\bigcap \{V\colon V \in \gamma\}) = f^{-1}X$. Но $f^{-1}X = X$ (см. 27 гл. IV). Значит, $\bigcap \{U\colon U \in \lambda\} = X$. Далее, положим $\mu = \{bX \setminus g(\beta X \setminus U)\colon U \in \lambda\}$. Отображение g замкнуто, поэтому μ состоит из открытых в bX множеств. Очевидно, $|\mu| \leqslant |\lambda| \leqslant \aleph_0$. Имеем $g^{-1}(bX \setminus g(\beta X \setminus U)) \subset U$ для всех $U \in \lambda$. Поэтому $g^{-1}(\bigcap \{W\colon W \in \mu\}) = \bigcap \{g^{-1}W\colon W \in \mu\} \subset \bigcap \{U\colon U \in \lambda\} = X$. Но из $g^{-1}X = X$ (см. 27 гл. IV) следует, что $W \supset X$ для всех $W \in \mu$. Значит, $\bigcap \{W\colon W \in \mu\} = X$, т. е. множество X имеет тип G_δ в bX.

29. В силу 18 гл. IV существует непрерывное отображение $\varphi\colon \beta X \to \nu X$, для которого $\varphi(x) = x$ при всех $x \in X$. Положим $g = \varphi f$, $g\colon \nu\lambda \to \nu X$. Тогда $\varphi(x) = \varphi f(x) = x$ для всех $x \in X$ и g — непрерывное отображение. Следовательно, g — тождественное отображение пространства bX на себя (287 гл. II). Так как f — отображение на βX, то мы заключаем, что φ — гомеоморфизм, точнее, f осуществляет эквивалентность расширений βX и νX.

30. См. 12, 15, 16, 29 гл. IV.

31. Единственность $\overline{f}$ вытекает из того, что любые два непрерывных отображения, совпадающих на всюду плотном множестве, совпадают везде (287 гл. II). Существование $\overline{f}$ следует из задачи 18 гл. IV.

33. Предположим противное. Пусть $x^* \in \beta X \setminus X$ и $\{x^*\}$ — множество типа G_δ в βX. Тогда существует непрерывная вещественная функция f на βX, для которой $f^{-1}(0) = \{x^*\}$ (см. 30 гл. III). $R^* = fX$ рассматривается как подпространство обычного пространства R всех вещественных чисел. Из $x^* \in$

$\in [X]$ и $f^{-1}(0) = (x^*)$ и непрерывности f следует, что $[H^*]_{K^*} \setminus K^* \ni 0$. Тогда существуют P и Q — непустые замкнутые в K^* непересекающиеся множества, для которых $0 \in [P]_{\beta}$, $0 \in [Q]_{\beta}$. Положим $f_0 = f \mid X$. Будем рассматривать f_0 как отображение пространства X в пространство R^*. Оно непрерывно. Пусть $A = f_0^{-1}P$ и $B = f_0^{-1}Q$ — непустые замкнутые в X (непересекающиеся) множества. Пространство H^* нормально (как всякое метрическое пространство), поэтому существует непрерывная ограниченная вещественная функция φ на H^* такая, что $\varphi(P) = \{0\}$, $\varphi(Q) = \{1\}$ и $\varphi(H^*) \subset [0, 1]$. Тогда $g = \varphi f_0$ — непрерывная ограниченная вещественная функция на X, для которой $g[A] = \{0\}$ и $g[B] = \{1\}$. Значит, A и B функционально отделимы в X. Но $[A]_{\beta X} \ni x^*$ и $[B]_{\beta X} \ni x^*$. Действительно, если, напримеp, $[A]_{\beta X} \not\ni x^*$, то $f[A]_{\beta X} \not\ni 0$ (так как $f^{-1}(0) = \{x^*\}$), и так как $fA = P$ и f — замкнутое отображение, то $f[A]_{\beta X} \supset [P]_{\beta} \ni 0$. Полученное противоречие означает, что $[A]_{\beta X} \cap [B]_{\beta X} \supset \{x\} \neq \varnothing$. Но это невозможно, ибо A и B функционально отделимы в X и βX — расширение Стоуна — Чеха пространства X.

34. Необходимость — частный случай общего утверждения (см. 32 гл. IV). Докажем достаточность. Пусть $\varphi\colon \beta X \to \beta Y$ — гомеоморфизм, $\varphi(\beta X) = \beta Y$. В силу 135 гл. II пространство βX (соответственно βY) и каждая точка $x \in X$ (соответственно и каждая точка $y \in Y$) удовлетворяет первой аксиоме счетности. Кроме того, ни в одной точке $x \in \beta X \setminus X$ (соответственно ни в одной точке $y \in \beta Y \setminus Y$) пространство βX (соответственно пространство βY) не удовлетворяет первой аксиоме счетности — это содержание задачи 33 гл. IV. Достаточно заметить теперь, что при любом гомеоморфизме одного пространства на другое точка, в которой выполняется первая аксиома счетности, переходит в точку, в которой тоже выполняется первая аксиома счетности — последнее очевидно.

35. Верно более сильное утверждение: никакое финально компактное подпространство в $\beta X \setminus X$ не замкнуто в βX, если X финально компактно. Для читателя (от противного) нижеследующее рассуждение из 19 гл. III.

37. Очевидно, что $\Sigma(p)$ всюду плотно в X. Нам надо показать (см. 13 гл. IV), что всякая ограниченная (вещественная) функция f, определенная и непрерывная на $\Sigma(p)$, допускает непрерывное продолжение на бикомпакт X. Но, пользуясь задачей 360 гл. II и рассуждая аналогично решению задачи 302 гл. II, можно показать, что функция f зависит лишь от счетного множества координат, т. е. существует такое счетное $A_0 \subset A$, что для любых двух точек $x \in X$, $y \in X$, для которых $x_\alpha = y_\alpha$, если $\alpha \in A_0$, выполняется $fx = fy$. Рассмотрим проектирование $\pi_{A_0}\colon X \to \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in A_0\} = Y$. Ясно, что $\pi_{A_0}(\Sigma(p)) = Y$. Сужение отображения π_{A_0} на $\Sigma(p)$ обозначим через $\pi^0_{A_0}$. Легко проверяется, что $\pi^0_{A_0}$ — непрерывное открытое отображение. То, что функция f на $\Sigma(p)$ зависит лишь от координат с индексами из A_0, означает, что существует такая вещественная функция f_0 на Y, что $f = f_0\pi^0_{A_0}$.

Покажем, что отображение $f_0\colon Y \to R$ (где R — обычная вещественная прямая) непрерывно. Пусть U — открытое множество в R и $V = f_0^{-1}U$. Тогда из $\pi^0_{A_0}(\Sigma(p)) = Y$ и $f = f_0\pi^0_{A_0}$ следует, что $\pi^0_{A_0} f^{-1}(U) = V$. Но $f\colon \Sigma(p) \to R$ непрерывно и потому $f^{-1}(U)$ открыто. Значит, и V открыто в Y, так как $\pi^0_{A_0}$ — открытое отображение.

Рассмотрим функцию $f = f_0\pi_{A_0}$. Ясно, что функции $\overline{f}$ определена и непрерывна на всем X и является продолжением функции f. Итак, всякая непрерывная ограниченная функция, заданная на $\Sigma(p)$, продолжается до непрерывной функции на бикомпакт X. Значит, $\beta\Sigma(p) = X$.

38. Это сразу следует из 183 гл. III.

39. Это перефразированное утверждение задачи 222 гл. III.

40. Действительно, каждое интервальное подпространство совершенно нормального бикомпакта обладает счетной базой (224 гл. III).

41. Авторам не известно удовлетворительное решение этой задачи.

42. Необходимость. Зафиксируем бикомпакт $F \supset X$. Для каждой точки $p \in bX \setminus X$ выберем открытое в bX множество O_p типа F_σ, содержащее p и не пересекающееся с X (это возможно — для этого надо воспользоваться целой регулярностью bX). Из открытого покрытия $\{O_p\colon p \in bX \setminus X\}$ множества $bX \setminus X$ можно выделить счетное подпокрытие λ. Пусть $U = \bigcup\{G\colon G \in \lambda\}$. Тогда U — открытое в bX множество типа F_σ, не пересекающееся с F, но содержащее $bX \setminus X$. Пусть $\Phi = bX \setminus U$ — замкнутое в bX множество типа G_δ, лежащее в X и содержащее F. Тогда Φ — бикомпакт и характер его в bX, а следовательно, и в X счетен.

Достаточность. Рассмотрим произвольное покрытие γ пространства $bX \setminus X$ открытыми в bX множествами. Пусть $\mathcal{F} = bX \setminus \bigcup\{U\colon U \in \gamma\}$. Очевидно, F — бикомпакт, лежащий в X. По условию, найдется бикомпакт $\Phi \subset X$, содержащий F, характер которого в X счетен. Тогда, легко видеть, счетен и характер множества Φ в bX (см. 135 гл. II — рассуждения проходят без изменений с заменой точек на бикомпакт и дополнительной ссылкой на 50 гл. III). Значит, $bX \setminus \Phi$ — сумма счетного множества бикомпактов и потому финально компактно (см. 202 гл. III). При этом $bX \setminus X = bX \setminus \Phi \subset \bigcup\{U\colon U \in \gamma\}$. Из покрытия γ можно выделить счетное покрытие λ множества $bX \setminus \Phi$. Тогда λ — счетное покрытие множества $bX \setminus X$, являющееся подпокрытием исходного покрытия.

43. Пусть $y \notin [bX \setminus X]_{bX} \setminus (bX \setminus X) = X$. Итак, $y \notin X$. Положим $y \notin bX \setminus X$, а тогда и $y \notin [bX \setminus X]_{bX}$. Существует окрестность O_y точки y в пространстве bX, для которой $[O_y]_{bX} \subset X$. Следовательно, X локально бикомпактно в точке y и $y \notin \Pi(X)$.

Предположим теперь, что $y \in \Pi(X)$. Иными словами, пространство X локально бикомпактно в точке y. Зафиксируем открытое в X множество U и бикомпакт $\Phi \subset X$, для которых $y \in U \subset \Phi$. Тогда $[U]_{bX} \subset [\Phi]_{bX} = \Phi \subset X$, и потому $\tilde{U} = \operatorname{Int}[U]_{bX}$ — открытое в bX множество, содержащее точку y и лежащее целиком в X. Итак, $\tilde{U} \cap (bX \setminus X) = \varnothing$ и $y \notin [bX \setminus X]_{bX}$. Задача решена.

44. Необходимость. Положим $X^* = bX \setminus X$ и $bX^* = [X^*]_{bX}$, $X^{**} = bX^* \setminus X^*$. Можно рассматривать bX^* как бикомпактное хаусдорфово расширение пространства X^*. Так как пространство счетного типа, то $X^{**} = bX^* \setminus X^*$ финально компактно в силу 42 гл. IV. Но, очевидно, $X = X^{**} \cap (bX \setminus [X^*]_{bX})$. В силу 43 гл. IV $bX \setminus [X^*]_{bX}$ совпадает с множеством всех точек, в которых пространство X локально бикомпактно.

Достаточность. Следует из 42 гл. IV.

45. Рассмотрим расширение Стоуна — Чеха βX пространства X и произвольный бикомпакт Φ, лежащий в $\beta X \setminus X$. Далее рассмотрим непрерывное разбение пространства βX, одноточечными неправильными элементом которого является Φ. Пространство этого разбиения — бикомпакт (см. 92 гл. III) и его можно естественным образом интерпретировать как некоторое бикомпактное хаусдорфово расширение bX пространства X. Через $f\colon \beta X \to bX$ обозначим естественное отображение βX на bX. Тогда $\Phi = f^{-1}p^*$ для некоторой точки $p^* \in bX \setminus X$. По предположению, bX удовлетворяет условию (*), т. е. существует бикомпакт $\Phi^* = bX \setminus N$ такой, что $p^* \in \Phi^*$ и $\chi(\Phi^*, bX) \leqslant \aleph_0$. Положим $F = f^{-1}\Phi^*$. Тогда $\Phi \subset F \subset \beta X \setminus X$ (см. 27 гл. IV), и так как f — непрерывное замкнутое отображение (см. 92 гл. III), то $\chi(F, \beta X) \leqslant \chi(\Phi^*, bX) \leqslant \aleph_0$ (см. 324 гл. II). Но тогда (см. 46 гл. IV) N финально компактно.

46. Необходимость. Зафиксируем для каждой точки $x \in X$ ее окрестность Ox в пространстве bX такую, что $[Ox] \cap \Phi = A$. Семейство $\gamma = \{Ox\colon x \in X\}$ покрывает X, и множества $Ox \cap X$ открыты в X. Так как X финально компактно, то существует счетное семейство $\lambda \subset \gamma$, для которого $\bigcup\{U\colon U \in \lambda\} \supset X$. Пусть $F = \bigcap\{bX \setminus [U]\colon U \in \lambda\}$. Можно считать, что F замкнуто в bX. Тогда из всего сказанного следует, что $\Phi \subset F \subset bX \setminus X$.

Так как bX — бикомпакт и $|\lambda| \leqslant \aleph_0$, то $\chi(F, bX) \leqslant \aleph_1$ (см. 58 гл. III), т. е., бикомпакт F сепарабелен.

Достаточность. Пусть γ — произвольное открытое покрытие пространства X. Для каждого $U \in \gamma$ рассмотрим открытое в bX множество $O(U)$, для которого $O(U) \cap X = U$. По условию, для бикомпакта $\Phi = bX \setminus \bigcup \{O(U): U \in \gamma\}$ существует бикомпакт $F \subset bX \setminus X$, для которого $\Phi \subset F$ и $\gamma(F, bX) \leqslant \aleph_0$. Значит, открытое в bX множество $bX \setminus F$ имеет тип $\tau_{\aleph_1}$ и потому финально компактно (208 гл. III) и $X \subset bX \setminus F$. $\{O(U): U \in \gamma\}$ — открытое покрытие множества $bX \setminus F$, из которого можно выделить счетное подпокрытие λ. Тогда $\{V \cap X: V \in \lambda\}$ — счетное вписанное покрытие γ пространства X.

47. Достаточно соединить утверждения задач 46 и 45 гл. IV.

48. Зафиксируем счетную всюду плотную в Φ систему Q и отобразим тип f множества N на множество Q. Отображение f непрерывно и потому продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f}: \beta N \to \Phi$ (31 гл. IV). Так как Φ — хаусдорфово пространство, а βN бикомпактно, то $\tilde{f}$ замкнуто. Отсюда и из соотношений $Q \subset \tilde{f}(\beta N) \subset \Phi$, $[Q] = \Phi$ следует, что $\tilde{f}(\beta N) = \Phi$.

49. Зафиксируем для каждого иррационального числа α последовательность рациональных чисел (т. е. элементов N), к нему сходящуюся (по отношению к обычной топологии); множество чисел, являющихся членами этой последовательности, обозначим через $\varphi(\alpha)$. Тогда $|\varphi(\alpha) \cap \varphi(\alpha')| < \aleph_0$ при $\alpha \neq \alpha'$ и $|\varphi(\alpha)| = \aleph_0$, $\varphi(\alpha) \subset B$ при всех α. Так как мощность множества всех иррациональных чисел равна $2^{\aleph_0}$, то $\mathcal{E} = \{\varphi(\alpha): \alpha$ — иррациональное число$\}$ — искомое семейство.

50. Следует из задачи 49 гл. IV.

51. 1) Имеем $[A]_{\beta N} \cup [N \setminus A]_{\beta N} = [A \cup (N \setminus A)]_{\beta N} = [N]_{\beta N} = \beta N$. Так как N нормально, а A и $N \setminus A$ — замкнутые в N непересекающиеся множества, то $[A]_{\beta N} \cap [N \setminus A]_{\beta N} = \Delta$ (12 гл. IV). Следовательно, $[N]_{\beta N} = \beta N \setminus [N \setminus A]_{\beta N}$ — открытое в βN множество.

2) Доказывается легко со ссылкой на 16, 17 и 5 гл. IV.

3) $|A|_{\beta N} \subset N$, ибо $|A|_{\beta N}$ — бесконечный бикомпакт, и точек в N нет.

52. Легко следует из задач 50 и 51 гл. IV.

53. Семейство $\mathcal{B} = \{[M]_{\beta N}: M \subset N\}$ является базой пространства βN в силу определения топологии ωN — универсального расширения пространства N — в том, что $\beta N = \omega N$ (мы вправе так поступить, ибо такое равенство эквивалентно — ясно, что это допустимо). Но $|\mathcal{B}| = 2^{\aleph_0}$. С другой стороны, базы мощности, меньшей $2^{\aleph_1}$, у пространства βN нет, ибо в $\beta N \setminus N$ существует дизъюнктное семейство мощности $2^{\aleph_0}$ вполне открытых множеств (52 гл. IV). Значит, вес βN равен $2^{\aleph_1}$. Несколько сложней вывести, что плотность βN. Из $\beta N = \omega N$ (см. 3, 17 гл. IV) и определения ωN следует, что $|\beta N| \leqslant 2^c$. Но βN можно непрерывно отобразить на любой сепарабельный бикомпакт, в частности, на D^c — произведение континуума (дискретных) двоеточий (381 гл. II, 48 гл. IV). Поэтому $|\beta N| \geqslant |D^c| = 2^c = 2^{2^{\aleph_0}}$ (см. 375 гл. III). Следовательно, $|\beta N| = 2^c$.

54. В βN множества вида $[M]_{\beta N}$, где $M \subset N$, образуют базу, что следует, например, из того, что усмотренное расширение ωN для N совпадает с расширением Стоуна — Чеха в силу определения топологии ωN (3, 17 гл. IV). Поэтому семейство $\mathcal{B} = \{[M]_{\beta N} \cap (\beta N \setminus N): M \subset N$ и $|M| = \aleph_0\}$ является базой пространства $X = \beta N \setminus N$. Положим $[M]_{\beta N} \cap (\beta N \setminus N) = \overline{M}$. Так как $\bigcap \{U: U \in \gamma\} = \Delta$, то можно построить систему $\lambda = \{\overline{M}_n: n = 1, 2, \ldots\} \subset \mathcal{B}$, для которой $\Delta = \bigcap \{\overline{M}_n: n \in N\} = \bigcap \{U: U \in \gamma\}$ $\overline{M}_{n+1} \subset \overline{M}_n$. Положим $\Phi = \bigcap \{M_n: n \in N^+\}$. Достаточно показать, что Φ содержит непустое открытое в X множество. Из $M_{n+1} \subset \overline{M}_n$ следует (51 гл. IV), что $M_{n+1} \setminus M_n$ — конечно (быть может, пустое) множество. Но тогда, если $M_{n+1} = M_{n+1} \cup M_n$, то $\overline{M}_{n+1} = \overline{M}_{n+1}$ (51 гл. IV). Поэтому можно считать, что $M_{n+1} \subset M_n$ при всех n. Так как $|M_1| = \aleph_1$, $n = 1, 2, \ldots$, то по индукции без труда строится последовательность ζ элементов множества N такая, что (а) $\zeta_n \in M_n$ и (б) $\zeta_{n+1} \notin \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$. Положим $M^* = \{\zeta_n: n = 1, 2, \ldots\}$. Тогда $|M^*| = \aleph_0$ и $|M^* \setminus M_n| < \aleph_0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Значит, $M^* \neq \Delta$ и $\overline{M}^* \subset \overline{M}_n$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, т. е. $M^* \subset \bigcap \{\overline{M}_n: n = 1, 2, \ldots\} \subset \bigcap \{U: U \in \gamma\}$. Множество $\overline{M}^* = [M^*]_{\beta N} \cap (\beta N \setminus N)$ открыто в X (51 гл. IV).

55. Вес пространства X равен $2^{\aleph_0}$, т. е. $\aleph_1$. Через $(T, \prec)$ обозначим минимально вполне упорядоченное множество мощности $\aleph_1$ и зафиксируем базу $\mathcal{B}$ в X, элементы которой приведены во взаимно однозначное соответствие с элементами множества T: $\mathcal{B} = \{U_t: t \in T\}$. Теперь мы по индукции определим убывающую последовательность $\{V_t: t \in T\}$ открытых в X множеств. Полагаем $V_0 = X$ (где 0 — первый элемент множества T). Если $t_1 \in T$ и для всех $t \in T$, где $t \prec t_1$, непустое открытое в X множество V_t уже определено, то полагаем $W_{t_1} = \bigcap \{V_t: t \in T,\ t \prec t_1\}$. Если $W_{t_1} \neq \Delta$, то выберем непустое открытое множество V_{t_1}, содержащееся с замыканием в W_{t_1}, что возможно в силу 54 гл. IV. Далее, если $V_{t_1} \cap U_{t_1} \neq \Delta$, то положим $V_{t_1} = V_{t_1} \cap U_{t_1}$. В противном случае положим $V_{t_1} = V_{t_1}$. Пусть множества V_t определены для всех $t \in T$. Заметим, что $[V_{t'}] \subset V_{t''}$ при $t' \prec t''$ и $V_t \neq \Delta$ при всех $t \in T$. Поэтому $P = \bigcap \{[V_t]: t \in T\} = \bigcap \{V_t: t \in T\} \neq \Delta$. Зафиксируем $x^* \in P$ и покажем, что семейство $Q = \{V_t: t \in T\}$ образует базу в точке x^*.

Рассмотрим произвольную окрестность Ox^* точки x^*. Найдется (так как $\mathcal{B}$ — база в X) $t^* \in T$, для которого $x^* \in U_{t^*} \subset Ox^*$. Из $W_{t^*} \supset V_{t^*} \supset P \ni x^*$ следует, что $U_{t^*} \cap W_{t^*} \neq \Delta$. Поэтому $V_{t^*} \subset U_{t^*}$ (в силу определения V_{t^*}). Итак, $x^* \in V_{t^*} \subset U_{t^*} \subset Ox^*$, т. е. доказано, что Q — база в точке x^*. Если R — счетное множество окрестностей точки x^* в X, то для каждого $G \in R$ зафиксируем $\lambda(G)$ так, чтобы было $x^* \in V_{\lambda(G)} \subset G$, и выберем $\bar{t} \in T$, для которого $\lambda(G) \prec \bar{t}$ при всех $G \in R$ (это возможно, так как множество R счетно). Тогда $\bigcap \{G: G \in R\} \supset \bigcap \{V_{\lambda(G)}: G \in R\} \supset V_{\bar{t}} \ni x^*$, что и требовалось, т. е. точка x^* искомая.

56. Существует совершенный бикомпакт Φ, некоторое подпространство Z которого не нормально (219 гл. III). В силу 46 гл. IV существует непрерывное отображение $f: \beta N \to \Phi$, $f(\beta N) = \Phi$. Отображение f, как непрерывное отображение бикомпактов, совершенно. Тогда βN не может быть наследственно нормальным, ибо иначе и Φ было бы наследственно нормальным. Последнее легко получается, если воспользоваться задачами 340, 329 гл. II.

57. Предположим противное. Тогда в $Y \setminus \{y\}$ существует последовательность $\{y_n: n \in N\}$ точек, сходящаяся к y. Мы сейчас построим по индукции две последовательности $\xi = \{U_n: n \in N\}$ попарно не пересекающихся открытых в Y множеств таких, что (а) $U_n \ni y_n$ для всех $n \in N$ и (б) какова бы ни была подпоследовательность $\eta = \{U_{n_k}: k \in N\}$ последовательности ξ, имеет место $[\bigcup (U_{n_k}: k \in N)] \supset y$. Предварительно определим для каждого открытого в Y множества G, содержащего y, и каждого $n \in N$ непустое открытое множество $\varphi(G, n)$ и номер $\lambda(G, n) \in N$ со свойствами: 1) $\varphi(G, n) \subset G$; 2) $[\varphi(G, n)] \ni y$; 3) $\lambda(G, n) > n$; 4) $\varphi(G, n) \cap y_{\lambda(G, n)} = \Delta$. Покажем, как это сделать. Существуют $n' \in N$ и $n'' \in N$ такие, что $n' > n$, $n'' > n$, $y_{n'} \neq y_{n''}$ и $y_{n'} \in G$, $y_{n''} \in G$. Выберем у точек $y_{n'}$ и $y_{n''}$ непересекающиеся

окрестности V и V', лежащие в O. Положим $P' = V' \cap N$ и $P'' = V'' \cap N$. Тогда $P' \cap P'' = \Lambda$; так как N всюду плотно в Y, то $[P'] = [V']$, $[P''] = [V'']$. Но $P' \cap P'' = \Lambda$ и тем, что $N \cup \{p\}$ — подпространство пространства βN, следует, что либо $p \in [P']$, либо $p \in [P']$. Пусть $p \notin [P']$. Тогда $p \notin [V']$, и мы полагаем $\varkappa(G, x) = x'$, $\varphi(G, x) = V'$.

Пример теперь за U_0 любую окрестность точки p_0, замыкание которой не содержит точки p. Пусть $l \in N$ и для всех $n \leqslant l$ множества U_n определены так, что выполняется условие (a). Положим тогда $G = Y \setminus \bigcup \{U_n : n \leqslant l\}$ и $U_{l+1} = \varphi(G, l)$. В силу 2) $[U_{l+1}] \ni p$. Таким образом множества U_i определяются для всех $i \in N$. Они непусты, открыты, попарно не пересекаются; ясно, что для них выполняется условие (a). Из построения следует, что для каждого $k \in N$ существует $n_k \in N$, $n_k > n$, такое, что $U_k \ni p_{n_k}$. Так как любая подпоследовательность последовательности $\{p_{n_k} : k \in N\}$ сходится к p, то условие (б) тоже выполняется.

Положим $A_1 = \bigcup \{U_i : i \in N,\ i$ четно$\} \cap N$ и $A_2 = (\bigcup \{U_i : i \in N,\ i$ нечетно$\}) \cap N$. Тогда, очевидно, $A_1 \cap A_2 = \Lambda$, но $[A_1] \ni p$ и $[A_2] \ni p$ — получили противоречие.

58. Из 15, 21 и 23 гл. IV следует, что $\beta N = \beta Y$ — единственное бикомпактное расширение пространства Y. Тогда Y локально бикомпактно и псевдокомпактно (см. 26 гл. IV). Считую компактность Y доказывать смысл, исходя из определения и инвариантов.

59. Положим $Y = X \setminus N$. Для каждой точки $y \in Y$ зафиксируем бикомпакт $\Phi(y)$, лежащий в X, такой, что $y \in [\Phi(y) \cap N]$ (очевидно, $y \in [N] \setminus N$ для всех $y \in Y$, поэтому это возможно). Положим $F(y) = [\Phi(y) \cap N]$. В силу определения топологии в βN, $F(y)$ — открыто-замкнутое бикомпактное подпространство пространства βN (51 гл. IV). При этом $F(y) = [\Phi(y) \cap N] \subset \Phi(y) \subset X$. Имеем $X = Y \cup N = \bigcup \{F(y) : y \in Y\} \cup N$. Все множества, стоящие в правой части, открыты в βN; следовательно, и X открыто в βN.

60. В $\beta N \setminus N$ выберем произвольное счетное бесконечное подмножество M. Оно не замкнуто в βN (36 гл. IV). Через x^* обозначим какую-нибудь предельную для M точку множества $\beta N \setminus M$. Положим $Q = \bigcup \{\beta N \setminus \{x\} : x \in M\}$. Тогда Q полно в смысле Чеха по определению, и $Q \subset N$, ибо $M \cap (\beta N \setminus N) = \Lambda$. Очевидно, $Q \ni x^*$ и Q всюду плотно в βN. Пространство Q не локально бикомпактно — в противном случае множество Q было бы открыто в βN (см. 179 гл. III) и вместе с точкой x^* содержало бы некоторую ее окрестность, значит, почти все точки множества M, что невозможно, ибо $M \cap (\beta N \setminus Q) = \Lambda$.

61. Множество N всюду в X, оно там не имеет предельных точек. Следовательно, X не счетно компактно (см. 169 гл. III). Предположим, что X не псевдокомпактно. Тогда существует непрерывная вещественная функция f на X. Так как $N \setminus N$ всюду плотно в X, то множество $f(R \setminus N)$ является некомпактным подпространством пространства R. Поэтому найдется бесконечное множество $A = f(R \setminus N)$, не имеющее в R предельных точек. Для каждого $a \in A$ зафиксируем $x(a) \subset R \setminus N$ такое, что $f(x(a)) = a$. Тогда $P = \{x(a) : a \in A\}$ — бесконечное множество, лежащее в X и не имеющее тем предельных точек,— последнее следует из непрерывности f и свойства множества A. Имеем $A \subset R \setminus N$, A и N — замкнутые в R множества. Следовательно (13 гл. IV), $[A]_{\beta R} \cap [N]_{\beta R} = \Lambda$ (так как R — нормальное пространство). Значит, $[A]_{\beta R} \subset X$. Но A замкнуто в X. Поэтому $A = [A]_{\beta X}$, а это противоречит тому, что A — бесконечное дискретное подпространство пространства X. Этим доказано, что X псевдокомпактно.

62. Рассмотрим множество, в естественном порядке, имеющее N^*, все для каждого $n \in N^*$ ранее, отнесем ли его к N^* или к N^{**}. Положим $1 \in N^*$ и $E_1 \setminus \{1\} \subset N^{**}$. Пусть $i \geqslant 1$ и для всех $j \leqslant i$ уже установлено, какое из соотношений имеет место: $j \in N^*$ или $j \subset N^{**}$, а также из N^* и N^{**} вычеркнуты все элементы множества $\bigcup \{E_j : j \leqslant i\}$. Рассмотрим $i+1$ и установим, когда $i+1$ следует отнести к N^* и когда — к N^{**}, тем самым дадим соответствующее правило вычеркивания элементов множества E_{i+1}. Прежде всего может случиться, что $i+1 \in \bigcup \{E_j : j \leqslant i\}$. Возможны тогда два случая: 1) $i+1 \in N^{**}$. Полагаем тогда, что если $n \subset E_{i+1}$ и $n \geqslant i+1$, то $n \in N^*$ (очевидно, для $n \in E_1$ при $n \geqslant i$ вопрос о принадлежности n к N^* или N^{**} ранее не решался); 2) $i+1 \in N^*$. Полагаем тогда, что если $n \geqslant i+1$ и $n \in E_{i+1}$, то $n \in N^{**}$. Если же $i+1 \notin \bigcup \{E_j : j \leqslant i\}$, то мы принимаем, что $i+1 \subset N^*$, и для всех $n \subset E_{i+1}$ больших $i+1$ как в случае 2), полагаем $n \subset N^{**}$. Очевидно, указанная процедура определяет разбиение множества N^* на два бесконечных непересекающихся множества с нужным свойством — последнее тривиальное содержится в определении N^* и N^{**}.

63. Пусть нашелся гомеоморфизм пространства X на Y. Образ точки x^* при нем непременно есть точка x^*, так как x^* — единственная неизолированная точка в обоих пространствах. Образ произвольного элемента $n \in N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ при этом гомеоморфизме условимся обозначать через x_n. Итак, $M = \{x_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Зафиксируем теперь семейство попарно не пересекающихся окрестностей Ox_n точек x_n множества M в пространстве βN, взятых из стандартной базы топологии пространства βN. Итак, $Ox_n = [N_n]_{\beta N}$, где N_n — некоторое бесконечное подмножество натурального ряда, причем $N_n \cap N_{n'} = \Lambda$ при $n' \neq n$.

Теперь мы воспользуемся результатом задачи 62 гл. IV. Существуют непересекающиеся бесконечные множества $N^* \subset N$, $N^{**} \subset N$, для которых $N^* \cup N^{**} = N$ и $|N^* \cap N_n| \leqslant \aleph_0$, если $n \in N^{**}$, $|N^{**} \cap N_n| \leqslant \aleph_0$, если $n \in N^{**}$. Тогда либо $[N^*] \ni x^*$, либо $[N^{**}] \ni x^*$. Пусть, для определенности, $[N^*] \ni x^*$. Тогда, в силу выбора нумерации множества M, получим: $\{x_n : n \in N^*\} \ni x^*$. Но $[N^*]$ — открытое в βN множество (51 гл. IV), т. е. окрестность точки x^*. Следовательно найдется $n^* \in N^*$, для которого $x_{n^*} \in [N^*]_{\beta N}$. С другой стороны, $x_{n^*} \in Ox_{n^*} = [N_{n^*}]_{\beta N}$. Следовательно, $[N^*]_{\beta N} \cap [N_{n^*}]_{\beta N} \cap (\beta N \setminus N) \neq \Lambda$. Поэтому $|N_{n^*} \cap N^*| = \aleph_0$ (51 гл. IV), а это противоречит тому, что $n^* \in N^*$.

64. Существует непрерывное отображение $f: \beta N \to D^{\mathfrak{c}}$ на некоторый континуум $D^{\mathfrak{c}}$ веса $\mathfrak{c}$, ибо $D^{\mathfrak{c}}$ сепарабельно (см. 381 гл. II, 48 гл. IV). Но теснота любого диадического бикомпакта равна его весу (см. Архангельский и Пономарев [1]); значит, теснота $D^{\mathfrak{c}}$ равна $2^{\aleph_0}$, а теснота при непрерывных замкнутых отображениях не повышается. С другой стороны, очевидно, $\tau(\beta N) \leqslant 2^{\aleph_0}$.

64'. См. Ефимов [1], [3].

67. Логика полностью из 65, 66 гл. IV. См. также Вершицкий [1].

68. Это легко выписывается из того, что $C_f(N)$ и $C_{f'}(N)$ гомеоморфны, если f и f' одинаковое число неподвижных точек или если f и f' совпадают всюду, кроме, быть может, конечного множества точек.

69. Пусть φ — непрерывная вещественная функция на X. φ — непрерывная вещественная функция на V, для которых $\varphi(P) = \{1\}$, $\varphi(X \setminus V) = \{0\}$, $\varphi(P'') = \{1\}$, $\varphi(V \setminus V'') = \{0\}$. $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$ при всех $x \subset V$. Положим $f(x) = \varphi(x) \cdot \varphi(x)$, если $x \subset V$, и $f(x) = 0$, если $x \in X \setminus V$. Примерно ясно, что f — непрерывная на всем X функция, и $f(P'') = \{1\}$, $f(X \setminus V'') = \{0\}$.

70. Это легко следует из вполне регулярности пространства δX.

71. По определению α-фильтра, найдется $V \subset \beta$, для которого существует на X непрерывная ограниченная вещественная функция f такая, что $f(X \setminus U) = \{0\}$ и $f(V) = \{1\}$. Осталося сослаться на задачу 15 гл. IV.

72. Так как βX — вполне регулярное пространство, нуждается в доказательстве только минимальность β_α. Предположим, что нашелся α-фильтр β, строго содержащий β_α. Рассмотрим любое $U \subset \beta \setminus \beta_\alpha$. Выберем $V \subset \beta$, для которого существует непрерывная ограниченная вещественная функция на X такая, что $f(X \setminus U) = \{1\}$ и $f(V) = \{0\}$. Любая окрестность точки x пересекается с $X \setminus U$ — иначе $U \in \beta_\alpha$, что противоречит $U \subset \beta \setminus \beta_\alpha$. Значит,

$x \in [X \setminus U]_{\beta X}$. Но $[V]_{\beta X} \cap [X \setminus U]_{\beta X} = \Lambda$ (см. 15 гл. IV). Следовательно, $x \in [V]_{\beta X}$. Тогда $Ox = \beta X \setminus [F]_{\beta X}$ — окрестность точки x в βX, и поэтому $Ox \cap X \subset \beta_x \subset \beta$. Но, очевидно, $(Ox \cap X) \cap F = \Lambda$, а это противоречит тому, что β — фильтр.

73. Множество $\Phi = \bigcap \{[G]_{\beta X}: G \in \beta\} \neq \Lambda$, ибо семейство $\{[G]_{\beta X}: G \in \beta\}$ центрировано и состоит из замкнутых в бикомпакте βX множеств. Выберем $x \in \Phi$. Тогда, очевидно, $\beta_x \cup \beta$ — α-ультрафильтр. Но и β_x — α-ультрафильтр (см. 72 гл. IV). Из $\beta_x \cup \beta \supset \beta_x$ и $\beta_x \cup \beta \supset \beta$ следует теперь, по определению α-ультрафильтра, что $\beta = \beta_x \cup \beta = \beta_x$.

74. В силу 73 гл. IV имеем $\beta = \beta_x$, где $(*) = \bigcap \{[G]_{\beta X}: G \in \beta\}$. Покажем, что $x \in \bar{G}$. Если $x \in \bar{G}$, то (см. 149 гл. IV) $x \in [X \setminus G]_{\beta X}$. Но $G \in \beta$ и тогда, что β — α-ультрафильтр (см. стр. 240), следует, что $[V]_{\beta X} \cap [X \setminus G]_{\beta X} = \Lambda$ для некоторого $V \in \beta$ (см. 15 гл. IV). Но $\bar{G} = \beta X \setminus [X \setminus G]_{\beta X}$ (см. 149 гл. IV) и $x \in [V]_{\beta X}$. Следовательно, $x \in \bar{G}$. Очевидно, если $x \in \bar{G}$, то $G \in \beta_x$.

75. Предположим противное. Тогда найдутся (см. 15 гл. IV) замкнутые в X функционально отделимые множества P и Q, для которых $\Lambda \neq [P]_{\beta X} \cap [Q]_{\beta X}$. Множество $X \setminus P$ принадлежит семейству ξ_P всех α-окрестностей множества Q в X, а множество $X \setminus Q$ принадлежит семейству ξ_P всех α-окрестностей множества P в X. Зафиксируем $x \in [P]_{\beta X} \cap [Q]_{\beta X}$. Так как ξ_x — α-семейство и фильтр и так как каждый элемент α-семейства b_x, которое тоже является фильтром, пересекается с каждым элементом семейства ξ_P, $b_x \cup \xi_P$ — тоже α-семейство. Но b_x — α-ультрафильтр. Поэтому $b_x \cup \xi_P = b_x$, т. е. $b_x \supset \xi_P$. Аналогично доказывается, что $b_x \supset \xi_Q$. Но у функционально отделенных множеств всегда имеются непересекающиеся α-окрестности (см. 1 гл. III). Поэтому некоторый элемент семейства ξ_P не пересекается с некоторым элементом семейства ξ_Q, а это противоречит тому, что b_x — α-ультрафильтр и $b_x \supset \xi_P \cup \xi_Q$.

76. Не существует это показано в решении задач 73 и 75 гл. IV.

77. Рассмотрим $\beta_x = \{G \cap X: U$ открыто в βX и $U \ni x\}$. В силу 72 гл. IV β_x — α-ультрафильтр на X. Остается заметить, что $Y = [\beta X \setminus X] \cap X$, $x \in \beta X \setminus Y$, следовательно, $Y \in \beta_x$. Теперь сошлемся на задачу 16 гл. III.

78. Утверждение 1) справедливо, так как X есть T_1-пространство. В силу 72 гл. IV каждое β_x является α-ультрафильтром на X, а из 73 гл. IV следует, что B есть множество всех α-ультрафильтров на X. Этим доказано 4). Для каждого открытого в X множества G существует $\bar{G} \in \mathcal{B}$ такое, что $\bar{G} \cap X = G$ (см. 149 гл. IV). Поэтому 3) вытекает из 2). Из 1), определения β и $\mathcal{B}$ и того, что $\mathcal{B}$ — база пространства βX, следует утверждение 5). Наконец, 2) справедливо в силу 74 гл. IV.

80. Каждая непрерывная вещественная функция f, заданная на X, ограничена и потому продолжается до непрерывной функции на βX — расширения Стоуна — Чеха пространства X. По определению, это означает, что либо X — не Q-пространство, либо $X = \beta X$, т. е. X — бикомпакт.

82. Необходимость. Пусть X есть Q-пространство. Тогда существует непрерывная вещественная функция f на X, которая не продолжается на пространство $X \cup \{x^*\}$. При любом $k \in N$ положим $X_k = \{x \in X: |f(x)| \leqslant k\}$ и $X^k = \{x \in X: |f(x)| \geqslant k+1\}$. Множества X_k^- и X^k замкнуты в X и функционально отделимы (функцией f), поэтому (см. 15 гл. IV) $[X_k^-]_{\beta X} \cap [X^k]_{\beta X} = \Lambda$ при всех $k \in N$. Покажем, что $x^* \notin [X_k^-]_{\beta X}$. Предположим противное. Тогда $x^* \notin [X_k^-]_{\beta X}$. Рассмотрим функцию f' на X, определенную так: $f'(x) = f(x)$, если $|f(x)| \leqslant k-1$; $f'(x) = k$, если $f(x) \geqslant k-1$; $f'(x) = -(k+1)$, если $f(x) \leqslant -(k+1)$. Очевидно, f' — непрерывная ограниченная вещественная функция на X. Поэтому ее можно продолжить на βX — и тем более на $X \cup \{x^*\}$ — до некоторой непрерывной функции $\tilde{f}$. Положим $\tilde{f}(x^*) = \tilde{f}'(x^*)$ и $\tilde{f}(x) = f(x)$ при всех $x \in X$. Из $x^* \in [X_k^-]_{\beta X}$ следует, что f' и f совпадают на пересечении некоторой окрестности точки x^* с X. Поэтому f — непрерывная функция на $X \cup \{x^*\}$, продолжающая f, — получили противоречие. Значит, $[X_k^-]_{\beta X} \not\ni x^*$ при всех $k \in N$. Множество $U_k = \beta X \setminus [X_k^-]_{\beta X}$ открыто и содержит точку x^*. Существует (см. 89 гл. III) бикомпакт Φ_k счетного характера в βX, лежащий в U_k и содержащий x^*. Тогда $F = \bigcap \{\Phi_k: k \in N\}$ — бикомпакт счетного характера в βX и $x^* \in F \subset \bigcap \{U_k: k \in N\} \subset \beta X \setminus X$ — последнее включение вытекает из того, что $\bigcup \{[X_k^-]_{\beta X}: k \in N\} \supset \bigcup \{X_k^-: k \in N\} = X$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $F \subset \beta X \setminus X$, $\chi(F, \beta X) = \aleph_0$. Тогда на βX существует непрерывная вещественная функция φ такая, что $\varphi^{-1}(0) = F$ (см. 30 гл. III). Положим $f(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$ для всех $x \in X$ (заметим, что $\varphi(x) \neq 0$ при $x \in X$, ибо $F \cap X = \Lambda$). Для любой точки $y \in F$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность Oy точки y в βX такая, что $|\varphi(x)| < \varepsilon$. Тогда $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$ для всех $x \in Oy \cap X$. Так как всегда $Oy \cap X \neq \Lambda$ и ε произвольно, мы заключаем, что функцию f нельзя продолжить до непрерывной функции на $X \cup \{y\}$, как бы ни было выбрано $y \in F$. Пусть теперь $\tilde{X} = \{x^*\} \cup X$, $[X]_{\tilde{X}} = \tilde{X}$, $x^* \notin X$ и $\tilde{X}$ — вполне регулярное пространство. Рассмотрим естественное отображение g расширения Стоуна — Чеха βX пространства X на расширение Стоуна — Чеха $\beta\tilde{X}$ пространства $\tilde{X}$ (такое отображение существует, ибо $\beta\tilde{X}$ является, очевидно, некоторым бикомпактным хаусдорфовым расширением пространства $X \subset \tilde{X}$). Выберем $y^* \in g^{-1}(x^*)$. Из $x^* \notin X$ следует, что $y^* \in \beta X \setminus X$ (см. 27 гл. IV). Как мы видели выше, существует непрерывная вещественная функция f на X, которая не продолжается на $X \cup \{y^*\}$. Так как сужение g на $X \cup \{y^*\}$ является упрощением пространства $X \cup \{y^*\}$ на пространство $\tilde{X} = X \cup \{x^*\}$, то f тем более продолжима на $\tilde{X}$.

83. См. 188, 185 гл. III и 80 гл. IV.

84. Базой $\aleph_1$-модификации пространства βX служит совокупность всех множеств типа G_δ в βX. Поэтому наше утверждение сразу вытекает из 82 гл. IV и следующего замечания (см. 74 гл. III): если A — множество типа G_δ в бикомпакте F и $x \in A$, то существует бикомпакт Φ такой, что $x \in \Phi \subset A$ и $\chi(\Phi, F) \leqslant \aleph_1$.

85. Рассмотрим расширение Стоуна — Чеха βX пространства X. Пусть X — Q-пространство и ξ — произвольный свободный α-ультрафильтр на X. Тогда, в силу 73 гл. IV, существует точка $x \in \beta X \setminus X$ такая, что $\xi = \beta_x$. Так как X — Q-пространство, существует счетное семейство $\lambda = \{U_n: n \in N\}$ открытых в βX множеств такое, что $x \in \bigcap \{U_n: n \in N\} \subset \beta X \setminus X$ (82 гл. IV). Тогда $\eta = \{U_n \cap X: n \in N\} \subset \xi$, $|\eta| = \aleph_1$ и $\bigcap \{V: V \in \eta\} = \Lambda$ — необходимость доказана.

Обратно, если y — любая точка из $\beta X \setminus X$, то β_y — свободный α-ультрафильтр на X (см. 72 гл. IV). По условию, он $\aleph_1$-прост, значит, существует счетное семейство Θ окрестностей точки y в βX такое, что $\bigcap \{[U \cap X]: U \in \Theta\} = \Lambda$. Но тогда $y \in \bigcap \{U: U \in \Theta\} \subset \beta X \setminus X$, чем доказана (см. 84 гл. IV) достаточность.

86. Если X дискретно, то каждый α-ультрафильтр на пространстве X является ультрафильтром на множестве X и, наоборот, каждый ультрафильтр на множестве X является α-ультрафильтром на пространстве X. Условие $\aleph_1$-простоты α-ультрафильтра при этом тождественно требованию, чтобы ультрафильтр не был σ-ультрафильтром (см. стр. 242, 32). Теперь остается сопоставить утверждение задачи 85 гл. IV с определением неизмеримого кардинала (см. стр. 242).

87. Это сразу вытекает из 82 гл. IV и следующего простого утверждения: если $F \subset Y \subset X$ и $\chi(F, X) = \aleph_0$, то $\chi(F, Y) \leqslant \aleph_1$.

82. Необходимость следует из 22 гл. IV: если X — Q-пространство, то βX обладает свойством $(*)$. Докажем теперь, что если некоторое бикомпактное хаусдорфово расширение bX пространства X обладает свойством $(*)$, то и расширение Стоуна — Чеха βX этого пространства тоже обладает этим свойством. Рассмотрим естественное отображение $f\colon \beta X \to bX$ (см. 22 гл. IV). Зафиксируем $x^* \in bX \setminus X$ и положим $p^* = f(x^*)$. Выберем бикомпакт $\Phi \subset bX \setminus X$, для которого $x^* \in \Phi$ и $\chi(\Phi, bX) = \aleph_0$, и положим $F = f^{-1}\Phi$. Тогда F — бикомпакт, и из $f(\beta X \setminus X) \subset bX \setminus X$ (см. 27 гл. IV) следует, что $f \subset \beta X \setminus X$. Так как f — замкнутое отображение, то из 324 гл. II следует, что $\chi(F, \beta X) = \aleph_0$. Кроме того, $x^* \in F$. Итак, βX обладает свойством $(*)$. А тогда (82 гл. IV) X — Q-пространство.

89. Необходимость вытекает из 84 гл. IV, в качестве bX подходит βX. Достаточность следует из 88 гл. IV и того, что множество типа G_δ в бикомпакте всегда представимо как обращение некоторого множества бикомпактов счетного характера в этом бикомпакте (см. 71 гл. III).

91. Это следует из задач 46 и 88 гл. IV.

92. Это прямо следует из 88 гл. IV (искомые бикомпакты счетного характера — однозначные множества).

93. Каждая точка пространства X удовлетворяет первой аксиоме счетности и в пространстве δX. Поэтому $[Y]_{\delta X}$ — бикомпактное хаусдорфово расширение пространства Y, удовлетворяющее условию $(*)$ из 88 гл. IV. Следовательно (88 гл. IV), Y — Q-пространство (см. также 89 гл. IV).

94. Так как у X нет точек локальной бикомпактности, то $\delta X \setminus X$ всюду плотно в δX (см. 43 гл. IV). Поэтому если $F \subset \delta X \setminus X$ и F — бикомпакт счетного характера в $\delta X \setminus X$, то и $\chi(F, \delta X) = \aleph_0$. Так как $\delta X \setminus X$ — пространство точечно счетного типа, можно заключить, что δX обладает свойством $(*)$ по отношению к X (см. 82 гл. IV). Следовательно (88 гл. IV), X — Q-пространство.

95. Положим $\delta Y = [Y]_{\delta X}$. Тогда $\delta Y \setminus Y$ — замкнутое подпространство пространства X. Зафиксируем произвольно $x \in \delta Y \setminus Y$. Так как $x \in X$, то существует бикомпакт $\Phi \subset X$ такой, что $\chi(\Phi, X) \leqslant \aleph_0$. Из $[X]_{\delta X} = \delta X$ следует, что и $\chi(\Phi, \delta X) \leqslant \aleph_0$. Положим $F = (\delta Y \setminus Y) \cap \Phi$. Тогда F — бикомпакт счетного характера в δY, причем $x \in F \subset \delta Y \setminus Y$ (мы учли, что F — замкнутое множество типа G_δ в бикомпакте δY). Значит, δY обладает свойством $(*)$ и Y — Q-пространство (см. 88 гл. IV).

96. Воспользуйтесь задачей 82 гл. IV.

97. Для каждого $\alpha \in A$ зафиксируем бикомпактное хаусдорфово расширение $b_\alpha X_\alpha$ пространства X_α, обладающее свойством $(*)$ из задачи 88 гл. IV, например, в качестве $b_\alpha X_\alpha$ можно взять βX_α — расширение Стоуна — Чеха пространства X_α. Тихоновское произведение $\Pi\{b_\alpha X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ является бикомпактным хаусдорфовым расширением (обозначим его через bX) тихоновского произведения $X = \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$. Из 262 гл. II или 77 гл. III следует, что bX обладает свойством $(*)$ по отношению к X, т. е. является Q-расширением пространства X. Поэтому (88 гл. IV) X — Q-пространство.

98. Прямая является Q-пространством (90 гл. IV), произведение Q-пространств является Q-пространством (97 гл. IV) и замкнутое подпространство Q-пространства является Q-пространством (96 гл. IV). Отсюда следует достаточность. Докажем необходимость. В силу 82 гл. IV если X — Q-пространство, то и βX — расширение Стоуна — Чеха пространства X — существует семейство $\gamma = \{\Phi_\alpha\colon \alpha \in A\}$ бикомпактов такое, что $\chi(\Phi_\alpha, bX) \leqslant \aleph_1$ и $\bigcup\{\Phi_\alpha\colon \alpha \in A\} = \beta X \setminus X$. Из 70 гл. III следует теперь, что X гомеоморфно замкнутому подпространству произведения $|A|^\tau$ экземпляров прямой (τ — вес пространства X).

99. Если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$, то $F \cap Y = A$. Поэтому $\overline{\mathcal{F}} \mid X = A$ и $X \subset \nu X$ — соотношение 0) выполняется. Из 0) следует, что βX является бикомпактным хаусдорфовым расширением пространства νX. Но вместе $\beta X \setminus \nu X = \mathcal{G} = \bigcup\{F\colon F \in \mathfrak{F}\}$ — объединение бикомпактов счетного характера в βX. Значит (см. 82 гл. IV), νX — Q-пространство. Этим доказаны 1). Докажем 2). Воспользуемся тем, что βX — расширение Стоуна — Чеха пространства Y (это верно — см. 21 гл. IV, так как $X \subset Y \subset \beta X$). Нам дано, что Y — Q-пространство. Поэтому (82 гл. IV) существует семейство $\mathfrak{C}'$ бикомпактов, лежащих в $\beta X \setminus Y$ и имеющих счетный характер в βX, причем $\bigcup\{\Phi\colon \Phi \subset \mathfrak{C}'\} = \beta X \setminus Y$. Но тогда (так как $X \subset Y$) $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{G}$, откуда $\beta X \setminus Y \subset \mathfrak{G}$. Значит, $Y \supset \beta X \setminus \mathcal{G} = \nu X$, что и требовалось.

100. Имеем $X \subset Y \subset \nu X \subset \beta X$. Поэтому βX является расширением Стоуна — Чеха пространства Y (21 гл. IV), а νX является наименьшим из всех Q-пространств, лежащих в $\beta X = \beta Y$ и содержащих Y (см. 89 гл. IV). Следовательно (снова 89 гл. IV), $\nu Y = \nu X$.

102. Пользуясь задачей 294 гл. II, можно доказать, что A гомеоморфно замкнутому подпространству произведения $X \times B$. Но тогда, так как произведение Q-пространств всегда есть Q-пространство и замкнутое подпространство Q-пространства является Q-пространством, то A — тоже Q-пространство.

103. Воспользуйтесь задачей 47 гл. VI и задачами 102, 78 гл. IV.

104. Существует (31 гл. IV) непрерывное отображение $\tilde{\tau}\colon \beta X \to \beta Y$ расширения Стоуна — Чеха пространства X в расширение Стоуна — Чеха пространства Y такое, что $f \mid X = i$. Имеем (см. 99 гл. IV) $X \subset \nu X \subset \beta X$, $Y \subset \nu Y \subset \beta Y$. Положим $Z = \tilde{f}^{-1}(\nu Y)$. Тогда $X \subset Z \subset \beta X$ и Z — Q-пространство (102, 103 гл. IV). Поскольку $\nu X \subset Z$ (99 гл. IV) и, следовательно, $\tilde{f}(\nu X) \subset \nu Y$. Значит, $\tilde{f} = \tilde{f} \mid \nu X$ — искомое отображение.

106. Прямая является Q-пространством (см., например, 90 гл. IV). Поэтому каждая непрерывная вещественная функция, определенная на Y, продолжается до непрерывной функции на νX (105 гл. IV). Пусть $p \in \beta X \setminus \nu X$. Так как νX — Q-пространство, существует непрерывная вещественная функция g на νX, которую нельзя продолжить до непрерывной функции на $\nu X \cup \{p\}$ (см. 288 гл. II), тем более f_0 не продолжается ни на одно пространство, содержащее $X \cup \{p\}$. Отсюда, очевидно, вытекает, что если $X \subset Z \subset \beta X$ и f_0 продолжается до непрерывной функции на Z, то $Z \not\ni p$ и, значит, $Z \subset \nu X$.

107. Это легко следует из задачи 106 гл. IV.

108. Ясно, что из 1) следует 2) и из 2) следует 3). Выведем теорему 1) из 3). Пусть Y — произвольное подпространство пространства X; положим $A = X \setminus Y$. Имеем $Y = \bigcap\{X \setminus \{x\}\colon x \in A\}$.

В силу 367 гл. II Y гомеоморфно замкнутому подпространству тихоновского произведения $Z = \Pi\{X \setminus \{x\}\colon x \in A\}$. Но Z — Q-пространство, ибо каждое $X \setminus \{x\}$ — Q-пространство (97 гл. IV). Поэтому и Y — Q-пространство.

120. Такими пространствами $\mathcal{S}$ из задач 100 и 101 гл. V: $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}_1$ — Q-пространства, ибо $|\mathcal{S}_0| = \aleph_0$ и $|\mathcal{S}_1| = 2^{\aleph_0}$ (см. 117 гл. IV).

121. См. Мрувка [1] (впрочем, легко доказать и самостоятельно).

122. Нет. Таково пространство $\mathcal{S}$ из задач 100, 101 гл. V.

123. Нет, не верно. Пример см. Мрувка [1].

131. Пусть $\sigma = \{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — база пространства X мощности $|\sigma| \leqslant \nu X$, состоящая из открыто замкнутых множеств. Поставим в соответствие каждому $\alpha \in A$ изолированную двоеточку $D_\alpha = \{0_\alpha, 1_\alpha\}$. Пусть $x \in X$. Положим $f_\alpha x = 0_\alpha$, если $x \in U_\alpha$, и $f_\alpha x = 1_\alpha$, если $x \in U_\alpha$. Ясно, что $f_\alpha\colon X \to D_\alpha$ — непрерывное отображение. Рассмотрим диагональное произведение $f\colon X \to D^{|A|}$ семейства отображений $\{f_\alpha\colon \alpha \in A\}$. Отображение f квазикомпактно (см. 290 гл. II), поэтому (в предположении бикомпактности пространства Y) множество fX бикомпактно, а значит, замкнуто в $D^{|A|}$. Кроме того, $f\colon X \to fX$ — замкнутое отображение. Для доказательства того, что f — гомеоморфизм, надо показать, что f взаимно однозначно. Пусть $x_1 \in X$, $x_2 \in X$,

$x_1 \neq x_2$. Возьмем такое $\alpha_0 \in A$, чтобы $x_1 \in U_{\alpha_0}$, а $x_2 \subset U_{\alpha_0}$. Тогда $f_{\alpha_0} x_1 \neq f_{\alpha_0} x_2$, значит, и $jx_1 \neq jx_2$.

140. Надо доказать следующее утверждение: если каждое из двух бикомпактных расширений bX и cX следует одно за другим, то они совпадают. Пусть $f\colon bX \xrightarrow{on} cX$ и $g\colon cX \xrightarrow{on} bA$ — естественные непрерывные отображения. Рассмотрим отображение $h = gf$. Теперь утверждение следует из задачи 228 гл. II.

141. (а) Проверим выполнение всех аксиом.

К1. Пусть $F \prec_\gamma H$. Значит, существует непрерывная функция $f\colon X \to [0, 1]$, для которой $fF = \{0\}$, а $f(X \setminus H) = \{1\}$. Рассмотрим функцию $g(x) = 1 - f(x)$. Она, очевидно, непрерывна; $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$. Кроме того, $g(F) = 1 - f(x)$, а $g(X \setminus H) = \{0\}$. Значит, $X \setminus H \prec_\beta X \setminus F$. Аксиома К2, К3 и К4, очевидно, выполнены.

Докажем выполнение аксиомы К4. Пусть $F_1 \prec_\beta H_1$; $F_2 \prec_\beta H_2$. Значит, существуют непрерывные функции $f_1\colon X \to [0, 1]$; $f_2\colon X \to [0, 1]$, для которых $f_1(F_1) = \{0\}$, $f_1(X \setminus H_1) = \{1\}$, $f_2(F_2) = \{0\}$, $f_2(X \setminus H_2) = \{1\}$. Рассмотрим непрерывную на X функцию $f(x) = f_1(x) f_2(x)$. Очевидно, $0 \leqslant fx \leqslant 1$ для всех $x \in X$. Пусть $x_0 \in F_1 \cup F_2$. Тогда, очевидно, $f(x_0) = f_1(x_0) f_2(x_0) = 0$. Пусть $x_0 \in X \setminus (H_1 \cup H_2)$. Значит, $x_0 \in X \setminus H_1$ и $x_0 \in X \setminus H_2$; следовательно, $f_1(x_0) = 1$ и $f_2(x_0) = 1$, т. е. $fx_0 = 1$. Таким образом, $F_1 \cup F_2 \prec_\beta H_1 \cup H_2$.

Докажем аксиому К5. Пусть $F \prec_\beta H$; $f\colon X \to [0, 1]$ — непрерывная на X функция, для которой $fF = \{0\}$ и $f(X \setminus H) = \{1\}$. Рассмотрим непрерывные на X функции

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(x) = 1, \\ 0, & \text{если } f(x) \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2\left(f(x) - \frac{1}{2}\right), & \text{если } \frac{1}{2} < f(x) < 1, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) = 0, \\ 1, & \text{если } f(x) \geqslant \frac{1}{2}, \\ 2f(x), & \text{если } 0 < f(x) < \frac{1}{2} \end{cases}$$

и окрестность $OF = \left\{x \in X\colon 0 \leqslant fx < \frac{1}{2}\right\}$ множества F. Тогда $f_1[OF] = \{0\}$, $f_1(X \setminus H) = \{1\}$; $f_2(F) = \{0\}$, $f_2(X \setminus [OF]) = \{1\}$. Следовательно, $F \prec_\beta OF$; $[OF] \prec_\beta H$. Выполнение аксиомы К7 следует из полной регулярности пространства X.

(б) В нормальном пространстве X по обычной лемме Урысона (см. 25 гл. III) $F \prec_\beta H$ тогда и только тогда, когда $F \subset H$.

142. (а) Надо проверить выполнение всех аксиом подчинения (см. стр. 247).

(б) Пусть (X, ρ) — плоскость с естественной метрикой на ней.

Достаточно проверить, что элементарное подчинение (см. стр. 242 и задачу 141 гл. IV) в (X, ρ) не совпадает с подчинением ρ. Для этого в качестве замкнутого в X множества F_1 возьмем множество всех точек прямой $y = 0$, а в качестве замкнутого множества F_2 — множество всех точек гиперболы $xy = 1$. Ясно, что $F_1 \prec_\rho (X \setminus F_2)$, но F_1 не подчинено множеству $X \setminus F_2$ в смысле подчинения ρ, ибо $\rho(F_1, F_2) = 0$.

143. Действительно, в любом вполне регулярном пространстве можно ввести подчинение, например, элементарное (см. 141 гл. IV). Обратно, пусть в T_1-пространстве X введено подчинение σ, удовлетворяющее всем аксиомам К1 — К7.

Докажем полную регулярность пространства X. Из аксиом К1, К5 и К2 прежде всего следует регулярность пространства X. Полная же регулярность пространства X доказывается по той же схеме, что и богатая теорема Урысона (см. 25 гл. III); надо только все время пользоваться аксиомой К5 для подчинения σ.

144. Во-первых, на бикомпакте X существует подчинение, например, элементарное (см. 141 гл. IV). Докажем, что оно единственно. Пусть σ — какое-нибудь подчинение. Из $F \prec_0 H$ по аксиоме К2 следует $F \subset H$. Надо доказать обратное. Этим утверждение и будет доказано. Итак, пусть $F \subset H$. В силу аксиомы К7 для каждой точки $x \in F$ непременно $[x] \prec_0 H$; воспользовавшись аксиомой К5, возьмем окрестность Ux точки x, для которой $[Ux] \prec_0 H$. Рассмотрим открытое покрытие $\omega_F = \{Ux\colon x \in F\}$ замкнутого в бикомпакте X множества F. Выделим из этого покрытия конечное подпокрытие $\omega_F' = (Ux_1, \ldots, Ux_s)$. Имеем $[Ux_i] \prec_0 H$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Тогда $F \subset \bigcup_{i=1}^{s} Ux_i$, а по аксиоме К4 получим $\left[\bigcup_{i=1}^{s} Ux_i\right] \prec_0 H$, следовательно (по аксиоме К3), $F \prec_0 H$. Все доказано.

146. (а) Доказательство того, что любая σ-правильная система открытых множеств пространства X с подчинением σ содержится в некотором σ-конце, является простым упражнением на принцип максимального элемента.

(б) Пусть ξ — σ-конец в (X, σ).

1. Рассмотрим систему $\overline{\xi} = \xi \cup \{H' \cap H''\colon H' \subset \xi, H'' \in \xi\}$. Легко проверяется, что $\overline{\xi}$ — центрированная система. Пусть $H_0 \subset \overline{\xi}$ произвольно. Если $H_0 \in \xi$, то, в силу σ-правильности системы ξ, найдется такое $H_1 \in \xi \subset \overline{\xi}$, что $[H_1] \prec_0 H_0$. Если $H_0 = H_1' \cap H_2$, $H_1' \in \xi$, $H_2 \subset \xi$, то возьмем такие $H_1'' \in \xi$ и $H_2' \in \xi$, чтобы $[H_1''] \prec_0 H_1'$, $[H_2'] \prec_0 H_2$. Тогда (см. аксиому подчинения на стр. 247) $[H_1'' \cap H_2'] = [H_1''] \cap [H_2'] \prec_0 H_1' \cap H_2 = H_0$ и $H_1'' \cap H_2' \in \overline{\xi}$. Итак, система $\overline{\xi}$ является σ-правильной. Тогда в силу того, что ξ — максимальная σ-правильная система, т. е. σ-конец, получим $\xi = \overline{\xi}$. Отсюда получаем, что $H_1 \cap H_2 \in \xi$.

2. Пополним наш σ-конец ξ до системы $\overline{\xi}$, состоящей из всех открытых в X множеств, содержащих хотя бы одно $H \in \xi$. Легко проверяется, что $\overline{\xi}$ есть σ-правильная центрированная система. Значит, $\overline{\xi} = \xi$, в силу чего $H \in \xi$, если $H \supset H_1$ и $H_1 \in \xi$.

147. (а) Пусть $\xi \in O_{H_1} \cap O_{H_2}$. Тогда $H_1 \in \xi$ и $H_2 \in \xi$. Так как ξ — σ-конец, то $H_1 \cap H_2 \in \xi$ (см. 146 гл. IV), следовательно, $\xi \in O_{H_1 \cap H_2}$. Обратно, пусть $\xi \in O_{H_1 \cap H_2}$, это означает, что $H_1 \cap H_2 \in \xi$. Но $H_1 \supset H_1 \cap H_2$ и $H_2 \supset H_1 \cap H_2$. Значит, в силу того, что ξ — σ-конец, $H_1 \in \xi$, $H_2 \subset \xi$ (см. 146 гл. IV), т. е. $\xi \in O_{H_1} \cap O_{H_2}$.

(б) Пусть $H_1 \subset H_2$ и $\xi \in O_{H_1}$. Тогда $H_1 \in \xi$, а так как ξ — σ-конец (см. 146 гл. IV), то $H_2 \in \xi$, т. е. $\xi \in O_{H_2}$.

(в) Устанавливается без труда.

(г) Пусть (x_δ) — система всех открытых в X множеств, содержащих точку $x_0 \in X$. Очевидно, (x_δ) центрирована и σ-правильна (последнее следует из аксиом К5 и К7 для подчинений). Докажем, что (x_δ) — σ-конец. Предположим, что (x_δ) — не σ-конец. Тогда (x_δ) содержится в некотором σ-конце ξ (см. 146 гл. IV). Так как пространство X регулярно, а ξ — центрированная система, то непременно $[H] \ni x_0$ для любого $H \in \xi$. Возьмем такое $H \in \xi$, чтобы $H \subset (x_0)$, т. е. $x_0 \notin H$. Пользуясь σ-правильностью системы ξ (аксиома К5), возьмем такое $H' \in \xi$, чтобы $[H'] \prec_\sigma H$. Но тогда по аксиоме К2 $[H'] \subset H$, следовательно, $x_0 \subset [H']$. Получили противоречие.

(g) Прежде всего ясно, что $bx_1 \neq bx_2$, если $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, ибо X — T_1-пространство. Пусть теперь H — произвольное открытое в X множество; через (H) обозначим образ множества H при отображении b. Тогда понятно, что

$$O_{(H)} \cap b(X) = (H),$$

и $b\colon X \to bX$ — гомеоморфизм на плотное множество $b(X)$ пространства bX. После отождествления пространства X с его топологическим образом $b(X)$ указанное выше равенство выливается в вид

$$O_H \cap X = H,$$

где H — произвольное открытое в X множество.

148. Прежде всего заметим, что множество $X \cap \Gamma$ плотно в Γ, ибо Γ открыто в $\alpha\tilde{X}$. Это следует из того, что X всюду плотно в αX (см. 147 гл. IV). В частности, $X \cap O_H = H$ плотно в O_H. Доказываем равенство $[O_{X\setminus[H]}]_{\alpha X} = -[\Gamma]_{\alpha X}$. Так как $X \cap \Gamma$ плотно в $O_{X\setminus[H]}$, то $[X \cap \Gamma]_{\alpha X} = [O_{X\setminus[H]}]_{\alpha X}$, а так как $X \cap \Gamma$ плотно в Γ, то $[X \cap \Gamma]_{\alpha X} = [\Gamma]_{\alpha X}$. Отсюда и следует указанное равенство. Наконец, из доказанного равенства с очевидностью вытекает включение $O_{X\setminus[H]} = [\Gamma]_{\alpha X}$.

149. (a) Ясно.

(б) Если $O(H)$ есть объединение всех открытых в X^* множеств, пересечения которых с X суть данное H, то $X^* \setminus O(H)$ есть пересечение всех замкнутых в X^* подмножеств, которые при пересечении с X дают множество $X \setminus H$, т. е. $X^* \setminus O(H) = [X \setminus H]_{X^*}$. Второе из доказываемых в (б) равенств следует из первого.

(в) Очевидно.

(г) Пусть $H_1 \subset H_2$. Тогда, рассмотрев открытое в X^* множество $\Gamma = -O(H_1) \cup O(H_2)$, будем иметь $\Gamma \cap X = H_2$. Поэтому, исходя из определения множества $O(H_2)$, получим, что $\Gamma = O(H_2)$. Ясно, что тогда $O(H_1) \subset O(H_2)$. Обратное же утверждение очевидно.

(д) Следует из утверждения (г); надо при этом воспользоваться утверждением (б) и перейти к дополнениям.

(е) $O(H_1) \cap O(H_2) \subset O(H_1 \cap H_2)$, ибо $O(H_1) \cap O(H_2) \cap X = H_1 \cap H_2$, а $O(H_1 \cap H_2)$ — максимальное открытое в X^* множество, для которого $O(H_1 \cap H_2) \cap X = H_1 \cap H_2$. Включение $O(H_1 \cap H_2) \subset O(H_1) \cap O(H_2)$ вытекает из утверждения (г) и очевидных включений $H_1 \supset H_1 \cap H_2$, $H_2 \supset H_1 \cap H_2$.

(ж) Докажем равенство $O(H) = O_H$ для любого открытого в X множества H для случая, когда $X^* = \alpha X$. Включение $O_H \subset O(H)$ следует из того, что $O_H \cap X = H$ (см. 141 гл. IV), а $O(H)$ — максимальное открытое в αX множество, высекающее на X данное H. Докажем обратное включение $O(H) \subset O_H$. Пусть ξ — конец, принадлежащий $O(H)$. Так как всевозможные множества вида O_H (H открыто в X) образуют базу топологии в αX, то найдется такое $H' \in \xi$, что $\xi \in O_{H'} \subset O(H)$. По тогда $O_{H'} \cap X \subset O(H) \cap X$, т. е. $H' \subset H$. Но $H' \in \xi$, следовательно, и $H \in \xi$ (см. 146 гл. IV), откуда $\xi \in O_H$.

Далее рассмотрим $\alpha X \setminus O_H = \alpha X \setminus O(H) = [X \setminus H]_{\alpha X}$. Если $\xi \in \alpha X \setminus O_H$, то тогда $H' \not\subset H$ для любого $H' \in \xi$, следовательно, $H' \cap (X \setminus H) \neq \Lambda$ для любого $H' \in \xi$. Если $\xi \in \alpha X$ таково, что $H' \cap (X \setminus H) \neq \Lambda$ для любого $H' \in \xi$, то $\xi \notin O_H$, следовательно, $\xi \in \alpha X \setminus O_H$. Таким образом, $[F]_{\alpha X} = \alpha X \setminus O(X \setminus F) = \alpha X \setminus O_{X\setminus F} = \Phi_F = \{\xi \in \alpha X\colon H \cap F \neq \Lambda$ для любого $H \in \xi\}$.

150. (а) Пусть $\xi \in [O_{H_i}]$. Тогда для любого $H \in \xi$ непременно $O_H \cap O_{H_0} = O_{H\cap H_0} \neq \Lambda$, следовательно, $H \cap H_0 \neq \Lambda$ для любого $H \in \xi$ (здесь мы воспользовались задачей 147 гл. IV и тем, что всевозможные множества вида O_H образуют базу в αX). Обратно, пусть $\xi \in \alpha X$ таково, что $H \cap H_0 \neq \Lambda$ для любого $H \in \xi$. Отсюда получаем, что для любого $H \in \xi$ непременно $O_H \cap O_{H_0} = O_{H\cap H_0} \neq \Lambda$. Но так как множества O_H, $H \in \xi$, образуют базу точки ξ в αX, то получаем: $\xi \in [O_{H_0}]_{\alpha X}$.

(б) Пусть $F \subset_p H_0$ в X; надо доказать, что $[F]_{\alpha X} \subset O_{H_0}$. Пусть $\xi \in [F]_{\alpha X}$. Но (см. 149 гл. IV) $[F]_{\alpha X} = \Phi_F = \{\xi \in \alpha X\colon H \cap F \neq \Lambda$ для любого $H \in \xi\}$, значит, $H \cap F \neq \Lambda$ для любого $H \in \xi$. Надо нужно доказать, что $\xi \in O_{H_0}$, т. е. $H_0 \in \xi$. Для этого мы рассмотрим систему ξ_1, состоящую из всех элементов α-конца ξ и всех открытых в X множеств H', для которых $F \subset_p H' \subset [H'] \subset_p H_0$. Не представляет труда доказать α-правильность и центрированность системы $\overline{\xi_1}$. Так как ξ — α-конец и $\overline{\xi_1} \supset \xi$, то $\overline{\xi_1} = \xi$; отсюда следует $H_0 \in \xi$.

(в) Регулярность пространства αY непосредственно следует из (б).

151. (а) Пусть $x_0 \notin F$. Тогда $\{x_0\} \subset_p X \setminus F$ (лемма К?). По лемме К3 существует окрестность Ox_0, для которой $[Ox_0] \subset_p X \setminus F$. Отсюда (по лемме К1) $F \subset_p X \setminus Ox_0$. Итак, для любой точки $x_0 \in \tilde{F}$ мы нашли окрестность $OF = X \setminus Ox_0$ множества F, для которой $F \subset_p OF$ и $x_0 \notin \tilde{OF}$. Значит, $\tilde{F} = \bigcap \{\tilde{OF}\colon F \subset_p OF\}$.

(б) В силу 150 гл. IV имеем включение $[F]_{\alpha X} \subset \bigcap \{O_{\tilde{U}}\colon F \subset_p OF\}$, а в силу 149 гл. IV равенство $[F]_{\alpha X} = \{\xi \in \alpha X\colon H \cap F \neq \Lambda$ для любого $H \in \xi\}$. Если $\xi \in \bigcap \{O_{\tilde{U}}\colon F \subset_p OF\}$, то $OF \in \xi$ для любого $F \subset_p OF$. Пусть $H \cap F = \Lambda$ для некоторого $H \in \xi$. Возьмем такое $H' \in \xi$, чтобы $[H'] \subset_p H$. Тогда $F \subset X \setminus H \subset_p X \setminus [H']$ и $X \setminus [H'] \in \xi$, а это противоречит тому, что $\xi \in \bigcap \{O_{\tilde{U}}\colon F \subset_p OF\}$. Итак, $H \cap F \neq \Lambda$ для любого $H \in \xi$. Значит, $\xi \in [F]_{\alpha X}$. Таким образом, и второе равенство доказано.

152. Для доказательства бикомпактности пространства αY достаточно показать, что всякая центрированная система множеств вида $\Phi_F = [F]_{\alpha X}$, где F замкнуто в X, имеет непустое пересечение (действительно, множества Φ_F, где F замкнуто в X, образуют замкнутую базу в αX, ибо $\alpha X \setminus \Phi_F = O_{X\setminus F}$, а множества O_H, где H открыто в X, образуют базу топологии в αX). Итак, пусть $\Xi = \{\Phi_{F_i}\colon i \in T\}$ — произвольная центрированная система таких множеств. Для каждого $i \in T$ рассмотрим систему $\sigma_i = \{\tilde{OF_i}\colon F_i \subset_p OF_i\}$ открытых в X множеств. Вследствие 151 гл. IV, получим равенство:

$$(*) \qquad F_i = \bigcap \{\tilde{UF_i}\colon UF_i \in \sigma_i\}.$$

Рассмотрим систему $\sigma = \bigcup \{\sigma_i\colon i \in T\}$.

1. Система σ центрирована. Действительно, пусть $U_1 \in \sigma, \ldots, U_s \in \sigma$. Тогда $U_1 \in \sigma_{i_1}, \ldots, U_s \in \sigma_{i_s}$. По определению систем $\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_s}$ из равенства (*) получим включения $F_{i_1} \subset U_1, \ldots, F_{i_s} \subset U_s$. Так как $\bigcap_{j=1}^{s} F_{i_j} \neq \Lambda$, то и $\bigcap_{i=1}^{s} U_i \neq \Lambda$.

2. Система σ замкнута и правильна. Пусть $U \subset \sigma$. Тогда $U \in \sigma_i$ для некоторого $i \in T$, значит (по определению системы σ_i и из равенства (*)), $F_i \subset_p U$. Следовательно, найдется такое открытое в X множество U', что $F \subset_p \tilde{U'} \subset [U'] \subset_p U$. Тогда $U' \in \sigma_i \subset \sigma$ и $[U'] \subset_p U$.

Итак, σ — правильная центрированная система, а потому она содержится в некотором α-конце ξ. Так как (см. 151 гл. IV) выполнены равенства:

$$(**) \qquad [F_i]_{\alpha X} = \Phi_{F_i} = \bigcap \{O_{\tilde{UF_i}}\colon UF_i \in \sigma_i\},$$

то $\xi \subset \Phi_{F_i}$ для любого $i \in T$, значит, $\bigcap \{\Phi_{F_i}\colon i \in T\} \neq \Lambda$.

153. Если $F \prec_\nu H$, то $[F]_{\nu X} \subset O_H$ (см. 150 гл. IV). Обратно, пусть $[F]_{\nu X} \subset O_H$. Рассмотрим систему открытых в X множеств: $\sigma(F) = \{U \subset X: F \prec_\nu U\}$. Последствие 151 гл. IV получаем равенства: $F = \bigcap \{\overline{U}: U \in \sigma(F)\}$, $[F]_{\nu X} = \bigcap \{O_U: U \in \sigma(F)\}$. Заметим, что если $U \in \sigma(F)$, то найдется такое $U' \in \sigma(F)$, что $[U']_X \prec_\nu U$ (аксиома К5), и если $U_1 \in \sigma(F), \ldots, U_k \in \sigma(F)$, то $U_1 \cap \ldots \cap U_k \in \sigma(F)$ (аксиомы К1 и К4). Так как, кроме того, из $[U']_X \prec_\nu U$ следует $[[U']_X]_{\nu X} = [O_{U'}]_{\nu X} = O_{U'}$ (см. 145, 152 гл. IV), то $\bigcap \{O_U: U \in \sigma(F)\} = \bigcap \{[O_U]_{\nu X}: U \in \sigma(F)\} = [F]_{\nu X}$. Тогда, в силу бикомпактности пространства νX, найдутся такие $U_1 \in \sigma(F), \ldots, U_k \in \sigma(F)$, что $[F]_{\nu X} \supset \bigcap_{i=1}^{k} [O_{U_i}]_{\nu X} = O_{U_0}$. Но $U_0 = \bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \sigma(F)$ и $O_{U_0} = O_{\bigcap_{i=1}^{k} U_i} = \bigcap_{i=1}^{k} O_{U_i}$, следовательно, $F \prec_\nu U_0$ и $O_{U_0} \subset \bigcap_{i=1}^{k} [O_{U_i}] \subset O_H$. Значит, $F \prec_\nu U_0 \subset H$. Поэтому $F \prec_\nu H$. Все доказано.

154. Так как ν_1 и ν_2 — различные подчинения на пространстве X, то имеются такие замкнутые в X множество F и открытое множество H, что, например, $F \prec_{\nu_1} H$, но $F \not\prec_{\nu_2} H$. Предположим, что $\nu_1 X = \nu_2 X$, т. е. между ними существует естественный гомеоморфизм, после чего $\nu_1 X$ мы можем отождествить с $\nu_2 X$. Так как $F \prec_{\nu_1} H$, то (см. 150 гл. IV) $[F]_{\nu_1 X} \subset O_H^{\nu_1}$. Но так как $\nu_1 X = \nu_2 X$, то $[F]_{\nu_1 X} = [F]_{\nu_2 X}$ и $O_H^{\nu_1} = O_H^{\nu_2}$; следовательно, $[F]_{\nu_2 X} \subset O_H^{\nu_2}$. В силу 150 гл. IV отсюда следует $F \prec_{\nu_2} H$ — получено противоречие. Значит, если $\nu_1 \neq \nu_2$, то $\nu_1 X \neq \nu_2 X$.

155. (а) Проверяем аксиомы подчинения (см. стр. 247).

К1. Пусть $F \prec_\nu H$. Это означает, что $[F]_{\nu^* X} \subset O(H)$. Отсюда заключаем, что $X^* \setminus O(H) = [X \setminus H]_{X^*} \subset X^* \setminus [F]_{X^*} = O(X \setminus F)$ (см. 149 гл. IV). Следовательно, $X \setminus H \prec_\nu X \setminus F$.

К2 следует из равенств $[F]_{\nu^* X} \cap X = F$, $O(H) \cap X = H$.

К3, очевидно, выполнена.

К4. Пусть $F_1 \prec_\nu H_1$ и $F_2 \prec_\nu H_2$. Это означает $[F_1]_{\nu^* X} \subset O(H_1)$, $[F_2]_{\nu^* X} \subset O(H_2)$. Но $[F_1 \cup F_2]_{\nu^* X} = [F_1]_{\nu^* X} \cup [F_2]_{\nu^* X} \subset O(H_1) \cup O(H_2) = O(H_1 \cup H_2)$; следовательно, $F_1 \cup F_2 \prec_\nu H_1 \cup H_2$.

К5. Пусть $F \prec_\nu H$. Значит, $[F]_{\nu^* X} \subset O(H)$. Пользуясь нормальностью бикомпакта X^*, найдем открытое в X^* множество Γ, для которого $[F]_{\nu^* X} \subset \Gamma \subset [\Gamma] \subset O(H)$ и $\Gamma = O(\Gamma \cap X)$. Тогда $F \prec_\nu (\Gamma \cap X)$ и $[\Gamma \cap X]_X \prec_\nu H$.

К3 и К1, очевидно, выполнены.

(б) Пусть $\xi \in X^*$. Рассмотрим систему $\tilde{\xi}$ всех окрестностей точки ξ в X^* и систему $b\xi = \{\Gamma_\xi \cap X: \Gamma_\xi \in \tilde{\xi}\}$ открытых в X множеств. Ясно, что $b\xi$ — центрированная и правильная система (последнее следует из определения подчинения ν, регулярности бикомпакта X^* и очевидного равенства $[\Gamma]_{\nu^* X} = [O(U \cap X)]_{\nu^* X} = [[\Gamma \cap X]_X]_{\nu^* X}$, выполненного в силу плотности пространства X в X^*). Ясно также, что вследствие хаусдорфовости бикомпакта X^* непременно $b\xi_1 \neq b\xi_2$, если ξ_1 и ξ_2 — различные точки в X^*.

Докажем теперь, что $b\tilde{\xi}$ — ν-конец. Предположим, что $b\tilde{\xi}$ не является ν-концом. Тогда $b\xi$ содержится в некотором ν-конце η. Пусть $V \in \eta \setminus b\tilde{\xi}$. Тогда $\tilde{\xi} \in O^{X^*}(V)$, ибо $O^{X^*}(V) \notin \tilde{\xi}$. Рассмотрим такое $V' \in \eta$, чтобы $[V']_X \prec_\nu V$. Тогда $[O_{\nu^* X}(V')]_{X^*} = O_{\nu^* X}(V')$, и следовательно, $\tilde{\xi} \notin [O_{\nu^* X}(V')]_{X^*}$.

Рассмотрим окрестность $\Gamma_\xi = X^* \setminus [O_{\nu^* X}(V')]_{X^*}$ точки ξ. Обозначим $U = \Gamma_\xi \cap X$, будем иметь $U \in b\tilde{\xi} \subset \eta$, $V' \in \eta$ и $U \cap V' = \Lambda$, вопреки центрированности ν-конца η. Итак, мы построили взаимно однозначное отображение k бикомпакта X^* в бикомпакт νX. Нетрудно убедиться в том, что k — естественное отображение бикомпактного расширения X^* пространства X в бикомпактное расширение νX, т. е. что $kx = (x) = x$, если $x \in X$.

Докажем теперь непрерывность отображения k. Пусть $\xi_0 \in X^*$ произвольно. Рассмотрим произвольную базисную окрестность O_U (U открыто в X) точки $k\xi_0$ в бикомпактном расширении νX. Теперь рассмотрим также открытое в X^* множество $O(U)$, т. е. максимальное открытое в X^* множество, для которого $O(U) \cap X = U$. По построению отображения k непременно $kO(U) \subset O_U$. Кроме того, $U \in k\xi_0$; следовательно, $\xi_0 \in O(U)$, т. е. $O(U)$ — окрестность точки ξ_0 в X^*, отображающаяся с помощью k в окрестность O_U точки $k\xi_0$ в νX. Непрерывность отображения доказана.

Итак, k: $X^* \to \nu X$ — естественное непрерывное взаимно однозначное отображение бикомпактного расширения X^* пространства X в бикомпактное расширение νX этого пространства (следовательно, гомеоморфизм), а значит, и отображению на это бикомпактное расширение νX. Тем самым доказано, что νX совпадает с X^*.

156. Следует из задач 154, 155 гл. IV.

157. (а) Пусть ν совпадает с элементарным подчинением на X. Это означает, что $F \prec_\nu H$ тогда и только тогда, когда F и $X \setminus H$ функционально отделимы. В силу 150 гл. IV тогда $[F]_{\nu X} \subset O_H$, т. е. $[F]_{\nu X} \cap [\nu X \setminus O_H] = \Lambda$, но $\nu X \setminus O_H = [X \setminus H]_{\nu X}$ (см. 149 гл. IV), следовательно, $[F]_{\nu X} \cap [X \setminus H]_{\nu X} = \Lambda$. Значит, любые функционально отделимые замкнутые в X множества имеют непересекающиеся замыкания в νX (если ν — элементарное подчинение на X); откуда следует совпадение νX с βX (см. 15 гл. IV).

(б) Обратно, если $\nu X = \beta X$, то тогда (см. 153 гл. IV) $F \prec_\nu H$ тогда и только тогда, когда $[F]_{\beta X} \subset O_{\beta X}(H)$, т. е. когда $[F]_{\beta X} \cap [X \setminus H]_{\beta X} = \Lambda$. Но это (вследствие того, что $\nu X = \beta X$) означает, что $F \prec_\nu H$ тогда и только тогда, когда F и $X \setminus H$ функционально отделимы, т. е. когда ν — элементарное подчинение.

158. (а) Пусть множества A и B в ν-далеке. Это означает, по определению, что $[A]_{\nu X} \prec_\nu X \setminus [B]_{\nu X}$. Положим $\overline{A} = [A]_X$, $H = [B]_X$, $X \setminus [B]_X = H$. Из 153 гл. IV следует, что $[A]_{\nu X} \subset O_H$, т. е. $[\overline{A}]_{\nu X} \cap (\nu X \setminus O_H) = \Lambda$. Так как $\nu X \setminus O_H = [B]_{\nu X} = [X \setminus H]_{\nu X}$ (см. 149 гл. IV) и $[A]_{\nu X} = [A]_{\nu X}$, $[B]_{\nu X} = [B]_{\nu X}$, то $[A]_{\nu X} \cap [B]_{\nu X} = \Lambda$.

(б) Обратно, пусть множества $A \subset X$, $B \subset X$ таковы, что $[A]_{\nu X} \cap [B]_{\nu X} = \Lambda$. Вводя обозначения $\overline{A} = [A]_X$, $\overline{B} = [B]_X$, будем иметь $[A]_{\nu X} = [\overline{A}]_{\nu X}$, $[B]_{\nu X} = [\overline{B}]_{\nu X}$, а так как $[A]_{\nu X} \subset \nu X \setminus [B]_{\nu X} = O_H$, где $H = X \setminus \overline{B}$, то $\overline{A} \prec_\nu X \setminus \overline{B}$ (см. 153 гл. IV), следовательно, A и B ν-далеки.

159. (а) Пусть f: $X \to Y$ является (ν, $\varkappa$)-равномерно непрерывным отображением. Ясно, что f непрерывно, ибо если $x \in [A]_X$, $A \subset X$, то это означает, что точка x ν-близка к множеству A, откуда получаем, что точка fx $\varkappa$-близка к множеству fA, т. е. $fx \in [fA]$, а включение $f[A] \subset [fA]$ для любого множества $A \subset X$ означает непрерывность отображения f (см. 281 гл. II). Пусть теперь Φ замкнуто в Y, O открыто в Y и $\Phi \prec_\varkappa O$. Тогда $f^{-1}\Phi$ замкнуто в X, а $f^{-1}O$ открыто в X. Если множества $f^{-1}\Phi$ не ν-подчинено множеству $f^{-1}O$, то это означает, что множества $f^{-1}\Phi$ и $X \setminus f^{-1}O$ ν-далеки, но тогда (по условию) множества $\Phi = f^{-1}f^{-1}\Phi$ и $O = f(X \setminus f^{-1}O)$ $\varkappa$-далеки. Получили противоречие с тем, что $\Phi \prec_\varkappa O$.

