ПОВТОРИМ МАТЕМАТИКУ



ШУВАЛОВА Э. З., АГАФОНОВ Б. Г., БОГАТЫРЕВ Г. И.

ПОВТОРИМ МАТЕМАТИКУ

Рекомендовано Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве пособия для поступающих в вузы

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва 1972

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI
DENOV FILIALI ARM
№ 2806

УДК 810
Ш—952

АННОТАЦИЯ

Учебное пособие рассчитано на лиц, уже имеющих законченное среднее образование и готовящихся к поступлению в технические высшие учебные заведения либо самостоятельно, либо в системе подготовительных курсов.

Теоретический материал иллюстрируется большим количеством примеров и задач средней и повышенной трудности. По возможности эти задачи и методы их решений систематизированы.

В книге имеется 187 рисунков.

Шувалова Э. З., Агафонов Б. Г., Богатырев Г. И.

Повторим математику

Редактор *А. М. Сидоренко*
Художник *В. К. Васильева*
Технический редактор *Н. А. Бабенко*
Корректор *Л. А. Егорова*

Т—14404 Сдано в набор 18/IX 1967 г. Подп. к печати 17/IX-68 г.
Формат 60×90 1/16 Объем 28 печ. л. Уч.-изд. л. 28,0.
Изд. № ФМ-311 Тираж 200 000 экз. Цена 76 к.

Б3—60/3 от 28/VIII 68 г.

Москва, К-51, Неглинная, ул., д. 29/14
Издательство «Высшая школа»

Отпечатано с матриц типографии изд-ва *МГУ*. Москва, Ленинские горы на Саратовском полиграфкомбинате Росглавполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Саратов, ул. Чернышевского, 59.
Заказ № 956.

2—2—2
Б3—60/3—68

ПРЕДИСЛОВИЕ

Это пособие предназначено для тех, кто уже прошел курс элементарной математики в объеме программы средней школы и хочет повторить алгебру и тригонометрию.

Очевидно, что изложение такого повторительного курса должно быть несколько иным, чем в учебниках и учебных пособиях, написанных для средней школы. Это и имели в виду авторы, когда допускали ссылки в начальных главах на последующее. Так, например, в главе 1-й использовалась формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, данной лишь в 5-й главе, в главе 9-й использовались формулы главы 10-й и т. д.

Помимо материала, входящего в обязательную программу приемных экзаменов, даны и некоторые дополнительные сведения. В пособии они приведены мелким шрифтом.

Главы 1 и 2 написаны Г. И. Богатыревым, главы 3, 4, 10, 11, 15 — Б. Г. Агафоновым, главы 5—9, 12—14 — Э. З. Шуваловой.

Авторы выражают глубокую благодарность Р. С. Гутеру, очень внимательно прочитавшему рукопись и давшему много ценных замечаний, которые были учтены в процессе работы над пособием.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим некоторые важные математические понятия:

1. **Доказательство от противного.** Пусть A — условие теоремы, т. е. то, что предполагается данным, а B — ее заключение, т. е. то, что требуется доказать. Тогда теорема схематически записывается в виде $A \to B$ и читается так: «из A следует B».

Метод доказательства от противного теоремы $A \to B$ состоит в следующем. Предполагается противное (противоречивое) искомому B положение $\overline{B}$. Если на основании сделанного предположения $\overline{B}$ и условия A удастся получить некоторое неверное утверждение, то положение $\overline{B}$ не имеет места, т. е. справедливо B и тем самым теорема $A \to B$ доказана.

2. **Необходимость и достаточность.** Пусть B — какое-либо положение, A — некоторое условие.

A называется *необходимым* условием для B, если из B вытекает A: $B \to A$.

A называется *достаточным* условием для B, если из A следует B: $A \to B$.

Всякую теорему можно сформулировать с помощью терминов «необходимо», «достаточно».

A называется *необходимым и достаточным* условием для B, если $B \to A$ и одновременно $A \to B$.

Термин «необходимо и достаточно» можно заменить выражениями «если и только если», «тогда и только тогда».

Поясним понятия «необходимости» и «достаточности» на примерах.

Пример 1. Четность числа есть необходимый признак делимости на 4.

Здесь A — четность числа, B — его делимость на 4. Очевидно, что $B \to A$. Однако из A не следует B (так, четное число 6 не делится на 4). Поэтому четность числа — необходимое, но не достаточное условие делимости на 4.

Пример 2. Достаточным условием делимости на 4 (положение B) является следующий признак: число оканчивается двумя нулями (условие A).

В самом деле, из A следует B (см. гл. I, § 1). Однако из B не вытекает A (так, число 24 делится на 4, но не оканчивается двумя нулями). Поэтому условие A только достаточное; необходимым для B оно не является.

Пример 3. Для делимости на 3 (B) необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр числа делилась на 3 (A).

В самом деле, здесь справедливы два утверждения: если число делится на 3 (B), то и сумма его цифр делится на 3 (A), т. е. $B \to A$ (необходимость), и обратно — если сумма цифр числа делится на 3 (A), то и само число делится на 3 (B), т. е. $A \to B$ (достаточность).

Доказательство приведено в гл. I, § 1.

3. **Метод математической индукции.** Пусть некоторое утверждение зависит определенным образом от натурального числа n, которое принимает все значения, начиная от данного p (p — натуральное число или $p=0$).

Принимается следующий принцип. *Если:* а) *утверждение верно для* $n=p$ и б) *из справедливости этого утверждения для какого-нибудь натурального числа* $n=k$ *следует справедливость его и для следующего числа* $n=k+1$, *то утверждение справедливо для любого натурального* $n \geqslant p$.

На этом принципе основан метод математической индукции.

Чтобы доказать методом математической индукции, что некоторое утверждение верно для любого натурального $n \geqslant p$, надо:

а) проверить справедливость утверждения для $n=p$ и б) допустив справедливость этого утверждения для $n=k$, доказать справедливость его и для $n=k+1$. Только при одновременном выполнении а) и б) заключаем, что утверждение верно для любого $n \geqslant p$.

Часто наименьшим числом p, для которого верно утверждение, является число $p=1$.

ГЛАВА 1
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. НАТУРАЛЬНЫЕ И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Числа 1, 2, 3, ..., появившиеся в результате счета, называются *натуральными* числами. Совокупность чисел 0, ± 1, ± 2, ± 3, ... образует множество всех *целых* чисел.

Над целыми числами устанавливаются действия сложения и умножения, которые обладают следующими основными свойствами.

1. *Переместительное свойство сложения:* $a+b=b+a$*.
2. *Сочетательное свойство сложения:* $(a+b)+c=a+(b+c)$.
3. *Переместительное свойство умножения:* $a \cdot b=b \cdot a$.
4. *Сочетательное свойство умножения:* $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$.
5. *Распределительное свойство, связывающее сложение и умножение:*

$$(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c.$$

Основные свойства (законы арифметики) остаются справедливыми для любого конечного числа слагаемых и сомножителей.

Полагают $a+0=a$, $a \cdot 0=0$ при всех a.

Вычитание и деление определяются как действия, обратные сложению и умножению.

Число c называется *разностью* чисел a и b,

$$c=a-b,$$

если $b+c=a$. Вычитание всегда выполнимо и единственно, т. е. для любых a и b существует и притом единственная разность c.