(б) Обратно, пусть $A \subset X$, $B \subset X$ и $A \nu B$. Надо доказать, что $fA \varkappa fB$. Предположим противное. Пусть $fA \not\varkappa fB$. Это означает, что $[fA]_Y \not\prec_\varkappa (Y \setminus [fB])$. Тогда, по условию, $F = f^{-1}[fA]_Y$ замкнуто в X, $H = f^{-1}(Y \setminus [fB]_Y)$

открыто в X и $F \prec_c H$. Так как $[A]_X \subset F$, $H \subset X \setminus [B]_X$, то отсюда (см. лемму 1(3)) следует, что $[A]_X \prec_0 (X \setminus [B]_X)$, т. е. $A \ll B$. Получили противоречие.

160. (а) Система $\{fU: U \in \xi\}$ (где $\xi \in \tau X$) центрирована в Y, ибо центрирована система ξ в X и потому имеет место включение $f \bigcap_{i=1}^{n} U_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} fU_i$. Отсюда вследствие бикомпактности пространства ωY непременно

$$\overline{f}\xi = \bigcap \{[fU]_{\omega Y}: U \in \xi\} \neq \Lambda.$$

(б) Пусть $\eta \in \omega Y$ таково, что $\eta \subset \overline{f}\xi$. Рассмотрим систему $\sigma = \{f^{-1}V: V \in \tau\}$ и систему $\overline{\xi} = \xi \cup \sigma$. Докажем с правильность и центрированность системы $\overline{\xi}$.

1) $\overline{\xi}$ центрирована. Действительно, пусть даже произвольная конечная подсистема $\{G_1, \ldots, G_k, f^{-1}V_1, \ldots, f^{-1}V_l\}$ системы $\overline{\xi}$, где $G_1, \ldots, G_k$ из ξ, а $f^{-1}V_1, \ldots, f^{-1}V_l$ из σ. Тогда, пользуясь тем, что ξ — ω-конец в (X, ω), а η — ω-конец в (Y, ω) (см. 146 гл. IV), заключаем, что $U_i = G_1 \cap \ldots \cap G_k \in \xi$, $V_0 = V_1 \cap \ldots \cap V_l \in \tau\eta$ и нам остается показать, что $U_0 \cap f^{-1}V_0 \neq \Lambda$. Но $\eta \subset [fU]_{\omega Y}$ для любого $U \in \xi$, следовательно, $1_{V_0} \cap \bigcap fU \neq \Lambda$ для любых $V \in \tau\eta$ и $U \in \xi$ (здесь $\Gamma_V = \{\eta \in \omega Y: V \in \eta\}$). Поэтому $V \cap fU \neq \Lambda$ для любых $V \in \eta$ и $U \in \xi$. В частности, $V_0 \cap fU_0 \neq \Lambda$. Но тогда $f^{-1}V_0 \cap U_0 \neq \Lambda$, что и требовалось доказать.

2) Пусть $U \in \xi \subset \overline{\xi}$. В силу ω-правильности ξ найдется $W \in \xi$ такое, что $[U] \prec_\xi W$. Пусть $f^{-1}V \in \sigma \subset \overline{\xi}$. В силу ω-правильности η найдется такое $F \in \eta$, что $[F] \prec_{\tau Y} V$. Тогда, вследствие (τ, ω)-непрерывности отображения f, непременно $f^{-1}[F] \prec_\omega f^{-1}V$. Но непрерывно убедиться в том, что $[f^{-1}V] \subset f^{-1}[F]$ (воспользоваться всего лишь непрерывностью отображения f). Тогда $[U^{-1}F] \prec_\omega f^{-1}V \in \sigma \subset \overline{\xi}$.

Итак, система $\overline{\xi} = \xi \cup \sigma$ является ω-правильной. Поэтому в силу того, что система ξ — ω-конец, получаем $\overline{\xi} = \xi$; следовательно, $\sigma \subset \xi$.

Обратно, пусть $\eta \subset \omega Y$ таково, что $\sigma = \{f^{-1}V: V \in \tau\eta\} \subset \xi$. Надо показать, что $\eta \subset \overline{f}\xi$. Пусть $F \in \eta$ при любом. По условию, $f^{-1}V \in \xi$. Значит, $f^{-1}V \cap U \neq \Lambda$ для любого $U \in \xi$ (так как ξ центрирована и $f^{-1}V \subset \xi$). Но тогда $V \cap fU \neq \Lambda$ для любого $U \in \xi$, значит, $\Gamma_V \cap fU \neq \Lambda$ для любого $U \in \xi$, где $\Gamma_V = \{\eta \in \omega X: V \in \tau\eta\}$. Поэтому, вследствие того, что множества вида Γ_V образуют базу в ωY, а $V \in \eta$ произвольно, получаем $\eta \in [fU]_{\omega Y}$ для любого $U \in \xi$. Значит, $\eta \in \overline{f}\xi$, что и требовалось доказать.

Утверждения (в) и (г) задачи являются простыми следствиями только что доказанного утверждения (б) и потому могут быть представлены читателю.

(д) Пусть $x_0 \in X$. Рассмотрим ω-конец (x_0), где (x_0) — система всех окрестностей точки $x_0 \in X$ в X. Тогда $fx_0 = f(x_0) = \bigcap \{[fU]_{\omega Y}: Ux_0 \in (x_0)\}$.

161. Для решения надо воспользоваться задачами 278 гл. II, 142, 158, 159 гл. IV.

162. (а) Определяем (как в 120 гл. IV): $\overline{f}\xi = \bigcap \{[U]_{\omega Z}: U \in \xi\}$ — всякой точки $\xi \in \omega X$. Из 180 гл. IV следует, что $\overline{f}\xi$ состоит из одной точки и $\overline{f}: \omega X \to \omega Y$ есть непрерывное отображение расширения ωX пространства X на расширение ωY пространства Y, являющееся продолжением отображения f.

(б) Пусть f — такое отображение пространства X с подчинением τ на пространство Y с подчинением ω, что существует непрерывное продолжение

$\overline{f}: \omega X \to \omega Y$ этого отображения на соответствующие бикомпактные расширения. Докажем, что f является (τ, ω)-равномерно непрерывным отображением. Для этого согласно определению надо показать, что любые два τ-близких множества A и B в X при отображении f перейдут в ω-близкие множества fA и fB. Если A и B τ-близки, то $[A]_{\tau X} \cap [B]_{\tau X} \neq \Lambda$ (см. 158 гл. IV). Кроме того, $f[A]_{\tau X} = \overline{f}[A]_{\tau X} = [fA]_{\omega Y}$ и $f[B]_{\tau X} = \overline{f}[B]_{\tau X} = [fB]_{\omega Y}$ (здесь мы воспользовались непрерывностью и замкнутостью отображения $\overline{f}$ и тем, что $\overline{f}$ — продолжение отображения f). Отсюда получаем, что $[fA]_{\omega Y} \cap [fB]_{\omega Y} \neq \Lambda$; следовательно, множества fA и fB ω-близки (158 гл. IV).

163. (а) Пусть $\eta \in O_\omega(U)$. Тогда $U \in \tau_\eta$, откуда $U \in \xi$ для любого $\xi \in b^{-1}\eta$ (вследствие 160 гл. IV и очевидного равенства $b^{-1}U = U$). Это в свою очередь означает, что $b^{-1}\eta \subset O_\tau(U)$, т. е. $\eta \in b^\sigma O_\tau(U)$.

(б) Обратно, пусть $\eta_0 \in b^\sigma O_\tau(U)$. Тогда $b^{-1}\eta_0 \subset O_\tau(U)$. Так как b — непрерывное и замкнутое отображение, то множество $W = b^\sharp O_\tau(U) = \{\eta \in \omega X: b^{-1}\eta \subset O_\tau(U)\}$ открыто в ωX (см. 321 гл. II); а значит, является окрестностью точки η_0 в ωX. Положим $U' = W \cap X$. Понятно, что U' — пересечение открытого в X множества, причем $U' \in \tau_\eta$ и $U' \subset U$. Поэтому $U \in \tau_{\eta_0}$, т. е. $\tau_\eta \in O_\omega(U)$. Что доказано.

164. Следует из 156 и 163 гл. IV.

165. 1) Для доказательства (β, β')-равномерности отображения f надо показать, что для любых двух функционально отделимых замкнутых в Y множеств Φ_0 и Φ_1 замкнутые в X множества $f^{-1}\Phi_0$ и $f^{-1}\Phi_1$ функционально отделимы (вспомните определение элементарного подчинения и определение (β, β')-равномерности отображения). Действительно, если непрерывная на Y функция $\varphi(y)$ отделяет Φ_0 от Φ_1, то непрерывная на X функция $s(x) = \varphi(f(x))$ будет отделять $f^{-1}\Phi_0$ от $f^{-1}\Phi_1$.

2) Следует из 1) и 163 гл. IV (другое решение см. в 31 гл. IV).

166. (а) Если f — замкнутое отображение, то $f^{-1}y = U^{-1}_{\beta X}$ для всякой точки $y \in Y$ (см. 13 гл. VI). При этом следует заметить, что X и Y — любые вполне регулярные пространства.

(б) Обратно, пусть $F \subset X$, F замкнуто. Тогда $\overline{f}[F]_{\beta X} = [fF]_{\beta Y}$. Надо доказать, что fF замкнуто в Y. Пусть $y_0 \in [fF]_Y$. Предположим, что $y_0 \notin fF$. Тогда $f^{-1}y_0 \cap F = \Lambda$, откуда, вследствие нормальности пространства X, следует (см. 16 гл. IV), что $[f^{-1}y_0]_{\beta X} \cap [F]_{\beta X} = \Lambda$. Но $[f^{-1}y_0]_{\beta X} = \overline{f}^{-1}y_0$. Значит, $y_0 \subset \beta Y \setminus \overline{f}[F]_{\beta X} = \beta Y \setminus [fF]_{\beta Y} = \beta Y \setminus [[fF]_Y]_{\beta Y}$. Получили противоречие в том, что $y_0 \in [fF]_Y$.

167. (а) Пусть (τ, ω)-равномерно непрерывное отображение $f: X \to Y$, кроме того, (τ, ω) открыто. Докажем, что продолжение $\overline{f}: \omega X \to \omega Y$ отображения f на соответствующие бикомпактные расширения открыто. Прежде всего докажем, что $\operatorname{Int}[fU]_Y \subset \overline{f}\xi$ для любого $U \in \xi$. Действительно, $\overline{f}\xi = \bigcap \{[fH]_{\omega Y}: H \in \xi\}$. Возьмем $H' \in \xi$ и $H \in \xi$ так, чтобы $[H']_X \prec_0 H$. Так как f является (τ, ω)-открытым, то $[fH']_Y \prec_\omega \operatorname{Int}[fH]_Y$, следовательно, $[[fH']_X]_{\omega Y} \subset O_\omega(\operatorname{Int}[fH]_Y)$, где $O_\omega(\operatorname{Int}[fH]_Y)$ — максимальное открытое в ωY множество, для которого $O_\omega(\operatorname{Int}[fH]_Y) \cap Y = \operatorname{Int}[fH]_Y$. Кроме того, $[[fH']_X]_Y \supset [fH']_Y \ni [fH']_{\omega Y} = [[fH']_Y]_{\omega Y}$. Значит, $[fH']_{\omega Y} \subset O_\omega(\operatorname{Int}[fH]_Y)$. Так как $\overline{f}\xi \in [fH']_{\omega Y}$, то $\overline{f}\xi \in O_\omega(\operatorname{Int}[fH]_Y)$, т. е. $\operatorname{Int}[fH]_Y \in \overline{f}\xi$. Итак, $\operatorname{Int}[fH]_Y \in \overline{f}\xi$, если $H \in \xi$. Докажем теперь открытость отображения $\overline{f}: \omega X \to \omega Y$. Пусть O — произвольное открытое в ωX множество. Пусть $\eta_0 \in \overline{f}O$. Возьмем такое $\xi_1 \in O$, чтобы $\overline{f}\xi_0 = \eta_0$, и такое $H_1 \in \xi_0$, чтобы $[O_\tau(H_1)]_{\omega X} \subset O$. Тогда $\overline{f}O_\tau(H_0)] = [fH_0]_{\omega Y} = [[fH_0]]_{\omega Y} = [[fH_0]]_{\omega Y} \subset \overline{f}O$. Кроме того, $\operatorname{Int}[fH_0]_Y \in \overline{f}\xi_0$ по доказанному выше. Будем иметь $\operatorname{Int}[fH_0]_Y \subset [fH_0]_Y$. Значит, $O_\omega(\operatorname{Int}[fH_0]_Y) \subset [[fH_0]]_{\omega Y} \subset \overline{f}O$. Так как $\operatorname{Int}[fH_0]_Y \in \overline{f}\xi_0$, то $\overline{f}\xi_0 \in$

$\in O_w(\mathrm{Int}[fH]_Y)$, т. е. $\eta_t = \overline{f}^{\sharp}\eta_0$ — внутренняя точка множества $\overline{O}$. Итак, открытость отображения $\overline{f}\colon wX \to wY$ влечет открытость f.

(б) Обратно, пусть отображение $\overline{f}\colon wX \to wY$, являющееся продолжением $\langle w, w\rangle$-равномерно непрерывного отображения $f\colon X \to Y$, открыто. Пусть $F \subset X$ замкнуто, $H \subset X$ открыто и $F \prec_c H$. Тогда $[F]_{wX} \subset O_f(H)$ (см. 153 гл. IV). Кроме того, $\overline{f}[F]_{wX} = [fF]_{wY} = [[fF]_Y]_{wY}$, $\overline{f}[F]_{wX} \subset \overline{f}O_f(H)$, а множество $\Gamma = \overline{f}O_f(H)$ открыто в wY. Итак, $[[fF]_Y]_{wY} \subset \Gamma$. Значит, $[fF]_Y \prec_w (\Gamma \cap Y)$. Так как $\overline{f}[O_f(H)] = \overline{f}[H]_{wX} = [fH]_{wY} = [[fH]_Y]_{wY}$, то $(\Gamma \cap Y) \subset [fH]_Y$; следовательно, $(\Gamma \cap Y) \subset \mathrm{Int}[fH]_Y$. Поэтому $[fF]_Y \prec_w \mathrm{Int}[fH]_Y$, т. е. f является $\langle c, w\rangle$-открытым.

168. Надо доказать, что отображение $f\colon X \to Y$ является (β, β')-открытым, где β — элементарное подчинение на X, а β' — элементарное подчинение на Y. После этого надо воспользоваться задачами 165 и 167 гл. IV. Итак, пусть $F \prec_\beta H$ в X, где $F \subset X$ замкнуто, а $H \subset X$ открыто. Это означает, что F функционально отделимо от $X \setminus H$. Пусть $\varphi\colon X \to [0, 1]$ — вещественная на X функция, для которой $\varphi[F] = \{1\}$, а $\varphi(X \setminus H) = \{0\}$. Определим функцию ψ на Y следующим образом: $\psi(y) = \sup\{\varphi(x)\colon x \in f^{-1}y\}$. Вследствие 136 гл. VI, функция $\psi(y)$ непрерывна на Y. Ясно также, что $0 \leqslant \psi(y) \leqslant 1$ для любого $y \in Y$. Рассмотрим замкнутое в Y (вследствие замкнутости отображения f) множество $\Phi = fF$ и открытое в Y (вследствие открытости отображения f) множество $fH = V$. Ясно, что $\psi(\Phi) = \{1\}$, а $\psi(Y \setminus V) = \{0\}$, т. е. множества Φ и $Y \setminus V$ функционально отделимы. Значит, $fF \prec_{\beta'} fH = \mathrm{Int}[fH]$, следовательно, $fF \prec_{\beta'} \mathrm{Int}[fH]$. Все доказано.

169. Предположим противное, пусть $\overline{f}\colon \beta X \to \beta Y$ немонотонно. Воспользуемся задачей 34 гл. VI. Для каждого $\eta \in \beta Y$ рассмотрим разбиение $\mathfrak{X}_\eta$ бикомпакта $\overline{f}^{-1}\eta$ на связные компоненты (см. стр. 170). Рассмотрим разбиение $Z = \bigcup\{Z_\eta\colon \eta \in \beta Y\}$ бикомпакта βX. Это разбиение X непрерывно (см. 34 гл. VI); пространство этого разбиения, обозначаемое также через Z, является бикомпактом (см. 92 гл. III). Пусть $\varphi\colon \beta X \to Z$ — естественное отображение бикомпакта βX на пространство этого разбиения, а $\psi\colon Z \to \beta Y$ — естественное нульмерное отображение бикомпакта Z на бикомпакт βY. Имеем $f = \psi \cdot \varphi$, φ — монотонное отображение, а ψ — нульмерное отображение (35 гл. VI). Так как $\overline{f}$ — немонотонное отображение, то ψ — не гомеоморфизм. Так как f замкнуто, то $[f^{-1}y]_{\beta X} = \overline{f}^{-1}y$ для любой точки $y \in Y$ (см. 136 гл. IV). Тогда, вследствие монотонности отображения f, каждое множество $\overline{f}^{-1}y$ как замыкание связного множества $f^{-1}y$ также связно. Значит, $\varphi(\overline{f}^{-1}Y) = Y$; следовательно, Z является бикомпактным расширением пространства Y и $\psi(y) = y$, если $y \in Y$, т. е. Z — бикомпактное расширение пространства Y, следующее за максимальным бикомпактным расширением βY (расширением Стоуна — Чеха, см. 29 гл. IV или 164, 165 гл. IV), что противоречит максимальности расширения βY.

170. (а) Пусть wX совершенно относительно $U \subset X$. Пусть F замкнуто в X, $F \subset U$ и $F \prec_c X \setminus \mathrm{Fr}U$. Из 153 гл. IV следует, что $[F]_{wX} \subset O(X \setminus \mathrm{Fr}U)$. Последнее той же задачи 153 гл. IV, достаточно показать, что $[F]_{wX} \subset O(U)$. Предположим противное, пусть $[F]_{wX} \not\subset O(U)$. Из $F \subset U$ следует $[F]_{wX} \subset [O(U)]$. Если $[F]_{wX} \not\subset O(U)$, то $[F]_{wX} \cap \mathrm{Fr}_{wX}O(U) \neq \Lambda$. Отсюда, так как $\mathrm{Fr}_{wX}O(U) = [\mathrm{Fr}_X U]_{wX}$ и $O(X \setminus \mathrm{Fr}U) = wX \setminus [\mathrm{Fr}U]_{wX} = wX \setminus \mathrm{Fr}_{wX}O(U)$ (см. 149 гл. IV), получаем $[F]_{wX} \not\subset O(X \setminus \mathrm{Fr}U)$. Пришли к противоречию, ибо $[F]_{wX} \subset O(X \setminus \mathrm{Fr}U)$.

(б) Пусть открытое в X множество U таково, что для всякого замкнутого в X множества F, для которого $F \subset U$ и $F \prec_c X \setminus \mathrm{Fr}U$, непременно и $F \prec_c U$. Надо доказать, что $\mathrm{Fr}_{wX}O(U) = [\mathrm{Fr}_X U]_{wX}$. Ясно, что всегда $[\mathrm{Fr}_X U]_{wX} \subset \mathrm{Fr}_{wX}O(U)$. Доказываем обратное включение. Пусть $\xi \in$

$\in \mathrm{Fr}_{wX}O(U)$, т. е. $\xi \in [O(U)]_{wX} \setminus O(U)$. Отсюда получаем $O(H) \cap O(U) = O(H \cap U) \neq \Lambda$ для любого $H \in \xi$. Имеем:

(1) $\xi \subset [O(U) \cap O(H)]_{wX} = [O(H \cap U)]_{wX} = [[H \cap U]_X]_{wX}$ для любого $H \in \xi$;

(2) $\xi \notin O(U)$.

Надо доказать, что $\xi \in [\mathrm{Fr}_X U]_{wX}$. Предположим противное. Тогда найдется такое $H_0 \in \xi$, что

(3) $[H_0]_X \prec_c X \setminus \mathrm{Fr}U$.

Из (1) следует

(4) $\xi \in [[H_0 \cap U]_X]_{wX}$.

Из (3), в частности, получаем

(5) $[H_0]_X = U \cup (X \setminus [U]_X)$,

и из (5) следует, что множество $[H_0]_X \cap U$ замкнуто в X. Тогда получаем

(6) $[H_0 \cap U]_X \subset [H_0]_X \cap U = U$.

Кроме того, $[H_0 \cap U]_X = [H_0]_X \prec_c X \setminus \mathrm{Fr}U$, следовательно (аксиома К3 для подчинений),

(7) $[H_0 \cap U]_X \prec_c X \setminus \mathrm{Fr}U$.

По условию, из (7) и (6) заключаем о том, что

(8) $[H_0 \cap U]_X \prec_c U$.

Но тогда (см. 153 гл. IV)

(9) $[[H_0 \cap U]_X]_{wX} \subset O(U)$.

Поэтому из (4) и (9) получаем

(10) $\xi \in O(U)$,

что противоречит (2). Все доказано.

171. Нам нужно показать, что для произвольного открытого множества $U \subset X$ элементарное подчинение β (см. стр. 248), а именно оно порождает расширение βX Стоуна — Чеха (см. 164 гл. IV), удовлетворяет условию задачи 170 гл. IV. Пусть $F \subset X$ — произвольное замкнутое в X множество, для которого

(1) $F \subset U$ и $F \prec_\beta X \setminus \mathrm{Fr}U$.

По определению элементарного подчинения β, существует непрерывная на X функция f, для которой

(2) $f(x) = 0$, если $x \in F$, и $f(x) = 1$, если $x \in \mathrm{Fr}U$.

Определим на X функцию $g(x)$ следующим образом:

(3) $g(x) = f(x)$, если $x \in [U]_X$, и
$g(x) = 1$, если $x \in X \setminus U$.

Легко видеть, что функция $g(x)$ непрерывна на X и отделяет замкнутое множество F и $X \setminus U$, значит,

(4) $F \prec_c U$.

Остается сослаться на задачу 170 гл. IV.

172. (а) Пусть wX — совершенное бикомпактное расширение пространства X. Пусть U_1, U_2 — два открытых в X множества, для которых $U_1 \cap U_2 = \Lambda$. Так как $U_1 \cap U_2 = \Lambda$, то $\mathrm{Fr}(U_1 \cup U_2) \subset \mathrm{Fr}U_1 \cup \mathrm{Fr}U_2$.

Аналогично,

$$\text{(4)}\qquad \mathrm{Fr}_{\nu X}(O(U_1)\cup O(U_2))\subset \mathrm{Fr}_{\nu X}O(U_1)\cup \mathrm{Fr}_{\nu X}O(U_2).$$

ибо $O(U_1)\cap O(U_2)=A$. Так как νA — совершенное расширение, то $\mathrm{Fr}_{\nu X}O(U_1)=[\mathrm{Fr}U_1]_{\nu X}$, $\mathrm{Fr}_{\nu X}O(U_2)=[\mathrm{Fr}U_2]_{\nu X}$, $\mathrm{Fr}_{\nu X}O(U_1\cup U_2)=[\mathrm{Fr}(U_1\cup U_2)]_{\nu X}$. Вследствие этого получаем:

$$\text{(5)}\qquad \mathrm{Fr}_{\nu X}O(U_1\cup U_2)\subset \mathrm{Fr}_{\nu X}O(U_1)\cup \mathrm{Fr}_{\nu X}O(U_2).$$

Таким тогда, имеем:

$$\text{(6)}\quad [O(U_1\cup U_2)]_{\nu X}=[U_1\cup U_2]_{\nu X}=$$
$$=[U_1]_{\nu X}\cup[U_2]_{\nu X}=[O(U_1)]_{\nu X}\cup[O(U_2)]_{\nu X}.$$

Из формул (1), (2), (3) следуют: $O(U_1\cup U_2)\subset O(U_1)\cup O(U_2)$. Остается заметить, что обратное включение имеет место всегда.

(б) Обратно, пусть U — произвольное открытое в X множество. Рассмотрим открытое в X множество $V=X\setminus[U]$. Ясно, что $\mathrm{Fr}U=X\setminus(U\cup V)$, следовательно,

$$\text{(4)}\quad [\mathrm{Fr}U]_{\nu X}=[X\setminus(U\cup V)]_{\nu X}=$$
$$=\nu X\setminus O(U\cup V)=\nu X\setminus(O(U)\cup O(V)).$$

Кроме того,

$$\text{(5)}\qquad \nu X\setminus[O(U)]_{\nu X}=\nu X\setminus[[U]_{\beta X}]_{\nu X}=O(X\setminus[U]_{\nu X})=O(V)$$

(здесь мы использовали равенства из задачи 143 гл. IV), откуда

$$\text{(6)}\qquad \mathrm{Fr}_{\nu X}O(U)=\nu X\setminus(O(U)\cup O(V)).$$

Сравнивая (5) с (4), получаем $[\mathrm{Fr}U]_{\nu X}=\mathrm{Fr}_{\nu X}O(U)$. Совершенность расширения νX доказана.

173. (а) Пусть X — нормальное пространство, а β — элементарное подчинение на X. Для того чтобы доказать равенство (1) для любых двух открытых в X множеств, достаточно доказать равенство

$$\text{(1')}\qquad [F_1\cap F_2]_{\beta X}=[F_1]_{\beta X}\cap[F_2]_{\beta X}$$

для любых двух замкнутых в X множеств F_1 и F_2. Пусть $\xi\notin[F_1\cap F_2]_{\beta X}$. Тогда существует окрестность $O\xi$ точки ξ в βX, для которой

$$\text{(2)}\qquad [O\xi]_{\beta X}\cap[F_1\cap F_2]_{\beta X}=A.$$

Обозначим

$$\text{(3)}\qquad F_1'=[O\xi]_{\beta X}\cap F_1,$$
$$F_2'=[O\xi]_{\beta X}\cap F_2.$$

Очевидно,

$$\text{(4)}\qquad F_1'\cap F_2'=A.$$

Тогда (см. 16 гл. IV)

$$\text{(5)}\qquad [F_1']_{\beta X}\cap[F_2']_{\beta X}=A.$$

Следовательно,

$$\text{(6)}\qquad \xi\notin[F_1]_{\beta X}\cap[F_2]_{\beta X}.$$

Отсюда получается включение $[F_1]_{\beta X}\cap[F_2]_{\beta X}\subset[F_1\cap F_2]_{\beta X}$. Обратное включение, очевидно, выполнено всегда. Итак, равенство (1') и следовательно, и равенство (1) доказаны. Равенство такого следует из 17 и 5 гл. IV.

(б) Пусть равенство (1') выполнено для любых двух замкнутых в X множеств F_1 и F_2 и расширения νX, в частности, для любых двух непересекающихся замкнутых в X множеств F_1 и F_2. Итак, любые два непересекающихся замкнутых в X множества F_1 и F_2 ν-далеки, а следовательно, и функционально отделимы, что бывает только тогда, когда пространство X нормально, ν — элементарное подчинение, а νX — расширение Стоуна — Чеха пространства X.

174. Прежде всего сформулируем совсем простое утверждение, доказательство которого может быть предложено читателю. Отображение $f: X\to Y$ тогда и только тогда монотонно, когда для любых двух непересекающихся открытых в X множеств U_1 и U_2 выполнено равенство $f^{\#}(U_1\cup U_2)=f^{\#}U_1\cup f^{\#}U_2$, где, как всегда, $f^{\#}U=(y\in Y: f^{-1}y\subset U\}=Y\setminus f(X\setminus U)$. Теперь, пользуясь только что сформулированным предложением, решим нашу задачу.

(а) Пусть естественное отображение $h: \beta X\to\nu X$ монотонно. Пусть U_1, U_2 — два произвольных открытых в X множества, для которых $U_1\cap U_2=A$. Рассмотрим открытые в βX множества $O_\beta(U_1)$ и $O_\beta(U_2)$. Ясно, что $O_\beta(U_1)\cap O_\beta(U_2)=A$, а значит, $h^{\#}O_\beta(U_1)\cup h^{\#}O_\beta(U_2)=h^{\#}O_\beta(U_1\cup U_2)$. Кроме того, вследствие совершенности расширения βX, будем иметь: $O_\beta(U_1\cup U_2)=O_\beta(U_1)\cup O_\beta(U_2)$. Из 169 гл. IV получаем равенства: $h^{\#}(O_\beta(U_1\cup U_2))=O_\beta(U_1\cup U_2)$, $h^{\#}O_\beta(U_1)=O_\nu(U_1)$, $h^{\#}O_\beta(U_2)=O_\nu(U_2)$. Из полученных равенств вытекает равенство $O_\nu(U_1\cup U_2)=O_\nu(U_1)\cup O_\nu(U_2)$, а это означает совершенность расширения νX (см. 172 гл. IV).

(б) Обратно, надо доказать монотонность естественного отображения $h: \beta X\to\nu X$, иначе, что νX — совершенное расширение. Предположим, что h не монотонно. Пусть $\eta_0\in\nu X$ таково, что множество $h^{-1}\eta_0$ несвязно. Тогда существуют такие открытые в βX множества Γ_1 и Γ_2, что

$$\text{(1)}\qquad [\Gamma_1]\cap[\Gamma_2]=A,\quad h^{-1}\eta_0\subset\Gamma_1\cup\Gamma_2,$$
$$h^{-1}\eta_0\cap\Gamma_1\neq A,\ h^{-1}\eta_0\cap\Gamma_2\neq A.$$

Положим $U_1=\Gamma_1\cap X$, $U_2=\Gamma_2\cap X$. Понятно, что U_1 и U_2 — открытые в X множества и $U_1\cap U_2=A$. Заметим, что мы всегда, не нарушая условий (1), можем предполагать, что $\Gamma_1=O_\beta(U_1)$, $\Gamma_2=O_\beta(U_2)$. Пользуясь совершенностью расширений βX и νX, а также задачей 163 гл. IV, получим равенства:

$$h^{\#}O_\beta(U_1\cup U_2)=h^{\#}(O_\beta(U_1)\cup O_\beta(U_2)),$$
$$h^{\#}O_\beta(U_1\cup U_2)=O_\nu(U_1\cup U_2)=O_\nu(U_1)\cup O_\nu(U_2)=$$
$$=h^{\#}O_\beta(U_1)\cup h^{\#}O_\beta(U_2).$$

Так как $h^{-1}\eta_0=O_\beta(U_1)\cup O_\beta(U_2)$, то $\eta_0\subset O_\nu(U_1)\cup O_\nu(U_2)$; с другой стороны, $h^{-1}\eta_0\cap O_\beta(U_1)\neq A$, $h^{-1}\eta_0\cap O_\beta(U_2)\neq A$; значит, $\eta_0\notin h^{\#}O_\beta(U_1)=O_\nu(U_1)$, $\eta_0\subset h^{\#}O_\beta(U_2)=O_\nu(U_2)$. Получаем противоречие.

175. Прежде всего рассмотрим вполне подчинения (стр. 247). Все вполне подчинения для введенного в условии задачи отношения доказываются без труда. Доказательства требует лишь аксиома B5. Итак, пусть $F\subset U_2\subset[U_2]\subset B$, $U_1\in\alpha$. Пользуясь тем, что пространство X регулярно, а α — база этого пространства, мы для каждой точки $x\in\mathrm{Fr}U_1$ построим такое $Ux\in\alpha$, что $[Ux]\subset B\setminus[U_2]\cup F=A$. В результате получим покрытие $\omega=\{Ux: x\in\mathrm{Fr}U_1\}$ бикомпакта $\mathrm{Fr}U_1$, из которого выделим конечное подпокрытие: $\omega_0=\{Ux_1,\ldots,Ux_n\}$. Положим $U_2=U_1\setminus\bigcup_{i=1}^{n}[Ux_i]$, $U_1=U_1\cup\bigcup_{i=1}^{n}Ux_i$. Так как α — алгебраически замкнутая база (см. определение на стр. 243), то $U_2\in\alpha$, $U_1\in\alpha$, а так как ω_0 — открытое множество $\mathrm{Fr}U_1$

и $\bigcup_{i=1}^{n}[U_{2i}]\subset H$, $\bigcup_{i=1}^{k}[U_{2i}]\cap F=\Lambda$, то $F\subset U_2\subset[U_2]\subset[U_2]\setminus\bigcup_{i=1}^{n}[U_{2i}]\subset$

$\subset U_1\subset[U_1]\subset U_1\cup\bigcup_{i=1}^{k}U_{2i}=U_1\subset[U_1]=[U_1]\setminus\bigcup_{i=1}^{n}[U_{2i}]\subset H$. Таким образом мы нашли такие $U_1\in\sigma$ и $U_2\in\sigma$, что $F\subset U_2$, $[U_2]\subset U_1$, $[U_1]\subset H$. Так как $U_1\in\sigma$, $U_2\in\sigma$, $U_1\subset\sigma$, то $F\prec_\sigma U_2$, $[U_2]\prec_\sigma U_1$, $[U_1]\prec_\sigma H$. Заметим кстати, что $F\prec_\sigma U$, если $F\subset U$ и $U\subset\sigma$, и $[U_1]\prec_\sigma U_2$, если $U_1\subset\sigma$ и $[U_1]\subset U_2$.

176. (а) Доказательство регулярности легко получается, если воспользоваться задачей 55 гл. III.

(б) Доказываем полную регулярность пространства X. Для этого заметим прежде всего, что система σ всех открытых в X бикомпактных пространстве X множеств с бикомпактной границей образует алгебраически замкнутую базу. Теперь вводим в X отношение подчинения так же, как и в задаче 175 гл. IV, и ссылаемся на задачу 143 гл. IV.

177. Пусть $U\subset\sigma$. Если замкнутое множество $F\subset X$ таково, что $F\subset U$, то непременно $F\prec_\sigma U$ в смысле подчинения, определяемого алгебраически замкнутой σ-бикомпактной базой пространства X (см. 175 гл. IV). Тогда, вследствие задачи 170 гл. IV, бикомпактное расширение σX, порождённое этим подчинением (см. 175 гл. IV), совершенно относительно открытого множества U.

178. То, что база σ алгебраически замкнута, доказывается без труда. Тогда база σ порождает подчинение, обозначаемое также через σ (см. 175 гл. IV), а следовательно, бикомпактное расширение σX. Пусть U — произвольное открытое в X множество, а замкнутое множество $F\subset X$ таково, что $F\subset U$ и $F\prec_\sigma X\setminus\mathrm{Fr}U$. По определению подчинения σ, найдется такое $U'\in\sigma$, что $F\subset U'=[U']\subset X\setminus\mathrm{Fr}U$. Тогда $F\prec_\sigma U'$, $[U']\prec_\sigma X\setminus\mathrm{Fr}U$. Кроме того, ясно, что $\mathrm{Fr}(U\setminus[U'])\subset\mathrm{Fr}U\cup\mathrm{Fr}U'$. Отсюда заключаем, что подпространство $\mathrm{Fr}(U\setminus[U'])$ бикомпактно. Так как σ состоит из всех открытых множеств с бикомпактной границей, то $U\setminus[U']\in\sigma$. Пользуясь тем, что $F\subset U\setminus[U']\subset U$, а также определением подчинения σ, выводим отсюда, что $F\prec_\sigma U$. Значит, σX совершенно (см. 170 гл. IV).

179. Вследствие задач 164 и 165 гл. IV, тождественное отображение $h\colon X\to X$ является (σ,σ)-равномерно непрерывным, но не $(\sigma,\mathfrak{u})$-равномерно непрерывным, т. е. найдутся такие замкнутое множество $F\subset X$ и открытое $H\subset X$, что $F\prec_\sigma H$, но $F\not\prec_{\mathfrak{u}}H$. Так как $F\prec_\sigma H$, то существует такое $H'\in\sigma$, что $F\prec_\sigma H'$, $[H']\prec_{\mathfrak{u}}H$. Тогда $F\not\prec_{\mathfrak{u}}H'$, ибо $H'\subset H$ и $F\not\prec_{\mathfrak{u}}H$. Так как $H'\in\sigma$, то подпространство $\mathrm{Fr}H'$ бикомпактно. Отсюда заключаем, что $F\prec_\sigma X\setminus\mathrm{Fr}H'$. Учитывая, что $F\subset H'$ и $F\prec_\sigma H'$, получаем вследствие задачи 170 гл. IV, что расширение σX не совершенно относительно открытого множества H'.

180. (а) Пусть $\xi\in\sigma X$, а Γ_ξ^0 — произвольная окрестность точки ξ в σX. Возьмем такие $H_1\in\xi$, $H_2\in\xi$, чтобы $[H_1]\prec_\sigma H_2$ и $O_\sigma[H_2]\subset\Gamma_\xi^0$. По определению подчинения σ (см. 175 гл. IV), найдется такое $U\in\sigma$, что $[H_1]\prec_\sigma U\subset[U]\prec_\sigma H_2$. Ясно, что $U\in\xi$ и $O_\sigma(U)=O_\sigma(H_2)\subset\Gamma_\xi^0$. Итак, семейство $\Sigma=\{O_\sigma(U)\colon U\in\sigma\}$ — база бикомпакта σX.

(б) Воспользуемся теперь задачей 177 гл. IV, вследствие чего σX совершенно относительно $U\in\sigma$. Тогда, пользуясь бикомпактностью подпространства $\mathrm{Fr}U$, если $U\in\sigma$, получим $\mathrm{Fr}O_\sigma(U)=[\mathrm{Fr}U]_{\sigma X}=\mathrm{Fr}U$ для любого $U\in\sigma$, откуда $\mathrm{Fr}O_\sigma(U)\cap(\sigma X\setminus X)=\Lambda$. Значит, для любого $U\in\sigma$ множество $O_\sigma(U)\cap(\sigma X\setminus X)$ открыто-замкнуто в подпространстве $\sigma X\setminus X$.

(в) Последнее утверждение — простое следствие регулярности подпространства $\sigma X\setminus X$ и только что доказанного утверждения (б). Обратите внимание на определение связности (стр. 55).

181. Рассмотрим естественное отображение $h\colon\beta X\to\sigma X$ расширения Стоуна — Чеха βX пространства X на расширение σX. Расширение σX совершенно (см. 172 гл. IV), значит, h — непрерывное отображение (см. 174 гл. IV). Докажем, что $h^{-1}\eta$ — максимальное бикомпактное множество подпространства $\beta X\setminus X$, если $\eta\in\sigma X\setminus X$ (максимальное в том смысле, что $h^{-1}\eta$ не содержится ни в каком отличном от $h^{-1}\eta$ связном бикомпактном множестве подпространства $\beta X\setminus X$). Пусть $C\subset\beta X\setminus X$, C связно и бикомпактно. Тогда hC связно и $hC\subset\sigma X\setminus X$. Но все связные множества, принадлежащие $\sigma X\setminus X$, одноточечны (см. 180 гл. IV); значит, существует такая (единственная) точка $\eta\in\sigma X\setminus X$, что $C\subset h^{-1}\eta$. Пусть теперь σX — произвольное совершенное бикомпактное расширение пространства X, а $f\colon\beta X\to\sigma X$ — естественное (монотонное вследствие 174 гл. IV) отображение расширения Стоуна — Чеха βX на расширение σX. Вследствие только что доказанного, для каждой точки $\xi\in\sigma X\setminus X$ существует единственная точка $\eta\in\sigma X\setminus X$ такая, что $f^{-1}\xi\subset h^{-1}\eta$. Так как, кроме того, $f^{-1}x=h^{-1}x=x$, если $x\in X$, то тем самым определено интересующее нас отображение $g\colon\sigma X\to\sigma X$ бикомпактного расширения σX на бикомпактное расширение σX, причем $h=gf$. Ясно, что g — непрерывное естественное отображение.

182. Ясно, что также бикомпактным расширением является бикомпактное расширение σX, построенное на основе базы σ, состоящей из всех открытых множеств с бикомпактной границей (см. 175, 179, 181 гл. IV). Нетрудно также, что условия 1), 2) и 3) обеспечивают единственность существования такого бикомпактного расширения.

183. Нет, не всякое. Пусть X — произвольное вполне регулярное пространство, а θX — произвольное его бикомпактное расширение, отличное от расширения Стоуна — Чеха. Тогда всегда существует несовершенное бикомпактное расширение, следующее за θX. Действительно, пусть $f\colon\beta X\to\theta X$ — естественное отображение. Так как θX отлично от βX, то для некоторой точки $\eta\in\theta X\setminus X$ множество $f^{-1}\eta$ многоточечно. Выделим две точки $\xi_1\in f^{-1}\eta$, $\xi_2\in f^{-1}\eta$, $\xi_1\neq\xi_2$. Определим разбиение $\mathcal{R}$ бикомпакта βX следующим образом: все элементы разбиения — отдельные точки в βX, кроме одного элемента, состоящего из двух точек ξ_1 и ξ_2. Ясно, что разбиение $\mathcal{R}$ непрерывно, пространство этого разбиения (см. 92 гл. III) — хаусдорфово бикомпактное несовершенное расширение пространства X, следующее за θX.

184. Пусть bR — бикомпактное расширение числовой прямой, гомеоморфное отрезку числовой прямой. Нетрудно убедиться в том, что bR — совершенное расширение для R. С другой стороны, единственное следующее bR бикомпактное расширение — окружность — не является совершенным расширением. Из сказанного, в силу 182 и 174 гл. IV, следует решение задачи.

ГЛАВА V

МЕТРИЗАЦИЯ И ПАРАКОМПАКТНОСТЬ

Пусть X — множество, γ — некоторое семейство его подмножеств.

Элемент U семейства γ называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком отличном от него элементе семейства γ. Через $m(\gamma)$ будет обозначаться множество всех максимальных элементов семейства γ. Мы называем $m(\gamma)$ *поверхностью* семейства γ.

Скажем, что γ — *конечное семейство* множеств, если каждый его элемент содержится лишь в конечном множестве элементов γ.

Пусть $x \in X$ и n — натуральное число. Мы пишем $\mathrm{Kp}\,(x, \gamma) \leqslant n$, если не более чем n элементов семейства γ содержит точку x; в противном случае пишем $\mathrm{Kp}(x, \gamma) > n$. Семейство γ называется *точечно конечным*, если для каждой точки $x \in X$ существует натуральное число n такое, что $\mathrm{Kp}(x, \gamma) \leqslant n$. Напомним, что семейство множеств называется *дизъюнктным*, если его элементы попарно не пересекаются. Семейство γ называется *σ-точечно конечным* (*σ-дизъюнктным*), если оно является объединением счетного семейства точечно конечных (соответственно дизъюнктных) семейств множеств. Если каждый элемент семейства γ пересекается только с конечным (счетным) множеством элементов этого семейства, то мы говорим, что γ *звездно конечно* (соответственно *звездно счетно*).

Пусть $A \subset X$. Мы полагаем $\gamma(A) = \bigcup \{V \in \gamma : V \cap A \neq \Lambda\}$ и называем $\gamma(A)$ *звездой множества* A относительно семейства γ, или *звездой семейства* γ относительно множества A. Если $x \in X$ и $A = \{x\}$, то мы пишем $\gamma(x)$ вместо $\gamma(\{x\})$. Далее, $\gamma^{-}(x) = \bigcap \{U: U \in \gamma \text{ и } U \ni x\}$, $\gamma^{-}(A) = X \setminus \bigcup \{[P]: P \in \gamma \text{ и } [P] \cap A = \Lambda\}$, $\gamma^{*}(x) = \gamma^{-}(\{x\})$, $\gamma^{0}(x) = \gamma^{-}(x) \cap \gamma^{*}(x)$ и $\langle\gamma\rangle = \{\gamma^{0}(x): x \in X\}$. Множество $\gamma(A)$ называется *окрестностью* семейства γ относительно множества A.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$ и $\lambda = \{V_\alpha: \alpha \in A\}$ — два индексированных семейства подмножеств множества X, причем множеством значений индексов служит в обоих случаях одно и то же множество A. Скажем, что λ вписано в γ *комбинаторно*, если $V_\alpha \subset U_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Заметим, что для индексированного семейства $\gamma = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$ может быть $U_{\alpha'} = U_{\alpha''}$ при некоторых $\alpha', \alpha'' \in A$ таких, что $\alpha' \neq \alpha''$. Это обстоятельство для некоторых рассуждений оказывается весьма удобным. Для индексированных семейств множеств определения точечной конечности, дизъюнктности, σ-точечной конечности и т. д. получаются при очевидном изменении соответствующих определений, данных выше. Например, в этом случае $\mathrm{Kp}\,(x, \gamma) \leqslant n$, если $|\{\alpha \in A: U_\alpha \ni x\}| \leqslant n$, и γ дизъюнктно, если при $\alpha', \alpha'' \in A$ и $\alpha' \neq \alpha''$ непременно $U_{\alpha'} \cap U_{\alpha''} = \Lambda$. Это соглашение относится и к некоторым дальнейшим определениям. Мы будем иметь его в виду, не делая более специальных оговорок.

Напомним, что семейство λ множеств называется *вписанным* в семейство γ множеств, если для каждого $V \in \lambda$ существует $U \in \gamma$ такое, что $V \subset U$. Говорят, что λ *звездно вписано* в γ, если семейство $\{\lambda(x): x \in X\}$ вписано в γ, т. е. если для каждой точки $x \in X$ существует $U \in \gamma$ такое, что $\lambda(x) \subset U$. Если для каждого $V \in \lambda$ существует элемент U семейства γ такой, что $\lambda(V) \subset U$, то мы говорим, что λ *сильно звездно вписано* в γ.

Все определения, данные выше, разумеется, относятся и к тому специальному случаю, когда рассматриваемые семейства множеств являются покрытиями данного множества X. Так, например, мы можем говорить о σ-точечно конечных покрытиях, о звездной вписанности одного покрытия в другое и т. д.

Определим три специфических для покрытий термина.

Покрытие γ множества X называется *бинарным*, если оно состоит ровно из двух элементов.

Покрытие γ множества X называется *минимальным*, если никакое отличное от γ подсемейство λ семейства γ не покрывает множества X.

Пусть $\mathscr{F}$ — семейство покрытий множества X. Для каждого $\gamma \in \mathscr{F}$ выберем $U_\gamma \in \gamma$ и положим $P = \bigcap \{U_\gamma: \gamma \in \mathscr{F}\}$. Семейство всех множеств P, которые можно получить таким образом, очевидно, покрывает множество X; оно называется (покрытием) *произведением* (от) семейства $\mathscr{F}$.

Всюду далее мы предполагаем, что X — топологическое пространство.

Скажем, что покрытие λ пространства X *вписано с замыканием* в покрытие γ этого пространства, если покрытие $\{[V]: V \in \lambda\}$ вписано в γ.

Семейство γ подмножеств пространства X называется *локально конечным в X*, если для каждой точки $x \in X$ существует ее окрестность Ox, пересекающаяся лишь с конечным множеством элементов семейства γ. Если для каждой точки $x \in X$ существует окрестность Ox, пересекающаяся не более чем с одним элементом семейства γ, то γ называется *дискретным в X*.

Семейство множеств *σ-локально конечно* (*σ-дискретно*), если оно является объединением счетного множества локально конечных (соответственно дискретных) семейств множеств.

Назовем семейство γ множества *слабо дискретным*, если, как бы ни выбрали по точке $x(U)$ из каждого элемента U семейства γ,

множество $\{x(U): U \in \gamma\}$ составляет замкнутое дискретное подпространство пространства X (такие подпространства пространства X мы называем *дискретными в* X).

Семейство γ называется *конечно-кратным*, если для каждого его подсемейства γ^* непременно $\left[\bigcup \{P: P \in \gamma^*\}\right] = \bigcup \{[P]: P \in \gamma^*\}$.

Пространство X называется *коллективно нормальным*, если для каждого дискретного семейства $\lambda = \{F_\alpha: \alpha \in A\}$ его подмножеств существует дискретное семейство $\gamma = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$ открытых в X множеств такое, что $F_\alpha \subset U_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.

Пространство X называется *паракомпактным* (*сильно паракомпактным*), если в каждое его открытое покрытие можно вписать открытое локально конечное (соответственно звездно конечное) покрытие.

Пространство X называется *слабо паракомпактным* (*о-паракомпактным*), если в каждое его открытое покрытие можно вписать точечно конечное (соответственно σ-точечно конечное) открытое покрытие. Слабо паракомпактные пространства называются еще *точечно паракомпактными* и *метакомпактными*.

Паракомпактами мы называем паракомпактные хаусдорфовы пространства.

Пространство X *счетно паракомпактно*, если в каждое его счетное открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие.

Пространство X называется *проседающим*, если в каждое его открытое покрытие можно вписать σ-дизъюнктное открытое покрытие.

Разумеется, *наследственно паракомпактными* мы называем те пространства, каждое подпространство которых паракомпактно.

С понятием паракомпактности тесно связано понятие *разбиения единицы*, подчиненного данному открытому покрытию γ. Это такое семейство $\mathscr{F}$ непрерывных неотрицательных вещественных функций на X, что выполняются следующие условия:

1) для каждой функции f множество $\{x \in X: f(x) > 0\}$ содержится в некотором элементе покрытия γ;

2) для каждой точки x существует ее окрестность Ox такая, что множество $\{f \in \mathscr{F}: f(Ox) \neq \{0\}\}$ конечно;

3) $\sum \{f(x): f \in \mathscr{F}\} = 1$ для каждой точки $x \in X$.

Пространство X называется *звездно нормальным* (иногда — *звездно паракомпактным*), если в каждое его открытое покрытие можно звездно вписать открытое покрытие.

Дальнейшие определения относятся к базам и семействам покрытий.

База $\mathscr{B}$ пространства X называется *равномерной*, если для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности Ox семейство $\{U \in \mathscr{B}: x \subset U$ и $U \cap (X \setminus Ox) \neq \Lambda\}$ конечно.

База $\mathscr{B}$ пространства X называется *регулярной*, если для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности Ox существует окрестность O_1x этой точки такая, что семейство $\{U \in \mathscr{B}: U \cap O_1x \neq \Lambda$ и $U \cap (X \setminus Ox) \neq \Lambda\}$ конечно.

Семейство γ множеств называется *регулярным*, если для каждого $U \in \gamma$ и каждой точки $x \subset U$ существует окрестность Ox этой точки такая, что множество $\{V \in \gamma: V \cap Ox \neq \Lambda$ и $V \cap (X \setminus U) \neq \Lambda\}$ конечно.

База пространства X называется *NS-базой*, если она является σ-локально конечным семейством множеств.

Пусть $\mathscr{B}$ — база пространства X, удовлетворяющая условию: каковы бы ни были точка $x \in X$ и последовательность $\{U_n: n \in N\}$ элементов этой базы такие, что $x \in U_n$ и $U_{n+1} \subset U_n$, $U_{n+1} \neq U_n$ при всех $n \in N^+$, семейство $\{U_n: n \in N^+\}$ является базой пространства X в точке x. Будем говорить тогда, что $\mathscr{B}$ — *база счетного порядка*.

Пусть $\mathscr{E}$ — некоторое семейство покрытий пространства X. Назовем $\mathscr{E}$ *измельчающимся*, если, каковы бы ни были точка $x \in X$ и ее окрестность Ox, существует $\gamma \in \mathscr{E}$, для которого $\gamma(x) \subset Ox$. Если все элементы семейства $\mathscr{E}$ — открытые покрытия, то скажем, что $\mathscr{E}$ — *измельчение*. Измельчение $\mathscr{E}$ называется *счетным*, если $|\mathscr{E}| \leqslant \aleph_0$.

Семейство $\mathscr{E}$ открытых покрытий пространства X мы называем T_2-*измельчением*, если для каждой точки $x \in X$ имеет место $\bigcap \{\gamma(x): \gamma \in \mathscr{E}\} = \{x\}$.

Измельчение $\mathscr{E}$ называется *k-измельчением*, если для каждого бикомпактного подмножества Φ пространства X и каждой его окрестности U существует $\gamma \in \mathscr{E}$ такое, что $\gamma(\Phi) \subset U$.

Полезны также понятия фильтрации и T_2-фильтрации.

Множество $\mathscr{F}$ семейств открытых в X множеств называется *фильтрацией* (T_2-*фильтрацией*), если для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности Ox (соответственно и каждой точки y, отличной от x) существует $\gamma \in \mathscr{F}$ такое, что множество $\gamma(x)$ не пусто и $\gamma(x) \subset Ox$ (соответственно и $\gamma(x) \not\ni y$).

Естественно, фильтрация (T_2-фильтрация) $\mathscr{F}$ называется *счетной*, если $|\mathscr{F}| \leqslant \aleph_0$.

Пусть ξ — некоторое множество семейств открытых в X множеств.

Назовем ξ-*ядром* множества $U \subset X$ совокупность всех точек x множества U таких, что для некоторого $\gamma \in \xi$ выполняются условия: $\gamma(x) \neq \Lambda$ и $\gamma(x) \subset U$. Условимся обозначать ξ-ядро множества U через $(U)_\xi$ — или через (U), если ясно, какое семейство ξ имеется в виду. Множество U называется ξ-*полным*, если $(U) = U$.

Скажем, что семейство $\tilde{\xi}$ систем открытых множеств пространства X *мажорирует покрытие* λ этого пространства, если

для каждой точки $x \in X$ существуют ее окрестность Ox, элемент U покрытия λ и элемент γ семейства ξ такие, что $\gamma(Ox) \neq \Lambda$ и $\gamma(Ox) \subset U$.

Множество открытых покрытий пространства X называется *фундаментальным*, если оно мажорирует каждое открытое покрытие этого пространства.

Особенно важны счетные фундаментальные множества покрытий. Особую роль будут играть звездно монотонные последовательности открытых покрытий. Последовательность $\xi = \{\gamma_n : n \in N\}$ открытых покрытий пространства X называется *звездно монотонной* (соответственно *сильно звездно монотонной*), если при каждом $n \in N$ покрытие γ_{n+1} звездно вписано в γ_n (соответственно, если γ_{n+1} сильно звездно вписано в γ_n).

Кроме того, в этой главе нам впервые встретятся термин q-пространство. Пространство X называется *q-пространством*, если для каждой точки x существует такая последовательность $\{O_n(x) : n \in N\}$ ее окрестностей, что если $x_n \in O_n x$ при каждом $n \in N$, то множество $\{x_n : n \in N\}$ имеет предельную точку в X.

В нескольких задачах встретятся также следующие модификации введенных выше понятий.

Множество $\mathscr{F}$ семейств открытых в X множеств *слабо мажорирует* покрытие γ пространства X, если для каждой точки $x \in X$ существуют элемент U покрытия γ и такое $\lambda \in \mathscr{F}$, что $\lambda(x) \neq \Lambda$ и $\lambda(x) \subset U$. Если для каждого открытого покрытия γ пространства X существует счетное семейство $\mathscr{F}$ открытых покрытий этого пространства, которое слабо мажорирует покрытие γ, то пространство X называется *σ-паракомпактным*. Наконец, назовем X *слабо ядерным* пространством, если для каждого его открытого покрытия γ существует счетное множество $\mathscr{F}$ семейств открытых в X множеств, которое слабо мажорирует покрытие γ.

Нам встретится также следующее специальное понятие. Вполне регулярное пространство X называется *паракомпактным (p-пространством)*, если существует счетное семейство $\mathscr{P}$ покрытий пространства X множествами, открытыми в его расширении Стоуна — Чеха βX, такое, что $\bigcap \{\gamma(\alpha) : \gamma \in \mathscr{P}\} \subset X$ для каждой точки $x \in X$.

Семейство $\mathscr{P}$ называется *оперением* пространства X в βX.

§ 1. Общие задачи о покрытиях и базах

1. В каждое открытое покрытие регулярного пространства можно вписать открытое покрытие с замканием.

2. Локально конечное семейство множеств пространства X конечно.

3. Произведение конечного множества открытых покрытий пространства является открытым покрытием этого пространства.

4. Для каждого конечного множества $\mathscr{O}$ открытых покрытий пространства X можно найти открытое покрытие X, вписанное во все элементы множества $\mathscr{O}$ одновременно.

5. В сепарабельном пространстве X каждое точечно счетное семейство γ непустых открытых множеств счетно.

6. Пусть X — пространство, Y — его сепарабельное подпространство и γ — семейство открытых в X множеств таков, что $|\{U \in \gamma : U \ni y\}| \leqslant \aleph_0$ для всех $y \in Y$. Тогда $|\{U \in \gamma : U \cap Y \neq \Lambda\}| \leqslant \aleph_0$.

7. Пусть γ — звездно счетное семейство открытых в пространстве X множеств. Тогда можно представить γ в виде объединения своих подсемейств γ_α (где α пробегает некоторое множество A) таким образом, что 1) $|\gamma_\alpha| \leqslant \aleph_0$ при всех $\alpha \in A$ и 2) если $U \in \gamma_{\alpha'}$ и $V \in \gamma_{\alpha''}$, где $\alpha' \neq \alpha''$, то $U \cap V = \Lambda$.

8. Если γ — звездно счетное открытое покрытие пространства X, то существуют множество A и для каждого $\alpha \in A$ подсемейство γ_α семейства γ и подпространство X_α пространства X такие, что: 1) $|\gamma_\alpha| \leqslant \aleph_0$; 2) если $\alpha' \neq \alpha''$, то $\gamma_{\alpha'} \cap \gamma_{\alpha''} = \Lambda$; 3) $\bigcup \{U : U \in \gamma_\alpha\} = X_\alpha$; 4) X_α открыто и замкнуто в X; 5) $\bigcup \{\gamma_\alpha : \alpha \in A\} = \gamma$; 6) $\bigcup \{X_\alpha : \alpha \in A\} = X$; 7) если $\alpha' \neq \alpha''$, то $X_{\alpha'} \cap X_{\alpha''} = \Lambda$ (всюду выше α, α' и α'' — любые элементы множества A).

9. Каждое звездно счетное открытое покрытие γ топологического пространства X σ-дискретно.

10. Каждое точечно счетное открытое покрытие пространства X его сепарабельными подпространствами звездно счетно.

11. Если существует точечно счетное открытое покрытие γ пространства X подпространствами, каждое из которых обладает счетной базой, то X представляется в виде объединения пересекающихся открыто-замкнутых подпространств, каждое из которых имеет счетную базу.

12. Каждое звездно счетное открытое покрытие γ непустого связного пространства счетно.

13. Если в открытое покрытие γ пространства X можно вписать локально конечное (точечно конечное, звездно конечное) открытое покрытие, то в γ можно комбинаторно вписать локально конечное (точечно конечное, звездно конечное) открытое покрытие.

14. Пусть γ — точечно конечное покрытие топологического пространства X. Тогда существует минимальное покрытие λ пространства X, содержащееся в γ.

15. Пусть γ — минимальное открытое покрытие T_1-пространства X. Тогда существует замкнутое дискретное множество в X, равномощное γ.

16. Пусть γ^* — точечно конечное семейство подмножеств множества X, $X^* \subset X$ и каждому $A \in \gamma^*$ поставлено в соответствие некоторое множество $p(A) \subset A$. Пусть, кроме того, на γ^* задано вполне упорядочение $\prec$, причем выполняется условие:

$(\bigcup\{p(A): A \leqslant_c B\}) \cup (\bigcup\{A: B \prec_c A\}) \supset X^*$, для каждого $B \in \gamma^*$. Тогда $\bigcup\{p(A): A \in \gamma^*\} \supset X^*$.

17. Пусть γ — открытое точечно конечное покрытие нормального пространства X. Тогда для каждого $U \in \gamma$ можно так определить открытое множество $p(U)$, что будут выполняться условия 1) $[p(U)] \subset U$ и 2) $\bigcup\{p(U)]: U \in \gamma\} = X$.

18. В каждое точечно конечное открытое покрытие нормального пространства X можно комбинаторно вписать покрытие замкнутыми множествами.

19. Пусть γ — точечно конечное открытое покрытие пространства X и $X_n = \{x \in X: |\{U \in \gamma: U \ni x\}| = n\}$ для каждого $n \in N$. Пусть V_{n-1} — некоторое открытое множество, содержащее X_{n-1} причем $X_1 = A$, $V_1 = A$. Тогда

1) каждое X_n замкнуто в X;

2) $X_n \setminus V_{n-1}$ покрывается дискретным семейством замкнутых в X множеств, вписанным в γ.

20. Если семейство множеств γ звездно вписано в семейство множеств λ, то $\gamma(\gamma(A)) \subset \lambda(A)$ для любого множества A.

21. Пусть γ, γ' и γ'' — семейства подмножеств множества X и γ' звездно вписано в γ, а γ'' звездно вписано в γ'. Тогда γ'' сильно звездно вписано в γ.

22. Если в каждое открытое покрытие пространства X можно звездно вписать открытое покрытие, то в каждое открытое покрытие X можно вписать открытое покрытие и сильно звездно.

23. Если в каждое бинарное открытое покрытие пространства X можно звездно вписать открытое покрытие, то X нормально.

24. Если в каждое открытое покрытие пространства X можно звездно вписать открытое покрытие, то X коллективно нормально.

25. Если ξ — открытое покрытие пространства X и существует счетное множество φ открытых покрытий X, которое мажорирует покрытие ξ, то существует открытое покрытие пространства X, звездно вписанное в ξ.

26. Всякое дискретное (σ-дискретное) семейство множеств пространства локально конечно (σ-локально конечно) в нем.

27. Если в топологическом пространстве существует счетное фундаментальное множество покрытий, то в любое открытое покрытие этого пространства можно звездно вписать открытое покрытие.

28. В каждое открытое покрытие метрического пространства можно звездно вписать открытое покрытие.

29. Каждое метрическое пространство коллективно нормально.

30. Пусть ξ — некоторое множество семейств открытых в пространстве X множеств. Тогда каждое ξ-полное множество является открытым.

31. Пусть $\xi = \{\gamma_\alpha: \alpha \in N\}$ — звездно мажорирующая вверх последовательность открытых покрытий пространства X. Тогда ξ-ядро

(U) произвольного множества $U \subset X$ является открытым ξ-полным множеством.

32. Если λ — покрытие пространства X и ξ — звездно монотонная последовательность открытых покрытий этого пространства, мажорирующая покрытие λ, то существует вписанное в λ открытое покрытие γ, состоящее из ξ-полных множеств.

33. Пусть $\xi = \{\gamma_n: n \in N\}$ — сильно звездно монотонная последовательность открытых покрытий пространства X и γ — покрытие X ξ-полными множествами, вполне упорядоченное некоторым отношением $\prec$. Положим $s(U) = U \setminus \bigcup\{V \subset \gamma: V \prec U$ и $V \neq U\}$, $s_n(U) = \{x \in s(U): \gamma_n(x) \subset U\}$, $O_n(U) = \gamma_{n+1}(s_n(U))$. Тогда

(а) $\{s(U): U \in \gamma\}$ — покрытие X;

(б) $\{s_n(U): U \in \gamma, n \in N\}$ — покрытие X;

(в) никакой элемент семейства γ_n не пересекает двух различных элементов семейства $\{s_n(U): U \in \gamma\}$, где $n \in N$;

(г) никакой элемент семейства γ_{n+1} не пересекает двух различных элементов семейства $\{O_n(U): U \in \gamma\}$, где $n \in N$;

(д) $\{O_n(U): U \in \gamma, n \in N\}$ — σ-дискретное открытое покрытие пространства X, вписанное в γ.

34. Если звездно монотонная последовательность $\xi = \{\gamma_n: n \in N\}$ открытых покрытий пространства X мажорирует покрытие λ этого пространства, то в λ можно вписать σ-дискретное открытое покрытие.

35. Объединение конечного семейства ξ локально конечных (в пространстве X) семейств множеств является локально конечным семейством множеств.

36. Производное η конечного семейства ξ локально конечных (в пространстве X) семейств множеств является локально конечным семейством множеств.

37. Если ξ — локально конечное семейство множеств в пространстве X и $\lambda = \{\bar{Q}: Q \in \xi\}$, то и λ локально конечно (в X).

38. Если γ — локально конечное семейство множеств в пространстве X и F — бикомпактное подпространство пространства X, то F пересекается лишь с конечным множеством элементов семейства γ.

39. Если $s(\lambda) \leqslant_c \kappa_0$, то каждое локально конечное в λ семейство γ непустых открытых подмножеств счетно.

40. В каждое σ-локально конечное открытое покрытие ξ пространства X можно вписать локально конечное покрытие.

41. Каждое слабо дискретное замкнутое покрытие γ любого γ-пространства X локально конечно.

42. Если $\gamma = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$ и $\lambda = \{V_\alpha: \alpha \in A\}$ — семейства множеств в пространстве X такие, что $V_\alpha \subset U_\alpha$ при всех $\alpha \in A$ и γ слабо дискретно, то и λ слабо дискретно.

43. В каждое слабо дискретное покрытие топологического пространства можно вписать дизъюнктное слабо дискретное покрытие.

44. Если X — регулярное пространство и в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное покрытие (элементы которого не обязаны быть ни открытыми, ни замкнутыми множествами), то X паракомпактно.

45. Каждое метрическое пространство паракомпактно.

46. Показано, что регулярное σ-пространство паракомпактно в том и только в том случае, если в каждое его открытое покрытие можно вписать слабо дискретное покрытие.

47. Регулярное пространство точечно счетного типа паракомпактно в том и только в том случае, если в каждое его открытое покрытие можно вписать слабо дискретное покрытие.

48. Если X — нормальное пространство, $\xi = \{F_\alpha: \alpha \in A\}$ — дискретное семейство замкнутых в X множеств и $\gamma = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$ — семейство их попарно не пересекающихся окрестностей (где $U_\alpha \supset F_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$), то существуют такие открытые множества $V_\alpha \supset F_\alpha$, что семейство $\{V_\alpha: \alpha \in A\}$ дискретно.

49. Пусть γ — некоторое семейство множеств, лежащих в пространстве X, и λ — локально конечное покрытие замкнутыми множествами, каждое из которых пересекается лишь с конечным числом элементов γ. Тогда $\{\lambda^*(A): A \subset \gamma\}$ — локально конечное семейство открытых множеств, причем $\lambda^*(A) \supset A$ для всех $A \subset \gamma$.

50. Если λ — локально конечное открытое покрытие пространства X, то $\langle\lambda\rangle = \{\lambda^*(x): x \in X\}$ — открытое покрытие пространства X, вписанное в λ.

51. Если λ и γ — открытые локально конечные покрытия пространства X и λ вписано в γ с замыканием, то $\langle\lambda\rangle\gamma$ звездно вписано в γ — точнее, семейство $\{\langle\lambda\rangle\gamma: (V): V \in \lambda\}$ вписано в γ.

52. Пусть X — топологическое пространство, γ — его счетное открытое покрытие и для каждого $U \subset \gamma$ определено такое $s(U)$ — открытое в X множество, что 1) $[s(U)] \subset U$ и 2) $\bigcup\{s(U): U \subset \gamma\} = X$. Тогда в γ можно вписать локально конечное открытое покрытие пространства X (причем даже счетное).

53. Каждое локально конечное семейство паракомпактных подпространств пространства X звездно конечно.

54. Пусть μ — звездно конечное открытое покрытие пространства X и для каждого $U \in \mu$ задано конечное семейство λ_U открытых в X множеств, покрывающее U. Тогда $\{U \cap V: V \subset \lambda_U, U \subset \mu\}$ — звездно конечное открытое покрытие пространства X.

55. Пусть $\xi = \{F_k: k \subset N^+\}$ — последовательность замкнутых, а $\eta = \{V_k: k \subset N^+\}$ — последовательность открытых в пространстве X множеств, причем $\bigcup\{F_k: k \in N^+\} = X$ и $F_k \subset V_k \subset F_{k+1}$ для всех $k \in N^+$. Пусть для каждого k задано конечное семейство λ_k открытых в X множеств, покрывающее F_k, и $\lambda = \bigcup\{\lambda_k: k \in N^+\}$. Тогда существует звездно конечное открытое покрытие пространства X, вписанное в λ.

56. Пусть X — топологическое пространство, $\lambda = \{U_{i,j}: i \in N, j \in N\}$ — покрытие X открытыми множествами такое, что $U_{i,j} \subset U_{i',j'}$ при $i' \leqslant i$. Положим $U_i = \bigcup\{U_{i,j}: j \in N\}$ и $\gamma = \{U_i: i \in N\}$. Постройте звездно конечное открытое покрытие пространства X, вписанное в γ.

57. Пусть X — нормальное пространство и для каждого $k \in N$ заданы открытое множество V_k и замкнутое множество F_k так, что 1) $V_k \supset F_k$ и 2) $\bigcup\{F_k: k \in N\} = X$. Тогда в покрытие $\mu = \{V_k: k \in N\}$ можно вписать звездно конечное открытое покрытие.

58. Если X — нормальное пространство и γ — счетное открытое покрытие пространства X, в которое можно вписать счетное замкнутое покрытие, то и γ можно вписать и звездно конечное открытое покрытие.

59. В каждом конечном семействе множеств существует максимальный элемент.

60. Если покрытие γ пространства X нётерово, то поверхность $s(\gamma)$ семейства γ покрывает X.

61. Каждое регулярное семейство множеств нётерово.

62. Подсемейство регулярного семейства множеств регулярно.

63. Регулярное семейство множеств γ, каждый элемент которого максимален, локально конечно.

64. Поверхность $s(\gamma)$ регулярного семейства множеств γ является локально конечным семейством.

65. Поверхность $s(\mathscr{B})$ равномерной базы $\mathscr{B}$ пространства X является точечно конечным открытым покрытием X.

66. Каждое T_1-пространство X с равномерной базой $\mathscr{B}$ обладает счетным измельчающимся семейством точечно конечных открытых покрытий.

67. Если $\xi = \{\gamma_n: n \in N\}$ — измельчающаяся последовательность точечно конечных открытых покрытий пространства X и $\gamma_{n'}$ вписано в $\gamma_{n''}$ при $n' \geqslant n''$, то $\gamma = \bigcup\{\gamma_n: n \in N\}$ — равномерная база пространства X.

68. Если в регулярном пространстве X существует σ-дискретная база, то в X есть и регулярная база.

69. T_1-пространство X, обладающее регулярной базой $\mathscr{B}$, регулярно.

70. Пространство X, обладающее регулярной базой $\mathscr{B}$, паракомпактно.

71. Регулярное пространство X с σ-дискретной базой паракомпактно.

72. Если в каждое открытое покрытие регулярного пространства X можно вписать σ-локально конечное открытое покрытие, то X паракомпактно.

73. Каждое регулярное пространство X с NS-базой нормально.

74. Докажите, что регулярное пространство X с NS-базой совершенно нормально.

§ 2. Основные метризационные теоремы

75. Пусть X — T_1-пространство и $\gamma = \{\gamma_n : n \in N\}$ — сильно звездно монотонная и измельчающаяся последовательность его открытых покрытий. Для $x, y \in X$ положим $n(x, y) = \min\{n \in N : \gamma_n(x) \not\ni y\}$ и $f(x, y) = \frac{1}{2^{n(x,y)}}$, если $x \neq y$, и $f(x, y) = 0$, если $x = y$. Конечную последовательность $\theta = \{x_r, \ldots, x_{r+s}\}$ точек X, занумерованных натуральными числами от r до $r + s$, будем называть цепочкой ранга s, соединяющей x_r с x_{r+s}, а число $\sum_{i=r}^{r+s-1} f(x_{i+1}, x_{i+1})$ условимся называть длиной этой цепочки и обозначать через $L(\theta)$. Ранг цепочки θ будем обозначать через $H(\theta)$. Примем за $d(x, y)$ нижнюю грань длин цепочек (всевозможного ранга), соединяющих x с y.

Докажите, что

1) $f(x, y) = f(y, x)$ для любых $x, y \in X$, где $x \neq y$;

2) $f(x_0, x_{l+1}) \leqslant 2\sum_{i=0}^{l} f(x_i, x_{i+1}) = 2L(\theta)$ для любой цепочки $\theta = \{x_0, \ldots, x_{l+1}\}$, соединяющей x_0 с x_{l+1};

2') $d(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant 2d(x, y)$, $x, y \in X$;

3) $d(x, y)$ — метрика на множестве X;

4) $\left\{y : d(x, y) < \frac{1}{2^n}\right\} \supset \gamma_n(x)$;

5) $\left\{y : d(x, y) < \frac{1}{2^n}\right\} \subset \gamma_{n-1}(x)$;

6) d порождает топологию, заданную на X.

76. Если паракомпакт X обладает счетным измельчением $\{\gamma_i : i \in N\}$, то он метризуем (и обратно).

77. Для того чтобы T_1-пространство X было метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы в X существовало счетное фундаментальное множество покрытий.

78. Докажите, что T_1-пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда в X существует счетное δ-измельчение.

79. Регулярное пространство со счетной базой метризуемо.

80. Регулярное пространство с σ дискретной базой метризуемо. Верно и обратное утверждение.

81. Каждый ли паракомпакт с σ-дизъюнктной базой метризуем?

82. Верно ли, что каждое совершенно нормальное пространство с σ-дизъюнктной базой метризуемо?

83. Если регулярное пространство X обладает NS-базой, то оно метризуемо.

84. Докажите, что регулярное пространство X с NS-базой метризуемо, обобщив рассуждения из задачи 39 гл. III.

85. Паракомпакт с равномерной базой метризуем (и обратно).

86. Верно ли, что каждое регулярное финально компактное пространство с точечно счетной базой метризуемо?

87.(а) Если регулярное пространство X имеет точечно счетную базу κ, кроме того, для каждой точки $x \in X$ существует окрестность, являющаяся пространством со счетной базой, то X метризуемо.

(б) Локально бикомпактное хаусдорфово пространство с точечно счетной базой метризуемо.

88. Каждое T_1-пространство X с регулярной базой метризуемо (и обратно).

89. Если $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — локально конечное открытое покрытие регулярного пространства X его метризуемыми подпространствами U_α, то X метризуемо.

90. Если паракомпакт локально метризуем, то он метризуем.

91. Паракомпакт, локально метризуемый полной метрикой, метризуем полной метрикой.

92. Метрическое пространство X метризуемо полной метрикой в том и только в том случае, если оно плотно в смысле Чеха, т. е. является множеством типа G_δ в каком-нибудь (а тогда и в любом) своем бикомпактном хаусдорфовом расширении.

93. Локально метризуемое, локально бикомпактное хаусдорфово слабо паракомпактное пространство X метризуемо.

94. Каждое метризуемое локально бикомпактное пространство X представимо в виде объединения дизъюнктного семейства своих открыто-замкнутых подпространств, каждое из которых является объединением счетного множества компактов.

95. Каждый симметризуемый бикомпакт метризуем.

96. Пусть топология хаусдорфова пространства X порождена симметрикой d, которая удовлетворяет следующему условию:

(k) если A замкнуто в X, а Φ — бикомпакт, лежащий в X и не пересекающийся с A, то $d(\Phi, A) > 0$. Тогда

(а) в X выполнена первая аксиома счетности;

(б) X метризуемо.

97. Пусть X — метризуемое небикомпактное пространство. Докажите, что существует метризуемое (вообще говоря, небикомпактное) расширение $\tilde{X}$ пространства X (отличное от X).

98. Докажите, что метризуемое пространство X бикомпактно в том и только в том случае, когда всякая метрика на X, совместимая с его топологией, полна.

99. Если Y — метризуемое пространство, A — его замкнутое подпространство и ρ — метрика на A, порождающая топологию, индуцированную на A из Y, то существует метрика $\tilde{\rho}$ на пространстве Y, согласующаяся с его топологией, сужение которой на A есть ρ.

100. Постройте регулярное пространство $\mathscr{P}$ со следующими свойствами:

1) $\mathscr{P} = \mathscr{P}_0 \cup \mathscr{P}_1$, где $\mathscr{P}_0$ — открытое дискретное подпространство пространства $\mathscr{P}$, а $\mathscr{P}_1$ — замкнутое дискретное подпространство пространства $\mathscr{P}$, причем $\mathscr{P}_0 \cap \mathscr{P}_1 = \Lambda$, $|\mathscr{P}_0| = \aleph_0$, $|\mathscr{P}_1| = 2^{\aleph_0}$;

2) каждое бесконечное подмножество C множества $\mathscr{P}_0$ имеет предельную точку в $\mathscr{P}$ (точнее, в $\mathscr{P}_1$).

101. Докажите, что всякое регулярное пространство $\mathscr{P}$, удовлетворяющее условиям 1) и 2) из задачи 100 гл. V, (а) локально бикомпактно; (б) вполне регулярно; (в) локально метризуемо; (г) псевдокомпактно; (д) сепарабельно; (е) неметризуемо; (ж) не счетно компактно; (з) не финально компактно; (и) не нормально; (к) не слабо паракомпактно; (л) обладает измельчающейся последовательностью покрытий; (м) не имеет точечно счетной базы; (н) допускает непрерывное замкнутое отображение на пространство бесконечный компакт такое, что граница прообраза неизолированной точки не бикомпактна; (о) не является Q-пространством.

§ 3. Пространства, близкие к метризуемым. Специальные теоремы о метризации и метрических пространствах

102. Если пространство X обладает счетным измельчением, то каждое замкнутое в X множество имеет тип G_δ.

103. Если пространство X обладает счетной T_1-фильтрацией (фильтрацией) и каждое замкнутое в X множество имеет тип G_δ, то X обладает счетным T_1-измельчением (измельчением).

104. Если пространство X отображается на пространство со счетным T_1-измельчением (со счетной T_1-фильтрацией), то X само обладает счетным T_1-измельчением (соответственно счетной T_1-фильтрацией).

105. В пространстве X имеется счетное T_1-измельчение в том и только в том случае, если диагональ Δ является множеством типа G_δ в тихоновском произведении $X \times X$.

106. Если $\gamma = \{\gamma_\alpha : \alpha \in A\}$ — T_1-измельчение в пространстве X, то $\bigcup \{\gamma_\alpha : \alpha \in A\}$ — псевдобаза этого пространства.

107. Если финально компактное пространство X обладает счетным T_1-измельчением, то X обладает и счетной псевдобазой.

108. Бикомпакт со счетной T_1-фильтрацией совершенно нормален.

109. Каждый бикомпакт X, обладающий счетной T_1-фильтрацией, имеет счетную базу и потому метризуем.

110. Верно ли, что каждое вполне регулярное псевдокомпактное сепарабельное пространство со счетным измельчением метризуемо?

111. Если $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$ и X — нормальное сепарабельное пространство со счетным измельчением, то каждое несчетное множество $A \subset X$ имеет в X предельную точку.

112. Если пространство X обладает счетным измельчением ξ и каждое несчетное множество $A \subset X$ имеет в X предельную точку, то X финально компактно.

113. Если X — регулярное пространство со счетным измельчением, причем каждое несчетное множество $A \subset X$ имеет предельную точку в X, то X — метризуемое пространство со счетной базой.

114. Если $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$, то каждое сепарабельное нормальное пространство X со счетным измельчением метризуемо и обладает счетной базой.

115. Каждое сепарабельное нормальное пространство со счетным измельчением метризуемо в том и только в том случае, если каждое несчетное подпространство X числовой прямой содержит подмножество, не являющееся множеством типа F_σ в X.

116. Если каждое нормальное пространство с равномерной базой метризуемо, то и каждое сепарабельное нормальное пространство со счетным измельчением метризуемо.

117. Каждое метрическое пространство X веса τ гомеоморфно некоторому подпространству пространства $(Ku(\tau))^{\aleph_0}$ — счетной тихоновской степени ежа кольчести τ (см. 251 гл. II).

118. Мощность пространства $(Ku(\tau))^{\aleph_0}$ равна $\tau^{\aleph_0}$.

119. Если τ — неизмеримое кардинальное число, то $Ku(\tau)$ и $\mathscr{E}(\tau) = (Ku(\tau))^{\aleph_0}$ являются Q-пространствами.

120*. Q-вес (см. стр. 242) пространства $Ku(\tau)$ — ежа кольчести τ, равен $Q(\tau)$ — Q-весу дискретного пространства мощности τ.

121*. Q-вес пространства $(Ku(\tau))^{\aleph_1}$ равен $Q(\tau)$ для любого неизмеримого кардинального числа τ.

122*. Q-вес любого подпространства Y пространства $\mathscr{E}(\tau) = (Ku(\tau))^{\aleph_0}$ не превосходит $\max\{Q(\tau), \mathfrak{c}^{\aleph_0}\}$, где τ — произвольное неизмеримое кардинальное число.

123*. Если τ — неизмеримое кардинальное число и X — метрическое пространство веса τ, то X — Q-пространство и его Q-вес не превосходит $Q(\mathfrak{c}) \cdot \tau^{\aleph_0}$.

124*. Если верна обобщенная континуум-гипотеза и τ — кардинальное число, меньшее первого сильно недостижимого кардинального числа, то каждое метрическое пространство веса τ гомеоморфно замкнутому подпространству пространства $H^{\tau^{\aleph_0}}$ тихоновского произведения $\tau^{\aleph_0}$ экземпляров обычной прямой.

125°. Каждое метрическое пространство веса τ, где τ — неизмеримое кардинальное число, обладает Q-расширением, вес которого не превосходит $Q(\tau)\cdot\tau^{\aleph_0}$.

§ 4. Паракомпакты

126. Приведите пример нормального сепарабельного непаракомпактного пространства.

127. Каждое подпространство пространства X паракомпактно, если каждое его открытое подпространство паракомпактно.

128. Пусть X — паракомпактное пространство, B — его подмножество, $\mathscr{A}$ — некоторое семейство подмножеств множества X, причем выполняются условия:

(с) $P = \bigcup\{A: A \in \mathscr{A}\}$ — замкнутое в X множество;

(s) для каждого $A \in \mathscr{A}$ существует открытое в X множество U_A такое, что $U_A \supset A$ и $[U_A] \cap B = A$.

Тогда у P в X есть окрестность, замыкание которой не пересекается с B.

129. Паракомпактное хаусдорфово пространство X регулярно.

130. Паракомпактное хаусдорфово пространство нормально.

131. Если существует локально конечное покрытие регулярного пространства X паракомпактными подпространствами, то X само паракомпактно.

132. Каждое регулярное финально компактное пространство является паракомпактом.

133. Если X — паракомпактное пространство и $c(X) \leqslant \aleph_0$, то X финально компактно.

134. Пусть X — паракомпакт и γ — его открытое покрытие. Существует тогда семейство $\mathscr{F}$ непрерывных вещественных функций на X такое, что:

1) для каждого $f \in \mathscr{F}$, множество $\{x \in X: f(x) \neq 0\}$ (называемое носителем функции f) содержится в некотором элементе покрытия γ;

2) у каждой точки $x \in X$ существует окрестность Ox такая, что множество $\{f \in \mathscr{F}: Ox \setminus f^{-1}(0) \neq A\}$ конечно;

3) $\Sigma\{f(x): f \in \mathscr{F}$ и $f(x) \neq 0\} = 1$ для всех $x \in X$ (заметим, что в силу 2) множество $\{f \in \mathscr{F}: f(x) \neq 0\}$ конечно для всех $x \in X$).

135. Пусть X — множество всех точек плоскости, обе координаты которых — целые числа. Каждую точку $(n, m) \in X$, отличную от $(0, 0)$, объявим изолированной. Множество $A \subset X$, $A \ni (0, 0)$, назовем открытым, если $X \setminus A$ пересекается с каждой прямой, параллельной оси $y = 0$, кроме, быть может, некоторого конечного числа таких прямых, по конечному множеству.

Покажите, что X с такой топологией — недискретный паракомпакт без счетной базы, все бикомпактные подпространства которого конечны (следовательно, X не k-пространство).

136. Существует ли счетный паракомпакт, не в одной точке не удовлетворяющий первой аксиоме счетности?

137. Пусть X — паракомпакт, $X_0 \subset X$ — подмножество пространства X типа F_σ. Докажите, что во всяком покрытии ω пространства X_0 открытыми в X множествами можно вписать σ-локально конечное в X покрытие X_0 открытыми в X множествами.

138. Докажите, что всякое подпространство X_0 типа F_σ паракомпакта X является паракомпактом.

139. Каждое паракомпактное совершенно нормальное пространство наследственно паракомпактно.

140. Если пространство X наследственно паракомпактно и $c(X) \leqslant \aleph_0$, то X наследственно финально компактно.

141. Каждый ли бикомпакт, каждое подпространство которого паракомпактно, совершенно нормален?

142. Если каждое подпространство бикомпакта паракомпактно, то является ли этот бикомпакт пространством Фреше — Урысона (или хотя бы секвенциальным пространством)?

143. Если пространство X наследственно паракомпактно и $A(X) = X \cup d(X)$ — его удвоение по методу П. С. Александрова (см. 81 гл. III), то и $A(X)$ наследственно паракомпактно.

144. Всякий ли наследственно паракомпактный бикомпакт с первой аксиомой счетности совершенно нормален?

145. Если пространство X совершенно нормально и в каждое его открытое покрытие можно вписать σ-дискретное открытое покрытие, то X паракомпактно.

146. Пусть X — коллективно нормальное T_1-пространство, $X \supset Y$ и $Y = \bigcup\{F_i: i \in N\}$, где каждое F_i замкнуто в Y. Пусть, кроме того, 1) каждое F_i как подпространство пространства X паракомпактно и 2) каково бы ни было открытое в X множество U, содержащее Y, подпространство $X \setminus U$ паракомпактно. Тогда и все X паракомпактно.

147. В каждое открытое покрытие ξ хаусдорфова паракомпактного пространства X можно звездно вписать открытое покрытие.

148. Пространство X является паракомпактом в том и только в том случае, если оно удовлетворяет T_1-аксиоме отделимости и в каждое открытое покрытие этого пространства можно вписать открытое покрытие звездно.

149. В каждое открытое покрытие паракомпакта можно сильно звездно вписать открытое покрытие.

150. Следующие утверждения равносильны:

(а) X — паракомпакт;

(б) X — T_1-пространство, в каждое открытое покрытие которого можно вписать открытое покрытие звездно;

(в) X — регулярное пространство, и в каждое его открытое покрытие можно вписать σ-локально конечное открытое покрытие.

(г) X — регулярное пространство, в каждое открытое покрытие которого можно вписать локально конечное покрытие;

(д) X — регулярное пространство, и в каждое его открытое покрытие можно вписать σ-дискретное открытое покрытие;

(е) X — регулярное пространство, в каждое открытое покрытие которого можно вписать консервативное покрытие.

151. Существует консервативное покрытие вполне регулярного пространства X бикомпактами. Непременно ли тогда X — паракомпакт?

152. Пусть X — вполне регулярное пространство и bX — его бикомпактное хаусдорфово расширение. Показать, что X паракомпактно в том и только в том случае, если для каждого бикомпакта F, лежащего в $bX \setminus X$, существует локально конечное (в X) покрытие пространства X его открытыми подмножествами, замыкания которых (в bX) не пересекаются с F.

153. Пусть X — паракомпакт. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

1) $\dim X = 0$, т. е. во всякое конечное открытое покрытие пространства X можно вписать (конечное) дизъюнктное открытое покрытие;

2) $\operatorname{Ind} X = 0$, т. е. для каждого замкнутого в X множества F и произвольной его окрестности UF существует открыто-замкнутая окрестность $U'F$, для которой $U'F \subset UF$;

3) в любое открытое покрытие α пространства X можно вписать дизъюнктное открытое покрытие.

154. Пусть X — метризуемое пространство. Покажите, что следующие условия эквивалентны:

1) $\dim X = 0$;

2) существует база σ пространства X, являющаяся объединением счетного семейства дизъюнктных открытых покрытий X: $\sigma = \bigcup \{m_i : i \in N\}$.

155. Пусть $B(\tau)$ — боровское пространство веса τ (см. 246 гл. II). Докажите, что $\dim B(\tau) = 0$.

156. Пусть X — метризуемое пространство и $\dim X = 0$. Докажите, что $\dim X_0 = 0$ для всякого подпространства $X_0 \subset X$.

§ 5. Свойства типа паракомпактности: счетная паракомпактность, сильная паракомпактность, слабая паракомпактность и другие

157. Если пространство X нормально, то следующие утверждения равносильны:

(а) в каждое счетное открытое покрытие пространства X можно вписать точечно конечное открытое покрытие;

(б) в каждое счетное открытое покрытие пространства X можно комбинаторно вписать покрытие из замкнутых множеств;

(б′) в каждое счетное открытое покрытие X можно вписать счетное покрытие из замкнутых множеств;

(в) в каждое счетное открытое покрытие X можно вписать локально конечное открытое покрытие;

(г) в каждое счетное открытое покрытие X можно вписать звездно конечное открытое покрытие.

158. Каждое совершенно нормальное пространство счетно паракомпактно.

159. Нормальное пространство X счетно паракомпактно в том и только в том случае, если выполняется условие:

какова бы ни была счетная центрированная система ξ замкнутых в X множеств, пересечение элементов которой пусто, для каждого $F \subset \xi$ можно так определить содержащее F открытое множество $U(F)$, что будет $\bigcap \{U(F) : F \subset \xi\} = \Lambda$.

160. Если X нормально, то оно счетно паракомпактно тогда и только тогда, когда в каждое счетное открытое покрытие $\gamma = \{U_i : i \in N\}$ пространства X можно звездно вписать счетное открытое покрытие.

161. Каждое регулярное финально компактное пространство X сильно паракомпактно.

162. Всякое регулярное пространство со счетной сетью сильно паракомпактно.

163. Докажите, что метрическое пространство $K\nu(\tau)$ (веса плотности τ), построенное в задаче 251 г., II, при $\tau > \aleph_0$ не сильно паракомпактно.

164. Если пространство X допускает дизъюнктное открытое покрытие γ, каждый элемент которого является сильно паракомпактным подпространством пространства X, то X сильно паракомпактно.

165. Регулярное пространство X сильно паракомпактно в том и только в том случае, если в каждое его открытое покрытие можно вписать звездно счетное открытое покрытие.

166. Если некоторое звездно конечное семейство открытых множеств, каждое из которых есть сумма счетного множества бикомпактов, лежащих в регулярном пространстве X, покрывает X, то X сильно паракомпактно.

167*. Каждое локально бикомпактное паракомпактное хаусдорфово пространство X может быть покрыто семейством γ открытых множеств таким, что:

1) замыкание каждого $U \in \gamma$ в X бикомпактно и

2) у каждой точки $x \in X$ есть окрестность Ox, пересекающаяся не более чем с двумя элементами семейства γ.

168. Каждое локально бикомпактное паракомпактное пространство X может быть покрыто попарно непересекающимися открыто-замкнутыми финально компактными подпространствами.

169. Всякое паракомпактное локально бикомпактное хаусдорфово пространство X сильно паракомпактно.

170. Пусть X — вполне регулярное пространство и βX — его расширение Стоуна — Чеха. Докажите, что следующие утверждения равносильны:

1) X сильно паракомпактно;

2) для каждого открытого в βX множества G, содержащего X, найдется такое множество $\tilde{X} \subset G$, содержащее X, что $\tilde{X}$ как подпространство пространства βX сильно паракомпактно;

3) если G открыто в βX и $G \supset X$, то существует открытое сильно паракомпактное подпространство $\tilde{X} \subset G$ пространства βX, содержащее X.

171. Пусть X — вполне регулярное пространство и bX — его бикомпактное хаусдорфово расширение. Покажите, что X сильно паракомпактно в том и только в том случае, если для каждого бикомпакта F, лежащего в $bX \setminus X$, существует звездно конечное покрытие множества X открытыми в bX множествами, замыкания которых не пересекаются с F.

172. Паракомпакт коллективно нормален.

173. Каждое связное сильно паракомпактное пространство X финально компактно.

174. Каждое паракомпактное пространство слабо паракомпактно.

175. Каждое пространство X с равномерной базой $\mathscr{B}$ слабо паракомпактно.

176. Каждое ли локально бикомпактное слабо паракомпактное пространство паракомпактно?

177. Каждое ли нормальное локально бикомпактное слабо паракомпактное пространство паракомпактно?

178. Существует ли непаракомпактное нормальное локально бикомпактное слабо паракомпактное пространство с первой аксиомой счетности?

179. Нормальное слабо паракомпактное пространство счетно паракомпактно.

180. Если X — небикомпактное слабо паракомпактное T_1-пространство, то в X существует бесконечное замкнутое дискретное множество.

181. Счетно компактное слабо паракомпактное T_1-пространство бикомпактно.

182. Верно ли, что пространство $T(\omega_1)$ (см. стр. 152) слабо паракомпактно?

183. Во всякое открытое точечно конечное покрытие у коллективно нормального пространства X можно вписать σ-дискретное открытое покрытие с замыканием.

184. Коллективно нормальное пространство со счетным изъятием жестко.

185. Хаусдорфово пространство паракомпактно в том и только в том случае, если оно коллективно нормально и слабо паракомпактно.

186. Если пространство X обладает σ-точечно конечной базой, то в нем есть и счетная фильтрация, состоящая из точечно конечных семейств множеств.

187. Если в пространстве X каждое замкнутое множество является множеством типа G_δ и X обладает счетной фильтрацией, элементы которой — точечно конечные семейства множеств, то в X есть равномерная база.

188. Если в пространстве X каждое замкнутое множество имеет тип G_δ и X обладает σ-точечно конечной базой, то X обладает и равномерной базой.

189. Каждое коллективно нормальное совершенно нормальное пространство с σ-точечно конечной базой жестко.

190. Если пространство X σ-метакомпактно, то оно и просеяно, причем требуемые определением семейства множеств можно выбрать точечно конечными.

191. Если пространство X σ-метакомпактно и каждое замкнутое множество в X имеет тип G_δ, то X слабо паракомпактно.

192. Если пространство X удовлетворяет условию Суслина и λ — семейство непустых открытых множеств в X такое, что $\mathrm{Kp}(x, \lambda) \leqslant k$ для некоторого $k \in N^+$ при всех $x \in X$, то λ счетно.

193. Если пространство X удовлетворяет условию Суслина, $\mathscr{B}$ — база X и λ — несчетное конечнократное семейство непустых открытых множеств в X, то для каждого $k \in N^+$ существует $V \in \mathscr{B}$ такое, что $\mathrm{Kp}(x, \lambda) \geqslant k$ при всех $x \in V$ и $|\{U \in \lambda: U \cap V \neq \Lambda\}| \geqslant \aleph_0$.

194. В каждом полном в смысле Чеха пространстве X существует такая последовательность $\{\mathscr{B}_n: n \in N^+\}$ его баз, что если $U_n \in \mathscr{B}_n$ и $U_{n+1} \subset U_n$ для каждого $n \in N^+$, то $\bigcap \{[U_n]: n \in N^+\} \neq \Lambda$.

195. Если X — полное в смысле Чеха пространство и $c(X) \leqslant \aleph_1$, то каждое точечно конечное семейство λ непустых открытых множеств пространства X счетно.

196. Если X — полное в смысле Чеха пространство и $c(X) \leqslant \aleph_0$, то следующие утверждения равносильны:

1) X σ-метакомпактно;

2) X слабо паракомпактно;

3) X паракомпактно;

4) X сильно паракомпактно;

5) X финально компактно.

197. Если регулярное пространство X локально полно в смысле Чеха и локально удовлетворяет условию Суслина, то следующие утверждения равносильны:

1) X слабо паракомпактно;

2) X паракомпактно;

3) X сильно паракомпактно;

4) X является свободной суммой финально компактных топологических пространств.

198. Если σ-метакомпактное пространство X локально полно в смысле Чеха и локально удовлетворяет условию Суслина, то оно вполне.

199. Если X локально полно в смысле Чеха, локально удовлетворяет условию Суслина, совершенно нормально и σ-метакомпактно, то X паракомпактно.

200. Если X — совершенно нормальное локально бикомпактное пространство, то следующие утверждения равносильны: 1) X σ-метакомпактно; 2) X слабо паракомпактно; 3) X паракомпактно; 4) X сильно паракомпактно.

201. Если бикомпакт X удовлетворяет условию Суслина и F — замкнутое в X множество, то следующие утверждения равносильны: 1) характер $\chi(F, X)$ множества F в пространстве X счетен; 2) пространство $X \setminus F$ σ-метакомпактно.

202. Бикомпакт X, удовлетворяющий условию Суслина, совершенно нормален в том и только в том случае, если каждое его (открытое) подпространство σ-метакомпактно.

203. Каждое полное в смысле Чеха пространство с о точечно конечной базой, удовлетворяющее условию Суслина, является метризуемым пространством со счетной базой.

204. Нормальное пространство со счетным измельчением имеет σ-дискретную сеть.

205. Можно ли утверждать (без всяких теоретико-множественных предположений), что всякое нормальное пространство со счетным измельчением метризуемо?

206. Пространство X σ-паракомпактно в том и только в том случае, если в каждое его открытое покрытие можно вписать σ-дискретное покрытие, состоящее из замкнутых множеств.

§ 6. Некоторые дальнейшие задачи

207. Для каждого открытого локально конечного покрытия $\omega = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ нормального пространства X существует ω-отображение f пространства X на некоторое метрическое пространство Y веса $\tau = |\omega|$. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется *ω-отображением*, где ω — открытое покрытие пространства X, если существует такое открытое покрытие λ пространства Y, что семейство $\{f^{-1} V : V \in \lambda\}$ вписано в ω.

208. Пусть X — множество и $\hat{\xi}$ — звездно монотонная последовательность его покрытий $\hat{\xi}$-полными множествами. Пусть, кроме того, $\bigcap \{\gamma(x) : \gamma \in \hat{\xi}\} = \{x\}$ для всех $x \in X$. Тогда совокупность $\mathcal{T}$ всех $\hat{\xi}$-полных подмножеств множества X составляет метризуемую топологию на X.

209. Хаусдорфово пространство X паракомпактно в том и только в том случае, если для каждого его открытого покрытия ω существует ω отображение этого пространства на некоторое метрическое пространство веса $|\omega|$.

210. Пусть X — паракомпакт. Тогда следующие три утверждения равносильны:

(а) диагональ Δ в тихоновском произведении $X \times X$ является множеством типа G_δ;

(б) X обладает T_1-измельчением;

(в) X уплотняется на метрическое пространство (см. стр. 54).

211. Для каждого открытого покрытия ω паракомпакта X существует звездно вписанное в ω открытое покрытие ω' таков, что $|\omega'| \leqslant |\omega|$.

212*. Пусть X — паракомпакт, τ — ненаименьшее кардинальное число, $\tau \geqslant \aleph_0$, bX — бикомпактное хаусдорфово расширение пространства X, причем выполняются следующие условия:

1) вес X не превосходит τ;

2) $X = \bigcap \{U : U \in \mathcal{E}\}$, где $\mathcal{E}$ — некоторое семейство открытых в bX множеств и $|\mathcal{E}| \leqslant \tau$.

Тогда Q-вес пространства X не превосходит $Q(\tau) \cdot \tau^{\aleph_0}$.

213*. Каждый паракомпакт веса τ гомеоморфен замкнутому подпространству тихоновского произведения некоторого семейства метрических пространств, вес каждого из которых не превосходит τ.

214*. Если вес паракомпакта X является ненаименьшим кардинальным числом, то этот паракомпакт является Q-пространством.

215*. Пусть X — паракомпакт, τ — кардинальное число, меньшее первого сильно недостижимого, $\tau \geqslant \aleph_0$, если обобщенная континуум-гипотеза. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) Q-вес X не превосходит $\tau^{\aleph_0}$;

2) X гомеоморфно замкнутому подпространству пространства $R^{\tau^{\aleph_0}}$ (где R — прямая);

3) вес X не превосходит $\tau^{\aleph_0}$, и существует бикомпактное хаусдорфово расширение bX пространства X, в котором псевдохарактер множества X не превосходит $\tau^{\aleph_0}$.

216. Верно ли, что произведение двух паракомпактов всегда является паракомпактом?

217. (а) Если X — секвенциальный паракомпакт, а Y нормально и счетно компактно, то произведение $X \times Y$ нормально.

(б) Если X — паракомпакт и $\chi(X) \leqslant \aleph_0$, а Y нормально, причем для каждого счетного $B \subset Y$ множество $[B]$ бикомпактно, то $X \times Y$ нормально.

218. Докажите, что произведение паракомпакта X на локально бикомпактное хаусдорфово паракомпактное пространство Y — паракомпакт.

219. Произведение $Z = X \times Y$ совершенно нормального паракомпакта X на метризуемое пространство Y является совершенно нормальным паракомпактом.

220. Обязано ли быть нормальным произведение наследственно паракомпактного пространства X на метризуемое пространство Y?

221. Пусть X — отрезок $[0, 1]$ числовой оси, а X_0 — множество всех иррациональных точек этого отрезка. Обычную топологию на множестве X обозначим через $\mathscr{T}$. Топологию $\mathscr{T}^*$ на X определим как совокупность всех множеств вида $U \cup P$, где U открыто в обычной топологии отрезка, а $P \subset X_0$ — произвольное подмножество множества X_0. Тогда

(а) $(X, \mathscr{T}^*)$ — топологическое пространство;

(б) $(X, \mathscr{T}^*)$ наследственно паракомпактно;

(в) пространство $Z = (X, \mathscr{T}^*) \times X_0$ не нормально (где X_0 несет обычную топологию).

222. Доказать, что произведение счетно паракомпактного нормального пространства X на метризуемый бикомпакт Y нормально.

223. Произведение $X \times I$ пространства X на отрезок $I = [0, 1]$ числовой оси тогда и только тогда нормально, когда X нормально и счетно паракомпактно.

224. Верно ли, что произведение каждого нормального пространства на отрезок нормально?

225. Верно ли, что каждое нормальное пространство счетно паракомпактно?

226. Каждое вполне регулярное пространство со счетным псевдовесом является p-пространством.

227. Если p-пространство обладает сетью мощности τ, то оно обладает и базой мощности τ.

228. Паракомпактные p-пространства и только они совершенно отображаются на метрические.

229. Паракомпактное p-пространство с точечно счетной базой метризуемо.

230. Всегда ли образ p-пространства при совершенном отображении есть p-пространство.

231. Образ паракомпактного p-пространства при совершенном отображении — паракомпактное p-пространство.

РЕШЕНИЯ

5. Зафиксируем счетное множество $A \subset X$, всюду плотное в X. Тогда $\gamma = \bigcup \{\gamma_a : a \in A\}$, где $\gamma_a = \{U \in \gamma : U \ni a\}$, причем $|\gamma_a| \leqslant \aleph_0$ для всех $a \in A$. Поэтому (10 гл. I) и $|\gamma| \leqslant \aleph_0$.

6. Решение аналогично решению задачи 5 гл. V.

7. Для каждого $U \in \gamma$ положим $\lambda_U^1 = \{V \subset \gamma : V \cap U \neq \Lambda\}$ и, если уже определили λ_U^k для некоторого $k \in N^+$, положим $\lambda_U^{k+1} = \bigcup \{\lambda_V^1 : V \subset \lambda_U^k\}$. Множества λ_U^1 счетны; если счетно λ_U^{k-1}, то и λ_U^k счетно, поэтому λ_U^k счетно для всех $k \in N^+$. Положим $\lambda_U = \bigcup \{\lambda_U^k : k \in N^+\}$. Тогда, очевидно, верно следующее:

(1) $|\lambda_U| \leqslant \aleph_0$;

(2) если $V \in \lambda_U$, то и $\lambda_V \subset \lambda_U$;

(3) для любых $U \in \gamma$, $V \in \gamma$ либо $\lambda_U = \lambda_V$, либо $\lambda_U \cap \lambda_V = \Lambda$;

(4) $U \subset \lambda_U$ и потому

(5) $\bigcup \{\lambda_U : U \in \gamma\} = \gamma$.

Заметим, что (3) следует из (2). Теперь решение задачи заключается без труда.

8. Семейство $\{\gamma_\alpha : \alpha \in A\}$, удовлетворяющее условиям 1), 2) и 5), существует в силу задачи 7 гл. V. Положим $X_\alpha = \bigcup \{U : U \in \gamma_\alpha\}$. Тогда выполняется условие 3), из 3) и 5) и следует, что верно 8), а из 2) и 3) вытекает 7). Иными словами, $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — искомое представление X попарно не пересекающимися открытыми множествами. Следовательно, все X_α замкнуты в X и условие 4), как и все прочие, выполняется.

9. Пусть $\{\gamma_\alpha : \alpha \in A\}$ — семейство подсемейств покрытия, обладающее свойствами 2)—7) из задачи 8 гл. V. В силу 1) элементы каждого γ_α можно перенумеровать (но обязательно взаимно однозначно): $\gamma_\alpha = \{U_i^\alpha : i \in N\}$. Положим $\theta_i = \{U_i^\alpha : \alpha \in A\}$, $i \in N$. Из свойств 3), 4), 6) и 7) следует, что θ_i дискретно в X. При этом в силу 5) $\bigcup \{\theta_i : i \in N\} = \gamma$. Итак, γ есть σ-дискретное покрытие.

10. Это следует из задачи 6 гл. V.

11. Покрытие γ паракомпактно звездно счетно (см. 10 гл. V). Рассмотрим семейства $\{\gamma_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, определенные по γ, как в задаче 8 гл. V. Тогда каждое X_α имеет счетную базу — чтобы ее получить, достаточно выбрать счетную базу в каждом элементе семейства γ_α и все такие базы сложить.

12. Рассмотрим семейство $\{\gamma_\alpha : \alpha \in A\}$ подсемейств семейства γ, удовлетворяющее условиям 1)—7) задачи 8 гл. V. Из условий 2), 3) и 4) следует, что $|A| = 1 = \tau$, т. е. что $\gamma = \gamma_\alpha$, где $A = \{\alpha\}$. В силу 1) $|\gamma| = |\gamma_\alpha| \leqslant \aleph_0$ — задача решена.

13. Пусть λ — локально конечное (соответственно точечно конечное или звездно конечное) открытое покрытие, вписанное в γ. Зафиксируем для каждого $V \in \lambda$ какой-нибудь один элемент семейства γ, содержащий V, и обозначим его через $\varphi(V)$. Положим, далее, $g(U) = \bigcup \{V \subset \lambda : \varphi(V) = U\}$ для каждого $U \in \gamma$. Тогда, как легко проверить, $\{g(U) : U \in \gamma\}$ — локально конечное (соответственно точечно конечное или звездно конечное) открытое покрытие, комбинаторно вписанное в γ.

14. Рассмотрим множество $\mathfrak{N}$ всех покрытий, содержащихся в γ. Введем в $\mathfrak{N}$ отношение частичного порядка: $\lambda' \preccurlyeq \lambda''$, если $\lambda'' \subset \lambda'$. Из $\lambda' \preccurlyeq \lambda''$ и $\lambda'' \preccurlyeq \lambda'$ следует, что $\lambda' = \lambda''$. Покажем, что отношение $\preccurlyeq$ индуктивно. Пусть ξ — произвольная цепь в $\mathfrak{N}$. Положим $\lambda^* = \bigcap \{\lambda : \lambda \in \xi\}$. Семейство λ^* покрывает X. Действительно, пусть $x \in X$. Рассмотрим множество Θ всех элементов покрытия γ, содержащих x. Множество Θ конечно: $\Theta = \{U_1, \ldots, U_k\}$. Если $\lambda^* \cap \Theta = \Lambda$, то найдутся $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \xi$ такие, что $U_i \notin \lambda_i$. Из среди элементов $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ пусть ξ есть наибольший — пусть это λ_{i_0}. Тогда $\Theta \cap \lambda_{i_0} = \Lambda$ — а это противоречит тому, что λ_{i_0} покрывает X. Следовательно, $\lambda^* \cap \Theta \neq \Lambda$, т. е. λ^* является покрытием пространства X. Очевидно, $\lambda^* \subset \gamma$, поэтому $\lambda^* \in \mathfrak{N}$. При этом $\lambda \preccurlyeq \lambda^*$ для всех $\lambda \in \xi$. Доказано, что упорядоченное множество ξ индуктивно. Тогда в нем есть максимальный элемент (см. стр. 12). Очевидно, последний и является минимальным покрытием пространства X, содержащимся в γ.

15. Для каждого $U \in \gamma$ положим $1(U) = X \setminus \bigcup \{V \in \gamma : V \not\ni U\}$. Из минимальности γ следует, что $1(U) \neq \Lambda$ для каждого $U \in \gamma$. Кроме того, ясно, что $1(U)$ замкнуто. Покажем, что семейство $\eta = \{1(U) : U \in \gamma\}$ дискретно в X. Пусть $x \in X$. Зафиксируем $U^* \in \gamma$, для которого $x \in U^*$, и пусть

$V \in \gamma$, $V \neq U^*$. Тогда из $x \in U^* \cap V$ следует, что $x \notin 1(V)$, т. е. $U^* \cap 1(V) = \Lambda$. Значит, U^* — окрестность точки x, пересекающаяся лишь с одним элементом семейства η (а именно, с $1(U^*)$), и η — дискретное семейство. Выберем $x(U) \in 1(U)$. Тогда $\{(x(U)\colon U \in \gamma\}$ — дискретное семейство, и так как каждое $\{x(U)\}$ замкнуто, то $\{x(U)\colon U \in \gamma\}$ — замкнутое дискретное множество в X, очевидно, равномощное γ.

16. Рассмотрим произвольную точку $x^* \in X^*$. Положим $\lambda = \{A \in \gamma\colon A \ni x^*\}$. Из наших предположений следует, что λ — непустое конечное множество. Обозначим через B^* наибольший элемент семейства λ (по отношению к заданному или иному упорядочению $\prec$). Тогда $(\bigcup \{p(A)\colon A \preccurlyeq B^*\}) \cup (\bigcup \{A\colon B^* \prec_0 A\}) \supset X^* \ni x^*$. Но $\bigcup \{A\colon B^* \prec_0 A\} \not\ni x^*$. Значит, $x^* \in \bigcup \{p(A)\colon A \preccurlyeq B^*\} \subset \bigcup \{p(A)\colon A \in \gamma^*\}$, и, следовательно, $X^* \subset \bigcup \{p(A)\colon A \in \gamma^*\}$ *).

17. Зафиксируем некоторое линейное упорядочение $\prec$ на множестве γ. Будем строить множества $p(U)$ по индукции вдоль $(\gamma, \prec)$. Пусть $U^* \in \gamma$, и для всех $U \prec U^*$, где $U \neq U^*$, определено открытое множество $p(U)$ так, что выполняются условия: 1) $[p(U)] \subset U$ и 2') если $V \prec U^*$ и $V \neq U^*$, то $(\bigcup \{p(U)\colon U \preccurlyeq V\}) \cup (\bigcup \{U\colon V \prec_0 U\}) = X$. Положим $X^* = X \setminus \bigcup \{U \in \gamma\colon U^* \preccurlyeq U\}$ и $\gamma^* = \{U \in \gamma\colon U \prec_0 U^*\}$. Тогда выполняются посылки утверждения задачи 16 гл. V, следовательно, $\bigcup \{p(U)\colon U \prec_0 U^*\} \supset X^*$ и имеет место 2*) $(\bigcup \{p(U)\colon U \prec_0 U^*\}) \cup (\bigcup \{U\colon U^* \preccurlyeq U\}) = X$. Положим $P^* = X \setminus (\bigcup \{U\colon U^* \prec_0 U\} \cup \bigcup \{p(U)\colon U \prec_0 U^*\})$. Тогда P^* замкнуто в X и в силу 2*) $P^* \subset U^*$. Пусть $p(U^*)$ любое открытое множество, содержащее P^* и лежащее с замыканием в U^*. Тогда $(\bigcup \{p(U)\colon U \preccurlyeq U^*\}) \cup (\bigcup \{U\colon U^* \prec_0 U\}) = X$, и построение можно продолжать.

Пусть $p(U)$ определены в соответствии с описанной процедурой для всех $U \in \gamma$. Тогда $\{p(U)\colon U \in \gamma\}$ — покрытие пространства X в силу 16 гл. V. Значит, условия 1) и 2) выполняются.

18. См. задачу 17 гл. V.

19. Докажем 1). Если $x \in X_n$, то существуют попарно различные элементы $U_1, \ldots, U_{n+1}$ семейства γ, содержащие x. Тогда множество $G = \bigcap \{U_i\colon i = 1, \ldots, n+1\}$ открыто, содержит x и не пересекается с X_n.

Рассмотрим теперь замкнутое (в силу 1)) множество $P_n = X_n \setminus V_{n-1}$ и докажем 2). Для каждого $x \in P_n$ положим $F_n(x) = \bigcap \{U \cap P_n\colon U \in \gamma$ и $U \ni x\}$. Семейство $\xi = \{A \subset X\colon$ существует $x \in P_n$, для которого $A = F_n(x)\}$, очевидно, вписано в γ и покрывает P_n. Покажем, что ξ дискретно в P_n и, следовательно, в X. Для этого достаточно установить, что каждое $F_n(x)$ открыто в P_n и что для любых x', $x'' \in P_n$ либо $F_n(x') = F_n(x'')$, либо $F_n(x') \cap F_n(x'') = \Lambda$. Так как γ точечно конечно, то $F_n(x)$ открыто в P_n (см. определение множества $F_n(x)$). Предположим, что $F_n(x') \cap F_n(x'') \neq \Lambda$. Зафиксируем $x^* \in F_n(x') \cap F_n(x'')$. Положим $\gamma' = \{U \in \gamma\colon U \ni x'\}$, $\gamma'' = \{U \in \gamma\colon U \ni x''\}$ и $\gamma^* = \{U \in \gamma\colon U \ni x^*\}$. Из $x' \in X_n$, $x'' \in X_n$, $x^* \in X_n$ следует, что $|\gamma'| = |\gamma''| = |\gamma^*| = n \prec \aleph_0$. Но так как $x^* \in F_n(x')$, то $\gamma^* \subset \gamma'$ и потому $\gamma' = \gamma^*$. Так как $x^* \in F_n(x'')$, то $\gamma^* \subset \gamma''$ и потому $\gamma'' = \gamma^*$. Значит, $\gamma' = \gamma''$ и $F_n(x') = F_n(x'')$. Итак, ξ — дискретное (в X) покрытие пространства P_n замкнутыми в X множествами и 2) доказано.

21. Надо установить, что для каждого $H \in \gamma'$ существует такое $G \in \gamma$, что нижний элемент H^* семейства γ^*, пересекающий H, содержится в G. Зафиксируем произвольно $x_0 \in H$ и выберем $G \in \gamma$ из условия $\gamma'(x_0) \subset G$. Множество G искомое. Действительно, выберем $x^* \in H \cap H^*$. Тогда $x_0 \in H \cup H^* \subset \gamma'(x^*) \subset E$ для некоторого $E \in \gamma'$ (ибо γ' звездно вписано в γ'). Поэтому $H^* \subset E \subset \gamma'(x_0) \subset G$, и, значит, $\gamma^*(H) \subset G$.

24. Пусть $\xi = \{F_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — дискретное семейство замкнутых в X множеств. Тогда семейство τ_ξ всех открытых в X множеств, каждое из которых пересекается не более чем с одним элементом семейства ξ, покрывает X. Пишем в τ_ξ звездно какое-нибудь открытое покрытие γ. Тогда $\gamma(F_{\alpha'}) \cap \gamma(F_{\alpha''}) = \Lambda$ при $\alpha' \neq \alpha''$. Действительно, если $x \in \gamma(F_{\alpha'}) \cap \gamma(F_{\alpha''})$, то $\gamma(x) \cap F_{\alpha'} \neq \Lambda$ и $\gamma(x) \cap F_{\alpha''} \neq \Lambda$. Но $\gamma(x) \subset G$ для некоторого $G \in \eta$. Тогда $G \cap F_{\alpha'} \neq \Lambda$ и $G \cap F_{\alpha''} \neq \Lambda$; что противоречит определению η. Значит, $\gamma(F_\alpha)$, $\alpha \in A$, — попарно непересекающиеся окрестности множеств F_α, $\alpha \in A$, и X нормально.

25. Элементы γ как-нибудь перенумеруем: $\gamma = \{O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \ldots\}$ (возможны повторения). Не нарушая общности, можно считать, что λ_m вписано в λ_n при $m \geqslant n$ (ибо для каждого конечного семейства θ открытых покрытий можно найти открытое покрытие, вписанное во все элементы θ одновременно).

Назовем открытое множество $H \subset X$ отмеченным, если существуют натуральное число n, $\Gamma \subset \lambda_n$ и $G \subset \xi$ такие, что $H \subset \Gamma$ и $\lambda_n(H) \subset G$. Каждому отмеченному H поставим в соответствие некоторое $\kappa = \kappa(H)$, удовлетворяющее только что сформулированному условию. Так как γ мажорирует ξ, то семейство τ_ξ всех отмеченных множеств покрывает X. Для произвольной точки $x \in X$ проверим, что ее звезда $\eta(x)$ относительно покрытия τ_ξ содержится в некотором элементе покрытия ξ. Положим $n^* = \min\{\kappa(H)\colon H \in \eta$ и $H \ni x\}$ и выберем $H^* \in \eta$, $H^* \ni x$ так, чтобы было $\kappa(H^*) = n^*$. По определению $\kappa(H^*)$, существует $G^* \subset \xi$, для которого $\lambda_{n^*}(H^*) \subset G^*$. Покажем, что $\eta(x) \subset \lambda_{n^*}(H^*)$. Если $H' \in \tau_\xi$ и $H' \ni x$, то $n' = \kappa(H') \geqslant n^*$, по определению n^*. Существует $\Gamma' \in \lambda_{n'}$, для которого $H' = \Gamma'$. Но $\lambda_{n'}$ вписано в λ_{n^*} (ибо $n' \geqslant n^*$).— значит, существует $\Gamma^* \in \lambda_{n^*}$, для которого $\Gamma' \subset \Gamma^*$. Тогда $x \in H' \subset \Gamma^*$, и потому $H' \subset \Gamma^* \subset \lambda_{n^*}(x) \subset \lambda_{n^*}(H^*) \subset G^*$. Этим доказано, в силу выбора H', что $\eta(x) \subset G^*$. Итак, открытое покрытие τ_ξ звездно вписано в ξ.

27. Это непосредственно следует из задачи 25 гл. V.

28. Для каждого $i \in N$ обозначим через γ_i покрытие рассматриваемого метрического пространства (X, ρ) всеми открытыми множествами, диаметр которых не превосходит $\frac{1}{i}$. Тогда $\xi = \{\gamma_\Gamma\colon \Gamma \subset N\}$,— очевидно, фундаментальное множество покрытий пространства X. Остается сослаться на утверждение задачи 27 гл. V.

29. Следует из задач 24, 28 гл. V.

30. Действительно, $\gamma(x)$ — открытое множество для любого $x \in X$, а из множеств вида $\gamma(x)$, где $\gamma \subset \xi$, складывается любое ξ-полное множество.

31. Пусть $x \in \langle U\rangle$. Выберем $n \in N$, для которого $\gamma_n(x) \subset U$. Тогда $\gamma_{n+1}(\gamma_{n+1}(x)) \subset U$ (см. 20 гл. V), откуда следует, что $\gamma_{n+1}(x) \subset \langle U\rangle$. Это означает как то, что $\langle U\rangle$ открыто, так и то, что $\langle U\rangle$ ξ-полно.

32. Примем за γ совокупность ξ-ядер всех элементов λ. Тогда γ покрывает X (ибо ξ мажорирует λ). Далее, каждый элемент покрытия γ открыт и ξ-полон (см. 31 гл. V).

33. Утверждение (а) очевидно, а (б) вытекает из (а). Докажем (в): если $V \in \gamma_n$, $U' \in \gamma$, $U'' \in \gamma$, $U' \prec U''$, $U' \neq U''$, $V \cap t_n(U') \neq \Lambda$, то $V \subset U''$, и потому $V \cap t(U'') = \Lambda$, тем более, $V \cap t_n(U'') = \Lambda$. Докажем (г) от противного: если $W \in \gamma_{n+1}$, $U' \in \gamma$, $U'' \in \gamma$, $U' \neq U''$ и $W \cap (O_n(U')) \neq \Lambda$, $W \cap (O_n(U'')) \neq \Lambda$, то $\gamma_{n+1}(W) \cap t_n(U') \neq \Lambda$ и $\gamma_{n+1}(W) \cap t_n(U'') \neq \Lambda$. Но $\gamma_{n+1}(W)$ содержится в некотором элементе V семейства γ_n, для которого, следовательно, $V \cap t_n(U') \neq \Lambda$ и $V \cap t_n(U'') \neq \Lambda$ — а это противоречит (в). Из (б) и (г), очевидно, вытекает, что $\{O_n(U)\colon U \in \gamma,\ n \in N\}$ — σ-дискретное открытое покрытие пространства X. Оно вписано в γ, ибо $O_n(U) \subset U$ для каждого $U \subset \gamma$.

34. Можно считать последовательность ξ сильно звездно монотонной — в противном случае перейдем к подпоследовательности, образованной

*) Напомним, что $B^* \prec_0 A$ означает, что $B^* \prec A$ и $B \neq A$ (см. сноску на стр. 19).

чениями с четными номерами. Далее, ξ-ядра элементов λ образуют вписанное в λ покрытие γ пространства X ξ-полными (открытыми) множествами (см. гл. V). Поэтому и γ можно вписать σ-дискретное открытое покрытие и ему из 38 гл. V. Последнее, очевидно, вписано и в λ.

39. Зафиксируем у каждой точки $x \in P$ окрестность Ox, пересекающуюся лишь с конечным множеством элементов семейства γ. Из покрытия $\lambda = \{Ox: x \in P\}$ множества F выделим конечное покрытие F: $\lambda^* = \{Ox_1, \ldots, Ox_k\}$. Тогда $F \subset \bigcup \{Ox_i: i = 1, \ldots, k\}$ и $\bigcup \{Ox_i: i = 1, \ldots, k\}$ пересекается лишь с конечным множеством элементов γ. Тем более, последнее верно для F.

39. Положим $\mathscr{B} = \{U \subset X: U$ открыто в X и $|\{V \in \gamma: V \cap U \neq \emptyset\}| \leqslant \aleph_0\}$. Из нашего предположения о γ следует, что $\mathscr{B}$ — база пространства X. Поэтому (см. 102 гл. II) существует дискретное семейство λ элементов $\mathscr{B}$ таких, что $|\bigcup \{V: V \in \lambda\}| = X$. Так как $c(X) \leqslant \aleph_0$, то $|\lambda| \leqslant \aleph_0$. По каждый элемент семейства γ пересекается с некоторым элементом семейства λ — ибо $\bigcup \{V: V \in \lambda\}$ всюду плотно в X. Из $\lambda \subset \mathscr{B}$ и определения $\mathscr{B}$ теперь следует, что $|\gamma| \leqslant \aleph_0$.

40. Пусть $\xi = \bigcup \{\xi_i: i \in N\}$, где каждое ξ_i локально конечно. Положим $W_i = \bigcup \{U: U \in \xi_i\}$, $G_i = \bigcup \{W_j: j \in N$ и $j \leqslant i\}$ и $\eta_i = \{U \setminus G_i: U \in \xi\}$, $\eta = \bigcup \{\eta_i: i \in N\}$. Тогда

(1) η вписано в ξ;

(2) η покрывает X и

(3) η локально конечно.

Утверждение (1) очевидно; докажем (2) и (3). Зафиксируем $x \in X$ и положим $i_0 = \min\{i \in N: W_i \ni x\}$. Так как ξ покрывает X, то $\bigcup \{W_i: i \in N\} = X$ и i_0 определено корректно. Но $W_{i_0} \ni x$, $W_j \not\ni x$ при $j \leqslant i_0$ следует, что ξ_{i_0} покрывает x и G_{i_0}. Значит, η_{i_0} покрывает x — т. е. η — покрытие. Далее, так как каждое ξ_i локально конечно, то существует окрестность Ox точки x, для которой $|\{U \in \bigcup \{\xi_i: i \leqslant i_0\}: U \cap Ox \neq \emptyset\}| \leqslant \aleph_0$. Тем более, конечно множество $\{V \in \bigcup \{\eta_i: i \leqslant i_0\}: V \cap Ox \neq \emptyset\}$. Но W_{i_0} — окрестность точки x_{i_0}, не пересекающаяся ни с одним элементом семейства $\bigcup \{\eta_i: i > i_0\}$. Значит, $O^*x = W_{i_0} \cap Ox$ — окрестность точки x, которая пересекается лишь с конечным множеством элементов семейства η, т. е. η локально конечно.

41. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$ и последовательность $\xi = \{O_i(x): i \in N\}$ ее окрестностей, упомянутую в определении σ-пространства (см. стр. 290). Предположим, что для каждого $i \in N$ множество $O_i(x)$ пересекается с бесконечным множеством элементов покрытия γ. Тогда можно выбрать $x_i \in O_i(x)$ и $U_i \in \gamma$ так, чтобы было $U_i \neq U_j$ при $i \neq j$ и $x_i \in U_i \cap O_i(x)$ при всех $i \in N$. Так как γ слабо дискретно, то множество $\{x_i: i \in N\}$ должно быть дискретно в X, но оно имеет предельную точку, ибо $x_i \in O_i(x)$. Получили противоречие.

43. Пусть, что в каждое покрытие произвольного множества можно вписать дизъюнктное покрытие комбинаторно (вполне упорядочением заданное покрытие и берем разность элементов с объединением всех предшествующих). В силу задачи 42 гл. V вписанное покрытие и есть нам искомое.

44. Пусть ξ — произвольное открытое покрытие X и γ — какое-нибудь вписанное в него локально конечное покрытие. Рассмотрим семейство η всех открытых множеств, каждое из которых пересекается лишь с конечным числом элементов γ. Тогда η покрывает X. Через λ обозначим какое-нибудь открытое покрытие X, вписанное в η с замыканием. Вписем в λ локально конечно покрытие $\mathfrak{O}$ и положим $\mu = \{[P]: P \in \mathfrak{O}\}$. Тогда μ локально конечно, покрывает X, состоит из замкнутых множеств и вписано в η (см. 37 гл. V). Поэтому каждый элемент покрытия μ пересекается лишь с конечным множеством элементов семейства γ. Для каждого $A \in \gamma$ зафиксируем множество $U(A) \in \xi$ такое, что $A \subset U(A)$. Тогда $\delta = \{\mu^{-}(A): A \in \gamma\}$ — локально конечное открытое покрытие пространства X, причем $\mu^{-}(A) \supset A$ для всех $A \in \gamma$ (см. 48 гл. V). Тогда $U(A) \cap \mu^{-}(A) = A$, и поэтому семейство $\{U(A) \cap \mu^{-}(A): A \in \gamma\}$ покрывает X. Очевидно, оно вписано в ξ, состоит из открытых множеств и локально конечно, ибо δ локально конечно. Значит, X паракомпактно.

45. Решение следует из задач 28, 34, 40, 44 гл. V.

46. Это следует из задач 41, 43, 44 гл. V.

47. Легко видеть, что каждое пространство точечно счетного типа является σ-пространством. Утверждение теперь следует из 46 гл. V.

48. Положим $F = \bigcup \{F_\alpha: \alpha \in A\}$, $U = \bigcup \{U_\alpha: \alpha \in A\}$ и $P = X \setminus U$. Множество F замкнуто, так как ξ дискретно. Кроме того, U открыто, а P включено в $U \supset F$, $P \cap F = \Lambda$. Пространство X нормально, поэтому существуют открытые непересекающиеся множества $W \supset P$ и $V \supset F$. Положим $V_\alpha = V \cap U_\alpha \supset F \cap U_\alpha = F_\alpha$ и проверим, что семейство $\eta = \{V_\alpha: \alpha \in A\}$ дискретно. Пусть $x \in X$. Если $x \notin U$, то W — окрестность точки x, не пересекающаяся ни с одним элементом семейства η. Если $x \in U$, то $x \in U_{\alpha^*}$ для некоторого $\alpha^* \in A$. Тогда из $U_\alpha \supset V_\alpha$ и дизъюнктности семейства γ следует, что U_{α^*} — окрестность точки x, пересекающаяся только с одним элементом семейства η. Значит, η дискретно.

49. Имеем: $\lambda^{-}(A) = X \setminus \bigcup \{P: P \in \lambda$ и $P \cap A = \Lambda\}$. Очевидно, $\lambda^{-}(A) \supset A$ и $\lambda^{-}(A)$ открыто, так как λ — локально конечное замкнутое покрытие (см. 2 гл. V). Зафиксируем точку $x \in X$. Ее окрестность Ox и конечное семейство $\mu \subset \lambda$ выберем так, чтобы было $Ox \subset \bigcup \{P: P \in \mu\}$. Положим $\theta = \{A: A \in \gamma$ и $Ox \cap \lambda^{-}(A) \neq \Lambda\}$ и $\theta_P = \{A: A \in \gamma$ и $P \cap \lambda^{-}(A) \neq \Lambda\}$. Тогда $\theta \subset \bigcup \{\theta_P: P \in \mu\}$. Но из $P \cap \lambda^{-}(A) \neq \Lambda$ следует, что $P \cap A \neq \Lambda$, поэтому $\theta_P \subset \{A \in \gamma: P \cap A \neq \Lambda\}$ и, следовательно, θ_P конечно. Значит, и θ конечно (ибо и конечно).

50. Так как λ локально конечно, то для любой точки $x \in X$ множество $P(x) = \bigcup \{[G]: G \in \lambda$ и $x \notin [G]\}$ замкнуто в X. Поэтому $\lambda^{-}(x) = X \setminus P(x)$ открыто. Очевидно, $P(x) \not\ni x$, следовательно, $\lambda^{-}(x) \ni x$. Положим $\xi = \{U \in \lambda: U \ni x\}$. Тогда $|\xi| \leqslant \aleph_0$ и $\bigcap \{U: U \in \xi\} = \lambda^{*}(x)$ — непустое открытое множество, содержащее x (так как семейство λ точечно конечно). Поэтому $x \in \lambda^0(x) = \lambda^{-}(x) \cap \lambda^{*}(x)$ и $\lambda^0(x)$ — открытое множество, $\lambda^0(x) \in \{O_x\}$. Этим доказано, что $\langle\lambda$ — открытое покрытие пространства X. Пусть $U \in \langle\lambda$; тогда $U = \lambda^0(x)$ для некоторого $x \in X$. Зафиксируем $V \ni x$. Тогда $U = \lambda^0(x) \subset \lambda^{1}(x) \subset V$, т. е. $U \subset V$. Мы доказали, что $\langle\lambda$ вписано в λ.

51. Положим $\lambda \cup \gamma = \alpha$. Пусть $V \in \lambda$. Зафиксируем $U \in \gamma$, для которого $[V] \subset U$. Проверим, что $\langle\mu\rangle(V) \subset U$. Пусть $G \in \langle\mu\rangle$ и $G \cap V \neq \Lambda$. Тогда $G = \mu^0(x)$ при некотором $x \in X$. Непременно $x \in [V]$ — иначе $\mu^0(x) \subset \mu^{-}(x) \subset \lambda^{-}(x) \subset \lambda \setminus [V]$, что противоречит $\mu^0(x) \cap V \neq \Lambda$. Итак, $\mu^0(x) \subset \gamma(x) \subset U$, т. е. $G \subset U$. Доказано, что $\langle\alpha\rangle(V) \subset U$. Но λ покрывает X, следовательно, $\langle\langle\mu\rangle(x): x \in X\rangle$ вписано в γ. Семейство $\langle\mu\rangle$ — открытое покрытие пространства X, так как $\lambda \subset \gamma$ — локально конечное открытое покрытие (см. 52 гл. V).

52. Перенумеруем как-нибудь элементы семейства γ натуральными числами: $\gamma = \{U_i: i \in N\}$ и положим $V_i = i(U_i)$. Положим $G_i = U_i \setminus \bigcup \{[V_j]: j < i, j \in N\}$, $\lambda = \{G_i: i \in N\}$. Очевидно, λ состоит из открытых множеств и вписано в γ. Покажем, что λ покрывает X. Пусть $x \in X$. Положим $j(x) = \min\{i \in N: U_i \ni x\}$. Тогда $x \in U_{j(x)}$ и $x \notin U_j$ при $j < j(x)$, тем более, $x \in [V_j]$ при $j < j(x)$. Значит, $x \in G_{j(x)}$ и λ — покрытие X. Покажем, что λ локально конечно в x. Так как $\bigcup \{V_j: j < N\} = X$, то можно выбрать $j(x) \in N$ так, чтобы было $V_{j(x)} \ni x$. Тогда $G_i \cap V_{j(x)} = \Lambda$ при всех $i > j(x)$ и, следовательно, $V_{j(x)}$ — окрестность точки x, пересекающаяся лишь с конечным множеством элементов λ. Итак, λ локально конечно, счетно и вписано в γ.

53. См. задачу 32 гл. V.

55. Положим $W_{k-1} = V_k \setminus F_{k-1}$, где $k \in N^+$, $F_0 = A$ и $\lambda_0 = \{A\}$. Очевидно, W_{k-1} открыто и содержит множество $F_k \setminus F_{k-1}$. Но $\bigcup \{F_k \setminus F_{k-1}: k \in N^+\} = F_1 \cup (F_2 \setminus F_1) \cup (F_3 \setminus F_2) \cup \ldots = \bigcup \{F_k: k \in N^+\} = X$ следует, что семейство $\mu = \{W_k: k \in N\}$ покрывает X. Так как $F_k \subset V_k \subset F_{k-1}$ при всех k, то $W_{k_1} \supset W_{k_2} = A$, если $|k_1 - k_2| \geqslant 2$ и μ вообще конечно (у каждого элемента и не более двух соседей). Кроме того, λ_0 — конечное открытое покрытие множества W_0. Тогда $0 = \bigcup \{\theta_k: k \in N\}$, где $\theta_k = \{W_n \cap U: U \in \lambda_k\}$, является звездно конечным открытым покрытием X (см. 54 гл. V), очевидно, вписанным в λ.

56. Положим $P_1 = A$, $P_k = \bigcup \{[U_{i,k}]: i \in N$ и $i \leqslant k\}$, $V_k = \bigcup \{U_{i,k+1}: i \in N$ и $i \leqslant k\}$. Тогда V_k открыто, F_k замкнуто, $F_k \subset V_k \subset F_{k-1}$ и $\bigcup \{P_k: k \in N\} = X$. Кроме того, $\bigcup \{U_{i,j}: j \leqslant k\} \supset P_k$. Значит, выполняются посылки утверждения задачи 55 гл. V (роль λ_k играет семейство $\{U_{i,j}: j \leqslant i\}$). Полагая $W_{k,j} = (V_k \setminus P_{k+1}) \cap U_{i,j}$, мы получаем открытое звездно конечное покрытие $\{W_{k,j}: k \in N$, $j \in N$ и $j \leqslant k\}$, вписанное в γ (см. решение 55 гл. V).

57. Так как Y нормально, то для каждого $k \in N$ можно определить последовательность $U_{k,j}$ открытых множеств так, чтобы было $P_k \subset U_{k,1} \subset [U_{k,1}] \subset U_{k,j+1} \subset V_k$ при всех $j \in N$. Положим $U_k = \bigcup \{U_{k,j}: j \in N\}$ и $\gamma = \{U_k: k \in N\}$. Тогда γ — покрытие X, вписанное в μ, причем для семейства $\{U_{k,j}: j \in N, k \in N\}$ выполнятся все посылки утверждения 56 гл. V. Поэтому существует звездно конечное открытое покрытие, вписанное в γ, а значит, и в μ.

58. Пусть λ — каков-нибудь счетно замкнутое покрытие пространства X, вписанное в γ. Перенумеруем как-нибудь его элементы: $\lambda = \{F_i: i \in N\}$. Для каждого $i \in N$ определим U_i как каков-нибудь элемент семейства γ, содержащий F_i. Тогда для семейств $\{U_i: i \in N\}$ и $\{F_i: i \in N\}$ выполняются все посылки утверждения задачи 57 гл. V. Поэтому в γ можно вписать звездно конечное открытое покрытие.

60. Зафиксируем $x \in X$ и $U \in \gamma$, $U \ni x$. Тогда множество $\lambda_U = \{V \in \gamma: V \supset U\}$ конечно, следовательно, в нем есть минимальный элемент — один из таких мы обозначим через V^*. Тогда, очевидно, $V^* \ni x$ и $V^* \in st(\gamma)$, т. е. $st(\gamma)$ — покрытие множества X.

63. Зафиксируем $x \in X$ и $U \in \gamma$, $U \ni x$. Так как γ регулярно, существует окрестность Ox точки x в X, для которой $\lambda = \{V \in \gamma: V \cap Ox \neq \Lambda$ и $V \setminus U \neq \Lambda\}$ — конечное множество. Но $V \setminus U \neq \Lambda$ для всех $V \in \lambda$, отличных от U (ибо каждый элемент V семейства γ максимален). Значит, $\{V \in \gamma: V \cap Ox \neq \Lambda\} = \lambda \cup \{U\}$ — конечное множество и γ — локально конечное семейство.

64. В самом деле, само $\lambda = st(\gamma)$ является регулярным семейством как подсемейство регулярного семейства (62 гл. V). Очевидно, каждый элемент семейства λ максимален в λ (ибо он максимален в γ и $\gamma \supset \lambda$). Но тогда λ локально конечно — см. 63 гл. V.

65. Легко видеть, что равномерная база метрова. Следовательно (60 гл. V), $st(\mathscr{B})$ является открытым покрытием пространства X. Надо доказать только, что $st(\mathscr{B})$ точечно конечно. Но если какая-нибудь точка $x \in X$ принадлежит бесконечному множеству ξ элементов $st(\mathscr{B})$, то ξ является базой пространства X в x (ибо $\xi \subset \mathscr{B}$ и $\mathscr{B}$ — равномерная база). Тогда в ξ непременно найдутся два элемента, один из которых содержится в другом, что противоречит тому, что $\xi \subset st(\mathscr{B})$ и все элементы семейства $st(\mathscr{B})$ максимальны.

66. Определим по индукции $\mathscr{B}_k$ для всех $k \in N$ так: положим $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}$, и если $\mathscr{B}_k$ уже определено, то $\mathscr{B}_{k+1} = \mathscr{B}_k \setminus st^2(\mathscr{B}_k)$, где $st^2(\mathscr{B}_k)$ — совокупность всех минимальных элементов семейства $\mathscr{B}_k$, каждый из которых содержит более одной точки. Из $\mathscr{B}_k \subset \mathscr{B}$ и равномерности $\mathscr{B}$ следует, что $st^2(\mathscr{B}_k)$ является точечно конечным семейством открытых неодноточечных множеств (65 гл. V) — отсюда легко выведем, что $\mathscr{B}_{k+1}$ является равномерной базой пространства X. Поэтому $st(\mathscr{B}_{k+1})$ — открытое точечно конечное

покрытие пространства X (см. 65 гл. V) — и, значит, все $st(\mathscr{B}_n)$, $n \in N^+$, таковы. Мы покажем, что семейство $\{st(\mathscr{B}_n): n \in N^+\}$ локально конечно. Зафиксируем $x \in X$ и выберем $U_n \in st(\mathscr{B}_n)$, $x \in U_n$ для каждого $n \in N^+$. Если существует $n \in N^+$, для которого $|U_n| = 1$, то $\{U_n: n \in N^+\}$ — база в x. Если $|U_n| \geqslant 2$ для всех $n \in N$, то из определения семейства $\mathscr{B}_n$ следует, что $U_{n'} \neq U_{n''}$ при $n' \neq n''$. Тогда $\{U_n: n \in N\}$ — бесконечное множество элементов равномерной базы $\mathscr{B}$, содержащих x, следовательно, $\{U_n: n \in N\}$ — база в X. Это означает, что $\{st(\mathscr{B}_n): n \in N^+\}$ локально конечно.

68. Пусть $\mathscr{B}$ — база X и $\mathscr{B} = \bigcup \{\gamma_i: i \in N^+\}$, где каждое γ_i дискретно. Для каждой пары $(i, j) \in N^+ \times N^+$ положим $\chi_{i,j} = \{U \in \gamma_i:$ существует $V \in \gamma_j$ такое, что $[V] \subset U\}$, $\lambda_{i,j} = \{V \in \gamma_j:$ существует $U \in \gamma_i$ такое, что $[V] \subset U\}$, $F_{i,j} = \bigcup \{[V]: V \in \lambda_{i,j}\}$, $G_{i,j} = X \setminus P_{i,j}$, $\theta_{i,j} = \chi_{i,j} \cup \{G_{i,j}\}$.

Множества $P_{i,j}$ замкнуты, множество $G_{i,j}$ открыто, $\theta_{i,j}$ локально конечно и покрывает X, причем каждая точка множества $P_{i,j}$ покрывается ровно одним элементом семейства $\theta_{i,j}$, который принадлежит $\chi_{i,j}$. Занумеруем элементы счетного семейства $\xi = \{\theta_{i,j}: (i, j) \in N^+ \times N^+\}$ как-нибудь в последовательность: $\xi = \{\mu_1, \ldots, \mu_k, \ldots\}$, и определим ν_k как произведение (см. стр. 227) от семейства $\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$. Так как все $\mu_1, \ldots, \mu_k, \ldots$ — локально конечные открытые покрытия X, то ν_k тоже является локально конечным открытым покрытием X (3, 36 гл. VI). Мы сейчас установим, что $\nu = \bigcup \{\nu_k: k \in N^+\}$ — регулярная база пространства X. Пусть точка $x \in X$ и ее окрестность Ox выбраны произвольно. Выберем $U \in \mathscr{B}$ и $V \in \mathscr{B}$ так, чтобы было $x \in V \subset [V] \subset U \subset Ox$. Зафиксируем $i^* \in N^+$ и $j^* \in N^+$ такие, что $U \in \gamma_{i^*}$ и $V \in \gamma_{j^*}$. Тогда $U \in \chi_{i^*,j^*}$, $V \in \lambda_{i^*,j^*}$ и, следовательно, $[V] \subset F_{i^*,j^*}$. Отсюда вытекает, что только один элемент семейства θ_{i^*,j^*} пересекается с $[V]$, а именно, U. Пусть $\theta_{i^*,j^*} = \mu_{k^*}$. Тогда для каждого элемента W семейства ν_k, где $k \geqslant k^*$, пересекающегося с $[V]$, элемент семейства μ_{k^*}, выбираемый при определении W, непременно должен совпадать с U. Следовательно, $W = U$, т. е. $\bigcup \{\nu_k([V]): k \in N^+$ и $k \geqslant k^*\} \subset U$. Так как ν_{k^*} — покрытие, то существует $W \in \nu_{k^*}$, для которого $x \in W$. Тогда $W \cap [V] \neq \Lambda$, и потому $x \in W \subset U \subset Ox$, т. е. ν — база. Но $\beta_{k^*} = \bigcup \{\nu_k: k \in N^+$ и $k \leqslant k^*\}$ — локально конечное семейство множеств. Следовательно, существует окрестность $O_x x$ точки x в X, для которой $|\{G \in \beta_{k^*}: G \cap O_x x \neq \Lambda\}| \leqslant \aleph_0$. Положим $O_{2x} x = V \cap O_x x$. Тогда, очевидно, $\{G \in \nu: G \cap O_{2x} x \neq \Lambda$ и $G \cap (X \setminus U) \neq \Lambda\} \subset \{G \in \beta_{k^*}: G \cap O_x x \neq \Lambda\}$ — конечное множество. Значит, ν — регулярная база.

69. Пусть P замкнуто в X и $x \in X \setminus P$. Существует окрестность Ox точки x такая, что $Ox \cap P = \Lambda$ и $\lambda = \{U \in \mathscr{B}: U \cap Ox \neq \Lambda$ и $U \cap P \neq \Lambda\}$ конечно. Для каждого $U \in \lambda$ имеем $|U| \geqslant 2$. Так как X — T_1-пространство, мы получаем, что $\mathscr{B}' = \mathscr{B} \setminus \lambda$ — база X. Тогда $\gamma = \{U \in \mathscr{B}': U \cap P \neq \Lambda\}$ покрывает P и $(\bigcup \{U: U \in \gamma\}) \cap Ox = \Lambda$, т. е. $G = \bigcup \{U: U \in \gamma\}$ и Ox — непересекающиеся окрестности множества P и точки x. Значит, X регулярно.

70. Пусть γ — открытое покрытие X. Положим $\gamma_{\mathscr{B}} = \{U \in \mathscr{B}:$ существует $G \in \gamma$, для которого $U \subset G\}$. Тогда, очевидно, $\gamma_{\mathscr{B}}$ — база пространства X и семейство $\gamma_{\mathscr{B}}$ вписано в γ. В силу 62 гл. V $\gamma_{\mathscr{B}}$ регулярно. Тогда $st(\gamma_{\mathscr{B}})$ — звездность семейства $\gamma_{\mathscr{B}}$ — является локально конечным открытым покрытием пространства (см. 64 гл. V), вписанным в γ.

71. Действительно, в X существует регулярная база (68 гл. V), а каждое пространство с регулярной базой паракомпактно (70 гл. V). Возможно также другое решение.

72. Из задачи 40 гл. V следует, что в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное покрытие. Но X регулярно, поэтому можно применить задачу 44 гл. V и заключить, что X паракомпактно.

73. Пусть $\sigma = \bigcup \{\omega_i: i \in N^+\}$ — база пространства X, где каждое ω_i локально конечно в X. Рассмотрим произвольные непересекающиеся замкнутые в X множества F_1 и F_2. Положим $\sigma_1 = \{U \in \sigma: U \cap F_1 \neq \Lambda$ и $[U] \cap F_2 = \Lambda\}$, $\sigma_2 = \{U \in \sigma: U \cap F_2 \neq \Lambda$ и $[U] \cap F_1 = \Lambda\}$, $\omega_i' = \omega_i \cap \bigcap \omega_i$, $\omega_2' = \sigma_2 \cap \omega_i$. Ясно, что $\sigma_1 = \bigcup \{\omega_i': i \in N^+\}$ и $\sigma_2 = \bigcup \{\omega_i'': i \in N^+\}$. Кроме того, $F_1 \subset \bigcup \{U: U \in \sigma_1\}$ и $F_2 \subset \bigcup \{U: U \in \sigma_2\}$. Положим $\Gamma_i' = \bigcup \{U: U \in \omega_i'\}$ и $\Gamma_i'' = \bigcup \{U: U \in \omega_i''\}$. Имеем $F_1 \subset \bigcup \{\Gamma_i': i \in N^+\}$ и $F_2 \subset \bigcup \{\Gamma_i'': i \in N^+\}$. В силу локальной конечности семейств ω_i' и ω_i'' имеем $[\Gamma_i'] = \bigcup \{[U]: U \in \omega_i'\}$, $[\Gamma_i''] = \bigcup \{[U]: U \in \omega_i''\}$ (см. 2 гл. V). Вследствие определения σ_1 и σ_2, имеем $[\Gamma_i'] \cap F_2 = \Lambda$ и $[\Gamma_i''] \cap F_1 = \Lambda$ для всех $i \in N^+$. Положим $V_1' = \Gamma_1' \setminus \bigcup \{[\Gamma_j'']: j \in N^+$ и $j \leqslant i\}$, $V_i'' = \Gamma_i'' \setminus \bigcup \{[\Gamma_j']: j \in N^+$ и $j \leqslant i\}$. Ясно, что $F_1 \subset \bigcup \{V_i': i \in N^+\}$, $F_2 \subset \bigcup \{V_i'': i \in N^+\}$ и $(\bigcup \{V_i': i \in N^+\}) \cap (\bigcup \{V_i'': i \in N^+\}) = \Lambda$.

74. Нормальность такого пространства нами уже доказана (73 гл. V). Остается показать, что всякое открытое в X множество V имеет тип F_σ. Пусть $\sigma = \bigcup \{\omega_i: i \in N^+\}$ — база в X, причем каждое ω_i локально конечно. Положим $\sigma(V) = \{U \in \sigma: [U] \subset V\}$ и $\omega_i' = \sigma(V) \cap \omega_i$. Ясно, что $\sigma(V) = \bigcup \{\omega_i': i \in N^+\}$ и $V = \bigcup \{[U]: U \in \sigma(V)\}$.

Так как ω_i' локально конечно в X, то $F_i = \bigcup \{[U]: U \in \omega_i'\}$ замкнуто в X (см. 2 гл. V). Кроме того, $F_i \subset V$ и $V = \bigcup \{F_i: i \in N^+\}$.

75. Если $\gamma_n(x) \ni y$, то $\gamma_n(y) \supset x$ и наоборот, потому $n(x, y) = n(y, x)$ и $f(x, y) = f(y, x)$ — доказано 1). Если $x \neq y$, то существует $n \in N$, для которого $\gamma_n(x) \not\ni y$ (или $\gamma_n(y) \ni x$), поэтому $n(x, y)$ определено, $n(x, y) \geqslant 1$ и $f(x, y) \neq 0$. Из 1) следует, что $d(x, y) = d(y, x)$. Пусть x, y, $z \in X$ и a, b — числа, $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, и существуют цепочка θ_1 от x до y длины, меньшей a, и цепочка θ_2 от y до z длины, меньшей b. Тогда существует цепочка θ от x до z, длина которой не превосходит $a + b$, — чтобы получить такую, достаточно продолжить цепочку θ_1 цепочкой θ_2. Следовательно, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$. Из 2) будет следовать 2') (левая часть 2') вообще тривиальна), а из 2') вытекает, что если $x \neq y$, то $d(x, y) \neq 0$. Итак, чтобы доказать 3), осталось доказать 2).

Доказательство 2) проводится по индукции относительно ранга цепочки. Если $K(\theta) = 1$, то 2) верно. Будем считать, что для цепочек ранга, не большего $i + 1$, соотношение 2) верно, и рассмотрим цепочку $\theta = (x_1, \ldots, x_{i+1})$ ранга $i + 2$. Положим $a = L(\theta)$, и пусть k — наибольшее целое число, для которого $L(x_1, \ldots, x_k) \leqslant \frac{a}{2}$. Тогда $L(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) > \frac{a}{2}$, и потому $L(x_{k+1}, \ldots, x_{i+1}) = a - L(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) < \frac{a}{2}$. По предположению индукции, $f(x_0, x_k) \leqslant 2L(x_1, \ldots, x_k) \leqslant 2 \cdot \frac{a}{2} = a$ и $f(x_{k+1}, x_{i+1}) \leqslant 2L(x_{k+1}, \ldots, x_{i+1}) < \frac{2a}{2} = a$. Кроме того, $f(x_k, x_{k+2}) \leqslant L(\theta) = a$. Положим $m = \min\left\{n \in N: \frac{1}{2^n} \leqslant a\right\}$. Тогда $f(x_0, x_k) \leqslant \frac{1}{2^m}$, $f(x_k, x_{k+2}) \leqslant \frac{1}{2^m}$ и $f(x_{k+1}, x_{i+1}) \leqslant \frac{1}{2^m}$. Значит, $\gamma_{m-1}(x_0) \ni x_k$, $\gamma_{m-1}(x_k) \ni x_{k+2}$ и $\gamma_{m-1}(x_{k+1}) \ni x_{i+1}$, т. е. можно выбрать U, V и $W \in \gamma_{m-1}$ так, чтобы было $x_1, x_0 \in U$, $x_k, x_{k-1} \in V$, $x_{k+1}, x_{i+1} \in W$. Тогда $x_0, x_{i-1} \in U \cup V \cup W \subset \subset \gamma_{m-2}(V) \subset G$ для некоторого $G \in \gamma_{m-2}$. Значит, $\gamma_{m-2}(x_0) \supset x_{i+1}$ и $n(x_0, x_{i-1}) \geqslant$

$\geqslant m - 2$, $f(x_0, x_{i+1}) \leqslant \frac{1}{2^{m-1}} \leqslant 2a$ — соотношение 2) доказано (а вместе с ним доказаны соотношения 2') и 3)).

Докажем 5): если $d(x, y) < \frac{1}{2^n}$, то $f(x, y) < \frac{1}{2^{n-1}}$ в силу 2'), и потому $\gamma_{n-1}(x) \ni y$. Докажем 4): если $y \in \gamma_n(x)$, то $n(x, y) > n$ и $f(x, y) < \frac{1}{2^n}$. Тем более (тривиальная часть 2')) $d(x, y) < \frac{1}{2^n}$.

Так как $\{\gamma_n: n \in N\}$ — измельчение, то множества $\{\gamma_n(x): n \in N\}$ образуют базу, заданной на X топологии в точке x. Поэтому из соотношений 4) и 5) сразу следует, что метрика d порождает ту же топологию на X.

76. В каждое γ_i вписан локально конечное открытое покрытие λ_i. Тогда $\lambda = \bigcup \{\lambda_i: i \in N\}$ — база пространства X, ибо $\{\gamma_i: i \in N\}$ — измельчение. Эта база σ-локально конечна. Кроме того, X — регулярное пространство (129 гл. V). Поэтому (83 гл. V) X метризуемо. Другое решение вытекает из 51, 21, 75 гл. V.

77. Пусть $\xi = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ — счетное фундаментальное множество покрытий X, элементы которого как-то перенумерованы. Определим по индукции последовательность $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ открытых покрытий X так: полагаем $\gamma_1 = \lambda_1$, и если γ_k уже определено, то принимаем за γ_{k+1} какое-нибудь открытое покрытие пространства X, сильно звездно вписанное как в λ_{k+1}, так и в γ_k (такое γ_{k-1} существует — см. 25, 24 гл. V). Тогда $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ — сильно звездно монотонная и измельчающаяся последовательность открытых покрытий T_3-пространства X — ка 75 гл. V следует, что X метризуемо. Доказательство обратного утверждения не представляет труда (см. решение задачи 28 гл. V).

78. (а) Пусть в X существует k-измельчающаяся последовательность $\xi = \{\omega_i: i \in N^+\}$ открытых покрытий. Можно предполагать, не нарушая общности, что ω_{i+1} вписано в ω_i. Для доказательства метризуемости X (в силу 77 гл. V) достаточно показать, что ξ образует фундаментальное множество покрытий пространства X. Пусть $x_0 \in X$ и окрестность Ox_0 точки x_0 произвольны. Надо доказать, что найдется меньшая окрестность O_1x_0, для которой $\omega_n(O_1x_0) = \bigcup \{U: U \in \omega_n,\ U \cap O_1x_0 \neq \Lambda\} \subset Ox_0$ при некотором n. Предположим противное. Рассмотрим окрестность $O_nx_0 = \omega_n(x_0) = \bigcup \{U: U \in \omega_n,\ x_0 \in U\}$ точки x_0. Так как ξ — измельчение (по условию, ξ — даже k-измельчение), системы окрестностей $\{O_nx_0: n \in N^+\}$ образуют базу в точке x_0. Кроме того, $O_{n+1}x_0 \subset O_nx_0$ (ибо ω_{n+1} вписано в ω_n). В силу нашего предположения имеем: $\omega_n(O_nx_0) \cap (X \setminus Ox_0) \neq \Lambda$, $n \in N^+$. Поэтому можно выбрать $x_n \in O_nx_0$ так, чтобы было $\omega_n(x_n) \cap (X \setminus Ox_0) \neq \Lambda$. Понятно, что $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Поэтому $F = \{x_0: n \in N^+$ и $x_n \in Ox_0\} \cup \{x_0\}$ — бикомпактное подпространство пространства X, а Ox_0 — его окрестность. Вследствие определения точек x_n, получаем $\omega_n(F) \cap (X \setminus Ox_0) \supset \omega_n(x_n) \cap (X \setminus Ox_0) \neq \Lambda$ для всех n. Но это противоречит k-измельчаемости последовательности ξ.

(б) Обратно, пусть X — метризуемое пространство, а ρ — метрика на X, согласованная с топологией. Рассмотрим последовательность $\xi = \{\omega_n: n \in N^+\}$ открытых покрытий пространства X такую, что для каждого $U \in \omega_n$ имеем $\operatorname{diam} U < \frac{1}{n}$. Докажем, что последовательность ξ k-измельчается. Пусть $F \subset X$ — произвольное бикомпактное подпространство, а UF — любая его окрестность. Ясно, что $\rho(F, X \setminus UF) = \rho_0 > 0$ (см. 288 гл. III). Тогда если $n \in N^+$ и $\frac{1}{n} < \rho_0$, то $\omega_n(F) \subset UF$.

79. См. 39 гл. III. Пригодны другие решения. Пусть $\mathcal{B}$ — сетевая база регулярного пространства X. Для каждой пары U, V элементов $\mathcal{B}$ такой, что $[V] \subset U$, возьмем открытое покрытие $\gamma_{U,V}$ пространства X, состоящее из двух элементов U и $X \setminus [V]$. Множество всех так определенных $\gamma_{U,V}$ есть, легко видеть, счетное фундаментальное множество покрытий пространства X. Поэтому (77 гл. V) X метризуемо.

80. Пусть X — регулярное пространство и $\mathcal{B} = \bigcup \{\lambda_n : n \in N^+\}$ — база пространства X, причем каждое λ_n — дискретное (в X) семейство множеств, т. е. у каждой точки пространства X есть окрестность, пересекающаяся не более чем с одним элементом семейства λ_n. Зафиксируем произвольно упорядоченную пару (i, j) натуральных чисел. Положим $\gamma_{i,j} = \{U \subset \lambda_i$: найдется $V \subset \lambda_j$, для которого $[V] \subset U\}$; $\chi_{i,j} = \{V \subset \lambda_j$: существует $U \in \lambda_i$, для которого $[V] \subset U\}$ и $P_{i,j} = \bigcup \{[V]$: $V \in \chi_{i,j}\}$, $G_{i,j} = X \setminus P_{i,j}$, $\gamma_{i,j} = \gamma_{i,j} \cup \{G_{i,j}\}$. Так как $\gamma_{i,j} \subset \lambda_i$ и λ_i — дискретное (следовательно, конечное — см. 2 гл. V) семейство множеств, то $P_{i,j}$ замкнуто, соответственно $G_{i,j}$ открыто в X. Ясно, что $\gamma_{i,j}$ покрывает множество $P_{i,j}$, поэтому $\gamma_{i,j}$ — открытое покрытие пространства X. Покажем, что $\xi = \{\gamma_{i,j} : \langle i, j\rangle \in N^+ \times N^+\}$ — фундаментальное множество покрытий пространства X.

Пусть точка $x \in X$ и ее окрестность Ox в X выбраны произвольно. Существует $U^* \in \mathcal{B}$, для которого $x \in U^* \subset Ox$. Зафиксируем номер i^* так, чтобы было $U^* \subset \lambda_{i^*}$. В силу регулярности X найдется такое $V^* \in \mathcal{B}$, что $x \subset [V^*] \subset U^*$. Пусть $V^* \subset \lambda_{j^*}$. Тогда $U^* \in \chi_{i^*,j^*}$, $P_{i^*,j^*} \subset [V^*] \subset U^*$, и потому $V^* \subset P_{i^*,j^*}$. Следовательно, $G_{i^*,j^*} \not\ni x$. Отсюда и из дискретности θ_{i^*,j^*} легко выводится, что никакой элемент семейства γ_{i^*,j^*}, отличный от U^*, не содержит точку x. Значит, $\gamma_{i^*,j^*}(x) = U^* \subset Ox$ и ξ фундаментально. Очевидно, ξ счетно. В силу 77 гл. V пространство X метризуемо. Возможны другие решения — найдите их. Докажите также обратное утверждение.

81. Нет — неметризуемым паракомпактом с σ-дискретной базой является пространство I^τ из задачи 209 гл. III.

82. Да, верно. Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — семейство попарно не пересекающихся открытых в X множеств. Положим $F = X \setminus \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in A\}$. Множество F замкнуто. Если $\{G_i : i \in N^+\}$ — такое (счетное) семейство открытых в X множеств, что $F = \bigcap \{[G_i] : i \in N^+\}$, то положим $V_{i,n}^\alpha = U_\alpha \cap \bigcap (X \setminus [G_i])$ и $\lambda_i = \{V_{i,n}^\alpha : \alpha \in A\}$, $i \in N^+$. Легко видеть, что каждое λ_i — уже не просто дискретное, но и дискретное семейство открытых в X множеств. При этом $\bigcup (\lambda_i : i \in N^+)$ покрывает в точности те же точки пространства X, что и семейство γ. Из этого рассуждения легко следует, что каждое совершенно нормальное пространство с σ-дискретной базой обладает σ-дискретной базой, а потому (90 гл. V) метризуемо.

83. Пусть $\{\gamma_i : i \in N^+\}$ — последовательность локально конечных семейств открытых в X множеств, причем $\mathcal{B} = \bigcup \{\gamma_i : i \in N^+\}$ — база X. Не нарушая общности, можно предполагать, что каждое γ_i — покрытие X. Положим $\lambda_k = \bigcup \{\gamma_i : i \leqslant k\}$. Тогда λ_k — локально конечное семейство множеств (25 гл. V); $\lambda_i \subset \lambda_j$ при $j \geqslant i$ и $\bigcup (\lambda_i : i \in N^+) = \mathcal{B}$. Положим $\theta_k = \theta_{\lambda_k} = \{\lambda_k(x) : x \in X\}$ и проверим, что $\xi = \{\theta_k : k \in N^+\}$ — фундаментальное множество покрытий X. В силу 50 гл. V θ_k — открытое покрытие пространства X. Зафиксируем точку $x \in X$ и ее окрестность Ox в X. Выберем номера i^* и j^* и множества $V \in \lambda_{i^*}$, $U \in \lambda_{j^*}$ так, чтобы было $j^* \geqslant i^*$ и $x \in V \subset [V] \subset U \subset Ox$ — это возможно (почему?). Докажем, что $\theta_{j^*}(V) = U \subset Ox$. Произвольный элемент семейства θ_{j^*} имеет вид $\lambda_{j^*}^k(x^*)$ при некотором $x^* \in X$. Предположим, что $\lambda_{j^*}^k(x^*) \cap V \neq \Lambda$. Тогда $x^* \in [V]$ — иначе было бы $\lambda_{j^*}^k(x^*) \subset \lambda_{j^*}(x^*) = X \setminus [V]$, так как $V \in \lambda_{j^*}$. Но $[V] \subset U$, поэтому $x^* \in U$ и $\lambda_{j^*}^k(x^*) \subset \lambda_{j^*}(x^*) \subset U$, ибо $U \in \lambda_{i^*} \subset \lambda_{j^*}$. Итак, доказано, что $\theta_{j^*}(V) \subset U \subset Ox$. Значит, ξ — фундаментальное

(счетное) семейство покрытий X и X — метризуемое пространство (77 гл. V).

84. Пусть $\tau = \tau_\omega \{\omega_i : i \in N^+\}$ — NS-база пространства X. Пространство X совершенно нормально. Не нарушая общности, можно предполагать, что каждое ω_i — локально конечное открытое покрытие пространства X. Основная идея рассуждения в решении задачи 207 гл. V: для каждого ω_i находим такое метризуемое пространство Y_i и непрерывное отображение $g_i : X \to Y_i$, что для каждого $U \in \omega_i$ множество $g_i U$ открыто в Y_i и $g_i^{-1} g_i U = U$. Рассмотрим диагональное произведение g отображений g_i, $g : X \to Y$, где $Y \subset \Pi \{Y_i : i \in N^+\}$ (и $g(X) = Y$). Пространство Y как подпространство метризуемого пространства $\Pi \{Y_i : i \in N^+\}$ метризуемо (194 гл. II). Отображение g непрерывно (290 гл. II). Кроме того, для любого $U \in \omega$ и произвольной gU открытое в $g(X)$ и $g^{-1} g U = U$. Так как τ — база пространства X и gU открыто в $g(X)$, для любого $U \in \omega$, то g — открытое отображение. Далее, если $x_1 \neq x_2$, $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, то найдутся такие $U_1 \in \omega$, $U_2 \in \omega$, что $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$, $U_1 \cap U_2 = \Lambda$. Тогда $U_1 = g^{-1} g U_1$, $U_2 = g^{-1} g U_2$, $g U_1 \cap g U_2 = \Lambda$, и следовательно, $g x_1 \neq g x_2$. Итак, g — взаимно однозначное непрерывное и открытое, т. е. топологическое отображение пространства X на метризуемое пространство $g(X)$.

85. Действительно, T_1-пространство с равномерной базой обладает счетным замыканием (68 гл. V). А полный паракомпакт с изолированными метризуем (78 гл. V).

86. Нет — первое пространство I^τ из задачи 208 гл. III.

87. (а) Пусть σ — точечно счетная база в X. Не нарушая общности, можно предполагать, что каждое подпространство $U \in \sigma$ имеет счетную базу (удалить, если надо, все U из σ без счетной базы). Тогда (14 гл. V) X представляется в виде объединения непересекающихся открыто-замкнутых подпространств, каждое из которых имеет счетную базу.

Из задачи 89 гл. V следует теперь метризуемость пространства X. Утверждение (б) следует из (а) и задачи 121 гл. III.

88. Действительно, X регулярно (39 гл. V) и паракомпактно (70 гл. V). Следовательно, X — паракомпакт. Так как регулярная база состоит специальным случаем равномерной базы, то остается сослаться на задачу 85 гл. V. Обратное утверждение доказано само.

Напишем другое решение, основанное на последовательном выделении поверхностной γ регулярной базы — см. 64 и решение задачи 66 гл. V; — с последующей ссылкой на задачу 83 гл. V.

89. В каждом U_α зафиксируем σ-локально конечную базу $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup \{\lambda_\alpha^i : i \in N\}$. Положим $\lambda^i = \bigcup \{\lambda_\alpha^i : \alpha \in A\}$. Так как γ локально конечна и каждое λ_α^i локально конечно, то λ^i локально конечно. Ясно поэтому, что $\mathcal{B} = \bigcup \{\lambda^i : i \in N\}$ — σ-локально конечная база в X. Следовательно, X метризуемо (83 гл. V).

90. См. 60 гл. V.

91. См. Архангельский [11].

92. Если X метризуемо полной метрикой, то оно является множеством типа G_δ в любом своем хаусдорфовом расширении (203 гл. II). Проведем обратное рассуждение. Пусть X — метризуемое пространство, $\tilde{X}$ — его произвольное и F — какое-нибудь бикомпактное хаусдорфово расширение пространства $\tilde{X}$. Так как X всюду плотно в $\tilde{X}$, то F является также бикомпактным хаусдорфовым расширением пространства X. Но тогда из данного нам в условии следует, что X — множество типа G_δ в F (см. 28 гл. IV). Тем более, X — множество типа G_δ в своем пополнении $\tilde{X}$. А тогда X само метризуемо полной метрикой (23А гл. II).

93. Локально Y обладает счетной базой (ибо метризуемый бикомпакт всегда имеет счетную базу). Так как X еще и слабо паракомпакт-

но, то X имеет точечно счетную базу. Поэтому (см. 87 гл. V) X метризуемо.

94. Воспользуйтесь конструкциями, связанными с решением задач 7, 8, 11 гл. V (см. также 108 гл. V).

95. См. задачу 139 гл. III.

96. Докажем сначала (a), а затем, с его помощью, более сильное утверждение (б). Пусть $A \subset X$, $\bar{A} = \{y \in X: \delta(y, A) = 0\}$. Если мы установим, что $\bar{A}$ замкнуто в X, то из 114 гл. II будет следовать, что верно (a). Предположим, что $z \in X \setminus \bar{A}$ и $d(z, \bar{A}) = 0$. Выберем точки $y_n \in \bar{A}$ для всех $n \in N^+$ так, чтобы было $d(y_n, z) < \frac{1}{n}$. Множество S, состоящее из всех выбранных y_n и точки z, является бикомпактом (так как каждая подпоследовательность последовательности $\{y_n: n \in N^+\}$ сходится к z). Так как $y_n \in \bar{A}$, то для каждого $n \in N^+$ можно так определить $x_n \in A$, чтобы было $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$.

Обозначим через P множество всех точек последовательности $\eta = \{x_n: n \in N^+\}$. Непременно $y_n \notin A$ для всех достаточно больших n — иначе было бы $z \in \bar{A}$. Поэтому можно считать, что $y_n \notin A$ для всех $n \in N^+$. Тогда $P \cap S = A \cap S$ и $\delta(P, S) \leqslant d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ при всех $n \in N^+$, т. е. $\delta(P, S) = 0$. Но тогда P не замкнуто. Значит, существует $z^* \in \bar{A}$ и подпоследовательность $\eta^* = \{x_{n_k}: k \in N^+\}$ последовательности η такие, что $\lim_{k \to \infty} d(z^*, x_{n_k}) = 0$ и, следовательно, $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = z^*$. Из $z^* \in \bar{A}$ вытекает, что $z^* \neq z$. Множество P^*, состоящее из всех точек, входящих в η^*, и точки z^*, является бикомпактом и, следовательно, замкнуто в X (так как X — хаусдорфово пространство — см. 56 гл. III). Но $P^* \cap S = A$ следует теперь, что $\delta(P^*, S) \neq 0$. Но $d(P^*, S) \leqslant d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$ для всех $k \in N^+$ и, значит, $d(P^*, S) = 0$ — получили противоречие. Этим доказано утверждение (a).

Докажем (б). Для каждого $x \in X$ положим $U_0 x = \operatorname{Int}\left\{z \in X: d(x, z) < \frac{1}{n}\right\}$ и $\gamma_0 = \{U_0 x: x \in X\}$ для всех $n \in N^+$. Из (a) и задачи 114 гл. II следует, что $U_0 x \ni x$ для всех $x \in X$. Поэтому каждое γ_n является открытым покрытием пространства X. Покажем, что семейство $\{\gamma_n: n \in N^+\}$ покрытий будет δ-аппелирующимся. Затем метризуемость X следует из задачи 72 гл. V.

Пусть F — любой бикомпакт, лежащий в X, а V — произвольное открытое в X множество, его содержащее. Предположим, что удалось для каждого $n \in N^+$ выбрать $U_n x_n \in \gamma_n$ так, чтобы было $U_n x_n \cap F \neq \Lambda$ и $U_n x_n \cap (X \setminus V) \neq \Lambda$. Зафиксируем произвольно $z_n \in U_n x_n \cap (X \setminus V)$ и $y_n \in U_n x_n \cap F$. Так как F — метризуемый бикомпакт (см. 95 гл. V), то можно выделить сходящуюся в F подпоследовательность $\{z_{n_k}: k \in N^+\}$. Но $d(z_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k} < \frac{1}{k}$, $k \in N^+$. Рассуждая, как в выше (при доказательстве (a)), заключаем, что $\lim_{k \to \infty} z_{n_k} = \lim_{k \to \infty} y_{n_k} \in F$. Повторив этот прием снова, из $d(z_{n_k}, z_{n_j}) < \frac{1}{n_j}$ выведем, что $\lim_{k \to \infty} z_{n_k} = \lim_{k \to \infty} x_{n_k} \in F$. Но $z_{n_k} \in X \setminus V$, и так как $X \setminus V$ замкнуто, то $\lim_{k \to \infty} z_{n_k} \in X \setminus V$. Итак, $(X \setminus V) \cap F \neq \Lambda$ — получилось противоречие.

97. Пусть ρ — метрика, совместная с топологией Λ. Так как X — не компакт, то существует бесконечное счетное множество $A = \{a_i: i \in N^+\}$ без предельных точек в X. Рассмотрим систему открытых в X множеств $\gamma = \{O_i^j: i \leqslant N^+, j \leqslant N^+\}$, обладающую следующими свойствами:

(1) $\qquad a_i \in O_i^j, \quad j \in N^+, \quad i \in N^+;$

(2) $\qquad O_i^{j+1} \subset O_i^j$, если $i \neq i'$ для любого $j \in N^+$;

(3) $\qquad \operatorname{diam} O_i^j < \frac{1}{j}, \qquad i \in N^+;$

(4) $\qquad [O_i^{j+1}] \subset O_i^j$.

Ясно, что такая система существует. Заметим также, что система $\gamma_j = \{O_i^j: i \leqslant N^+\}$ замкнута в X.

Определим открытые в X множества $U_k = \bigcup \{O_i^k: i \geqslant k\}$. Ясно, что будем иметь $\bigcap \{U_k: k \in N^+\} = \Lambda$ и $[U_{k+1}] \subset U_k$, $k \in N^+$. Рассмотрим пространство $\tilde{X} = X \cup \{\xi\}$, получающееся из X присоединением точки ξ, база в которой задается множествами $\{\xi\} \cup U_k = V_k$. Понятно, что $\tilde{X}$ с такой топологией представляет собой T_1-пространство. Доказываем регулярность пространства $\tilde{X}$. Пусть $x \in \tilde{X}$ и ее окрестность Ox произвольны. Если $x = \xi$, то можно считать, что $Ox = V_k$. Тогда $[V_{k+1}]_{\tilde{X}} = V_k$, ибо $[U_{k+1}] \subset U_k$. Если $x \neq \xi$, то возьмем такое k_0, что $x \notin U_{k_0}$. Определим $O'x = X \setminus [U_{k_0+1}]_X$. Ясно, что $x \in O'x$, $O'x \cap V_{k_0} = \Lambda$, $\xi \in V_{k_0}$. Возьмем окрестность $O_1 x$, для которой $[O_1 x]_{\tilde{X}} \subset O'x$. Тогда $[O_1 x]_{\tilde{X}} = [O_1 x]_X \subset O'x \subset Ox$. Итак, $\tilde{X}$ регулярно. Докажем, что в $\tilde{X}$ существует σ-точечно конечная база.

Рассмотрим в точечно конечную базу пространства X: $\pi = \bigcup \{\pi_n: n \in N^+\} = \{G_{ni}: i \in Y_n, n \in N^+\}$, где $\pi_n = \{G_{ni}: i \in Y_n\}$ локально конечно в X. Не нарушая общности, можно считать, что каждое O_i^j пересекает лишь конечное число элементов системы α_j. Тогда множество U_1 пересекает не более счетного числа элементов из π. Пусть U_1 имеет непустое пересечение только с элементами $G_{i_1 1}, G_{i_2 1}, \ldots, G_{i_n 1}, \ldots$.

Рассмотрим систему $\theta_s^i = \{G_{ti}^i: t \in T_s, s = 0, 1, 2, \ldots\}$, где $\theta_s^i = \{G_{ti}^i: t \in T_s\}$ при $s > 0$ состоит только из одного элемента $G_{j_s i}$, а при $s = 0$ состоит из всех элементов $G_{jt} \subset \alpha_j$, не пересекающихся с U_1. Система $\theta = \bigcup \{\theta_s^i: j \in N^+\}$, конечно, образует σ-локально конечную базу в X, а система $\theta' = \theta \cup \tilde{\xi}$, где $\tilde{\xi} = \{V_k: k \in N^+\}$, — σ-локально конечную базу в $\tilde{X}$ (здесь $V_k = \{\xi\} \cup U_k$, $k \in N^+$).

98. (а) Если метризуемое пространство X бикомпактно, то всякая метрика ρ на X, совместная с его топологией, полна (см. 258 гл. III).

(б) Обратно, если метризуемое пространство X небикомпактно, то существует (см. 91 гл. V) метризуемое расширение (вообще говоря, небикомпактное) $\tilde{X}$, отличное от X. Рассмотрим метрику $\tilde{\rho}$ на $\tilde{X}$, совместную с его топологией. Тогда $\tilde{\rho}$ индуцирует на X такую метрику $\rho = \tilde{\rho} \mid X$, что (X, ρ) — неполное метрическое пространство, хотя ρ порождает на X ту же топологию. Получили противоречие.

99. См. Хаусдорф [2].

100. Пусть $\mathcal{P}_0 = N$, где N — натуральный ряд, $\mathcal{P}_1 = \mathfrak{P}^0$, где $\mathfrak{P}^0$ — некоторое семейство подмножеств множества N такое, что (а) если $A \subset \mathfrak{P}^0$, $B \subset \mathfrak{P}^0$ и $A \neq B$, то $A \cap B$ — конечное множество; (б) $|A| = \aleph_0$ для всех $A \subset \mathfrak{P}^0$; (в) $|\mathfrak{P}^0| = 2^{\aleph_0}$ и (г) если $C \subset N$ и $|C| = \aleph_0$, то $A \cap C$

бесконечно для некоторого $A \in \mathscr{U}^*$. Такое $\mathscr{U}^*$ существует в силу 50 гл. IV и 118 гл. I. Определим теперь на множестве $\mathscr{S} = \mathscr{S}_0 \cup \mathscr{S}_1$ топологию следующим образом. Все точки множества $\mathscr{S}_0$ изолированные в $\mathscr{S}$. Если $\xi \in \mathscr{S}_1$, то базу точки ξ в $\mathscr{S}$ составляют множества вида $O_\xi(\xi) = \{\xi\} \cup (\xi \setminus K)$, где K — некоторое конечное подмножество множества N.

Из (а) следует, что $\mathscr{S}$ — хаусдорфово пространство. Условие 1), очевидно, выполнено. Выполняется и требование 2) в силу (г) и определения топологии в точках множества $\mathscr{S}_1$. Пространство $\mathscr{S}$ регулярно, ибо множества $O_\xi(\xi)$ не только открыты, но и (очевидно) замкнуты.