Число q называется *частным* от деления a на b,

$$q=a:b \quad \text{или} \quad q=\frac{a}{b},$$

если $b \cdot q=a$. Деление не всегда выполнимо в множестве целых чисел.

Невозможно деление на нуль. Если $a \neq 0$, а $b=0$, то, очевидно, нет такого q, для которого $b \cdot q=a$. Если $a=b=0$, то q — любое. Поэтому деление на нуль не определено.

* Буквы a, b, c, ... обозначают целые числа.

Если для чисел a и b существует частное q, т. е. $bq=a$, то говорят, что a *делится на* b (или b делит a). При этом a называется *кратным* числа b (или делимым), а b — *делителем* числа a. Число называется четным, если оно делится на 2, и нечетным в противном случае. Нуль — четное число.

Для любых чисел a и b ($b>0$) справедливо следующее утверждение: *число a всегда можно представить и притом единственным образом в виде*

$$a=bq+r, \quad \text{где } 0\leqslant r<b, \tag{1}$$

Очевидно, что всякое целое число a представимо в виде (1). Покажем единственность такого представления.

Допустим, что $a=bq+r$ и также $a=bq_1+r_1$, где $0\leqslant r<b$ и $0\leqslant r_1<b$. Тогда

$$0=b(q-q_1)+(r-r_1),$$

и, следовательно, число r_1-r делится на b. Так как $0\leqslant r<b$ и $0\leqslant r_1<b$, то это возможно только при $r_1-r=0$, т. е. при $r_1=r$. Отсюда вытекает, что и $q_1=q$. Утверждение доказано.

Представление числа a в виде (1) называется *делением числа a на число b ($b>0$) с остатком*. При этом q называется *неполным частным*, а r — *остатком* от деления a на b.

Для натуральных чисел вводятся понятия простого и составного числа.

Определение. Натуральное число, не равное единице, называется *простым*, если оно делится только на себя и на единицу. Натуральное число, отличное от единицы и не являющееся простым, называется *составным*.

Единица — единственное число, которое не является ни простым, ни составным.

Доказано, что *всякое натуральное число, большее единицы, можно представить в виде произведения простых сомножителей и притом единственным способом (произведения, отличающиеся только порядком сомножителей, различными не считаются).*

Объединяя равные сомножители, получим

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}, \tag{2}$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$ — различные простые делители числа a, а α_1, α_2, ..., α_n — число их повторений в разложении числа a.

Представление (2) называется *каноническим разложением натурального числа на простые сомножители*.

Например, $72=2^3\cdot 3^2$, $17=17^1$.

Если $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$, то любой натуральный делитель d имеет вид

$$d=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_n^{\beta_n}, \tag{3}$$

где $0\leqslant\beta_1\leqslant\alpha_1$, $0\leqslant\beta_2\leqslant\alpha_2$, ..., $0\leqslant\beta_n\leqslant\alpha_n$ (равенство $\beta_i=0$ означает, что соответствующее основание p_i не содержится в разложении числа d).

В самом деле, пусть d делит a. Тогда $a=dq$. У чисел d и q могут оказаться равными их простые делители. Поэтому все простые делители числа d входят в каноническое разложение числа a с показателями, не меньшими тех, с которыми они входят в каноническое разложение d. Следовательно, d имеет вид (3), что и утверждалось.

Обратно, всякое число вида (3), очевидно, делит a.

Пример 1. Показать, что число различных положительных делителей числа $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$ (включая 1 и a) равно произведению

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1).$$

Решение. Каждый делитель числа a имеет вид (3), где β_1 принимает α_1+1 значений: 0, 1, 2, ..., α_1; β_2 независимо от β_1 принимает α_2+1 значений: 0, 1, 2, ..., α_2 и т. д. Каждой такой комбинации $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ соответствует один делитель числа a, причем различным комбинациям соответствуют различные делители (в противном случае у одного и того же числа существовали бы различные канонические разложения, что невозможно).

Число всех таких комбинаций, а значит и делителей числа a, равно произведению $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_n+1)$.

Например, число различных делителей $72=2^3\cdot 3^2$ равно $(3+1)(2+1)=12$. Каждый делитель 72 имеет вид $2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}$, где $\beta_1=0, 1, 2, 3$, $\beta_2=0, 1, 2$. Придавая β_1 и β_2 эти значения, получим все различные положительные делители числа 72:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8;\ 3,\ 6,\ 12,\ 24;\ 9,\ 18,\ 36,\ 72.$$

Определение. Всякое число, делящее одновременно числа $a, b, \dots, l$, называется их *общим делителем*. Наибольший из общих делителей называется *наибольшим общим делителем* и сокращенно обозначается НОД или символом $(a, b, \dots, l)$. *Если $(a, b, \dots, l)=1$, то числа $a, b, \dots, l$ называются взаимно простыми.*

Например, числа 6, 8, 15 взаимно простые, так как $(6, 8, 15)=1$.

Всякое число, которое делится на каждое из чисел $a, b, \dots, l$, называется их *общим кратным*. Наименьшее положительное общее кратное называется *наименьшим общим кратным* и сокращенно обозначается НОК.

Например, для чисел 24 и 36 НОД$=12$, НОК$=72$. Справедливы следующие свойства взаимно простых чисел.

1. Если число a делится на каждое из взаимно простых чисел, то оно делится и на произведение этих чисел. Например, если число делится на 3 и на 5, $(3, 5)=1$, то оно делится и на 15. Однако нельзя утверждать, что число, делящееся на 4 и на 6 $((4, 6)\neq 1)$, обязательно делится и на 24. Например, это неверно для 36.

2. Если произведение ab делится на c, где b и c — взаимно простые числа, то a делится на c.

Найдем НОД и НОК чисел a и b. С этой целью запишем их канонические разложения:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}, \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n},$$

где некоторые из α_k и β_k могут обращаться в нуль.

Согласно формуле (3) любой общий делитель чисел a и b имеет вид

$$p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_n^{\gamma_n}, \tag{4}$$

где каждое γ_k не превосходит чисел α_k и β_k.

Полагая в (4) каждое γ_k равным наименьшему из чисел α_k и β_k, получим наибольший общий делитель чисел a и b.

Очевидно, число вида (4) будет делиться одновременно на a и b, если в качестве каждого γ_k принять наибольшее из чисел α_k и β_k. Оно является наименьшим натуральным числом, делящимся на a и b, т. е. является НОК чисел a и b. Аналогично находится НОД и НОК чисел $a, b, \dots, l$.

Пример 2. Найти НОД и НОК чисел 72 и 60.

Решение. Запишем для данных чисел их канонические разложения:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2, \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$$

тогда НОД $= 2^2 \cdot 3 = 12$, НОК $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

Из самого способа нахождения НОД и НОК вытекают следующие их свойства:

1. НОД чисел a и b делится на любой их общий делитель.

2. $\text{НОК} = \dfrac{ab}{\text{НОД}}$.

Практически при разложении числа на множители и нахождении НОД и НОК пользуются признаками делимости. Признаком делимости числа a на некоторое число b называется необходимое и достаточное условие делимости a на b.

Пусть N — делимое. В десятичной системе счисления натуральное число N записывается в виде

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0, \tag{5}$$

где a_0 — число единиц, a_1 — число десятков, a_2 — число сотен и т. д.

Рассмотрим признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 9.