101. (а) Если $x \in \mathscr{S}_0$, то $\{x\}$ — бикомпактная окрестность точки x в силу 1) задачи 100 гл. V. Если $x \in \mathscr{S}_1$, то из условия 1) задачи 100 гл. V следует, что существует окрестность Ox точки x в $\mathscr{S}$ такая, что $Ox \cap \mathscr{S}_1 = \{x\}$. Но $\mathscr{S}$ — регулярное пространство, следовательно, можно найти окрестность O_1x точки x в $\mathscr{S}$, для которой $[O_1x] \subset Ox$. Тогда $[O_1x]$ — бикомпакт. Действительно, если $C \subset [O_1x]$ и $|C| = \aleph_0$, то $C = C \setminus \{x\} \subset \mathscr{S}_0$ и $|C| = \aleph_0$. В силу 2) задачи 100 гл. V некоторая точка $x' \in \mathscr{S}$ является предельной для C. Но из условия 1) задачи 100 гл. V следует, что $x' \in \mathscr{S}_1$, а потому $x' \in [O_1x]$ и $x' = x$ в силу определения окрестностей Ox и O_1x. Значит, $[O_1x] = O_1x$ — бикомпакт и утверждение (а) доказано.

(б) Локально бикомпактное хаусдорфово пространство всегда вполне регулярно (см. 177 гл. III).

(в) Множество $O_1(x)$ (см. (а)) счетно (ибо $O_1x \setminus \{x\} \subset \mathscr{S}_0$ и $|\mathscr{S}_0| = \aleph_0$). Но счетный бикомпакт метризуем (105, 29 гл. III). Значит, $\mathscr{S}$ локально метризуемо.

(г) Пусть f — произвольная непрерывная вещественная функция на $\mathscr{S}$, $f\colon \mathscr{S} \to R$. Тогда $f\mathscr{S} = f\mathscr{S}_0 \subset [\mathscr{S}_0]_R$ в силу непрерывности f (см. 281 гл. II). Итак, достаточно доказать, что функция f ограничена на $\mathscr{S}_1$. Но если бы это было не так, то нашлась бы последовательность $\{x_n\colon n \in N^+\}$ попарно различных элементов множества $\mathscr{S}_1$ такая, что $\lim |f(x_n)| = \infty$. Но $C = \{x_n\colon n \in N^+\} \subset \mathscr{S}_1$ и $|C| = \aleph_1$. Поэтому некоторая точка $x^* \in \mathscr{S}$ является предельной для C (см. 1) задачи 100 гл. V). Мы видим, что функция f в точке x^* не непрерывна — получилось противоречие. Утверждение (г) доказано. Из $|\mathscr{S}_0| = \mathscr{S}$ и $|\mathscr{S}_1| = \aleph_1$ следует (д).

(е), (ж). (з) Если бы $\mathscr{S}$ было метризуемо, то, так как $\mathscr{S}$ сепарабельно, $\mathscr{S}$ обладало бы счетной базой, а тогда любое подпространство пространства $\mathscr{S}$ было бы сепарабельно, и тем более и $\mathscr{S}_1$ — а это противоречит тому, что $\mathscr{S}_1$ дискретно и $|\mathscr{S}_1| = 2^{\aleph_0}$. Множество $\mathscr{S}_1$ — несчетное множество, у которого все в $\mathscr{S}$ предельные точки. Значит, $\mathscr{S}$ не счетно компактно (189 гл. III) и не финально компактно (200 гл. III). Заметим также, что из открытого несчетного покрытия $\gamma = \{Ox\colon x \in \mathscr{S}\}$ пространства $\mathscr{S}$, где $Ox = \{x\}$, если $x \in \mathscr{S}_0$, и $Ox \cap \mathscr{S}_1 = \{x\}$, если $x \in \mathscr{S}_1$, нельзя выделить никакого отличного от него покрытия пространства $\mathscr{S}$ (т. е. γ минимально).

(и) Если бы $\mathscr{S}$ было нормально, то, будучи псевдокомпактным, оно было бы и счетно компактно (см. 192 гл. III), что противоречит (ж). Значит, $\mathscr{S}$ не нормально.

(к) Всякое точечно конечное открытое покрытие сепарабельного пространства легко видеть, счетно. Следовательно, если бы $\mathscr{S}$ было слабо паракомпактно, то оно было бы и финально компактно, что противоречит (з).

(л), (м) Нафиксируем для каждого $x \in \mathscr{S}$ бикомпактную окрестность Ox так, чтобы было $Ox \cap \mathscr{S}_1 = \{x\}$, если $x \in \mathscr{S}_1$, и $Ox = \{x\}$, если $x \in \mathscr{S}_2$, — это возможно, см. доказательство (а). Положим $\lambda = \{Ox\colon x \in \mathscr{S}\}$ и $\lambda_K = \{(Ox \setminus K) \cup \{x\}\colon x \in \mathscr{S}\}$ для произвольного конечного множества $K \subset \mathscr{S}_0$. Каждое λ_K очевидно, счетное, открытое покрытие пространства $\mathscr{S}$. Если $x_0 \in \mathscr{S}_2$ и $K \ni x_0$, то $\lambda_K(x_0)$ — звезда точки x_0 относительно λ_K — совпадает с $\{x_0\}$. Если $x_0 \in \mathscr{S}_1$, то $\lambda_K(x_0)$ есть $Ox_0 \setminus K$.

Рассмотрим теперь произвольную окрестность Ox_1 точки x_1 в $\mathscr{S}$ и покажем, что можно выбрать конечное множество $K_1 \subset \mathscr{S}_1$ так, чтобы было

$Ox_1 \setminus K_1 \subset Ox_1$. Допустим, иначе говоря, что $|Ox_1 \setminus Ux_1| \geq \aleph_1$. Положим $C = Ox_1 \setminus Ux_1$. Так как x_1 — единственная неизолированная точка Ox и Ux_1 — окрестность точки x_1, то множество C не имеет предельных точек в Ox_1 и, следовательно, C конечно. Этим доказано, что $\{\lambda_K\colon K \subset \mathscr{S}_0$ и $|K| < \aleph_1\}$ — чебышевская (очевидно, счетная) последовательность $\mathscr{S}$. В $\mathscr{S}$ нет конечной счетной базы, ибо иначе, так как $\mathscr{S}$ сепарабельно, в $\mathscr{S}$ была бы счетная база, что противоречит (с) и (и). Для доказательства (м) рассмотрим естественное отображение π пространства $\mathscr{S}$ на пространство Z его разбиения, единственным неодноточечным элементом которого является множество $\mathscr{S}_1$. Это отображение замкнутое (311, 322 гл. II). Имеем $|Z| = \aleph_0$. Мы установим, что Z — бикомпакт, единственной неизолированной точкой которого является точка $z_1 = \pi(\mathscr{S}_1)$. Если $z \in Z \setminus \{z_1\}$, то $\pi^{-1}(z) \subset \mathscr{S}_0$, и потому $\pi^{-1}(z)$ открыто в $\mathscr{S}$ (см. 1) задачи 100 гл. V). Значит, множество $\{z\}$ открыто в пространстве Z, т. е. точка z изолирована в Z. Далее, если $A \subset Z \setminus \{z_1\}$ и $|A| = \aleph_0$, то $C = \pi^{-1}(A) \subset \mathscr{S}_0$ и $|C| = \aleph_0$ и, в силу 2) задачи 100 гл. V, $[C] \cap \mathscr{S}_1 \neq \Lambda$. Тогда, ввиду непрерывности отображения π, будем иметь $z_1 = \pi(\mathscr{S}_1) \in [\pi(C)] = [A]$. Итак, точка z_1 является предельной для любого бесконечного подмножества A пространства Z. Следовательно, Z — бикомпакт (пространство Z хаусдорфово, как T_1-пространство с вписанной нормальной гаммой — см. 15 гл. II). Утверждение (м) доказано. Так как каждое псевдокомпактное Q пространство бикомпактно (80 гл. IV), $\mathscr{S}$ не является Q-пространством.

102. Пусть A — замкнутое в X множество и $\xi = \{\gamma_n\colon n \in N^+\}$ — измельчение. Тогда $P = \bigcap \{\gamma_n(A)\colon n \in N^+\} \setminus A = \Lambda$ — в противном случае условие измельчения нарушалось бы в любой точке множества P.

103. Пусть $\pi = \{\gamma_i\colon i \in N^+\}$ — T_1-фильтрация на X. Положим $F_i = X \setminus \bigcup \{U\colon U \in \gamma_i\}$. Множество F_1 замкнуто, поэтому существуют открытые в X множества $G_{1,n}$, где $n \in N^+$, такие, что $\bigcap \{G_{1,n}\colon n \in N^+\} = F_1$, при всех $n \in N^+$. Положим $\lambda_{1,1} = \gamma_1 \cup \{G_{1,n}\}$. Тогда, как легко проверить, $\{\lambda_{i,j}\colon i, j \in N^+\}$ — счетное T_1-измельчение на X.

105. Пусть $\xi = \{\gamma_i\colon i \in N^+\}$ — T_1-измельчение в X. Положим $G_i = \bigcup \{U \times U\colon U \in \gamma_i\}$ и покажем, что $\bigcap \{G_i\colon i \in N^+\} = \Delta$. Так как γ_1 покрывает X, то для каждого $x \in X$ существует $U \in \gamma_1$ такое, что $x \in U$. Тогда $(x, x) \in U \times U \subset G_i$ и, значит, $\Delta \subset G$ при всех $i \in N^+$. Рассмотрим любой элемент (x, y) множества $(X \times X) \setminus \Delta$. Тогда $x \neq y$, и так как ξ — T_1-измельчение, то существует $i \in N^+$, для которого $\gamma_i(x) \not\ni y$. Тогда из $U \in \gamma_i$ и $U \ni x$ следует, что $U \times U \not\ni (x, y)$. Очевидно, если $U \in \gamma_i$ и $U \not\ni x$, то тогда $U \times U \not\ni (x, y)$. Итак, $(x, y) \notin U \times U$ для всех $U \in \gamma_i$, т. е. $(x, y) \notin G_i$. Значит, $\bigcap \{G_i\colon i \in N^+\} = \Delta$. Достаточность доказана сама.

107. Пусть $\pi = \{\gamma_i\colon i \in N^+\}$ — T_1-измельчение в X. Выберем в каждом γ_i счетное покрытие λ_i пространства X. Тогда $\{\lambda_i\colon i \in N^+\}$ — T_1-измельчение. Следовательно (см. 106 гл. V), $\mathscr{B} = \bigcup \{\lambda_i\colon i \in N^+\}$ — псевдобаза пространства X, очевидно, счетная.

108. Для каждого $n \in N^+$ и каждого $x \in X$ положим $n(x) = X$, если γ_n не покрывает x. В противном случае положим $n(x) = U$, где U — какой-нибудь (в аксиоматике — фиксированный) элемент семейства γ_n, содержащий точку x. Далее, пусть $O_nx = \bigcap \{n(x)\colon n \in N^+,\ n \leq k\}$ для всех $k \in N^+$ и $x \in X$. Очевидно, каждое O_nx открыто и содержит x. Скажем, что точка $x \in A$ является n-центром множества $A \subset X$, если $O_nx \supset A$. Если у множества A есть хотя бы один n-центр, то будем называть A n-малым. Пусть F — замкнутое множество в бикомпакте X; тогда для каждого конечного покрытия γ множества F открытыми в X множествами существует при любом $n \in N^+$ конечное семейство N n-малых открытых в X множеств, у каждого из которых есть n-центр в F, и покрывающее F. Применим это утверждение на каждом этапе, но сначала будем строить

но индуцирует последовательность $\xi = \{\gamma_\beta : \beta < \lambda^+\}$ конечных семейств открытых в X множеств такую, что

(1) $F \subset \bigcup \{V : V \in \gamma_\beta\}$;

(2) каждый элемент V семейства γ_β κ-мал, имеет κ-центр в F и пересекает F;

(3) каждый элемент семейства $\gamma_{\beta+1}$ с записанным содержится в некотором нижнего семейства γ_α для всех $\alpha \in \lambda^+$.

Положим $G_\beta = \bigcup \{V : V \in \gamma_\beta\}$. Тогда G_β открыто в X и $G_\beta \supset F$ в силу (1). Покажем, что $\bigcap \{G_\beta : \beta \in \lambda^+\} = F$. Предположим противное. Пусть $z \in \bigcap \{G_\beta : \beta \in \lambda^+\} \setminus F$. Положим $\lambda_\beta = \{V \in \gamma_\beta : V \ni z\}$. Тогда $\lambda_\beta \neq \Lambda$, и для семейств $\eta = \{\lambda_\beta : \beta < \lambda^+\}$, аналогичных описанным выше условиям (2) и (3), а также следующее условие:

(1') каждый элемент каждого $\lambda_\beta \in \eta$ содержит точку z.

Через x_β обозначим какой-нибудь κ-центр множества V_β, лежащий в F (см. (2)). Последовательность $\{x_\beta : \beta < \lambda^+\}$ имеет предельную точку в F, пусть таковая точка $x^* \in F$. Так как $x_\beta \in V_\beta \subset V_\alpha$ при всех $\beta > \alpha$, то $x^* \in [V_{\alpha+1}] \subset V_\alpha$ при всех $\alpha \in \lambda^+$, т. е. $x^* \in \bigcap \{V_\alpha : \alpha \in \lambda^+\}$. Из $x^* \in F \subset X \setminus \{z\}$, так как ζ — T_3-фактор-топология, следует, что найдется такое $\alpha^* < \lambda^+$, для которого (α): γ_{α^*} покрывает x^* и (β): каждый элемент семейства γ_{α^*} не содержит точек x^* и z одновременно. Короче (α): $\gamma_{\alpha^*}(x^*) \neq \Lambda$ и (β): $\gamma_{\alpha^*}(z^*) \not\ni z$. В силу (α) $\gamma_{\alpha^*}(x^*)$ — окрестность точки x^*. Найдется поэтому номер $\beta^* < \lambda^+$, для которого $\beta^* > \alpha^*$ и $x_{\beta^*} \in \gamma_{\alpha^*}(x^*)$. Так как $x_{\beta^*} = z^*$ центр множества V_{β^*}, то имеем $x_{\beta^*} \in V_{\beta^*} = O_{\beta^*}(x_{\beta^*}) = \bigcap \{\eta(x_{\beta^*}) : \eta \in N^+ \text{ и } \eta \leqslant \beta^*\}$. Отсюда и из $\beta^* \geqslant \alpha^*$ следует, что $V_{\beta^*} \subset \alpha^*(x_{\beta^*})$. Но по выбору β^* вспомним $\gamma_{\alpha^*}(x^*) \ni x_{\beta^*}$ т. е. γ_{α^*} покрывает x_{β^*}. Поэтому, в силу определения $\alpha(\alpha)$, будем иметь $\alpha^*(x_{\beta^*}) \subset \gamma_{\alpha^*}$. Из $V_{\beta^*} \subset \alpha^*(x_{\beta^*})$ следует, что $z \in \alpha^*(x_{\beta^*})$ и $x^* \in \alpha^*(x_{\beta^*})$ — мы пришли к противоречию с условием (β).

109. В силу 108 тл. V каждое замкнутое в X множество имеет тип G_δ. Поэтому X обладает счетным T_3-замкнителем (103 тл. V). Значит, X имеет счетную псевдобазу (107 тл. V). Но тогда X имеет и счетную базу (122 тл. III).

110. Нет. Примером может служить пространство $\mathcal{P}$ из задач 100 и 101 тл. V.

111. Это есть теорема Дженнеса [1]. Позднее Шапиро-вский [1] доказал более сильное утверждение (заменив сепарабельность на свойство Суслина). Впрочем, см. решение задачи 121 тл. I].

112. Пусть γ — произвольное открытое покрытие пространства X. Для каждого $\lambda \in \xi$ положим $X_\lambda = \{x \in X$: существует $G \in \gamma_\lambda$, для которого $\lambda(x) \subset G\}$. Так как γ покрывает X, а ξ вполне упорядочено, то $\bigcup \{X_\lambda : \lambda \in \xi\} = X$. Достаточно установить, что из покрытия $\eta_\lambda = \{O_\lambda(x) : x \in X_\lambda\}$ множества X_λ можно выделить счетное покрытие этого множества (тогда и из γ сразу выделяется счетное семейство, покрывающее X_λ, ибо η_λ вписано в γ).

Множество $A = X_\lambda$ назовем λ-дискретным, если никакой элемент покрытия λ не содержит более одной точки множества A. По принципу Цермело — Цорна следует, что в X_λ существует максимальное λ-дискретное множество A_λ. Максимальность A_λ означает, что $\bigcup \{\lambda(x) : x \in A_\lambda\} \supset X_\lambda$. Но $|A_\lambda| \leqslant \aleph_0$. Действительно, иначе нашлась бы в X предельная точка x^* для множества A_λ. Выберем $U^* \in \lambda$, $U^* \ni x^*$. Имеем $|A_\lambda \cap U^*| \geqslant \aleph_0 \geqslant 1$, что противоречит λ-дискретности множества A_λ. Итак, из η_λ мы извлекли счетное покрытие $\{\lambda(x) : x \in A_\lambda\}$ множества X_λ.

113. В силу 112 тл. V X финально компактно, поэтому метризуемо (76 тл. V) и имеет счетную базу (213 тл. II).

114. Каждое нульмерное множество $A \subset X$ имеет в X открыто-замкнутую точку (111 тл. VI). Поэтому X метризуемо и обладает счетной базой (113 тл. VI).

115. См. Хит [1] и Блит [2].

116. См. Хит [1].

117. Выберем в X κ-дискретную базу $\mathcal{B}$: $\mathcal{B} = \bigcup \{\gamma_\xi : \xi \in N^+\}$, где каждое γ_ξ — дискретное в X семейство открытых множеств. Положим $G_\xi = \bigcup \{V : V \in \gamma_\xi\}$ и $F_\xi = X \setminus G_\xi$. Множество F_ξ замкнуто в X и потому имеет тип G_δ в X. Существует, следовательно, непрерывная вещественная функция f_ξ на X такая, что $f_\xi^{-1}(0) = F_\xi$ и $f(X) \subset [0, 1]$. Зафиксируем какое-нибудь взаимно однозначное отображение φ_ξ множества γ_ξ в множество A, фигурирующее в задаче 251 тл. II (далее мы используем еще некоторые обозначения из формулировки задачи 251 тл. II; — это возможно, так как γ_ξ не превосходит веса X, равного τ). Определим отображение ψ_ξ: $X \to Kw(\tau)$ так: если $x \in F_\xi$, то $\psi_\xi(x) = 0$; если $x \in G_\xi \setminus \gamma_\xi$, то $\psi_\xi(x) = \{f_\xi(x), \varphi_\xi(U)\} \subset [0, 1] \times A$ — последнее правило корректно, ибо из $x \in U \in \gamma_\xi$ следует, что $f_\xi(x) \in (0, 1]$. Семейство $\mathcal{F}$ отображений ψ_ξ, где $\xi \in N^+$, счетно-множество — докажем это. Пусть произвольным образом выбраны замкнутое в X множество Q и точка $x \in X \setminus Q$. Надо найти $\xi \in N^+$, для которого $\psi_\xi(x) \notin [\psi_\xi(Q)]_{Kw(\tau)}$. Так как $\mathcal{B}$ — база пространства X, то существует $U^* \in N^+$ и $U^* \in \gamma_{\xi^*}$ такие, что $x \in U^* \subset X \setminus Q$. Тогда $\psi_{\xi^*}(x) \in [0, 1] \times \varphi_{\xi^*}(U^*) \subset Kw(\tau)$ и $\psi_{\xi^*}(Q) \cap ([0, 1] \times \varphi_{\xi^*}(U^*)) = \Lambda$. Значит, что множество $[0, 1] \times \varphi_{\xi^*}(U^*)$ открыто в $Kw(\tau)$. Следовательно, $[\psi_{\xi^*}(Q)]_{Kw(\tau)} \not\ni \psi_{\xi^*}(x)$ и $\mathcal{F}$ — разделяющее семейство. Поэтому (см. 37 тл. III) диагональное произведение отображений ψ_ξ является гомеоморфизмом пространства X в $(Kw(\tau))^{\aleph_0}$.

118. Так как $|Kw(\tau)| = \tau \cdot 2^{\aleph_0}$, то $|Kw(\tau)^{\aleph_0}| = (\tau \cdot 2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \tau^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \tau^{\aleph_0}$ (ибо $\tau \geqslant \aleph_0 \geqslant 2$).

119. Надо воспользоваться задачей 8Е тл. IV.

120. Пусть X — любое ненульмерное нульмерное регулярное топологическое пространство, не превосходящее $2^{\aleph_0}$, в котором из любых двух замкнутых непересекающихся множеств одно непременно является бикомпактом (таково, например, пространство $T(\omega)$; см. 13Б тл. III). Можно считать, что X является подпространством тихоновского произведения I^τ континуума отрезков (см. 36, 37 тл. III).

Зафиксируем счетное множество S, всюду плотное в I^τ (такое множество S существует в силу 38Г тл. II). Рассмотрим результат удвоения пространства I^τ в смысле П. С. Александрова: $A(I^\tau) = I^\tau \cup d(I^\tau)$, где I^τ несет по отношению к себе обычную топологию, а $d(I^\tau)$ (рассматриваемое как множество) — экземпляр множества I^τ, дискретно вложенный в $A(I^\tau)$ (см. 8Г тл. III). Через $d(S)$ обозначим экземпляр множества S, лежащий в $d(I^\tau)$. По определению топологии в $A(I^\tau)$ и всюду плотности S в I^τ следует, что $d(S)$ всюду плотно в $A(I^\tau)$. Положим $Y = d(S) \cup X$. В топологии, индуцированной на $A(I^\tau)$, Y является нормальным сепарабельным, но ненульмерным пространством. Множество $d(S)$, счетно и всюду плотно в Y, значит, Y сепарабельно. Точки множества $d(S)$ изолированы в $A(I^\tau)$, тем более они изолированы в Y. Следовательно (так как $X = Y \setminus d(S)$), X замкнуто в Y. Значит, Y не нульмерно (иначе и X было бы нульмерным пространством, а это, по предположению, не так). Докажем, что Y нормально. Пусть P и Q замкнуты в Y и $P \cap Q = \Lambda$. Множества $P' = P \cap X$ и $Q' = Q \cap X$ замкнуты в X и не пересекаются. Поэтому одно из них — бикомпакт. Предположим, для определенности, что P' — бикомпакт. Пространство Y, как подпространство бикомпакта $A(I^\tau)$ ($A(I^\tau)$ является бикомпактом в силу 51 тл. III), спектрально, а во всяком регулярном пространстве бикомпакт и не пересекающееся с ним замкнутое множество могут быть отделены непрерывными вещественными функциями. Поэтому существуют открытые в Y множества U и V, для которых $U \supset P'$, $V \supset Q \cap U \cap V = \Lambda$. Положим $W = V \cap (X \setminus P)$ и $\mathcal{O} = U \cup P =$

$= U_{\alpha_1} \cup (P \setminus U)$. Так как $P \setminus U \subset A(S)$, то множество $P \setminus U$ открыто в Y. Итак, $W \supset Q$, $G \supset P$, $W \cap G = \Lambda$ и W, G — открытые в Y множества. Следовательно, Y нормально.

129. Зафиксируем для каждого $A \in \mathscr{A}$ покрытие U_A такое, что $|U_A| \cap B = A$, $A \subset U_A$; и рассмотрим семейство $\gamma = \{U_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \{X \setminus P\}$ — последнее, очевидно, является открытым покрытием пространства X. Вписан в γ локально конечное открытое покрытие λ — ведь X паракомпактно, поэтому это возможно. Пусть $V \in \lambda$ и $V \cap P \neq \Lambda$. Тогда V содержится в некотором элементе G покрытия γ. Очевидно, $G \neq X \setminus P$. Следовательно, $G = U_{A^*}$ для некоторого $A^* \in \mathscr{A}$. Но тогда $[V] \subset [G] = |U_{A^*}| \subset X \setminus B$. Положим $U = \bigcup \{V : V \in \lambda \text{ и } V \cap P \neq \Lambda\}$. Тогда $U \supset P$ (ибо λ — покрытие) и U — открытое множество. Так как λ локально конечна, то $[U] = \bigcup \{[V] : V \in \lambda \text{ и } V \cap P \neq \Lambda\}$ (см. 2 гл. V), и на основании предшествующего замечания мы заключаем, что $[U] \subset X \setminus B$.

129. Пусть A — замкнутое в X множество, $x \in X \setminus A$. Зафиксируем у каждой точки $y \in A$ окрестность Oy, замыкание которой не содержит точки x. В открытое покрытие $\gamma = \{Oy : y \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ впишем локально конечное открытое покрытие λ и положим $\lambda^* = \{U \in \lambda : U \cap A \neq \Lambda\}$. Тогда $[U] \ni x$ для каждого $U \in \lambda^*$ (ведь U содержится в некотором элементе γ, отличном от $X \setminus A$, — значит, в некотором Oy). Так как λ локально конечна, то $[\bigcup \{U : U \in \lambda^*\}] = \bigcup \{[U] : U \in \lambda^*\} \subset X \setminus \{x\}$, т. е. $W = \bigcup \{U : U \in \lambda^*\}$ — окрестность множества A, замыкание которой не содержит точки x.

130. Это вытекает из утверждений задач 128 и 129 гл. V.

131. Надо воспользоваться задачей 44 гл. V.

132. См. задачу 72 гл. V.

133. Это сразу следует из задачи 38 гл. V.

134. Так как X — паракомпакт, то можно считать, что γ — локально конечное открытое покрытие: $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$. Существует (см. 18, 13 гл. V) локально конечное покрытие $\lambda = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ пространства X замкнутыми множествами, комбинаторно вписанное в γ, т. е. такие, что $F_\alpha \subset U_\alpha$ при всех $\alpha \in A$. Пространство X нормально (120 гл. V). В соответствии с этим для каждого $\alpha \in A$ существует вполне положительная непрерывная вещественная функция f_α на X такая, что $f_\alpha(F_\alpha) = \{1\}$ и $f_\alpha(X \setminus U_\alpha) = \{0\}$. Семейство $\mathscr{F} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ удовлетворяет, очевидно, условиям 1), 2) и следующему условию 3') (более слабому, чем условие 3)): $\varphi(x) = \sum \{f_\alpha(x) : \alpha \in A \text{ и } f_\alpha(x) \neq 0\} > 0$ для всех $x \in X$. Из 1) и 2) легко следует, что функция $\varphi(x)$ непрерывна на X (действительно, во всех точках окрестности Ox, фигурирующей в условии 2), $\varphi(x) = \sum \{f_\alpha(x) : \alpha \in A'\}$, где $A' = \{\alpha \in A : f_\alpha(Ox) \neq \{0\}\}$ — конечное множество). Тогда и функция ψ_α, определенная формулой: $\psi_\alpha(x) = \dfrac{f_\alpha(x)}{\varphi(x)}$ для всех $x \in X$ (заметим, что всегда $\varphi(x) \neq 0$ в силу 3')), непрерывна на X. Очевидно, ее носитель совпадает с носителем функции f_α. Отсюда следует, что для семейства $\mathscr{Y} = \{\psi_\alpha : \alpha \in A\}$ выполняются условия 1) и 2). Но $\sum \{\psi_\alpha(x) : \alpha \in A \text{ и } \psi_\alpha(x) \neq 0\} = \sum \left\{\dfrac{f_\alpha(x)}{\varphi(x)} : \alpha \in A \text{ и } f_\alpha(x) \neq 0\right\} = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$. Значит, и условие 3) для семейства $\mathscr{Y}$ выполнено.

135. Ясно, что точка $(0, 0)$ не изолирована в X. Следовательно, X не дискретно. Как всякое пространство с ровно одной неизолированной точкой, X нормально (см. 15 гл. III). Но $|X| = \aleph_0$, поэтому X финально компактно. Так как регулярное финально компактное пространство — всегда паракомпакт, то X является паракомпактом. Если бы X в $(0, 0)$ удовлетворяло первой аксиоме счетности, то в X нашлась бы бесконечная компакта, содержащая $(0, 0)$. Итак, нам осталось показать, что всякое бикомпактное подпространство Φ пространства X конечно.

Пусть l — произвольная прямая, параллельная оси $y = 0$. Так как $X \cap l$ — замкнутое дискретное подпространство пространства X, то $\Phi \cap l$ конечно. Но тогда $U = \{(0, 0)\} \cup (X \setminus \Phi)$ — открытое в X множество и из $U \cap \Phi = \{(0, 0)\}$ мы заключаем, что все точки бикомпакта Φ изолированы в Φ. Следовательно, $|\Phi| < \aleph_0$.

136. Да. Возьмите счетное всюду плотное подпространство в I^τ (см. 38 гл. II).

137. Пусть $X_1 = \bigcup \{F_i : i \in N^*\}$, где F_i замкнуты в X. Рассмотрим для каждого i открытое покрытие Ω_i всего пространства X, состоящее из всех элементов системы ω и еще открытого множества $X \setminus F_i$. В Ω_i впишем локально конечное открытое покрытие Ω_i' пространства X. Через ω_i' обозначим семейство всех тех множеств $\Gamma \in \Omega_i'$, для которых $\Gamma \cap F_i \neq \Lambda$. Ясно, что ω_i' локально конечно в X, состоит из открытых в X множеств, вписано в ω и покрывает по крайней мере F_i. Тогда семейство $\omega' = \bigcup \{\omega_i' : i \in N^*\}$ локально конечно в X, состоит из открытых в X множеств, вписано в ω и покрывает (по крайней мере) подпространство X_1.

138. Это, например, следует из задачи 137 гл. V.

139. Это следует из задач 138 и 127 гл. V.

140. Достаточно (см. 206 гл. III) показать, что всякое открытое подпространство Y пространства X финально компактно. Так как $c(X) \leqslant \aleph_0$, а Y открыто в X, то $c(Y) \leqslant \aleph_0$. Кроме того, Y паракомпактно по условию. Значит (см. 133 гл. V), Y финально компактно.

141. Нет. Если X — бикомпактификация Александрова (см. 176 гл. III) несчетного дискретного пространства, то каждое подпространство пространства X либо дискретно, либо бикомпактно и в обоих случаях паракомпактно (даже сильно паракомпактно).

142. Ответ авторам не известен.

143. Достаточно для произвольного открытого в $A(X)$ подпространства Y доказать, что оно паракомпактно (см. 127 гл. V). Пусть γ — произвольное открытое покрытие пространства Y. Положим $Z = Y \cap X$ и $\lambda = \{U \cap X : U \in \gamma\}$. Тогда Z открыто в X и λ — открытое покрытие пространства Z. Впишем в λ локально конечное (в Z) покрытие μ пространства Z открытыми в Z (и значит, и в X) множествами. Для каждого $V \in \mu$ зафиксируем некоторый элемент семейства γ, его содержащий, — обозначим его через $\delta(V)$. Положим, кроме того, $c(V) = V \cup \partial(V)$, где $\partial(V)$ — естественная проекция множества V в $A(X)$, т. е. наименьшее множество V, лежащее в $A(X)$. Так как V открыто в X, то $c(V)$ открыто в $A(X)$. Из локальной конечности μ в точках множества Z следует, что и семейство $\{c(V) : V \in \mu\}$ локально конечно в точках Z. Положим $\varphi(V) = c(V) \cap \delta(V)$. Тогда и $\xi = \{\varphi(V) : V \in \mu\}$ локально конечно в точках Z. Но $\varphi(V) = V$, $\varphi(V)$ открыто в $A(X)$ и $\varphi(V) \subset \delta(V) \in \gamma$. Значит, ξ — вписанное в γ семейство открытых в Y множеств, локально конечное в точках множества Z и покрывающее Z. Множество $Y \setminus \bigcup \{\varphi(V) : V \in \mu\}$ замкнуто в Y и дискретно. Поэтому $\eta = \xi \cup \{\{y\} : y \in Y \setminus \bigcup \{\varphi(V) : V \in \mu\}\}$ — локально конечное открытое покрытие пространства Y, очевидно, вписанное в γ.

144. Нет. Рассмотрим бикомпакт П. С. Александрова «две окружности» (см. 80 гл. III). Он получен в результате склеивания из обычной окружности, а последняя, как и любое метрическое пространство, наследственно паракомпактна. Но при склеивании наследственно паракомпактного пространства получается наследственно паракомпактное пространство (143 гл. V). Значит, бикомпакт «две окружности» — наследственно паракомпактное пространство. Этот бикомпакт удовлетворяет первой аксиоме счетности и содержит дискретное подпространство мощности $2^{\aleph_0}$ — последнее означает, что он не сепарабелен (206 гл. III).

145. Если γ — двухкратное семейство открытых в X множеств и $G = \bigcup \{U : U \in \gamma\}$, $P = X \setminus G$, то P замкнуто в X и потому $P = \bigcap \{W_i : i \in$

$\in \mathcal{N}^*$), где все W_i открыты в X. Положим $F_i = X \setminus W_i$. Очевидно, $F_i \subset G_i$ причем F_i замкнуто, а G открыто в X. Выберем на основании нормальности X открытое множество V_i, для которого $F_i \subset V_i \subset [V_i] \subset G$. Положим $\lambda_i = \{V_i \cap U: U \in \gamma\}$. Семейства λ_i состоят из открытых множеств и, очевидно, дискретно в X. Поэтому $\lambda = \bigcup \{\lambda_i: i \in \mathcal{N}^*\}$ — σ-дискретное семейство открытых множеств, вписанное в γ. Из $\bigcap \{F_i: i \in \mathcal{N}^*\} = \emptyset$ и определения V_i следует, что $\bigcup \{A: A \in \lambda\} = G = \bigcup \{U: U \in \gamma\}$. Это рассуждение доказывает, что для каждого σ-дискретного открытого покрытия пространства X существует вписанное в него σ-дискретное открытое покрытие. Следовательно (72, 26 гл. VI), X — паракомпакт.

146. Рассмотрим произвольное открытое покрытие γ пространства X. Для каждого $i \in \mathcal{N}^*$ зафиксируем σ-дискретное покрытие λ_i множества F_i, замкнутым в X множеством, вписанное в γ,— такое, очевидно, существует, см. 150 гл. V. Так как X нормально, то найдется σ-дискретное семейство μ_i открытых (в X) окрестностей элементов семейства λ_i, вписанное в γ (см. 48 гл. V). Положим $\mu = \bigcup \{\mu_i: i \in \mathcal{N}^*\}$ и $U = \bigcup \{O: O \in \mu\}$. Тогда μ — σ-дискретное семейство открытых в X множеств, вписанное в γ, U открыто в X и $U = Y$. Подпространство $P = X \setminus U$ пространства X паракомпактно, и потому существует σ-дискретное покрытие $\mathcal{U}$ пространства P замкнутыми (в P и, следовательно, в X) множествами, вписанное в γ. От $\mathcal{U}$ перейдем к σ-дискретной в X системе $\overline{\mathcal{U}}$ окрестностей (в X) элементов семейства $\mathcal{U}$ — можно при этом считать, что $\overline{\mathcal{U}}$ вписана в γ. Здесь мы снова воспользовались коллективной нормальностью пространства X. Тогда $\overline{\mathcal{U}} \cup \mu$ — σ-дискретное открытое покрытие пространства X, вписанное в γ. Так X — регулярное пространство, поэтому, так как γ было выбрано произвольно, можно заключить, что X — паракомпакт (см. 150 гл. V).

147. Вписан в ξ локально конечное открытое покрытие γ. Пространство X регулярно (128 гл. V). Поэтому семейство $\eta = \{U \subset X: U$ открыто в X и существует $G \in \gamma$ такое, что $[U] \subset G\}$ покрывает X. Вписан в η локально конечное открытое покрытие λ. Тогда γ и λ удовлетворяют условиям утверждения задачи 51 гл. V, и поэтому существует открытое покрытие λ', звездно вписанное в γ,— такое, например, $(\gamma)_\lambda$.

148. Необходимость доказана в задаче 147 гл. V. Докажем достаточность. Пространство X регулярно и даже вполне нормально (см. 74 гл. V). Для каждого открытого покрытия λ пространства X можно построить вполне монотонную последовательность $\xi = \{\xi_n: n \in \mathcal{N}^*\}$ открытых покрытий X, где γ_1 вписано в λ. Тогда ξ мажорирует покрытие λ, и потому в λ можно вписать σ-дискретное открытое покрытие (24 гл. V). Но λ — любое открытое покрытие пространства X. Следовательно, X — паракомпакт (см. 72 гл. VI), ибо σ-дискретное покрытие, очевидно, σ-локально конечно.

149. См. задачи 147 и 29 гл. V.

150. Эквивалентность (а), (б), (в), (г), (д) установлена в 145, 72, 33, 34 гл. V. Доказательство равносильности им (е) см. М а й к л [1], [2].

151. Не всегда. См. П о с т о н и к [1]. Более сильный пример недавно построил С. Передунель.

152. Необходимость. Так как $X \setminus F = A$ и F замкнуто в νX, а νX регулярно, то для каждой точки $x \in X$ можно так зафиксировать ее открестность Ox в νX, чтобы было $[Ox] \cap F = A$. В открытом покрытии $\gamma = \{Ox \cap X: x \in A\}$ пространства X вписано локально конечное открытое покрытие λ. Очевидно, оно искомое.

Достаточность. Пусть ξ — произвольное покрытие пространства X его открытыми подмножествами. Для каждого $U \in \xi$ зафиксируем открытое в νX множество $s(U)$ такое, что $s(U) \cap X = U$. Положим $G = \bigcup \{s(U): U \in \xi\}$ и $F = \nu X \setminus G$. Очевидно, G открыто в νX и $G \supset X$. Поэтому F — бикомпакт, лежащий в $\nu X \setminus X$. По условию, существует локально конечное открытое покрытие η пространства X такое, что $\mathrm{Fl}_{\eta X} \cap F = A$ для всех $V \in \eta$.

Но $[V]_{\nu X} \cap F = A$ следует, что $[V]_{\nu X} \subset G$. Но $s(\xi) = \{s(U): U \in \xi\}$ — открытое покрытие пространства G, а $[V]_{\nu X}$ бикомпакт. Следовательно, из $s(\xi)$ можно выделить конечное покрытие бикомпакта $[V]_{\nu X}$. Значит, для каждого $V \in \eta$ существует конечное подсемейство ξ_V семейства ξ такое, что $\bigcup \{U: U \in \xi_V\} \supset V$. Мы фиксируем для дальнейшего такое ξ_V при всех $V \in \eta$. Положим $\tau_V = \{V \cap U: U \in \xi_V\}$. Тогда η_τ — конечное семейство открытых в X множеств, вписанное в ξ, объединение элементов которого равно в точности V. Следовательно, $\lambda = \bigcup \{\eta_\tau: V \in \eta\}$ — локально конечное открытое покрытие пространства X, вписанное в ξ, и X паракомпактно.

153. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $F = X$ — произвольное замкнутое в X множество, $\mathcal{U}F$ — произвольная его окрестность. Рассмотрим открытое покрытие $\omega = \{UF, X \setminus [U'F]\}$, состоящее из двух элементов: множества UF и множества $X \setminus [U'F]$, где $U'F$ — окрестность множества F, для которой $[U'F] \subset UF$ (мы воспользовались нормальностью пространства X — см. 130 гл. V). Вписан в ω локально конечное открытое покрытие ω'. Ясно, что каждое $U \in \omega'$ открыто-замкнуто в X. Рассмотрим окрестность $U'F = \bigcup \{U \in \omega': U \cap F \neq \Lambda\}$ множества F. Ясно, что $U'F \supset F$ и $U'F$ открыто-замкнуто. Кроме того, $U'F \subset UF$. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) доказана (при этом заметим, что она верна для любого нормального, не обязательно паракомпактного, пространства).

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть ω — произвольное открытое покрытие паракомпакта X. Вписан в него локально конечное открытое покрытие $\omega' = \{U_t: t \in T\}$. В покрытие ω' (поскольку 17 гл. V) комбинаторно вписано открытое покрытие $\omega'' = \{V_t: t \in T\}$ так, чтобы $[V_t] \subset U_t$ для всех $t \in T$. На основании 2) выберем открыто-замкнутые множества Γ_t, для которых $[V_t] \subset \Gamma_t \subset U_t$. Ясно, что $\gamma = \{\Gamma_t: t \in T\}$ — локально конечное покрытие пространства X открыто-замкнутыми множествами, вписанное в ω', а значит, и в ω. Предполагая множество T каким-нибудь упорядоченным, положим

$$W_t = \Gamma_t \setminus \bigcup \{\Gamma_{t'}: t' \prec_T t\}.$$

Замечая, что $[\Gamma_t] = \Gamma_t$ для любого t, и что система γ локально конечна (значит, консервативна), заключаем, что W_t открыто-замкнуто в X для любого $t \in T$. Очевидно, семейство $\gamma' = \{W_t: t \in T\}$ дизъюнктно и является покрытием пространства X, вписанным в ω', а значит, и в ω. Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) доказана.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\omega = \{U_1, \ldots, U_s\}$ — произвольное конечное открытое покрытие пространства X. На основании 3) вписан в него дизъюнктное открытое покрытие γ. Ясно, что γ локально конечно и X и состоит из открыто-замкнутых в X множеств. Положим $\gamma_1 = \{V \in \gamma: V \subset U_1\}$, $\gamma_2 = \{V \in \gamma \setminus \gamma_1: V \subset U_2\}$, $\ldots$, $\gamma_s = \{V \in \gamma \setminus \bigcup_{i=1}^{s-1} [\gamma_i]: V \subset U_s\}$. Рассмотрим множества $\Gamma_1 = \bigcup \{V: V \in \gamma_1\}$, $\Gamma_2 = \bigcup \{V: V \in \gamma_2\}$, $\ldots$, $\Gamma_s = \bigcup \{V: V \in \gamma_s\}$. Множества Γ_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, открыты. Кроме того, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \Lambda$, если $i \neq j$. Ясно также, что $\gamma' = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s\}$ — покрытие пространства X, вписанное в ω. Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) доказана.

154. 1) $\Rightarrow$ 2). Заметим, что X — паракомпакт (45 гл. V). В любое открытое покрытие ω пространства X можно вписать дизъюнктное покрытие (153 гл. V). Для каждого $i \in \mathcal{N}^*$ в покрытие пространства X открытыми множествами диаметра, не превосходящего $\frac{1}{2^i}$, вписано дизъюнктное открытое покрытие ω_i. Семейство $\pi = \bigcup \{\omega_i: i \in \mathcal{N}^*\}$ — искомая база.

2) $\Rightarrow$ 1). Не нарушая общности, можно считать, что ω_{i+1} вписана в ω_i. Каждый элемент любого покрытия ω_i — открыто-замкнутое в X множество, достаточно (вследствие 152 гл. V) доказать, что $\mathrm{Fr} X = \emptyset$. Пусть F — замкнутое в X множество, а OF — произвольная его окрестность. Для

каждого i рассмотрим подсистему $\omega_i(F,\ OF) \subset \omega_i$, определяемую следующим образом:

$$(1)\quad \omega_i(F,\ OF) = \{U \in \omega_i:\ U \cap F \neq \Lambda \ \text{ и } \ U \subset OF\}.$$

Так как покрытие ω_i локально конечно в X, а все $U \in \omega_i$ открыто-замкнуты в X, то

$$\Gamma_i = \bigcup \{U:\ U \in \omega_i(F,\ OF)\} \quad \text{для всех} \quad i \in N$$

открыто-замкнуто в X (см. 2 гл. V). Так как σ — база пространства X, то $F = \bigcup \{\Gamma_i:\ i \in N\} \subset OF$. Положим

$$H_1 = \Gamma_1,\ H_2 = \Gamma_2 \setminus \Gamma_1,\ \ldots,\ H_n = \Gamma_n \setminus \bigcup \{\Gamma_i:\ i < n\}.$$

Ясно, что $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ — открыто-замкнутые в X множества. Пока также, что $H_{n_1} \cap H_{n_2} = \Lambda$, если $n_1 \neq n_2$, и $F \subset \bigcup \{H_n:\ n \in N\} = \bigcup \{\Gamma_i:\ i \in N\} \subset OF$.

Остается показать, что множество $\bigcup \{H_n:\ n \in N\}$ открыто-замкнуто. Для этого достаточно установить, что семейство $\xi = \{H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots\}$ локально конечно в X. Семейство ξ локально конечно в точках из F, так как оно дизъюнктно в покрытии P. Пусть $x_0 \notin F$ произвольно. Возьмем первый номер i_0 такой, что $x_0 \in U^* \in \omega_{i_0},\ F \cap U^* = \Lambda$. Тогда $U^* \cap \Gamma_i = \Lambda$ для всех $i \geqslant i_0$. Поэтому $U^* \cap H_i = \Lambda$ для всех $i \geqslant i_0$. Так как $x_0 \in U^*$, то тем самым мы доказали локальную конечность семейства ξ в точке x_0.

155. Это следует из 246 гл. II и 154 гл. V.

156. Так как X метризуемо и $\dim X = 0$, то (см. 154 гл. V) в X существует база π, являющаяся объединением счетного семейства дизъюнктных открытых покрытий пространства X. Но тогда такая же база есть и в пространстве X_τ — годится, например, $\sigma_0 = \{U \cap X_0:\ U \in \sigma\}$. Теперь снова сошлемся на задачу 154 гл. V.

157. Из (б) следует (г) в силу 58 гл. V. Очевидно, из (г) следует (в), а из (в) следует (а). Условие (б') только на вид слабее условия (б) — можно так занумеровать элементы этих покрытий, чтобы получилась комбинаторная записанность. Остается вывести (б) из (а), и равносильность всех четырех условий будет установлена. Зафиксируем счетное открытое покрытие $\gamma = \{U_i:\ i \in N\}$ пространства X и комбинаторно записанное в него точечно конечное открытое покрытие λ (другими словами — см. 13 гл. V). Так как X нормально, а λ точечно конечно, то в λ можно комбинаторно записать покрытие μ пространства X замкнутыми множествами (17 гл. V). При этом μ комбинаторно записано и в γ.

158. См. 157 гл. V.

159. *Необходимость.* Положим $\gamma = \{X \setminus F:\ F \in \xi\}$. Тогда γ — счетное открытое покрытие пространства X. В γ можно комбинаторно записать покрытие λ пространства X замкнутыми множествами (157 гл. V). Элементу семейства λ, соответствующий при этом элементу $U \in \gamma$, условимся обозначать через $\varphi(U)$. Положим $U(F) = X \setminus \varphi(X \setminus F)$. Тогда $U(F)$ открыто, $U(F) \supset F$, так как $\varphi(X \setminus F) \subset X \setminus F$ и $\bigcap \{U(F):\ F \in \xi\} = \Lambda$, ибо λ — покрытие.

Достаточность. Так как X нормально, то достаточно проверить (см. 157 гл. V), что в любое счетное открытое покрытие γ пространства X, не содержащее никакого конечного покрытия X, можно комбинаторно записать покрытие замкнутыми множествами. Но тогда $\xi = \{X \setminus U:\ U \in \gamma\}$ — центрированное семейство замкнутых множеств, пересечение элементов которого пусто. Зафиксируем для каждого $U \in \gamma$ открытое множество $W(U)$, содержащее $X \setminus U$, так, чтобы было $\bigcap \{W(U):\ U \in \gamma\} = \Lambda$. Положим $F(U) = X \setminus W(U)$. Тогда $F(U)$ замкнуты, $F(U) \subset U$ и $\bigcup \{F(U):\ U \in \gamma\} = X$, т. е. $\{F(U):\ U \in \gamma\}$ — искомое покрытие.

160. Решается так же, как и задача 148 гл. V.

161. Пространство X является паракомпактом (см. 102 гл. V). Из произвольного открытого покрытия γ пространства X можно выделить счетное покрытие λ. Но из всякого счетного открытого покрытия паракомпакта (более того, нормального счетно паракомпактного пространства) можно извлечь локально конечное открытое покрытие (137 гл. V).

162. Пространство со счетной сетью финально компактно (143 гл. II), а каждое регулярное финально компактное пространство сильно паракомпактно (181 гл. V).

163. Воспользуемся обозначениями из задачи 251 гл. II. Заметим, что $Y(1) = \{(x,\ \alpha) \in K\omega(\tau):\ x = 1\}$ — дискретное подпространство пространства $K\omega(\tau)$. Если бы $K\omega(\tau)$ было сильно паракомпактно, то оно было бы и финально компактно (см. 173 гл. V — здесь нужно, что $K\omega(\tau)$ связно). Тогда $K\omega(\tau)$ имело бы счетную базу (213 гл. II) и $Y(1)$ было бы сепарабельно, что противоречит $|Y(1)| = \tau > \aleph_0$.

165. Нужность в доказательстве только достаточности. Пространство X паракомпактно — ведь оно регулярно и в каждое его открытое покрытие можно вписать вписано счетное открытое покрытие, а последнее (см. 9 гл. V) автоматически будет σ-дискретным покрытием — теперь можно сослаться на задачу 150 гл. V.

Пусть теперь λ — произвольное открытое покрытие пространства X, γ — вписано счетное открытое покрытие, вписанное в λ, и $\{\gamma_\alpha:\ \alpha \in A\}$, $\{\lambda_\alpha:\ \alpha \in A\}$ — семейства, обладающие по отношению к γ и λ свойствами 1) — 7), сформулированными в задаче 8 гл. V. Так как X_α замкнуто в X, то X_α тоже паракомпактно. Семейство γ_α является счетным открытым покрытием пространства X_α, поэтому в γ_α можно вписать звездно конечное открытое покрытие (см. 157 гл. V) — обозначим последнее через $\gamma_{\alpha\alpha}$. Тогда если $W' \in \gamma_{\alpha\alpha}$, $W'' \in \gamma_{\alpha\alpha}$ и $\alpha' \neq \alpha''$, то $W' \cap W'' = \Lambda$ (см. 7) задачи 8 гл. V). Значит (см. 8 гл. V), $\mu = \bigcup \{\mu_\alpha:\ \alpha \in A\}$ — звездно конечное открытое покрытие пространства X, вписанное и в γ.

166. Пара множеств является задачами 8 гл. V, 205 гл. III и 181, 182 гл. V.

168. Впишем такое локально конечное открытое покрытие γ пространства X, что $[U] = G$ для любого $U \in \gamma$. В силу 53 гл. V это покрытие звездно конечно. Воспользуемся теперь задачей 5 гл. V, после чего остается сослаться на задачу 208 гл. III.

169. Следует из задач 165, 161, 164 гл. V.

170. 1) $\Rightarrow$ 3). Зафиксируем для каждой точки $x \in X$ ее окрестность Ox в βX такую, что $[Ox]_{\beta X} \subset G$. В покрытие $\lambda = \{Ox:\ x \in X\}$ пространства X вписано звездно конечное покрытие γ пространства X открытыми в X множествами. Существует открытое покрытие $\mu = \{V(U):\ U \in \gamma\}$ пространства X такое, что $[V(U)]_X \subset U$ при всех $U \in \gamma$. Положим $F(U) = [V(U)]_{\beta X}$ и $\bar{U} = \operatorname{Int}[U]_{\beta X}$. Тогда (так как X — нормальное пространство и βX — его расширение Стоуна — Чеха) $F(U) \subset \bar{U}$ и легко построить открытое в βX множество $W(U)$, являющееся суммой счетного множества биокрестностей, такое, что $F(U) \subset W(U) \subset \bar{U}$. Положим $\bar{X} = \bigcup \{W(U):\ U \in \gamma\}$. Из плотности X в βX следует, что $\bar{U} \cap \bar{U}' \neq \Lambda$ тогда и только тогда, если $U \cap U' \neq \Lambda$. Значит, $\{W(U):\ U \in \gamma\}$ — звездно конечное открытое покрытие пространства $\bar{X}$ множествами, каждое из которых есть объединение счетного семейства биокрестностей. Поэтому $\bar{X}$ сильно паракомпактно (см. 166 гл. V). Кроме того, очевидно, $W(U) \subset G$ для каждого $U \in \gamma$. Значит, $\bar{X} \subset G$.

Ясно, что из 3) следует 2). Из 2) выведем теперь 1). Рассмотрим произвольное покрытие λ пространства X открытыми в X множествами. Для каждого $U \in \lambda$ зафиксируем открытое в βX множество $\bar{U}$ такое, что $\bar{U} \cap X = U$. Положим $G = \bigcup \{\bar{U}:\ U \in \gamma\}$. Тогда G открыто в βX и $X \subset G$. Выберем в βX и соответствии с 2) сильно паракомпактное подпространство $\bar{X}$ такое,

что $X \subset \bar{Y} \subset G$. Семейства $\xi = \{U: U \in \eta\}$ покрывают G. Тем более, ξ покрывает $\bar{X}$. Вписан в ξ звездно конечное открытое покрытие η пространства $\bar{X}$. Тогда, очевидно, $\vartheta = \{U \cap X: V \in \eta\}$ — звездно конечное открытое покрытие пространства X, вписанное в λ. Этим доказательство равносильности условий 1), 2) и 3) завершено.

171. Достаточность доказывается так же, как в задаче 152 гл. V — надо заметить только, что если заменить понятие локальной звездно конечности семейства η множеств некоторым конечным семейством λ_U элементов, объединение которых равно G, то возникающее в результате семейство $\lambda = \bigcup \{\lambda_U: U \in \eta\}$ опять звездно конечно.

Так же, как и в задаче 152 гл. V, доказывается и необходимость: следует заметить только, что если ξ — семейство открытых в X множеств, а $\lambda(U)$ для каждого $U \in \xi$ — такое открытое в bX множество, что $\lambda(U) \cap X = U$, то из звездной конечности семейства ξ вытекает звездная конечность семейства $\{\lambda(U): U \in \xi\}$ (ведь $U \cap U' \neq \Lambda$ в том и только в том случае, если $\lambda(U) \cap \lambda(U') \neq \Lambda$).

172. См. задачи 148 и 24 гл. V.

173. В произвольное открытое покрытие γ пространства X можно вписать звездно конечное открытое покрытие λ. По λ непременно счетно в силу 12 гл. V. Следовательно, из γ можно выписать счетное покрытие (см. 75 гл. III).

175. Рассмотрим открытое покрытие ξ пространства X и положим $\mathscr{B}_\xi = \{U \in \mathscr{B}:$ существует $G \in \xi$, для которого $U \subset G\}$. Тогда $\mathscr{B}_\xi$ — база пространства X и притом равномерная. Поверхность $m(\mathscr{B}_\xi)$ семейства $\mathscr{B}_\xi$ тогда является точечно конечным открытым покрытием пространства X, вписанным в ξ (см. 65 гл. V).

176. Нет. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве обычный куб K^3, заданный по отношению к некоторому ортонормированному реперу следующим образом:

$$K^3 = \{(x, y, z): 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}.$$

Множества $\alpha = \{(x, y, z): 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ и $\beta = \{(x, y, z): 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ — противоположные грани куба K^3. Множество $\Phi = \{(x, y, z): 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 0,\ z = 0\}$ — нижнее основание (ребро) грани α. Положим $\alpha^* = \alpha \setminus \Phi$. В множество $X = \alpha^* \cup \beta$ введем нестандартную топологию. Именно, $\lambda_x = \{(x, y, z): x = \lambda,\ y = 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$, где $\lambda \in [0, 1]$. Тогда $\beta = \bigcup \{P_\lambda: \lambda \in [0, 1]\}$, причем $\lambda_1 \cap P_\lambda = P_\lambda$ при $\lambda \neq \lambda'$. Каждое P_λ служит обычной топологической прямой. Потребуем, далее, чтобы каждое P_λ было открытым в X множеством. Этим определена топология пространства X во всех точках множества β. Базисная окрестность O_p любой точки $p \in \alpha^*$ в X имеет вид $O_p = U_p \cup (\alpha \setminus \bar{U}_p) \setminus B$, где U_p — какая-нибудь окрестность точки p в α^*, наделенной обычной топологией подпространства евклидова пространства, $\pi(U_p)$ — (ортогональная) проекция множества U_p на грань $\beta = \{(x, y, z): y = 1\}$, где B — произвольное конечное подмножество отрезка $[0, 1]$. Определение пространства X завершено. Ясно, что оно хаусдорфово. В точках множества β пространство X, очевидно, локально бикомпактно. Топология, индуцированная на X на α^*, совпадает с обычной топологией. Если бесконечное множество $A \subset \beta$ пересекается с каждым λ_λ, где $\lambda \in [0, 1]$, по конечному числу точек, то существует множество, не пересекающееся с A ни в одной точке плотно вписанная в α (по отношению к обычной топологии), и если эти точки принадлежат α^*, то они, очевидно, будут точкой полного накопления для самого множества A в X. Легко видеть сразу, что X локально бикомпактно и в точках множества α^*. Пусть Φ' — проекция ребра Φ на грань β, т. е. $\Phi' = \{(x, y, z): 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 1,\ z = 0\}$. Ясно, что Φ' является замкнутым дискретным подпространством пространства X. Точки множества Φ' можно окружить дизъюнктными семейством окрестностей. Если бы X было нормально, то от этого

семейства можно было бы перейти к дискретному семейству окрестностей. Но каждая из этих окрестностей пересекала бы множество $\beta \setminus \Phi'$. Это дало бы возможность определить несчетное дискретное семейство в X множеств, лежащее в $\beta \setminus \Phi'$. Но это множество имело бы, в силу очевидных причин, точку полного накопления в α^* — получили противоречие. Следовательно, X не нормально, и, тем более, не паракомпактно. Но X слабо паракомпактно. Действительно, пусть γ — произвольное открытое покрытие пространства X. В γ можно вписать дизъюнктное семейство μ, состоящее из пересечений открытых множеств, покрывающих Φ' (см. выше). Но $X \setminus \Phi'$, как легко видеть, — открытое финально компактное подпространство пространства X. Следовательно, в γ можно вписать открытое точечно конечное покрытие λ множества $X \setminus \Phi'$. Очевидно, $\lambda \cup \mu$ — точечно конечное открытое покрытие пространства X, вписанное в γ. Значит, X слабо паракомпактно.

177. Ответ авторам не известен.

178. Ответ авторам не известен.

179. Это вытекает из задачи 157 гл. V.

180. Пусть γ — открытое покрытие пространства X, причем никакое конечное семейство элементов γ не покрывает X. Вписан в γ точечно конечное открытое покрытие λ и из λ выделим минимальное подпокрытие μ (см. 14 гл. VI). Тогда μ тоже открыто и точечно конечно, причем $|\mu| \geqslant \aleph_0$. В силу 15 гл. V и X существует замкнутое дискретное множество, равномощное μ, т. е. бесконечное.

181. Это следует из задач 180 гл. V и 129 гл. III.

182. Нет. Пространство $T(\omega_1)$ нормально и счетно компактно (187, 185 гл. III). Если предположить, что $T(\omega_1)$ еще и слабо паракомпактно, то $T(\omega_1)$ бикомпактно (см. 181 гл. V), а следовательно, паракомпактно (189 гл. III).

183. Положим $X_0 = \{x \in X: \{U \in \gamma,\ U \ni x\} \mid = \aleph_0\}$, $\alpha \in \mathcal{N}^*$. Замкнем X_0 замкнутыми в X (см. 19 гл. V) и $\bigcup \{X_\alpha: \alpha \in \mathcal{N}^*\} = X$. Мы определили сейчас по индукции последовательность $\{\eta_k: k \in \mathcal{N}\}$ дискретных систем η_k открытых множеств, вписанных с замыканием в γ, так, чтобы $\bigcup \{\eta_k: n \leqslant k\}$ покрывало X_α при каждом $\alpha \in \mathcal{N}^*$. В силу 18 гл. V существует дискретное покрытие λ_α множества X_α, замкнутыми в X множествами, вписанное в γ. Применим ко γ какую-нибудь дискретную систему окрестностей элементов λ_α, каждая из которых с замыканием содержится в некотором элементе γ — такая существует, так как X коллективно нормально и в силу 4b гл. V. Предположим, что для $n \leqslant k$ семейства η_n уже определены, причем так, что $V_k = \bigcup \{U: U \in \bigcup \{\eta_n: n \leqslant k\}\}$ — открытое множество, содержащее X_k. Тогда, в силу 19 гл. V, существует дискретное покрытие λ_{k+1} множества X_{k+1}, замкнутыми в X множествами, вписанное в γ. Применим ко γ_{k+1} какое-нибудь дискретное семейство окрестностей элементов λ_{k+1} — такое существует, см. 48 гл. V. Можно при этом считать, так как X нормально, что замыкание каждого элемента семейства η_{k+1} содержится в некотором элементе покрытия γ. Продолжая, как получаем последовательность $\{\eta_n: n \in \mathcal{N}^*\}$. Очевидно, $\eta = \bigcup \{\eta_n: n \in \mathcal{N}^*\}$ — дискретное открытое покрытие пространства X, вписанное с замыканием в γ.

184. Пользуясь задачами 204 и 48 гл. V, можно построить не только счетную сеть в X, но и π-дискретную базу в X. Далее см. задачу 80 гл. V.

185. См. 183, 150 и 172, 174 гг. V.

186. Пусть $\mathscr{F}$ — счетное множество точечно конечных семейств открытых в X множеств и $\mathscr{B} = \bigcup \{\gamma: \gamma \in \mathscr{F}\}$ — база пространства X. Для каждого $\gamma \in \mathscr{F}$ и каждого $x \in X$ положим $\gamma_x = \{U \in \gamma: U \ni x\}$. Пусть $k \in \mathcal{N}^*$. Обозначим через $X_{\gamma, k}$ множество всех точек $x \in X$, для которых $|\gamma_x| = k$. Положим далее: $V_\gamma(x) = \bigcap \{U: U \in \gamma_x\}$, если $\gamma_x \neq \Lambda$. Заметим, что если $x \in X_{\gamma, k}$ и $y \in X_{\gamma, k}$, то либо $V_\gamma(x) = V_\gamma(y)$, либо $x \notin V_\gamma(y)$ и $y \notin V_\gamma(x)$. Действительно, если $x \in V_\gamma(y)$, то $\gamma_y \subset \gamma_x$. Но ведь $|\gamma_y| = |\gamma_x|$, следует тогда,

что $\gamma_x = \gamma_{x'}$. Положим теперь $\lambda_{\gamma,A} = \{V_\gamma(x): x \in X_{\gamma,A}\}$ и $\mathscr{F} = \{\lambda_{\varphi,k}: k \in N^+, \varphi \in \mathscr{S}\}$. Покажем, что семейство $\mathscr{F}$ является фильтрацией в X. Пусть точка $x \in X$ и ее окрестность Ox выбраны произвольно. Выберем $V \in \mathscr{B}_x$, для которого $x \subset V \subset Ox$. Для некоторого $\gamma^* \in \mathscr{S}$ будем иметь $V \in \gamma^*$. Положим $k = |\gamma_x^*|$. Тогда $k \in N^+$ и $x \in V_{\gamma^*}(x) \subset Ox$, $x \in X_{\gamma^*,k}$ и $V_{\gamma^*}(x) \in \lambda_{\gamma^*,k}$. Далее, каждый элемент семейства $\lambda_{\varphi,k}$, отличный от $V_\varphi(x)$, не содержит точки x — мы установили это несколькими строками выше. Значит, $\lambda_{\gamma^*,k}(x) = V_{\gamma^*}(x)$ — непустое множество, содержащееся в Ox. Этим доказано, что $\mathscr{F}$ — фильтрация.

Пусть $z \in X$, $x \in X_{\gamma,A}$ и $V_\gamma(x) \ni z$. Тогда $\gamma_z \supset \gamma_x$. Но $|\gamma_x| \leqslant \aleph_1$ и $V_\gamma(x) = \bigcap \{\bar{U}: U \in \gamma_x\}$. Значит, каждый элемент семейства $\lambda_{\gamma,A}$, содержащий точку z, является пересечением конечного множества элементов фиксированного конечного семейства γ_z. Следовательно, $\lambda_{\gamma,k}$ — точечно конечное семейство множеств.

187. Мы рассуждаем так же, как в решении задачи 100 гл. V при почти строгом повторении. В данном случае измельчение, которое возникает, будет (автоматически) состоять из точечно конечных семейств множеств. Остается составить из задачу 67 гл. V.

188. Для доказательства достаточно сопоставить утверждения задач 186 и 187 гл. V.

189. Это следует из задач 186, 175, 185, 85 гл. V.

190. Надо рассуждать так же, как в решении задачи 183 гл. V, но отправляться не от σ-точечно конечной базы, а от σ-точечно конечного открытого покрытия, вписанного в заданное покрытие.

191. Пусть γ — открытое покрытие пространства X. «Просеиваем» сначала это покрытие счетным семейством точечно конечных семейств открытых в X множеств согласно задаче 190 гл. V. Затем, как в решении задачи 187 гл. V, строим вписанное в γ семейство открытых множеств, напоминающее по свойствам равномерную базу (чтобы добиться вписанности в γ, мы просто отбрасываем все нарушающие эту вписанность множества). Совокупность максимальных элементов этого семейства и является точечно конечным открытым покрытием, вписанным в γ.

192. Если $k = 0$, то утверждение очевидно. Пусть для $k = n$ наше утверждение доказано. Предположим, что $\mathrm{Kp}(x, \lambda) \leqslant n + 1$. Существует (так как $c(X) \leqslant \aleph_1$) счетное $\gamma \subset \lambda$ такое, что $\bigcup \{U: U \in \gamma\} \supset \bigcup \{F: F \in \lambda\}$ (см. решение задачи 29 гл. V). Положим $G = \bigcup \{U: U \in \gamma\}$, $\lambda^* = \lambda \setminus \gamma$ и $\mu = \{U \cap G: U \in \lambda^*\}$. Можно рассматривать μ как семейство открытых множеств в пространстве G. При этом $\mathrm{Kp}(x, \mu) \leqslant n$ при всех $x \in G$, так как G открыто в X, то $c(G) \leqslant c(X) \leqslant \aleph_1$. Кроме того, по определению G следует, что $V \cap G \neq \Lambda$ для каждого $V \in \lambda$. Можно, таким образом, применить индуктивное предположение. Заключаем: $|\mu| \leqslant \aleph_1$. Значит, и $|\lambda^*| \leqslant \aleph_1$. Наконец, $|\lambda| \leqslant |\lambda^*| + |\gamma| \leqslant \aleph_1 + \aleph_0 = \aleph_1$.

193. Положим $X = \{x \in X: \mathrm{Kp}(x, \lambda) \leqslant k - 1\}$, $Y = \{x \in X: \mathrm{Kp}(x, \lambda) \geqslant k\}$. Тогда $X = F \cup Y$. Очевидно, Y открыто в X. Значит, $c(Y) \leqslant \aleph_1$. В силу 102 гл. II существует счетное семейство $\gamma = \mathscr{B} \cap \lambda$, что $\bigcup \{U: U \in \gamma\} \subset Y \subset \bigcup \{U: U \in \gamma\}$. Положим $G = \bigcup \{U: U \in \gamma\}$, $\mu = \{U \in \lambda: U \cap G = \Lambda\}$, $F = \bigcup \mu$ и $W = X \setminus F$. Множество W открыто. Так как $\mathrm{Kp}(x, \lambda) \leqslant k - 1$ для всех $x \in W$ и $c(W) \leqslant \aleph_0$, то по 192 гл. V следует, что $|\mu| \leqslant \aleph_1$. Поэтому $|\lambda \setminus \mu| \geqslant \aleph_0$. Ясно, что $\lambda \setminus \mu \subset \lambda^* = \{U \in \lambda: U \cap G \neq \Lambda\}$. Следовательно, $|\lambda^*| \geqslant \aleph_0$. Но $\lambda^* = \bigcup \{\theta(U): U \in \gamma\}$, где $\theta(U) = \{V \in \lambda: V \cap U \neq \Lambda\}$. Так как $|\gamma| \leqslant \aleph_1$, то существует $U^* \in \gamma$, для которого $|\theta(U^*)| \geqslant \aleph_1$. Множество U^*, очевидно, искомое.

194. Пополнение бикомпактного хаусдорфова расширения bX пространства X и семейство $\{G_i: i \in N^+\}$ открытых в bX множеств такие, что $X \cap \{G_i: i \in N^+\} = X$. Положим $\mathscr{B}_n = \{U \subset X: U$ открыто в X, $U \neq \Lambda$ и $[U]_{bX} = G_n\}$. Семейство $\{\mathscr{B}_n: n \in N^+\}$, как легко видеть, искомое.

195. Зафиксируем в X семейство $\{\mathscr{B}_n: n \in N^+\}$ баз такое, как в формулировке задачи 194 гл. V. Предположим, что $|\lambda| > \aleph_0$. Так как X — регулярное пространство и для любого открытого в X множества U вместо $c(U) \leqslant c(X) \leqslant \aleph_0$, то, последовательно применяя утверждение задачи 193 гл. V, мы можем выбрать такую последовательность $\{U_n: n \in N^+\}$, что для каждого $n \in N^+$ будет иметь: (a) $[U_{n+1}] \subset U_n$; (b) $U_n \subset \mathscr{B}_n$; (c) $|\{V \in \lambda: V \cap U_n\}| > \aleph_0$ и (d) $\mathrm{Kp}(x, \lambda) \geqslant n$ при всех $x \in U_n$. Некоторая трудность связана с тем, чтобы добиться выполнения условия (b). Для этого, определив U_{n-1}, надо от $\mathscr{B}_n$ перейти к базе $\mathscr{B}_n^*$ пространства U_n, состоящей из всех элементов семейства $\mathscr{B}_n$, содержащихся в U_{n-1}. В остальном последовательность $\{U_n: n \in N^+\}$ строится без труда. Если она определена, то $\bigcap \{U_n: n \in N^+\} = \bigcap \{[U_n]: n \in N^+\} \neq \Lambda$ т. е., очевидно, $\mathrm{Kp}(x, \lambda) > k$ для любого $x \in \bigcap \{U_n: n \in N^+\}$ и любого $k \in N^+$ — т. е. каждая точка множества $\bigcap \{U_n: n \in N^+\}$ пересекается бесконечному множеству элементов семейства λ. Это противоречит точечной конечности последнего.

196. Так как 1) — самое слабое, а 3) — самое сильное из этих утверждений, достаточно из 1) вывести 3). В силу 195 гл. V каждое n-точечно конечное открытое покрытие пространства X счетно. Значит, если X σ-метрикомпактно, то оно и финально компактно.

197. Достаточно из 1) вывести 4). Если X слабо паракомпактно, то существует открытое точечно конечное покрытие γ пространства X годящееся в смысле Чеха подпространствам, удовлетворяющим условию Суслина. Из задачи 195 гл. V легко следует, что γ звездно счетно и что каждый элемент семейства γ — финальный компактум пространства. Теперь утверждение 4) просто выполнится из задачи 8 гл. V (см. также решение задачи 186 гл. V).

198. Пусть $\gamma = \bigcup \{\gamma_i: i \in N^+\}$ — открытое покрытие пространства X, где каждое γ_i точечно конечно и $c(U) \leqslant \aleph_1$, U было в смысле Чеха для каждого $U \in \gamma$. В силу 195 гл. V γ_i звездно счетно. Из задачи 9 гл. V далее следует, что γ_i является объединением счетного семейства дизъюнктных семейств множеств — т. е. что γ_i σ-дизъюнктно. Но тогда и γ σ-дизъюнктно. Так как такое покрытие, как γ, можно вписать в любое открытое покрытие пространства X, то заключаем отсюда, что X просто.

199. В силу 198 гл. V пространство X просто. Но просеянное совершенно нормальное пространство паракомпактно (см. 145 гл. V).

200. Утверждения 3) и 4) эквивалентны для всех локально бикомпактных хаусдорфовых пространств (159 гл. V), а 3) следует, ясно 2) и 1). Поэтому достаточно вывести 2) из 1). Каждый совершенно нормальный бикомпакт удовлетворяет условию Суслина (207 гл. III) и является, следовательно, компактом в смысле Чеха пространств. Поэтому нижеследующее заключение вытекает из утверждения задачи 198 гл. V.

201. Так как множество $X \setminus F$ открыто в X, то $c(X \setminus F) \leqslant c(X) \leqslant \aleph_0$. Кроме того, $X \setminus F$ локально бикомпактно и, тем более, годно в смысле Чеха. Поэтому из 2), в силу 196 гл. V, следует, что $X \setminus F$ финально компактно. Отсюда легко выводится, что F — множество типа G_δ в X. А тогда $\chi(F, X) \leqslant \aleph_1$ (68 гл. III).

Обратно, если $\chi(F, X) \leqslant \aleph_1$, то $X \setminus F$ — сумма счетной семейства бикомпактов и, следовательно, финально компактное пространство. Тем более, $X \setminus F$ будет σ-метрикомпактным.

202. Ясно, что если каждое открытое подпространство пространства X σ-метрикомпактно, то и каждое его подпространство σ-метрикомпактно. Теперь достаточно сослаться на задачу 201 гл. V.

203. Каждая σ-точечно конечная база такого пространства счетна в силу 195 гл. V. Рассматриваемое пространство метризуемо как вполне регулярное пространство со счетной базой.

204. Достаточно показать, что во всякое открытое покрытие ω можно вписать σ-дискретное замкнутое покрытие. Будем считать, что элементы ω занумерованы элементами некоторого вполне упорядоченного множе-

ство. Пусть $\gamma_{i+1} = \{\gamma_\xi : \xi \in N^{i+1}\}$ — счетное вписывающееся в γ_i покрытие, вписанное в γ_i. Для каждого $U \in \omega$ положим $G(U, i)$ — множество всех таких точек $x \in X$, что никакой элемент покрытия ω, содержащий точку x, не предшествует $U \in \omega$ в заданном упорядочении ω и каждый элемент из γ_i, содержащий x, содержится в U. Система $\eta_i = \{G(U, i) : U \in \omega\}$ дискретна и замкнута, и $\gamma = \bigcup \{\eta_i : i \in N\}$ — σ-дискретное вписывающееся покрытие, вписанное в ω.

205. Ответ авторам не известен.

206. Необходимость доказывается примерно таким же рассуждением, какое проведено в решении задачи 204 гл. V. Достаточность показана в работах Чобана [3] и Бегла [1].

207. Выберем для каждого $\alpha \in A$ замкнутое в X множество F_α так, чтобы было $X_\alpha \subset O_\alpha \subset F_\alpha$ и $\bigcup \{F_\alpha : \alpha \in A\} = X$. Через E обозначим множество всех вещественных функций, определенных на A, каждая из которых обращается в нуль вне некоторого (зависящего от нее) конечного множества. Для каждого $\alpha \in A$ зафиксируем непрерывную вещественную функцию f_α на X такую, что $f_\alpha(X) \subset [0, 1]$, $f_\alpha(X \setminus O_\alpha) = \{0\}$ и $f_\alpha(F_\alpha) = \{1\}$. Через φ обозначим отображение множества X в множество E, определенное так: $(\varphi(x))(\alpha) = f_\alpha(x)$ для всех $\alpha \in A$. Так как ω — точечно конечное покрытие, то $\varphi(x) \in E$. Расстояние между любыми двумя элементами x' и x'' множества E определим как обычно: $\rho(x', x'') = \max\{|x'(\alpha) - x''(\alpha)| : \alpha \in A\}$. Так как x' и x'' отличны от нуля лишь на конечном множестве элементов A, то $\rho(x', x'')$ определено корректно. Убедимся теперь, что $\varphi: X \to E$ является ω-отображением пространства X в пространство (E, ρ).

Рассмотрим произвольный элемент e множества $\varphi(X) \subset E$. Зафиксируем $\alpha^* \in X$, для которого $\varphi(\alpha^*) = e$. Существует такое $\alpha^* \in A$, что $F_{\alpha^*} \ni x^*$. Тогда $e(\alpha^*) = f_{\alpha^*}(\alpha^*) = 1$. Покажем, что если $\rho(e, \varphi(z)) < \frac{1}{2}$, то $z \in U_{\alpha^*}$, иными словами, что прообраз при φ шара радиуса 1 в $\varphi(X)$ с центром в e содержится в U_{α^*}. Положим $\varphi(z) = e'$. Так как $\rho(e, e') < 1$, то $|e(\alpha^*) - e'(\alpha^*)| < 1$. Но $e'(\alpha^*) = f_{\alpha^*}(z)$, $e(\alpha^*) = 1$. Значит, $f_{\alpha^*}(z) > 0$, т. е. $z \in U_{\alpha^*}$. Остается проверить, что φ — непрерывное отображение. Пусть $\varphi(x) = e$. Так как ω локально конечно, то существует окрестность Ox точки x в X, лишь конечного числа U_α: $\alpha \in A'$}, кроме некоторого конечного семейства $\{U_\alpha : \alpha \in A'\}$, обращается в нуль. Выберем теперь по $\varepsilon > 0$ окрестность $O'x \subset Ox$ так, чтобы было $|f_\alpha(x) - f_\alpha(x')| < \varepsilon$ при всех $\alpha \in A'$ и $x' \in O'x$. Тогда $\rho(\varphi(x'), \varphi(x)) < \varepsilon$ для всех $x' \in O'x \cap Ox$. Так как ε можно взять сколь угодно малым, то это означает, что φ — непрерывное отображение. Ясно, что все (E, ρ) равны τ.

208. Легко видеть, что $(X, \mathscr{T})$ — T_3-пространство и ξ — локально конечная измельчающаяся последовательность его открытых покрытий. Следовательно (75 гл. V), $(X, \mathscr{T})$ метризуемо.

209. Каждый паракомпакт нормален (130 гл. V). Теперь для доказательства необходимости остается сослаться на задачу 207 гл. V. Достаточность следует из определения ω-отображения и паракомпактности метрического пространства.

210. Условия (a) и (б) всегда равносильны (105 гл. V). Также всегда из (в) следует (а): если $f: X \to Y$ — непрерывное взаимно однозначное отображение, где Y — метрическое пространство, то его квадрат $\varphi = f \times f$: $X \times X \to Y \times Y$ тоже является непрерывным отображением, прообраз диагонали $\Delta' \subset Y \times Y$ при φ является диагональю $\Delta \subset X \times X$. Но пространство $Y \times Y$ метризуемо и Δ' — замкнутое в нем множество. Значит, Δ' — множество типа G_δ в $Y \times Y$. А тогда и Δ, как прообраз множества Δ' при непрерывном отображении, является множеством типа G_δ в $X \times X$.

Введем теперь (в) из (б) в предположении, что X — паракомпакт. Пусть $\mathscr{U} = \{\gamma_\xi : \xi \in N^*\}$ — некоторое T_1-измельчение в X. С использованием паракомпактности X без труда строится не индуцирующая сильно звездно монотонная (счетная) последовательность ξ открытых покрытий пространства X, являющихся T_3-измельчениями. В силу 32 гл. V все элементы этих покрытий можно считать ξ-полными множествами. Тогда семейство $\bar{\mathscr{T}}$ всех ξ-полных подмножеств множества X образует меньшую, быть может не строго, чем исходная, топологию на X, причем (по отношению к $\bar{\mathscr{T}}$) ξ есть звездно монотонное изначальным образом множество открытых покрытий — последнее прямо следует из определения $\bar{\mathscr{T}}$. Кроме того, $(X, \bar{\mathscr{T}})$ — T_3-пространство. Следовательно, $(X, \bar{\mathscr{T}})$ метризуемо (75 гл. V, см. также 208 гл. V). Тождественное на X отображение пространства $(X, \mathscr{T})$ на пространство $(X, \bar{\mathscr{T}})$ — искомое уплотнение.

211. Существует ω-отображение f пространства X на метризуемое пространство Y, вес которого не превосходит $|\omega|$ (см. 207 гл. V). В покрытие Y всеми открытыми множествами, прообраз каждого из которых содержится в некотором элементе ω, можно звездно вписать открытое покрытие (см. 25 гл. V), и из последнего можно выделить покрытие λ множества Y, для которого $|\lambda|$ не превосходит веса Y. Прообраз λ при f — искомое покрытие пространства X (это очевидно).

216. В задаче 11 гл. III описано регулярное финально компактное пространство (следовательно, являющееся паракомпактом — см. 132 гл. V), произведение которого на себя не нормально — тем более, не паракомпактно (130 гл. V). См. также 221 гл. V.

217. См. Гомбаров [2].

218. Пространство Y является объединением локально конечной системы $\gamma = \{\Phi_t : t \in T\}$ бикомпактных подпространств. Для каждого $t \in T$ произведение $X \times \Phi_t$ — паракомпакт (см. 43 гл. VII). Ясно, что $\gamma^* = \{(X \times \Phi_t) : t \in T\}$ — локально конечное покрытие пространства $X \times Y$ замкнутыми паракомпактными множествами. Поэтому $X \times Y$ — паракомпакт (см. 131 гл. V).

219. Пространство Z регулярно, как произведение регулярных пространств. Зафиксируем в Y локально конечную базу $\mathfrak{U} = \{V_\alpha : \alpha \in A_i, i \in N^+\}$ (каждое $\mathfrak{U}_i = \{V_\alpha : \alpha \in A_i\}$ локально конечно). Положим $A = \bigcup \{A_i : i \in N^+\}$. Сначала докажем, что произвольное открытое в Z множество O имеет тип F_σ. Очевидно, существует такое семейство $\{H_\alpha : \alpha \in A\}$ открытых в X множеств, что $\bigcup \{H_\alpha \times V_\alpha : \alpha \in A\} = O \cap \bigcup \{H_\alpha \times V_\alpha : \alpha \in A\}$ (для некоторых $\alpha \in A$ может быть $H_\alpha = X$). В X всякое открытое множество имеет тип F_σ, поэтому при всех $\alpha \in A$ имеем $H_\alpha = \bigcup \{B_{\alpha, i} : i \in N^+\}$, где $B_{\alpha, i}$ — некоторое замкнутое в X множество для каждого $i \in N^+$. Положим $\gamma_{i,j} = \{B_{\alpha, i} \times V_\alpha : \forall_\alpha \in \Theta_j\}$ и $F_{i,j} = \bigcup \{G : G \in \gamma_{i,j}\}$. Ясно, что $\gamma_{i,j}$ — локально конечное семейство замкнутых множеств в Z. Очевидно, $O = \bigcup \{F_{i,j} : i \in N^+, j \in N^+\}$. Итак, O — множество типа F_σ.

Рассмотрим теперь произвольное открытое покрытие ω пространства Z. Для каждого $\alpha \in A$ существует семейство $\eta_\alpha = \{B_\gamma : \gamma \in T(\alpha)\}$ открытых в X множеств таких, что $\{B_\gamma \times V_\alpha : \gamma \in T(\alpha), \alpha \in A\}$ — открытое покрытие пространства Z, вписанное в ω. Положим $W_\alpha = \bigcup \{B_\gamma : \gamma \in T_\alpha\}$.

В силу 37 гл. V можно в покрытие η_α пространства W_α вписать открытое покрытие ξ_α, являющееся объединением счетного семейства $\{\xi_{\alpha,i} : i \in N^+\}$ локально конечных в X семейств множеств $\xi_{\alpha,i}$. Тогда $\mu_{i,j} = \{G \times V_\alpha : G \in \xi_{\alpha,i}, \alpha \in A_j\}$ — как легко проверить, локально конечное в Z семейство открытых множеств. Кроме того, $\mu = \bigcup \{\mu_{i,j} : i \in N^+, j \in N^+\}$ покрывает Z и вписано в ω. Значит, в каждое открытое покрытие пространства Z можно вписать σ-локально конечное открытое покрытие. Но Z регулярно. Значит (72 гл. V), Z — паракомпакт.

220. Нет, не обязано, см. 221 гл. V.

221. Утверждение (а) очевидно. Без труда проверяется, что $(X, \mathscr{T}^*)$ регулярно. Докажем (б). Достаточно (см. 127 гл. V) установить, что каждое открытое подпространство Y пространства $(X, \mathscr{T}^*)$ паракомпактно. Имеем $V = U \cup P$, где $U \in \mathscr{T}$, $P \subset X_0$. Положим $\mathfrak{B} = \{U \in \mathscr{U} : U \subset V\}$ и

$\xi = \{\{y\}: y \in P\}$. Ясно, что $\mathcal{B} \cup \xi$ — база пространства V (ибо $\mathcal{S} \subset \{\{y\}: y \in X_0\}$,— очевидно, база пространства $(X, \mathcal{S}^*)$). В произвольное открытое покрытие ω пространства V надо вписать локально конечное открытое покрытие. Можно считать, что $\omega \subset \mathcal{B} \cup \xi$. Тогда $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$, где $\omega_1 = \mathcal{B} \cap \omega$, а $\omega_2 = \xi \cap \omega$. Очевидно, $\omega_1 \subset \mathcal{S}$ и ω_1 покрывает U. Так как подпространство U пространства $(X, \mathcal{S})$ паракомпактно, то можно в ω_1 вписать локально конечное открытое покрытие γ_1 пространства U. Это γ_1 является одновременно локально конечным семейством открытых множеств в пространстве V. Очевидно, ω_2 покрыто в V. Значит, $\gamma_1 \cup \omega_2$ — локально конечное открытое покрытие пространства V, вписанное в ω. Осталось доказать (в).

Положим $Q = \overline{X} \setminus X_1$, $A = Q \times X_0$, $B = \{(x, x): x \in X_0\}$. Множества A и B замкнуты и Z и $A \cap B = \Lambda$. Покажем, что у A и B нет непересекающихся окрестностей. Пусть V — произвольная окрестность множества B и Z. Положим для каждого $n \in N^+$

$$S_{1/n}(x) = \left\{y \in X_0: |x - y| < \frac{1}{n}\right\} \quad \text{для} \quad x \in X_0,$$

$$U_n = \{x \in X_0: (\{x\} \times S_{1/n}(x)) \subset V\}.$$

Ясно, что $X_1 = \bigcup \{U_n: n \in N^+\}$. Так как X_1 не является множеством типа F_σ в X, то найдется $k \in N^+$, для которого $[U_k]_{\overline{X}} \cap Q \neq \Lambda$. Зафиксируем $x^* \in [U_k]_{\overline{X}} \cap Q$ и $y^* \in X_0$ так, чтобы было $|x^* - y^*| < \frac{1}{2k}$. Любая окрестность W точки (x^*, y^*) в пространстве Z содержит такую точку (x', y'), что $x' \in U_k$, $|x^* - x'| < \frac{1}{2k}$ и $y' = y^*$. Но $(\{x'\} \times S_{1/k}(x')) \subset V$, и так как

$$|y^* - x'| \leqslant |y^* - x^*| + |x^* - x'| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k},$$

то $(x', y^*) \in (\{x'\} \times S_{1/k}(x')) \subset V$. Итак, $W \cap V \neq \Lambda$, откуда следует, что $(x^*, y^*) \in [V]$. Но $(x^*, y^*) \in A$. Этим несвязность множеств A и B доказана.

222. Рассмотрим проектирования $\rho: X \times Y \to X$ и $\pi: X \times Y \to Y$. Отображение ρ совершенно (см. 33 гл. VI). Пусть $\pi = \{V_\beta: \beta \in N^+\}$ — счетная база в Y. Для каждого конечного множества $S \subset N^+$ положим $V_S = \bigcup \{V_\beta: \beta \in S\}$. Ясно, что $\Sigma = \{V_S: S \subset N^+, |S| < \aleph_0\}$ — также счетная база в Y. Для каждого $M \subset X \times Y$ через M_x обозначим множество $\pi((\{x\} \times Y) \cap M)$. Пусть A и B — два замкнутых непересекающихся множества в $X \times Y$. Для каждого $V_S \in \Sigma$ положим

$$U_S = \{x \in X: A_x \subset V_S \subset [V_S] \subset Y \setminus B_x\}.$$

Так как

$$X \setminus U_S = \rho(A \cap (X \times (Y \setminus V_S))) \cup \rho(B \cap (X \times [V_S]))$$

и ρ — замкнутое отображение, то U_S открыто в X. Нетрудно убедиться в том, что

$$\omega = \{U_S: S \subset N^+, |S| < \aleph_1\}$$

— (счетное) открытое покрытие пространства X. Так как X нормально и счетно паракомпактно, то существует такое его локально конечное счетное открытое покрытие $\omega' = \{U'_S: S \subset N^+, |S| < \aleph_1\}$, что $U'_S \subset [U'_S] \subset U_S$ (см. 137 гл. VI). Рассмотрим открытое в $X \times Y$ множество $\Gamma = \bigcup \{(U'_S \times V_S): S \subset N^+, |S| < \aleph_0\}$. Докажем, что

$$A \subset \Gamma \quad \text{и} \quad B \cap [\Gamma] = \Lambda.$$

Для каждой точки $(x, y) \in A$ имеем $x \in U'_S \subset U_S$ для некоторого $S \subset N^+$, $|S| < \aleph_0$. Тогда $(x, y) \in U'_S \times V_S \subset \Gamma$. Пусть теперь $(x, y) \in B \cap [\Gamma]$.

Рассмотрим окрестность Ox точки $x \in X$, пересекающуюся лишь с конечным числом элементов покрытия ω'. Тогда окрестность $Ox \times Y$ точки (x, y) в пространстве $X \times Y$ имеет непустое пересечение лишь с конечным числом элементов системы $\{U'_S \times V_S: S \subset N^+, |S| < \aleph_1\}$. Пусть это будут $U'_{S_1} \times V_{S_1}, \ldots, U'_{S_k} \times V_{S_k}$. Так как $(x, y) \in [\Gamma]$, то $(x, y) \in \bigcup_{i=1}^{k} [(U'_{S_i} \times V_{S_i})]$ и $(x, y) \in B \cap [U'_{S_i} \times V_{S_i}] = B \cap ([U'_{S_i}] \times [V_{S_i}]) \subset B \cap (U_{S_i} \times [V_{S_i}])$ для некоторого $i \leqslant k$. Тогда $x \in U_{S_i}$, $y \in B_x \cap [V_{S_i}]$. Но, по определению U_{S_i}, из $x \in U_{S_i}$ следует, что $B_x \cap [V_{S_i}] = \Lambda$. Возникшее противоречие означает, что $B \cap [\Gamma] = \Lambda$. Следовательно, $X \times Y$ нормально.

223. (а) Если X нормально и счетно паракомпактно, то $X \times I$ нормально в силу 222 гл. V.

(б) Пространство X гомеоморфно замкнутому подпространству пространства $X \times I$ и поэтому нормально. Пусть $\{F_i: i \in N^-\}$ — семейство замкнутых в X множеств, причем $F_{i-1} \subset F_i$ для каждого $i \in N^-$ и $\bigcap \{F_i: i \in N^-\} = \Lambda$. Рассмотрим открытые в $X \times I$ множества $U_i = (X \setminus F_i) \times \left[0, \frac{1}{i}\right) \subset X \times I$, где $i \in N^+$, и непересекающиеся замкнутые множества $A = (X \times I) \setminus \bigcup \{U_i: i \in N^+\}$, $B = X \times \{0\}$. Вследствие нормальности пространства $X \times I$ найдутся открытые в $X \times I$ множества U и V, для которых $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \Lambda$.

Рассмотрим далее открытые в X множества $W_i = \left\{x \in X: \left(x, \frac{1}{i}\right) \in U\right\}$, $i \in N^+$. Так как $B \cap [U] = \Lambda$, то $\bigcap \{W_i: i \in N^+\} = \Lambda$. Очевидно, $F_i \times \left\{\frac{1}{i}\right\} \subset A \subset U$. Поэтому $F_i = W_i$. Заключение о счетной паракомпактности пространства X следует теперь в силу 158 гл. V.

224. Нет. Пример построила М. Рудин [2].

225. Нет, не верно — это следует из задач 222 и 224 гл. V.

227. См. Архангельский [2].

228. См. Архангельский [2].

229. См. Филиппов [4] или Пономарев [3].

230. Нет, не всегда. Соответствующий пример самом недавно построил Воррел.

231. См. Филиппов [1].

ГЛАВА VI

ПРОСТРАНСТВА И НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В § 1 настоящей главы подробно изучаются два следующих класса отображений: *псевдооткрытые* и *бифакторные* отображения.

Псевдооткрытые отображения определены на стр. 92. Всякое псевдооткрытое отображение факторно (определение факторного отображения см. на стр. 58). Обратное неверно. С другой стороны, всякое непрерывное открытое, равно как и всякое непрерывное замкнутое отображение, являются псевдооткрытыми.

К классу псевдооткрытых отображений тесно примыкает введенный совсем недавно в топологию класс бифакторных отображений. Класс псевдооткрытых отображений занимает промежуточное место между классом факторных и классом бифакторных отображений, т. е. всякое бифакторное отображение псевдооткрыто, а всякое псевдооткрытое отображение факторно. При этом, конечно, не всякое факторное отображение псевдооткрыто и не всякое псевдооткрытое отображение бифакторно. Однако если непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ бикомпактно (см. стр. 59), то из его псевдооткрытости следует бифакторность (17 гл. VI).

Итак, отображение $f\colon X \to Y$ называется *бифакторным в точке* $y \in Y$, если для всякого покрытия γ множества $f^{-1}y$ открытыми в X множествами существует такое конечное подсемейство $\lambda \subset \gamma$, $|\lambda| \leqslant \aleph_0$, что $y \in \operatorname{Int} \bigcup (fU\colon U \in \lambda)$. Если отображение $f\colon X \to Y$ бифакторно в каждой точке $y \in Y$, то оно называется просто *бифакторным*.

Через $\operatorname{Int} A$, где $A \subset X$, а X — топологическое пространство, обозначается, как всегда, множество всех внутренних точек множества A, т. е. открытое ядро множества A в X.

Кроме того, в этой главе фигурируют уже встречавшиеся и ранее классы отображений: замкнутые отображения (см. стр. 58), совершенные отображения (см. стр. 58), факторные отображения (см. стр. 58), открытые отображения (см. стр. 59), неприводимые отображения (см. стр. 161) и другие типы отображений.

Настоящая глава посвящена подробному изучению всех перечисленных типов отображений, в особенности в связи с классификацией топологических пространств. П. С. Александров [2] еще в 1961 г. поставил следующую общую проблему:

а) Каковы те пространства, которые являются образами «хороших» пространств (метрических, паракомпактных, нульмерных и т. д.) при «хороших» непрерывных отображениях (замкнутых, совершенных, открытых и т. д.)?

б) Каковы те пространства, которые можно отобразить на «хорошие» пространства посредством «хороших» отображений?

С этим кругом вопросов тесно связан также вопрос о сохранении при тех или иных отображениях тех или иных топологических свойств, как при переходе к образу, так и при переходе к прообразу. В особенности интересен следующий вопрос: при каких отображениях образ метризуемого пространства метризуем?

Все эти вопросы занимают значительное место в §§ 1—4 настоящей главы.

Дадим определения некоторых классов отображений, встречающихся аналогически в этой главе.

1°. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *s-отображением*, если для любого $y \in Y$ подпространство $f^{-1}y \subset X$ сепарабельно. Если X метризуемо, то $f\colon X \to Y$ является s-отображением в том и только в том случае, когда для каждого $y \in Y$ подпространство $f^{-1}y \subset X$ имеет счетную базу.

2°. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *монотонным*, если для каждого $y \in Y$ подпространство $f^{-1}y \subset X$ связно.

3°. *Непрерывное отображение* $f\colon X \to Y$ *нульмерно*, если для всякого $y \in Y$ подпространство $f^{-1}y$ нульмерно (точнее, нульмерно в смысле ind, см. стр. 56).

4°. Отображение $f\colon X \to Y$ *конечнократно*, если $|f^{-1}y| < \aleph_0$ для любой точки $y \in Y$, называется *в точности n-кратным*, где n — положительное натуральное число, если $|f^{-1}y| = n$ для любого $y \in Y$, и *счетнократным*, если $|f^{-1}y| \leqslant \aleph_0$ для любого $y \in Y$.

5°. Точка $x_0 \in X$ является *точкой локального гомеоморфизма отображения* $f\colon X \to Y$, если существует такая окрестность Ux_0 этой точки, что сужение $f \mid Ux_0$ отображения f на Ux_0 является гомеоморфизмом на некоторую окрестность точки fx_0 в Y.

Если всякая точка $x \in X$ является точкой локального гомеоморфизма отображения $f\colon X \to Y$, то f называется *локальным гомеоморфизмом* или *локально топологическим отображением*.

6°. Отображение $f\colon X \to Y$ называется k-*накрывающим* (здесь k — начальная буква в слове «компактность»), если для всякого бикомпактного подпространства $\Phi \subset Y$ найдется такое бикомпактное подпространство $F \subset X$, что $\Phi = fF$.

Теперь напомним классическое понятие ретракта и ретракции. Подпространство F пространства X называется *ретрактом пространства* X, если существует такое непрерывное отображение $f\colon X \to F$, $f(X) = F$, что $fx = x$, когда $x \in F$. Отображение f в этом случае называется *ретракцией пространства* X *на свое подпространство* F. Если при этом f — замкнутое отображение, то

оно называется *замкнутой ретракцией пространства* X на свое подпространство F.

С какими же классами пространств чаще всего приходится оперировать в этой главе? Это, конечно, прежде всего классы бикомпактных и метризуемых пространств, а также классы паракомпактов, τ-паракомпактов *), где τ — кардинальное число, счетно компактных пространств, τ-компактных пространств *), счетно паракомпактных пространств, финально компактных и сильно паракомпактных пространств. Эти классы пространств определены ранее. Важное место в этой главе занимают пространства с первой аксиомой счетности (см. стр. 57), пространства с точечно счетной базой (см. стр. 70), пространства с равномерной базой (см. стр. 288), пространства со счетным измельчением или, что то же самое, пространства с измельчающимся счетным семейством открытых покрытий (см. стр. 289), а также пространства счетного и точечно счетного типа (см. стр. 153). Все эти классы пространств часто встречались в предыдущих главах.

В §§ 5 и 6 подробно изучается новый класс пространств, так называемые экстремально несвязные пространства. Экстремально несвязные пространства играют совершенно выдающуюся роль в теоретико-множественной математике. Сами по себе, если исходить только из их формального определения, экстремально несвязные пространства образуют довольно экзотический класс с целым рядом необычных свойств. Однако повторяем, их роль весьма важна. Достаточно сказать, что экстремально несвязные пространства играют важную роль в теории булевых алгебр, в аксиоматической теории множеств, а также в некоторых областях функционального анализа. Важность класса экстремально несвязных пространств в общей топологии в особенности становится ясной и понятной в связи с так называемой теорией абсолютов топологических пространств, которой посвящен последний § 6 этой главы, о чем речь будет идти несколько позже.

Теперь дадим определение: пространство X называется *экстремально несвязным*, если для всякого его открытого множества $U \subset X$ множество $[U]$ не только замкнуто, но и открыто в X.

Как правило, мы рассматриваем регулярные экстремально несвязные пространства (заметим, что они тогда автоматически вполне регулярны). Остановимся на одном важном понятии, которое фигурирует в § 4 этой главы. Это понятие примыкает к классическому понятию A-операции в дескриптивной теории множеств, правда, у нас в § 4 оно выполняет несколько подсобную роль.

*) Пространство X называется τ-*паракомпактным*, если во всякое открытое покрытие ω этого пространства мощности $|\omega| \leqslant \tau$ можно вписать локально конечное открытое покрытие. Если из всякого открытого покрытия ω, $|\omega| \leqslant \tau$, пространства X можно выделить конечное подпокрытие, то X называется τ-компактным пространством.

Пусть задано некоторое множество W мощности τ, $\tau \geqslant \aleph_0$, и топологическое пространство X. Предположим, что каждой конечной последовательности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ элементов множества W (где $n \in N^+$ произвольно) поставлено в соответствие открытое множество $U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ пространства X. При этом это соответствие должно быть таково, что имеет место равенство

$$U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} = \bigcup \{U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n \lambda_{n+1}} : \lambda_{n+1} \in W\}$$

для любого $n \in N^+$ и любой конечной последовательности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$: $\lambda_1 \in W$, $\lambda_2 \in W$, $\ldots$, $\lambda_n \in W$.

В этом случае семейство

$$\varphi = \{U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} : \lambda_1 \in W, \ldots, \lambda_n \in W, n \in N^+\}$$

называется *A_τ-системой открытых множеств пространства X*. Заметим, что мы, во-первых, не предполагаем, что конечные последовательности $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_1 \in W, \ldots, \lambda_n \in W$, состоят из попарно различных элементов множества W, во-вторых, мы не предполагаем, что различным последовательностям $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$ (т. е. таким последовательностям $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$, что $\lambda_i \neq \lambda'_i$ для некоторого $i \leqslant n$) ставятся в соответствие различные множества $U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ и $U_{\lambda'_1 \ldots \lambda'_n}$.

Для каждого фиксированного $n \in N^+$ положим

$$\varphi_n = \{U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} : \lambda_1 \in W, \ldots, \lambda_n \in W\}.$$

В том случае, когда φ_n — покрытие пространства X для каждого $n \in N^+$ (кстати, для этого достаточно потребовать, чтобы φ_1 было покрытием пространства X), A_τ-система φ называется *A_τ-последовательностью открытых покрытий пространства X*. Если при всем этом семейство $\{\varphi_n : n \in N^+\}$ покрытий φ_n измельчается в X (см. стр. 289), то семейство φ называется *измельчающейся A_τ-последовательностью открытых покрытий пространства X*.

Далее A_τ-последовательность $\varphi = \{U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} : \lambda_1 \in W, \ldots, \lambda_n \in W, n \in N^+\}$ открытых покрытий в X называется *полной*, если для любой счетной бесконечной последовательности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ элементов множества W непременно $\bigcap \{U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} : n \in N^+\} \neq \Lambda$.

Наконец, A_τ-последовательность φ *дизъюнктна*, если для любого $n \in N^+$ и различных последовательностей $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$, $\lambda_1 \in W, \ldots, \lambda_n \in W$, $\lambda'_1 \in W, \ldots, \lambda'_n \in W$, непременно $U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} \cap U_{\lambda'_1 \ldots \lambda'_n} = \Lambda$.

Теперь перейдем к заключительному параграфу. Центральное место здесь занимает понятие абсолюта регулярного пространства. Будем говорить, что пространство Y является *совершенным непроводимым прообразом* регулярного пространства X, если существует совершенное неприводимое отображение f пространства Y на X.

Пространство $\dot{X}$ называется *абсолютом регулярного пространства* X, если, во первых, $\dot{X}$ — совершенный неприводимый прообраз пространства X, а во-вторых, всякий совершенный неприводимый прообраз пространства $\dot{X}$ гомеоморфен $\dot{X}$.

Оказывается, у всякого регулярного пространства X существует и притом единственный, с точностью до гомеоморфизма, абсолют $\dot{X}$. Этот *абсолют* вполне регулярен и экстремально несвязен.

Мы скажем, что *два регулярных пространства* X и Y *особолюдны*, если их абсолюты $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ гомеоморфны. Ясно, что отношение особолюдности симметрично и транзитивно. Таким образом, все регулярные пространства разбиваются на *классы особолюдных пространств*. Два особолюдных пространства имеют много общих свойств. В особенности нас будут интересовать те пространства, которые особолюдны с некоторым метризуемым пространством.

Первая серия задач посвящена построению абсолюта данного регулярного пространства, доказательству его единственности, а также доказательству его основного свойства (см. 218 гл. VI). Наложим основную конструкцию и введем основные понятия, необходимые для построения абсолюта.

Пусть X — произвольное регулярное пространство. Через $\mathfrak{B}(X)$ мы обозначаем семейство всех непустых канонических замкнутых множеств в X.

Напомним, что замкнутое в X множество A называется *каноническим*, если оно является замыканием открытого в X множества, следовательно, является замыканием своего открытого ядра. Система $\xi \subset \mathfrak{B}(X)$ канонических замкнутых в X множеств *к-центрирована*, если $\bigcap\{\operatorname{Int} A: A \in \xi'\} \neq \Lambda$ для любой конечной подсистемы $\xi' \subset \xi$.

Всякую к-центрированную систему ξ канонических замкнутых множеств пространства X будем называть *к-системой*. Если к-система ξ не содержится ни в какой другой (отличной от ξ) к-системе, то ξ называется *к-ультрафильтром*. Если $\bigcap\{A: A \in \xi\} \neq \Lambda$, где ξ — к-система, то эта к-система называется *отмеченной*. Наконец в случае, когда $x \subset \bigcap\{A: A \subset \xi\}$, где $x \in X$ — некоторая точка, а ξ — к-система, эта *к-система отмечена точкой* x.

Важную роль играет понятие канонического покрытия пространства. Конечное замкнутое покрытие α пространства X называется *каноническим*, если все его элементы — канонические замкнутые множества и открытые ядра различных элементов из α не пересекаются. Иногда полезно допускать к рассмотрению и бесконечные замкнутые покрытия с перечисленными только что свойствами, прибавляя, требуя при этом, чтобы они были локально

конечны в X. Такие покрытия мы будем называть *локально конечными каноническими замкнутыми покрытиями пространства* X.

Если α — каноническое покрытие, то будем обозначать $\alpha^0 = \{\operatorname{Int} A: A \in \alpha\}$, через $\hat{\alpha}$ — множество всех элементов из α, снабженное дискретной топологией, а через $\alpha(x)$, где $x \subset X$, — звезду точки x относительно покрытия α, т. е. $\alpha(x) = \bigcup\{A \in \alpha: x \in A\}$.

Если каноническое покрытие α_2 вписано в каноническое покрытие α_1, то будем говорить, что α_2 следует за α_1, и писать при этом $\alpha_2 \succcurlyeq \alpha_1$.

Через $\mathfrak{A}(X)$ мы обозначаем семейство всех канонических покрытий данного регулярного пространства X. Это семейство измельчается и *направлено*. Последнее означает, что для любых двух покрытий $\alpha_1 \in \mathfrak{A}(X)$, $\alpha_2 \in \mathfrak{A}(X)$ существует такое покрытие $\alpha_3 \in \mathfrak{A}(X)$, что $\alpha_3 \succcurlyeq \alpha_1$ и $\alpha_3 \succcurlyeq \alpha_2$. Если $\alpha \in \mathfrak{A}(X)$, $\beta \in \mathfrak{A}(X)$, то $\gamma = \alpha \wedge \beta = \{[\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B]: A \in \alpha, \ B \in \beta \ \text{и} \ \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \neq \Lambda\}$.

Пусть теперь $\mathfrak{A}_0(X)$ — некоторое измельчающееся направленное семейство канонических покрытий пространства X. Рассмотрим тихоновское произведение $P_0 = \prod\{\hat{\alpha}: \alpha \in \mathfrak{A}_0(X)\}$. Если мы для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}_0(X)$ зафиксируем элемент $A^\alpha \in \alpha$, то получившую систему $\xi = \{A^\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}_0(X)\}$ мы можем рассматривать как точку в P_0. Точку $\xi = \{A^\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}_0(X)\}$ будем называть *нитью в семействе* $\mathfrak{A}_0(X)$, если $A^{\alpha_2} \subset A^{\alpha_1}$, как только $\alpha_2 \succcurlyeq \alpha_1$, где $\alpha_2 \in \mathfrak{A}_0(X)$, $\alpha_1 \in \mathfrak{A}_0(X)$. *Множество всех нитей в семействе* $\mathfrak{A}_0(X)$ мы обозначаем через $\Xi_0(X)$ и снабжаем топологией, индуцированной с тихоновского произведения $P_0 = \prod\{\hat{\alpha}: \alpha \in \mathfrak{A}_0(X)\}$. *Нить* $\xi \in \Xi_0(X)$ назовем *отмеченной*, если $\bigcap\{A: A \in \xi\} \neq \Lambda$. Если при этом $x \in \bigcap\{A: A \in \xi\}$, то *нить* ξ *отмечена точкой* x. Через $\dot{X}_0$ обозначаем *множество всех отмеченных нитей в семействе* $\mathfrak{A}_0(X)$, снабженное также индуцированной с P_0 топологией. Если $\xi \in \dot{X}_0$, то мы полагаем $\pi^0_X(\xi) = \bigcap\{A: A \in \xi\}$. Из того, что семейство $\mathfrak{A}_0(X)$ измельчается, следует, что $\pi^0_X\xi$ состоит ровно из одной точки. Таким образом мы определили отображение $\pi^0_X: \dot{X}_0 \to X$ пространства $\dot{X}_0$ всех отмеченных нитей в семействе $\mathfrak{A}_0(X)$ в пространство X. Это отображение называется *каноническим отображением, порожденным семейством* $\mathfrak{A}_0(X)$. Если мы применим эту конструкцию к семейству $\mathfrak{A}(X)$ всех канонических покрытий данного регулярного пространства X, то получим пространство всех нитей в $\mathfrak{A}(X)$, обозначаемое через $\Xi(X)$, пространство всех отмеченных нитей в $\mathfrak{A}(X)$, обозначаемое через $\dot{X}$, и натуральное отображение $\pi_X: \dot{X} \to X$. В результате $\dot{X}$ будет абсолютом пространства X,

в $\Xi(X)$ — расширением Стоуна — Чеха этого абсолюта (см. 204 гл. VI).

Введем некоторые обозначения, встречающиеся в § 6.

1°. Если $A_1 \subset \mathfrak{B}(X), \ldots, A_n \subset \mathfrak{B}(X)$, то

$$\overline{(A_1, \ldots, A_n)} = \{\xi \in \Xi(X): A_1 \subset \xi, \ldots, A_n \in \xi\},$$

$$(A_1, \ldots, A_n) = \{\xi \in X: A_1 \in \xi, \ldots, A_n \subset \xi\}.$$

2°. Если $\alpha \subset \mathfrak{A}(X)$ — каноническое покрытие, то

$$(\overline{\alpha}) = \{\overline{(A)}: A \in \alpha\} \text{ и } (\alpha) = \{(A): A \in \alpha\}.$$

3°. $(\alpha)(\xi) = \bigcup\{(A) \subset (\alpha): \xi \subset (A)\}$, где $\xi \in X$.

§ 1. Факторные, бифакторные и псевдооткрытые отображения

1. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ пространства X на пространство Y является факторным отображением в том и только в том случае, когда для каждого отображения $g: Y \to Z$ из непрерывности gf следует непрерывность g.

2. Докажите, что всякое T_3-пространство X можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить на бикомпактное T_1-пространство.

3. Докажите, что всякое хаусдорфово локально бикомпактное пространство можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить на некоторый бикомпакт.

4. Произведение (стр. 17) любого множества бикомпактных отображений (стр. 59) является бикомпактным отображением.

5. Покажите, что если X — хаусдорфово пространство, а j — ретракция на $j(X) \subset X$, то $j(X)$ замкнуто в X.

6. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $f: X \to Y$ — факторное бикомпактное отображение пространства X на пространство Y и $\tilde{\rho}(y', y'') = \rho(f^{-1}y', f^{-1}y'')$ для всех $y', y'' \in Y$. Покажите, что $\tilde{\rho}$ — симметрика на Y, порождающая заданную на Y топологию.

7. Если бикомпакт является образом метрического пространства, то он метризуем.

8. Пусть f — совершенное отображение метрического пространства (X, ρ) на T_1-пространство Y и $d(y', y'') = \rho(f^{-1}y', f^{-1}y'')$ для всех $y', y'' \in Y$.

Покажите, что

1) d — симметрика на Y;

2) d порождает заданную на Y топологию;

3) d удовлетворяет условию (к) из задачи 96 гл. V.

Выведите отсюда и из задачи 96 гл. V, что Y метризуемо.

9. Если диадический бикомпакт X является фактор-пространством метрического пространства, то X обладает счетной базой.

10. Верно ли, что произведение любого множества псевдооткрытых бикомпактных отображений хаусдорфовых пространств является псевдооткрытым бикомпактным отображением?

11. Если X — совершенно нормальное пространство (см. определение на стр. 58), то для любого псевдооткрытого бикомпактного отображения $f: X \to Y$, где $f(X) = Y$, каждое замкнутое в Y множество имеет тип G_δ.

12. Если пространство Y является образом пространства X при псевдооткрытом бикомпактном отображении, то вес Y не превосходит веса X.

13. Каждое бифакторное отображение является факторным.

14. Каждое бифакторное отображение псевдооткрыто.

15. Если $f: X \to Y$ — бифакторное отображение и $Y' \subset Y$, $X' = f^{-1}Y'$, то $f' = f|X'$, $f': X' \to Y'$ является бифакторным отображением.

16. Отображение $f: X \to Y$, где $f(X) = Y$, является бифакторным в том и только в том случае, когда для любого предфильтра ξ на Y и любой его точки прикосновения y (см. стр. 33) существует точка $x \in f^{-1}y$, являющаяся точкой прикосновения для $f^{-1}\xi = (f^{-1}B, B \in \xi)$.

17. Бикомпактное отображение бифакторно в том и только в том случае, когда оно псевдооткрыто.

18. Образ локально бикомпактного пространства при бифакторном отображении является локально бикомпактным пространством.

19. Произведение любого множества бифакторных отображений является бифакторным отображением.

20. Пусть $f: X \to Y$, $f(X) = Y$, — бифакторное отображение. Тогда вес Y не превосходит веса X.

21. Пусть $f: X \to Y$ — факторное отображение, Y — хаусдорфово пространство и $f(X) = Y$. Пусть, далее, y — точка пространства Y, для которой $f^{-1}y$ — финально компактное подпространство пространства X. Предположим также, что пространство Y в точке y удовлетворяет первой аксиоме счетности. Тогда f бифакторно в точке y.

22. Если $f: X \to Y$ — факторное отображение пространства со счетной базой X на хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности Y, то Y имеет счетную базу.

23. Если хаусдорфово пространство Y с первой аксиомой счетности является фактор-пространством локально бикомпактного пространства со счетной базой, то Y — локально компактное метризуемое пространство со счетной базой.

24. Существует ли факторное не псевдооткрытое отображение локально бикомпактного хаусдорфова пространства на бикомпакт?

25. Пусть $f: X \to Y$ — факторное отображение, $f(X) = Y$ и $\varphi: F \to F$ — тождественное отображение бикомпакта F на себя.

Тогда произведение $\varphi = f \times i: X \times F \to Y \times F$ отображений f и i является факторным отображением (сравните с задачей 307 гл. II).

26. Если $f: X \to Y$ — факторное отображение, $f(X) = Y$, Z — локально бикомпактное хаусдорфово пространство и $j: Z \to Z$ — тождественное отображение, то $f \times j: X \times Z \to Y \times Z$ тоже является факторным отображением.

27. Если $f: X \to Y$ — факторное монотонное отображение сильно паракомпактного метризуемого пространства X на пространство Y с первой аксиомой счетности, то Y метризуемо и сильно паракомпактно.

28. В классе хаусдорфовых пространств пространства Шрепе — Урысона и только они являются образами метрических пространств при непрерывных псевдооткрытых отображениях.

§ 2. Совершенные отображения

29. Композиция совершенных отображений является совершенным отображением.

30. Сужение совершенного отображения на замкнутое подпространство слоя является совершенным отображением.

31. Произведение (любого множества) совершенных отображений вполне регулярных пространств является совершенным отображением.

32. Для каждого совершенного отображения $f: X \to Y$, $f(X) = Y$, существует такое замкнутое множество $F^* \subset X$, что $f(F^*) = Y$ и $f | F^*$ — совершенное неприводимое отображение.

33. Пусть X — произвольное топологическое пространство, F — бикомпакт, $X \times F$ — топологическое произведение и $\pi: X \times F \to X$ — естественное проектирование на первый сомножитель, т. е. $\pi(x, a) = x$ для всех $x \in X$, $a \in F$.

Докажите, что π — совершенное отображение.

34. Пусть X — хаусдорфово пространство, а $\mathfrak{F} = \{F_t: t \in T\}$ — его непрерывное разбиение на бикомпакты (см. стр. 92). Каждый бикомпакт F_t разобьем на его связные компоненты (стр. 170): $F_t = \bigcup \{F_{ts}: s \in S_t\}$ (здесь F_{ts} — связная компонента бикомпакта F_t).

Рассмотрим разбиение $\mathfrak{K}$ пространства X: $X = \bigcup \{F_{ts}: t \in T,\ s \in S_t\}$.

Докажите, что $\mathfrak{K}$ — также непрерывное разбиение пространства X.

35. Пусть $f: X \to Y$ — совершенное отображение хаусдорфова пространства X на хаусдорфово пространство Y. Докажите, что существуют такое хаусдорфово пространство Z и такие совершенные отображения $\varphi: X \to Z$ и $\psi: Z \to Y$, что $f = \psi\varphi$, φ монотонно, а ψ нульмерно.

36. Если $f: X \to Y$ — совершенное отображение пространства X на бикомпактное пространство Y, то X бикомпактно.

37. Если $f: X \to Y$ — непрерывное, замкнутое отображение пространства X на финально компактное пространство Y, при котором подпространство $f^{-1}y$ для всякой точки $y \in Y$ финально компактно, то X финально компактно.

38. Если f — непрерывное замкнутое отображение пространства X на τ-паракомпактное (стр. 342) (где τ — фиксированное кардинальное число, $\tau \geqslant \aleph_0$) пространство Y такое, что $f^{-1}(y)$ — τ-компактное подпространство (стр. 342) в X для каждого $y \in Y$, то X является τ-паракомпактным.

39. Пусть f — непрерывное замкнутое отображение пространства X на τ-компактное (где τ — фиксированное кардинальное число, $\tau \geqslant \aleph_0$) пространство Y, причем $f^{-1}y$ является τ-компактным для каждой точки $y \in Y$. Тогда X будет τ-компактным.

40. Если f — непрерывное замкнутое отображение пространства X на счетно паракомпактное пространство Y и прообразы всех точек счетно компактны, то X счетно паракомпактно.

41. Если пространство Y является образом пространства X при совершенном отображении, то вес Y не превосходит веса X.

42. Если пространство X совершенно отображается на пространство Y веса $\leqslant \tau$, то из каждого открытого покрытия пространства X можно выделить подпокрытие мощности $\leqslant \tau$.

43. Произведение паракомпакта X на бикомпакт Y является паракомпактом.

44. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ является совершенным в том и только в том случае, если для каждого предфильтра ξ в X и каждой точки $y \in Y$, являющейся точкой прикосновения для $f\xi = \{fP: P \in \xi\}$, существует точка прикосновения $x \in f^{-1}y$ для ξ.

45. Непрерывное отображение f локально бикомпактного хаусдорфова пространства X на (небикомпактное) локально бикомпактное хаусдорфово пространство Y в том и только в том случае является совершенным отображением, когда f можно продолжить до непрерывного отображения $\tilde{f}: \alpha X \to \alpha Y$, где αX и αY — бикомпактные расширения П. С. Александрова пространств X и Y (т. е. $|\alpha X \setminus X| \leqslant 1$ и $|\alpha Y \setminus Y| \leqslant 1$ — см. 176 гл. III).

46. Пусть bX — бикомпактное хаусдорфово расширение пространства X, bY — бикомпактное хаусдорфово расширение пространства Y и $\tilde{f}: bX \to bY$ — непрерывное отображение, причем $\tilde{f}(bX) = bY$ и $\tilde{f}(bX \setminus X) \subset bY \setminus Y$. Тогда $f: X \to Y$ — совершенное отображение X на Y, где $f = \tilde{f} | X$.

47. Пусть bX, bY — бикомпактные хаусдорфовы расширения пространств X, Y соответственно и $\tilde{f}: bX \to bY$ — непрерывное

отображение, сужение которого $f_0 = f|X$ на X является совершенным отображением X на Y. Тогда $f(bX \setminus X) \subset bY \setminus Y$.

48. Пусть $f: X \to Y$ — совершенное отображение вполне регулярного пространства X на вполне регулярное пространство Y.

(а) Покажите, что в случае, когда одно из этих пространств локально бикомпактно, то и другое также локально бикомпактно.

(б) Покажите, что из полноты в смысле Чеха одного из этих пространств вытекает полнота в смысле Чеха и другого.

49. Если X — метризуемое пространство, а f — совершенное отображение пространства X на T_1-пространство Y, то Y метризуемо.

50. Вполне регулярное пространство Y, являющееся образом вполне регулярного пространства X точечно счетного типа при совершенном отображении, может не быть пространством точечно счетного типа.

51. Если X имеет базу кратности τ, $\tau \geqslant \aleph_0$, и $f: X \to Y$, $fX = Y$ — совершенное отображение, то и Y имеет базу кратности τ.

52. Приведите пример регулярного финально компактного пространства, которое не отображается совершенно ни на какое сепарабельное пространство.

53. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение пространства X на пространство Y; bX, bY — бикомпактные хаусдорфовы расширения этих пространств, причем задано продолжение отображения f до непрерывного отображения $\tilde{f}: bX \to bY$. Предположим, что (а) сужение $\tilde{f}|(bX \setminus X)$ является гомеоморфизмом пространства $bX \setminus X$ на пространство $bY \setminus Y$ и (б) существует такое непрерывное отображение $\varphi: Y \to X$, что $f\varphi(y) = y$ для каждого $y \in Y$.

Докажите, что сужение $\tilde{f}|R(X)$ является гомеоморфизмом пространства $R(X)$ на пространство $R(Y)$ (где $R(X)$ состоит из всех точек пространства X, в которых X не локально бикомпактно; аналогичное замечание относится к $R(Y)$).

54. Пусть X — бикомпакт, содержащий более одной точки, Y — вполне регулярное не локально бикомпактное пространство, $\pi: X \times Y \to Y$ — проектирование и $b(X \times Y)$, bY — такие бикомпактные хаусдорфовы расширения пространств $X \times Y$ и Y соответственно, что π продолжается до непрерывного отображения $\pi^*: b(X \times Y) \to bY$. Тогда отображение $\pi^*|(b(X \times Y) \setminus (X \times Y))$ не может быть гомеоморфизмом.

55. Если $f: X \to Y$ — совершенное отображение и $g: X \to Z$ — непрерывное отображение, причем Z — хаусдорфово пространство, то диагональное (стр. 17) произведение $f \Delta g: X \to Y \times Z$ тоже является совершенным отображением (не предполагается, что $f(X) = Y$ и $g(X) = Z$).

56. Пусть $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ — непрерывные отображения, причем $gf: X \to Z$ — совершенное отображение и Y — хаусдорфово пространство. Тогда отображение f тоже совершенно. Кроме того, если $f(X) = Y$, то g тоже совершенно.

57. Если $f: X \to Y$ — непрерывное отображение, X — хаусдорфово пространство, $X_1 \subset X$ и $f: X_1 \to Y$ — совершенное отображение (последнее означает, что $f: X_1 \to Y$ — совершенное отображение пространства X_1 на замкнутое подпространство пространства Y), то X_1 замкнуто в X.

58. Диагональное произведение любого множества отображений хаусдорфова пространства, одно из которых совершенно, является совершенным отображением.

59. Если X допускает совершенное отображение в пространство Y и непрерывное взаимно однозначное отображение (уплотнение) в хаусдорфово пространство Z, то X гомеоморфно некоторому замкнутому подпространству пространства $Y \times Z$.

60. Пусть Y — произвольное пространство и X — вполне регулярное пространство. Тогда следующие утверждения равносильны:

(а) существует совершенное отображение $f: X \to Y$;

(б) существует такой бикомпакт Z, что X гомеоморфно некоторому замкнутому подпространству пространства $Y \times Z$.

61. Если хаусдорфово пространство X, обладающее сетью мощности, не большей τ, можно совершенно отобразить на пространство веса, не большего τ, то и X имеет вес, не больший τ.

62. Если пространство X совершенно отображается на метрическое пространство и уплотняется на другое метрическое пространство, то оно метризуемо.

63. Если пространство X совершенно отображается на пространство веса, не большего τ, и уплотняется на хаусдорфово пространство веса, не большего τ, то вес его самого не превосходит τ.

64. Если пространство X совершенно отображается на пространство с первой аксиомой счетности и уплотняется на пространство с первой аксиомой счетности, то оно и само удовлетворяет первой аксиоме счетности.

65. Если пространство X совершенно отображается на пространство с равномерной базой и уплотняется на хаусдорфово пространство с равномерной базой, то оно само имеет равномерную базу.

66. Если пространство X совершенно отображается на пространство со счетным измельчением и уплотняется на хаусдорфово пространство со счетным измельчением, то оно само обладает счетным измельчением.

67. Хаусдорфово пространство, являющееся прообразом k-пространства при совершенном отображении, — тоже k-пространство.

68. Пусть $f\colon X \to Y$ — нульмерное замкнутое отображение нормального локально связного пространства X на пространство Y. Пусть $\theta = \{V_t\colon t \in T\}$ — база пространства Y. Для каждого $t \in T$ рассмотрим систему $\sigma_t = \{U_{t\alpha}\colon \alpha \in A_t\}$ всех связных компонент множества $f^{-1}V_t$. Докажите, что система $\sigma = \bigcup\{\sigma_t\colon t \in T\} = \{U_{t\alpha}\colon \alpha \in A_t,\ t \in T\}$ — база пространства X.

69. Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение локально связного пространства X на пространство Y веса, не большего τ, где τ — бесконечное кардинальное число. Тогда для каждого открытого в Y множества $V \subset Y$ семейство σ_V связных компонент множества $f^{-1}V$ имеет мощность, не превосходящую τ.

70. Пусть $f\colon X \to Y$ — замкнутое нульмерное отображение нормального локально связного пространства X на метризуемое пространство Y. Тогда X также метризуемо.

71. Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное нульмерное отображение нормального локально связного пространства X на пространство Y. Тогда вес пространства X совпадает с весом пространства Y.

72. Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное нульмерное отображение нормального локально связного пространства X на пространство Y счетного веса. Докажите, что X метризуемо.

§ 3. Замкнутые отображения

73. Пусть bX и bY — бикомпактные хаусдорфовы расширения пространств X и Y соответственно и $f\colon bX \to bY$ — непрерывное отображение, сужение $f_0 = f \mid X$ которого на X является замкнутым отображением пространства X в пространство Y. Тогда $[f_0^{-1}y]_{bX} = f^{-1}y$ для любого $y \in Y$.

74. Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное замкнутое отображение, $f(X) = Y$ и каждое замкнутое в X множество имеет тип G_δ, то и каждое замкнутое в Y множество имеет тип G_δ. Верно ли аналогичное утверждение для других мощностей?

75. Образ коллективно нормального пространства при непрерывном замкнутом отображении является коллективно нормальным пространством.

76. Регулярное пространство Y, являющееся образом паракомпакта X при непрерывном замкнутом отображении, также паракомпактно.

77. Пусть X — метризуемое пространство: $\dim X = 0$ (см. 15 гл. V), а F — замкнутое в X подмножество. Тогда существует такое непрерывное замкнутое отображение $f\colon X \to F$ на F, что $fx = x$, если $x \in F$ (F — ретракт X при замкнутой ретракции).

78. Пусть $B(\tau)$ — бэровское пространство веса τ (246 гл. II), а $X \subset B(\tau)$ — его замкнутое подпространство. Докажите, что существует замкнутая ретракция $B(\tau)$ на X.

79. Пусть X — хаусдорфово пространство счетной тесноты (см. стр. 57) и $f\colon T(\omega_1) \to X$ (см. стр. 152) — непрерывное отображение. Тогда f замкнуто.

80. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное замкнутое отображение пространства X на счетно компактное T_1-пространство Y. Тогда, каковы бы ни были точка $y \in Y$ и непрерывная вещественная функция φ на X, сужение φ на множество $\mathrm{Fr}\,(f^{-1}y)$ является ограниченной функцией (здесь $\mathrm{Fr}\,(f^{-1}y)$ — граница множества $f^{-1}y$ в X).

81. Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное замкнутое отображение нормального пространства X в T_1-пространство Y с первой аксиомой счетности, то граница множества $f^{-1}y$ для каждого $y \in Y$ счетно компактна.

82. Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное замкнутое отображение нормального слабо паракомпактного пространства X в T_1-пространство Y с первой аксиомой счетности, то для каждой точки $y \in Y$ граница множества $f^{-1}y$ является бикомпактом.

83. При непрерывном замкнутом отображении нормального пространства X на счетно компактное T_1-пространство Y граница прообраза каждой точки счетно компактна.

84. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное замкнутое отображение нормального пространства X на T_1-пространство Y и y — некоторая точка пространства Y, обладающая таким счетным семейством γ окрестностей в Y, что, как бы ни были выбраны $g(U) \subset U$ с соблюдением условия $g(U) \neq g(V)$ при $U \neq V$, множество $\{g(U)\colon U \in \gamma\}$ имеет предельную точку в Y. Тогда граница множества $f^{-1}y$ является счетно компактным пространством.

85. Если X — паракомпакт, Y — T_1-пространство точечно счетного типа и $f\colon X \to Y$ — непрерывное замкнутое отображение, $f(X) = Y$, то граница множества $f^{-1}y$ в X бикомпактна для каждого $y \in Y$.

86. Пусть Y — простейший счетный бикомпакт, $Z = T(\omega_1)$ (см. стр. 152), $X = Y \times Z$ (топологическое произведение) и $f\colon X \to Y$ — естественное проектирование пространства X на первый сомножитель. Тогда: (а) X нормально; (б) X счетно компактно; (в) отображение f замкнуто; (г) $\mathrm{Fr}\,(f^{-1}y^*) = f^{-1}(y^*)$ гомеоморфно Z и не является бикомпактом, где y^* — единственная неизолированная в Y точка.

87. Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное замкнутое отображение паракомпакта X на T_1-пространство Y с первой аксиомой счетности, то существует такое замкнутое подпространство X^* пространства X, что $fX^* = Y$ и $f_0 = f \mid X^*$, $f_0\colon X^* \to Y$ — совершенное отображение.

88. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное замкнутое отображение T_1-пространства X на T_1-пространство Y, при котором граница прообраза каждой точки бикомпактна. Тогда существует замкнутое подпространство X^* пространства X, для которого $f(X^*) = Y$

и сужение $f_\alpha = f|X^*$; $f_\alpha\colon X^* \to Y$ является совершенным отображением.

89. Если T_1-пространство Y точечно счетного типа является образом метрического пространства X при непрерывном замкнутом отображении, то оно метризуемо.

90. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $\mathfrak{A}$ — такое его разбиение на замкнутые попарно непересекающиеся множества, что для любого $\varepsilon > 0$ множество элементов разбиения $\mathfrak{A}$, диаметр которых превосходит ε, конечно. Тогда $\mathfrak{A}$ — непрерывное разбиение.

91. Приведите пример непрерывного разбиения $\mathfrak{A}$ сепарабельного метрического пространства X на попарно непересекающиеся замкнутые небикомпактные множества с пустой внутренностью.

92. Приведите пример нормального пространства, ни в одной точке не удовлетворяющего первой аксиоме счетности, которое является образом сепарабельного метризуемого пространства при непрерывном замкнутом отображении.

93. Пусть $\gamma = \{G_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — точечно конечное открытое покрытие T_1-пространства X и $f\colon X \to Y$ — непрерывное замкнутое отображение этого пространства на некоторое k-пространство Y (ск. стр. 153). Тогда множество $D = \{y \in Y : f^{-1}y \cap (X \setminus \bigcup \{G_\alpha\colon \alpha \in A'\}) \neq \Lambda$ для любого конечного множества $A' \subset A\}$ дискретно в Y (а значит, и замкнуто — см. стр. 288).

94. Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное замкнутое отображение слабо паракомпактного локально бикомпактного T_1-пространства X на пространство Y, то для всех $y \in Y$, лежащих в дополнении до некоторого дискретного в Y множества A, подпространство $f^{-1}y$ бикомпактно.

95. Образ локально бикомпактного слабо паракомпактного T_1-пространства при непрерывном замкнутом отображении представим в виде объединения двух своих локально бикомпактных подпространств, из которых одно открыто, а другое замкнуто.

96. Если X — регулярное пространство со счетной сетью $\mathscr{S}$, $f\colon X \to Y$ — замкнутое непрерывное отображение и $f(X) = Y$, то множество всех точек $y \in Y$, для которых $f^{-1}y$ небикомпактно, имеет мощность не более $\aleph_0$.

97. Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное замкнутое счетнократное отображение регулярного пространства X со счетной сетью $\mathscr{S}$ на T_1-пространство Y, то Y можно представить как объединение счетного семейства подпространств, гомеоморфных некоторым подпространствам пространства X.

98. Пусть $\{F_\alpha\colon \alpha \in M\}$ — семейство всех элементов некоторого непрерывного разбиения топологического пространства X и $\xi = \{U_\alpha\colon \alpha \in M\}$ — семейство открытых в X множеств таких, что $U_\alpha \supset F_\alpha$ при каждом $\alpha \in M$. Положим $M_\xi = \{\alpha \in M$: существует $\alpha' \in \bigcup_\beta M \setminus \{\alpha\}$, для которого $U_{\alpha'} \supset F_\alpha\}$. Тогда, для любого $\beta \in M$, $|\{\alpha \in M \setminus M_\xi\colon \langle U_\beta\rangle \cap F_\alpha \neq \Lambda\}| \leqslant 1$, где $\langle U_\beta\rangle$ — наибольшее отмеченное открытое множество, лежащее в U_β, т. е. объединение всех элементов рассматриваемого разбиения, содержащихся в U_β (ск. стр. 32). Далее $\{\{F_\alpha\}\colon \alpha \in M \setminus M_\xi\} = Z \setminus Z_\xi$, где Z — пространство рассматриваемого разбиения, $Z_\xi = \{\{F_\alpha\}\colon \alpha \in M_\xi\}$ и $Z \setminus Z_\xi$ дискретно в Z (ск. стр. 288).

99. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и f — его замкнутое непрерывное отображение на некоторое T_1-пространство Z. Тогда $X = \bigcup \{Y_i\colon i = 0, 1, 2, \ldots\}$, где, при каждом $i \geqslant 1$, Y_i — дискретное замкнутое в X множество и $f^{-1}z$ — компакт для любого $z \in Y_0$.

100. T_1-пространство Y, являющееся образом метрического пространства X при непрерывном замкнутом отображении f, представляется в виде объединения метризуемого подпространства и счетного семейства замкнутых дискретных (следовательно, тоже метризуемых) подпространств.

101. Если T_1-пространство Y является образом некоторого метризуемого пространства со счетной базой X при непрерывном замкнутом отображении, то в Y найдется такое подпространство Y^*, обладающее счетной базой, что $|Y \setminus Y^*| \leqslant \aleph_0$.

102. Пусть $f\colon X \to Y$ — замкнутое непрерывное отображение, X — паракомпакт, $fX = Y$, а Y — T_1-пространство, в котором каждое недискретное в Y подмножество содержит счетное не замкнутое в Y подмножество. Тогда мощность множества всех тех точек пространства Y, прообразы которых не бикомпактны, не превосходит $\tau^{\aleph_0}$, где τ — вес пространства X.

103. Пусть τ — кардинальное число, X — паракомпакт, который удовлетворяет первой аксиоме счетности и обладает сетью мощности, не большей τ. Тогда при любом непрерывном замкнутом отображении пространства X прообразы всех точек, за исключением, быть может, некоторого множества мощности, не превосходящей τ, бикомпактны.

104. Пусть f — непрерывное замкнутое отображение паракомпакта X веса τ на T_1-пространство Y, удовлетворяющее условию: каждое недискретное подпространство пространства Y содержит счетное незамкнутое (в Y) множество (иначе говоря, Y — пространство счетной тесноты). Тогда в Y существует подпространство Y^* веса, не большего τ, такое, что $|Y \setminus Y^*| \leqslant \tau$.

105*. Приведите пример паракомпакта X, $|X| \geqslant \omega X$, и его замкнутого непрерывного отображения на паракомпакт Y, при котором $f^{-1}y$ не бикомпактно для любой точки $y \in Y$.

106. Если паракомпакт X является k-пространством и $f\colon X \to Y$ — его непрерывное замкнутое отображение на T_1-пространство Y, то $Y = Y^* \cup Y'$, где вес Y^* и мощность Y' не превосходят веса пространства X.

107. Если топологически однородное (см. стр. 142) T_1-пространство Y, не являющееся объединением никакого счетного семейства своих дискретных подпространств, является образом метризуемого пространства при непрерывном замкнутом отображении, то оно само метризуемо.

108. Если несчетное топологически однородное T_1-пространство Y является образом регулярного пространства X со счетной базой при непрерывном замкнутом отображении f, то Y само имеет счетную базу.

109. Пусть $f\colon X \to Y$ — замкнутое неприводимое отображение, $f(X) = Y$. Тогда для любого открытого в X множества U множество $f^{\#}f^{\#}U$ открыто, вгусто, лежит в U и всюду плотно в U. Здесь $f^{\#}U = \{y \in Y\colon f^{-1}y \subset U\}$.

110. Пусть $f\colon X \to Y$ — замкнутое неприводимое отображение. Тогда

$$f|U| = |f^{\#}U|$$

для любого открытого в X множества U и образа любого канонического замкнутого в X множества есть каноническое замкнутое в Y множество (см. определение на стр. 62).

111. Пусть $f\colon X \to Y$ — замкнутое неприводимое отображение T_1-пространства X на T_1-пространство Y. Тогда точка $x_0 \in X$ изолирована в X в том и только в том случае, когда точка fx_0 изолирована в Y.

112. Если $f\colon X \to Y$ — неприводимое отображение T_1-пространства X на некоторое пространство Y, то для каждой точки $y \in Y$ либо граница множества $f^{-1}y$ в X совпадает с $f^{-1}y$, либо $|f^{-1}y| = 1$.

113. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное, замкнутое и неприводимое отображение вполне регулярного пространства X на вполне регулярное пространство Y. Доказать, что непрерывное продолжение $\bar{f}\colon \beta X \to \beta Y$ (на расширении Стоуна — Чеха этих пространств) также неприводимо (см. 34 гл. IV).

114. Всякое непрерывное замкнутое неприводимое отображение паракомпакта на T_1-пространство с первой аксиомой счетности совершенно.

§ 4. Открытые отображения

115. Каждое T_1-пространство X, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, является образом некоторого метрического пространства S (можно считать, что $S \subset B(\tau)$, где $\tau = wX$ и $B(\tau)$ — бэровское пространство) при непрерывном открытом отображении (верно и обратное утверждение).

116. Верно ли, что бикомпакт, являющийся образом метрического пространства при непрерывном открытом отображении, непременно метризуем?

117. T_1-пространство X обладает точечно счетной базой в том и только в том случае, если оно является образом некоторого метрического пространства S при таком непрерывном открытом отображении, что прообраз каждой точки обладает счетной базой (при этом можно считать, что $S \subset B(\tau)$, где $\tau = wX$, а $B(\tau)$ — бэровское пространство веса τ; см. 246—248 гл. II).

118. T_1-пространство Y в том и только в том случае обладает равномерной базой, если оно является образом некоторого метрического пространства S при непрерывном открытом бикомпактном отображении (можно считать, что $S \subset B(\tau)$, $\tau = w\mathbb{R}$).

119. Если локально бикомпактное хаусдорфово пространство X является образом метрического пространства при непрерывном открытом и отображении, то оно метризуемо.

120. Пусть $f\colon M \to X$ и $g\colon X \to Y$ — непрерывные открытые бикомпактные отображения, где M — метрическое, а X и Y — вполне регулярные пространства. Верно ли, что тогда Y обладает равномерной базой и, следовательно, (см. 118 гл. VI) является образом некоторого метрического пространства при непрерывном открытом бикомпактном отображении?

121. Верно ли, что прообраз бикомпакта при непрерывном открытом бикомпактном отображении является бикомпактом?

122. Пусть X — вполне регулярное пространство, в котором каждое замкнутое множество имеет тип G_δ, и f — непрерывное открытое бикомпактное отображение этого пространства на вполне регулярное пространство Y. Верно ли, что и в Y каждое замкнутое множество имеет тип G_δ?

123. Докажите, что всякое открытое, непрерывное и неприводимое отображение $f\colon X \to Y$ хаусдорфовых пространств является гомеоморфизмом.

124. Каждое локально гомеоморфное ровно k-кратное отображение хаусдорфова пространства замкнуто.

125. Всякое открытое ровно k-кратное отображение хаусдорфова пространства X на пространство Y локально гомеоморфно (т. е. у каждой точки существует окрестность, которая гомеоморфно отображается на открытое в образе множество) и замкнуто.

126. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное открытое конечнократное отображение, вес Y не превосходит τ, X — хаусдорфово пространство и $\tau \geqslant \aleph_0$. Тогда в X есть сеть мощности, не большей τ.

127. (а) Если хаусдорфово пространство X открыто-замкнуто и конечнократно отображается на пространство Y и вес Y не меньше $\aleph_0$, то вес X равен весу Y.

(б) Если X — p-пространство (в частности, X полно в смысле Чеха) и $f\colon X \to Y$ — непрерывное открытое (не обязательно замкнутое) конечнократное отображение на пространство Y, то $wX = w\mathbb{R}$ (см. определения на стр. 141 и 290).

128. Если $f: X \to Y$ — открыто-замкнутое отображение X на Y, а $\varphi: X \to I$ — непрерывная ограниченная вещественная функция, то функция ψ, определенная на Y формулой $\psi(y) = \sup\{\varphi(x): x \in f^{-1}(y)\}$ для каждого $y \in Y$, определена и непрерывна на Y.

129. Каждое ли непрерывное открытое отображение одного метрического пространства на другое является k-накрывающим?

130. Пусть S_n — конечное множество для каждого $n \in N^*$, причем $S = \bigcup\{S_n: n \in N^*\}$ бесконечно. Пусть $f: S \to S$ — многозначное отображение, удовлетворяющее условиям:

(α) для любого $U \subset S_n$ и любого $n \in N^*$ имеет место равенство $f^{-1}(f^{-1}(U) \cap S_{n+1}) = f^{-1}U \cap P_{n+1}$, где $P_n = S \setminus \bigcup\{S_i: i \leqslant n\}$ и $f^{-1}(U) = \{U' \subset S: fU' \supset U\}$;

(β) $f^{-1}(S_n) \supset P_n$, $n \in N^*$.

Тогда можно так выбрать $U_n \in S_n$, чтобы было $f(U_{n+1}) \supset U_n$ при всех $n \in N^*$.

131. Пусть для каждого $n \in N^*$ задано конечное множество S_n и однозначное отображение $f_n: S_{n-1} \to S_n$. Можно так выбрать тогда $U_n \subset S_n$, что будет $f_n(U_{n+1}) = U_n$, $n \in N^1$.

132. Пусть S_n (для каждого $n \in N^*$) — конечное семейство множеств, лежащих в топологическом пространстве X), причем каждый элемент семейства S_{n+1} содержится в некотором элементе семейства S_n. Тогда можно так выбрать $U_n \in S_n$, чтобы было $U_{n+1} \subset U_n$ при любом $n \in N^*$.

133. Если f — открытое отображение метрического пространства (X, ρ) на бикомпактное пространство Y, то в (X, ρ) существует такая последовательность $\{\gamma_i: i \in N^*\}$ конечных семейств открытых в (X, ρ) множеств, что при всех $i \in N^*$

1) если $U \in \gamma_i$, то $\operatorname{diam}(U) < \frac{1}{i}$;

2) для каждого $U \in \gamma_{i+1}$ существует $V \in \gamma_i$ такое, что $U \subset V$;

3) $\{fU: U \in \gamma_i\}$ покрывает Y.

134. Пусть f — открытое (не обязательно непрерывное) отображение метрического пространства (X, ρ) на бикомпактное пространство Y, причем $(f^{-1}y, \rho)$ полно для всех $y \in Y$. Тогда существует такое замкнутое в (X, ρ) вполне ограниченное подпространство (Φ, ρ), что $f\Phi = Y$. Если, кроме того, (X, ρ) полно, то, в силу 255 гл. III, подпространство Φ — компакт.

135. Если f — открытое (не обязательно непрерывное) отображение пространства X на пространство Y, при котором прообраз $f^{-1}y$ каждой точки $y \in Y$ замкнут в X, а $\mathscr{B}'_x$ — база X в точке $x \in X$, то $f\mathscr{B}'_x = \{fU: U \in \mathscr{B}'_x\}$ — псевдобаза Y в точке $fx \in Y$.

136. Пусть f — открытое отображение метрического пространства (X, ρ) на бикомпакт Y, причем $(f^{-1}y, \rho)$ полно для каждого $y \in Y$. Тогда Y обладает счетной базой.

137. Если бикомпакт Y является образом полного метрического пространства X при непрерывном открытом отображении f, то Y метризуем.

138. Каждое открытое отображение метрического пространства X на Y, при котором прообразы всех точек полны относительно метрики, заданной на X, является k-накрывающим отображением.

139. Пусть f — непрерывное открыто-замкнутое отображение бикомпакта F на компакт Φ и $\{y_n: n \in N^*\}$ — последовательность точек пространства Φ, сходящаяся в Φ к некоторой точке y. Верно ли, что тогда в F существует такая последовательность $\{x_n: n \in N^*\}$, сходящаяся к некоторой точке x, что $fx_n = y_n$ при всех $n \in N^*$?

140. Приведите пример непрерывного открытого конечнократного отображения счетного нормального пространства без нетривиальных сходящихся последовательностей на простейший бесконечный компакт.

141. Пусть $f: X \to Y$ — открытое отображение полного в смысле Чеха пространства X на паракомпакт Y. Тогда существует такое замкнутое множество $F \subset X$, что $f(F) = Y$, а сужение $f_0 = f \mid F$ отображения f на F — совершенное отображение.

142. Докажите, что паракомпакт Y, являющийся образом полного в смысле Чеха пространства X при открытом отображении, также полон в смысле Чеха.

143. Пусть $f: X \to Y$ — открытое отображение метризуемого полной метрикой пространства X на метризуемое пространство Y. Докажите, что и Y метризуемо полной метрикой.

144. Докажите, что паракомпакт Y, являющийся образом метризуемого полной метрикой пространства X при открытом отображении f, также метризуем, причем полной метрикой.

145. Пусть $f: X \to Y$ — открытое отображение полного в смысле Чеха пространства X на хаусдорфово пространство Y. Тогда f — k-накрывающее отображение.

146*. Если $f: X \to Y$ — открытое отображение, $f(X) = Y$, X — полное метрическое пространство с метрикой ρ, Y — паракомпакт размерности $\dim Y = 0$ (см. 153 гл. V), то найдется такое замкнутое в X множество F, что $f(F) = Y$, а сужение $f_0 = f \mid F$ — гомеоморфизм.

147. Пространство X в том и только в том случае является образом бэровского пространства $B(\tau)$ (см. 246 гл. II) при открытом отображении, когда в X существует полная измельчающаяся A_τ-последовательность (см. стр. 343) открытых покрытий.

148. Пространство X тогда и только тогда гомеоморфно бэровскому пространству $B(\tau)$ веса τ, когда в нем существует локально конечная полная измельчающаяся A_τ-последовательность открытых покрытий.

149. Если (X, ρ) — полное метрическое пространство размерности $\dim X = 0$, однородное по весу (т.е. $wU = wX$ для каждого открытого подпространства $U \subset X$) и не имеющее точек локальной бикомпактности, то X гомеоморфно баровскому пространству $B(\tau)$, где $\tau = wX$.

150. Всякое полное метрическое пространство (X, ρ) веса τ является образом баровского пространства $B(\tau)$ веса τ при открытом отображении.

151. Если X — паракомпакт, то X метризуемо полной метрикой в том и только в том случае, когда является образом бэровского пространства $B(\tau)$ при некотором открытом отображении.

152. Всякое полное метрическое пространство (X, ρ) является образом бэровского пространства при некотором замкнутом непрерывном отображении.

§ 5. Экстремально несвязные пространства

153. Покажите, что всякое дискретное T_1-пространство X экстремально несвязно.

154. Регулярное экстремально несвязное пространство X вполне регулярно.

155. Пространство X экстремально несвязно тогда и только тогда, когда для любых непересекающихся открытых в X множеств их замыкания также не пересекаются.

156. Докажите, что всякое открытое подпространство U экстремально несвязного пространства X является экстремально несвязным пространством.

157. Докажите, что всюду плотное подпространство X_0 экстремально несвязного пространства X также экстремально несвязно.

158. Покажите, что расширение Стоуна — Чеха βX экстремально несвязного вполне регулярного пространства X также экстремально несвязно.

159. Покажите, что расширение Стоуна — Чеха βD любого дискретного пространства D экстремально несвязно.

160. Пусть $f: X \to Y$ — замкнутое, неприводимое отображение хаусдорфова пространства X на экстремально несвязное пространство Y. Докажите, что отображение f — гомеоморфизм, а пространство X также экстремально несвязно.

161. Пусть X — нормальное экстремально несвязное пространство, Y — его замкнутое подпространство и $P \subset Y$, причем P — открыто-замкнутое множество в Y. Найдется тогда открыто-замкнутое в X множество G, для которого $G \cap Y = P$.

162. Пусть X — экстремально несвязный бикомпакт, а X_0 — его всюду плотное подпространство. Докажите, что расширение Стоуна — Чеха βX_0 пространства X_0 совпадает с бикомпактом X.

163. Пусть X — экстремально несвязное регулярное пространство, а $D_1 \subset X$ и $D_2 \subset X$ — два его финально компактных подпространства, для которых $D_1 \cap [D_2] = \Lambda$ и $D_2 \cap [D_1] = \Lambda$. Тогда $[D_1] \cap [D_2] = \Lambda$.

164. Пусть X — регулярное экстремально несвязное пространство, $D_1 \subset X$ и $D_2 \subset X$ — два его счетных дискретных подпространства, для которых $[D_1] \cap D_2 = \Lambda$ и $D_1 \cap [D_2] = \Lambda$. Тогда $[D_1] \cap [D_2] = \Lambda$.

165. Пусть X — экстремально несвязный бикомпакт, а D — его счетное дискретное подпространство. Докажите, что $[D]_X$ совпадает с расширением Стоуна — Чеха βD этого подпространства, а следовательно, ибо D гомеоморфно пространству N натуральных чисел в дискретной топологии, совпадает с расширением βN Стоуна — Чеха пространства N.

166. Покажите, что бесконечный экстремально несвязный бикомпакт содержит топологический образ расширения Стоуна — Чеха βN пространства N натуральных чисел.

167. Докажите, что в бесконечном экстремально несвязном бикомпакте нет ни одной нетривиальной счетной сходящейся последовательности.

168. В экстремально несвязном вполне регулярном пространстве нет ни одной нетривиальной сходящейся последовательности.

169. Пусть X — экстремально несвязный бикомпакт, $D \subset X$ — его подпространство, удовлетворяющее следующему условию: (k) для каждой точки $a \in D$ существует такая ее окрестность Ua в X, что семейство $\gamma = \{Ua: a \in D\}$ дизъюнктно. Тогда $[D]_X$ совпадает с расширением βD Стоуна — Чеха этого подпространства D.

170. Докажите, что регулярное экстремально несвязное пространство нульмерно (в смысле ind — см. стр. 56). Приведите пример нульмерного не экстремально несвязного бикомпакта.

171. Докажите, что вес любого бесконечного экстремально несвязного бикомпакта X не меньше $2^{\aleph_0}$, а его мощность не меньше 2^c.

172. Каждое ли замкнутое подпространство экстремально несвязного бикомпакта экстремально несвязно?

173. Для того чтобы бикомпакт X был экстремально несвязным, необходимо, чтобы X было расширением Стоуна — Чеха всякого своего всюду плотного подпространства, и достаточно, чтобы X было расширением Стоуна — Чеха всякого своего всюду плотного открытого подпространства.

174. Пусть X — бесконечный экстремально несвязный бикомпакт, $D \subset X$ — его бесконечное счетное дискретное подпространство, все точки $d \in D$ которого не изолированы в X. Тогда подпространство $X_0 = X \setminus D$ нельзя уплотнить ни на какой бикомпакт, т. е. не существует взаимно однозначного непрерывного отображения X_0 ни на какой бикомпакт.

175. Любой бесконечный экстремально несвязный бикомпакт X можно непрерывно отобразить на расширение Стоуна — Чеха βN пространства натуральных чисел.

176. Докажите, что всякий бесконечный экстремально несвязный бикомпакт не наследственно нормален.

177. Докажите, что образ Y экстремально несвязного пространства X при открытом непрерывном отображении f является также экстремально несвязным пространством.

178. Нарост $X = \beta N \setminus N$ расширения Стоуна — Чеха дискретного пространства натуральных чисел не экстремально несвязен.

179. Сохраняется ли экстремальная несвязность при совершенных отображениях?

180. Пусть D — дискретное пространство мощности $|D| = \tau$. Докажите, что $|\beta D| = 2^{2^\tau}$, где βD — расширение Стоуна — Чеха пространства D.

181. Пусть f — отображение топологического пространства X в себя и k — целое число, $k \geqslant 2$. Семейство γ попарно не пересекающихся открыто-замкнутых в X множеств называется (f, k)-семейством, если 1) $fU \cap U = \Lambda$ для всех $U \in \gamma$, 2) $f(\bigcup \{U: U \in \gamma\}) \subset \bigcup \{U: U \in \gamma\}$ и 3) $|\gamma| = k$. Множество $\bigcup \{U: U \in \gamma\}$ условимся называть при этом (f, k)-разложимым; будем обозначать его через $\langle\gamma\rangle$. В предположении, что f — непрерывное отображение, докажите, что

(а) если γ — (f, k)-семейство, то существует такое (f, k)-семейство λ, что (а1) γ вписано в λ и (а2) $f^{-1}\langle\gamma\rangle = \langle\lambda\rangle$;

(б) если γ — (f, k)-семейство, пространство X экстремально несвязно и f — гомеоморфизм на замкнутое подпространство пространства X, то существует такое (f, k)-семейство μ, что (б1) γ вписано в μ и (б2) $f^{-1}\langle\mu\rangle = \langle\mu\rangle$;

(в) если X экстремально несвязно и $\mathscr{F}$ — дизъюнктное семейство (f, k) разложимых множеств (возможно, бесконечное), то и $[\bigcup \{A: A \in \mathscr{F}\}]$ — (f, k)-разложимое множество.

182. Если f — гомеоморфизм нормального экстремально несвязного пространства X в себя, отличный от тождественного, причем $f(X)$ замкнуто в X, то

1) в X существует непустое $(f, 3)$ разложимое множество;

2) в X существует такое непустое $(f, 3)$-разложимое множество A, что (II′) $f^{-1}A - A$ и (II″) если $A' \neq A$ и A' является $(f, 3)$-разложимым множеством, то $A' \cap A \neq \Lambda$;

3) в X существует такое непустое $(f, 3)$ разложимое множество A, что $f(x) = x$ для всех $x \in X \setminus A$.

183. Если f — гомеоморфизм нормального экстремально несвязного пространства X в себя, при котором $f(X)$ замкнуто в X, то $X = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$, где B_0, B_1, B_2, B_3 — открыто-замкнутые в X попарно не пересекающиеся множества, причем $f(x) = x$ для всех $x \in B_0$ и $f(B_i) \cap B_i = \Lambda$ при $i = 1, 2, 3$. В частности, множество всех неподвижных при f точек открыто-замкнуто в X.

184. При всяком ли гомеоморфизме f экстремально несвязного бикомпакта на себя (отличном от тождественного) существует непустое $(f, 2)$-разложимое множество?

185. Пусть X — нормальное экстремально несвязное пространство, а f — его такой гомеоморфизм в себя, что $f(X)$ — замкнутое нигде не плотное в X множество. Тогда f не имеет ни одной неподвижной точки.

186. Пусть X — экстремально несвязный бикомпакт, $F \subset X$ — замкнутое нигде не плотное в X множество. Предположим, что существует подпространство $Y \subset F$, гомеоморфное бикомпакту X. Тогда подпространство F не является топологически однородным.

187. Докажите, что бикомпакт $X = \beta N \setminus N$, где βN — расширение Стоуна — Чеха дискретного пространства натуральных чисел, не является топологически однородным.

§ 6. Абсолюты регулярных пространств и совершенные неприводимые отображения. Соабсолютные пространства

188. Пусть α — каноническое покрытие пространства X и $x_0 \in X$ — произвольная точка. Тогда $x_0 \in \operatorname{Int} \alpha(x_0)$, где $\alpha(x_0)$, как всегда, есть звезда точки x_0 относительно покрытия α.

189. Пусть α_1 и α_2 — два канонических покрытия пространства X и $\alpha_2 \succcurlyeq \alpha_1$, т. е. α_2 вписано в α_1. Тогда

(а) каждый элемент покрытия α_2 содержится в единственном элементе покрытия α_1;

(б) всякий элемент покрытия α_1 является объединением всех содержащихся в нем элементов покрытия α_2.

190. Пусть α и β — два канонических покрытия пространства X. Докажите, что $\gamma = \alpha \wedge \beta$ (см. определение на стр. 345) — каноническое покрытие пространства X, вписанное как в α, так и в β. Предложение верно и в случае, когда α и β — локально конечные канонические покрытия. В этом случае $\alpha \wedge \beta$ — также локально конечное каноническое покрытие.

191. Пусть X — пространство, $\mathfrak{A}(X)$ — семейство всех канонических покрытий пространства с естественным порядком (см. определение на стр. 345). Тогда $\mathfrak{A}(X)$ частично упорядочено и направлено в том смысле, что для любых $\alpha \in \mathfrak{A}(X)$, $\beta \in \mathfrak{A}(X)$ существует $\gamma \in \mathfrak{A}(X)$, для которого $\gamma \succcurlyeq \alpha$, $\gamma \succcurlyeq \beta$.

192. Покажите, что семейство $\mathfrak{A}(X)$ всех канонических покрытий T_1-пространства X измельчается тогда и только тогда, когда пространство X регулярно.

193. Пусть X — хаусдорфово пространство, $\mathfrak{A}(X)$ — семейство всех канонических покрытий пространства X. Тогда если ξ —

отмеченная нить в $\mathfrak{A}(X)$, то $\bigcap\{A: A \in \xi\}$ состоит ровно из одной точки.

194. Пусть X — хаусдорфово пространство, $\mathfrak{P}(X)$ — семейство всех канонических замкнутых множеств в X.

(А) Докажите, что всякая $\varkappa$-система η (соответственно, отмеченная точкой $x_0 \in X$) принадлежит некоторому $\varkappa$-ультрафильтру (соответственно, отмеченному точкой $x_0 \in X$).

(Б) Покажите, что $\varkappa$-система η тогда и только тогда является $\varkappa$-ультрафильтром, когда выполнены следующие условия:

1) если $A_1 \in \eta$ и $A_2 \in \eta$, то $[\operatorname{Int} A_1 \cap \operatorname{Int} A_2] \in \eta$;

2) если $A_1 \in \eta$ и $A_1 \subset A_2$, $A_2 \in \mathfrak{P}(X)$, то $A_2 \in \eta$;

3) если $B \in \mathfrak{P}(X)$ и $\operatorname{Int} B \cap \operatorname{Int} A \neq \Lambda$ для любого $A \in \eta$, то $B \in \eta$.

(В) Если η — $\varkappa$-ультрафильтр и $A \in \mathfrak{P}(X)$, то либо $A \in \eta$, либо $[X \setminus A] \in \eta$.

195. Пусть X — хаусдорфово пространство. Тогда $\varkappa$-система ξ тогда и только тогда является $\varkappa$-ультрафильтром в семействе $\mathfrak{P}(X)$ (соответственно, отмеченным $\varkappa$-ультрафильтром), когда ξ есть нить (соответственно, отмеченная нить) в семействе $\mathfrak{A}(X)$ всех канонических покрытий пространства X.

196. Пусть X — хаусдорфово пространство, $x_0 \in X$ — произвольная точка и A_0 — каноническое замкнутое множество пространства X, содержащее точку x_0. Тогда найдется отмеченная нить ξ в семействе $\mathfrak{A}(X)$, для которой $\{x_0\} = \bigcap\{A: A \in \xi\}$ и $A_0 \in \xi$.

197. Покажите, что натуральное отображение $\pi_X: \dot{X} \to X$ множества $\dot{X}$ всех отмеченных нитей в пространстве X (см. стр. 345) есть отображение на все X.

198. Пусть X — хаусдорфово пространство, $\mathfrak{A}(X)$ — семейство всех канонических покрытий пространства X. Рассмотрим тихоновское произведение $\Pi\{\hat{\alpha}: \alpha \in \mathfrak{A}(X)\} = P$. Тогда $\dot{X} \subset \Xi(X) \subset P$. Считаем, что на $\dot{X}$ и $\Xi(X)$ определена топология, индуцированная с тихоновского произведения $\Pi\{\hat{\alpha}: \alpha \in \mathfrak{A}(X)\} = P$ (см. стр. 345).

Докажите:

(а) множества вида $\langle \overline{A}_0 \rangle = \{\xi \in \Xi(X): A_0 \in \xi\}$ образуют базу топологии в $\Xi(X)$, а множества вида $\langle A_0 \rangle = \{\xi \in \dot{X}: A_0 \in \xi\}$ — базу топологии в $\dot{X}$;

(б) $\Xi(X)$ замкнуто в P;

(в) $\Xi(X)$ — бикомпакт;

(г) подпространство $\dot{X} \subset \Xi(X)$ всюду плотно в $\Xi(X)$.

199. Пусть X — хаусдорфово пространство, $\mathfrak{A}(X)$ — семейство всех канонических покрытий пространства X, $\dot{X}$ — пространство всех отмеченных нитей в $\mathfrak{A}(X)$ и $\pi_X: \dot{X} \to X$ — натуральное отображение. Тогда для любого канонического замкнутого множества $A_0 \in \mathfrak{P}(X)$ имеют место равенства:

(а) $\pi_X\langle A_0 \rangle = A_0$;

(б) $\pi_X^{\#}\langle A_0 \rangle = \operatorname{Int} A_0$, где, как всегда, $\pi_X^{\#}\langle A_0 \rangle = \{x \in X: \pi_X^{-1}x \subset \langle A_0 \rangle\}$.

200. Пусть X — хаусдорфово пространство. Тогда натуральное отображение $\pi_X: \dot{X} \to X$ неприводимо и бикомпактно. Если же X регулярно, то π_X и непрерывно.

201. Пусть X регулярно, $\mathfrak{A}(X)$ — семейство всех канонических покрытий пространства X. Для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}(X)$ положим $\langle\overline{\alpha}\rangle = \{\langle\overline{A}\rangle: A \in \alpha\}$ и $\langle\alpha\rangle = \{\langle A\rangle: A \in \alpha\}$. Тогда

1) $\langle\overline{A}\rangle = [\langle A\rangle]_{\Xi(X)}$ для каждого канонического замкнутого в X множества A;

2) для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}(X)$ система $\langle\overline{\alpha}\rangle$ (соответственно система $\langle\alpha\rangle$) — дизъюнктное открыто-замкнутое покрытие пространства $\Xi(X)$ (соответственно пространства $\dot{X}$); в частности, $\langle\overline{\alpha}\rangle$, соответственно $\langle\alpha\rangle$ — канонические покрытия в $\Xi(X)$, соответственно в $\dot{X}$;

3) семейство $\{\langle\overline{\alpha}\rangle: \alpha \in \mathfrak{A}(X)\}$, соответственно $\{\langle\alpha\rangle: \alpha \in \mathfrak{A}(X)\}$, измельчается в $\Xi(X)$, соответственно в $\dot{X}$;

4) $\langle\alpha_2\rangle$ вписано в $\langle\alpha_1\rangle$ ($\langle\alpha_2\rangle$ вписано в $\langle\alpha_1\rangle$) тогда и только тогда, когда α_2 вписано в α_1.

202. Если X регулярно, то натуральное отображение $\pi_X: \dot{X} \to X$ есть совершенное неприводимое отображение на X.

203. Если $f: X \to Y$ — замкнутое неприводимое отображение, $f(X) = Y$, $A_1 \subset X$ и $A_2 \subset X$ — канонические замкнутые в X множества, для которых $fA_1 = fA_2$, то $A_1 = A_2$.

204. Пусть X регулярно, $\mathfrak{A}(X)$ — семейство всех канонических покрытий в X. Тогда

(а) $\Xi(X)$ — экстремально несвязный бикомпакт;

(б) $\dot{X}$ — экстремально несвязное вполне регулярное пространство;

(б') $\dot{X}$ — абсолют пространства X;

(в) расширение Стоуна — Чеха $\beta\dot{X}$ пространства $\dot{X}$ совпадает с $\Xi(X)$.

205. Покажите, что у каждого регулярного пространства X существует абсолют, являющийся экстремально несвязным вполне регулярным пространством.

206. Всякое регулярное пространство X является образом нульмерного (в смысле ind) вполне регулярного пространства при совершенном неприводимом отображении.

207. Докажите, что во всяком регулярном пространстве веса τ существует измельчающаяся направленная система канонических покрытий мощности τ.

208. Докажите, что всякое регулярное пространство X веса τ является образом нульмерного (в смысле ind) вполне регулярного пространства Y веса τ при совершенном неприводимом отображении. При этом Y можно считать подпространством обобщенного дискретного континуума D^τ (см. стр. 101).

209. Всякий бикомпакт X веса τ является образом нульмерного бикомпакта веса τ при непрерывном неприводимом отображении.

210. Всякий бикомпакт веса τ является образом замкнутого множества в D^τ при совершенном неприводимом отображении.

211. Всякое нульмерное (в смысле ind) регулярное пространство X, вес которого не превосходит τ, гомеоморфно множеству в D^τ.

212. Покажите, что всякий нульмерный бикомпакт веса, не большего τ, гомеоморфен замкнутому множеству в D^τ.

213. Пусть $f: X \to Y$ — замкнутое неприводимое отображение регулярного пространства X на регулярное пространство Y, $\mathfrak{A}(X)$, соответственно $\mathfrak{A}(Y)$ — семейство всех канонических покрытий пространства X, соответственно Y. Тогда

(а) если $\hat{\xi}$ — нить в $\mathfrak{A}(X)$, то $\vec{f}\hat{\xi} = \{fA: A \in \xi\}$ — нить в $\mathfrak{A}(Y)$;

(б) если $\hat{\xi}$ — отмеченная нить в $\mathfrak{A}(X)$, то $\vec{f}\hat{\xi} = \{fA: A \in \xi\}$ — отмеченная нить в $\mathfrak{A}(Y)$;

(в) если $\hat{\xi}_1$ и $\hat{\xi}_2$ — различные нити в $\mathfrak{A}(X)$, то $\vec{f}\hat{\xi}_1 = \{fA: A \in \xi_1\}$ и $\vec{f}\hat{\xi}_2 = \{fA: A \in \xi_2\}$ — различные нити в $\mathfrak{A}(Y)$.

214. Пусть $f: X \to Y$ — замкнутое неприводимое отображение «на», X и Y регулярны. Если η — нить в семействе $\mathfrak{A}(Y)$, то система $\xi = \{[f^{-1}(\operatorname{Int} B)]: B \in \eta\}$ — нить в семействе $\mathfrak{A}(X)$.

215. Если $f: X \to Y$ — совершенное неприводимое отображение «на», X и Y регулярны и η — произвольная отмеченная нить в семействе $\mathfrak{A}(Y)$ всех канонических покрытий пространства Y, то $\xi = \{[f^{-1}(\operatorname{Int} B)]: B \in \eta\}$ — отмеченная нить в семействе $\mathfrak{A}(X)$ всех канонических покрытий пространства X.

216. Пусть $f: X \to Y$ — замкнутое неприводимое отображение «на», X и Y регулярны. Если ξ — нить в семействе $\mathfrak{A}(X)$, то положим $\vec{f}\xi = \{fA: A \subset \xi\}$. В силу задачи 213 гл. VI $\vec{f}\xi = \{fA: A \in \xi\}$ — нить семейства $\mathfrak{A}(Y)$. Докажите, что $\vec{f}$ — взаимно

но однозначное отображение пространства $\Xi(X)$ на пространство $\Xi(Y)$.

Будем говорить, в дальнейшем, что отображение $\vec{f}: \Xi(X) \to \Xi(Y)$ порождено замкнутым неприводимым отображением $f: X \to Y$.

217. Пусть $f: X \to Y$ — замкнутое неприводимое отображение «на», X и Y регулярны. Положим $\dot{f}\xi = \{fA: A \in \xi\}$, где $\xi \subset \dot{X}$.

(а) Докажите, что $\dot{f}$ — взаимно однозначное отображение пространства $\dot{X}$ в пространство $\dot{Y}$.

(б) Если f совершенно и неприводимо, то $\dot{f}$ — взаимно однозначное отображение на все $\dot{Y}$.

(в) Отображение $\tilde{f}: \Xi(X) \to \Xi(Y)$ есть продолжение отображения $\dot{f}: \dot{X} \to \dot{Y}$.

Будем говорить в дальнейшем, что отображение $\dot{f}: \dot{X} \to \dot{Y}$ порождено замкнутым неприводимым отображением $f: X \to Y$.

218. Пусть X и Y регулярны, $f: X \to Y$ совершенно и неприводимо, $f(X) = Y$.

Рассмотрим отображение $\dot{f}: \dot{X} \to \dot{Y}$, порожденное отображением f (см. 217 гл. VI). Тогда

(а) $\dot{f}$ — гомеоморфизм на все $\dot{Y}$;

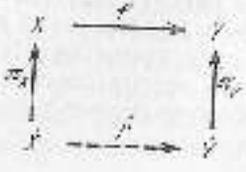
(б) коммутативна следующая диаграмма:



т. е. $f(\pi_X(\xi)) = \pi_Y(\dot{f}(\xi))$ для любого $\xi \in \dot{X}$.

219. Пусть $f: X \to Y$ — замкнутое неприводимое отображение «на», X и Y регулярны, $\pi_X: \dot{X} \to X$ и $\pi_Y: \dot{Y} \to Y$ — соответствующие натуральные отображения, $\dot{f}: \dot{X} \to \dot{Y}$ и $\tilde{f}: \Xi(X) \to \Xi(Y)$ — отображения, порожденные данным замкнутым неприводимым отображением $f: X \to Y$. Тогда

(а) коммутативна диаграмма



(б) $\dot{f}$ — гомеоморфизм в $\dot{Y}$;

(в) $\tilde{f}$ — гомеоморфизм $\Xi(X)$ на $\Xi(Y)$, являющийся продолжением гомеоморфизма $\dot{f}$.

220. Пусть регулярные пространства X и Y связаны замкнутым неприводимым отображением $f: X \to Y$ и $f(X) = Y$. Тогда расширения Стоуна — Чеха $\beta\dot{X}$, $\beta\dot{Y}$ соответственно пространств $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ гомеоморфны.

221. У всякого регулярного пространства X существует и притом единственный с точностью до гомеоморфизма абсолют. Кроме того, абсолют любого регулярного пространства — вполне регулярное экстремальное несвязное пространство.

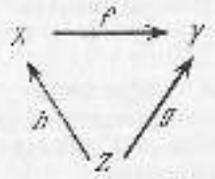
222. Пусть X регулярно. Докажите, что пространство pX является абсолютом пространства X тогда и только тогда, когда pX экстремально несвязно, вполне регулярно и существует совершенное неприводимое отображение пространства pX на X.

223. Если для двух регулярных пространств X и Y существует совершенное и неприводимое отображение одного из этих пространств на другое, то X и Y соабсолютны.

224. Два регулярных пространства X и Y соабсолютны тогда и только тогда, когда существует регулярное пространство Z и совершенные неприводимые отображения $p_X: Z \to X$ и $p_Y: Z \to Y$, $p_X(Z) = X$, $p_Y(Z) = Y$.

225. Докажите, что регулярное пространство X тогда и только тогда является своим собственным абсолютом, когда оно экстремально несвязно.

226. Пусть $f: X \to Y$ — совершенное неприводимое отображение «на», X и Y регулярны. Пусть Z — экстремально несвязное вполне регулярное пространство и $g: Z \to Y$ — совершенное неприводимое отображение на Y. Тогда существует такое совершенное неприводимое отображение $h: Z \to X$ на X, что коммутативна диаграмма



227. Пусть X вполне регулярно. Докажите, что любые два его бикомпактных хаусдорфовых расширения b_1X и b_2X соабсолютны.

228. Пусть вполне регулярные пространства X и Y связаны замкнутым неприводимым отображением $f: X \to Y$, $f(X) = Y$. Докажите, что любые бикомпактные расширения bX и cY этих пространств соабсолютны.

229. Пусть X вполне регулярно. Докажите равенство $(\beta X)^{\cdot} = \beta\dot{X}$ (здесь $\dot{X}$ — абсолют пространства X; $\beta\dot{X}$ — его расширение Стоуна — Чеха, $(\beta X)^{\cdot}$ — абсолют расширения βX Стоуна — Чеха пространства X).

230. Докажите, что все счетные компакты соабсолютны между собой, причем этот абсолют гомеоморфен расширению Стоуна — Чеха βN пространства N натуральных чисел.

231. Обязан ли абсолют $\dot{X}$ нормального пространства быть также нормальным пространством?

232. Пусть X вполне регулярно, а регулярное пространство Y соабсолютно с X. Следует ли отсюда полная регулярность пространства Y?

233. Пусть регулярные пространства X и Y соабсолютны. Докажите, что в случае, когда одно из этих пространств соответственно бикомпактно, финально компактно, паракомпактно, локально бикомпактно, почти в смысле Чеха, то и другое пространство таково же.

234. (а) Докажите, что абсолют $\dot{X}$ любого бесконечного бикомпакта X имеет мощность $|\dot{X}| \geqslant 2^c$, а вес $w\dot{X} \geqslant c$.

(б) Приведите пример бесконечного бикомпакта X, для которого $|\dot{X}| = 2^c$ и $w\dot{X} = c$.

235. Пусть $f: X \to Y$ — замкнутое неприводимое отображение регулярного пространства X на регулярное пространство Y. Тогда π-вес пространства X совпадает с π-весом пространства Y.

236. Пусть регулярные пространства X и Y соабсолютны. Докажите, что в этом случае π-вес пространства X совпадает с π-весом пространства Y, т. е. $\pi wX = \pi wY$ (см. стр. 56).

237. Докажите, что бикомпакт X соабсолютен с некоторым компактом тогда и только тогда, когда $\pi wX \leqslant \aleph_0$.

238. Докажите, что любые два компакта X и Y без изолированных точек соабсолютны.

239. Докажите, что бикомпакт X соабсолютен с канторовым совершенным множеством C в том и только в том случае, когда $wX \leqslant \aleph_0$ и X не имеет изолированных точек. Докажите, что любые два бикомпакта счетного π-веса и без изолированных точек соабсолютны.

240. Если два регулярных пространства соабсолютны, то их плотности, а также числа Суслина совпадают.

241. Бикомпакт X с первой аксиомой счетности соабсолютен с некоторым компактом тогда и только тогда, когда сепарабелен.

242. Совершенно нормальный бикомпакт X соабсолютен с некоторым компактом тогда и только тогда, когда он сепарабелен.

243. Великий двадцатый бикомпакт X, соабсолютный с некоторым компактом, метризуем, следовательно, является компактом.

Если вполне регулярное пространство X псевдокомпактно и некоторое его бикомпактное расширение bX диадично, то X, а также bX и Y имеют счетную базу, а значит, X и bX метризуемы. Если диадический бикомпакт удовлетворяет первой аксиоме счетности, то он имеет счетную базу, а значит, метризуем.

244. Бикомпакт X веса $\tau \geqslant \aleph_0$ псевдокомпактен с некоторым бикомпактом веса τ.

245. Регулярное пространство X тогда и только тогда паракомпактно, когда во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное каноническое покрытие.

246. Всякий экстремально несвязный паракомпакт совершенно нульмерен, т. е. во всякое его открытое покрытие можно вписать дизъюнктное открытое покрытие.

247. Докажите, что абсолют $\tilde{X}$ паракомпакта X совершенно нульмерен и, следовательно, является сильно паракомпактным пространством.

248. Пусть $f: X \to Y$ — совершенное отображение сильно паракомпактного пространства X на пространство Y. Будет ли Y сильно паракомпактно?

249. Пусть α_1 и α_2 — два локально конечных канонических покрытия пространства X. Пусть $\alpha_2 \succcurlyeq \alpha_1$, т. е. α_2 вписано в α_1. Тогда (а) каждый элемент из α_2 содержится только в одном элементе из α_1; (б) каждый элемент из α_1 является объединением содержащихся в нем элементов покрытия α_2.

250. Пусть X — метризуемое пространство. Тогда в X существует счетная измельчающаяся последовательность *) $\{\alpha_i: i \in N\}$ локально конечных канонических покрытий. Если при этом X гомеоморфно полному метрическому пространству, то последовательность $\{\alpha_i: i \in N\}$ можно выбрать полной **) и измельчающейся.

251. Пусть X регулярно, $\mathfrak{A}_0 = \{\alpha_i: i \in N\}$ — измельчающаяся последовательность локально конечных канонических покрытий пространства X. Пусть $|\alpha_i| = |\alpha_{i+1}| = \tau$ для любого $i \in N$, где $\tau \geqslant \aleph_0$. Тогда существует подпространство Ξ бэровского пространства $B(\tau)$ (см. 246 гл. II) и совершенное неприводимое отображение $f: \Xi \to X$, $f(\Xi) = X$. Если при этом последовательность $\mathfrak{A}_0$ полна, то Ξ можно считать замкнутым в $B(\tau)$. Если α_i дизъюнктно для каждого $i \in N$, а $\{\alpha_i: i \in N\}$ измельчается, то X гомеоморфно подпространству Ξ в $B(\tau)$. Наконец, если α_i дизъюнктно для любого $i \in N$, а последовательность $\{\alpha_i: i \in N\}$ полна и измельчается, то X гомеоморфно замкнутому подпространству Ξ в $B(\tau)$.

*) Т. е. $\alpha_{i+1} \succcurlyeq \alpha_i$ для любого $i \in N$.
**) Т. е. каждая цепь в $\{\alpha_i: i \in N\}$ бедна.

252. Всякое метрическое пространство X веса τ является образом подпространства бэровского пространства $B(\tau)$ при совершенном неприводимом отображении. Если при этом X — полное пространство, то X — образ замкнутого подпространства в $B(\tau)$ при совершенном неприводимом отображении.