Признак делимости на 2 и на 5. *На 2 (или на 5) делятся те и только те числа, цифра единиц которых выражает число, делящееся на 2 (или соответственно на 5).*

В самом деле, $N = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10) + a_0$. В скобках стоит число, кратное 10, и оно делится на 2 и на 5. Поэтому для делимости N на 2 (или на 5) необходимо и достаточно, чтобы на 2 (или соответственно на 5) делилось a_0.

Признак делимости на 4. *На 4 делятся те и только те числа, в которых две последние цифры выражают число, делящееся на 4.*

Утверждение вытекает из записи делимого в виде

$$N = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2) + (a_1 \cdot 10 + a_0).$$

Признак делимости на 3 и на 9. *На 3 (или на 9) делятся те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3 (или соответственно на 9).*

Для доказательства запишем делимое в виде

$$N = [a_n (10^n - 1) + a_{n-1} (10^{n-1} - 1) + \dots + a_1 (10 - 1)] + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0).$$

Очевидно, что число

$$10^k - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ цифр}}$$

делится на 3 и на 9. Поэтому для делимости N на 3 или на 9 необходимо и достаточно, чтобы число, стоящее в круглых скобках и равное сумме цифр числа N, делилось на 3 или на 9.

Признак делимости на 6. *На 6 делятся те и только те числа, которые одновременно делятся на 2 и на 3.* Это следует из свойства делимости числа на произведение взаимно простых чисел.

Отметим следующее свойство последовательных чисел. *Из n последовательных целых чисел*

$$a, \ a+1, \dots, a+n-1 \tag{6}$$

одно и только одно делится на n.

Действительно, если $a = nq$, то утверждение справедливо.

Пусть $a = nq + k$, где k одно из чисел

$$1, 2, \dots, n-1.$$

Тогда число $a + (n-k) = nq + k + (n-k) = n(q+1)$ находится среди чисел (6) и делится на n.

Среди чисел (6) нет других чисел, делящихся на n, так как в противном случае разность таких чисел, меньшая n, делилась бы на n, что невозможно.

Например, число $n^3 - n = (n-1)\,n\,(n+1)$ делится на 2, на 3, и, следовательно, на 6.

§ 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Определение. *Рациональным числом* называется выражение вида

$$\frac{a}{b}, \tag{7}$$

где a и b — целые, причем $b \neq 0$.

В частном случае, когда $b = 1$, полагают

$$\frac{a}{1} = a,$$

Таким образом, множество всех рациональных чисел содержит в себе как часть множество всех целых чисел.

Два рациональных числа (или дроби) $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ считаются равными,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

если $ad=bc$.

По определению $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, если $ad>bc$, и $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, если $ad<bc$ ($b>0$, $d>0$). Например, $\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$, так как $3\cdot 3>4\cdot 2$.

Из определения равенства двух дробей вытекает основное свойство дроби: *величина дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, т. е.*

$$\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}=\frac{a:n}{b:n}.$$

На этом свойстве основано сокращение дробей, т. е. деление числителя и знаменателя на их общий делитель, и приведение дробей к общему знаменателю.

Сложение и умножение дробей определяются по правилам:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

В связи с тем, что целое число есть частный вид рационального числа, возникает вопрос: не противоречат ли введенные действия сложения и умножения по этим формулам ранее известным операциям сложения и умножения целых чисел?

Если a и b — целые, то

$$a+b=\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\frac{a+b}{1};\quad a\cdot b=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1}=\frac{ab}{1},$$

т. е. противоречия нет.

Вычитание и деление дробей определяются как действия, обратные сложению и умножению. Из этого определения выводятся правила этих действий:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd},\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Для рациональных чисел сохраняются основные свойства арифметических действий над натуральными числами (см. § 1).

В частности, a и b целые, то $a:b=\frac{a}{1}:\frac{b}{1}=\frac{a}{b}$, т. е. всякое рациональное число есть результат деления целых чисел.

В множестве рациональных чисел деление всегда возможно, кроме деления на нуль.

Дробь вида

$$\frac{N}{10^n},\qquad (8)$$

где N — целое, n — натуральное число, называется *десятичной* дробью. Ее знаменатель — степень числа 10.

В отличие от дроби десятичной дробь (7) с каким угодно знаменателем называется *обыкновенной* или *простой*.

Всякая положительная десятичная дробь (при $N>0$) представима в виде суммы

$$a_m\cdot 10^m+a_{m-1}\cdot 10^{m-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0+\frac{b_1}{10}+\ldots+\frac{b_n}{10^n},\qquad (9)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — цифры.

Если $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$, то (9) есть целое число. При $a_m=a_{m-1}=\ldots=a_0=0$ дробь (9) называется *правильной* десятичной дробью. В общем случае, когда не все $a_0, a_1, \ldots, a_m$ и не все $b_1, b_2, \ldots, b_n$ равны нулю, дробь (9) называется *смешанной*.

Условились десятичную дробь (9) записывать также в виде

$$a_ma_{m-1}\ldots a_0,\ b_1b_2\ldots b_n \quad\text{или}\quad A,\ b_1b_2\ldots b_n,\qquad (10)$$

где $A=a_m\cdot 10^m+a_{m-1}\cdot 10^{m-1}+\ldots+a_0$ — целое число, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — десятичные знаки.

Так как (10) — иная запись суммы (9), то после b_n можно приписать любое число нулей, и величина дроби от этого не изменится.

Изображение десятичных дробей в виде (10) удобно для сравнения таких дробей и для выполнения действий над ними.

Наряду с десятичными дробями, которые в дальнейшем будем называть также конечными десятичными дробями, рассматриваются и так называемые бесконечные десятичные дроби.

Определение. *Бесконечной десятичной дробью*

$$A,\ b_1b_2\ldots b_n\ldots \qquad (11)$$

называется сумма

$$A+\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\ldots+\frac{b_n}{10^n}+\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}}+\ldots,$$

составленная из целого числа A и бесконечной последовательности цифр $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ (понятие последовательности см. в гл. V, § 1).

Частным случаем бесконечных десятичных дробей являются периодические дроби.

Определение. Бесконечные десятичные дроби вида

$$A,\ \underbrace{b_1b_2\ldots b_n}\ \underbrace{b_1b_2\ldots b_n}\ldots \qquad (11')$$

или вида

$$A,\ b_1b_2\ldots b_s\underbrace{b_{s+1}b_{s+2}\ldots b_{s+n}}\ \underbrace{b_{s+1}b_{s+2}\ldots b_{s+n}}\ldots \qquad (11'')$$

где одна или несколько цифр повторяются в неизменном порядке, называются *периодическими*. Совокупность повторяющихся цифр называется *периодом* такой дроби. При этом вместо записей (11′) и (11″) употребляют сокращенные записи $A,\ (b_1b_2\dots b_n)$ и

$$A,\ b_1b_2\dots b_k(b_{k+1}b_{k+2}\dots b_{k+n}).$$

Например,

$$0,131313\dots=0,(13),\quad 2,1444\dots=2,1(4).$$

Дробь вида (11′) называется *чистой периодической*, дробь вида (11″) — *смешанной периодической*.

Для простоты изложения будем рассматривать обыкновенные дроби с положительным числителем и знаменателем и положительные десятичные дроби, конечные и бесконечные.

Обрывая дробь (11) на каком-нибудь n-м десятичном знаке, получим тогда конечную десятичную дробь $A,\ b_1b_2\dots b_n$. С возрастанием n такая дробь не уменьшается, т. е. либо не изменяется, либо увеличивается.

Например, для дроби 0,15004 ... соответственно получаем

$$0,\ 1<0,15=0,150=0,1500<0,15004<\dots$$

Определение. Бесконечная десятичная дробь (11) считается *равной обыкновенной дроби*,

$$A,\ b_1b_2\dots b_n\dots=\frac{a}{b}, \tag{12}$$

если при всех n выполняется неравенство

$$0\leqslant\frac{a}{b}-A,\ b_1b_2\dots b_n\leqslant\frac{1}{10^n}*.$$

Таким образом, равенство (12) означает, что любая конечная десятичная дробь $A,\ b_1b_2\dots b_n$ даст приближение (с недостатком) к дроби $\frac{a}{b}$ с точностью до $\frac{1}{10^n}$.

В частности, отсюда следует, что все периодические дроби с периодом 9 равны соответствующим конечным десятичным дробям. Например,

$$0,(9)=1;\quad 4,12(9)=4,13.$$

Обратить обыкновенную дробь в десятичную — значит найти такую десятичную дробь, конечную или бесконечную, которая равна данной обыкновенной дроби.

Покажем, что несократимую дробь $\frac{a}{b}$ можно обратить в конечную десятичную дробь в том и только в том случае, если знаменатель b не содержит других простых множителей, кроме 2 и 5.

В самом деле, равенство

$$\frac{a}{b}=\frac{N}{10^n}\quad\text{или}\quad\frac{a\cdot10^n}{b}=N,$$

где N — целое, $(a,\ b)=1$, возможно тогда и только тогда, когда 10^n делится на b (см. § 1), и значит $b=2^k\cdot5^l$.

Если $b\neq2^k\cdot5^l$, то дробь $\frac{a}{b}$ можно приближенно обратить в конечную десятичную дробь с точностью до $\frac{1}{10^n}$ с недостатком или избытком. Для этого надо найти две конечные десятичные дроби, удовлетворяющие условию

$$\frac{m}{10^n}\leqslant\frac{a}{b}\leqslant\frac{m+1}{10^n}.$$

Из последнего следует, что

$$m\leqslant\frac{a\cdot10^n}{b}<m+1,$$

т. е. m — это целая часть дроби $\frac{a\cdot10^n}{b}$ или иначе неполное частное от деления $a\cdot10^n$ на b, а оно существует и единственно (см. § 1).

Практически для обращения дроби делят числитель на знаменатель (по правилу деления конечной десятичной дроби на целое число). Например, обратим дробь $\frac{11}{6}$ в конечную десятичную с точностью до 0,001: $\frac{11}{6}\approx1,833$ (с недостатком), $\frac{11}{6}\approx1,834$ (с избытком).

Если у несократимой дроби $\frac{a}{b}$ знаменатель $b=2^k\cdot5^l$, то процесс деления после конечного числа его повторения закончится и в результате будет получена конечная десятичная дробь. Если $b\neq2^k\cdot5^l$, то процесс деления можно продолжать неограниченно и в результате будет получена бесконечная десятичная дробь.

Вывод. Всякую обыкновенную дробь можно обратить в десятичную дробь, конечную или бесконечную.

Например,

$$\frac{11}{6}=1,833\dots=1,8(3),\quad\frac{4}{33}=0,1212\dots=0,(12).$$

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема. *Всякое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной или периодической дроби и обратно — всякая конечная десятичная дробь или дробь периодическая изображает рациональное число*.*

* Нетрудно понять, что это определение справедливо и в случае равенства $A,\ b_1b_2\dots b_n=\frac{a}{b}$ для конечной десятичной дроби.

* Правило обращения периодических дробей см. в § 3.

Доказательство. Достаточно рассмотреть положительные рациональные числа и положительные дроби, конечные десятичные или периодические.

1. Как уже было доказано, дробь $\frac{a}{b}$ при $b = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$ обращается в конечную десятичную дробь.

Пусть $b \neq 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$. Обращая данную дробь в десятичную путем деления a на b, будем получать остатки вида $1, 2, \ldots, b-1$. Так как процесс деления не может окончиться, то по истечении шага в остатке должны снова оказаться одно из этих чисел. Но если повторится какой-нибудь остаток, то должна повториться и соответствующая цифра частного, т. е. после этого остатка цифры частного будут повторяться в прежнем порядке. Полученная при обращении бесконечная десятичная дробь является периодической дробью.

Первое утверждение теоремы доказано.

2. Докажем справедливость обратного утверждения. Случай конечной десятичной дроби очевиден.

Рассмотрим для определенности (без ограничения общности доказательства) смешанную периодическую дробь вида

$$0,\ b_1(b_2b_3) = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2b_3}{10^2} + \frac{b_2b_3}{10^4} + \ldots$$

Покажем сначала, что чистая периодическая дробь $0,(b_2b_3)$ равна некоторой обыкновенной дроби.

Обозначим через x и y полученные десятичные дроби, которые получаются из периодической дроби $0,(b_2b_3)$, если оставить соответственно $2n+1$ и $2n$ знаков, а остальные отбросить, т. е.

$$x = \frac{b_2b_3}{10^2} + \frac{b_2b_3}{10^4} + \ldots + \frac{b_2b_3}{10^{2n-2}} + \frac{b_2b_3}{10^{2n+2}}, \qquad (*)$$

$$y = x - \frac{b_2}{10^{2n+1}}.$$

Вычитая равенство

$$\frac{1}{10^2} \cdot x = \frac{b_2b_3}{10^4} + \frac{b_2b_3}{10^6} + \ldots + \frac{b_2b_3}{10^{2n+2}} + \frac{b_2b_3}{10^{2n+4}}$$

из равенства $(*)$, получим:

$$\frac{99}{10^2} \cdot x = \frac{b_2b_3}{10^2} - \frac{b_2b_3}{10^{2n+2}},$$

откуда

$$x = \frac{b_2b_3}{99} - \frac{b_2b_3}{99} \cdot \frac{1}{10^{2n+2}}. \qquad (**)$$

Тогда

$$y = \left(\frac{b_2b_3}{99} - \frac{b_2b_3}{99} \cdot \frac{1}{10^{2n+2}}\right) - \frac{b_2}{10^{2n+1}} = \frac{b_2b_3}{990} - \frac{1}{10^{2n+1}} \cdot \left(\frac{10b_2 + b_3}{10} + b_2\right)$$

или

$$y = \frac{b_2b_3}{990} - \frac{b_2b_3}{99} \cdot \frac{1}{10^{2n}}. \qquad (***)$$

Так как b_2 и b_3 — цифры, то

$$\frac{b_2b_3}{10} < 1, \quad \frac{b_2b_3}{99} < 1.$$

Обращая дробь $0,0(b_2b_3)$ на некотором десятичном знаке, получим конечную десятичную дробь вида x или вида y. В силу равенств $(**)$ и $(***)$ дроби x и y дают приближения периодической дроби $0,\ 0(b_2b_3)$ к обыкновенной дроби $\frac{b_2b_3}{990}$ соответственно с точностью до $\frac{1}{10^{2n+1}}$ и $\frac{1}{10^{2n}}$.

Так как это верно при всех n, то исходя из определения равенства (12) следует, что

$$0,\ 0(b_2b_3) = \frac{b_2b_3}{990}.$$

Тогда смешанная периодическая дробь

$$0,\ b_1(b_2b_3) = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2b_3}{990}.$$

Теорема доказана полностью.