РЕШЕНИЯ

1. Необходимость. Если $U \subset Z$ и U открыто в Z, то $(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ открыто в X, а поэтому (ввиду f факторно) $g^{-1}U$ открыто в Y. Значит, g — непрерывное отображение.

Достаточность. Наделим множество Y соответствующей отображению f фактор-топологией $\mathcal{T}(f)$. Пространство $(Y, \mathcal{T}(f))$ на Z, а на роли g возьмем отображение $i: Y \to Z$, тождественное на Y. Отображение f непрерывно, ибо это просто фактор-отображение пространства X на пространство $(Y, \mathcal{T}(f))$. Значит, и i — непрерывное отображение. Поэтому $\mathcal{T}(f) \subset \mathcal{T}$, где $\mathcal{T}$ — исходная топология на Y. Но так как f — непрерывное отображение, а $\mathcal{T}(f)$ — фактор-топология на множестве Y, то $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(f)$ (297 гл. II). Значит, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(f)$ и f — факторное отображение.

2. Можно рассуждать, как в решении задачи 2 гл. VI, при этом следует опереться на результат задачи 1 гл. IV.

Другое решение: множество X наделим топологией $\bar{\mathcal{T}}$, состоящей из пустого множества и всех тех $U \subset X$, для которых $X \setminus U$ всюду. Тогда если $\mathcal{T}$ — заданная топология на X, то тождественное отображение $i: (X, \mathcal{T}) \to (X, \bar{\mathcal{T}})$ является уплотнением (либо $\mathcal{T}$ — T_1-топология, и потому $\mathcal{T} = \bar{\mathcal{T}}$), причем $(X, \bar{\mathcal{T}})$ — бикомпактное T_1-пространство.

3. Пусть X — хаусдорфово локально бикомпактное пространство. Рассмотрим его бикомпактное расширение Александрова $\bar{X}$ (см. 178 гл. III); $\bar{X} \setminus X$ — одна точка, которую обозначим через ξ. Рассмотрим еще какую-нибудь точку $x_0 \in X$. Определим разбиение $\mathcal{A}$ (см. стр. 59) бикомпакта $\bar{X}$ следующим образом: каждая точка $x \neq \bar{X}$, отличная от x_0 и ξ, есть отдельный элемент разбиения; кроме того, отдельным элементом разбиения будет пара точек x_0 и ξ. Множество всех этих элементов разбиения обозначим через Y, а через $f: \bar{X} \to Y$ — естественное отображение бикомпакта $\bar{X}$ на множество Y всех элементов разбиения $\mathcal{A}$, ставящее в соответствие каждой точке $x \in \bar{X}$ тот единственный элемент разбиения, который ее содержит. Снабдим Y факторной топологией, т. е. такой топологией, чтобы $f: \bar{X} \to Y$ было факторным отображением. Пространство Y, таким образом, есть бикомпактное T_1-пространство, как непрерывный образ бикомпакта $\bar{X}$.

Разбиение $\mathcal{A}$, очевидно, непрерывно (см. стр. 92), а отображение f замкнуто (322 гл. I). Значит, Y — бикомпакт (92 гл. III), а сужение $f|X$ — взаимно однозначное отображение X на Y.

4. Пусть $y \in [fX] \setminus f(X)$. Тогда $y' = f(y) \in f(X)$, и потому $y \neq y'$. Зафиксируем непересекающиеся окрестности Oy и Oy' точек y и y' в Y так, чтобы было $f(O_X) \subset Oy'$. Так как отображение f непрерывно, а X — хаусдорфово пространство, это сделать можно. Положим: $A = Oy \cap f(X)$. Тогда $A \neq \Lambda$ и, с одной стороны, $fA = A \subset Oy$, с другой, $fA \subset f(Oy) \subset Oy' \subset Y \setminus Oy$. Получили противоречие. Значит, fX замкнуто в Y.

6. Так как (X, ρ) — метрическое пространство и $f^{-1}y'$, $f^{-1}y''$ — непересекающиеся бикомпакты, когда $y' \neq y''$, то $\delta(y', y'') = 0$ и тогда и только в том случае, когда $y' = y''$. Очевидно, $\delta(y', y'') = \delta(y'', y')$. Следовательно, δ — симметрия на Y (мы учли также, что $f(X) = Y$). Пусть A замкнуто в X и $y_0 \notin A$. Тогда $f^{-1}A$ замкнуто, а $f^{-1}y_0$ — бикомпакт, причем $f^{-1}A \cap f^{-1}y_0 = \Lambda$. Поэтому $\rho(f^{-1}y_0, f^{-1}A) > 0$. Но, очевидно, $\delta(y_0, A) = \rho(f^{-1}y_0, f^{-1}A)$.

$f^{-1}A$); значит, $d(y_0, A) > 0$. Предположим теперь, что A не замкнуто в Y. Так как f — бифактерное отображение, то множество $f^{-1}A$ не замкнуто в X. Зафиксируем точку $x^* \in [f^{-1}A]\setminus f^{-1}y$; положим $y^* = fx^*$. Тогда из $\rho(x^*, f^{-1}A) = 0$, очевидно, следует, что $d(y^*, A) = 0$, а из $x^* \notin f^{-1}A$ включения, что $y^* \in A$. Таким образом, доказано, что d порождает топологию, заданную на Y.

7. Из 6 гл. VI следует, что рассматриваемый бикомпакт симметризуем. Отсюда и из 35 гл. V вытекает, что он метризуем.

8. Утверждения 1) и 2) влекут сразу из задачи 6 гл. VI, так как каждое совершенное отображение является факторным бикомпактным отображением. Пусть $\Phi = Y$, $P = Y$, Φ — бикомпакт, P замкнуто в Y и $\Phi \cap P = A$. Положим $F = f^{-1}\Phi$, $Q = f^{-1}P$. Тогда $F \cap Q = A$, F — бикомпакт (так как f — совершенное отображение; см. 36 гл. VI), а Q — замкнутое в X множество. Поэтому $\rho(F, Q) > 0$ (235 гл. III). Но, очевидно, $d(\Phi, P) = \rho(F, Q)$. Следовательно, $d(\Phi, P) > 0$. Далее см. задачу 36 гл. V.

9. См. 342 гл. II, а также Архангельский и Пономарев [1].

10. Пусть верно. Рассмотрим пространство Уоллеса (см. 76, 77 гл. III).

11. Пусть Φ замкнуто в Y, $F = f^{-1}\Phi$, $P = \bigcap \{G_i : i \in N^+\}$, где каждое G_i открыто в Y и $[G_{i+1}] \subset G_i$. Для любого бикомпакта $P \subset X \setminus F$ найдется G_i такое, что $[G_i] \cap P = \Lambda$ (иначе семейство $\{[G_i] \cap P : i \in N^+\}$ было бы центрированным). Принимая теперь за P прообраз любой точки $y \in Y$, мы заключаем отсюда, что $\bigcap \{G_i : i \in N^+\} = \Phi$. Так как f непрерывно, то $\Phi \subset \operatorname{Int} G_i$ для каждого $i \in N^+$. Значит, $\Phi = \bigcap \{\operatorname{Int} G_i : i \in N^+\}$.

12. Так как каждое псевдооткрытое бикомпактное отображение является бифакторным отображением (17 гл. VI), то данное утверждение является частным случаем утверждения задачи 20 гл. VI.

16. Необходимость. Предположим противное — пусть существует предфильтр ξ на Y и точка прикосновения $y \in Y$ для ξ такие, что у каждой точки $x \in f^{-1}y$ имеется окрестность Ux в X, не пересекающаяся с некоторым элементом вида $f^{-1}(\theta x)$, где $\theta x \in \xi$. Тогда $\gamma = \{Ux : x \in f^{-1}y\}$ — покрытие множества $f^{-1}y$ открытыми в X множествами. Существует конечное семейство $\lambda = \{Ux_i : i = 1, \ldots, n\}$ элементов γ такие, что $F = \operatorname{Int}(\bigcup \{fUx_i : i = 1, \ldots, n\}) \ni y$ (ибо f бифакторно). Но $fUx_i \cap \theta x_i = \Lambda$ и $\theta x_i \in \xi$, $i = 1, \ldots, n$. Так как ξ — предфильтр, то существует $B^* \in \xi$, для которого $B^* \subset \bigcap \{\theta x_i : i = 1, \ldots, n\}$. Тогда $B^* \cap (\bigcup \{fUx_i : i = 1, \ldots, n\}) = \Lambda$, тем более, $B^* \cap F = \Lambda$. Но F — окрестность точки y. Значит, $y \notin [B^*]$, а это противоречит тому, что y — точка прикосновения для ξ.

Достаточность. Пусть f не бифакторно. Тогда существуют точка y и покрытие γ множества $f^{-1}y$ открытыми в X множествами такие, что никакая окрестность точки y не покрывается конечным семейством множеств вида $f(U)$, где $U \in \gamma$. Положим $\xi = \{Y \setminus \bigcup \{fU : U \in \lambda\} : \lambda$ — произвольное конечное семейство элементов из $\gamma\}$. Тогда ξ — предфильтр и y — точка прикосновения для ξ, но никакая точка множества $f^{-1}y$ не является точкой прикосновения для $f^{-1}\xi$. Докажем последнее. Пусть $x^* \in f^{-1}y$. Выберем $U^* \in \gamma$, для которого $U^* \ni x^*$. Тогда $P^* = Y \setminus fU^* \in \xi$, $f^{-1}P^* \cap U^* = \Lambda$ и, значит, $x^* \notin [f^{-1}P^*]$.

18. Пусть $f : X \to Y$ — исследуемое отображение. Нам дано, что X локально бикомпактно. Рассмотрим произвольную точку $y \in Y$. Для каждого $x \in f^{-1}y$ зафиксируем открытое в X множество Ux и бикомпактное подпространство Φx пространства X, для которых $x \in Ux \subset \Phi x$. Так как f — бифакторное отображение, а $\gamma = \{Ux : x \in f^{-1}y\}$ — покрытие множества $f^{-1}y$ открытыми в X множествами, то найдется конечное семейство $\lambda = \{Ux_1, \ldots, Ux_k\} \subset \gamma$ такое, что $\operatorname{Int}(\bigcup \{fUx_i : i = 1, \ldots, k\}) \ni y$. Но $F = f(\bigcup \{\Phi x_i : i = 1, \ldots, k\})$ — бикомпактное подпространство пространства Y (ибо f — непрерывное отображение) и $F \supset \operatorname{Int}(\bigcup \{fUx_i : i = 1, \ldots, k\})$. Следовательно, Y — локально бикомпактное пространство.

19. Пусть дано семейство бифакторных отображений $\{f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$, где $f(X_\alpha) = Y_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$, и $f = \prod \{f_\alpha : \alpha \in A\}$, $f : X \to Y$, где $X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ и $Y = \prod \{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ — топологические произведения (π, σ, f — произведение отображений f_α по $\alpha \in A$).

Рассмотрим любую точку $y \in Y$ и любой предфильтр ξ в Y, сходящийся к y. Положим $\eta = f^{-1}\xi = \{f^{-1}P : P \in \xi\}$. Нам должны показать, что существует точка $x \in f^{-1}y$, которой η касается,— отсюда, в силу 16 гл. VI, будет следовать, что отображение f бифакторно. Существует (4 гл. II) ультрафильтр $\widetilde{\xi}$ на Y, содержащий ξ и сходящийся к y. Тогда предфильтр $\pi_\alpha\widetilde{\xi} = \{\pi_\alpha Q : Q \in \widetilde{\xi}\}$ (где π_α — проектирование, $\pi_\alpha : Y \to Y_\alpha$) сходится к $y_\alpha = \pi_\alpha y$ при всех $\alpha \in A$ (очевидно). Так как f_α — бифакторное отображение, то существует точка $x_\alpha \in f_\alpha^{-1}y_\alpha$, являющаяся точкой прикосновения для предфильтра $f_\alpha^{-1}(\pi_\alpha\widetilde{\xi})$ (см. 16 гл. VI). Пусть x — точка произведения X, α-я координата которой равна x_α при всех $\alpha \in A$. Тогда, по определению f, непременно $x \in f^{-1}y$; и остается, таким образом, показать, что $f^{-1}\widetilde{\xi}$ касается точки x.

Пусть U_α — окрестность точки x_α в X_α и $P \in \widetilde{\xi}$. Тогда $U_\alpha \cap f_\alpha^{-1}\pi_\alpha P \neq \Lambda$. Но $f_\alpha^{-1}\pi_\alpha P = \varphi_\alpha f^{-1}P$ (где φ_α — проектирование, $\varphi_\alpha : X \to X_\alpha$). Значит, $P \cap [f_\alpha^{-1}(U_\alpha)] \neq \Lambda$. Так как это верно для любого $P \in \widetilde{\xi}$ и $\widetilde{\xi}$ — ультрафильтр, то $f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \widetilde{\xi}$. Значит, и любое множество вида $\bigcap \{f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) : i = 1, \ldots, n\}$, где U_{α_i} — окрестность точки x_{α_i} в X_{α_i}, принадлежит $\widetilde{\xi}$ и, следовательно, пересекается с любым $P \in \widetilde{\xi}$. Но тогда непременно $\bigcap \{\varphi_{\alpha_i}^{-1}U_{\alpha_i} : i = 1, \ldots, n\} \cap f^{-1}P \neq \Lambda$ для каждого $P \in \xi$, т. е. $x \in [f^{-1}P]$ для всех $P \in \xi$, и, значит, x является точкой прикосновения для $f^{-1}\xi$.

20. Зафиксируем в X базу $\mathscr{B}$, мощность которой равна весу X. Можно считать, что объединение любого конечного множества элементов базы $\mathscr{B}$ ей принадлежит. Положим $\mathscr{C} = \{\operatorname{Int} fU : U \in \mathscr{B}\}$. Легко показать, что $\mathscr{C}$ — база пространства Y. Очевидно, $|\mathscr{C}| \leqslant |\mathscr{B}|$; значит, вес Y не превосходит веса X.

21. Рассмотрим произвольное покрытие γ множества $f^{-1}y$ открытыми в X множествами. Так как $f^{-1}y$ — фактально компактное пространство, можно с самого начала считать, что γ счетно: $\gamma = \{U_n : n \in N^+\}$, $U_n \subset U_{n+1}$ и $U_n \cap f^{-1}y \neq \Lambda$ при всех значениях $n \in N^+$. Зафиксируем счетную базу $\{W_i : i \in N^+\}$ пространства Y в точке y так, чтобы $W_i \supset W_{i+1}$ при всех значениях $i \in N^+$. Тогда непременно найдется $n_0 \in N^+$, для которого $f(U_{n_0}) \supset W_{i_0}$ и, следовательно, отображение f бифакторно в y. Докажем это рассуждением от противного.

Пусть $W_n \setminus f(U_n) \neq \Lambda$ при всех $n \in N^+$. Выберем точку $y_n \in W_n \setminus f(U_n)$ для каждого $n \in N^+$. Положим $Q = \{y_n : n \in N^+\}$. Очевидно, Q не замкнуто в Y, а y — единственная точка пространства Y, предельная для Q. Положим $P = f^{-1}Q$. Множество P не замкнуто в X (ибо Q не замкнуто в Y и f — факторное отображение). Выберем $x^* \in [P] \setminus P$. Тогда $f(x^*) \in Q$, но $f(x^*) \notin fP|_Y = [Q]_Y$, т. е. $f(x^*)$ — предельная для Q точка. Следовательно, $y = f(x^*) \in x^* \in f^{-1}y$.

Зафиксируем номер n', для которого $x^* \in U_{n'}$. Положим $P_{n'} = \bigcup \{f^{-1}(y_n) : n = n', n'+1, \ldots\}$. Из $x^* \in [P] \setminus P$ следует, что $x^* \in [P_{n'}]$ и $U_{n'} \cap P_{n'} \neq \Lambda$. Следовательно, найдется номер n^*, для которого $U_{n'} \cap f^{-1}(y_{n^*}) \neq \Lambda$ и $n^* \geqslant n'$. Но тогда и $U_{n^*} \cap f^{-1}(y_{n^*}) \neq \Lambda$, т. е. $f(U_{n^*}) \ni y_{n^*}$, что противоречит выбору точки y_{n^*} (вспомним, что $y_n \in W_n \setminus f(U_n)$ для каждого $n \in N^+$).

22. Следует из задач 21 и 20 гл. VI.

23. Следует из задач 21, 22 и 22 гл. VI.

24. Да. Пусть Y — несчетное вполне упорядоченное отношением $\prec$ множество, обладающее наибольшим элементом Ω, и на $Y \setminus \Omega$ упорядочение $\prec$ замечательно, причем $|\{x : x \prec x' : x \in Y\}| \leqslant \aleph_0$ для любого $x' \in Y \setminus \{\Omega\}$. Надстроим Y обычной топологией, определенной упорядочением (см. стр. 83), и рассмотрим $X_1 = Y \setminus \{\Omega\}$, $X_2 = \{x \in Y : \text{точка } x \text{ не изолирована в } Y\}$ — подпространства пространства Y. Через X обозначим свободную сумму пространств X_1 и X_2 (см. стр. 98) и через $\pi : X \to Y$ — естественное отображение (т. е. отображение, для которого $\pi i_1 : X_1 \to Y$, $\pi i_2 : X_2 \to Y$, где i_1 и i_2 — естественные вложения в свободную сумму (см. стр. 98), являются тождественными отображениями). Проверьте, что отображение π искомое.

25. Рассмотрим произведение замкнутое в $X \times P$ множество P, отличающееся по отношению к отображению $\varphi = i \times i_1$ — т. е. такое, что $\varphi^{-1}\varphi P = P$. Зафиксируем произвольно точку $x = \langle y, \alpha \rangle \in (Y \times S) \setminus \varphi P$, где $y \in Y$, $\alpha \in S$. Положим $\Phi = f^{-1}y$. Тогда $\varphi^{-1}(x) = \Phi \times \{\alpha\}$ — замкнутое в $X \times F$ множество, не пересекающееся с P. Если для каждой окрестности $O\alpha$ точки α в F имеет место $(\Phi \times O\alpha) \cap P \neq \Lambda$, то и $(\{x\} \times O\alpha) \cap P \neq \Lambda$ для произвольной точки $x \in \Phi$, ибо P — отмеченное множество (и, пересекаясь с множеством $\Phi \times \{\alpha\}$, оно непременно пересекает его содержащее). Тогда $\langle x, \alpha \rangle \in [P]$, хотя $\langle x, \alpha \rangle \in X \setminus P$, что противоречит замкнутости P. Следовательно, существует окрестность $O^*\alpha$ точки α в F, для которой $(\Phi \times |O^*\alpha|) \cap P = \Lambda$. Положим $P^* = \{\langle x, x' \rangle \in P : x' \in |O^*\alpha|\}$ и $P^{**} = \{\langle x, x' \rangle \in X \times S : x' \in [O^*\alpha]$ и существует $\langle x', x'' \rangle \in P^*$, для которого $x = x''\}$. Множество P^{**} получается, если проварьировать вдоль $[O^*\alpha]$ вторую координату каждого элемента множества P^*. Поэтому $Q = \{\langle x, \alpha' \rangle \in X \times S : \alpha' \in |O^*\alpha|\}$. Тогда, очевидно, $P^{**} = P \cap Q$ — замкнутое отмеченное и $P^{**} = \pi^{-1}(\pi P^{**}) \cap Q$, где π — проектирование произведения $X \times F$ на X. Отображение π совершенно (33 гл. VI), поэтому πP^{**} — замкнутое множество, а значит, и P^{**} замкнуто. Очевидно, из определения и следует, что и P^* и P^{**} — отмеченные множества. Из $(\Phi \times |O^*\alpha|) \cap P = \Lambda$ следует, кроме того, что $P^{**} \cap (\Phi \times \times |O^*\alpha|) = \Lambda$. Положим $V = X \setminus \pi P^{**}$. Тогда V — открытое отмеченное по отношению к f множество (ибо πP^{**} — замкнутое и отмеченное по отношению к f множество), $\Phi \subset V$ и $(V \times O^*\alpha) \cap P = \Lambda$. Значит, fV открыто в Y и $fV \times O^*\alpha$ — окрестность точки $z = \langle y, \alpha \rangle$ в $Y \times F$, не пересекающаяся с φP. Поэтому φP замкнуто в $Y \times F$ и φ — факторное отображение.

26. Представим Z как открытое подпространство некоторого бикомпакта F (см. 173 гл. III). Через i обозначим тождественное отображение этого бикомпакта на себя. Тогда $f \times i : X \times F \to Y \times F$ — факторное отображение (25 гл. VI), $(f \times i)^{-1}(Y \times Z) = X \times Z$ (очевидно). Отсюда, так как $X \times Z$ открыто в $X \times F$, мы заключаем, что $fU \times U$, $A \times Z \to f \times f$ — факторное отображение.

27. См. Пономарев [4] и Чобан [1].

28. Достаточность доказывается очевидным прямым рассуждением. Доказательство необходимости аналогично доказательству соответствующей части теоремы о k-пространствах (см. 247 гл. III); надо взять только свободную сумму не всех бикомпактных подпространств рассматриваемого пространства Фреше — Урысона, а счетную сумму всех его метризуемых бикомпактных подпространств. Надо учесть также, что факторное отображение на пространство Фреше — Урысона всегда псевдооткрыто.

31. Пусть $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ — совершенное отображение для каждого $\alpha \in A$. Можно считать, что $f(X_\alpha) = Y_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Через $\tilde{f}_\alpha$ обозначим естественное продолжение отображения f_α по отображению расширений Стоуна — Чеха: $\tilde{f}_\alpha : \beta X_\alpha \to \beta Y_\alpha$. Отображение $\tilde{f}_\alpha$ непрерывно и $\tilde{f}_\alpha(\beta X_\alpha \setminus Y_\alpha) = \beta Y_\alpha \setminus Y_\alpha$ (47 гл. VI), так как f_α совершенно. Поэтому $\tilde{f} = \Pi\{\tilde{f}_\alpha : \alpha \in A\}$ — непрерывное отображение пространства $\tilde{X} = \Pi\{\beta X_\alpha : \alpha \in A\}$ на пространство $\tilde{Y} = \Pi\{\beta Y_\alpha : \alpha \in A\}$, при этом $\tilde{f}(\tilde{X} \setminus X) = \tilde{Y} \setminus Y$, где $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ и $Y = \Pi\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$. Но $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ — бикомпакты и, значит, бикомпактные расширения пространств X и Y. При этом $\tilde{f} \mid X = f = \Pi\{f_\alpha : \alpha \in A\}$. Так как $\tilde{f}$ переводит нарост $\tilde{X} \setminus X$ в нарост $\tilde{Y} \setminus Y$, то $\tilde{f} \mid X$ совершенно (см. 36 гл. VI), т. е. f совершенно.

32. Рассмотрим систему $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ всех замкнутых в X множеств F_α, для которых $f(F_\alpha) = Y$. Система $\mathcal{F}$ естественным образом частично упорядочивается: положим $F_{\alpha_2} \geqslant F_{\alpha_1}$, где $F_{\alpha_i} \in \mathcal{F}$, $F_{\alpha_i} \in \mathcal{F}$, в том и только в том случае, когда $F_{\alpha_2} \subset F_{\alpha_1}$. Итак, $\mathcal{F}$ с таким порядком — частично упорядоченное множество.

Рассмотрим цепь ξ (см. стр. 16) $\xi \subset \mathcal{F}$ в этом частично упорядоченном множестве. Покажем, что для ξ в $\mathcal{F}$ имеется максимальный элемент. Рассмотрим замкнутое в X множество $F_0 = \bigcap\{F : F \in \xi\}$. Докажем, что F_0 — максимальный элемент для ξ в $\mathcal{F}$. Ясно, что для этого надо показать, что $F_0 \in \mathcal{F}$, т. е. что $f(F_0) = Y$. Пусть $x \in X$ произвольно. Так как $f(F) = Y$ для любого $F \in \xi$, то множество $\Theta(F) = F \setminus fx \neq \Lambda$ непусто для любого $F \in \xi$ и, очевидно, бикомпактно. Рассмотрим систему $\tau = \{\Theta(F) : F \in \xi\}$ этих непустых бикомпактных множеств. Ясно, что τ линейно упорядочено по включению. Значит, $\bigcap\{\Theta(F) : F \in \xi\} = \Phi \neq \Lambda$; очевидно, $\Phi \subset F_0$. Отсюда получаем, что $f^{-1}fx \cap F_0 \neq \Lambda$, т. е. $f(F_0) = Y$. Итак, каждое звено ξ в $\mathcal{F}$ имеет в $\mathcal{F}$ максимальный элемент. Поэтому, независимо принципа максимального элемента (см. стр. 16), и все $\mathcal{F}$ имеет максимальный элемент. Это означает, что имеется замкнутое в X множество $F^* \subset X$, для которого $f(F^*) = Y$ и $f \mid F^*$ неприводимо. Покажем также, что $f \mid F^*$ совершенно, ибо F^* замкнуто в X.

33. Докажем, что π — замкнутое отображение. Пусть P замкнуто в $X \times F$ и $y \in X \setminus \pi P$. Тогда $(X \times F) \setminus P = U$ — открытое в $X \times F$ множество, содержащее множество $F_y = \pi^{-1}(y)$. Но F_y можно представить как произведение бикомпактных подпространств, лежащих в соответствующих π пространствах $F_y = \{y\} \times F$. В силу 79 гл. III открытое в X множество W, $W \supset y$, для которого $W \times F \subset U$. Но тогда $W \cap \pi P = \Lambda$. Следовательно, πP замкнуто в X и π — замкнутое отображение. Очевидно, оно непрерывно и бикомпактно, а потому и совершенно.

34. Пусть $F_{t_1 t_2}$ — произвольная связная компонента некоторого (также произвольного) элемента F_{t_1} разбиения π, а $UF_{t_1 t_2}$ — окрестность множества $F_{t_1 t_2}$ в X. Пользуясь задачами 305 и 306 гл. III, возьмем открыто-замкнутое в подпространстве F_{t_0} множество $U_{t_2} \subset F_{t_1}$, для которого $F_{t_1 t_2} \subset U_{t_2} \subset UF_{t_1 t_2}$. Обозначим $U'_{t_2} = F_{t_0} \setminus U_{t_2}$. Множество U'_{t_2} также открыто-замкнуто в F_{t_0}. Так как F_{t_0} — бикомпакт, то и U_{t_2} и U'_{t_2} — бикомпакты, кроме того (по построению), $U_{t_2} \cap U'_{t_2} = \Lambda$. Значит, существуют открытые в X множества $V_{t_2} \supset U_{t_2}$ для которых

$$U_{t_2} = V_{t_2} \cap F_{t_0}; \tag{1}$$

$$V_{t_2} \cap V'_{t_2} = \Lambda; \tag{2}$$

$$V_{t_2} \subset UF_{t_1 t_2}. \tag{3}$$

(здесь мы воспользовались тем, что непересекающиеся бикомпактные множества в хаусдорфовом пространстве X отделяются открытыми в X множествами).

Рассмотрим окрестность $W F_{t_0} = V_{t_0} \setminus V_{t_0}$ бикомпакта $F_{t_0} \subset X$. Так как разбиение $\mathfrak{X}$ непрерывно, то найдется окрестность $W F_{t_0} \subset W F_{t_0}$ для элементов F_{t_0}, для которой

(4) $$F_t \subset W F_{t_0}, \text{ если только } F_t \cap W F_{t_0} \neq \Lambda,$$

т. е. отмеченная окрестность для разбиения $\mathfrak{X}$ (см. стр. 91). Наконец, обозначим

(5) $$U F_{t_0 0} = W F_{t_0} \cap V_{t_0}.$$

Очевидно, $U F_{t_0 0}$ открыто в X и $U F_{t_0 0} \subset U F_{t_0 0}$.

Теперь пусть элемент F_{t_0} разбиения $\mathfrak{X}$ таков, что

(6) $$F_{t_0} \cap U F_{t_0 0} \neq \Lambda.$$

По определению разбиения $\mathfrak{X}$, множество F_{t_0} есть связная компонента бикомпакта F_t.

Используя (6), получаем

(7) $$F_t \cap W F_{t_0} \neq \Lambda,$$

откуда, в силу (4), следует

(8) $$F_t \subset W F_{t_0} \subset V_{t_0} \cup V_{t_0}.$$

Но из (5) следует также

(9) $$F_{t_0} \cap V_{t_0} \neq \Lambda.$$

Так как V_{t_0} и V_{t_0} открыты в X, а F_{t_0} — связное множество, то F_{t_0} (в силу (8) и (9)) принадлежит либо V_{t_0}, либо V_{t_0}, откуда, в силу (9), получаем $F_{t_0} \subset V_{t_0}$. Сопоставляя последнее с (8), получаем

(*) $$F_{t_0} \subset W F_{t_0} \cap V_{t_0} = U F_{t_0 0}.$$

Итак, $U F_{t_0 0}$ — отмеченная для разбиения $\mathfrak{X}$ окрестность элемента $F_{t_0 0}$, содержащаяся в $U F_{t_0 0}$, что означает непрерывность разбиения $\mathfrak{X}$ (см. стр. 92). Все доказано.

35. Так как отображение f замкнуто, а пространства X и Y удовлетворяют аксиоме отделимости T_1, то разбиение $\mathfrak{X} = \{f^{-1}y\colon y \in Y\}$ пространства X непрерывно (см. 32° гл. II). Разбивая каждый бикомпакт $f^{-1}y$ на отмеченные $f^{-1}y = \bigcup \{F_{y\alpha}\colon \alpha \in \delta_y\}$, получаем разбиение $\mathfrak{Z}\colon X = \bigcup \{F_{y\alpha}\colon \alpha \in \delta_y,\ y \in Y\}$ на связные бикомпактные множества $F_{y\alpha}$, $y \in Y$, $\alpha \in \delta_y$. Пространство этого разбиения обозначим через Z. Разбиение $\mathfrak{Z}$ в силу 34 гл. VI непрерывно. Естественное отображение пространства X на пространство Z разбиения $\mathfrak{Z}$ (напомним, в соответствии каждой точке $x \in X$ тот единственный элемент разбиения $\mathfrak{Z}$, который содержит точку x) обозначим через φ. Так как разбиение $\mathfrak{Z}$ непрерывно, то отображение $\varphi\colon X \to Z$ непрерывно и замкнуто и, очевидно, бикомпактно,— значит, совершенно. Из нашего построения, φ — монотонное отображение. Через ψ обозначим отображение, сопоставляющее каждому континууму F_{t_0}, т. е. точке (F_{t_0}) пространства Z, тот единственный бикомпакт F_t, компонентой которого является F_{t_0}; получим отображение $\psi\colon Z \to Y$. Очевидно, $f = \psi\varphi$. Отображение $\psi\colon X \to Z$ совершенно и монотонно.

Рассмотрим отображение $\psi\colon Z \to Y$. Если $y_0 \subset Y$, то $\psi^{-1}y_0$ есть пространство разбиения $\mathfrak{Z}_{y_0}$, бикомпакта $f^{-1}y_0$ на его связные компоненты. Разбиение $\mathfrak{Z}_{y_0}$ непрерывно (см. 26° гл. III), и пространство $Z_{y_0} = \psi^{-1}y_0$ этого разбиения есть нульмерный бикомпакт (см. 36° гл. III). Значит, $\psi\colon Z \to Y$ — факторное нульмерное бикомпактное отображение. Его инициатор тогда следует из совершенности отображений f, φ и того, что $f = \psi\varphi$ (см. 50 гл. VI). Теорема доказана.

36. Пусть ω — произвольное открытое покрытие пространства X. Рассмотрим для каждого $y \in Y$ покрытие $\omega_y = \{U \in \omega\colon U \cap f^{-1}y \neq \Lambda\}$ бикомпактного подпространства $f^{-1}y$, из которого выделим конечное подпокрытие ω_y^1.

Рассмотрим открытые в Y множества $V_y = Y \setminus f(X \setminus \overline{\omega}_y^1)$, где $\overline{\omega}_y^1 = \bigcup \{\overline{U}\colon U \in \omega_y^1\}$; из открытого покрытия $\{V_y\colon y \in Y\}$ бикомпактного пространства Y выделим конечное подпокрытие $(V_{y_1}, \ldots, V_{y_k})$. Тогда $X = f^{-1}Y = f^{-1}\bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i} = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}V_{y_i} \subset \bigcup_{i=1}^{k} \overline{\omega}_{y_i}^1$. Следовательно, $\omega_1 = \bigcup_{i=1}^{k} \omega_{y_i}^1$ — конечное подпокрытие покрытия ω пространства X.

38. Пусть $\gamma = \{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — открытое покрытие пространства X и $|A| \leqslant \tau$. Через $\overline{A}$ обозначим семейство всех конечных подмножеств множества A; тогда $|\overline{A}| \leqslant \tau$. Так как $f^{-1}y$ компактно при любом $y \in Y$, то существует конечное множество $\Gamma \subset A$, для которого $f^{-1}y \subset \bigcup \{U_\alpha\colon \alpha \in \Gamma\}$. Положим $V_\Gamma = Y \setminus f(X \setminus \bigcup \{U_\alpha\colon \alpha \in \Gamma\})$. Множества V_Γ открыты, в силу замкнутости отображения f, $y \in V_\Gamma$ и $f^{-1}(V_\Gamma) \subset \bigcup \{U_\alpha\colon \alpha \in \Gamma\}$. Следовательно, $\lambda = \{V_\Gamma\colon \Gamma \in \overline{A}\}$ — открытое покрытие пространства Y мощности, не превосходящей τ. Так как Y является τ-паракомпактным, то существует локально конечное открытое покрытие $\{W_\beta\colon \beta \in B\}$, вписанное в λ. Для каждого $\beta \in B$ можно зафиксировать такое $\Gamma_\beta \in \overline{A}$, что $f^{-1}(W_\beta) \subset \bigcup \{U_\alpha\colon \alpha \in \Gamma_\beta\}$. Тогда $\mu = \{f^{-1}(W_\beta) \cap U_\alpha\colon \beta \in B,\ \alpha \in \Gamma_\beta\}$ — локально конечное открытое покрытие пространства X, вписанное в γ. Действительно, $\{f^{-1}(W_\beta)\colon \beta \in B\}$ локально конечно, ибо $\{W_\beta\colon \beta \in B\}$ локально конечно в Y и f — непрерывное отображение. Переходя к μ_γ, мы заменяем каждое множество $f^{-1}(W_\beta)$ на конечное семейство открытых множеств $\{f^{-1}(W_\beta) \cap U_\alpha\colon \alpha \in \Gamma_\beta\}$, объединению которых есть в точности $f^{-1}(W_\beta)$. Поэтому μ_γ открыто и локально конечно.

41. Так как каждое совершенное отображение является бефакторным отображением, то равенство следует из задачи 21 гл. VI. Приведите непосредственно доказательство этого утверждения.

43. Отображение проектирования $\pi\colon X \times Y \to X$ совершенно (53 гл. VI). Поэтому, так как X — паракомпакт, то и $X \times Y$ — паракомпакт (36 гл. VII).

44. Необходимость. Пусть отображение f совершенно. Если в множестве $f^{-1}y$ нет точек прикосновения для ξ, то у каждой точки $x \in f^{-1}y$ найдется окрестность Ox, для которой $Ox \cap Bx = \Lambda$ при некотором $Bx \in \xi$. Из покрытия $\{Ox\colon x \in f^{-1}y\}$ множества $f^{-1}y$ выделим конечное: $\{Ox_1, \ldots, Ox_k\}$ и положим $U = \bigcup \{Ox_i\colon i = 1, \ldots, k\}$. Выберем в ξ элемент B так, чтобы было $B \subset \bigcap \{Bx_i\colon i = 1, \ldots, k\}$. Тогда $U \supset f^{-1}y$ и $U \cap B = \Lambda$. Положим $Oy = Y \setminus f(X \setminus U)$. Множество Oy открыто в Y, так как f — замкнутое отображение, и $y \in Oy$ (так как $U \supset f^{-1}y$). Далее, $f^{-1}Oy \subset U$ (очевидно). Значит, $Oy \cap fB = \Lambda$, т. е. $y \notin [fB]_Y$, и это противоречит тому, что y — точка прикосновения для $fB \ni fB$.

Достаточность. Покажем, что f замкнуто. Пусть $P \subset X$, P замкнуто в X, $Q = fP \subset Y$ и $y \in [Q]_Y$.

Рассмотрим предфильтр $\eta = \{O \cap Oy\colon Oy$ — окрестности точки y в $Y\}$ и полагаем $\xi = \{P \cap f^{-1}A\colon A \in \eta\}$. Очевидно, ξ — предфильтр. Так как $A \supset Q$ и $U = O$, то $f(U \cap f^{-1}A) = A$ для всех $A \in \eta$. Значит, $f\xi = \eta$. Так как η сходится к y, существует точка прикосновения $x \in f^{-1}y$ для ξ. Но тогда $x \in [P]$ (ибо все элементы предфильтра ξ являются подмножествами множества P) и, следовательно, $x \in P$, $y = f(x) \in fP = Q$, т. е. множество Q замкнуто.

Итак, доказано, что f — замкнутое отображение. Проверим теперь, что $f^{-1}y$ — бикомпактное квазиструктурное пространство X для любой точки $y \in Y$. Предположим противное. Тогда найдется такой ультрафильтр ξ, состоящий из окрестностей множества $f^{-1}y$, что $\bigcap \{[P]_X : P \in \xi\} = \Lambda$. Очевидно, $\eta = f^{\xi}$ — ультрафильтр на Y, единственным элементом которого является множество $\{y\}$. Поэтому y — точка прикосновения для η. Но, по определению ξ, никакая точка множества $f^{-1}y$ не является точкой прикосновения для ξ — получили противоречие. Значит, $f^{-1}y$ бикомпактно для всех $y \in Y$ и f — совершенное отображение.

45. Достаточность. Пусть $\{\xi\} = \alpha X \setminus X$ и $\{\eta\} = \alpha Y \setminus Y$. Имеем $\overline{f}(X) = Y$, $Y \subset \overline{f}(\alpha X) \subset \alpha Y$. Но Y не бикомпактно, а $f(\alpha X)$ бикомпактно, как непрерывный образ бикомпактного пространства (34 гл. III). Значит, $\overline{f}(\alpha X) = \alpha Y$, $\overline{f}(X) \ni \eta \in \overline{f}(\xi) = \eta$. Поэтому $\overline{f}^{-1}(\eta) = \xi$ и $\overline{f}^{-1}(Y) = X$. Но αX и αY — бикомпакты и, значит, $\overline{f}$ — совершенное отображение (92 гл. III). Тогда и сужение f на X — тоже совершенное отображение (так как $f^{-1}(Y) = X$ — см. 319 гл. II). Но $\overline{f} \mid X = f$. Итак, f — совершенное отображение.

Необходимость. Положим $\overline{f}(x) = f(x)$ при всех $x \in X$ и $\overline{f}(\xi) = \eta$. Пусть $\Phi \subset X$, Φ — бикомпакт. Положим $O_{\Phi}(\xi) = \alpha X \setminus \Phi$. Множества вида $O_{\Phi}(\xi)$ образуют базу топологии пространства αX в точке ξ (см. решение задачи 176 гл. III). Аналогично, множества вида $O_F(\eta)$, где F — бикомпакт, лежащий в Y, а $O_E(\eta) = \alpha Y \setminus F$, образуют базу топологии αY в точке η. Но, очевидно, $\overline{f}^{-1}O_F(\eta) = O_{f^{-1}F}(\xi)$ и $f^{-1}F \subset X$, $f^{-1}F$ — бикомпакт (так как $f = \overline{f} \mid X$ — совершенное отображение — см. 36 гл. VI). Следовательно, отображение $\overline{f}$ непрерывно в точке ξ. Оно непрерывно во всех точках множества X, ибо X открыто в αX и $\overline{f}$ совпадает на X с непрерывным отображением f.

46. Из $\overline{f}(\delta X) = \delta Y$ и $\overline{f}(\delta X \setminus X) \subset \delta Y \setminus Y$ вытекает, что $\overline{f}: Y \to X$. Но $\overline{f}$ — замкнутое (и, очевидно, бикомпактное) отображение, так как δX — бикомпакт и δY — хаусдорфово пространство. Сужение же совершенного отображения на полный прообраз является совершенным отображением (218 гл. II), поэтому $\overline{f} \mid X$ совершенно.

47. Надо доказать только, что $f^{-1}Y \subset X$, т. е. что $f^{-1}y \subset X$ для каждой точки $y \in Y$. Но $f^{-1}y = \bigcap_{\gamma}^{-1}x_{\beta X} = f_0^{-1}y$, так как $f_{\gamma}^{-1}y$ — бикомпакт, $f_0^{-1}y = X \cap f_0 = f \mid X$ замкнуто (при этом см. 73 гл. VI или 168 гл. IV).

48. Рассмотрим расширения βX и βY Стоуна — Чеха пространств X и Y соответственно и продолжение $\overline{f}: \beta X \to \beta Y$ отображения f на эти расширения (см. 34 гл. IV). В силу 46 и 47 гл. VI совершенность отображения f эквивалентна тому, что $\overline{f}(\delta X \setminus X) = \beta Y \setminus Y$, а значит, и равенству $\overline{f}^{-1}(\beta Y \setminus Y) = \beta X \setminus X$. С другой стороны, локальная бикомпактность пространства X означает, что нарост $\beta X \setminus X$ — бикомпакт, точно так же локальная бикомпактность Y означает бикомпактность нароста $\beta Y \setminus Y$ (см. 173 гл. III). Таким же образом полнота в смысле Чеха пространств X или Y означает, что нарост $\beta X \setminus X$, соответственно $\beta Y \setminus Y$, G_{δ}-бикомпактен, т. е. является объединением счетного числа бикомпактов. Поэтому наши предложения получаются из следующего утверждения.

Совершенный образ, как и совершенный прообраз бикомпакта, соответственно с бикомпактом *), — также бикомпакт, соответственно с бикомпактом (см. 36 гл. VI, 91 гл. III).

---

*) «Бикомпакт» — это пространство, являющееся объединением счетного семейства своих бикомпактных подпространств.

Заметим, что отображение $f: \beta X \setminus X \to \beta Y \setminus Y$ совершенно, ибо совершенные отображения $\overline{f}: \beta X \to \beta Y$ (как непрерывные отображения бикомпактов) и имеют место равенства $\overline{f}^{-1}(\beta Y \setminus Y) = \beta X \setminus X$.

49. См. 8 гл. VI. Приведем другое решение. Пусть ρ — какая-нибудь метрика на X, порождающая заданную на X топологию. Для каждого $y \in Y$ и каждого $n \in N^*$ положим $O_{n,y} = \bigcup \{U \subset Y: f^{-1}(U) \subset O_{1/n}(f^{-1}y)\}$, где $O_{\varepsilon,F}(f^{-1}y) = \left\{x \in X: \rho(x, f^{-1}y) < \frac{1}{n}\right\}$. Из задачи 321 гл. II и совершенности отображения f следует, что $O_{n,y}$ — открытое множество. Положим $\gamma_n = \{O_{n,y}: y \in Y\}$ и покажем, что $\gamma = \{\gamma_n: n \in N^*\}$ — фундаментальное множество покрытий пространства X; отсюда будет следовать метризуемость X в силу 77 гл. V. Зафиксируем $y^* \in Y$ и окрестность Oy^* точки y^* в Y. Тогда $\varepsilon^* = \rho(f^{-1}y^*, X \setminus f^{-1}(Oy^*)) > 0$, так как $f^{-1}y^*$ — компакт, а $F^* = X \setminus f^{-1}(Oy^*)$ — не пересекающееся с $f^{-1}y^*$ замкнутое множество (см. 283 гл. III). Положим $V = O_{\varepsilon^*/2}(f^{-1}y^*)$ и выберем отличное открытое в X множество U, содержащее $f^{-1}y^*$ и лежащее в V. Это возможно, ибо f — замкнутое отображение (см. 325 гл. II). Напомним, что U — отличное множество для отображения f, если $f^{-1}fU = U$. Поскольку $f^{-1}y^*$ — компакт, а множество $X \setminus U$ замкнуто, постольку $\rho(f^{-1}y^*, X \setminus U) = \delta^* > 0$. При этом $\delta^* \leqslant \varepsilon^*$. Выберем такое $n^* \in N$, чтобы $\frac{1}{n^*} < \frac{\delta^*}{3}$, и рассмотрим окрестность $O_{n^*}y^*$ точки y^* в покрытии γ_{n^*}. Покажем, что $\gamma_{n^*}(O_{n^*}y^*) \subset Oy^*$.

Рассмотрим произвольное $y' \in Y$, для которого $O_{n^*}y' \cap O_{1/n^*}y^* \neq \Lambda$. Зафиксируем $y'' \in O_{1/n^*}y' \cap O_{1/n^*}y^*$. Тогда $f^{-1}(y'') \subset O_{1/n^*}(f^{-1}y') \cap O_{2/n^*}(f^{-1}y^*)$, откуда следует, что $\rho(f^{-1}y', f^{-1}y^*) < \delta^*$, т. е., что $f^{-1}y' \cap O_{\delta^*}(f^{-1}y^*) \neq \Lambda$. Тогда, в силу выбора δ^*, непременно $f^{-1}y' \cap U \neq \Lambda$, а следовательно, $f^{-1}y' \subset U \subset V$. Соответственно $f^{-1}(O_{1/n^*}y') \subset O_{\delta^*}(V) = O_{\varepsilon^*/2}(V) \subset O_{\varepsilon^*}(f^{-1}y^*) \subset f^{-1}(Oy^*)$. Значит, $O_{1/n^*}y' \subset Oy^*$, т. е. $\gamma_{n^*}(O_{n^*}y^*) \subset Oy^*$.

50. Рассмотрим какое-нибудь вполне регулярное топологическое счетного типа X, которое не является пространством счетного типа (укажите такое пространство). Зафиксируем такой бикомпакт $Y \subset X$, что характер каждого бикомпакта Φ, лежащего в X и объемлющего F, несчетен.

Рассмотрим отображение π, естественного проектирования пространства X на пространство Y его разбиения, единственным неодноточечным элементом которого является F. Отображение π совершенно (см. 318, 322 гл. II). Легко доказать, что Y — вполне регулярное пространство (аккуратно написанное самим). Положим $y^* = \pi P$. Если бы нашелся бикомпакт $B \ni y^*$, $B \subset Y$ такой, что $\chi(B, Y) \leqslant \aleph_0$, то его прообраз $\pi^{-1}B$ был бы бикомпактом (ибо π — совершенное отображение (см. 36 гл. VI)) счетного характера в X (см. 324 гл. II), содержащим F. Получили противоречие. Значит, Y не является пространством точечно счетного типа (в точке y^*).

51. См. Филиппов [2], где доказано более сильное утверждение.

52. Пусть X — несчетное множество, x^* — фиксированная его точка и Y получается присоединением к семейству $\mathscr{A}$ всех счетных подмножеств множества $X \setminus \{x^*\}$, взятого множества и семейства $\{A \subset X: A \ni x^*\}$. Очевидно, $\mathscr{T}$ — семейство всех замкнутых множеств по отношению к некоторой топологии $\mathscr{T}$ на X. Пространство $(X, \mathscr{T})$ финально компактно, ибо любая окрестность точки x^* содержит все точки множества X кроме, быть может, некоторого счетного множества. Очевидно, $(X, \mathscr{T})$ — T_1-пространство, а так как только одна точка множества X гиперизолированная (а именно, x^*), то $(X, \mathscr{T})$ является нормальным пространством (см. 15 гл. III). Предположим теперь, что имеется совершенное отображение f пространства X на некоторое сепарабельное пространство Y. Через M обозначим какое-нибудь счетное всюду плотное в Y множество. Зафиксируем для каждой точки $y \in M$

такую точку $x_0 \subset X$, чтобы $f(x_0) = y$. Тогда $A = \{x_\alpha\colon y \notin M\}$ счетно. Следовательно, A замкнуто в X. Но тогда $M = fA$ замкнуто в Y. Так как M всюду плотно в Y, мы заключаем, что $M = Y$. Заметим теперь, что никакое бикомпактное подпространство пространства X конечно (ведь в X любое счетное множество замкнуто). Значит, $X = f^{-1}Y = f^{-1}M$ счетно, что противоречит условию.

53. Из (а) следует, что $\overline{f}^{-1}(bY \setminus Y) = bX \setminus X$ и $\overline{f}^{-1}(Y) = X$. Поэтому $f = \overline{f} \mid X$ — совершенное отображение (см. 48 гл. VI). Так как $R(X)$ замкнуто в X, то цель будет достигнута, если мы установим, во-первых, что $f(R(X)) = R(Y)$ и, во-вторых, что $f(x') \neq f(x'')$ для любых двух точек $x' \subset R(X)$, $x'' \subset R(X)$, $x' \neq x''$. Поступаем условием (а), а также непрерывностью и взаимной однозначностью отображения $\overline{f}$, заключаем, что $\overline{f}[bX \setminus X]_{bX} = [bY \setminus Y]_{bY}$. Так как, кроме того, $\overline{f} \mid X = f$ и $f(X) = Y$, то $\overline{f}([bX \setminus X]_{bX} \setminus (bX \setminus X)) = [bY \setminus Y]_{bY} \setminus (bY \setminus Y)$, следовательно, $\overline{f}(R(X)) = R(Y)$, ибо $R(X) = [bX \setminus X]_{bX} \setminus (bX \setminus X)$; $R(Y) = [bY \setminus Y]_{bY} \setminus (bY \setminus Y)$. Далее, так как сужение f на множество $\varphi(X)$ является, по условию, взаимно однозначным отображением, то задача будет решена, если мы установим, что $R(X) = \varphi(Y)$. Имеем $\overline{f}([\varphi Y]_{bX}) = bY$, ибо множество $\overline{f}([\varphi Y]_{bX})$ содержит Y и замкнуто в bY. Так как $\overline{f}(\varphi Y) = Y$, то $\overline{f}([\varphi Y]_{bX} \setminus \varphi Y) \supset bY \setminus Y$. Поэтому $[\varphi Y]_{bX} \supset bX \setminus X$; следовательно, $R(X) \subset [bX \setminus X]_{bX} \subset [\varphi Y]_{bX}$. Все доказано.

54. Для π легко определяется непрерывное отображение $\varphi\colon Y \to X \times Y$ такое, что $\pi\varphi\colon Y \to Y$ — тождественное отображение — например, зафиксируем $x^0 \subset X$ и положим $\varphi(y) = (x^0, y)$ при всех $y \in Y$. Рассуждая от противного, мы можем применить теперь результат задачи 53 гл. VI и заключить, что сужение π на множество $R(X \times Y)$ точек не локальной бикомпактности произведения $X \times Y$ является гомеоморфизмом. Но в таком случае это явно не так: $R(X \times Y) = X \times R(Y)$ (см. 183 гл. III) и $\pi \mid (X \times R(Y))$ не взаимно однозначно.

55. Через i_X, i_Z обозначим соответственно тождественные отображения пространств X и пространства Z на себя. Очевидно, отображение $f \Delta g$ можно рассматривать как композицию диагонального произведения $i_X \Delta g\colon X \to X \times Z$ и произведения $f \times i_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$, т. е. $f \Delta g = (f \times i_Z)(i_X \Delta g)$. Но подпространство $i_X \Delta g$ пространства X отображается гомеоморфно на график отображения g, который образует замкнутое подпространство пространства $X \times Z$, ибо Z — хаусдорфово пространство (см. 230 гл. II). Отображение $f \times i_Z$ совершенно, как произведение двух совершенных отображений (51 гл. VI). Значит, и $f \Delta g$ — совершенное отображение, как композиция двух совершенных отображений (29 гл. VI).

56. Воспользуемся результатом задачи 55 гл. VI. Диагональное произведение $f \Delta (gf)\colon X \to Y \times Z$ является совершенным отображением, при этом $(f \Delta gf)(X) \subset \Gamma_g = \{(y, g(y))\colon y \subset Y\}$, где Γ_g — график отображения g. Как известно, сужение $\pi \mid \Gamma_g$ проектирования $\pi\colon Y \times Z \to Y$ является гомеоморфизмом пространства Γ_g на пространство Y (см. 231 гл. II). Но, очевидно, $\pi \cdot (f \Delta gf) = f$. Значит, как композиция совершенного отображения и гомеоморфизма, f является совершенным отображением (29 гл. VI). Второе утверждение доказывается совсем просто.

57. Положим $f_1 = f \mid X_1$ и обозначим через i_1 тождественное отображение пространства X_1 в пространство X. Тогда $f_1 = f \cdot i_1$ и можно воспользоваться утверждением задачи 56 гл. VI, в силу которого i_1 — совершенное отображение. Значит, $Y_1 = i_1(X_1)$ замкнуто в X.

58. Действительно, можно считать, что все компоненты — отображения эти. Тогда, пользуясь задачами 35 гл. III и 325 гл. II, можно показать, что образы — хаусдорфовы пространства. После этого решение легко следует из задачи 56 гл. VI.

Возможно другое решение этой задачи для вполне регулярных пространств, основанное на задачах 46 и 47 гл. VI.

59. Если $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение, а $g\colon X \to Z$ — произвольное, причем Z — хаусдорфово пространство, то диагональное произведение $f \Delta g$ есть гомеоморфизм пространства X на замкнутое подпространство пространства $Y \times Z$ (см. задачу 55 гл. VI и замечание к задаче 57 гл. VI).

60. Из (б), очевидно, вытекает (а) — ведь проектирование $\pi\colon Y \times Z \to Y$ является совершенным отображением (см. 33 гл. VI), и прообраз любого из произвольное замкнутое в $Y \times Z$ подпространство также является совершенным отображением (см. 30 гл. VI). Выведем (б) из (а). Так как X вполне регулярно, существует гомеоморфное отображение i пространства X в некоторый бикомпакт Z (75, 38 гл. III). В силу 55 гл. VI диагональное произведение $f \Delta i$ является совершенным отображением пространства X в $Y \times Z$. Но $f \Delta i$ взаимно однозначно. Значит, $f \Delta i$ гомеоморфно отображает X на замкнутое подпространство $(f \Delta i)(X)$ пространства $Y \times Z$.

61. Пространство X, как вполне хаусдорфово пространство с сетью мощности, не большей τ, гомеоморфно отображается на хаусдорфово пространство веса, не большего τ (см. 147 гл. II). Но класс всех пространств веса, не большего τ, является относительно перечислимым конечного числа его элементов в относительно перехода к подпространству. Поэтому можно воспользоваться утверждением задачи 59 гл. VI и заключить из него, что $\omega X \leqslant \tau$.

62. Ясно, что каждое $U_{\alpha\gamma}$, $\alpha \in A_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, — открытое в X множество, ибо X локально связно, а $U_{\gamma\alpha}$ — связная компонента открытого в X множества $f^{-1}V_\gamma$ (см. 370 гл. III). Пусть $x_0 \in X$ произвольна, а Ox_0 — произвольная окрестность точки x_0. Рассмотрим такую окрестность $O'x_0$ точки x_0, что $O'x_0 \subset Ox_0$, а множество $F_0 = O'x_0 \cap f^{-1}fx_0$ открыто-замкнуто в подпространстве $f^{-1}fx_0$ (ясно, что такая окрестность $O'x_0$ точки x_0 существует, ибо подпространство $f^{-1}fx_0$ нульмерно, т. е. и в этом подпространстве существует база из открыто-замкнутых в нем подмножеств). Теперь еще рассмотрим открыто замкнутое в подпространстве $f^{-1}fx_0$ множество $F_1 = f^{-1}fx_0 \setminus F_0$. Ясно, что F_0 и F_1 замкнуты в X и $F_0 \cap F_1 = \Lambda$. Воспользуемся нормальностью пространства X. Рассмотрим открытые в X множества Γ_0 и Γ_1, для которых $F_0 \subset \Gamma_0$, $F_1 \subset \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \Lambda$ и, кроме того, $\Gamma_0 \subset O'x_0$. Положим $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Ясно, что Γ открыто в X и $f^{-1}fx_0 \subset \Gamma$. Вследствие замкнутости отображения $f\colon X \to Y$, будет открытым в Y множество $f^\#\Gamma = Y \setminus f(X \setminus \Gamma)$. Ясно, что $fx_0 \in f^\#\Gamma$. Возьмем такое $V_{\gamma_0} \in \theta$, чтобы $fx_0 \subset V_{\gamma_0} \subset f^\#\Gamma$ (вспомним при этом, что θ — база в Y).

Рассмотрим теперь ту единственную связную компоненту $U_{\gamma_0\alpha_0}$ множества $f^{-1}V_{\gamma_0}$, для которой $x_0 \in U_{\gamma_0\alpha_0}$. Ясно, что $U_{\gamma_0\alpha_0} \subset \Gamma$. Вспомним, что $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ и $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \Lambda$. Тогда вследствие связности множество $U_{\gamma_0\alpha_0}$ лежит в Γ_1 и не пересекается с Γ_0; ибо $x_0 \in U_{\gamma_0\alpha_0}$, $x_0 \in \Gamma_1$, но $x_0 \subset \Gamma_0$ (разумеется, важно, что $U_{\gamma_0\alpha_0} \subset \Gamma_0 \cup \Gamma_1$). Итак, $x_0 \subset U_{\gamma_0\alpha_0} \subset \Gamma_1 \subset O'x_0 = Ox_0$, где $U_{\gamma_0\alpha_0} \in \mathfrak{o}$. Все доказано.

63. Пусть $\alpha\gamma = \{U_\alpha\colon \alpha \subset A\}$. Так как $f^{-1}\gamma$ открыто в X, а X локально связно, то множество U_α открыто в X (см. 370 гл. III). Положим $f_\gamma = f \mid f^{-1}V$. Так как f совершенно, а $f^{-1}V$ — полный прообраз, то $f_\gamma\colon f^{-1}V \to V$ — совершенное отображение. Для каждого $\alpha \subset A$ зафиксируем точку $x_\alpha \in U_\alpha$ и положим $F = \{x_\alpha\colon \alpha \subset A\}$. Так как α_γ — дизъюнктивное семейство и $f^{-1}V = \bigcup \{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$, то F — замкнутое в $f^{-1}V$ дискретное подпространство. Рассмотрим сужение $f_\gamma = f_\gamma \mid F = f \mid F$. Вследствие того, что f_γ совершенно, а F замкнуто в $f^{-1}V$, отображение $f_\gamma\colon F \to fF$ совершенно, а так как F дискретно, то дискретным пространством будет и fF, причем $|fF| = |F|$. Для дискретного же пространства мощность совпадает с весом. Итак, $|F| = |fF| = w(fF) \leqslant wX \leqslant \tau$. Значит, $|\alpha_\gamma| \leqslant \tau$, что и требовалось доказать.

70. Так как Y метризуемо, то и Y существует σ-дискретная база (см. 83 гл. V): $\mathfrak{B}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathfrak{B}_i$, где $\mathfrak{B}_i$, $i\in N$, — дискретные в Y системы открытых множеств. Пусть $\mathfrak{B}_i=\{V_{i\alpha}:\alpha\in A_i\}$. Для каждых $i\in N$, $\alpha\in A_i$ рассмотрим систему $u_{i\alpha}=\{U_{i\alpha\beta}:\beta\in A_{i\alpha}\}$ связных компонент открытого в X множества $f^{-1}V_{i\alpha}$. Положим $\mathfrak{U}_i=\bigcup\{u_{i\alpha}:\alpha\in A_i\}$, $\mathfrak{U}=\bigcup\{\mathfrak{U}_i:i\in N\}$, $f^{-1}\mathfrak{B}_i=\{f^{-1}V_{i\alpha}:\alpha\in A_i\}$. Пользуясь совершенной нормальностью метризуемого пространства Y, можно так выбрать σ-дискретную базу $\mathfrak{U}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathfrak{U}_i$, чтобы системы $\mathfrak{U}_i$ были σ-дискретными в X при любом $i\in N$. Тогда $\mathfrak{U}$ также будет σ-дискретной в X системой. После этого остается воспользоваться задачей 86 гл. VI и 80 гл. V.

71. При совершенных отображениях все не превышает (см. 41 гл. VI), значит, $wX\geqslant wY$. Для доказательства обратного неравенства надо воспользоваться задачами 69 и 83 гл. VI.

72. Вследствие задачи 71 гл. VI, нормальное пространство X имеет счетную базу. Значит, X метризуемо (см. 79 гл. V).

73. Доказывается аналогично задаче 100 гл. IV.

75. Если $f:X\to Y$, $f(X)=Y$ — замкнутое отображение и σ — дискретное в Y семейство замкнутых множеств, то $f^{-1}\sigma=\{f^{-1}\Phi:\Phi\in\sigma\}$ — таково по семейство в X. Остается воспользоваться определением компактной нормальности (стр. 286) и задачей 328 гл. II.

76. Решение следует из задачи 150 гл. V и следующего совсем простого предложения:

Если $f:X\to Y$ — замкнутое отображение, $f(X)=Y$ и φ — конечное (стр. 286) семейство множеств в X, то $\psi=\{fA:A\in\varphi\}$ — конечное семейство множеств в Y.

77. См. Энгелькинг [3].

78. Следует из задач 135 гл. V и 77 гл. VI.

79. Положим $A=f(F)$. Так F замкнуто в Y ($\supset$), было $x\in[A]$, то существует счетное множество $A'\subset A$, для которого $x\in[A']$ (ведь X — пространство счетной тесноты). Очевидно, найдется такое счетное множество $B'\subset F$, что $f(B')=A'$. Положим $B=[B']$. Тогда B — бикомпакт (84 гл. III) и $B\supset F$. Так как f — непрерывное отображение в хаусдорфово пространство, то множество $f(B)$ бикомпактно и замкнуто в X (36, 61 гл. III). Далее, из $f(B)\supset f(B')=A'$ теперь следует, что $f(F)=A\supset fB=[fB]\supset[A']\ni x$. Значит, $f(F)=A$ замкнуто в X.

80. Предположим противное. Тогда существует последовательность $\{x_n:n\in N^+\}$ точек множества $Fr\,f^{-1}p$, для которой $|\varphi(x_{n+1})|>|\varphi(x_n)|+1$ при всех значениях n. Положим $V_i=\left\{x\in X:|\varphi(x)-\varphi(x_i)|<\frac{1}{2}\right\}$. Множество V_i открыто (так как φ — непрерывная функция), $x_i\in V_i$ и семейство $\gamma=\{V_i:i\in N^+\}$ дискретно в X (т. е. каждая точка пространства X имеет окрестность, пересекающуюся не более чем с одним элементом семейства γ). Выберем теперь $z_i\in V_i$, $i\in N^+$, так, чтобы было (a) $z_i\neq x_i$ и (b) $f(z_i)\neq f(z_k)$ при $i\neq k$. Это делается легко по индукции: если для $i\leqslant n$ точки z_i определены в соответствии с требованиями (a) и (b), то точкой z_{n+1} произвольную точку множества

$$V_{n+1}\setminus(f^{-1}y\cup f(\{f^{-1}(z_k):k=1,\ldots,n\})).$$

Так как z_{n+1} — граничная точка множества $f^{-1}y$, а все $f^{-1}f(z_i)$ замкнуты в X (ведь Y — T_1-пространство) и либо не пересекаются с $f^{-1}y$, либо совпадают с $f^{-1}y$, то выбрать так z_{n+1} можно.

Построенное в результате множество $P=\{z_i:i\in N^+\}$ замкнуто в X. Более того, замкнуто в X и любое его подмножество (мы учли дискретность семейства γ и то, что $z_i\in V_i$, $i\in N^+$). Из замкнутости отображения f следует теперь, что и любое подмножество множества fP замкнуто в Y. Значит, в Y нет предельных точек для fP (25 гл. II). Но $|fP|=\aleph_0$ — это следует из (b). Мы получили противоречие со счетной компактностью пространства Y.

81. Если $Fr\,f^{-1}y$ не счетно компактно, то существует замкнутое дискретное множество $A\subset Fr\,f^{-1}y$ мощности $\aleph_0$ (109 гл. III). Перенумеруем его элементы: $A=\{x_n:n\in N^+\}$ и перенумеруем элементы какой-нибудь счетной базы $\mathfrak{B}$ точки y в Y: $\mathfrak{B}=\{V_n:n\in N^+\}$. Так как X нормально, то существует дискретное в X семейство $\gamma=\{U_n:n\in N^+\}$ открытых (в X) множеств U_n, где $U_n\supset x_n$ (22 гл. III). Можно, уменьшив, если нужно, множества U_n, добиться того, чтобы было $fU_n=V_n$ при каждом значении n (так как f — непрерывное отображение). Поскольку x_n лежит на границе множества $f^{-1}y$, то $U_n\cap(X\setminus f^{-1}y)\neq\Lambda$. Выберем при каждом $n\in N^+$ точку $x_n'\in U_n\cap(X\setminus f^{-1}y)$. Тогда $f(x_n')\in V_n$ и, следовательно, точка y принадлежит замыканию множества $Q=\{fx_n':n\in N^+\}$, являющегося образом множества $P=\{x_n':n\in N^+\}$ при f. Но $x_n'\notin f^{-1}y$, и потому $y\in Q$. Значит, Q не замкнуто, в то время как P — замкнутое множество (ибо семейство $\{U_n:n\in N^+\}$ дискретно и $x_n'\in U_n$). Так как $fP=Q$, то имеем противоречие с замкнутостью отображения f.

82. Следует из задач 81 гл. VI, 181 гл. V.

83. Предположим, что граница F прообраза некоторой точки оказалась не счетно компактным пространством. Граница замкнутого множества всегда замкнута, поэтому F — замкнутое в X множество. Выберем теперь в F замкнутое (в F, а значит, и в X) дискретное множество A мощности $\aleph_0$ и рассмотрим ограниченную неограниченную вещественную функцию φ на нем. Она на A непрерывна, так как A — дискретное пространство. Так как X нормально, а A замкнуто в X, то φ продолжается до некоторой непрерывной вещественной функции ψ, определенной на всем X (см. 34 гл. III). Мы пришли к противоречию с утверждением задачи 80 гл. VI.

84. Достаточно произвести небольшие, вполне очевидные, изменения в доказательстве утверждения задачи 81 гл. VI, чтобы получить нужный вывод.

85. В пространстве точечно счетного типа каждая точка обладает таким счетным семейством окрестностей, которое нужно, чтобы опереться на утверждение задачи 84 гл. VI (см. 65 гл. III). Теперь достаточно сослаться на задачу 181 гл. V.

86. (a) Пространства Z, очевидно, счетно паракомпактно, поэтому его произведение на любой метризуемый бикомпакт — а Y таков — нормально (222 гл. V).

(б) Так как проектируемые пространства X на счетно компактное пространство Z (см. 195 гл. III) являются совершенными отображениями (см. решение задачи 33 гл. VI), то X — счетно компактное пространство (38 гл. VI).

(в) Каждое замкнутое подпространство F пространства X счетно компактно. Поэтому и его образ fF при f, являющемся счетно компактным пространством. Но $|fF|\geqslant 2$ и, значит, $|F|\geqslant\aleph_0$. Следовательно, F — бикомпакт и fF замкнуто в Y.

Утверждение (г) очевидно.

87. Для доказательства надо воспользоваться задачей 82 гл. VI.

88. В силу 85, 88 гл. VI Y является образом некоторого подпространства пространства X при совершенном отображении. Поэтому Y метризуемо (см. 8, 43 гл. VI).

90. Пусть $A\in\mathfrak{A}$, $x\in A\subset U\subset X$, где U открыто в X. Для $x\in A$ положим $\varepsilon_x=\frac{\rho(x,X\setminus U)}{3}$. Тогда $\varepsilon_x>0$. Положим $\mathfrak{B}=\{B\in\mathfrak{A}:B\to A$ и $\operatorname{diam}B>$

$\geqslant \kappa_\alpha$) и $\mathscr{P} = \bigcup \{B\colon B \in \mathscr{F}\}$. Семейство $\mathscr{P}$, по условию, конечно, состоит из замкнутых множеств и его элементы не пересекаются с A (ибо все они отличны от A, а X — нормально). Поэтому P замкнуто, $x \notin P$ и, значит, $\delta_x = \min\{\rho(x, F)\colon e_x\} > 0$. Положим $Ox = \{y \in X\colon \rho(x, y) < \delta_x\}$. Тогда, очевидно, если $B \subset X$ и $B \cap Ox \neq \Lambda$, то $\operatorname{diam} B \leqslant \varepsilon_x$ и $\rho(x, B) < \varepsilon_x$, откуда следует, что $B \subset O_{3\varepsilon_x} x = \{z \in X\colon \rho(x, y) < 2\varepsilon_x\} \subset U$.

Рассмотрим множество $V = \bigcup \{Ox\colon x \in A\}$; V — открытое множество, содержащее A, причем, если $B \subset V \neq \Lambda$, то $B \subset U$. Можно заключить теперь, что разбиение λ непрерывно (см. стр. 321).

91. Пусть R — множество всех рациональных чисел отрезка $[0, 1]$ числовой прямой, наделенное обычной метрикой и топологией, а $Q = R^\omega = \{(x, y)\colon x \in R, y \in R\}$ — метрическое произведение $R \times R$. Перенумеруем как-нибудь элементы R: $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$. Для каждого $n \in N$ зафиксируем конечное дизъюнктное покрытие γ_n пространства R замкнутыми в R (но, быть может, незамкнутыми) множествами диаметра, меньшего $1/n$. Положим $\lambda_n = \{P \times \{r_n\}\colon P \in \gamma_n\} \cap \lambda = \bigcup \{\beta_n\colon n \in N\}$. Очевидно, λ — дизъюнктное покрытие пространства Q замкнутыми в Q множествами, причем для каждого $\varepsilon > 0$ диаметр лишь конечного множества элементов из λ превосходит ε. Следовательно (см. 93 гл. VI), λ является непрерывным разбиением пространства Q. Очевидно, каждый элемент из λ является небикомпактным множеством с пустой внутренностью.

92. Рассмотрим разбиение λ пространства Q, построенное в задаче 91 гл. VI. Оно непрерывно, поэтому соответствующее этому разбиению отображение $\pi\colon Q \to Z$, где Z — пространство разбиения λ, является непрерывным замкнутым отображением (322 гл. II), а само Z является T_1-пространством, так как все элементы рассматриваемого разбиения замкнуты. Но тогда Z нормально (329 гл. II). Кроме того, $|Z| = \aleph_0$. Ни в одной точке пространство Z не удовлетворяет первой аксиоме счетности — иначе прообраз этой точки имел бы бикомпактную границу (см. 82 гл. VI), а элементов с бикомпактной границей в указанном разбиении нет.

93. Предположим противное. Пусть существует точка $y^* \in Y$, предельная для D. Положим $D_1 = D \setminus \{y^*\}$. Ясно, что D_1 не замкнуто в Y. Так как Y является k-пространством, то найдется бикомпактное подпространство $K \subset Y$, для которого множество $F \cap D_1$ не замкнуто в F. Следовательно, $|F \cap D_1| \geqslant \aleph_0$. Выберем множество $E \subset F \cap D_1$, для которого $|E| = \aleph_0$. Так как F бикомпактно, то некоторая точка y^{**} является предельной для E. Положим $K = F \setminus \{y^{**}\}$. Тогда $y^{**} \in [E] \setminus E$, $E \subset D$, $|F| = \aleph_0$. Занумеруем элементы множества E натуральными числами: $E = \{y_n\colon n \in N\}$. Положим $A_n = f^{-1}y_n$. Отметим последовательность $\{x_n\colon n \in N\}$ в X по индукции. Возьмем в качестве x_1 какую-нибудь точку из A_1. Если точка x_n для всех $n \leqslant k$ определена, то за x_{k+1} возьмем любую точку множества $A_{k+1} \setminus \bigcup \{\gamma(x_n)\colon n \leqslant k\}$, где $\gamma(x) = \bigcup \{U\colon U \in \gamma \text{ и } U \ni x\}$. Так как $x_{k+1} \in D$, а покрытие γ точечно конечно, то множество $A_{k+1} \setminus \bigcup \{\gamma(x_n)\colon n \leqslant k\}$ не пусто, и следовательно, приведенное к определению x_{k+1} вот. Итак, построена последовательность $\{x_n\colon n \in N\}$ точек пространства X.

Докажем, что множество P точек этой последовательности замкнуто в X (в действительности, P даже дискретно в X). Пусть $x \in X$ произвольно. Если $\gamma(x) \cap P = \Lambda$, то $x \notin [P]$, ибо γ — открытое покрытие. Если $x_n \in \gamma(x)$, то $x \in \gamma(x_n)$ и $x_n \notin \gamma(x_n)$ при $n > n'$ (это следует из определения x_n). Значит, $|\gamma(x_{n'}) \cap P| \leqslant \aleph_0$. Если $x \notin P$, то $x \notin P' = \gamma(x_{n'}) \cap P$. Пользуясь тем, что X — T_1-пространство, мы тогда можем найти окрестность Ox точки x, не пересекающуюся с конечным множеством P'. Тогда $O^*x = Ox \cap \gamma(x_{n'})$ — окрестность точки x в X, не пересекающаяся с P. Итак, P замкнуто в X; значит, $E = fP$ замкнуто в Y. Но $y^{**} \in [E] \setminus E$. Получили противоречие. Значит, D дискретно в Y.

94. Пространство X является k-пространством (238 гл. III). Так как каждое непрерывное замкнутое отображение является факторным и образ k-пространства при факторном отображении является k-пространством (248 гл. III), то Y — также k-пространство. В пространстве k пространства Y всякое открытое множество, замыкания которых в Y бикомпактны, вполне точечно нормально открыто покрыты y. К этому γ и отображению f применим результат задачи 93 гл. VI. Заключаем, что множество A всех тех $y \in Y$, прообраз которых не покрывается никакой конечной совокупностью элементов из γ, дискретно в Y. Тогда если $y \in Y \setminus A$, то $f^{-1}y \subset \bigcup \{U\colon U \in \gamma'\}$, где γ' — некоторое конечное подсемейство семейства γ. Имеем $f^{-1}y \subset \bigcup \{U\colon U \in \gamma'\} = \Phi$. Для каждого $U \in \gamma'$ множество $|U|$ бикомпактно (ибо γ вписано в λ, и λ было выбрано соответствующим образом). Тогда Φ бикомпактно, как объединение конечного семейства бикомпактов, а следовательно, и $f^{-1}y$ бикомпактно, как замкнутое подпространство бикомпактного пространства Φ. Заметим, что замкнутость множества $f^{-1}y$ вытекает из непрерывности f и того, что Y — T_1-пространство. Пространство же Y является T_1-пространством, так как f замкнуто, а X, по условию,— T_1-пространство.

95. Суженье непрерывного замкнутого отображения на полный прообраз всегда является непрерывным замкнутым отображением (316 гл. II). В данном случае таких будет полный прообраз множества всех точек, прообразы которых бикомпактны. Заключение теоремы следует из утвержденных задачи 84 гл. VI и того, что образ локально бикомпактного пространства при непрерывном отображении является локально бикомпактным пространством (48 гл. VI).

96. Можно считать, что сеть $\mathscr{S}$ такова: $P \cap Q \in \mathscr{S}$ для каждых $P \in \mathscr{S}$ и $Q \in \mathscr{S}$. Положим $\mathscr{T} = \{fP\colon P \in \mathscr{S}\}$, а через λ обозначим множество всех тех $y \in Y$, что существует конечное семейство $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$, для которого $\{y\} = \bigcap \{Q\colon Q \in \mathscr{T}'\}$. Ясно, что $|Y_0| \leqslant |\mathscr{T}|$, $w_0 \leqslant |\mathscr{T}| \cdot \aleph_0$, $\aleph_0 \leqslant w_0$. Докажем, что $f^{-1}y$ — бикомпактное подпространство пространства X для всякой точки $y \in X \setminus Y_0$. Зафиксируем точку $x \in f^{-1}y$. Далее, занумеруем в последовательность $\{P_n(x)\colon n \in N\}$ все элементы сети $\mathscr{S}$, содержащие эту точку x. Тогда всякая последовательность $\{x_n\colon n \in N\}$, где $x_n \in P_n(x)$, имеет точку x своей предельной точкой, т. е. $x \in [\{x_n\colon n \in N\}]$. Пространство X, как пространство со счетной сетью, финально компактно, а так как оно, кроме того, регулярно, то является паракомпактом (см. 143 гл. II, 132 гл. V). Паракомпактом типа является и всякое подпространство $f^{-1}y$, $y \in Y$, ибо множество $f^{-1}y$ замкнуто в паракомпакте. Значит, если подпространство $f^{-1}y$ не бикомпактно, то оно и не счетно компактно (см. 181 гл. V). Тогда существует последовательность $A = \{x_n\colon n \in N\}$ попарно различных точек множества $f^{-1}y$, не имеющая предельных точек в X (т. е. A — замкнутое дискретное счетное бесконечное множество). Возьмем такое дискретное в X семейство $\{U_n\colon n \in N\}$ открытых в X множеств, что $x_n \in U_n$ для каждого $n \in N$ (здесь важно, что X — нормальное пространство, что вытекает из его регулярности и финальной компактности: см. 15 гл. III).

Построим по индукции три последовательности:

$$\xi_1 = \{x_n^1\colon n \in N^-\},$$
$$\xi_2 = \{x_n^2\colon n \in N^+\},$$
$$\xi_3 = \{O_n x\colon n \in N^-\}$$

так, чтобы выполнялись условия:

(а) $O_k x \supset x_n^k$ при всех $n \geqslant k$ и $k \in N^+$;
(б) $X \setminus [O_k x] \supset f^{-1}x_n^k$ при всех $n \leqslant k$ и $k \in N^+$;
(в) $x_n^k \in P_n(x)$ при всех $n \in N^-$;
(г) $x_n^m \in U_n$ при всех $n \in N^+$;
(д) $fx_n^k = fx_m^m = y$ при всех $n \in N^+$.

Заметим, что $O_i x$, $x \in N^*$,— окрестность точки x в X. Построение будем вести следующим образом:

Выберем точку $x^1 \in X \setminus f^{-1}y$ произвольно, а окрестность $O_1 x$ возьмем согласно условию (б). Пусть теперь $x_0^1, x_1^1, O_n x$ уже определены для любого $n \leqslant j$ согласно условиям (а) — (д). Так как $\mathscr{F}$ — сеть в пространстве X, то существуют $P \in \mathscr{F}$, $P' \in \mathscr{F}$, для которых $x \in P \subset O_j x$ и $x_{j-1} \in P' \subset U_{j-1}$. Положим $P^* = P \cap P_{j+1}(x)$. По условию $P^* \in \mathscr{F}$. Будем знать: $(fP^* \cap fP') \setminus (y) \neq \Lambda$. Выберем точки $x_j^1 \in P^*$, $x_j^1 \neq x_j^{j-1}$ таким образом, чтобы $fx_j^1 = fx_j^{j-1} \neq y$. За $O_{j+1}x$ примем какую-нибудь окрестность точки x, для которой $x \in O_{j+1}x \subset [O_{j+1}x] \subset X \setminus \bigcup\{f^{-1}x_i^1\}$: $i = 1, 2, \ldots, j+1\}$. Шаг построения выполнен. Продолжая, получим искомые последовательности. Так как $\{x_n^1\}$: $n \in N^+\}$ сходится к x, то $y = fx \in \bigcap\{[fx_n^1]$: $n \in N^+\}] = \bigcap\{fx_n^n$: $n \in N^+\}$. Получим противоречие с тем, что $y \neq fx$. Мы убедились, что f — замкнутое отображение и что $\{x_n^n$: $n \in N^+\}$ — замкнутое множество (последнее является следствием дискретности семейства $\{U_n$: $n \in N^+\}$ в пространстве X).

97. Обозначим через Y' множество тех $y \in Y$, для которых $f^{-1}y$ не бикомпактно. Тогда $|Y'| \leqslant \aleph_0$ (см. 98 гл. VI). Положим $Y^* = Y \setminus Y'$, $X^* = f^{-1}Y^*$ и $f_* = f \mid X^*$. Отображение f_*: $X^* \to Y^*$ совершенно и $f(X^*) = Y^*$. Очевидно, достаточно доказать, что Y^* распадается в счетную сумму подпространств, гомеоморфных подпространствам пространства X^*. Так как X^* — регулярное пространство со счетной сетью, то в X^* существует и счетная сеть $\mathscr{S}^*$, состоящая из замкнутых в X^* множеств. Каждое $f_*^{-1}y$ (где $y \in Y^*$) является счетным бикомпактом, поэтому хотя бы одна точка пространства $f_*^{-1}y$ изолирована в $f_*^{-1}y$. Имея в виду это замечание, рассмотрим для каждого $P \in \mathscr{S}^*$ сужение $f_P = f \mid P$ отображения f на подпространство P. Так как P замкнуто в X^*, то f_P — непрерывное замкнутое отображение. Через $\bar{P}$ обозначим множество всех $x \in P$, для которых $f^{-1}f(x) = \{x\}$ (т. е. $\bar{P}$ — множество всех точек однократности отображения f_P). Очевидно, $f_P^{-1}f_P\bar{P} = \bar{P}$, поэтому $f_{\bar{P}} = f_P \mid \bar{P}$ — тоже непрерывное и замкнутое отображение. По $f_{\bar{P}}$, кроме того, взаимно однозначно, непрерывно, $f_{\bar{P}}$ устанавливает гомеоморфизм между пространством $\bar{P}$ и подпространством $f_{\bar{P}}\bar{P} = f\bar{P}$ пространства Y.

Мы покажем теперь, что $Y^* = \bigcup\{f\bar{P}$: $P \in \mathscr{S}^*\}$. Пусть $y^* \in Y^*$. Выберем точку x^*, изображенную в $f^{-1}y$. Множество $U = X^* \setminus (f^{-1}y \setminus \{x^*\})$ является окрестностью точки x^* в пространстве X^*. Так как $\mathscr{S}^*$ — сеть в X^*, то найдется $P^* \in \mathscr{S}^*$, для которого $x^* \in P^* \subset U$. Ясно, что тогда $f_P^{-1}f_{P^*}(x^*) = x^*$, т. е. $x^* \in \bar{P}^*$ и $y^* = fx^* \in f(\bar{P}^*) \subset Y^*$. Итак, $Y = (\bigcup\{y\}$: $y \in Y'\}) \cup \bigcup(\bigcup\{f\bar{P}$: $P \in \mathscr{S}^*\})$ — искомое представление.

98. Если $\alpha_1 \in M \setminus M_k$, $\alpha_2 \in M \setminus M_k$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $(U_\beta) \cap F_{\alpha_1} \neq \Lambda$ и $(U_\gamma) \cap F_{\alpha_2} \neq \Lambda$, то $U_\beta \supset (U_\beta) \supset F_{\alpha_1}$ и $U_\gamma \supset (U_\beta) \supset F_{\alpha_2}$ (так как (U_β) — замкнутое множество), и потому либо $\alpha_1 \neq \beta$, либо $\alpha_2 \neq \beta$. Пусть, для определенности, $\alpha_1 \neq \beta$. Но тогда $\alpha_1 \in M_k$ — получили противоречие. Первое утверждение доказано. Второе вытекает из первого. Действительно, образ множества (U_β) в пространстве Z разбиения покрыт (так как разбиение непрерывно) содержит $\{F_\beta\} \in Z$ и пересекается с множеством $\{F_\alpha\}$: $\alpha \in M \setminus M_k$) не более чем по одному элементу. Но $Z = \{F_\beta\}$: $\beta \in M\}$. Значит, $Z \setminus Z_k$ дискретна в Z.

99. Положим $\xi_i = \{O_{1/i}f^{-1}x$: $x \in Z\}$, $i \in N^+$. По ξ_i определим Z_{ξ_i}, как в задаче 98 гл. VI, и положим $Y_i = Z \setminus Z_{\xi_i}$, $Y_0 = Z \setminus \bigcup\{Y_i$: $i \in N^+\}$. Тогда $Z = \bigcup\{Y_i$: $i \in N\}$ и $Y_0 = \bigcap\{Z_{\xi_i}$: $i \in N^+\}$. В силу задачи 98 гл. VI

при $i \geqslant 1$ каждое Y_i дискретно в Z. Остается обнаружить, что $f^{-1}z$ — компакт для любого $z \in Y_0$. По определению Y_0, для каждого $i \in N^+$ найдется $z_i \in Z$, $z_i \neq z$ такое, что $O_{1/i}f^{-1}z_i \supset f^{-1}z$. Тогда, очевидно, любая подпоследовательность последовательности $\{z_i$: $i \in N^+\}$ имеет z своей предельной точкой (ибо замыкания объединения полных прообразов элементов этой подпоследовательности пересекаются с $f^{-1}z$). Значит, $\{z_i$: $i \in N^+\}$ сходится к z. Обозначим через Z^* подпространство пространства Z, образованное точкой z и точками последовательности $\{z_i$: $i \in N^+\}$. Из сказанного ясно, что Z^* удовлетворяет первой аксиоме счетности. Положим $X^* = f^{-1}Z^*$ и $f^* = f \mid X^*$. Тогда f^*: $X^* \to Z^*$ — непрерывное замкнутое отображение и $fX^* = Z^*$. В силу 85 гл. VI граница множества $f^{-1}z$ в X^* является компактом. Но соотношение $O_{1/i}f^{-1}z_i \supset f^{-1}z$ гарантирует нам, что все точки множества $f^{-1}z$ являются по отношению к X^* граничными. Значит, $f^{-1}z$ — компакт.

100. В силу 99 гл. VI существует счетное семейство γ дискретных замкнутых подпространств пространства Y таких, что для каждой точки $y \in Y^* = Y \setminus \bigcup\{P$: $P \in \gamma\}$ множество $f^{-1}y$ бикомпактно. Положим $X^* = f^{-1}Y^*$ и $f^* = f \mid X^*$. Тогда f^* — совершенное отображение метрического пространства X^* на T_1-пространство Y^*. Следовательно, Y^* метризуемо (49 гл. VI). Искомое разложение пространства Y: $Y = Y^* \cup (\bigcup\{P$: $P \in \gamma\})$.

101. В силу 96 гл. VI множество Y' всех точек пространства Y, для которых $f^{-1}y$ не бикомпактно, счетно. Полагая $Y^* = Y \setminus Y'$, $X^* = f^{-1}Y^*$ и $f^* = f \mid X^*$. Тогда f^* — совершенное отображение пространства X^* на пространство Y^*. Поэтому Y^* обладает счетной базой (41 гл. VI).

102. Будем считать, что все пространства X несчетны (в противном случае см. задачу 98 гл. VI). Зафиксируем базу $\mathscr{B}$ в X, мощность которой τ равна весу X. Далее, предположим, что X не бикомпактно — иначе наша задача тривиальна. Тогда X не счетно компактно (ибо оно паракомпактно — см. 281 гл. V). Пусть γ — произвольное дискретное в X счетное бесконечное семейство элементов базы $\mathscr{B}$: $\gamma = \{U_n$: $n \in N^+\}$.

Рассмотрим множество M_γ точек пространства Y, прообраз каждой из которых пересекается со всеми элементами семейства γ. Покажем, что M_γ дискретно в Y. Допустим противное. Выберем незамкнутое счетное множество $\{y_n$: $n \in N^+\} \subset M_\gamma$ и $x_n \in f^{-1}y_n \cap U_n$, $n \in N^+$. Множество $\{x_n$: $n \in N^+\}$ дискретно в Y, так как дискретно γ, но его образ — множество $\{y_n$: $n \in N^+\}$ не замкнутое, что противоречит замкнутости f. Таким образом, M_γ дискретно в Y. Но Y, как непрерывный образ пространства веса τ, обладает сетью мощности, не большей τ. Тогда и M_γ обладает такой сетью. Но M_γ — дискретное пространство. Следовательно, $|M_\gamma| \leqslant \tau$. Мощность семейства всех счетных подсемейств базы $\mathscr{B}$ не превосходит $\tau^{\aleph_0}$. Значит, $|\bigcup\{M_\gamma$: $\gamma \subset \mathscr{B}$, $|\gamma| = \aleph_0$ и γ дискретно в $X\}| \leqslant \tau \cdot \tau^{\aleph_0} = \tau^{\aleph_0}$. Покажем, что каждая точка $y \in Y$, прообраз которой не бикомпактен, попала в некоторое M_γ. Если пространство $f^{-1}y$ не бикомпактно, то оно и не счетно компактно (так как X — a пачит, и $f^{-1}y$ — паракомпакт). Тогда в $f^{-1}y$ можно выделить замкнутое дискретное множество A мощности $\aleph_1$. Пусть $A = \{x_n$: $n \in N^+\}$. Пространство X нормально, поэтому существуют открытые в X множества $U_n \in \mathscr{B}$ такие, что $x_n \in U_n$ при всех значениях n и семейство $\gamma = \{U_n$: $n \in N^+\}$ дискретно в X (см. 22 гл. III). Но тогда $y \in M_\gamma$.