Понятие о других системах счисления. В десятичной системе счисления любое положительное число представимо в виде

$$N = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + a_1 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_n}{10^n} + \ldots \qquad (*)$$

Равенство $(*)$ сокращенно записывают в виде

$$N = a_m a_{m-1} \ldots a_0,\ b_1 b_2 \ldots b_n \ldots \qquad (**)$$

где $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0, b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots$ — цифры $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Вместо 10 (основания системы) можно взять любое натуральное число $p > 1$. Например, если $p = 3$ и $N = 25$, то очевидно, что

$$25 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1.$$

Это представление аналогично представлению $(*)$. Естественно его записать аналогично $(**)$ в виде

$$25_{(10)} = 221_{(3)},$$

где 221 — запись числа 25 в системе счисления с основанием 3.

Число 25 можно записать и в другой, например двоичной системе:

$$25 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1,$$

т. е.

$$25_{(10)} = 11001_{(2)}.$$

Вместо десятичных составляются p-ичные дроби. Например, двоичная дробь $11,1101$ означает

$$1 \cdot 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{61}{16}$$

в десятичной системе счисления.

В работе электронных цифровых машин применяется двоичная система счисления, в которой для изображения любого числа достаточно двух цифр: 0 и 1.

Для рациональных чисел вводятся действия возведения в степень и извлечения корня.

Пусть a — рациональное число, n — натуральное,

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI
DENOV FILIALI ARM
№ 2806

Определение. *Степень числа a с натуральным показателем $n\,(n \geqslant 2)$* есть произведение n сомножителей, каждый из которых равен a

$$a^n = \underbrace{a\,a\,\ldots\,a}_{n\text{ раз}}$$

При $n = 1$ полагают $a^1 = a$.

Извлечение корня определяется как действие, обратное возведению в степень.

Определение. *Корнем или радикалом n-й степени $(n \geqslant 2)$* из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a.

Корень n-й степени из числа a обозначается через $\sqrt[n]{a}$. Запись $\sqrt[n]{a} = b$ означает, что $b^n = a$.

В множестве рациональных чисел действие извлечение корня не всегда выполнимо. Например, не существует рационального числа, равного квадратному корню из двух. Докажем это.

Предположим противное, что

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

где дробь $\frac{p}{q}$ будем считать несократимой.

Согласно определению корня

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad \text{или} \quad p^2 = 2q^2,$$

т. е. p — четное число:

$$p = 2p_1,$$

где p_1 — целое. Тогда
$(2p_1)^2 = 2q^2$ или $q^2 = 2p_1^2$, т. е. q — четное число:

$$q = 2q_1, \text{ где } q_1 \text{ — целое.}$$

Следовательно, дробь $\frac{p}{q} = \frac{2p_1}{2q_1}$ сократима, что противоречит условию.

Из полученного противоречия вытекает, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

Определение. *Рациональное число $b > 0$ называется приближенным значением корня $\sqrt[n]{a}\,(a > 0)$* с недостатком с точностью до α (α — положительное рациональное число), если $b^n < a < (b + \alpha)^n$.

При этом число $b + \alpha$ называется приближенным значением корня $\sqrt[n]{a}$ с избытком с точностью до α.

Доказано, что приближенные значения корней из положительных чисел всегда существуют для любого рационального числа $\alpha > 0$.

Пример. Извлечь $\sqrt{2}$ с точностью до $\frac{1}{7}$.

Решение. Замечаем, что $2 = \frac{2 \cdot 7^2}{7^2} = \frac{98}{49}$. Поэтому достаточно извлечь корень $\sqrt{98}$ с точностью до 1 и разделить полученное число на 7.

Так как $\sqrt{98} \approx 9$ (с точностью до 1), то $\sqrt{2} \approx \frac{9}{7}$ (с точностью до $\frac{1}{7}$). В самом деле,

$$\left(\frac{9}{7}\right)^2 < 2 < \left(\frac{9}{7} + \frac{1}{7}\right)^2.$$

За меру точности α чаще всего принимают $\frac{1}{10^n}$ (n — некоторое натуральное число), а за приближенное значение корня принимают десятичную дробь с n знаками после запятой.

Советуем читателю применить известное правило извлечения квадратного корня и показать, что $\sqrt{72{,}6115} \approx 8{,}52$ (с недостатком, с точностью до 0,01), $\sqrt{113{,}5} \approx 10{,}607$ (с избытком, с точностью до 0,001).

§ 3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Будем извлекать корень квадратный из двух с точностью до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, ..., $\frac{1}{10^n}$ и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получим в результате бесконечную десятичную дробь, которая не может быть периодической, так как $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

Таким образом, при извлечении корней появляются бесконечные непериодические десятичные дроби. Дроби такого типа определяют новые, иррациональные числа.

Определение. Всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь вида

$$a = A, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots \tag{13}$$

($A \geqslant 0$, b_1, b_2, ... — цифры) называется *положительным иррациональным числом*.

Каждому положительному иррациональному числу (13) сопоставляется противоположное ему отрицательное число

$$-a = -A, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

Определения. 1. Два иррациональных числа

$$a = A, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots \quad \text{и} \quad a' = A', b_1' b_2' \ldots b_n' \ldots$$

считаются *равными* в том и только в том случае, если

$$A = A',\ b_1 = b_1',\ b_2 = b_2',\ \ldots,\ b_n = b_n',\ \ldots \text{ и т. д.}$$

2. Число a *больше* числа a': $a > a'$, если $A > A'$, или если $A = A'$, но $b_1 > b_1'$, или если $A = A'$ и $b_1 = b_1'$, но $b_2 > b_2'$ и т. д.

3. Если $a > a' > 0$, то считают $-a < -a'$ и обратно.

Пусть $a = A, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$

Дроби A, b_1; $A, b_1 b_2$; $\ldots$; $A, b_1 b_2 \ldots b_n$ и т. д. называются *десятичными приближениями для* иррационального числа a *по недостатку*. Дроби $A, b_1 + 1$; $A, b_1 (b_2 + 1)$; $\ldots$; $A, b_1 b_2 \ldots b_{n-1} (b_n + 1)$[1] и т. д. называются *десятичными приближениями* для иррационального числа a *по избытку*.

Для сравнения иррационального числа с числом рациональным последнее можно представить в виде периодической дроби и затем можно сравнить десятичные приближения для этих чисел по тому же правилу, как и при сравнении двух иррациональных чисел. При этом конечная десятичная дробь рассматривается как периодическая с периодом нуль. Например, $\sqrt{2} > 1{,}41$, так как $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$, а $1{,}41 = 1{,}4100\ldots$.

Иррациональные числа разделяются на *алгебраические* и *трансцендентные* (неалгебраические). Алгебраическим иррациональным числом называется всякое иррациональное число, которое является корнем многочлена (см. гл. II, § 3) с рациональными коэффициентами вида

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n,$$

где $c_0 \neq 0$, n — натуральное число.

Например, корень $\sqrt{2}$ — алгебраическое иррациональное число, так как является корнем многочлена $x^2 - 2$.

Доказано, что число $\pi = 3{,}14\ldots$ — трансцендентное иррациональное число.

Извлечение корня приводит к алгебраическим иррациональным числам. Значения логарифмов положительных чисел и тригонометрических функций, как правило, — трансцендентные иррациональные числа.

Замечание. Конкретные иррациональные числа обычно обозначают символом той операции, в результате которой они возникают:

$$\sqrt{3},\ \sqrt[3]{2},\ \lg 3,\ \sin\frac{\pi}{7} \text{ и т. д.}$$

Над иррациональными числами устанавливаются арифметические действия, причем вычитание и деление определяются как действия, обратные сложению и умножению. Строгое обоснование этих действий и их свойств приводится в курсе высшей математики.

Поясним на примере понятие суммы.

Рассмотрим числа $a = \sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ и $b = \sqrt{3} = 1{,}732\ldots$ Возьмем последовательности десятичных приближений для a и b по недостатку:

[1] $b_1 < 8$, $b_2 < 8$, $\ldots$, $b_n < 8$.

$$1{,}4;\quad 1{,}41;\quad 1{,}414;\quad \ldots,$$

$$1{,}7;\quad 1{,}73;\quad 1{,}732;\quad \ldots$$

и по избытку

$$1{,}5;\quad 1{,}42;\quad 1{,}415;\quad \ldots,$$

$$1{,}8;\quad 1{,}74;\quad 1{,}733;\quad \ldots$$

Образуем две новые последовательности:

$$1{,}4 + 1{,}7;\quad 1{,}41 + 1{,}73;\quad 1{,}414 + 1{,}732;\quad \ldots,$$

$$1{,}5 + 1{,}8;\quad 1{,}42 + 1{,}74;\quad 1{,}415 + 1{,}733;\quad \ldots$$

Оказывается, существует и притом единственное число, для которого эти последовательности являются последовательностями десятичных приближений соответственно по недостатку и по избытку. Это число и называется суммой чисел a и b.

После установления арифметических действий вводится важное понятие предела числовой последовательности (см. гл. V, § 1). На основе его определяется сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и выводится формула для вычисления суммы (см. гл. V, § 4). Эта формула позволяет получить правило для обращения периодических дробей.

Правило обращения периодических дробей. В § 2 доказана возможность обращения любой периодической дроби в дробь обыкновенную. Теперь дадим правило обращения.

Любая периодическая дробь вида $0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ равна обыкновенной дроби, составленной по следующему правилу:

1) *ее числитель есть разность между числом, стоящим до второго периода, и числом, стоящим до первого периода;*

2) *ее знаменатель есть число, изображаемое цифрами 9 и нулями на конце. Цифра 9 повторяется столько раз, сколько цифр в периоде, а нуль — столько раз, сколько цифр содержится между запятой и периодом.*

Доказательство. Рассмотрим для определенности (без ограничения общности доказательства) смешанную периодическую дробь вида

$$0, b_1 (b_2 b_3) = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2 b_3}{10^3} + \frac{b_2 b_3}{10^5} + \ldots$$

Надо доказать, что эта дробь равна дроби

$$\frac{b_1 b_2 b_3 - b_1}{990}.$$

В самом деле, данная периодическая дробь равна

$$\frac{b_1}{10} + S,$$

где S – сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (см. гл. V, § 4)

$$\frac{b_1b_2}{10^2}, \quad \frac{b_2b_3}{10^4}, \quad \frac{b_3b_4}{10^6}, \ldots$$

у которой первый член $a_1 = \frac{b_1b_2}{10^2}$, а знаменатель $q = \frac{1}{10^2}$.

Так как $S = \frac{a_1}{1-q}$, то имеем

$$S = \frac{\frac{b_1b_2}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{b_1b_2}{99}.$$

Таким образом,

$$0, b_1(b_2b_3) = \frac{b_1}{11} + \frac{b_2b_3}{990} = \frac{10b_1 \cdot 10^2 + b_2 \cdot 10 + b_3 - b_1}{990},$$

или

$$0, b_1(b_2b_3) = \frac{b_1b_2b_3 - b_1}{990},$$

что и утверждалось.

Например,

$$0,3(14) = \frac{314-3}{990} = \frac{311}{990},$$

$$2,(13) = 2 + \frac{13-0}{99} = 2\frac{13}{22},$$

$$0,(7) = \frac{7-0}{9} = \frac{7}{9}.$$

§ 4. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Определение. Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел образует множество действительных (или вещественных) чисел.

Таким образом, термином «действительное (или вещественное) число» обозначается число рациональное либо иррациональное.

Над действительными числами установлены арифметические действия — сложение, вычитание, умножение, деление. Основные свойства арифметических действий, сформулированные в § 1 для целых чисел, остаются справедливыми и для действительных чисел.

Сумма или разность рационального и иррационального чисел всегда есть число иррациональное. Это верно и для произведения или частного, если только рациональное число не равно нулю.

Однако арифметические действия над двумя иррациональными числами могут привести к рациональным числам. (Например, $(2+\sqrt[3]{2}) - \sqrt[3]{2} = 2$, $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = 3$ и т. п.

Возведение в степень с натуральным показателем и извлечение корня для действительных чисел определяются так же, как и для рациональных чисел.

Пусть a — действительное, n — натуральное число. По определению

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ раз}}, & \text{если } n \geqslant 2 \\ a, & \text{если } n = 1 \end{cases}$$

и $\sqrt[n]{a} = b$, если $b^n = a$ $(n \geqslant 2)$.

Из определения сразу вытекают свойства степеней с натуральными показателями:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2. $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & \text{если } m > n, \\ 1, & \text{если } m = n, \\ \frac{1}{a^{n-m}}, & \text{если } m < n, \end{cases}$ $(a \neq 0)$

3. $(a^m)^n = a^{mn}$.

4. $(-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{если } n \text{ — четное}, \\ -a^n, & \text{если } n \text{ — нечетное}. \end{cases}$

5. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$.

Доказательства всех этих свойств предоставим читателю.

Доказано, что в множестве действительных чисел извлечение корня всегда выполнимо, кроме случая, когда n — четно и $a<0$. Однако действие извлечение корня не всегда однозначно.

Например, $\sqrt{16} = 4$ и $\sqrt{16} = -4$, так как $4^2 = (-4)^2 = 16$. В этом случае мы обязаны писать:

$$\sqrt{16} = \pm 4.$$

Чтобы ввести определенность в употребление символа $\sqrt[n]{a}$, введено понятие арифметического корня.

Определение. *Арифметическим корнем* n-й степени из неотрицательного числа a называется *неотрицательное число* b, для которого $b^n = a$.

В дальнейшем под символом $\sqrt[n]{a}\,(a \geqslant 0)$ будем понимать арифметическое значение корня. Например, $\sqrt{16} = 4$ есть арифметическое значение квадратного корня из 16.

Арифметическое значение корня существует для каждого $a \geqslant 0$. Докажем его единственность.

В самом деле, пусть $\sqrt[n]{a} = b_1$ и $\sqrt[n]{a} = b_2$, где $a \geqslant 0$, $b_1 \geqslant 0$, $b_2 \geqslant 0$. Тогда $b_1^n = b_2^n = a$.

Если $b_1 \neq b_2$, например, $b_1 < b_2$, то $b_1^n < b_2^n$ (см. гл. II, § 7), что неверно. Из полученного противоречия следует единственность арифметического корня, т. е. $b_1 = b_2$.

Докажем следующие основные правила действий над радикалами:

1. Основное свойство корня. *Величина арифметического корня не изменится, если показатель корня умножить на любое натуральное число k и одновременно подкоренное выражение возвести в степень с тем же показателем k*, т. е.