103. Пусть f: $X \to Y$ — непрерывное замкнутое отображение и $f(X) = Y$. Выберем в X сеть $\mathscr{F}$ мощности, не большей τ. Можно предполагать, что пересечение конечного множества элементов $\mathscr{F}$ принадлежит $\mathscr{F}$. Для каждой точки $x \in X$ зафиксируем последовательность $\{P_n(x)$: $n \in N^+\}$ элементов $\mathscr{F}$, образующую сеть в этой точке. Такая последовательность существует, ибо X всегда удовлетворяет первой аксиоме счетности. Поступая, как в решении задачи 96 гл. VI, $\mathscr{F}' = \{P$: $P \in \mathscr{F}\}$ и $Y_1 = \{y \in Y$: существует конечное семейство $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$, для которого $f(y) = \bigcap\{Q$: $Q \in \mathscr{F}'\}\}$. Тогда $|\mathscr{F}'| \leqslant \tau$, и потому $|Y_0| \leqslant \tau$. Мы покажем, что для любого $y \in Y \setminus Y_0$ полный

прообраз $f^{-1}y$ является счетно компактным подпространством пространства X. Так как X паракомпактно, а $f^{-1}y$ замкнуто в X, то отсюда будет следовать, что множество $f^{-1}y$ бикомпактно. Дальнейшее счетная компактность пространства $f^{-1}y$ повторяет соответствующее место рассуждения, проведенного при решении задачи 98 гл. VI.

108. В наших предположениях пространство X метризуемо. Поэтому можно применить утверждение задачи 89 (или 93) гл. VI. В силу последнего $Y = Y^* \cup Y'$, где $|Y'| \leqslant \aleph_0$ и $f^{-1}y$ — бикомпакт для каждого $y \in Y^*$. Отсюда и из непрерывности $|Y| \geqslant \aleph_0$ следует, что $Y^* \neq \Lambda$. Зафиксируем точку $y^* \in Y^*$. Множество $f^{-1}y^*$ — бикомпакт, лежащий в метризуемом пространстве X. Поэтому характер множества $f^{-1}y^*$ в X счетен. Так как отображение f непрерывно и замкнуто, то тогда мы заключаем, что пространство Y удовлетворяет в точке y^* первой аксиоме счетности (см. 327 гл. II). Из однородности пространства Y следует теперь, что оно во всех точках удовлетворяет первой аксиоме счетности. Но тогда можно сослаться на задачу 99 гл. VI — и требуемое заключение отсюда следует (заметим, что Y финально компактно).

109. Так как f непрерывно, то $f^{\#}U$ непусто для любого открытого в X множества U, а так как f замкнуто, то $f^{\#}U$ открыто в Y, ибо $f^{\#}U = Y \setminus f(X \setminus U)$ и U открыто в X. Тогда, вследствие непрерывности отображения f, множество $f^{-1}f^{\#}U$ открыто в X. Итак, $f^{-1}f^{\#}U$ непусто и открыто в X. Ясно, что $f^{-1}f^{\#}U = U$. Докажем, что $f^{-1}f^{\#}U$ всюду плотно в U. Пусть U' — открытое в X множество и $U' \subset U$. Так как f непринадлежно, то $f^{\#}U' \neq \Lambda$. Значит, $U' \cap f^{-1}f^{\#}U \neq \Lambda$.

110. В силу непрерывности и замкнутости отображения f, множество $f^{\#}U$ непусто и открыто в X, а множество $f^{-1}f^{\#}U$ всюду плотно в U (см. 109 гл. VI). Тогда $[U] = [f^{-1}f^{\#}U]$, а следовательно, $f[U] = f[U^{-1}f^{-1}U] = [f^{-1}f^{\#}U] = [f^{\#}U]$, что и требовалось доказать. (Здесь мы воспользовались равенством $f[A] = [fA]$, характеризующим замкнутые непрерывные отображения.) Второе утверждение следует из доказанного.

111. (а) Пусть точка $x_0 \in X$ изолирована в X. Значит, одноточечное подмножество $\{x_0\}$ открыто-замкнуто в X. Вследствие задачи 109 гл. VI множество $f^{\#}(x_0) = \{y \in Y: f^{-1}y \subset \{x_0\}\}$ непусто и открыто в Y. Но, очевидно, $f^{-1}(x_0) = \{x_0\}$, значит, fx_0 изолирована в Y.

(б) Пусть точка fx_0 изолирована в Y. Тогда множество $f^{-1}fx_0$ открыто-замкнуто в X. Докажем, что $f^{-1}fx_0 = \{x_0\}$. Ясно, что $x_0 \in f^{-1}fx_0$. Предположим, что множество $f^{-1}fx_0$ принадлежит более одной точки. Рассмотрим множество $X_1 = (X \setminus f^{-1}fx_0) \cup \{x_0\}$. Ясно, что X_1 замкнуто в X и $f(X_1) = Y$. Кроме того, X_1 — собственное подмножество пространства X. Получили противоречие.

112. Предположим, что $|f^{-1}y| > 1$ и что внутренность $\operatorname{Int} f^{-1}y$ множества $f^{-1}y$ не пуста — пусть некоторая точка x^* ей принадлежит. Так как $|f^{-1}y| > 1$, то существует $x \in f^{-1}y$, $x^* \neq x$. Выберем, воспользовавшись тем, что X — T_1-пространство, окрестность Ox^* точки x^*, для которой $Ox^* \subset \operatorname{Int} f^{-1}y$ и $x \notin Ox^*$. Тогда $X' = X \setminus Ox^*$ — замкнутое подпространство пространства X, $f^{-1}y' \subset X'$ при $y' \neq y$ и $f^{-1}y \cap X' \supset \{x\} \neq \Lambda$. Значит, $fX' = Y$, что противоречит непринадлежности f.

113. Для непринадлежности отображения $\tilde{f}$ достаточно доказать, что для любого открытого в βX множества Γ существует точка $\tau \in \beta Y$, для которой $\tilde{f}^{-1}\tau \subset \Gamma$. Рассмотрим такое открытое в βX множество Γ', чтобы $[\Gamma']_{\beta X} \subset \Gamma$. Положим $U' = \Gamma' \cap X$. Пользуясь непринадлежностью отображения f: $X \to Y$, берем точку $y_0 \in Y$, для которой $f^{-1}y_0 \subset U'$. Тогда $[f^{-1}y_0]_{\beta X} \subset [U']_{\beta X} = [\Gamma'] \cdot {}_X \subset \Gamma$. Вследствие же замкнутости отображения f, получаем $[f^{-1}y_0]_{\beta X} = \tilde{f}^{-1}y_0$ (см. 73 гл. VI). Таким образом, мы нашли точку $y_0 \in Y \subset \beta Y$, для которой $\tilde{f}^{-1}y_0 \subset \Gamma$.

115. Пусть $\gamma = (U_\alpha: \alpha \in A)$ — база в X и $|\gamma| = \omega X$. Положим $A_n = A$ при всех $n \in N$ и каждое A_n будем рассматривать как дискретное топологическое пространство. Рассмотрим тихоновское произведение $M(A) = \Pi\{A_n: n \in N\}$. Определим подпространство S пространства $M(A)$ так: $S = \{\{\alpha_i: i \in N\}: M(A): (U_{\alpha_\xi}: \xi \in N^+)$ — база в некоторой точке $x \in X$ и $U_{\alpha_{\xi+1}} \subset U_{\alpha_\xi}$ при всех $\xi \in N\}$. В точке $\alpha = \{\alpha_i: i \in N\}$ множества S поставим в соответствие точку $\eta(\alpha) = \bigcap\{U_{\alpha_i}: i \in N\}$ множества X. В дальнейшем всюду через α, α', α^* и т. д. обозначаются те или иные точки множества $M(A)$, а через α_i, соответственно α'_i, α^*_i и т. д. обозначается i-я координата — элемент множества A_i. Пространство $M(A)$, а следовательно, и пространство S, метризуемо, как произведение счетного множества метризуемых (здесь — дискретных) пространств. Мы покажем, что определенное выше отображение η: $S \to X$ является непрерывным открытым отображением S на X.

Рассмотрим произвольное $x \in \delta_1$, любую окрестность U точки $x = \eta(\alpha)$ в X и любую окрестность V точки α в S. По определению η, неравенство $U_{\alpha_{i_0}} \subset U$ при некотором значении i_0 индекса i. Множество $V_{i_0} = \{\alpha' \in S: \alpha'_i = \alpha_i$, когда $1 \leqslant i \leqslant i_0\}$ составляет в пространстве S базу точки α в S по определению тихоновского произведения $M(A)$. Поэтому найдется значение n' индекса i, при котором $V_{n'} \subset V$. Положим теперь $n^* = \max\{n', i_0\}$. Тогда $\alpha \in V_{n^*} \subset V$, $x \in U_{\alpha_{n^*}} \subset U$. Мы покажем, что $\eta(V_{n^*}) = U_{\alpha_{n^*}}$. Если $\alpha' \in V_{n^*}$, то $\alpha'_i = \alpha_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n^*$, и потому $U_{\alpha'_{n^*}} = U_{\alpha_{n^*}}$. Из $\eta(\alpha') \in U_{\alpha'_{n^*}} = U_{\alpha_{n^*}}$ заключаем, что $\eta(V_{n^*}) \subset U_{\alpha_{n^*}}$. Если $x' \in U_{\alpha_{n^*}}$, то $x' \in U_{\alpha_i}$ при $1 \leqslant i \leqslant n^*$, и потому (здесь мы пользуемся тем, что X удовлетворяет первой аксиоме счетности) можно так выбрать $\alpha'_i \in A_i$, $i \in N^+$, чтобы при $1 \leqslant i \leqslant n^*$ было $\alpha_i = \alpha'_i$ (а, значит, $U_{\alpha_i} = U_{\alpha'_i}$) и семейство $\{U_{\alpha'_i}: i \in N^+\}$ составляло базу в x', подчиненную условию $U_{\alpha'_{i-1}} \subset U_{\alpha'_i}$. Тогда $\alpha' \in V_{n^*}$ и $x' = \eta(\alpha')$. Итак, $\eta(V_{n^*}) \supset U_{\alpha_{n^*}}$. Значит, $\eta(V_{n^*}) = U_{\alpha_{n^*}}$. В силу произвола, допущенного при выборе n, U и V, мы заключаем, что η — непрерывное открытое отображение. Соотношение $\eta(S) = X$ непосредственно вытекает из того, что X удовлетворяет первой аксиоме счетности во всех точках. Обратное утверждение очевидно.

116. Нет, не верно. Каждый бикомпакт с первой аксиомой счетности (в среде таких сам, неметризуемых — см. 80, 82, 87 гл. III) является (115 гл. VI) образом некоторого метрического пространства при непрерывном открытом отображении.

117. Необходимость. Пусть f: $X \to Y$ — отображение, данное в условии. В X есть база γ, являющаяся объединением семейств γ_i, $i = 1, 2, \ldots$, каждое из которых финально конечно. Тогда каждое множество $f^{-1}y$ пересекается лишь со счетным количеством элементов семейства γ_i, $i = 1, 2, \ldots$, (так как все элементы семейства γ_i открыты, а $f^{-1}y$ — компактное пространство). Значит, $|\{U: U \in \mathcal{B}: U \cap f^{-1}y \neq \Lambda\}| \leqslant \aleph_0$. Отсюда $|\{U: fU \ni y$ и $U \in \mathcal{B}\}| \leqslant \aleph_0$, т. е. $\{fU: U \in \mathcal{B}\}$ — точечно счетное семейство множеств. Так как f — непрерывное открытое отображение, то $\{fU: U \in \mathcal{B}\}$ — база пространства Y.

Достаточность. Годится построение, на которое основано решение задачи 115 гл. VI, — надо только вкладывать не из семейства всех открытых в X множеств, а из γ следует брать какую-нибудь точечно счетную базу

рассматриваемого пространства, причем можно считать, что $|\gamma| = \omega X$. Следует далее учесть, что произведение счетного множества пространств со счетной базой вновь является пространством со счетной базой.

118. Обратимся сначала к доказательству достаточности. Пусть $f: X \to Y$ — такое отображение, как в условии задачи, ρ — метрика на X и γ_i — некоторое открытое локально конечное покрытие пространства X множествами диаметра, меньшего $1/i$, $i = 1, 2, \ldots$. Будем считать также, что γ_{i+1} всегда вписано в γ_i. Положим $\lambda_i = \{fU: U \in \gamma_i\}$. Так как $f^{-1}y$ — бикомпакт, то $|\{U: U \in \gamma_i \text{ и } U \cap f^{-1}y \neq \Lambda\}| < \aleph_0$. Значит, $\{V: V \in \lambda_i \text{ и } V \ni y\}$ — конечное множество для каждого $y \in Y$. Учитывая, кроме того, что f — открытое отображение и $f(X) = Y$, мы заключаем, что λ_i — открытое точечно конечное покрытие пространства Y при каждом $i \in N$. Покажем теперь, что $\{\lambda_i: i \in N\}$ — максимизирующееся семейство покрытий. Зафиксируем $y \in Y$ и $V_i \in \lambda_i$ так, что $V_i \ni y$ при всех $i \in N$. Выберем $U_i \in \gamma_i$, для которого $fU_i = V_i$. Рассмотрим произвольную окрестность Oy точки y. Так как f непрерывно, то найдется окрестность O множества $f^{-1}y$ в X, для которой $\overline{O} \subset Oy$. Но $f^{-1}y$ — бикомпакт в X — метрическом пространстве. Существует такое натуральное n, для которого

$$O_{1/n}(f^{-1}y) = \left\{x \in X: \rho(x, f^{-1}y) < \frac{1}{n}\right\} \subset O.$$

Тогда из $U \in \gamma_n$ и $U \cap f^{-1}y \neq \Lambda$ следует (так как диаметр множества U не превосходит $1/n$), что $U \subset O$. Следовательно, все элементы семейства λ_n, содержащие y, лежат целиком в Oy, в частности, $V_n \subset Oy$. Этим доказано, что $\{\lambda_i: i \in N\}$ — максимизирующаяся последовательность открытых точечно конечных покрытий пространства Y. Тогда $\bigcup\{\lambda_i: i \in N\}$ — равномерная база в Y (87 гл. V).

Доказательство необходимости основывается на том, что каждая равномерная база $\mathcal{B}$ представляется в виде $\mathcal{B} = \bigcup\{\gamma_i: i \in N\}$, где каждое $\gamma_i = \{U_\alpha: \alpha \in A_i\}$ — точечно конечное открытое покрытие пространства Y и последовательность $\{\gamma_i: i \in N\}$ максимизируется (66 гл. V). Теперь построение отображения (а затем исследование его свойств) ведется точно так же, как в решении задачи 115 гл. VI, на основе множеств A_i, $i \in N$ (хотя они теперь не счетные, вообще говоря, а имеют мощность какого-либо фиксированного множества A). Затем учитывается, что произведение (счетного) семейства конечных множеств бикомпактно.

119. В силу 117 гл. VI X обладает точечно счетной базой. Остается теперь сослаться на задачу 87 гл. V.

120. Ответ авторам не известен. Однако если ослабить требование вполне регулярности X до хаусдорфовости, ответ отрицателен. Укажем пример. Пусть Q — несчетное всюду плотное подмножество отрезка $[0, 1]$, и котором каждый бикомпакт счетен (см. 285 гл. III). Положим $Y = [0, 1] \setminus Q$ и

$$X = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 0\} \cup \{(x, y): x \in Q,\ y \in N\},$$

где N — множество всех натуральных чисел. За базу топологии $\mathcal{U}$ на X примем совокупность множеств следующих трех типов:

(1) $\{(x, y)\}$ для всех $x \in Q$ и $y \neq 0$;

(2) $O_\varepsilon(x) = \{(x, 0)\} \cup \{(x, y): y > \varepsilon\}$ для всех $x \in Q$ при $\varepsilon \in N$;

(3) $G_{\alpha\varepsilon}(x) = \{(x, 0): x \in Y \cap \alpha\} \cup \{(x, y): x \in Q \cap \alpha,\ y > \varepsilon\}$, где α — открытое в отрезке $[0, 1]$ множество, а $\varepsilon \in N$.

Построенное так пространство X, очевидно, хаусдорфово и имеет равномерную базу.

В силу 118 гл. VI X является образом некоторого метрического пространства $\mathcal{M}$ при непрерывном открытом бикомпактном отображении, которое мы обозначим через f. Каждой точке (x, y) множества X поставим в соответствие ее первую координату x — этим определено отображение φ множества X на множество точек отрезка $[0, 1]$. Полагая множество $[0, 1]$ всюду

всей вещественной прямой $\mathcal{L}^*$: $A \in \mathcal{L}^*$ в том и только в том случае, когда существует такое открытое в обычной топологии отрезка множество $U \subset A$, что $A \setminus U \subset Q$. Полагаем $Y = [0, 1]$, $\mathcal{S} = \mathcal{L}^*|_Y$ (см. 209 гл. III). Очевидно, $\varphi: X \to Y$ — непрерывное открытое бикомпактное отображение. Теперь остается сослаться на свойства пространства Y в задаче 208 гл. III и воспользоваться задачей 112 гл. VI.

121. Нет. Более того, можно построить непрерывное открытое конечнократное отображение вполне регулярного счетного пространства, не содержащего никакого бикомпактного бикомпакта, на простейший бесконечный бикомпакт (140 гл. VII).

122. Ответ авторам в настоящее время не известен. Если ослабить требование вполне регулярности X до хаусдорфовости, то ответ отрицателен — годится отображение $\varphi: X \to Y$, построенное в задаче 150 гл. VI.

123. Очевидно, достаточно доказать взаимную однозначность отображения f. Пусть $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$. Рассмотрим окрестности Ox_1, Ox_2: $Ox_1 \cap Ox_2 = \Lambda$. Так как f непрерывно, то $f^{-1}Ox_1 = \{y \in Y: f^{-1}y \subset Ox_1\} \neq \Lambda$, и множество $f^{-1}f^{\#}Ox_1$ вполне в Ox_1. Тогда $f(Ox_1) = f(f^{-1}f^{\#}Ox_1) \subset [f^{\#}Ox_1]$ (здесь мы, кроме того, воспользовались непрерывностью f). Так как f открыто, то fOx_2 открыто в Y, а множество $Y \setminus fOx_2$ замкнуто. Кроме того, $f^{\#}Ox_2 \subset Y \setminus fOx_2$, значит, $[f^{\#}Ox_1] \subset Y \setminus fOx_2$, следовательно, $[f^{\#}Ox_1] \cap fOx_2 = \Lambda$. Так как, помимо прочего, $fx_1 \in f(Ox_1) \subset [f^{\#}Ox_1]$, $fx_2 \in fOx_2$, то получим $fx_1 \neq fx_2$.

124. Пусть $f: X \to Y$ — такое отображение, P замкнуто в λ, $Q = fP$ и $y \in fP$. Тогда $f^{-1}y \cap P = \Lambda$.

Рассмотрим точки $x_1, \ldots, x_k$, из которых состоит множество $f^{-1}y$. Выберем для x_i окрестность Ox_i, не пересекающуюся с P, и потребуем, чтобы было $Ox_i \cap Ox_j = \Lambda$ при $i \neq j$, а f отображало Ox_i гомеоморфно на открытое в Y множество. Тогда $V = \bigcap\{fOx_i: i = 1, \ldots, k\}$ — окрестность точки y, не пересекающаяся с Q. Значит, $Q = fP$ замкнуто.

125. Пусть $f: X \to Y$ — такое отображение. Зафиксируем x и положим $y = f(x)$, $F = f^{-1}y$. Тогда $x \in F$ и $|F| = k$. Перенумеруем элементы F: $F = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Пусть для определенности, $x = x_1$. Так как X — хаусдорфово пространство, можно построить попарно непересекающиеся окрестности $Ox_1, \ldots, Ox_k$ точек $x_1, \ldots, x_k$. Тогда $V = \bigcap\{fOx_i: i = 1, \ldots, k\}$ — открытое в Y множество, $V \ni y$. Положим $U_1 = Ox_1 \cap f^{-1}V$. Очевидно, $fU_1 = V$, $i = 1, \ldots, k$, и $U_i \cap U_1 = \Lambda$ при $i \neq 1$. Значит, $f^{-1}y' \cap U_1 \neq \Lambda$ для каждой точки $y' \in V$, и из $|f^{-1}y'| = k$ следует, что $f|U_1$ — взаимно однозначное отображение. Но f открыто и непрерывно. Значит, так как U_1 открыто, отображение $f|U_1$ открыто (и непрерывно). Следовательно, $f|U_1$ — гомеоморфизм. При этом $f(U_1) = V$ — открытое в Y множество. Далее см. задачу 124 гл. VI.

126. Положим $Y_n = \{y \in Y: |f^{-1}y| = n\}$, $X_n = f^{-1}Y_n$, $f_n = f|X_n$, $f_n: X_n \to Y_n$, $n \in N$. Тогда f_n открыто и непрерывно, так как этими свойствами обладает отображение f, а X_n — полный прообраз (см. 327 гл. II). Кроме того, f_n равно n-кратно. Значит (125 гл. VI), f_n — локально гомеоморфизм (и совершенно). Поэтому X_n можно покрыть открытыми в X_n множествами веса, не большего τ. Но f_n замкнуто (124 гл. VI) и, значит, совершенно. Значит, из указанного покрытия пространства X_n можно выделить покрытие мощности, не большей τ. Поэтому вес просто X_n не превосходит τ. Но $X = \bigcup\{X_n: n \in N\}$. Следовательно, в X есть сеть мощности, не большей τ.

127. (а) Пусть τ — вес Y. Из 126 гл. VI следует, что в X есть сеть мощности, не большей τ. Но тогда (см. 61 гл. VII) и вес X не превосходит τ. Очевидно (в силу непрерывности и открытости отображения), вес Y не превосходит вес X. Значит, вес X равен весу Y. (б) Следует из задачи 126 гл. VI и 227 гл. V.

128. Рассмотрим точки $a \in I$, $b \in I$, $a < b$. Положим $L_b = \{x \in I: x < b\}$, $M_a = \{x \in I: a < x\}$. Ясно, что L_b и M_a открыты в I, и $U_{a,b} = L_b \cap M_a$ лежит в интервале (a, b). Имеем

$$\varphi^{-1}U_{a,b} = \varphi^{-1}L_b \cap \varphi^{-1}M_a = B \cap A,$$

где $B = \varphi^{-1}L_b = \{p: |\varphi(f^{-1}y)| < I_b\}$ и $A = \varphi^{-1}M_a = \{p: \varphi(f^{-1}y) \cap M_a \neq \Lambda\}$.

Зафиксируем теперь точку $y^* \in B$. Вследствие непрерывности отображения φ и компактности пространства I, существует такое открытое множество $V \subset X$, содержащее множество $f^{-1}y^*$, что $|\varphi(V)| \subset L_b$. Из замкнутости f следует тогда, что $f^{-1}(W) \subset V$ для некоторого открытого в Y множества W, содержащего точку y^*. Будем иметь $|\varphi(f^{-1}(W))| \subset |\varphi(V)| \subset L_b$. Отсюда следует, что $W \subset B$. Значит, множество B открыто в Y. Покажем теперь, что и множество A открыто. Пусть $\bar{y} \in A$ произвольно. Тогда существует такое $\bar{x} \in X$, что $f\bar{x} = \bar{y}$ и $\varphi(\bar{x}) \in M_a$. Так как φ непрерывно, то существует такое открытое в X множество $\bar{V}$, что $\bar{x} \in \bar{V}$ и $\varphi(\bar{V}) \subset M_a$. Положим $\bar{W} = f\bar{V}$. Отображение f открыто, следовательно, $\bar{W}$ открыто в Y. При этом $\bar{y} \in \bar{W}$, $f^{-1}y' \cap \bar{V} \neq \Lambda$ для любой точки $y' \in \bar{W}$ и $\varphi(f^{-1}y') \cap \bar{V}) \subset \varphi(\bar{V}) \subset M_a$, если $y' \in \bar{W}$. Значит, $\varphi(f^{-1}y') \cap M_a \neq \Lambda$ для каждого $y' \in \bar{W}$, откуда получаем $\bar{W} \subset A$. Итак, A открыто в Y. Учитывая положение, выше показанное, что множества $\varphi^{-1}U_{a,b} = B \cap A$ открыты в Y. Так как при этом множества вида $U_{a,b}$ образуют базу топологии в отрезке I, то функция φ непрерывна. Все доказано.

129. Нет, не каждое. Через π обозначим проектирование квадрата $I \times I$ на отрезок I. Мощность множества $\mathfrak{M}$ всех замкнутых подпространств пространства $I \times I$ равна мощности отрезка I (см. 320 гл. III). Пусть φ — взаимно однозначное отображение I на $\mathfrak{M}$. Для каждой точки $y \in I$ через $x(y)$ обозначим любой элемент множества $\varphi(y) \cap \pi^{-1}(y)$, если $\varphi(y) \cap \pi^{-1}(y) \neq \Lambda$. Если $\varphi(y) \cap \pi^{-1}(y) = \Lambda$, то выберем $x(y) \in \pi^{-1}(y)$ произвольно. Положим $A = \{x(y): y \in I\}$, $X' = X \setminus A$ и $\pi' = \pi \mid X'$. Тогда $\pi': X' \to I$ — открытое непрерывное отображение (ибо π открыто и $(\pi')^{-1}(y) = \pi^{-1}(y)$ для каждой точки $y \in I$ — см. 346 гл. II). Предположим, что существует множество $F \subset X'$, для которого $\pi'(F) = I$. Тогда $F \in \mathfrak{M}$; рассмотрим $y' = \varphi^{-1}(F)$ и $x(y')$. Так как $\pi'(F) = I$, то $F \cap \pi^{-1}(y') \neq \Lambda$. Следовательно, $x(y') \in F$, а это противоречит тому, что $x(y') \in A$, $F \subset X \setminus A$.

130. Положим $S_\infty = (U \in S: |f^{-1}U| = \aleph_0)$. Из $|S_n| < \aleph_0$, $|S| = \aleph_1$ и условия (β) следует, что $S_\infty \cap S_n \neq \Lambda$, $n \in N^+$. Более того, в силу (α), если $U \in S_n \cap S_\infty$, то существует $V \in S_{n-1} \cap S_\infty$, для которого $fV \supset U$. Последнее замечание позволяет без труда построить по индукции нужную последовательность $\{U_n: n \in N^+\}$.

131. Можно считать, что множества S_i и S_j при $i \neq j$ не пересекаются. Тогда $S = \bigcup (S_n: n \in N^+)$ — бесконечное множество. Для $U \in S_{n+1}$ положим $f(U) = (U_n(U), f_{n-1}i_{n-1}(U), \ldots, f_1 \ldots f_{n-1}(U))$, т. е. $V \in f(U)$, если существует такая последовательность $U_{n+1}, \ldots, U_k$, одним из членов которой является V, что $U_{n+1} = U$ и $i_j(U_{j-1}) = U_j$ при $i \leqslant j < k$. При этом $f(U_{n+1}) = U_{n+1}$, где $U_{n+1} \in S_{n+1} \subset U_n \in S_n$, в том и только в том случае, когда $f_n i_n(U_{n+1}) = U_n$. Очевидно, для f, S_n, $n \in N$, выполняются условия (α) и (β) из задачи 130 гл. VI. Пользуясь задачей 130 гл. VI, заключаем, что нужная нам последовательность $\{U_n: n \in N^+\}$ существует.

132. Для каждого $U \in S_{n+1}$ зафиксируем элемент семейства S_n, содержащий U. Обозначим его через $j_n(U)$. Таким выбором порождается отображение $j_n: S_{n+1} \to S_n$.

В силу 131 гл. VI можно так выбрать $U_n \in S_n$, чтобы было $j_n(U_{n+1}) = U_n$, $n \in N^+$. Тогда, по определению j_n, непременно $U_{n+1} \subset U_n$.

133. Такая последовательность легко строится по индукции. Пусть γ_n уже определено, причем $f\gamma_n$ направляет Y и все $U \in \gamma_n$ открыты в X. Пометим через λ_{n+1} множество $\{V \subset X: V$ открыто в X, V содержится в некотором элементе семейства γ_n и $\operatorname{diam}(V) < \frac{1}{n+1}\}$. Тогда $f\lambda_{n+1}$ — открытое направление пространства Y. Следовательно, существует конечное семейство γ_{n+1} элементов из λ_{n+1}, для которого семейство $f\gamma_{n+1}$ покрывает Y. Условия 1), 2) и 3) для γ_{n+1} и γ_n выполняются.

134. Существует (см. 133 гл. VI) такая последовательность $\xi = \{\gamma_i: i \in N^+\}$ конечных семейств непустых в X множеств, что для всех $i \in N^+$

(1) γ_{i+1} вписано в γ_i;

(2) $f\gamma_i$ направляет пространство Y;

(3) если $P \in \gamma_i$, то $\operatorname{diam} P < \frac{1}{i}$. Положим $F_i = \bigcup (P: P \in \gamma_i)$. В множестве F_i есть конечная $1/i$-сеть (см. стр. 60). Для того чтобы это получить, надо в каждом $P \in \gamma_i$ выбрать по точке. Отсюда следует, что множество $\Phi = \bigcap (F_i: i \in N^+)$ вполне ограничено. Ясно также, что Φ замкнуто в X, ибо замкнуто в X каждое множество F_i, $i \in N^+$. Начнем, что $f\Phi = Y$.

Пусть $y^* \in Y$ произвольно. Для каждого $i \in N^+$ положим $\gamma_i^* = (P \in \gamma_i: P \cap f^{-1}y^* \neq \Lambda)$. Из свойств (1), (2), (3) для последовательности ξ вытекают следующие свойства для последовательности $\xi^* = (\gamma_i^*: i \in N^+)$:

(1*) γ_{i+1}^* вписано в γ_i^*;

(2*) $fP \supset y^*$ для каждого $P \in \gamma_i^*$ и любого $i \in N^+$;

(3*) если $P \in \gamma_i^*$, то $\operatorname{diam} P < \frac{1}{i}$.

Кроме того, заметим, что каждое $P \in \gamma_i^* \subset \gamma_i$ для любого $i \in N^+$ замкнуто в X. Теперь каждому элементу P семейства γ_{i+1}^* поставим в соответствие некоторый содержащий его элемент семейства γ_i^*, который обозначим через $\psi(P)$. Теперь для функции выбора φ и для последовательности $\xi^* = (\gamma_i^*: i \in N^+)$ применим утверждение задачи 131 гл. VI. Тогда для каждого (в силу этого утверждения 131 гл. VI) $i \in N^+$ можно так выбрать $P_i \subset \gamma_i^*$, чтобы $\psi(P_{i+1}) = P_i$ при всех $i \in N^+$. Из (2*) тогда получаем, что $Q_{i+1} \subset Q_i$ для любого $i \in N^+$, где $Q_i = f^{-1}y^* \cap P_i$. Ясно, что каждое Q_i, $i \in N^+$, замкнуто в полном метрическом пространстве $(f^{-1}y^*, \rho)$.

Кроме того, из (3*) в силу определения множества Q_i получаем, что $\operatorname{diam} Q_i \leqslant \frac{1}{i}$. Тогда по теореме $(f^{-1}y^*, \rho)$ следует, что $\delta = \bigcap (Q_i: i \in N^+) \neq \Lambda$ (137 гл. II). Но $\delta \subset \Phi \cap f(F) = y^*$, следовательно, $f\Phi \supset y^*$. Так как $y^* \in Y$ произвольно, то это означает, что $f\Phi = Y$. Заметим, что множество $f^{-1}y \cap \Phi$ — компакт для любого $y \in Y$. Все доказано.

Дадим другое доказательство частного случая этого утверждения, основанное на задаче 141 гл. VI. В силу этой задачи, если (X, ρ) полно (значит, и полно в смысле Чеха — см. 90 гл. V), а f непрерывно и открыто, то существует замкнутое подпространство $\Phi \subset X$, для которого $f\Phi = Y$ и сужение $f_\Phi = f \mid \Phi$ совершенно. Тогда Φ — бикомпакт, как совершенный прообраз (при отображении f_Φ) бикомпактного пространства Y (см. 36 гл. VI).

136. В метрическом пространстве (X, ρ) существует (134 гл. VI) вполне ограниченное подпространство Φ такое, что $f\Phi = Y$. Но (261 гл. II) Φ тогда сепарабельно, поэтому существует счетное семейство $\mathscr{B}$ открытых в X множеств, содержащее некоторую базу каждой точки $x \in \Phi$ в X. Тогда $f\mathscr{B} = (fU: U \in \mathscr{B})$ (в силу 135 гл. VI) — псевдобаза пространства Y. Очевидно, $|f\mathscr{B}| \leqslant \aleph_1$. Остается сказать, что бикомпакт со счетной псевдобазой обладает и счетной базой (122 гл. III). Другое доказательство для частного случая, когда сами X полно, основывается на задаче 141 гл. VI. Правда, и его. Пространство X, как полное метрическое пространство, полно и в смысле Чеха (92 гл. V). Поступая задачей 141 гл. VI, получаем нужное подпро-

странство $\Phi \subset X$, для которого $f(\Phi) = Y$, а сужение $f \mid \Phi = f_0$ совершенно. Подпространство $\Phi \subset X$ бикомпактно, как совершенный прообраз (при f_0) бикомпактного пространства Y (см. 38 гл. VI). Далее Φ — подпространство со счетной базой, как метризуемый бикомпакт (см. 257 гл. III). Остается теперь заметить, что при совершенном отображении f_0: $\Phi \to Y$ (см. 41 гл. VI) вес не повышается.

139. Нет, не верно. За Φ примем пространство бикомпакта βN. Любая одна точка пространства Φ по условию — образ не более $\mathfrak{c}$ точек. Кроме того, $|\Phi \setminus \{y^*\}| = \aleph_0$. Мы будем считать, что точки множества $\Phi \setminus \{y^*\}$ взаимно однозначно перенумерованы натуральными числами: $\Phi \setminus \{y^*\} = \{y_n : n \in N\}$. По определению топологии в Φ, последовательность $\{y_n : n \in N\}$ сходится к y^*.

Пусть X — какой-нибудь бикомпакт, в котором нет метризуемых сходящихся последовательностей, но есть последовательность $\tau = \{A_i : i \in N\}$ непустых попарно не пересекающихся замкнутых множеств таких, что каждое непустое открытое множество пересекает все члены этой последовательности, начиная с некоторого. Такой бикомпакт описан в задаче 132 гл. III.

Рассмотрим $Z = \Phi \times X$ (тихоновское произведение) и непрерывное отображение π: $Z \to \Phi$ (естественное проектирование на первый сомножитель). Положим $S_n = \{y\} \times A_n$, $S^* = \{y^*\} \times X$, $F = \bigcup \{S_n : n \in N^*\} \cup S^*$ и $f = \pi \mid F$, f: $F \to \Phi$. Тогда F замкнуто в Z. Действительно, если $z \notin F$, то $z \notin S^*$, и потому $z \in (y_{n_0}) \times X$ при некотором $n^* \in N^*$. Но множество $\{y_{n_0}\} \times X$ открыто в Z, ибо $\{y_{n_0}\}$ открыто в Φ и X открыто в X. Имеем $(\{y_{n_0}\} \times X) \cap F = S_{n_0}$ — конечное множество. Следовательно, точка z не является предельной для F, поэтому из $z \notin F$ следует, что $z \notin [F]$. Отображение f, как сужение непрерывного отображения π, непрерывно, а потому и замкнуто, ибо F — бикомпакт, а Φ — хаусдорфово пространство. Напомним, так как при всех $n \in N^-$ множество A_n непусто, то $fF = \Phi$.

Покажем, что f — открытое отображение. Пусть W открыто в F и $y \in fW$. Если $y \neq y^*$, то одноточечное множество $\{y\}$ открыто в Φ и $y \in \{y\} = f W$.

Предположим теперь, что $y = y^*$. Тогда $W \cap S^* \neq \Lambda$. Выберем $z^* \in X$ таким образом, чтобы $(y^*, z^*) \in W \cap S^*$. Зафиксируем открытое в Z множество U, для которого $U \cap F = W$. В силу определения топологии произведения существуют такое $n^* \in N^-$ и такое множество $V \ni z^*$, что $(y_n, x) \in U$ при всех $n \geq n^*$ и $x \in V$. Но $F \supset U_{n_0}$ при некотором $n_0 \in N^-$. Имеем: если $n \geq n_0$, то $V \cap A_n \supset A_n \cap U_{n_0} \neq \Lambda$. Для всех значений n, больших $n_0 + n^*$, выберем $x_n \in V \cap A_n$. Тогда $(y_n, x_n) \in U$ и $(y_n, x_n) \in F$. Следовательно, $(y_n, x_n) \in U \cap F = W$. Значит, $fW \ni f(y_n, x_n) = y_n$ при всех $n \geq n_0 + n^*$, т. е. точка y^* входит в множество fW вместе с некоторой своей окрестностью. Этим установлено, что fW — открытое множество, и f — открытое отображение.

Покажем теперь, что в F нет ни одной нетривиальной сходящейся последовательности. Так как пространство $S^* = \{y^*\} \times X$ гомеоморфно пространству X, а в X нет нетривиальных сходящихся последовательностей, то достаточно рассмотреть произвольную последовательность $\theta = \{(y_{n_i}, x_i) : i \in N\}$ точек множества $F \setminus S^*$, все члены которой попарно различны, и показать, что у нее нет предельных точек в F. Если $i' \neq i''$, то $y_{i'} = y_{n_{i'}} \neq y_{n_{i''}} = y_{i''}$, так как $y_{n_{i'}} = y_{n_{i'}} \in (y_{n_{i'}}, x_{i'}) \neq (y_{n_{i''}}, x_{i''})$. Если $n_{i'} \neq n_{i''}$, то, так как $x_{i'} \subset A_{n_{i'}}$, $x_{i''} \in A_{n_{i''}}$ и $A_{n'} \cap A_{n''} = \Lambda$, заключаем, что $x_{i'} \neq x_{i''}$. Следовательно, $\lambda = \{x_i : i \in N^+\}$ — нетривиальная последовательность точек пространства X.

Предположим, что последовательность θ сходится в F. Тогда последовательность λ, получающаяся из θ проектированием произведения $\Phi \times X$

на X, будет сходиться в X, что невозможно. Итак, в F нет нетривиальных сходящихся последовательностей.

140. Рассмотрим отображение f: $F \to \Phi$, построенное в задаче 139 гл. VI. В множестве $S^* \subset F$ (см. 139 гл. VI) выберем произвольно точку z^* и положим $X^* = (F \setminus S^*) \cup \{z^*\}$, $f^* = f \mid X^*$. Тогда f^*: $X^* \to \Phi$ — непрерывное открытое (очевидно, конечнократное) отображение, причем $f^* X^* = \Phi$. В X^* нет нетривиальных сходящихся последовательностей, ибо таких последовательностей нет в $F \supset X^*$.

141. См. Пасынков [2].

142. Пользуясь задачей 141 гл. VI, утверждаем, что существует замкнутое в X множество $X_0 \subset X$, для которого $fX_0 = Y$, а сужение $f_0 = f \mid X_0$ совершенно. Замкнутое подпространство X_0 полного в смысле Чеха пространства X также полно в смысле Чеха. Тогда пространство Y, как совершенный образ (при отображении f_0) полного в смысле Чеха пространства X_0, также полно в смысле Чеха (см. 43 гл. VI).

143. Для доказательства надо прежде вспомнить, что метризуемое пространство метризуемо полной метрикой тогда и только тогда, когда оно полно в смысле Чеха (см. 82 гл. V), затем вспомнить, что всякое метризуемое пространство паракомпакт (см. 45 гл. V). Далее надо воспользоваться утверждением задачи 141 гл. VI и заключить, что полнота в смысле Чеха сохраняется при совершенных отображениях (см. 46 гл. VI).

144. Пространства X, как метризуемые полной метрикой пространства, полны в смысле Чеха, а Y, по условию,— паракомпакты. Мы находимся, таким образом, в условиях задачи 141 гл. VI. Благодаря утверждению этой задачи, найдется такое замкнутое множество $F \subset X$, что $fF = Y$, а сужение $f_1 = f \mid F$ совершенно. Пространство Y, как образ метризуемого пространства F при совершенном отображении, метризуемо (см. 40 гл. VI). Далее надо сослаться на задачу 143 гл. VI.

145. Пусть $\Phi \supset Y$ — бикомпакт в Y. Рассмотрим замкнутое в X множество $\Phi^* = X_0$ и сужение $f_0 = f \mid X_0$ отображения f на подпространство $f^{-1}\Phi = X_0$. Отображение f_0 открыто, ибо $f^{-1}\Phi$ — полный прообраз множества $\Phi \supset Y$ при открытом отображении f (см. 337 гл. II). Кроме того, $X_0 = f^{-1}\Phi$ полно в смысле Чеха, как замкнутое подпространство полного в смысле Чеха пространства. Теперь воспользуемся утверждением задачи 141 гл. VI, в силу которого найдется такое замкнутое в X_0, а значит и в X, множество $F \subset X_0$, что $f_0(F) = f(F) = \Phi$, а сужение $f_1 \mid F = f \mid F = f_1$ совершенно. Остается теперь заметить, что множество F, как прообраз бикомпакта Φ при совершенном отображении f_1, также является бикомпактом (см. 36 гл. VI).

147. Напомним бэровское пространство $B(\tau)$ веса τ (см. 246, 247, 248 гл. III). Пусть A — множество мощности $|A| = \tau$. В $B(\tau)$ определим стандартные базисные множества

$$U_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}, \quad \alpha_i \in A, \ldots, \alpha_k \in A; \quad U_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} =$$
$$= \{\xi = \{\alpha'_i\} : i \in N^+\} \in B(\tau): \quad \alpha'_1 = \alpha_1, \ldots, \alpha'_k = \alpha_k\}.$$

Положим $\theta_k = \{U_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} : \alpha_1 \in A, \ldots, \alpha_k \in A\}$. Для всякого $k \in N^+$ семейство θ_k — открытое дизъюнктное покрытие пространства $B(\tau)$, причем $\dim U_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} < \frac{1}{k}$ для любого $U_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$. Нетрудно убедиться в том, что семейство $\theta = \{U_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} : \alpha_1 \in A, \ldots, \alpha_k \in A, k \in N^+\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 гл. VI. Далее, если f: $Y \to Y$ — открытое отображение такое, что $\theta = \{U_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} : \alpha_1 \in A, \ldots, \alpha_k \in A, k \in N^+\}$ — полная исчезающаяся A_τ-последовательность открытых покрытий X, то $f\theta = \{fU_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$:

$\alpha_1 \in A, \ldots, \alpha_k \in A$, $k \in N^+$ — полная измельчающаяся A_τ-последовательность открытых покрытий пространства Y (проверка условий не составляет труда). Пусть теперь

$$\nu = \{V_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} : \alpha_1 \in A, \ldots, \alpha_k \in A, k \in N^+\},$$

где A — множество мощности $|A| = \tau \geqslant \aleph_1$, есть полная измельчающаяся A_τ-последовательность открытых покрытий пространства X. Положим $\nu_k = \{V_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} : \alpha_1 \in A, \ldots, \alpha_k \in A\}$. Для каждого $i \in N^+$ система ν_i — открытое покрытие пространства X, причем последовательность $\{\nu_k : k \in N^+\}$ этих покрытий почти и измельчается. Пусть $\xi = \{\alpha_i : i \in N^+\}$ — произвольная точка $B(\tau)$ (см. 246 гл. II), где $\alpha_i \in A$ для любого $i \in N^+$. Рассмотрим множества $V_{\alpha_1}, V_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, V_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i}, \ldots$ из ν. Так как ν — полная измельчающаяся A_τ-последовательность, то пересечение $\bigcap \{V_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} : k \in N^+\}$ непусто и состоит ровно из одной точки, которую обозначим через x. Тогда положим $f\xi = x$. Здесь $\xi = \{\alpha_i : i \in N^+\} \in B(\tau)$ и $\{x\} = \bigcap \{V_{\alpha_1 \ldots \alpha_i} : i \in N^+\}$. Таким образом, определено отображение $f : B(\tau) \to X$. Рассмотрим в $B(\tau)$ произвольное стандартное базисное множество $U_{\alpha_1^0 \ldots \alpha_k^0} = \{\xi = \{\alpha_i\}_{i \in N^+} \in B(\tau) : \alpha_1 = \alpha_1^0, \ldots, \alpha_k = \alpha_k^0\}$. Из определения отображения f следует, что

$$fU_{\alpha_1^0 \ldots \alpha_k^0} = V_{\alpha_1^0 \ldots \alpha_k^0}.$$

Учитывая, что ν образует базу в X, а $\theta = \{U_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} : \alpha_1 \in A, \ldots, \alpha_k \in A; k \in N^+\}$ базу в $B(\tau)$, легко отсюда заключить о непрерывности и открытости отображения f. Легко видеть также, что f — отображение на все X.

148. В 147 гл. VI уже показано, что в $B(\tau)$ имеется дальнейшая полная измельчающаяся A_τ-последовательность открытых покрытий. Пусть $\nu = \{V_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} : \alpha_1 \in A, \ldots, \alpha_k \in A; k \in N^+\}$, где $|A| = \tau$, — дальнейшая полная измельчающаяся A_τ-последовательность открытых покрытий пространства X. Рассмотрим построенное в 147 гл. VI открытое отображение f бэровского пространства $B(\tau)$ на X. Из условия дальнейшести A_τ-последовательности ν следует, что $V_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \cap V_{\alpha_1' \ldots \alpha_k'} = \Lambda$, если $\alpha_i \neq \alpha_i'$ для некоторого $i \leqslant k$. Поэтому, если

$$\xi_1 = \{\alpha_i' : i \in N^+\} \in B(\tau), \ \xi_2 = \{\alpha_i'' : i \in N^+\} \in B(\tau) \text{ и } \xi_1 \neq \xi_2,$$

то $\alpha_i' \neq \alpha_i''$ для некоторого $i \in N^+$. Через i_ξ обозначим первое такое $i \in N^+$, для которого $\alpha_i' \neq \alpha_i''$. Рассмотрим стандартные базисные множества $U_{\alpha_1' \ldots \alpha_{i_\xi}'}$ и $U_{\alpha_1'' \ldots \alpha_{i_\xi}''}$ в $B(\tau)$. Понятно, что $U_{\alpha_1' \ldots \alpha_{i_\xi}'} \cap U_{\alpha_1'' \ldots \alpha_{i_\xi}''} = \Lambda$, $\xi_1 \in U_{\alpha_1' \ldots \alpha_{i_\xi}'}$, $\xi_2 \in U_{\alpha_1'' \ldots \alpha_{i_\xi}''}$. Имеем $fU_{\alpha_1' \ldots \alpha_{i_\xi}'} = V_{\alpha_1' \ldots \alpha_{i_\xi}'}$, $fU_{\alpha_1'' \ldots \alpha_{i_\xi}''} = V_{\alpha_1'' \ldots \alpha_{i_\xi}''}$, $V_{\alpha_1' \ldots \alpha_{i_\xi}'} \cap V_{\alpha_1'' \ldots \alpha_{i_\xi}''} = \Lambda$, откуда получаем, что $f\xi_1 \neq f\xi_2$.

149. В силу 148 гл. VI в X достаточно построить дальнейшую полную измельчающуюся A_τ-последовательность открытых покрытий. Пусть A — некоторое множество мощности $A = \tau$. Так как все метрического пространства (X, ρ) равен τ, X — не бикомпакт и $\dim X = 0$, то, используя 153, 154 гл. V и 217 гл. II, легко построить дальнейшее открытое покрытие ν_1 мощности, равной τ. Можно предполагать, что $\dim U < 1$ для любого $U \in \nu_1$. Осуществим некоторое взаимно однозначное отображение множества A на множество ν_1. Тогда $\nu_1 = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$; при этом $U_\alpha \cap U_{\alpha'} = \Lambda$, если $\alpha' \neq \alpha$. Так как X однородно по весу τ и вес каждого подпространства

U_α, $\alpha \in A$, также равен τ, поэтому (в силу того, что U_α — не бикомпакт) мы для каждого $U_\alpha \in \nu_1$, $\alpha \in A$, сможем построить дальнейшее открытое покрытие θ_α подпространства U_α мощности $|\theta_\alpha| = \tau$. Легко видеть, что каждое $U_{\alpha'}$, $\alpha' \in A$, открыто-замкнуто в X, значит, открыто-замкнутым будет и любое $U \subset \theta_{\alpha'}$, $\alpha \in A$.

Опять можно предположить, что $\dim U < \frac{1}{2}$ для любого $U \in \theta_\alpha$ и любого $\alpha \in A$. Снова осуществим некоторое взаимно однозначное отображение a_α множества A на множество θ_α при каждом $\alpha \in A$. Тогда каждое $U \in \theta_\alpha$ есть некоторое $U_{\alpha\alpha'}$, где $U_{\alpha\alpha'}$ — образ $\alpha' \in A$ при данном взаимно однозначном отображении A на θ_α. Положим $\nu_2 = \bigcup \{\theta_\alpha : \alpha \in A\}$. Тогда $\nu_2 = \{U_{\alpha_1\alpha_2} : \alpha_1 \in A, \ \alpha_2 \in A\}$. Ясно также, что $|\nu_2| = \tau$. Далее, что $U_{\alpha_1\alpha_2} \cap U_{\alpha_1'\alpha_2'} = \Lambda$, если $\alpha_1 \neq \alpha_1'$ или если $\alpha_2 \neq \alpha_2'$. Кроме того, ν_2 — дальнейшее открытое покрытие пространства X. Из построения также следует, что $U_{\alpha_1} = \bigcup \{U_{\alpha_1\alpha_2} : \alpha_2 \in A\}$.

Теперь получаем ввиду, что $\omega(U_{\alpha_1\alpha_2}) = \tau$ и $U_{\alpha_1\alpha_2}$ — не бикомпакт для любого подпространства $U_{\alpha_1\alpha_2} \in \nu_2$. Проведем по тем построениям для каждого $U_{\alpha_1\alpha_2} \in \nu_2$ и т. д. В результате мы получим семейство $\nu = \{U_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k} : \alpha_1 \in A, \ldots, \alpha_k \in A; k \in N^+\}$ открытых замкнутых множеств пространства X, для которого будут выполнены следующие условия:

(1) $\nu_k = \{U_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k} : \alpha_1 \in A, \ldots, \alpha_k \in A\}$ при каждом фиксированном $k \in N^+$ — дальнейшее открытое покрытие пространства X;

(2) $U_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k} \cap U_{\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_k'} = \Lambda$, если $\alpha_i \neq \alpha_i'$ для некоторого $i \leqslant k$;

(3) $U_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}} = \bigcup \{U_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}\alpha_k} : \alpha_k \in A\}$;

(4) $\operatorname{diam} U_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k} < \frac{1}{k}$ для любых $\alpha_1 \in A, \ldots, \alpha_k \in A$.

Условия (1), (2), (3) означают, что ν есть дальнейшая A_τ-последовательность открытых покрытий пространства X. Из полноты метрического пространства X и условия (4) получаем, что ν полна и измельчается. Таким образом, мы находимся в условиях задачи 148 гл. VI, из которой и получаем требуемое заключение.

150. Пусть A — множество мощности $|A| = \tau$. Рассмотрим такое открытое покрытие ω_1 пространства X, что $\operatorname{diam} U < 1$ для любого $U \in \omega_1$. Пусть $|\omega_1| \leqslant \tau$. Зафиксируем некоторое отображение g_1 множества A на множество ω_1. Положим $U_{\alpha_1} = g_1\alpha_1$, где $\alpha_1 \in A$. Тогда, значит, $\omega_1 = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$. При этом вполне может случиться, что $U_\alpha = U_{\alpha'}$, если даже $\alpha \neq \alpha'$. Для каждого $\alpha \in A$ рассмотрим такое открытое покрытие θ_α подпространства U_α, чтобы $\operatorname{diam} U < \frac{1}{2}$ для любого $U \in \theta_\alpha$ и любого $\alpha \in A$. Зафиксируем для каждого α отображение g_2^α множества A на множество θ_α. Положим $U_{\alpha_1\alpha_2} = g_2^{\alpha_1}(\alpha_2)$, где $\alpha_1 \in A$, $\alpha_2 \in A$. Тогда $U_{\alpha_1} = \{U_{\alpha_1\alpha_2} : \alpha_2 \in A\}$ и $U_{\alpha_1} = \bigcup \{U_{\alpha_1\alpha_2} : \alpha_2 \in A\}$. Положим $\nu_2 = \bigcup \{\theta_{U_{\alpha_1}} : \alpha_1 \in A\}$. Тогда $\nu_2 = \{U_{\alpha_1\alpha_2} : \alpha_1 \in A, \alpha_2 \in A\}$. Проведем по тем построениям для каждого $U_{\alpha_1\alpha_2}$: $\alpha_1 \in A$, $\alpha_2 \in A$, и т. д. В результате мы получим систему $\nu = \{U_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k} : \alpha_1 \in A, \ldots, \alpha_k \in A, k \in N^+\}$. Легко проверяется, что ν — A_τ-последовательность открытых покрытий пространства X. Так как $\operatorname{diam} U_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k} < \frac{1}{k}$ для любых $\alpha_1 \in A$, $\alpha_2 \in A$, $\ldots$, $\alpha_k \in A$, и (X, ρ) — полное метрическое пространство, то A_τ-последовательность ν полна и измельчается. Таким образом, мы находимся в условиях задачи 147 гл. VI, из которой и получаем требуемое заключение.

151. Решение следует из задач 150 и 124 гл. VI и полноты бэровского пространства (см. 240, 242 гл. II).

152. Включение 150 гл. VI, пространство X является образом бэровского пространства $B(\tau)$ при непрерывном открытом непрерывном отображении f. Так как X — паракомпакт (как всякое метрическое пространство), а $B(\tau)$ — полное метрическое пространство (значит, полное в смысле Чеха), то, например, 141 гл. VI, существует такое замкнутое в $B(\tau)$ множество F, что $f(F) = X$ и сужение $f_1 = f \mid F$ — совершенное отображение F на X. Теперь надо воспользоваться задачей 78 гл. VI, из которой следует существование замкнутого непрерывного отображения g всего бэровского пространства $B(\tau)$ на свое замкнутое подпространство F. Поэтому $f_1 g$ есть замкнутое непрерывное отображение бэровского пространства $B(\tau)$ на пространство X. Другое решение этой задачи основывается на задаче 252 гл. VI и плюс на задаче 78 гл. VI.

153. Регулярное экстремально несвязное пространство, очевидно, имеет базу из открыто-замкнутых множеств. Теперь см. задачу 14 гл. III.

154. (а) Пусть X экстремально несвязно, а $U_1 \subset X$, $U_2 \subset X$ — два открытых в X множества, для которых $U_1 \cap U_2 = \Lambda$. Тогда (см. 57 гл. II) $[U_1] \cap U_2 = \Lambda$. Так как $[U_1]$ открыто в X (ибо X экстремально несвязно), то и $[U_1] \cap [U_2] = \Lambda$ (опять см. 57 гл. II).

(б) Пусть для любых двух непересекающихся открытых в X множеств их замыкания также не пересекаются. Пусть U — произвольное открытое в X множество. Тогда $V = X \setminus [U]$ также открыто в X. Кроме того, $X = [U] \cup [V]$ и $U \cap V = \Lambda$. По условию, $[U] \cap [V] = \Lambda$, следовательно, $[U]$ и $[V]$ открыто-замкнуты в X. Все доказано.

157. Пусть U_1 и U_2 — два непересекающихся открытых в X_0 множества. Возьмем открытые в X множества V_1 и V_2, для которых $U_1 = V_1 \cap X_0$, $U_2 = V_2 \cap X_0$. Так как X_0 всюду плотно в X, то $V_1 \cap V_2 = \Lambda$, а вследствие экстремальной несвязности пространства X, получим тогда (см. 155 гл. VI) $[V_1]_X \cap [V_2]_X = \Lambda$. Имеем $([V_1]_X \cap X_0) \cap ([V_2] \cap X_0) = \Lambda$, $[U_1]_{X_0} \subset [V_1]_X \cap X_0$, $[U_2]_{X_0} \subset [V_2]_X \cap X_0$. Следовательно, $[U_1]_{X_0} \cap [U_2]_{X_0} = \Lambda$. Значит, X_0 экстремально несвязно (см. 155 гл. VI).

158. Воспользуемся характеристическим свойством расширения Стоуна — Чеха βX данного пространства X, указанным в задаче 15 гл. IV. Пусть Γ_1 и Γ_2 — два непересекающихся открытых в βX множества. Рассмотрим открытые в X множества $U_1 = \Gamma_1 \cap X$ и $U_2 = \Gamma_2 \cap X$. Очевидно, $U_1 \cap U_2 = \Lambda$, но тогда, вследствие экстремальной несвязности пространства X, получим $[U_1]_X \cap [U_2]_X = \Lambda$. Так как, кроме того, $[U_1]_X$ и $[U_2]_X$ открыто-замкнуты в X, то они (существенно отдельные (см. стр. 156)). Значит (см. 15 гл. IV), $[U_1]_{\beta X} \cap [U_2]_{\beta X} = \Lambda$. Но, кроме того, включение множества X в βX, имеем $[\Gamma_1]_{\beta X} = [\Gamma_1 \cap X]_{\beta X} = [U_1]_{\beta X} = [\Gamma_2 \cap X]_{\beta X} = [U_2]_{\beta X}$. Из всего этого и получаем, что $[\Gamma_1]_{\beta X} \cap [\Gamma_2]_{\beta X} = \Lambda$. Таким образом, βX экстремально несвязно (см. 155 гл. VI).

159. Пространство D, как дискретное пространство, экстремально несвязно. Тогда экстремально несвязно его расширение Стоуна — Чеха (см. 158 гл. VI).

160. Экстремальная несвязность пространства X влечет следующее: что $\delta: X \to Y$ — гомеоморфизм. Ясно, что надо только доказать замкнутую одновалентность отображения δ, ибо известно уже, что f непрерывно и замкнуто. Итак, пусть $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Рассмотрим окрестности Ux_1 и Ux_2 этих точек (X — хаусдорфово пространство), для которых $Ux_1 \cap Ux_2 = \Lambda$. Тогда, очевидно, $f^\# Ux_1 \cap f^\# Ux_2 = \Lambda$, где $f^\# Ux_i = \{y \in Y : f^{-1}y \subset Ux_i\} = Y \setminus f(X \setminus Ux_i)$, $i = 1, 2$. Из задачи 109 гл. VI следует, что эти множества открыты и попусты в Y, ибо f замкнуто и непрерывно. Тогда вследствие экстремальной несвязности пространства Y (используется задача 155 гл. VI), получим

$$(*) \qquad [f^\# Ux_1] \cap [f^\# Ux_2] = \Lambda.$$

Кроме того (см. 140 гл. VI), $fx_1 \in f[Ux_1] = [f^\# Ux_1]$, $fx_2 \in f[Ux_2] = [f^\# Ux_2]$. Учитывая равенство $(*)$, получаем $fx_1 \neq fx_2$, что и требовалось доказать.

161. Существует открытое в X множество $\bar{P}$, для которого $\bar{P} \cap Y = P$. Множество P замкнуто в X (ибо Y замкнуто в X) и $\bar{P} \supset P$. Так как X нормально, то существует открытое в X множество U, для которого $\bar{P} \supset [U] \supset U \supset P$. Положим $G = [U]$. Тогда G открыто в X (ибо X экстремально несвязно), $G \supset P$ и $G \cap Y \subset \bar{P} \cap Y = P$. Значит, $G \cap Y = P$ и G — искомое открыто-замкнутое множество.

162. Действительно, X есть некоторое бикомпактное расширение bX_1 пространства X_1, ибо X_1 плотно в X. Тогда существует естественное непрерывное отображение α: $\beta\lambda_0 \to \lambda_0$ (см. 22 гл. IV) расширения Стоуна — Чеха $\beta\lambda_0$ пространства X_1 на экстремально несвязный бикомпакт $bN_0 = X$. Очевидно, α — тождественное отображение, ибо $\lambda x = x$ и $\alpha^{-1}bx = x$ для любого $x \in X_1$ (см. 27 гл. IV). Тогда (вследствие задачи 180 гл. VI) отображение α — гомеоморфизм, следовательно, $\beta X_1 = X$, что и требовалось доказать.

163. Так как $D \cap [D_1] = \Lambda$, $[D_1] \cap D_2 = \Lambda$ и X регулярно, то мы можем воспользоваться задачей 48 гл. III, в силу которой найдутся такие открытые в X множества U_1 и U_2, что $D_1 \subset U_1$, $D_2 \subset U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \Lambda$. Тогда, в силу экстремальной несвязности X, получим $[U_1] \cap [U_2] = \Lambda$. Следовательно, $[D_1] \cap [D_2] = \Lambda$.

164. Так как $|D| \leqslant \aleph_1$, $|D_2| \leqslant \aleph_1$, то D_1 и D_2 — финально компактные пространства. Поэтому мы находимся в условиях задачи 163 гл. VI.

165. Ясно, что $[D]_X$ есть некоторое бикомпактное расширение bD пространства D. Для того чтобы доказать, что $bD = \beta D$, достаточно (см. 16 гл. IV) показать (в силу нульмерности пространства D), что для любых двух непересекающихся замкнутых в D подмножеств D_1 и D_2 их замыкания в $bD = [D]_X$ также не пересекаются.

Итак, пусть $D_1 \subset D$, $D_2 \subset D$ — замкнутые в D подмножества (а стало, и D любое подмножество в открыто, и замкнуто, ибо D — дискретное подпространство), для которых $D_1 \cap D_2 = \Lambda$. Очевидно, D_1 и D_2 — дискретные подпространства бикомпакта $X = [D]_X$, $[D_1]_X \cap D_2 = \Lambda$, $[D_2]_X \cap D_1 = \Lambda$. Поэтому, пользуясь задачей 164 гл. VI, заключаем отсюда, что $[D_1]_X \cap [D_2]_X = \Lambda$. Кроме того, очевидно, $[D_1]_X \subset [D]_X = bD$ и $[D_2]_X \subset [D]_X = bD$. Поэтому $[D_1]_{bD} \cap [D_2]_{bD} = \Lambda$. Значит, $[D]_X = bD = \beta D = \beta\delta$.

166. Следует из задачи 165 гл. VI и того, что в бесконечном регулярном пространстве существует бесконечное счетное дискретное подпространство.

167. Следует из задачи 165 гл. VI.

168. Надо рассмотреть расширение βX Стоуна — Чеха данного экстремально несвязного плотно регулярного пространства X, воспользовавшись задачей 158 гл. VI, а затем задачей 137 гл. VI.

169. Из условия (b) следует, в частности, что подпространство D дискретно, а следовательно, нормально. Поэтому, если мы покажем, что из $D_1 \subset D$, $D_2 \subset D$ и $D_1 \cap D_2 = \Lambda$ следует $[D_1] \cap [D_2] = \Lambda$, то, в силу 16 гл. IV, мы и докажем, что $[D]$ совпадает с βD.

Положим $\Gamma_1 = \bigcup \{U\delta: \delta \in D_1\}$ и $\Gamma_2 = \bigcup \{U\delta: \delta \in D_2\}$. Так как $\gamma = -\{U\sigma: \sigma \in D\}$ замкнуто в D, $\gamma \cap D_2 = \Lambda$, то $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Lambda$. Ясно, что Γ_1 и Γ_2 открыты в X. Значит, вследствие экстремальной несвязности X (см. [c] гл. VI), получаем $[\Gamma_1] \cap [\Gamma_2] = \Lambda$. Следовательно, $[D_1] \cap [D_2] = \Lambda$, ибо $[D_i] \subset [\Gamma_i]$, $[D_i] \subset [\Gamma_i]$.

170. Первая часть очевидна. В качестве примера полной счетно-компактного множества (см. 135 гл. II), ибо и экстремально несвязной бикомпактной без нетривиальных сходящихся последовательностей (167 гл. VI), и в которой совершенных множеств только последовательности счет.

171. Утверждение является следствием задач 136 гл. VI и 59 гл. IV.

172. Нет. Рассмотрим βN — расширение Стоуна — Чеха дискретного натурального ряда. Оно экстремально несвязно (см. 150 гл. VI). Но $\beta N \setminus N$ замкнуто в βN и не экстремально несвязно — см. 178 гл. VI.

173. (а) Если X — экстремально несвязный бикомпакт и $X_0 \subset X$ — его всюду плотное подпространство, то βX_0 совпадает с X (см. 162 гл. VI).

(б) Пусть бикомпакт X является расширением Стоуна — Чеха всякого своего всюду плотного открытого подпространства. Пусть $U \subset X$ — произвольное открытое в X множество. Рассмотрим открытое в X множество $V = X \setminus [U]$. Ясно, что $U \cap V = \Lambda$. Положим $W = U \cup V$. В силу определения множества V следует, что W открыто и всюду плотно в X. Кроме того, U и V открыто-замкнуты в пространстве W, а так как, кроме того, они не пересекаются, то они функционально отделимы в подпространстве W. Поэтому, поскольку $\beta W = X$, непременно $[U]_X \cap [V]_X = \Lambda$ (см. 15 гл. IV). Отсюда и из очевидного равенства $X = [W]_X = [U \cup V]_X = [U]_X \cup [V]_X$ следует, что множество $[U]_X$ открыто. Значит, X экстремально несвязно.

174. Предположим противное. Пусть существует бикомпакт Y и взаимно однозначное непрерывное отображение $f\colon X_1 \to Y$, $f(X_0) = Y$. Так как любая точка $d \in D$ не расположена в X, то открытое в X множество $X \setminus \{d\}$ для любого $d \in D$ всюду плотно и ввиду бикомпактности. Значит, $X_0 = \bigcap \{X \setminus \{d\}: d \in D\}$ всюду плотно в X, как пересечение счетного семейства открытых и всюду плотных в бикомпакте X множеств (см. 88 гл. III). Поэтому, в силу экстремальной несвязности бикомпакта, из задачи 107 гл. VI следует, что βX_0 совпадает с X. С другой стороны, раз $\beta X_1 = X$, то существует продолжение отображения $f\colon X_1 \to Y$ до непрерывного отображения $\overline{f}\colon X \to Y$ (см. 31 гл. IV). Так как X и Y — бикомпакты и $\overline{f}$ непрерывно, то $\overline{f}$ и сюръективно. Тогда, поскольку D дискретно, подпространство $\overline{f}D \subset Y$ также дискретно. Кроме того, очевидно, $|\overline{f}D| \leqslant \aleph_0$, либо $|D| = \aleph_0$. Для каждой точки $p \in \overline{f}D$ зафиксируем ее окрестность Vp в Y таким образом, чтобы семейство $\gamma = \{Vp\colon p \in \overline{f}D\}$ было дизъюнктным (это сделать можно, ибо $\overline{f}D$ счетно, является дискретным подпространством и принадлежит нормальному пространству Y — см. 22 гл. III). Семейство $\overline{f}^{-1}\gamma = \{\overline{f}^{-1}Vp\colon p \in \overline{f}D\}$ также дизъюнктно и состоит из открытых в X множеств.

Рассмотрим еще множество $A = \overline{f}^{-1}(\overline{f}D)$ и множество $B = A \cap X_0$. Ясно, что $|B| \leqslant \aleph_0$, B дискретно. Пользуясь определением множества B, свойства $\overline{f}^{-1}\gamma$ и экстремальной несвязностью бикомпакта X, нетрудно доказать, что $[D] \cap [B] = \Lambda$. С другой стороны $\overline{f}[D] = \overline{f}D$, $f[B] = fB$, $\overline{f}D = fB = fD$. Поэтому имеется точка $y_0 \in Y$, для которой $\overline{f}^{-1}y_0 = \overline{f}^{-1}y_0 = x_1$, $x_1 \in X$ и $x_0 \in [B]$, $x_0 \notin D$, т. е. $[B] \cap [D] \neq \Lambda$. Получили противоречие.

175. Из всякого бесконечного бикомпакта X можно извлечь счетное бесконечное дискретное подпространство D. Занумеруем точки из D в последовательность: $D = \{d_i\colon i \in N^+\}$. Для каждой точки $d_i \in D$ зафиксируем ее окрестность U_i в X таким образом, чтобы семейство $\gamma = \{U_i\colon i \in N^+\}$ было дизъюнктно. Положим $U_0 = X \setminus \bigcup \{U_i\colon i \in N^+\}$, $\gamma^* = \{U_i\colon i \in N\}$ и $W = \bigcup \{U_i\colon i \in N\}$ (можно предположить, что $U_1 \neq \Lambda$). Определим отображение f подпространства W на N следующим образом: положим $fx = i$, где $i \in N$, если $x \in U_i$. Легко видеть, что $f\colon W \to N$ непрерывно, где N — пространство натуральных чисел с дискретной топологией. Кроме того, понятно, что W плотно в X. Так как X — экстремально несвязный бикомпакт, то βW совпадает с X (см. 162 гл. VI). Тогда существует продолжение отображения f до непрерывного отображения $f\colon X \to \beta N$, $f(X) = \beta N$.

176. Бесконечный экстремально несвязный бикомпакт X содержит топологический образ βN (см. 166 гл. VI), а βN вполне отделимо нормально (см. 58 гл. IV). Значит, вполне отделимые нормальны и X.

177. Как известно (см. 335 гл. I), отображение $f\colon X \to Y$ открыто в том и только в том случае, когда $f^{-1}[B] \subset [f^{-1}B]$ для любого подмножества $B \subset Y$. Пусть $V \subset Y$ — произвольное открытое в Y множество. Множество $f^{-1}V$ открыто в X, а $[f^{-1}V]$ открыто-замкнуто в X (ибо X экстремально несвязно). Тогда $f^{-1}[V] \subset [f^{-1}V]$. Поэтому $ff^{-1}[V] = V \cap f[f^{-1}V] \subset f[f^{-1}V] = [V]$ (здесь мы воспользовались еще раз непрерывностью отображения f). Так как f — открытое отображение, а $[f^{-1}V]$ — открытое в X множество, то множество $f[f^{-1}V]$ открыто в Y. Тогда из доказанного включения $[V] \subset f[f^{-1}V] \subset [V]$ следует совпадение множества $[V]$ с открытым в Y множеством $f[f^{-1}V]$. Значит, Y экстремально несвязно.

178. В пространстве X существует семейство γ мощности $2^{2^{\aleph_0}}$ попарно не пересекающихся открытых (в X) множеств (см. 52 гл. IV). В каждом $U \in \gamma$ зафиксируем точку $x(U) \in U$. Положим $D = \{x(U)\colon U \in \gamma\}$. Очевидно, D — дискретное подпространство. Предположим теперь, что X экстремально несвязно (мы знаем при этом, что X — бикомпакт). Тогда мы находимся в условиях задачи 169 гл. VI. Тогда $[D]_X$ совпадает с βD. Поэтому (см. 180 гл. VI) $|[D]_X| = |\beta D| = 2^{2^{|D|}} = 2^{2^{\aleph_0}}$. Так как $|\beta N| = 2^{2^{\aleph_0}}$, то $|[D]_X| > |\beta N|$, что противоречит включению $[D]_X \subset X = \beta N$.

179. Нет, не сохраняется. Простейший бесконечный компакт является непрерывным образом βN.

180. Решается аналогично задаче 53 гл. IV. Нетривиально показывается, что $|\beta D| \geqslant 2^{2^{\tau}}$. Для этого надо воспользоваться тем, что тихоновское произведение 2^{τ} экземпляров дискретных двоеточий имеет всюду плотное множество мощности τ (см. 361 гл. I). Отсюда выводится, что βD непрерывно отображается на это произведение.

181. (а) Пусть φ — какое-нибудь отображение множества γ на себя, при котором ни один элемент не остается на месте. Положим $V(U) = U \cup \bigcup \{U^{-1}(\varphi U) \setminus Q\colon U \in \gamma\}$, где $Q = \bigcup \{U\colon U \in \gamma\}$, $U \in \gamma$. Тогда $V(U) \supset U$, $P = \bigcup \{V(U)\colon U \in \gamma\} \supset Q$ и $f(V(U)) \subset fU \cup \varphi U \subset Q \subset P$. Если $U \neq U'$, то $\varphi U \neq \varphi U'$, и потому $\varphi U \cap \varphi U' = \Lambda$, $f^{-1}(\varphi U) \cap f^{-1}(\varphi U') = \Lambda$. Отсюда, ввиду $U \cap U' = \Lambda$, мы легко находим, что $V(U) \cap V(U') = \Lambda$. Из непрерывности f следует, что $V(U)$ открыто-замкнуто (мы учли, что все элементы семейства γ открыто-замкнуты). Очевидно, $|\{V(U)\colon U \in \gamma\}| = |\gamma| = k$. Чтобы заключить, что $\lambda = \{V(U)\colon U \in \gamma\}$ является (f, k)-семейством, остается проверить выполнение условия i) для семейства λ. Имеем $f(V(U) \cap V(U)) \subset (fU \cup \varphi U) \cap V(U) \subset Q \setminus U) \cap (U \cup (X \setminus Q)) = \Lambda$. Соотношение $V(U) \supset U$ означает, что γ вписано в $\lambda = \{V(U)\colon U \in \gamma\}$. Далее, $f^{-1}Q = \bigcup \{f^{-1}U\colon U \in \gamma\} = \bigcup \{f^{-1}(\varphi U)\colon U \in \gamma\} = \bigcup \{U \cup U^{-1}\varphi(U) \setminus Q)\colon U \in \gamma\} = \bigcup \{V(U)\colon U \in \gamma\} = P$. Утверждение (а) доказано.

(б) Положим $\gamma_1 = \gamma$ и в предположении, что определено (i, k)-семейство γ_i, примем за γ_{i+1} какое-нибудь такое (i, k)-семейство, чтобы $f^{-1}\gamma_i > \gamma_{i+1}$ и γ_i вписано в γ_{i+1} (из (а) следует, что такое γ_{i+1} существует). Рассмотрим последовательность $\{\gamma_n\colon n \in N^+\}$ построенных (i, k)-семейств γ_n, $n \in N^+$. Так как γ_n при каждом $n \in N^+$ является (i, k)-семейством и γ_n вписано в γ_{n+1} для всякого $n \in N^+$, то при каждом $n \in N^+$ элементы семейства γ_n можно так снабдить индексами: $\gamma_n = \{U_i^n\colon i = 1, 2, \ldots, k\}$, что $U_i^{n_1} \subset U_i^{n_2}$ при $n_1 < n_2$ и любом i, кроме того, $U_{i_1}^n \cap U_{i_2}^n = \Lambda$ при $i_1 \neq i_2$ и любых n_1, n_2. Положим $W_i = \bigcup \{U_i^n\colon n \in N^+\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Разумеется, $\{W_i\colon i = 1, 2, \ldots, k\}$ не обязано, вообще говоря, быть (i, k)-семейством, ибо W_i может не быть замкнутым множеством. Однако каждое W_i открыто и $W_{i_1} \cap W_{i_2} = \Lambda$, если $i' \neq i''$. Положим $F_i = [W_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и рассмотрим семейство $\mu = \{F_i\colon i = 1, 2, \ldots, k\}$. Так как X экстремально несвязно, то каждое F_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, — открыто-замкнутое множество,

Кроме того, вследствие той же максимальной несвязности (см. 15.5 гл. VI), непусты и $V_2 \cap V_{2^n} = A$ при $2^n \neq 2$, ибо $W_2 \cap W_{2^n} = A$. Из равенства $f(U_2^0 \cap U_2^1) = A$ легко выводится, что $W_2 \cap fW_2 = A$. Так как f непрерывно, то $\gamma_2 = \{W_2, fW_2\} = \bigcup_i \{f^i W_2\}$: $i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, k\}$. Значит, μ является (f, k)-семейством. Очевидно, γ вписано в μ. Покажем, что $f^{-1}(\mu) = \mu$. Положим $G = \bigcup \{W_2^i: i = 1, 2, \ldots, k\}$. Имеем: $G = \bigcup \{U_{2^n}^0: n \in N\}$, $U_{2^n}^0 = U_{2^{n+1}}^0 \cup U_{2^{n+1}}^1 \subset f^{-1}(U_{2^n}^0 \cup U_{2^n}^1) = f^{-1}(V_{2^n})$. Поэтому $f^{-1}G = G$. Кроме того, очевидно, $fG = fG$. Значит, в силу непрерывности отображения f получаем включение $f^{-1}[G] \subset [G]$. Докажем обратное включение. Предположим, что $y \in X$ и $f^{-1}y \subset [G]$. Тогда, так как f — замкнутое отображение, то для некоторой окрестности Oy точки y имеем включение $f^{-1}Oy \subset X \setminus [G]$ (см. 32.5 гл. II). Тогда $f^{-1}O_y \cap f^{-1}G = f^{-1}O_y \cap G = A$. Следовательно, $O_y \cap G = A$ и $y \in [G]$. Тем самым доказано, что $f^{-1}[G] = [G]$. Итак, окончательно имеем равенство $f^{-1}[G] = [G]$. Утверждение (б) полностью доказано.

(в) Имеем: $\mathscr{U} = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$, где $U_\alpha: \prod (V_{2^n}) = A$ при $\alpha' \neq \alpha''$ и $\gamma_n = \{U_i^\alpha: i = 1, 2, \ldots, k\}$ является (f, k)-семейством. Положим $W_i = \bigcup \{U_i^\alpha: \alpha \in A\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда $(W_i \cap W_j = A$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и $\bigcup \{W_i: i = 1, 2, \ldots, k\} \subset \bigcup \{W_i: i = 1, \ldots, k\}$. Так же, как и при доказательстве утверждения (б), устанавливается, что $\eta = \{V_i: i = 1, 2, \ldots, k\}$, где $V_i = [W_i]$, является (f, k)-семейством.

182. а) Зафиксируем $x^0 \in X$, для которого $y^0 = fx^0 \neq x^0$. Положим $A = f(X)$. По условию A замкнуто в X. Выберем непересекающиеся открытые замкнутые в X множества U и V, для которых $U \ni x^0$, $V \ni y^0$ и $fU \subset V$. Множество fU открыто-замкнуто в A; поэтому (1b1 гл. VI) найдется открыто-замкнутое в X множество W, для которого $W \cap A = fU$. При этом можно считать, что $W \cap U = A$, заменив в противном случае W на $W' = (X \setminus U) \cap W$. Положим теперь $U_1 = U$, $U_2 = W$ и предположим, что для некоторого целого $k \geq 1$ уже определены открыто-замкнутые в X попарно непересекающиеся множества U_i, $i = 1, \ldots, k$, при чем $f(U_{i-1}) \setminus U_i = A \cap U_i$. Тогда $U_k \cap A = f(U_{k-1} \setminus U_k)$ и $fU_k \subset A$. Поэтому $U_k \cap (U_k \subset U_1 \cap A \subset \subset fU_{k-1} \neq U_{k-1} \cap (U_{k-1} = U_{k-1} \cap fU_k = A$ при всех $i = 1, \ldots, k$ (вот почему, что $U_{k-1} \cap U_k = A$). Итак, множество fU_k открыто-замкнуто в X и $fU_k \subset X \setminus \bigcup \{U_i: i = 1, \ldots, k\}$. Пример же U_{k+1}, какое-нибудь открыто-замкнутое в X множество, для которого $U_{k+1} \cap A = fU_k \setminus U_k$ и $U_{k+1} \subset X \setminus \bigcup \{U_i: i = 0, 1, \ldots, k\}$ такое множество существует в силу 1b1 гл. VI. Продолжая, мы получим такую бесконечную последовательность $U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots$ открыто-замкнутых в X попарно непересекающихся множеств, что $fU_i \subset U_1 \cup U_{i+1}$ при всех $i = 0, 1, \ldots, k, \ldots$. Некоторые из множеств U_i могут быть пусты. Положим $G_0 = U_0$, $G_1 = \bigcup \{U_{n+2}: n \in N\}$, $G_2 = \bigcup \{U_{2i}: i \in N^+\}$. Тогда, очевидно, $f(G_1 \cup G_2) = f(\bigcup \{U_i: i \in N\}) = \bigcup \{U_i: i \in N\} = G_1 \cup G_2$ и $fG \subset \subset G_1 \cup G_2$, $fG_0 = G_1$, $fG_1 \subset G_1 \cup G_2$, т. е. $fG_1 \cap G_1 = A$, $fG_1 \cap G_2 = A$, ибо множества G_1 и G_2 попарно не пересекаются. Из максимальной несвязности пространства X с очевидностью следует, что множества $[G_1]$, $[G_2]$ и $[G_3]$ также попарно не пересекаются (см. 15.5 гл. VI). Нетрудно убедиться в том, что $\gamma = \{[G_1], [G_2], G_3\}$ образует $(f, 3)$-семейство. Множество же $G = [G_1] \cup [G_2] \cup [G_3]$ во-первых, непусто, ибо точки x^0 и y^0 ему наверное принадлежат, а во-вторых, $(f, 3)$-вполне.

б) Пафнутий в X какое-нибудь замкнутое $(f, 3)$-разложимое множество P. Семейство $\{P\}$, в согласии с принципом Куратовского — Царелли (стр. 48), можно дополнить до максимального центрированного семейства γ $(f, 3)$-разложимых множеств. В силу 181 (а) гл. VI получаем, что $\Phi = \bigcap \{[P]: [P] \in \gamma\} = [\gamma]$ $(f, 3)$-разложимое множество — очевидно, замкнутое. Из 181 (б) гл. VI следует, что существует $(f, 3)$-разложимое множество A, содержащееся в Φ, для которого $f^{-1}A = A$.

Условие (II′) выполняется. Если $A' \cap A = A$, $A' \neq A$ и A' является $(f, 3)$-разложимым, то $A' \cap \Phi = A$ и $\gamma = \{A'\} \cup \gamma$ — центрированное семейство $(f, 3)$-разложимых множеств, строго содержащее γ, что противоречит максимальности γ. Значит, и условие (II′) выполняется.

в) Рассмотрим множество A, удовлетворяющее требованиям 2). Оно открыто-замкнуто как всякое (f, k)-разложимое множество. Из $f^{-1}A = A$ следует, что $fB = B$, где $B = X \setminus A$. Рассмотрим сужение f^* гомеоморфизма f на открыто-замкнутое подпространство B пространства X. Очевидно, множество f^*B плотно в B. Если f^* — тождественное отображение, то можно, опираясь утверждению 1) этой задачи к гомеоморфизму $f^*: B \to B$, найти в B первого $(f^*, 3)$-разложимое множество C. Ясно, что C будет и $(f, 3)$-разложимым. С другой стороны, $C \cap A = A$, ибо $C \subset B$ и $B = X \setminus A$. Тем самым получаем противоречие с утверждением (II′). Итак, $f^*x = x$ — fx для любой точки $x \in B$. Все доказано.

183. Это утверждение прямо вытекает из определений и утверждения 3) задачи 182 гл. VI.

184. Если бикомпакт X состоит из трех элементов 1, 2 и 3 и отображение f таково: $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ и $f(3) = 1$, то, как легко показать, в X нет вполне $(f, 2)$-разложимого множества.

185. Действительно, вследствие 182 гл. VI, множество U всех внедиагональных точек для гомеоморфизма f открыто замкнуто в X. Ясно, что $U \subset f(X)$. Поскольку $f(X)$ всюду не плотно в Y, подавно $U = \Lambda$.

186. Пафнутий некоторый гомеоморфизм φ пространства X на Y. Так как $P \subset Y$, то Y также нигде не плотно в X. Значит, в силу 185 гл. VI, гомеоморфизм φ не имеет неподвижных точек. Возьмем точку $x \in P$ и рассмотрим $y = \varphi x$. Так как, очевидно, $\varphi(P) \subset Y \subset P$, то $y \in Y \subset P$. Кроме того, $x \neq y$, ибо φ не имеет неподвижных точек. Предположим теперь, что существует такой гомеоморфизм $h: P \to P$, что $hy = x$. Рассмотрим гомеоморфизм $g = h\varphi$, являющийся композицией гомеоморфизмов φ и h. Ясно, что g отображает все X в Y. Имеем: $g(x) = h(\varphi x) = hy = x$, т. е. гомеоморфизм $g: X \to X$, где $g(X)$ нигде не плотно в X, имеет неподвижную точку (а именно, точку x), что противоречит задаче 185 гл. VI. Итак, h неосуществимо.

187. Возьмем счетное бесконечно дискретное подпространство $D \subset X$. Так $X \subset \beta N$, а βN — экстремально несвязный бикомпакт (см. 15.3 гл. VI), следовательно (в силу 15.5 гл. VI), замыкание $[D]_{\beta N} = [D]$, где $[D]$ — замыкание Стоуна — Чеха подпространства D. Ясно, что $[D]$ гомеоморфно βN, $[D] \subset X$, X нигде не плотно в βN. Поэтому мы находимся в условиях задачи 183 гл. VI, в силу которой $X = \beta N \setminus N$ неосуществимо. Другое решение основывается на задачах 144 и 148 гл. I.

188. Рассмотрим множество $P_\alpha(x_0) = \bigcup \{A \in \alpha: x_0 \notin A\}$. Так как каждое $A \in \alpha$ — замкнутое в X множество, а α — покрытие конечное (или локально конечное в X), то $P_\alpha(x_0)$ замкнуто в X. Тогда $x_0 \in X \setminus P_\alpha(x_0) = \subset \operatorname{st}(x_0, \alpha)$, откуда следует, что x_0 — внутренняя точка множества $\operatorname{st}(x_0, \alpha)$, т. е. $x_0 \in \operatorname{Int} \operatorname{st}(x_0, \alpha)$.

189. а) Предположим, что для элемента $A_{\operatorname{st}(x_0)}^{\alpha_0} \in \alpha_0$ имеются два различных элемента $A_1^{\alpha_1} \in \alpha_1$, $A_2^{\alpha_2} \in \alpha_2$, для которых $A_{\operatorname{st}(x_0)}^{\alpha_0} = A_1^{\alpha_1}$, $A_{\operatorname{st}(x_0)}^{\alpha_0} \subset A_2^{\alpha_2}$. Тогда $\operatorname{Int} A_{\operatorname{st}(x_0)}^{\alpha_0} \subset \operatorname{Int} A_1^{\alpha_1}$, $\operatorname{Int} A_{\operatorname{st}(x_0)}^{\alpha_0} = \operatorname{Int} A_2^{\alpha_2}$, следовательно, $\operatorname{Int} A_1^{\alpha_1} \cap \operatorname{Int} A_2^{\alpha_2} \neq \Lambda$, что противоречит аксиоматике покрытия α_1.

б) Возьмем произвольный элемент $A_1^{\alpha_1} \in \alpha_1$. Выберем точку $x_0 \in \operatorname{Int} A_1^{\alpha_1}$ и элемент $A_2^{\alpha_2}$, для которого $x_0 \in A_2^{\alpha_2}$. Докажем прежде всего, что $A_1^{\alpha_1} \subset A_2^{\alpha_2}$. Прежде всего $\operatorname{Int} A_2^{\alpha_2} \cap A_2^{\alpha_2} \neq \Lambda$, следовательно, $\operatorname{Int} A_1^{\alpha_1} \cap \operatorname{Int} A_2^{\alpha_2} \neq \Lambda$. Так как $\alpha_2 \geq \alpha_1$, то элемент $A_2^{\alpha_2} \in \alpha_2$, для которого $A_1^{\alpha_1} \subset A_2^{\alpha_2}$,

Поэтому из $\operatorname{Int} A_1^{\alpha_1} \cap \operatorname{Int} A_2^{\alpha_2} \neq \Lambda$ следует, что $\operatorname{Int} A_1^{\alpha_1} \cap \operatorname{Int} A_2^{\alpha_2} \neq \Lambda$, либо $\operatorname{Int} A_2^{\alpha_2} \subset \operatorname{Int} A_1^{\alpha_1}$. Следовательно, так как α_1 — каноническое покрытие, $A_2^{\alpha_2} = A_1^{\alpha_1}$. Итак, если $A_2^{\alpha_2} \subset \alpha_2$ таково, что $A_2^{\alpha_2} \cap \operatorname{Int} A_1^{\alpha_1} \neq \Lambda$, то непременно $A_2^{\alpha_2} \subset A_1^{\alpha_1}$. Отсюда следует, что $\operatorname{Int} A_2^{\alpha_2} \subset \bigcup \{A \subset \alpha_2: A \cap \operatorname{Int} A_1^{\alpha_1} \neq \Lambda\}$, откуда, вследствие замкнутости множества $\bigcup \{A \subset \alpha_2: A \cap \operatorname{Int} A_1^{\alpha_1} \neq \Lambda\}$, получаем $A_2^{\alpha_2} = [\operatorname{Int} A_2^{\alpha_2}] \subset \bigcup \{A \subset \alpha_2: A \cap \operatorname{Int} A_1^{\alpha_1} \neq \Lambda\}$. Так как из $A \subset \alpha_2$, $A \cap \operatorname{Int} A_1^{\alpha_1} \neq \Lambda$ следует $A \subset A_1^{\alpha_1}$, то $A_2^{\alpha_2} = \bigcup \{A \in \alpha_2: A \cap \operatorname{Int} A_1^{\alpha_1} \neq \Lambda\}$. Остается заметить, что из $A \in \alpha_2$, $A \subset A_1^{\alpha_1}$ следует, что $A \cap \operatorname{Int} A_1^{\alpha_1} \neq \Lambda$, после чего можем написать, что $A_2^{\alpha_2} = \bigcup \{A \subset \alpha_2: A \subset A_1^{\alpha_1}\}$.