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \qquad (a \geqslant 0).$$

В самом деле, пусть $\sqrt[n]{a} = b\,(b \geqslant 0)$. Это означает, что $b^n = a$. Тогда по свойству степени

$$(b^n)^k = b^{nk} = a^k,$$

откуда следует, что $b = \sqrt[nk]{a^k}$.

Таким образом, $\sqrt[n]{a} = b = \sqrt[nk]{a^k}$, что и утверждалось.

2. Правило умножения корней. *При умножении арифметических корней с одинаковыми показателями подкоренные выражения умножаются, а показатель корня остается прежним*, т. е.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0).$$

В самом деле, по свойству степени имеем

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab,$$

так как $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$. Отсюда, согласно определению арифметического корня, следует, что

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

Утверждение доказано.

В частности, $\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ (правило вынесения множителя из-под знака радикала).

3. Правило деления корней. *При делении арифметических корней с одинаковыми показателями подкоренные выражения делятся, а показатель корня остается прежним*, т. е.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad (a \geqslant 0,\quad b > 0).$$

Это свойство доказывается так же, как и второе. В частности,

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^n}} = \sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$$

(правило освобождения подкоренного выражения от знаменателя).

4. Правило возведения корня в степень. *При возведении арифметического корня в степень с натуральным показателем возводится в эту степень подкоренное выражение, а показатель корня остается прежним*, т. е.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad (a \geqslant 0,\ m \text{ — натуральное число}).$$

Это свойство есть следствие второго свойства.

5. Правило извлечения корня из корня. *При извлечении корня из корня перемножаются показатели корней, а подкоренное выражение остается прежним*, т. е.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad (a \geqslant 0;\ m,\ n \text{ — натуральные числа},\ m \geqslant 2,\ n \geqslant 2).$$

В самом деле, согласно правилу возведения корня в степень, имеем

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn}} = \sqrt[m]{\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m},$$

откуда

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \sqrt[m]{a^m} = a.$$

Следовательно, по определению корня,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

что и требовалось доказать.

Определение. Радикалы называются *подобными*, если у них одинаковы подкоренные выражения и одинаковы показатели корней.

В общем случае сумму или разность двух различных корней упростить нельзя. Упрощения возможны только в случае подобных радикалов.

Правило сравнения арифметических корней основано на следующем свойстве:

$$\sqrt[n]{a} \geqslant \sqrt[m]{b} \quad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0), \text{ если } a \geqslant b,$$

и обратно,

$$\text{если } a \geqslant b \geqslant 0, \text{ то } \sqrt[n]{a} \geqslant \sqrt[n]{b}.$$

Оно вытекает из свойств неравенств (см. гл. II, § 7).

Например, $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$, так как

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2}, \quad \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} \quad \text{и} \quad 3^2 > 2^3;$$

$$\sqrt{0,1} < \sqrt[3]{0,1},$$

так как

$$\sqrt{0,1} = \sqrt[6]{(0,1)^3}, \quad \sqrt[3]{0,1} = \sqrt[6]{(0,1)^2} \quad \text{и} \quad (0,1)^3 < (0,1)^2.$$

При выполнении действий над радикалами иногда полезна следующая формула преобразования «сложного» квадратного радикала:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}, \qquad (14)$$

где $a > 0$, $b > 0$, $a^2 > b$ и знаки выбираются соответственно.

Для доказательства формулы (14) положим

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = x, \quad \sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}} = y.$$

Очевидно, что $x > 0$. Так как $a + \sqrt{b} > a - \sqrt{b}$, то согласно правилу сравнения корней и $y > 0$.

Возведя в квадрат, получим:

$$x^2 = 2a + 2\sqrt{a^2 - b}, \quad y^2 = 2a - 2\sqrt{a^2 - b},$$

откуда

$$x = \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b}}, \quad y = \sqrt{2a - 2\sqrt{a^2 - b}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b}} = 2\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2a - 2\sqrt{a^2 - b}} = 2\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Отсюда, после почленного сложения и вычитания, и получаем формулу (14).

Преобразуем, например, по формуле (14) корень $\sqrt{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}$. Здесь $a = 4\sqrt{2}$, $b = 24$. Поэтому

$$\sqrt{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{4\sqrt{2} + \sqrt{32 - 24}}{2}} + \sqrt{\frac{4\sqrt{2} - \sqrt{32 - 24}}{2}} =$$

$$= \sqrt{3\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{18} + \sqrt[4]{2}.$$

Замечание. Для корня нечетной степени справедлива формула

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geqslant 0). \qquad (15)$$

В самом деле, пусть $\sqrt[2n+1]{-a} = b$. Тогда $b^{2n+1} = a$ или $(-b)^{2n+1} = -a$, откуда следует, что $(-b) = \sqrt[2n+1]{-a}$, т. е. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$.

Из формулы (15) вытекает, что *корень нечетной степени из отрицательного числа имеет единственное действительное и притом отрицательное значение.*

С помощью формулы (15) нетрудно проверить, что правила 2—5 справедливы также и для корней нечетной степени с отрицательными подкоренными выражениями.

В общем случае для радикалов, не являющихся арифметическими, эти правила неверны. Например, для произведения $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{-3}$ применение правил 1—2 приводит к неверному результату:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{-3} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{(-3)^2} = \sqrt[6]{72}.$$

Правильное решение: так как $\sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3}$, то

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{-3} = -(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}) = -(\sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2}) = -\sqrt[6]{72}.$$

Обобщение понятия о показателе степени. Ранее было определено понятие степени с натуральным показателем для любого действительного числа. Наряду с натуральным показателем рассматриваются также степени с любым действительным показателем.

Это обобщение понятия о показателе степени вводится таким образом, чтобы все свойства степеней с натуральными показателями* оставались справедливыми для любых действительных показателей.

По определению полагают:

1. $a^0 = 1$, где $a \neq 0$.

Символ 0^0 не имеет смысла.

2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где $a \neq 0$, n — натуральное число.

3. $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, где $a \geqslant 0$, p и q — натуральные числа, $q \geqslant 2$.

4. $a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$, где $a > 0$, p и q — натуральные числа, $q \geqslant 2$.

Замечание. Степень с дробным показателем $\frac{p}{q}$ рассматривается также при $a < 0$, если дробь $\frac{p}{q}$ несократима и знаменатель q нечетное число.

---

* Свойства степеней с натуральными показателями предполагаются известными читателю.

3. Степень с иррациональным показателем. Пусть a — любое положительное число, α — иррациональное число.

Как всякое иррациональное число, α есть бесконечная непериодическая десятичная дробь: $\alpha = A, b_1 b_2 \ldots b_{n} \ldots$

Рассмотрим последовательность чисел

$$a^{A,b_1}, \quad a^{A,b_1b_2}, \quad \ldots, \quad a^{A,b_1b_2\ldots b_n}, \quad \ldots$$

Эта последовательность является монотонной и ограниченной и, следовательно, имеет предел (см. гл. V, § 1), который и принимают за a^{α}. Таким образом,

$$a^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} a^{A,b_1b_2\ldots b_n}.$$

Например, степень $2^{\sqrt{2}}$ равна пределу последовательности

$$2^{1,4}, \quad 2^{1,41}, \quad 2^{1,414}, \quad 2^{1,4142}, \quad \ldots,$$

так как $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$

Теорема. *Для любых действительных α и β и положительных a и b справедливы равенства:*

I. $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$.

II. $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$.

III. $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$.

IV. $(a \cdot b)^{\alpha} = a^{\alpha} \cdot b^{\alpha}$.

V. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha} = \dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$.