190. Положим $\alpha^0 = \{\operatorname{Int} A: A \in \alpha\}$, $\beta^0 = \{\operatorname{Int} B: B \in \beta\}$. Ясно, что $\alpha^0 \cap \beta^0$ состоит из попарно не пересекающихся открытых множеств. Кроме того, множества $\bar{\alpha}^0 = \bigcup \{\operatorname{Int} A: A \in \alpha\}$ и $\bar{\beta}^0 = \bigcup \{\operatorname{Int} B: B \in \beta\}$ плотны в X. Рассмотрим систему $\gamma^0 = \{(\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B): A \in \alpha, B \in \beta, \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \neq \Lambda\}$. Ясно, что γ^0 состоит из попарно не пересекающихся открытых множеств, причем множество $\bar{\gamma}^0 = \bigcup \{(\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B): A \in \alpha, B \in \beta\}$ плотно в X. Тогда понятно, что $\gamma = \{[U]: U \in \gamma^0\}$ — каноническое покрытие пространства X, причем $\gamma = \alpha \wedge \beta$ (см. определение на стр. 345). Если $A \in \alpha$, $B \in \beta$, то, очевидно, $[\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B] \subset [\operatorname{Int} A] = A$ и $[\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B] \subset [\operatorname{Int} B] = B$. Значит, каноническое покрытие $\gamma = \alpha \wedge \beta$ вписано и в α и в β, т. е. $\gamma > \alpha$, $\gamma > \beta$.

191. Аксиомы частичного порядка легко проверяются. Направленность семейства $\mathfrak{A}(X)$ следует из задачи 190 гл. VI.

192. (а) Пусть пространство X регулярно. Пусть точки $x_0 \in X$ и их окрестность Ox_0 произвольны. Возьмем, в силу регулярности X, окрестность $O'x_0$ точки x_0, для которой $[O'x_0] \subset Ox_0$. Теперь рассмотрим каноническое покрытие α_0, состоящее из двух канонических замкнутых множеств, а именно, множества $[O'x_0]$ и множества $[X \setminus [O'x_0]]$. Очевидно, звезда точки x_0 относительно покрытия α_0 совпадает с множеством $[O'x_0]$, а следовательно, содержится в Ox_0, значит, семейство $\mathfrak{A}(X)$ замельчается.

(б) Обратно, пусть $\mathfrak{A}(X)$ замельчается. Возьмем произвольную точку $x_1 \in X$ и произвольную ее окрестность Ox_1. В силу замельчаемости системы $\mathfrak{A}(X)$ найдется такое каноническое покрытие $\alpha_0 \in \mathfrak{A}(X)$, что $\alpha_0(x_1) \subset Ox_1$. Из 189 гл. VI получаем, что $x_0 \in \operatorname{Int} \alpha_0(x_0)$. Положим $O'x_0 = \operatorname{Int} \alpha_0(x_0)$. Имеем: $x_1 \in O'x_0 \subset [O'x_0] = [\operatorname{Int} \alpha_0(x_0)] = \alpha_0(x_0) \subset Ox_1$.

193. Пусть ξ — отмеченная нить в $\mathfrak{A}(X)$. $x_1 \in \bigcap \{A: A \in \xi\}$ и $x_2 \in \bigcup \{A: A \in \xi\}$. Предположим, что $x_1 \neq x_2$. Так как X — хаусдорфово пространство, то существует такая окрестность Ox_1 точки x_1, что $x_2 \notin [Ox_1]$. Рассмотрим каноническое покрытие α_1, состоящее из двух множеств: $[Ox_1]$ и $[X \setminus [Ox_1]]$. Тогда, по определению нити, либо $[Ox_1] \in \xi$, либо $[X \setminus [Ox_1]] \in \xi$ (одновременно принадлежать ξ они не могут). Если $[Ox_1] \in \xi$, то $x_2 \in \bigcap \{A: A \in \xi\}$, либо $x_2 \notin Ox_1$. Получили противоречие. Если $[X \setminus [Ox_1]] \in \xi$, то $x_1 \notin \bigcap \{A: A \in \xi\}$, либо $x_1 \in [X \setminus [Ox_1]]$. Опять получили противоречие. Значит, множество $\bigcap \{A: A \in \xi\}$ одноточечно.

194. (А) Пусть η есть $\varkappa$-система (отмеченная точкой x_0). Через $\mathscr{M}(\eta)$ обозначим все $\varkappa$-системы (отмеченные точкой $x_0 \in X$), содержащие η. Пусть $\xi_1 \in \mathscr{M}(\eta)$ и $\xi_2 \subset \mathscr{M}(\eta)$. Будем считать, что $\xi_2 > \xi_1$, если $\xi_2 \subset \xi_1$. Тогда $\mathscr{M}(\eta)$ частично упорядочено. Пусть $\mathscr{L} \subset \mathscr{M}(\eta)$ — цепь (см. определение на стр. 18) в частично упорядоченном множестве $\mathscr{M}(\eta)$. Для того чтобы показать, что $\mathscr{L}$ имеет в $\mathscr{M}(\eta)$ максимальный элемент, требуется доказать, что $\xi^* = \bigcup \{\xi: \xi \in \mathscr{L}\}$ есть $\varkappa$-система (отмеченная точкой $x_0 \in X$), что проверяется без труда. Теперь из принципа максимального элемента (см. стр. 18) следует, что максимальный элемент существует и во всем $\mathscr{M}(\eta)$, т. е. η содержится в некотором $\varkappa$-ультрафильтре (отмеченном точкой $x_0 \in X$).

(Б) Пусть теперь η — $\varkappa$-ультрафильтр.

1) Если $A_1 \subset \eta$, $A_2 \in \eta$, то, присоединяя к системе η множество $[\operatorname{Int} A_1 \cap \operatorname{Int} A_2]$, мы не нарушим свойства $\varkappa$-центрированности. Значит, вследствие максимальности η, непременно $[\operatorname{Int} A_1 \cap \operatorname{Int} A_2] \in \eta$.

2) Это утверждение также легко устанавливается.

3) Пусть $B \in \mathfrak{B}(X)$ и $\operatorname{Int} B \cap \operatorname{Int} A \neq \Lambda$ для любого $A \subset \eta$. Положим $\eta^* = \{B\} \cup \eta \cup \{[\operatorname{Int} B \cap \operatorname{Int} A]: A \in \eta\}$. Нетрудно убедиться в том, что η^* — $\varkappa$-система. Поэтому, вследствие максимальности $\varkappa$-системы η (ведь η — $\varkappa$-ультрафильтр), мы получаем, что $\eta = \eta^*$. Значит, $B \in \eta$. Итак, всякий $\varkappa$-ультрафильтр удовлетворяет условиям 1), 2), 3). Обратно, пусть $\varkappa$-система η такова, что для нее эти условия выполнены. Предположим, что η содержится в некоторой $\varkappa$-системе η^*. Тогда во всяком случае будем иметь $\operatorname{Int} B \cap \operatorname{Int} A \neq \Lambda$, если $B \in \eta^*$ и $A \in \eta \subset \eta^*$. Но для η выполнено условие 3). Значит, $B \in \eta$, откуда получаем, что η^* обязана совпадать с η, т. е. η — $\varkappa$-ультрафильтр.

(В) Получается из предыдущего утверждения.

195. (А) Пусть ξ — $\varkappa$-ультрафильтр.

1) Пусть $\alpha \in \mathfrak{A}(X)$ — произвольное каноническое покрытие пространства X. Надо доказать, что существует такое $A \in \alpha$, что $A \in \xi$. Предположим, что такого $A \in \alpha$ нет. Тогда, пользуясь задачей 194 (В) гл. VI, можно утверждать, что для каждого $A \in \alpha$ непременно $[X \setminus A] \subset \xi$. Отсюда (в силу 194 (Б) гл. VI) будем иметь $[\bigcap \{[\operatorname{Int}[X \setminus A]: A \in \alpha\}] \in \xi$. Но $\operatorname{Int}[X \setminus A] = X \setminus A$ и $\bigcap \{[X \setminus A]: A \in \alpha\} = X \setminus \bigcup \{A: A \in \alpha\} = \Lambda$. Итак, $\Lambda \in \xi$. Получили противоречие. Теперь пусть $A_2 \in \varkappa$, $A_2 \in \alpha$ и $A_1 \in \xi$, $A_2 \subset \xi$. Тогда $A_1 \subset [X \setminus A_2] \in [X \setminus A_1] \in \xi$ (см. 194 (Б) гл. VI). Получили противоречие с задачей 194 (В) гл. VI. Итак, $\xi \cap \varkappa$ непусто и состоит ровно из одного элемента для любого $\alpha \in \mathfrak{A}(X)$.

2) Пусть $\alpha_1 \in \mathfrak{A}(X)$, $\alpha_2 \in \mathfrak{A}(X)$ и $\alpha_2 > \alpha_1$. Пусть $\{A_1\} = \xi \cap \alpha_1$, $\{A_2\} = \xi \cap \alpha_2$, т. е. A_1, соответственно A_2, есть тот единственный элемент из α_1, соответственно из α_2, который принадлежит ξ. Надо доказать, что $A_2 \subset A_1$. Но это включение следует из 189 гл. VI и только что доказанного в 1).

(Б) Пусть теперь ξ — нить в $\mathfrak{A}(X)$. Надо доказать, что ξ — $\varkappa$-ультрафильтр. Пусть $A_1 \in \xi$, $A_2 \in \xi$. По определению нити, имеем $\{A_1\} = \xi \cap \alpha_1$, $\{A_2\} = \xi \cap \alpha_2$ для некоторых канонических покрытий $\alpha_1 \in \alpha_2$. Рассмотрим каноническое покрытие $\alpha_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_2$. В задаче 190 гл. VI показано, что $\alpha_3 > \alpha_1$, $\alpha_3 > \alpha_2$. Теперь рассмотрим элемент $A_3 \in \xi \cap \alpha_3$. Тогда, по определению нити, непременно $A_3 \subset A_1$, $A_3 \subset A_2$. Но $\alpha_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_2$, значит, $A_3 = [\operatorname{Int} A' \cup \operatorname{Int} A'']$, где $A' \in \alpha_1$, $A'' \in \alpha_2$. Ясно, что непременно должно быть $A_3 = A' \cap A''$. Таким образом, $A_3 = [\operatorname{Int} A' \cap \operatorname{Int} A_2] \in \xi$. Отсюда, в частности, следует, что ξ является $\varkappa$-центрированной, т. е. ξ есть $\varkappa$-система. Предположим теперь, что ξ — немаксимальная $\varkappa$-система, т. е. ξ — не $\varkappa$-ультрафильтр. Тогда ξ содержится в некотором $\varkappa$-ультрафильтре $\overline{\xi}$. Из доказанного в (А) настоящей задачи получаем, что $\overline{\xi} \cap \alpha$ непусто и состоит ровно из одного элемента для любого $\alpha \in \mathfrak{A}(X)$. Получили противоречие с тем, что меньшая подсистема ξ ими этим свойством обладает. Итак, ξ — $\varkappa$-ультрафильтр.

Заметим теперь, что, очевидно, если ξ — отмеченная нить, то ξ есть и отмеченный $\varkappa$-ультрафильтр. Верно и обратно. Все доказано.

196. Рассмотрим систему ξ_{a_2}, состоящую из одного элемента, а именно, множества A_2. Понятно, что ξ_{a_2} — $\varkappa$-система, отмеченная точкой a_2, ибо $a_2 \in A_2$. В силу 194 (А) гл. VI существует $\varkappa$-ультрафильтр ξ, который тоже отмечен точкой a_2 и для которого $\xi_{a_2} \subset \xi$, т. е. ξ — такой $\varkappa$-ультрафильтр, что $A_2 \in \xi$ и $\{a_2\} = \bigcap \{A: A \in \xi\}$. Но (195 гл. VI) всякий $\varkappa$-ультрафильтр (отмеченный данной точкой) является в то же время нитью (отмеченной той же точкой). Все доказано.

197. Действительно, из 196 гл. VI следует, что для любой точки $x \in X$ существует отмеченная точка x вида ξ, т. е. такая вещь, что $\{x\} = \bigcap \{A: A \in \xi\}$. По определению натурального отображения, тогда $\pi_X \xi = x$.

198. (а) Пусть $\xi_0 \in \Xi(X)$ — произвольная точка. По определению тихоновской топологии в $P = \prod \{\alpha: \alpha \in \Xi(X)\}$, множество вида $O(A^1_{\alpha_1}, \ldots, A^n_{\alpha_n}) = \{\xi \in P: A^1_{\alpha_1} \in \xi, \ldots, A^n_{\alpha_n} \in \xi\}$, где $A^1_{\alpha_1} \in \alpha_1, \ldots, A^k_{\alpha_k} \in \alpha_k$, $\alpha_i \in \Upsilon(X), \ldots, \alpha_n \in \Upsilon(X)$, образуют стандартную базу топологии в $P = \prod \{\alpha: \alpha \in \Xi(X)\}$. Пусть $O(A^1_{\alpha_1}, \ldots, A^k_{\alpha_k})$ произвольная окрестность точки $\xi_1 \in \Xi(X)$ в P из стандартной базы в P. Тогда понятно, что $O(A^1_{\alpha_1}, \ldots, A^k_{\alpha_k}) \cap \Xi(X) = (A^1_{\alpha_1}, \ldots, A^n_{\alpha_n}) = \{\xi \in \Xi(X): A^1_{\alpha_1} \in \xi, \ldots, A^1_{\alpha_k} \in \xi\}$ — окрестность точки $\xi_0 \in \Xi(X)$ в $\Xi(X)$.

Рассмотрим (пользуясь 194 гл. VI) каноническое покрытие $\alpha_0 \in \Upsilon(X)$, для которого $\alpha_0 \succ \alpha_i$ ($= 1, 2, \ldots, s$. Возьмем элемент $A^1_{\alpha_1} \in \alpha_0$, являющийся представителем цепи ξ_0 в α_0, т. е. $\{A^1_{\alpha_1}\} = \xi_0 \cap \alpha_0$. Теперь рассмотрим множество $(A^1_{\alpha_1}) = \{\xi \in \Xi(X): A^1_{\alpha_1} \in \xi\}$. Понятно, что $(A^1_{\alpha_1})$ есть окрестность точки ξ_1 в $\Xi(X)$, або $(A^1_{\alpha_1}) = O(A^1_{\alpha_1}) \cap \Xi(X)$, где $O(A^1_{\alpha_1}) = \{\xi \in P: A^1_{\alpha_1} \in \xi\}$, $A^1_{\alpha_1} \in \alpha_1$ — однозначная стандартная окрестность точки ξ_1 в P. Докажем, что $(A^1_{\alpha_1}) \subset (A^1_{\alpha_1}, \ldots, A^1_{\alpha_s})$. Пусть $\xi \in (A^1_{\alpha_1})$. Это значит, что $A^1_{\alpha_1} \in \xi$, где $A^1_{\alpha_1} \in \alpha_1$. Так как $A^1_{\alpha_1} \in \xi_1$ (ведь $(A^1_{\alpha_1})$ — окрестность точки ξ_1), $A^1_{\alpha_1} \in \xi_0$, $\ldots$, $A^n_{\alpha_1} \in \xi_0$ и $\alpha_2 \succ \alpha_1, \ldots, \alpha_s \succ \alpha_1$, то $A^n_{\alpha_0} \subset A^n_{\alpha_i}$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$. Отсюда, в таком же духе, что $A^1_{\alpha_0} \in \xi$, следует $A^1_{\alpha_1} \in \xi$, $A^n_{\alpha_i} \in \xi$, $\ldots$, $A^1_{\alpha_s} \in \xi$, ибо ξ — цепь и в то же время κ-ультрафильтр (см. 195 гл. VI и 194 гл. VI). Поэтому $\xi \in (A^1_{\alpha_1}, \ldots, A^n_{\alpha_s})$.

(б) Пусть $\xi_0 \in P = \prod \{\hat{\alpha}: \alpha \in \Upsilon(X)\}$ и $\xi_0 \in [\Xi(X)]_\kappa$. Надо доказать, что ξ_0 — цепь. Пусть $\alpha_1 \in \Upsilon(X)$, $\alpha_2 \in \Upsilon(X)$ и $\alpha_2 \succ \alpha_1$. Рассмотрим координату $A^1_{\alpha_1}$ точки ξ_0 и α_1, и координату $A^1_{\alpha_2}$ той точки в $\hat{\alpha}_2$, т. е. $\{A^1_{\alpha_1}\} = \xi_0 \cap \alpha_1$, $(A^1_{\alpha_2}) = \xi_0 \cap \alpha_2$. Надо доказать, что $A^1_{\alpha_2} \subset A^1_{\alpha_1}$. Рассмотрим стандартную окрестность $O(A^1_{\alpha_1}, A^n_{\alpha_i})$ точки ξ_0 в P. Тогда $O(A^1_{\alpha_1}, A^n_{\alpha_i}) \cap \Xi(X) \neq \Lambda$, ибо $\xi_0 \in [\Xi(X)]_\kappa$. Зафиксируем точку $\xi \in O(A^1_{\alpha_1}, A^n_{\alpha_i}) \cap \Xi(X)$. Отсюда следует, что ξ — цепь и $A^1_{\alpha_1} \in \xi$, $A^n_{\alpha_i} \in \xi$. Так как $\alpha_2 \succ \alpha_1$, то тогда $A^1_{\alpha_2} \subset A^1_{\alpha_1}$. Утверждение (б) доказано.

(в) Следует из (б), бикомпактности и хаусдорфовости тихоновского произведения $P = \prod \{\hat{\alpha}: \alpha \in \Upsilon(X)\}$ конечных дискретных пространств $\hat{\alpha}$, $\alpha \in \Upsilon(X)$.

(г) Очевидно, ибо $(A_\xi) \cap \dot{X} = (A_\xi)$.

199. (а) Пусть $\xi \in (A_\xi)$. Это означает, что $A_0 \in \xi$. Тогда, по определению отображения π_X, получим $\pi_X \xi = \bigcap \{A: A \in \{\xi\} = \{x\} \subset A_0$, т. е. $\pi_X \xi \in A_0$. Таким образом, $\pi_X((A_\xi)) \subset A_0$. Обратно, пусть $x_1 \in A_0$. Пользуясь задачей 196 гл. VI, рассмотрим отмеченную точкой x_0 цепь ξ_1, для которой $A_0 \in \xi_1$, т. е. точку $\xi_0 \in \dot{X}$, для которой $A_0 \in \xi_1$ и $\{x_1\} = \bigcap \{A: A \in \xi_0\}$. Отсюда получаем, что $\xi_0 \in (A_0)$ и $\pi_X \xi_0 = x_0$. Таким образом, $A_1 \subset \pi_X((A_0))$. Итак, утверждение (а) доказано.

(б) Пусть $x_0 \in \operatorname{Int} A_\xi$ произвольна и $A_1 \in \alpha_\xi$. Рассмотрим теперь произвольную отмеченную цепь ξ, для которой $\pi_X \xi = x_0$, т. е. $\{x_0\} = \bigcap \{A: A \in \xi\}$. Для всякой такой отмеченной цепи представителем в покрытии α_ξ является непременно множество A_0. Значит, всякая такая цепь принадлежит

множеству (A_0). Но $\pi^{-1}_X x_1 = \{\xi \in \dot{X}: \bigcap \{A: A \in \xi\} = \{x_0\}\}$. Значит, $\pi^{-1}_X x_1 \subset (A_0)$. Отсюда получаем включение $\pi^{-1}_X(A_\xi) \subset \operatorname{Int} A_0$. Обратно, пусть $x_1 \in \pi^{-1}_X A_0$, т. е. $\pi^{-1}_X x_0 = \{\xi \in \dot{X}: \bigcap \{A: A \in \xi\} = \{x_0\}\} \subset (A_0)$. Тогда $A_0 \in \xi$ для всякого $\xi \in \pi^{-1}_X x_1$. Пусть $\alpha_0 \in \Upsilon(X)$ таково, что $A_1 \in \alpha_0$. Если бы $x_0 \notin \operatorname{Int} A_0$, то в покрытии α_1 нашелся бы еще один элемент $A'_0 \in \alpha_1$, $A'_0 \neq A_1$, для которого $x_0 \in A'_0$. Тогда нашлась бы отмеченная цепь (см. 195 гл. VI) ξ'_0, для которой $A'_0 \in \xi'_0$ и $\{x_0\} = \bigcap \{A': A' \in \xi'_0\}$. Тогда бы $\xi'_0 \in \pi^{-1}_X x_1$ и $A'_0 \in \xi'_0$. С другой стороны, раз $\xi'_0 \in \pi^{-1}_X x_0$ то $A_0 \in \xi'_0$. Получили, таким образом, что $A_0 \in \xi'_0 \cap \alpha_0$, $A'_0 \in \xi'_0 \cap \alpha_0$, $A_0 \neq A'_0$. Пришли к противоречию с утверждением задачи 195 гл. VI. Итак, $\pi^{-1}_X A_0 \subset \operatorname{Int} A_1$. Поэтому (б) также доказано.

200. Докажем бикомпактность отображения π_X. Пусть $x_0 \in X$ произвольно. Надо доказать бикомпактность подпространства $\pi^{-1}_X x_0$. Для этого, ввиду бикомпактности пространства $\Xi(X)$, достаточно доказать замкнутость множества $\pi^{-1}_X x_0$ в $\Xi(X)$. Прежде всего покажем, что $\pi^{-1}_X x_0 = \{\xi \in \dot{X}: \bigcap \{A: A \in \xi\} = \{x_0\}\}$. Пусть $\xi_0 \in [\pi^{-1}_X x_0]_{\Xi(X)}$. Отсюда для каждой элементарной окрестности (A^0), $A^0 \in \xi_0$, точки ξ_0 в $\Xi(X)$ непременно $(A^0) \cap \pi^{-1}_X x_0 \neq \Lambda$. Пусть $\tau_0 \in (A^0) \cap \pi^{-1}_X x_0$, т. е. η_0 — отмеченная цепь, $A^0 \in \eta_0$ и $\bigcap \{A: A \in \eta_0\} = \{x_0\}$. Отсюда, в частности, получаем, что $x_0 \in A^0$. Итак, $x_0 \in A^0$ для всякого $A^0 \in \xi_0$, т. е. ξ_0 — отмеченная цепь и $\{x_0\} = \bigcap \{A^0: A^0 \in \xi_0\}$. Таким образом, $\xi_0 \in \pi^{-1}_X x_0$. Значит, $\pi^{-1}_X x_0$ замкнуто в $\Xi(X)$. Непрерывность отображения π_X следует из задачи 199 (б) гл. VI и 198 (в) гл. VI.

Предположим теперь, что пространство X регулярно. Тогда семейство $\Upsilon(X)$ всех канонических покрытий нормальности (см. 192 гл. VI). Поэтому для всякой точки $x_0 \in X$ и любой ее окрестности Ox_0 найдется каноническое замкнутое множество A_0, для которого $x_0 \in A_0 \subset Ox_0$. Поскольку цепь $\xi_0 \in \dot{X}$ такова, что $\pi_X \xi_0 = x_0$, то понятно, что $A_0 \in \xi_0$, следовательно, (A_0) — окрестность точки ξ_0, для которой $\pi_X((A_0)) = A_0 \subset Ox_0$ (здесь мы воспользовались задачей 199 (а) гл. VI). Все доказано.

201. 1) следует из очевидного равенства $\overline{A} \cap \dot{X} = (A)$ и плотности $\dot{X}$ в $\Xi(X)$ (см. 195 гл. VI).

2) Дизъюнктность систем $\overline{(\alpha)}$ и (α) следует из того, что для каждой цепи ξ пересечение $\xi \cap \alpha$ состоит только из одного элемента. А то, что $\overline{(\alpha)}$ и (α) — покрытия соответственно $\Xi(X)$ и $\dot{X}$, получается, если учесть, что $\xi \cap \alpha \neq \Lambda$ для любой цепи ξ. Понятно также, что каждое множество $\overline{(A)}$ ((A)) открыто-замкнуто в $\Xi(X)$ (в $\dot{X}$).

3) следует из того, что каждое $\overline{(\alpha)}$, $\alpha \in \operatorname{cl}(X)$ (соответственно (α)), дизъюнктно, а совокупность множеств вида $\overline{(A)}$, $A \in \Upsilon(X)$ (соответственно (A)), образует базу в $\Xi(X)$ (соответственно в $\dot{X}$).

4) Очевидно.

202. Непрерывность, бикомпактность и неприводимость отображения π_X доказаны ранее (см. 200 гл. VI). Ранее также было доказано, что π_X — отображение «на» (см. 197 гл. VI). Остается доказать замкнутость π_X. Пусть $K \subset \dot{X}$ — произвольное замкнутое в $\dot{X}$ множество. Для доказательства замкнутости в X множества $\pi_X(K)$, очевидно, достаточно доказать открытость в X множества $\pi^{-1}_X(\dot{X} \setminus K) = X \setminus \pi_X(K)$. Пусть $x_0 \in \pi^{-1}_X(\dot{X} \setminus K)$,

Тогда $\pi_X^{-1}x_0 \subset \dot{X} \setminus K_1$ и $\dot{X} \setminus K = O\pi_X^{-1}x_0$ — окрестность бикомпактного множества $\pi_X^{-1}x_0$ в $\dot{X}$. Для каждой точки $\xi \in \pi_X^{-1}x_0$ рассмотрим такое каноническое покрытие $\alpha_\xi \subset \mathfrak{A}(X)$, чтобы

$$(1) \qquad (\alpha_\xi)(\xi) \subset O\pi_X^{-1}x_0,$$

где $(\alpha_\xi)(\xi)$ — звезда точки ξ относительно покрытия (α_ξ) пространства $\dot{X}$ (см. при этом 201 гл. VI). Так как (α_ξ) — цилиндрическое покрытие (см. 201 гл. VI), то $(\alpha_\xi)(\xi)$ совпадает с некоторым множеством $(A(\xi)) \in (\alpha_\xi)$. Итак, для каждой точки $\xi \in \pi_X^{-1}x_0$ мы нашли покрытие $\alpha_\xi \in \mathfrak{A}(X)$ и элемент $A(\xi) \subset \alpha_\xi$ таким образом, что

$$(1)' \qquad \xi \in (A(\xi)) \subset O\pi_X^{-1}x_0.$$

Рассмотрим открытое покрытие

$$(2) \qquad \omega = \{(A(\xi)) \colon \xi \in \pi_X^{-1}x_0\}$$

бикомпакта $\pi_X^{-1}x_0$ и выделим из него конечное подпокрытие

$$(3) \qquad \omega_0 = \{(A(\xi_i)) \colon i = 1, 2, \ldots, s\}.$$

Вспомним теперь каноническое покрытие $\alpha^* \in \mathfrak{A}(\dot{X})$ пространства $\dot{X}$, для которого $\alpha^* \succ \alpha_{\xi_i}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, s$.

Рассмотрим теперь дизъюнктное открыто-замкнутое покрытие (α^*) пространства $\dot{X}$ (см. 204 гл. VI). Из этой же задачи 204 гл. VI заключаем, что (α^*) вписано во все покрытия (α_{ξ_i}), $i = 1, 2, \ldots, s$. В силу включений (1), (1') и построения покрытия (α^*) получаем следующее включение:

$$(4) \qquad (\alpha^*)(\pi_X^{-1}x_0) = \bigcup \{(A) \in (\alpha^*) \colon (A) \cap \pi_X^{-1}x_0 \neq \Lambda\} \subset O\pi_X^{-1}x_0.$$

Положим

$$(5) \qquad \dot{X} \setminus (\alpha^*)(\pi_X^{-1}x_0) = H.$$

Будем иметь

$$(6) \qquad H = \bigcup \{(A) \in (\alpha^*) \colon (A) \cap \pi_X^{-1}x_0 = \Lambda\}.$$

Множество H, как объединение конечного числа открыто-замкнутых в $\dot{X}$ множеств, само *открыто-замкнуто* в $\dot{X}$. Из (6), используя 199 (а) гл. VI, получаем: $\pi_X(H) = \bigcup \{\pi_X(A) \colon A \in \alpha^*$ и $(A) \cap \pi_X^{-1}x_0 = \Lambda\} = \bigcup \{A \in \alpha^* \colon x_0 \notin A\}$, откуда следует, что множество $\pi_X(H)$, как объединение конечного числа замкнутых в X множеств, само замкнуто в X. Поэтому множество $X \setminus \pi_X(H)$ открыто в X. Кроме того, оно содержит точку x_0 и содержится в множестве $\pi_X^{\#}(\dot{X} \setminus \Lambda)$, что следует из (1), включения (4) и равенства (5). Все доказано.

203. Так как $A_1 \subset X$, $A_2 \subset X$ — канонически замкнутые множества, то $A_2 = [\operatorname{Int} A_1]$, $A_2 = [\operatorname{Int} A_2]$. Из задачи 110 гл. VI тогда получаем равенства

$$(1) \qquad fA_1 = [f^{\#}(\operatorname{Int} A_1)], \quad fA_2 = [f^{\#}(\operatorname{Int} A_2)].$$

Легко видеть, что имеют место включения:

$$(2) \qquad \begin{aligned} f^{-1}(f^{\#}(\operatorname{Int} A_1)) &\subset f^{-1}(\operatorname{Int} f(A_1)) \subset A_1, \\ f^{-1}(f^{\#}(\operatorname{Int} A_2)) &\subset f^{-1}(\operatorname{Int} f(A_2)) \subset A_2. \end{aligned}$$

Так как, кроме того, множество $f^{-1}(f^{\#}(\operatorname{Int} A_1))$ плотно в A_1, а $f^{-1}(f^{\#}(\operatorname{Int} A_2))$ плотно в A_2 (см. 109 гл. VI), то получаем равенства

$$(3) \qquad \begin{aligned} f^{-1}(f^{\#}(\operatorname{Int} A_1)) &= [f^{-1}(\operatorname{Int} f(A_1))] = A_1, \\ f^{-1}(f^{\#}(\operatorname{Int} A_2)) &= [f^{-1}(\operatorname{Int} f(A_2))] = A_2. \end{aligned}$$

Но из равенства (1) и равенства $fA_1 = fA_2$ *следует* равенство $\operatorname{Int} f(A_1) = \operatorname{Int} f(A_2)$. Поэтому, учитывая это, а также равенства (3), получаем требуемое равенство $A_1 = A_2$.

204. (а) Пусть $\Gamma \subset \Xi(X)$ — произвольное открытое в $\Xi(X)$ множество. Надо доказать, что $[\Gamma]_{\Xi(X)}$ открыто в $\Xi(X)$. Вследствие плотности $\dot{X}$ в $\Xi(X)$, получаем равенства

$$(4) \qquad [\Gamma]_{\Xi(X)} = [\Gamma \cap \dot{X}]_{\Xi(X)} = [[\Gamma \cap \dot{X}]_{\dot{X}}]_{\Xi(X)}.$$

Положим

$$(5) \qquad A_1 = \pi_X[\Gamma \cap \dot{X}]_{\dot{X}}, \quad A_2 = [X \setminus A_1]_X$$

и рассмотрим покрытие $\alpha_0 = \{A_1, A_2\}$ пространства X. Так как π_X — совершенное непрерывное отображение (см. 202 гл. VI), $[\Gamma \cap \dot{X}]_{\dot{X}}$ — каноническое замкнутое в $\dot{X}$ множество, то A_1 — каноническое замкнутое в X множество, следовательно, и A_2 — каноническое замкнутое в X множество. Значит, α_0 — каноническое покрытие пространства X.

Рассмотрим открыто-замкнутые в $\dot{X}$ множества $(A_1) = \{\xi \in \dot{X} \colon A_1 \in \xi\}$, $(A_2) = \{\xi \in \dot{X} \colon A_2 \in \xi\}$. В задаче 198 гл. VI доказано, что $\pi_X(A_i) = A_i$. Поэтому, так как (A_1) — каноническое замкнутое множество в $\dot{X}$, $[\Gamma \cap \dot{X}]_{\dot{X}}$ — каноническое замкнутое множество в $\dot{X}$ и $\pi_X(A_1) = \pi_X[\Gamma \cap \dot{X}]_{\dot{X}}$, где π_X совершенно и непривод имо, то $[\Gamma \cap \dot{X}]_{\dot{X}} = (A_1)$ (см. 203 гл. VI). Но $[(A_1)]_{\Xi(X)} = -[\overline{A}_2]$, $[\overline{A}_2]$ — открыто-замкнутое в $\Xi(X)$ множество, поэтому, учитывая (4), получаем равенство $[A_1]_{\Xi(X)} = [[\Gamma \cap \dot{X}]_{\dot{X}}]_{\Xi(X)} = [\Gamma]_{\Xi(X)}$. Значит, множество $[\Gamma]_{\Xi(X)}$ открыто-замкнуто в $\Xi(X)$.

(б) Так как $\Xi(X)$ экстремально несвязно, то и всюду плотное подпространство $\dot{X} \subset \Xi(X)$ экстремально несвязно (см. 157 гл. VI). Кроме того, $\Xi(X)$ — бикомпакт, как замкнутое подпространство бикомпакта $\Pi\{\bar{\alpha} \colon \alpha \in \mathfrak{A}(X)\}$, а $\dot{X}$ вполне регулярно. (С) Следует, по определению абсолюта (см. стр. 344), из (б) и задачи 160 гл. VI.

(в) Следует (в силу 162 гл. VI) из того, что $\Xi(X)$ — экстремально несвязный бикомпакт, а $\dot{X} \subset \Xi(X)$ всюду плотно в $\Xi(X)$.

205. Следует из задачи 204 гл. VI — пространство $\dot{X}$ и есть абсолют пространства X.

206. Возьмем абсолют $\dot{X}$ пространства X (см. 204, 205 гл. VI) и натуральное отображение $\pi_X \colon \dot{X} \to X$, которое совершенно и непривод имо (см. 202 гл. VI). Пространство $\dot{X}$ вполне регулярно, содержится в нульмерном бикомпакте $\Pi\{\bar{\alpha} \colon \alpha \in \mathfrak{A}(X)\}$. Значит, само $\dot{X}$ также нульмерно (в смысле ind — см. стр. 56).

207. Пусть $\sigma = \{U_\lambda: \lambda \in \Gamma\}$ — база X, для которой $|\sigma| = w(X)$. Для каждого $U_\lambda \in \sigma$ рассмотрим канонический покрытия $\lambda = \{U_\lambda, [X \setminus [U_\lambda]]\}$ пространства X. Для каждого $n \in N^*$ и каждой конечной последовательности $\alpha = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ рассмотрим канонические покрытия $\alpha = \lambda_1 \wedge \lambda_2 \wedge \ldots \wedge \lambda_n$ (см. 198 гл. VI). Через $\Psi(\sigma, X)$ обозначим систему всех построенных описанным способом канонических покрытий пространства X. Очевидно, $|\Psi(\sigma, X)| = \tau$. Легко проверить, что $\Psi(\sigma, X)$ взаимно вписывается. Направленность системы $\Psi(\sigma, X)$ следует из ее вписанности и из задачи 130 гл. VI.

208. Пусть σ — база X, мощность которой равна весу X. Рассмотрим инициализирующую направленную последовательность $\Psi(\sigma, X)$ канонических замкнутых покрытий пространства X, построенных по данной базе σ (см. 207 гл. VI). Далее рассмотрим пространство $\hat{X}(\sigma)$, построенное точно так же, как пространство $\hat{X}$ для семейства $\Psi(X)$ всех канонических покрытий пространства, т. е. $\hat{X}(\sigma)$ есть подпространство всех отмеченных нитей в семействе $\Psi(\sigma, X)$.

Точно так же строится натуральное отображение $\pi_{\sigma X}: \hat{X}(\sigma) \to X$ и так же доказывается, что это отображение совершенно и непрерывно. При этом $\hat{X}(\sigma)$ является компактным обобщенного континуума $\Pi\{\alpha: \alpha \in \Psi(\sigma, X)\}$ веса, равного $|\Psi(\sigma, X)| = \tau$. Значит, вес $\hat{X}(\sigma)$ не превосходит τ. Так как при совершенных отображениях вес не повышается (см. 41 гл. VI), то вес $\hat{X}(\sigma)$ равен τ. Кроме того, $\operatorname{ind}\hat{X}(\sigma) = 0$, ибо $\Pi\{\alpha: \alpha \in \Psi(\sigma, X)\}$ — нульмерный бикомпакт, гомеоморфизмом содержащий $\hat{X}(\sigma)$. Все доказано.

213. (а) Так как ξ — нить, то ξ является κ-ультрафильтром. Мы покажем, что $\hat{f}\xi = \{fA: A \in \xi\}$ — κ-ультрафильтр в семействе $\Psi(Y)$ всех канонических замкнутых множеств в Y. Прежде всего заметим, что fA для каждого $A \in \xi$ — канонически замкнутое в Y множество (см. 110 гл. VI). Пусть $A_1 \in \xi$ и $A_2 \in \xi$. Так как ξ — κ-ультрафильтр, то множество $[\operatorname{Int} A_1] \cap [\operatorname{Int} A_2] \neq \Lambda$ и принадлежит ξ (см. 194 гл. VI). Так как f замкнуто и непрерывно, то $f^{-1}([\operatorname{Int} A_1]) = f([\operatorname{Int} A_1]) = fA_1 \supset [f^{\#}(\operatorname{Int} A_2)] = f([\operatorname{Int} A_2]) = fA_2$ (см. 130 гл. VI). С другой стороны, $[\operatorname{Int} fA_1] = fA_1$, $[\operatorname{Int} fA_2] = fA_2$, причем $\operatorname{Int} fA_1$ и $\operatorname{Int} fA_2$ — максимальные открытые в Y множества с этим свойством. Значит, тогда непустое открытое множество $f^{-1}(\operatorname{Int} A_2) \subset \operatorname{Int} fA_1$ и плотно в $\operatorname{Int} fA_1$. Аналогично, $f^{-1}(\operatorname{Int} A_2) \subset \operatorname{Int} fA_2$ и плотно в $\operatorname{Int} fA_2$. Тогда будем иметь $f^{\#}(\operatorname{Int} A_1 \cap \operatorname{Int} A_2) = f^{-1}(\operatorname{Int} A_1) \cap f^{-1}(\operatorname{Int} A_2) \subset \operatorname{Int} fA_1 \cap \operatorname{Int} fA_2$, причем $f^{-1}(\operatorname{Int} A_1 \cap \operatorname{Int} A_2)$ плотно в множестве $\operatorname{Int} fA_1 \cap \operatorname{Int} fA_2$. Отсюда получаем равенство $[f^{-1}(\operatorname{Int} A_1 \cap \operatorname{Int} A_2)] = f([\operatorname{Int} A_1 \cap \operatorname{Int} A_2]) = [\operatorname{Int} fA_1 \cap \operatorname{Int} fA_2]$ (здесь мы также воспользовались задачей 130 гл. VI). Так как $[\operatorname{Int} A_1 \cap \operatorname{Int} A_2] \in \xi$, то $[\operatorname{Int} fA_1 \cap \operatorname{Int} fA_2] \in \hat{f}\xi$. Таким образом, $\hat{f}\xi$ является κ-системой. Для доказательства того, что $\hat{f}\xi$ — κ-ультрафильтр, достаточно (см. 194 гл. VI), достаточно проверить, выполняется ли свойство 3) из этой задачи для κ-ультрафильтров. Итак, пусть $B \in \Psi(Y)$ таково, что $\operatorname{Int} B \cap \bigcap \operatorname{Int} fA \neq \Lambda$ для любого $fA \in \hat{f}\xi$. Ясно, множество $f^{-1}(\operatorname{Int} fA)$ открыто, непусто, содержится в A и плотно в A. Значит, $[f^{-1}(\operatorname{Int} fA)] = A$. Из $\operatorname{Int} B \cap \bigcap \operatorname{Int} fA \neq \Lambda$ следует $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \cap f^{-1}(\operatorname{Int} fA) \neq \Lambda$, а следовательно, $\operatorname{Int}[f^{-1}(\operatorname{Int} B)] \cap \operatorname{Int} A \neq \Lambda$ для любого $A \in \xi$. Значит, так как ξ — κ-ультрафильтр, получаем, что $[f^{-1}(\operatorname{Int} B)] \in \xi$. Тогда $f([f^{-1}(\operatorname{Int} B)]) = [\operatorname{Int} B] = B$. Значит, $B \in \hat{f}\xi$. Итак, $\hat{f}\xi$ — κ-ультрафильтр в $\Psi(Y)$, и значит, нить в $\Psi(Y)$ (см. 195 гл. VI).

(б) Пусть ξ — отмеченная нить. Значит, $\bigcap\{A: A \in \xi\} \neq \Lambda$. Тогда $f(\bigcap\{A: A \in \xi\}) = \bigcap\{fA: A \in \xi\}$, следовательно, $\bigcap\{fA: A \in \xi\} \neq \Lambda$, т. е. $\hat{f}\xi$ — отмеченная нить в $\Psi(Y)$.

(в) Если $\xi_1 \in \xi_2$ — пара в $\Psi(X)$ и $\hat{f}\xi_1 = \hat{f}\xi_2$, то существуют такие $A_1 \in \xi_1$, $A_2 \in \xi_2$, что $fA_1 \neq fA_2$. Тогда, в силу 203 гл. VI, неизменно $fA_1 \neq fA_2$. Значит, $\hat{f}\xi_1 \neq \hat{f}\xi_2$.

214. В силу 195 гл. VI нам достаточно доказать, что $\hat{\xi}$ — κ-ультрафильтр. Для этого надо проверить условия 1), 2) и 3) из задачи 194 гл. VI для $\hat{\xi}$ (необходимые и достаточные для того, чтобы система канонических замкнутых множеств была κ-ультрафильтром). Заметим, что достаточно проверить выполнение свойств 1) и 3). Прежде всего ясно, что $\hat{\xi}$ состоит из попутных канонических замкнутых в X множеств.

1) Пусть $[f^{-1}(\operatorname{Int} B_1)] \in \hat{\xi}$, $[f^{-1}(\operatorname{Int} B_2)] \in \hat{\xi}$, где $B_1 \in \tau$, $B_2 \in \eta$. Имеем следующие равенства:

$$(1)\qquad f(f^{-1}(\operatorname{Int} B_1) \cap f^{-1}(\operatorname{Int} B_2)] = f([f^{-1}(\operatorname{Int} B_1)] \cap [f^{-1}(\operatorname{Int} B_2)]) = [\operatorname{Int} B_1 \cap \operatorname{Int} B_2].$$

$$f[f^{-1}([\operatorname{Int}[\operatorname{Int} B_1 \cap \operatorname{Int} B_2]])] = [\operatorname{Int}][\operatorname{Int} B_1 \cap \operatorname{Int} B_2]] = [\operatorname{Int} B_1 \cap \operatorname{Int} B_2].$$

Отсюда (вследствие 203 гл. VI) получаем равенство

$$(2)\qquad [f^{-1}(\operatorname{Int} B_1) \cap f^{-1}(\operatorname{Int} B_2)] = [f^{-1}(\operatorname{Int} B_3)],$$

где $B_3 = [\operatorname{Int} B_1 \cap \operatorname{Int} B_2]$. Но $B_1 \subset \eta \in B_2 \subset \eta$, следовательно, $[\operatorname{Int} B_1 \cap \operatorname{Int} B_2] = B_3 \in \tau$ (так как τ — κ-ультрафильтр). Учитывая это, и также равенства (2), (1) и определение системы $\hat{\xi}$, как получаем

$$[\operatorname{Int}[f^{-1}(\operatorname{Int} B_1)] \cap \operatorname{Int}[f^{-1}(\operatorname{Int} B_2)]] \in \hat{\xi}.$$

Тем самым свойство 1) κ-ультрафильтров (см. 194 гл. VI) доказано. Из доказанного следует, в частности, центрированность системы $\hat{\xi}$.

2) Пусть $A \subset X$ — такое канонически замкнутое в X множество, что $\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int}[f^{-1}(\operatorname{Int} B)] \neq \Lambda$ для любого $B \in \eta$. Тогда $\operatorname{Int} A \cap f^{-1}(\operatorname{Int} B) \neq \Lambda$ для любого $B \in \eta$ (ибо $f^{-1}(\operatorname{Int} B)$ содержится в $\operatorname{Int}[f^{-1}(\operatorname{Int} B)]$ и плотно в нем). Отсюда теперь получаем: $f^{\#}(\operatorname{Int} A) \cap \operatorname{Int} B \neq \Lambda$ для любого $B \in \eta$. Здесь, как всегда, $f^{\#}(\operatorname{Int} A) = \{y \in Y: f^{-1}y \subset \operatorname{Int} A\}$. Отсюда заключаем, что $\operatorname{Int}[f^{\#}(\operatorname{Int} A)] \cap \operatorname{Int} B \neq \Lambda$ для любого $B \in \eta$. Тогда, так как $fA = [f^{\#}(\operatorname{Int} A)]$ получаем, что $\operatorname{Int} fA \cap \operatorname{Int} B \neq \Lambda$ для любого $B \in \eta$. Вследствие того, что η — κ-ультрафильтр, заключаем (см. 194 гл. VI), что $fA \in \eta$. Но тогда $[f^{-1}\operatorname{Int} fA] \in \hat{\xi}$. Итак $\hat{\xi}$ — κ-ультрафильтр, а следовательно, нить в $\Psi(X)$.

215. Из 214 гл. VI видно, что $\hat{\xi}$ — нить в семействе $\Psi(Y)$. Надо теперь только доказать, что $\bigcap\{[f^{-1}(\operatorname{Int} B)]: B \in \eta\} \neq \Lambda$. Так как η — отмеченная нить в $\Psi(Y)$, то $\bigcap\{B: B \in \eta\} \neq \Lambda$ и состоит ровно из одной точки, которую обозначим через y_0. Рассмотрим бикомпактное множество $f^{-1}y_0$. Так как $y_0 \in B$ для любого $B \in \eta$ и имеет место равенство $f[f^{-1}(\operatorname{Int} B)] = B$, то $F_B = f^{-1}y_0 \cap [f^{-1}(\operatorname{Int} B)] \neq \Lambda$ для любого $B \in \eta$. Легко видеть, что система $\{F_B: B \in \eta\}$ центрирована и состоит из бикомпактных множеств. Значит, $\bigcap\{F_B: B \in \eta\} \neq \Lambda$, а следовательно, $\bigcap\{[f^{-1}(\operatorname{Int} B)]: B \in \eta\} \neq \Lambda$.

216. Следует из задач 213 и 214 гл. VI.

217. Следует из задач 213, 214, 215, 216 гл. VI.

218. (а) В задаче 217 гл. VI доказано, что $\hat{f}$ — взаимно однозначное отображение $\hat{X}$ на $\hat{Y}$. Пусть $(A_0) = (\xi \in \hat{X}: A_0 \in \xi)$ — один из базисных замкнутых в $\hat{X}$ (см. 192 гл. VI), которое не только открыто, но и замкнуто в $\hat{X}$. Множество fA_0 каноническое замкнутое в Y (см. 110 гл. VI). Рассмо-

трим базисное в $\hat{Y}$ множество $\{A_\alpha\} = \{\eta : \hat{Y}: fA_\alpha \in \eta\}$. Тогда имеет место равенство $\hat{f}\{A_\alpha\} = \{A_\alpha\}$. Действительно, если $\xi \in \{A_\alpha\}$, то $A_\alpha \in \xi$, следовательно, $fA_\alpha \in \hat{f}\xi$, т. е. $\hat{f}\xi \in \{fA_\alpha\}$. Обратно, если $\eta \in \{fA_\alpha\}$, то $fA_\alpha \in \eta$, а тогда $[f^{-1}(\mathrm{Int}\, fA_\alpha)] = A_\alpha$, т. е. $A_\alpha \in \xi$, где $\xi = \{[f^{-1}(\mathrm{Int}\, B)]: B \in \eta\}$. Но $\xi \in \hat{X}$ и $\hat{f}\xi = \eta$, значит, $\xi = \hat{f}^{-1}\eta \in \{A_\alpha\}$.

Так как множества вида $\{A\}$, $A \in \mathfrak{B}(X)$, образуют базу в $\hat{X}$, множества вида $\{B\}$, $B \in \mathfrak{B}(Y)$,— базу в $\hat{Y}$, а каждое $B \in \mathfrak{B}(Y)$ является образом при f некоторого, притом единственного, $A \in \mathfrak{B}(X)$, то, учитывая только что доказанное равенство, получаем топологичность отображения $\hat{f}$.

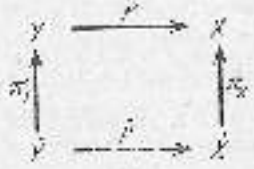
(б) Пусть $\xi \in \hat{X}$. Тогда $\hat{f}(\xi) = \{fA: A \in \xi\}$, а $\hat{\pi}_Y(\hat{f}\xi) = \bigcap\{fA: A \in \xi\} = \{y_0\}$, где y_0 — та единственная точка из Y, которая принадлежит всем fA одновременно. С другой стороны, $\pi_X(\xi) = \bigcap\{A: A \in \xi\}$ и $f(\pi_X(\xi)) = f(\bigcap\{A: A \in \xi\}) \subset \bigcap\{fA: A \in \xi\} = \{y_0\}$. Но так как пересечение $\bigcap\{A: A \in \xi\}$ состоит ровно из одной точки, то $f(\pi_X(\xi)) = y_0$. Итак, $\pi_Y(\hat{f}\xi) = f(\pi_X(\xi))$. Утверждение (б) доказано.

248. (а) доказывается дословно так же, как (б) в задаче 218 гл. VI. Так же, как и (а) в задаче 218 гл. VI, доказывается утверждение (б) данной задачи. Заметим только, что $\hat{f}$, вообще говоря, не является отображением сна, как f, вообще говоря, несовершенно. Утверждение (в) доказывается так же, как и утверждение (а) в задаче 248 гл. VI. При этом прежде всего надо заметить, что $\hat{f}$ — всюду определенное отображение сна (см. 216, 217 гл. VI), и надо доказать равенство $\hat{f}(\overline{A}) = \overline{\hat{f}(A)}$ для любого канонического замкнутого множества.

220. Действительно, расширения Стоуна — Чеха $\beta\hat{X}$, $\beta\hat{Y}$ пространств $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ совершенно соответственно с пространствами $E(X)$ и $E(Y)$ (см. 204 гл. VI), и поэтому 219 гл. VI пространства $E(X)$ и $E(Y)$ гомеоморфны.

221. Существование абсолюта у регулярного пространства X было там доказано (см. 204, 205 гл. VI): абсолютом пространства X является пространство $\hat{X}$ всех отмеченных нитей в семействе $\mathfrak{A}(X)$ всех канонических покрытий пространства X. Напомним, что $\hat{X}$ — единственный абсолют пространства X. Пусть Y — также абсолют пространства X. Тогда существует (по определению абсолюта) совершенное непрерывное отображение f пространства Y на X: $f: Y \to X$.

Рассмотрим пространство $\hat{Y}$ и натуральное отображение $\pi_X: \hat{X} \to X$. Рассмотрим также семейство $\mathfrak{A}(Y)$ всех канонических покрытий пространства Y, пространство $\hat{Y}$ всех отмеченных нитей в семействе $\mathfrak{A}(Y)$ и натуральное отображение $\pi_Y: \hat{Y} \to Y$. Теперь рассмотрим гомеоморфизм $\hat{f}: \hat{Y} \to \hat{X}$ на все $\hat{X}$, порожденный отображением $f: Y \to X$ (см. 217, 218 гл. VI). Тогда (см. 218 гл. VI) коммутативна следующая диаграмма:



Так как Y — абсолют пространства X, а $\hat{Y}$ — совершенный непрерывный прообраз пространства Y (например, при натуральном отображении π_Y), то, по определению абсолюта, пространство $\hat{Y}$ гомеоморфно Y: $\hat{Y} \approx Y$.

С другой стороны, $\hat{f}$ — гомеоморфизм сна, следовательно, $\hat{Y} \approx \hat{X}$. Значит, $Y \approx \hat{X}$, что и требовалось доказать.

Остается заметить, что в силу только что доказанного и задачи 204, 205 гл. VI, абсолют всякого регулярного пространства — вполне регулярное экстремально связное пространство.

224. Пусть X и Y совместны, т. е. мы рассмотрим их общий абсолют Z. По определению абсолюта, существуют совершенные непрерывные отображения $p_X: Z \to X$ и $p_Y: Z \to Y$. Обратное утверждение получается из задачи 223 гл. VI.

226. Рассмотрим натуральные отображения $\pi_X: \hat{X} \to X$, $\pi_Y: \hat{Y} \to Y$ и $\pi_Z: \hat{Z} \to Z$. Рассмотрим также гомеоморфизмы $f: \hat{X} \to \hat{Y}$, $g: \hat{Z} \to \hat{Y}$, порожденные соответственно отображениями f и g. Вследствие задачи 218 гл. VI, следующие диаграммы коммутативны:



Так как Z экстремально несвязно, то отображение π_Z — гомеоморфизм. Положим $h = \pi_Z^{-1} g^{-1} f \pi_X$. Понятно, что h — искомое отображение.

227. Действительно, пусть $k_1: \beta X \to b_1 X$, $k_2: \beta X \to b_2 X$ — естественные отображения расширения Стоуна — Чеха βX на соответствующие экстремально связные пространства $b_1 X$ и $b_2 X$ (см. 22 гл. IV). Ясно, что k_1 и k_2 — непрерывные совершенные отображения. Отсюда следует, что $b_1 X$ совместно с βX и $b_2 X$ совместно с βX (см. 223 гл. VI), и значит, $b_1 X$ и $b_2 X$ совместны.

228. Вследствие 113 гл. VI продолжение $\hat{f}: \beta X \to \beta Y$ отображения $f: X \to Y$ на расширения Стоуна — Чеха этих пространств непрерывно. Тогда βA и βY совместны (см. 223 гл. VI). Далее, βX совместно с любым вполне регулярным расширением γA пространства A, так же как и βY совместно с любым вполне регулярным расширением cY пространства Y (см. 227 гл. VI). Вследствие совместности βX и βY совместны γX и cY.

229. Действительно, пусть $\pi_X: \hat{X} \to X$ — совершенное непрерывное отображение абсолюта $\hat{X}$ пространства X на пространство X. Пространство $\hat{X}$ экстремально несвязно, значит, экстремально несвязно его расширение $\beta\hat{X}$ Стоуна — Чеха (см. 193 гл. VI).

Рассмотрим продолжение $\pi_X: \beta\hat{X} \to \beta X$ отображения $\pi_X: \hat{X} \to X$ на расширения $\beta\hat{X}$, βX Стоуна — Чеха пространств $\hat{X}$ и X. Отображение $\overline{\pi}_X$ является продолжением совершенного непрерывного отображения π_X, значит (см. 113 гл. VI), само непрерывно (и, конечно, совершенно). Поэтому экстремально несвязное пространство $\beta\hat{X}$ допускает совершенное непрерывное отображение $\overline{\pi}_X$ на пространство βX, которое (см. 222 гл. VI) $\beta\hat{X}$ является абсолютом пространства βX, т. е. $\beta\hat{X} = (\beta X)^\wedge$. Утверждение доказано.

230. Действительно, для счетных компактов X и Y являются бикомпактными расширениями натурального ряда N: $X = k_1N$, $Y = k_2N$. Далее см. задачи 225, 229, 153 гл. VI.

231. Нет не обязан. Надо построить регулярное нормальное пространство и его совершенное непрерывное отображение на паракомпактное пространство. См. Мищенко [2].

232. Нет, вообще говоря, не следует. Возьмем какое-нибудь регулярное не вполне регулярное пространство Y (см. 9 гл. III). Абсолют $\hat{Y}$ любого регулярного пространства Y обязан быть вполне регулярным пространством (см. 200 гл. VI); т. е. любое регулярное пространство совбсолютно с некоторым вполне регулярным пространством, а именно, со своим „абсолютом“.

233. Следует из того, что абсолюты $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ этих пространств гомеоморфны, что X и Y связаны соответственно с X и Y совершенными (даже непреводимыми) отображениями, и на того, что указанные в условии задачи топологические свойства инвариантны при совершенных отображениях как при переходе к образу, так и при переходе к прообразу (см. 48, 50, 57, 58, 59 гл. VI и 91, 203 гг. III).

234. (а) Абсолют $\hat{X}$ бикомпактного бикомпакта X бикомпактен, экстремально несвязен и бикомпактен. Задача эта, сводится на задачу 171 гл. VI.

(б) Рассмотрим произвольный счетный компакт X. Для него (см. 230 гл. VI) абсолют $\hat{X}$ гомеоморфен расширению Стоуна — Чеха βN натурального ряда. Далее остается сослаться на задачу 53 гл. IV.

235. Пусть σ — π-база пространства X. Так как f замкнуто и непрерывно, то (см. 108 гл. VI) множество $f^{\#}U = \{y \in Y: f^{-1}y \subset U\} = Y \setminus f(X \setminus U)$ вполне и открыто в Y, если U открыто в X. Легко видеть, что система $f^{\#}\sigma = \{f^{\#}U: U \in \sigma\}$ есть π-база пространства Y. Отсюда получаем $\pi w Y \leqslant \pi w X$.

Пусть теперь σ — π-база пространства Y. Рассмотрим систему $\tau = \{f^{-1}V: V \in \sigma\}$. Все множества этой системы открыты. Пусть $U \subset X$ — произвольное открытое в X множество. Рассмотрим вполне открытое в Y множество $f^{\#}U$ (см. 108 гл. VI). Найдется такое $V \in \sigma$, что $V \subset f^{\#}U$ (так как σ — π-база пространства Y). Тогда $f^{-1}V = f^{-1}f^{\#}U \subset U$ и $f^{-1}V \in \tau$. Из доказанного следует, что $\pi w X \leqslant \pi w Y$. Сославшись вместе оба неравенства, получаем требуемое равенство $\pi w X = \pi w Y$.

236. Следует из задач 235 и 224 гл. VI.

237. (а) Пусть бикомпакт X совбсолютен с некоторым компактом Y. Тогда $\pi w X = \pi w Y$ (см. 236 гг. VI), но $\pi w Y \leqslant w Y \leqslant \aleph_0$ (даже $\pi w Y = w Y$, ибо Y — компакт, см. 213 гл. II и 257 гл. III), откуда $\pi w X \leqslant \aleph_0$.

(б) X — бикомпакт и $\pi w X \leqslant \aleph_0$. Тогда (см. 326 гл. III) существует компакт Y и непрерывное неприводимое отображение $f: X \to Y$ (которое автоматически совершенно). Из задачи 223 гг. VI следует, что X и Y совбсолютны.

238. Компакт X (так же, как и компакт Y) является совершенным непрерывным образом некоторого совершенного множества C (см. 303 гл. III). Далее см. 224 гл. VI.

239. Пусть X — бикомпакт, $\pi w X \leqslant \aleph_1$ и X не имеет изолированных точек. Надо доказать, что X совбсолютен с канторовым совершенным множеством. Вследствие того, что $\pi w X \leqslant \aleph_1$, существует компакт Y и совершенное непреводимое отображение $f: X \to Y$ (см. 326 гг. III). Так как X не имеет изолированных точек, а отображение f совершенно и непреводимо, то и Y не имеет изолированных точек (см. 111 гл. VI). Из задачи 223 гл. VI следует совбсолютность пространств X и Y, а из задачи 238 гл. VI — совбсолютность компакта Y и канторова совершенного множества C. Итак, X совбсолютен с канторовым совершенным множеством C.

Пусть бикомпакт X совбсолютен с канторовым совершенным множеством C. Прежде всего заметим, что $\pi w X = \pi w C = \aleph_1$ (см. 236 гг. VI). Теперь надо воспользоваться задачами 226, 111 гл. VI.

240. Очевидно, в силу 224 гл. VI, достаточно показать, что $s(X) = s(Y)$ и $c(X) = c(Y)$ для того случая, когда X и Y связаны совершенным непреводимым отображением $f: X \to Y$, $f(X) = Y$. Это вытекает из следующих элементарных предложений.

1) Если f непрерывно и $A \subset X$ плотно в X, то fA плотно в Y.

2) Пусть f замкнуто и непреводимо, $B \subset Y$ плотно в Y. Для каждого $y \in B$ зафиксируем $x_y \in f^{-1}y$. Тогда множество $A = \{x_y: y \in B\}$ плотно в X и $|A| = |B|$.

3) Если f непрерывно и $\gamma = \{V_\xi: \xi \in T\}$ — дизъюнктная система открытых в Y множеств, то система $f^{-1}\gamma = \{f^{-1}V_\xi: \xi \in T\}$ дизъюнктна и состоит из открытых в X множеств.

4) Если f замкнуто и непреводимо и ω — дизъюнктная система открытых в X множеств, то $f^{\#}\omega = \{f^{\#}U: U \in \omega\}$ — дизъюнктная система вполне открытых в Y множеств.

241. Если бикомпакт X совбсолютен с некоторым компактом, то $\pi w X \leqslant \aleph_1$ (см. 237 гг. VI). Следовательно, $s(X) \leqslant \aleph_1$, т. е. X сепарабелен. Обратно, пусть X — сепарабельный бикомпакт с первой аксиомой счетности. Пусть $A \subset X$, $|A| \leqslant \aleph_0$ и $[A]_X = X$. Для каждой точки $a \in A$ зафиксируем, пользуясь первой аксиомой счетности в X, счетную базу σ_a в этой точке. Положим $\sigma = \bigcup \{\sigma_a: a \in A\}$. Ясно, что $|\sigma| \leqslant \aleph_0$ и σ — система открытых в X множеств. Значит, $\pi w X \leqslant \aleph_1$. Следовательно (см. 237 гг. VI), X совбсолютен с некоторым компактом.

242. Следует из задачи 241 гг. VI. Надо только заметить, что совершенно нормальный бикомпакт удовлетворяет первой аксиоме счетности.

243. Из задачи 237 гг. VI следует, что π-вес X равен $\aleph_1$. Значит, в силу 327 гг. III, X имеет счетную базу, а потому метризуем. Дадим теперь доказательство второго утверждения задачи. Для всякого диадического бикомпакта число Суслина равно $\aleph_0$ (см. 168 гг. III), значит, $c(bY) = \aleph_0$. Следовательно, для плотного в bX подпространства X также $c(X) = \aleph_0$. Воспользуемся задачей 240 гг. VI, откуда получаем, что $c(Y) = \aleph_0$ (ибо Y совбсолютно с X, а $c(Y) = \aleph_0$). Так как Y метризуемо, то $c(Y) = \pi w Y = w Y = \aleph_0$ (см. 216, 217 гг. II). Значит, Y имеет счетную базу. Так как X совбсолютно с Y, то и $\pi w X = \aleph_0$ (см. 236 гг. VI). Но X плотно в bX, значит, и $\pi w(bX) = \aleph_0$. Отсюда заключаем (см. 327 гг. III), что $w(bX) = \aleph_0$, а значит, и $w X = \aleph_0$.

Третье утверждение доказано в задаче 167 гг. III. Дадим другое доказательство. Если X — бикомпакт с первой аксиомой счетности, то $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$ (см. 156, 213 гг. III), а значит, $w X \leqslant 2^{\aleph_0}$. Но диадический бикомпакт X веса $w X \leqslant 2^{\aleph_0}$ является непрерывным образом канторова дисконтинуума D^{τ} веса $2^{\aleph_0}$ (см. 324 гг. III). Известно, что D^{τ} имеет счетное всюду плотное множество (391 гг. II). Тогда и X сепарабельно (см. 282 гг. II). В силу 241, 237 гг. VI получим: $\pi w X \leqslant \aleph_1$. Тогда и $w Y \leqslant \aleph_0$ (см. 327 гг. III). Утверждение доказано.

244. См. задачи 329 гг. III и 223 гг. VI.

245. (а) Если во всякое открытое покрытие регулярного пространства X можно вписать локально конечное каноническое покрытие, — следовательно, локально конечное замкнутое покрытие, — то X паракомпактно (1:0 гл. V).

(б) Пусть A — паракомпакт в Ω — произвольное его открытое покрытие. Вписем в Ω локально конечное открытое покрытие ω. Пусть $(T, <)$ — вполне упорядоченное множество мощности, равной кратности покрытия ω. Занумеруем все элементы из ω элементами $\lambda \in T$. Пусть $\omega = \{U_\lambda: \lambda \in T\}$. Пользуясь задачей 13 гл. V, в покрытие ω впишем

тальное открытое покрытие $\omega' = \{U_t : t \in T\}$ (комбинаторно), чтобы $[U_t] = U_t$ для любого $t \in T$. Ясно, что ω' и замкнутое покрытие $\overline{\omega'} = \{[U_t] : t \in T\}$ локально конечны в X. Положим $V_0 = U_0$ и вообще

$$V_t = U_t \setminus \bigcup \{[U_{t'}] : t' \prec t\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что $\omega^0 = \{V_t : t \in T\}$ — дизъюнктная локально конечная в X система открытых множеств, вписанная в ω'. Легко также показать, что $\bigcup \omega^0 = \bigcup \{V_t : t \in T\}$ — плотное в X множество. Тогда $\alpha = \{[V_t] : t \in T\}$ — локально конечное каноническое покрытие пространства X, вписанное в ω, а значит, и в Ω. Все доказано.

246. Пусть ω — произвольное открытое покрытие экстремально несвязного паракомпакта X. Впишем в ω (пользуясь задачей 245 гл. VI) локально конечное каноническое покрытие α. Пусть $A_1 \in \alpha$, $A_2 \in \alpha$ и $A_1 \neq A_2$. Тогда $\operatorname{Int} A_1 \cap \operatorname{Int} A_2 = \varnothing$ (вследствие каноничности α), следовательно (вследствие экстремальной несвязности X, см. 155 гл. VI), $[\operatorname{Int} A_1] \cap [\operatorname{Int} A_2] = \varnothing$, $[\operatorname{Int} A]$ открыто-замкнуто в X для любого $A \in \alpha$. Осталось заметить, что $[\operatorname{Int} A] = A$, ибо A — каноническое замкнутое множество.

Итак, α — дизъюнктное покрытие пространства X из открыто-замкнутых множеств, вписанное в ω.

247. Следует из того, что абсолют $\hat{X}$ паракомпакта X — паракомпакт (233 гл. VI) и экстремально несвязен (222 гл. VI). Тогда, вследствие задачи 246 гл. VI, абсолют $\hat{X}$ совершенно нульмерен. Всякое же совершенно нульмерное пространство сильно паракомпактно.

248. Нет, не обязательно. Возьмем паракомпакт X, не являющийся сильно паракомпактным пространством (см. 433 гл. VI). Его абсолют $\hat{X}$ совершенно нульмерен, значит, и сильно паракомпактен (см. 247 гл. VI). Кроме того, $\hat{X}$ и $\hat{X}$ связаны совершенным (даже неприводимым) отображением π_X: $\hat{X} \to X$, $\pi_X(\hat{X}) = X$.

250. Пусть ρ — метрика на X, причем полная, если X гомеоморфно полному метрическому пространству.

Для каждого $i \in \mathcal{N}^+$ рассмотрим такое открытое покрытие ω_i пространства X, чтобы $\operatorname{diam} U^i < \frac{1}{i}$ для любого $U^i \in \omega_i$. Так как метризуемое пространство X паракомпактно (45 гл. V), то, пользуясь задачей 245 гл. VI, для каждого $i \in \mathcal{N}^+$ возьмем локально конечное каноническое покрытие φ_i, вписанное в ω_i. Положим $\alpha_i = \varphi_i$ и вообще $\alpha_i = \varphi_i \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_i$, $i \in \mathcal{N}^+$ (определение на стр. 345). Тогда α_i — локально конечное каноническое покрытие для любого $i \in \mathcal{N}^+$, $\alpha_{i+1} > \alpha_i$ для любого $i \in \mathcal{N}^+$ и $\operatorname{diam} A^i < \frac{1}{i}$ для любого $A^i \in \alpha_i$, $i \in \mathcal{N}^+$. Значит, $\{\alpha_i : i \in \mathcal{N}^+\}$ — счетная нисходящаяся последовательность локально конечных канонических покрытий, полная, если ρ — полная метрика.

251. Решается аналогично задачам 193, 198, 199, 200, 202 гл. VI.

252. В силу 250 гл. VI в X существует нисходящаяся последовательность $\{\alpha_i : i \in \mathcal{N}^+\}$ локально конечных канонических покрытий, полная, если метрическое пространство X полно. Если вес X равен τ, то можно предположить, что $|\alpha_i| = |\alpha_{i+1}| = \tau$ для любого i. Далее остается сослаться на задачу 251 гл. VI.

ЛИТЕРАТУРА

Александров П. С.

1. О бикомпактных расширениях топологических пространств, Матем. сб. 5 (47) (1939), 403—424.
2. О мощности пространства в топологии, УМН 2, № 1 (1947), 5—57.
3. Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948.
4. О некоторых результатах в теории топологических пространств за последние 25 лет, УМН 15, № 2 (1960), 25—95.
5. On some results concerning topological spaces and their continuous mappings, General Topology and itsrelationstoModern Analysis and Algebra — Proceed. Symp., Prague, 1962, 41—54.
6. О некоторых основных направлениях в общей топологии, УМН 19, № 6 (1964), 3—46.

Александров П. С., Урысон П. С.

1. Мемуар о компактных топологических пространствах, «Наука», 1971.

Архангельский А. В.

1. Бикомпактные множества и топология пространств, Тр. Московск. матем. о-ва 13 (1965), 3—55.
2. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства, Матем. сб. 67 (109); № 1 (1965), 55—85.
3. О замкнутых отображениях, бикомпактных множествах и одной задаче П. С. Александрова, Матем. сб. 69 (111), № 1 (1966), 132—154.
4. Отображения открытые и близкие к открытым, Тр. Московск. матем. о-ва 15 (1966), 181—223.
5. Отображения и пространства, УМН 21, № 4 (1966), 181—223.
6. Экстремально несвязный бикомпакт веса с неоднороден, ДАН СССР 175, № 4 (1967), 751—754.
7. Аппроксимация теории диадических бикомпактов, ДАН СССР 184, № 4 (1969), 767—770.
8. О мощности бикомпактов, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, ДАН СССР 187, № 5 (1969), 967—970.
9. Число Суслина и мощность. Характеры точек в сепарабельных бикомпактах, ДАН СССР 192, № 2 (1970), 255—258.
10. О бикомпактах, которые удовлетворяют условию Суслина наследственно. Теснота и свободные последовательности, ДАН СССР 199, № 6 (1971), 1227—1230.
11. О топологических пространствах, полных в смысле Чеха, Вести. Московск. гос. ун-та, сер. матем., 1981, № 2, 37—40.

Архангельский А. В., Пономарев В. И.

1. О диадических бикомпактах, ДАН СССР 182, № 5 (1968), 993—996.

Архангельский А. В., Филиппов Б. В.

1. Пространства с базами конечного ранга, Матем. сб. 87 (129), № 2 (1973), 147—158.

Вайтман В. К.
1. Умножения на бикомпакты. ДАН СССР 207, № 2 (1972), 259—261.
Вельмин В. К.
1. Метрические расширения. I, II. Вестн. Московск. гос. ун-та, сер. матем., мех., 1970, № 4, 60—65; № 5, 7—14.
2. О метрических расширениях. ДАН СССР 207, № 5 (1972), 302.
Вересницкий Ю.
1. Неэквивалентность двух бикомпактов. Вестн. Московск. гос. ун-та, сер. матем., 1971, № 6, 8—10.
Берк (Burke D.)
1. On subparacompact spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969), 656—663.
Бинг (Bing R. H.)
1. Metrization of topological spaces. Canad. J. Math. 3, № 3 (1951), 175—186.
2. Challenging conjectures. Amer. Math. Monthly 74 (1967), 56—64.
Бинджес (Bingos C. J. R.)
1. On function spaces of stratifiable spaces and compact spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 17, № 5 (1966), 1074—1078.
Бурбаки Н.
1. Теория множеств. «Мир», 1965.
2. Общая топология (основные структуры). «Наука», 1968.
Викке (Wicke H. H.)
1. On Hausdorff open continuous images of Hausdorff paracompact p-spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 22, № 1 (1969), 136—140.
Владимиров Д. А.
1. Булевы алгебры. «Наука», 1969.
Владимиров Д. А., Ефимов Б. А.
1. О мощности экстремально несвязных пространств и полных булевых алгебр. ДАН СССР 195, № 6 (1970), 1247—1250.
Воррел (Worrell J. M.)
1. A characterization of metacompact spaces. Purdue Math. 25, № 3 (1968), 171—174.
2. The closed continuous images of metacompact topological spaces. Там же, 176—179.
Вудс (Woods R. Grant)
1. Co-absolutes of remainders of Stone—Čech compactifications. Pacif. J. Math. 37, № 2 (1971), 545—560.
Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.
1. Коммутативные нормированные кольца. Физматгиз, 1960.
Гиллман, Джерисон (Gillman L., Jerison M.)
1. Rings of continuous functions. N. Y., 1960.
Грейс, Хит (Grace E. E., Heath R. W.)
1. Separability and metrizability in pointwise paracompact Moore spaces. Duke Math. J. 31, № 4 (1964), 603—614.
Даукер (Dowker C. H.)
1. On countably paracompact spaces. Canad. J. Math. 3 (1951).
Джонс (Jones F. B.)
1. Concerning normal and completely normal spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1937), 671—678.
Ильин А. Г.
1. О k-разложимых пространствах, не являющихся максимально разложимыми, ДАН СССР 195, № 2 (1970), 274—277.
Ефимов Б. А.
1. Диадические бикомпакты. Тр. Московск. матем. о-ва 14 (1965), 211—247.
2. Об экстремально несвязных бикомпактах n-веса τ. ДАН СССР 183, № 3 (1968), 15—18.
3. Экстремально несвязные бикомпакты и абсолюты. Тр. Московск. матем. о-ва 23 (1970), 235—276.

Зайдел В. Н.
1. Finite spectra of topological spaces and their finite spaces. Math. Ann. 179 (1969), 153—178.
2. Проекционные спектры. Тр. Московск. матем. о-ва 27 (1972), 129—193.
Иванов С. Д., Фомин С. В.
1. Метод центрированных систем в теории топологических пространств. УМН 21, № 4 (1966), 47—76.
Избелл (Isbell J. R.)
1. Uniform spaces. Providence, R.I., 1964.
Исихата (Isiwata T.)
1. Mappings and spaces. Pacif. J. Math. 20 (1967), 455—480.
Катетов (Katětov M.)
1. Complete normality of cartesian products. Fundam. Math. 36 (1948), 271—274.
Кейслер, Тарский (Keisler H. J., Tarski A.)
1. From accessible to inaccessible cardinals. Fundam. Math. 53 (1964), 225—308.
Келли Дж. Л.
1. Общая топология. «Наука», 1968.
Кислинг (Keesling J.)
1. On the equivalence of normality and compactness in hyperspaces. Pacif. J. Math. 33 (1970), 657—667.
Колмогоров А. Н., Фомин С. В.
1. Элементы теории функций и функционального анализа. «Наука», 1968.
Комбаров А. П.
1. О Σ-произведениях топологических пространств. ДАН СССР 199, № 3 (1971), 526—528.
2. О произведениях нормальных пространств. Равномерность на Σ-произведениях. ДАН СССР 205, № 5 (1972), 1034—1036.
Комфорт (Comfort W. W.)
1. Retractions and their continuous maps from βX onto $\beta X \setminus X$. Trans. Amer. Math. Soc. 114, № 1 (1965), 1—9.
2. A survey of cardinal invariants. General Topology and its Applications 1, № 1 (1971), 163—199.
Комфорт, Негребецкис (Komfort W. W., Negrepontis S.)
1. Homeomorphs of three subspaces of $\beta N \setminus N$. Math. Z. 107, № 1 (1968), 53—58.
2. Some topological properties associated with measurable cardinals. Fundam. Math. 69, № 3 (1970), 181—205.
Корсон (Corson H. H.)
1. Normality in subsets of product spaces. Amer. J. Math. 81 (1959), 785—796.
Кофнер А. Н.
1. О псевдокомпактных пространствах. Fundam. Math. 70, № 1 (1971), 23—47.
Куратовский К.
1. Топология, т. I, «Мир», 1966; т. II, «Мир», 1969.
Ламан П. С.
1. О непрерывных разбиениях и замкнутых отображениях метрических пространств. ДАН СССР 165, № 4 (1965), 756—758.
2. О замкнутых образах метрических пространств. ДАН СССР 170, № 3 (1966), 505—507.
Майкл (Michael E.)
1. A note on paracompact spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 831—838.
2. Another note on paracompact spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 822—828.
3. $\aleph_0$-spaces. J. Math. Mech. 15 (1966), 983—1002.

4. Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152—182.
5. Continuous selections. I, Ann. Math. 63 (1956), 361—382.
6. Biquotient maps and cartesian products of quotient maps, Ann. Inst. Fourier 18, № 2 (1968), 287—302.
7. A quintuple quotient quest, General Topology and its Applications 2 (1972), 91—138.

Майкл, Стоун (Michael E., Stone A. H.)
1. Quotients of the spaces of rationals, Pacif. J. Math.

Малыхин В.
1. О счетных пространствах, не имеющих бикомпактификации слабой плотности, ДАН СССР 206, № 6 (1972), 1293—1298.
2. Произведения ультрафильтров и параллельные пространства, Матем. сб. 80, № 1 (1972), 100—118.

Мищенко А. С.
1. О финально компактных пространствах, ДАН СССР 145 (1962), 1224—1227.
2. Пример непрерывного совершенного отображения нормального пространства на нормальное, УМН 18, № 5 (1963), 121—126.
3. Некоторые теоремы о произведениях топологических пространств, Fundam. Math. 58 (1966), 259—284.

Морита (Morita K.)
1. Paracompactness and products spaces, Fundam. Math. 50, № 3 (1962), 223—236.
2. Products of normal spaces with metric spaces, Math. Ann. 154 (1964), 356—382.
3. A survey of the theory of M spaces, General Topology and its Applications 1 (1971), 49—55.

Мрувка (Mrówka S.)
1. Some properties of Q-spaces, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5 (1957), 947—950.
2. On E-compact spaces II, Bull. Acad. Polon. Sci. 14, № 11 (1966), 597—605.

Нагами (Nagami K.)
1. Σ-spaces, Fundam. Math. 65 (1969), 169—192.

Нагата (Nagata J.)
1. Mappings and M-spaces, Proc. Japan Acad. 45, № 1 (1969), 140—144.

Надимара М. А.
1. Порядковые политы, «Наука», 1988.

Негрепонтис (Negrepontis S.)
1. The existence of certain uniform ultrafilters, Acta. Math. 76, № 1 (1968), 23—32.

Недев С. П.
1. О-метризуемые пространства, Тр. Московск. матем. о-ва 24 (1971), 201—236.

Окуяма (Okuyama A.)
1. Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product spaces, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sec. A 9 (1967), 236—254.
2. A survey of the theory of σ-spaces, General Topology and its Applications 1 (1971), 57—63.

Оул (Aull C. E.)
1. Topological spaces with a σ-point-finite base, Proc. Amer. Math. Soc. 28, № 2 (1971), 411—416.

Пароменко М. М.
1. Об универсальном бикомпакте веса $\aleph_0$, ДАН СССР 150 (1963), 36—39.

Пасынков Б. А.
1. О почти метризуемых группах, ДАН СССР 161, № 2 (1965), 281.
2. Об открытых отображениях, ДАН СССР 175, № 3 (1967), 292—295.
3. Частичные произведения, Тр. Московск. матем. о-ва 13 (1965), 136—245.

Пелчинский (Pełczyński A.)
1. A remark on spaces 2^X for zero-dimensional X, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. 13, № 2 (1965), 85—88.

Пономарев В. И.
1. Новое пространство замкнутых множеств и многозначно непрерывные отображения бикомпактов, Матем. сб. 46, № 2 (1958), 191—212.
2. О пространствах, сообщимых с метрическими, УМН 21, № 4 (1966), 101—132.
3. О метризуемости финально компактного p-пространства с точечно счетной базой, ДАН СССР 174, № 6 (1967), 1274—1277.
4. О локально-конечных покрытиях и открыто-замкнутых множествах, ДАН СССР 186, № 5 (1969), 1018—1019.
5. О мощности бикомпактов с первой аксиомой счетности, ДАН СССР 196, № 2 (1971), 296—298.

Поточны (Potoczny H. B.)
1. A nonparacompact space which admits a closure-preserving cover of compact sets, Proc. Amer. Math. Soc. 32, № 1 (1972), 309—311.

Рабхорст А. Е.
1. Экстремально несвязные пространства с единственным гомеоморфизмом на себя, ДАН СССР 193, № 3 (1970), 562—563.

Рой (Roy P.)
1. Separability of metric spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 149, № 1 (1970), 19—43.

Рудин М. (Rudin M. E.)
1. Partial orders on the types in βN, Trans. Amer. Math. Soc. 155, № 2 (1971), 353—387.
2. A normal space X for which $X \times I$ is not normal, Fundam. Math. 73 (1971), 179—186.

Рудин У. (Rudin W.)
1. Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications, Duke Math. J. 23, № 3 (1956), 409—423.

Серпинский (Sierpiński W.)
1. Cardinal and ordinal numbers, Warszawa, 1958.

Седор (Ceder J. G.)
1. Some generalizations of metric spaces, Pacif. J. Math. 11 (1961), 105—126.

Сикорский (Sikorski R.)
1. Булевы алгебры, «Мир», 1969.

Сирота С.
1. Произведение топологических групп и экстремальная несвязность, Матем. сб. 79, № 2 (1969), 179—192.

Скляренко Е. Г.
1. Некоторые вопросы теории бикомпактных расширений, НАН СССР, сер. матем., 26 (1962), 427—452.

Слот (Slot J., van der)
1. Universal topological properties, Stichting Math. Centrum, Afdeling Zuivere Wiskunde, Amsterdam, ZW-1966-011 (1966), 1—9.

Смирнов Ю. М.
1. О связи паракомпактных пространств, НАН СССР, сер. матем. 20 (1956), 253—274.
2. Умножение на бикомпакты и связь с бикомпактными расширениями и регулярностью, Fundam. Math. 63 № 2 (1969), 189—211.

Стоун (Stone A. H.)
1. Paracompactness and product spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 977—982.
2. Metrizability of decomposition spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 690—700.
3. Non-separable Borel sets. Rozprawy Mat. 28 (1962), 3—40.
4. Non separable Borel sets II. General Topology and its Applications 2 (1972), 249—270.
Тамано (Tamano H.)
1. On paracompactness. Pacif. J. Math. 10 (1960), 1043—1047.
Урысон П. С.
1. Труды по топологии и другим областям математики, тт. 1, 2, Изд. АН СССР, 1951.
Федорчук В. В.
1. Совершенно вполне замкнутые отображения и обобщенные близости, Матем. сб. 76 (118), № 4 (1968), 542—556.
2. Некоторые вопросы теории упорядоченных пространств. Сиб. матем. ж. 10, № 1 (1969), 172—187.
3. Об H-замкнутых расширениях пространств в близости. Матем. сб. 89, № 3 (1972), 400—412.
Филиппов В. В.
1. О совершенном образе паракомпактного перистого пространства. ДАН СССР 176, № 3 (1967), 533—536.
2. Факторпространства и кратность базы. Матем. сб. 90 (122), № 4 (1969), 531—532.
3. О совершенно нормальных бикомпактах. ДАН СССР 189 (1969), 36—39.
4. О перистых паракомпактах. ДАН СССР 179, № 3 (1968), 555—558.
Фреше А., Вар-Хилдеб Н.
1. Основания теории множеств. «Мир», 1969.
Фролик (Frolik Z.)
1. Applications of complete families of continuous functions to the theory of Q-spaces. Чехослов. матем. ж. 11 (86) (1961), 115—133.
2. Sums of ultrafilters, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 87—91.
3. Homogeneity problems for extremally disconnected spaces. Comm. math. Univ. Carolinae 8, № 4 (1967), 757—763.
Хайнал, Юхас (Hajnal A., Juhasz I.)
1. Discrete subspaces of topological spaces. Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet., Ser. A 70, № 3 (1967), 342—350.
2. Discrete subspaces of topological spaces II. Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet., Ser. A 72, № 1 (1969), 18—30.
Хаусдорф (Hausdorff F.)
1. Теория множеств. ОНТИ, 1937.
2. Erweiterung einer Homöomorphie, Fundam. Math. 16 (1930), 359—360.
3. Summen von $\aleph_1$ Mengen, Fundam. Math. 26 (1936).
Хенриксен, Айселл (Henriksen M., Isbell J. R.)
1. Some properties of compactifications. Duke Math. J. 25, № 1 (1958), 83—106.
Хит (Heath R. W.)
1. Separability, pointwise paracompactness and metrization of Moore spaces. Canad. J. Math. 16 (1964), 763—770.
2. On spaces with point countable bases. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math., 13, № 6 (1965), 393—395.
3. Semi-metric spaces and related spaces. Proc. Arizona Topolog. Conference, Tempe (Arizona), 1968, 153—161.
Хьюитт (Hewitt E.)
1. A note on 0-dimensional compact groups, Fundam. Math. 50, № 1 (1961), 95—97.

Чех (Čech E.)
1. Topological spaces. Prague, 1959.
Чех, Поспишил (Čech E., Pospíšil B.)
1. Sur les espaces compacts, Publ. de la fac. de univ. Masaryk, Brno. 258 (1938), 1—14.
Чобан М. М.
1. О поведении метризуемости при факторных s-отображениях, ДАН СССР 166 (1966), 562—565.
2. Некоторые метризационные теоремы для перистых пространств, ДАН СССР 173 (1967), 1270—1272.
3. О σ-паракомпактных пространствах, Вестн. Московск. гос. ун-та, сер. матем., мех., 1969, № 4, 20—27.
4. К теории p-пространств, ДАН СССР 194, № 3 (1970), 528—531.
5. Многозначные отображения и борелевские множества. Тр. Московск. матем. о-ва, 22 (1971), 229—250; 23 (1972), 277—301.
Шапиро Н. А.
1. О произведении топологических пространств, Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 24 (1948).
Шапировский П.
1. О сепарабельности и метризуемости пространств с условием Суслина, ДАН СССР 207, № 4 (1972).
2. О дискретных подпространствах компактических пространств, Вес. теории к числу Суслина, ДАН СССР 202, № 4 (1972), 779—782.
3. О плотности топологических пространств, ДАН СССР 206, № 3 (1972), 558—562.
Энгелькинг (Engelking R.)
1. Cartesian products and dyadic spaces, Fundam. Math. 58 (1965), 287—304.
2. On functions defined on Cartesian products, Fundam. Math. 59 (1966), 221—231.
3. On closed images of the space of irrationals. Proc. Amer. Math. Soc. 21, № 2 (1969), 583—586.
4. Outline of General Topology, Amsterdam, 1968.
Эрдёш, Радо (Erdös P., Rado R.)
1. A partition calculus in set theory, Bull. Amer. Math. Soc. 62 (1956), 427—489.
Юхас (Juhasz I.)
1. Cardinal functions in topology, Math. Centre Tract. 34, Amsterdam (1971).
2. On two problems of A. V. Archangelski, General Topology and its Applications 2 (1972), 151—156.

Александр Екатеринович Артемьевский
Дмитрий Филиппович Шестопалов

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ
В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

М., 1979 г., 424 стр. с илл.

Редактор З. В. Донченко, Н. Д. Филиппова
Технический редактор В. Н. Кондакова
Корректор Г. В. Антонова

Сдано в набор 2/I 1979 г. Подписано к печати 21/VI 1979 г.
Бумага 84×108 1/32. Физ. печ. л. 26,5. Условн. печ. л. 44,52.
Уч.-изд. л. 44,94. Тираж 4 070 экз. Т-11283.
Цена книги 2 р. 32 к. Заказ № 668

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Орденов Трудового Красного Знамени Калининский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Москва, К-1, Трехгорный вал, 9.

2p. 41r.