Строгое определение степени с иррациональным показателем и доказательство всех этих свойств для иррациональных α и β приводится в курсе высшей математики.

Покажем справедливость свойств I—V для рациональных α и β.

I. Случай 1. $\alpha = m$, $\beta = -n$, где m и n — натуральные числа. Проверим, что $a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$.

Имеем

$$a^m \cdot a^{-n} = \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & \text{если } m > n, \\ 1, & \text{если } m = n, \\ \dfrac{1}{a^{n-m}}, & \text{если } m < n. \end{cases}$$

Так как $a^{m-m} = a^0 = 1$, $\dfrac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$, то $a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$ при любых соотношениях между m и n, что и утверждалось.

Случай 2. $\alpha = \dfrac{p}{q}$, $\beta = \dfrac{p_1}{q_1}$, где p, q, p_1, q_1 — натуральные числа. Проверим, что $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{p_1}{q_1}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p_1}{q_1}}$ $(a > 0)$. Имеем:

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{p_1}{q_1}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q_1]{a^{p_1}} = \sqrt[qq_1]{a^{pq_1}} \cdot \sqrt[qq_1]{a^{p_1q}} =$$

$$= \sqrt[qq_1]{a^{pq_1} \cdot a^{p_1q}} = a^{\frac{pq_1+p_1q}{qq_1}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p_1}{q_1}},$$

что и утверждалось.

Аналогично рассматриваются все остальные возможные случаи.

II. Случай 1. $\alpha = -m$, $\beta = -n$, где m и n — натуральные числа. Проверим, что $(a^{-m})^{-n} = a^{mn}$ $(a > 0)$. Имеем

$$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn},$$

что и утверждалось.

Случай 2. $\alpha = \dfrac{p}{q}$, $\beta = \dfrac{p_1}{q_1}$, где p, q, p_1, q_1 — натуральные числа. Проверим, что $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p_1}{q_1}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{p_1}{q_1}}$ $(a > 0)$. Имеем:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p_1}{q_1}} = \sqrt[q_1]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{p_1}} = \sqrt[q_1]{\sqrt[q]{a^{pp_1}}} = \sqrt[qq_1]{a^{pp_1}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{p_1}{q_1}},$$

что и утверждалось.

Аналогично проверяется справедливость свойства II во всех остальных случаях.

III. Имеем

$$\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha} \cdot a^{-\beta} = a^{\alpha+(-\beta)} = a^{\alpha-\beta},$$

что и требовалось доказать.

IV. Это свойство доказывается разбором всех возможных случаев. Например, для $\alpha = \dfrac{p}{q}$ (p и q — натуральные числа) получаем:

$$(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}},$$

что и утверждалось.

V. Это свойство вытекает из свойства IV.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = (a \cdot b^{-1})^{\alpha} = a^{\alpha} \cdot (b^{-1})^{\alpha} = a^{\alpha} \cdot b^{-\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}.$$

Доказательство теоремы закончено.

Абсолютная величина действительного числа.

Определение. *Абсолютной величиной* или *модулем* действительного числа a называется неотрицательное число $|a|$, равное числу a, если $a \geqslant 0$, и числу $(-a)$, если $a < 0$.

Таким образом,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Например, $|4| = 4$, $|0| = 0$, $|-6| = -(-6) = 6$ и т. д.

Отметим следующие свойства абсолютной величины:

1. $|a| = |-a|$.

Это равенство непосредственно вытекает из определения абсолютной величины.

2. $|a| \geqslant a$, $|a| \geqslant -a$.

В самом деле, если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$ и подавно $|a| \geqslant -a$. Если $a < 0$, то $|a| = -a$ и подавно $|a| \geqslant a$, так как $|a| \geqslant 0$.

3. $|ab| = |a| \cdot |b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$.

Эти равенства вытекают из правила знаков.

4. $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

В самом деле, есть две возможности:

1) $a + b \geqslant 0$, тогда

$$|a + b| = a + b,$$

но $a \leqslant |a|$, $b \leqslant |b|$ (см. свойство 2) и поэтому

$$a + b \leqslant |a| + |b|. \qquad (*)$$

2) $a + b < 0$, тогда

$$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b),$$

но $-a \leqslant a$, $-b \leqslant |b|$ (см. свойство 2) и поэтому

$$(-a) + (-b) \leqslant |a| + |b|. \qquad (**)$$

Из неравенств (*) и (**) следует, что $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

5. $|a - b| \geqslant |a| - |b|$.

Так как $a = (a - b) + b$, то по свойству 4

$$|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|,$$

откуда следует, что

$$|a| - |b| \leqslant |a - b| \text{ или } |a - b| \geqslant |a| - |b|.$$

Геометрическое изображение действительных чисел. Координаты точки. Для наглядности действительные числа принято изображать точками числовой оси — прямой, на которой выбрано положительное направление, масштаб и начало отсчета (рис. 1).

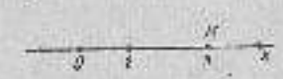


Рис. 1

На геометрии известно, что всякий отрезок OM имеет длину, выраженную рациональным или иррациональным числом.

Поэтому каждой точке M на числовой оси соответствует вполне определенное действительное число x, положительное, если M лежит вправо от O, и отрицательное, если M лежит влево от O. Абсолютная величина числа x равна длине отрезка OM.

Обратно, всякому действительному числу x соответствует на оси Ox определенная точка M, которая удалена от точки O на расстояние, равное $|x|$, и лежит вправо от O, если $x > 0$ и влево — если $x < 0$. При $x = 0$ точка M совпадает с точкой O. Таким образом, между всеми действительными числами и точками числовой оси установлено взаимно однозначное соответствие.

Определение. Действительное число x, соответствующее точке M на числовой или координатной оси, называется ее *координатой*.

При этом записывают: $M(x)$, где x — координата точки M. Координата точки определяет ее положение на прямой.

Пусть $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — две точки, расположенные на числовой оси.

Справедлива следующая формула для расстояния между двумя точками на оси:

$$M_1M_2 = |x_2 - x_1|. \qquad (16)$$

Для доказательства рассмотрим все возможные случаи расположения точек M_1 и M_2:

1) $0 \leqslant x_1 < x_2$ (рис. 2, а),

в этом случае

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|;$$

2) $0 < x_1 < x_2$ (рис. 2, *б*),
в этом случае

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|;$$

3) $x_1 < 0 < x_2$ (рис. 2, *в*). Тогда $OM_1 = -x_1$, $OM_2 = x_2$. В этом случае $M_1M_2 = OM_1 + OM_2 = -x_1 + x_2 = |x_2 - x_1|$.

Аналогично рассматриваются случаи, когда точки M_1 и M_2 лежат влево от точки O. И здесь мы получаем, что $M_1M_2 = |x_2 - x_1|$.

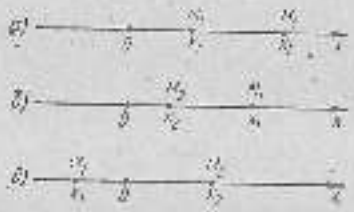


Рис. 2

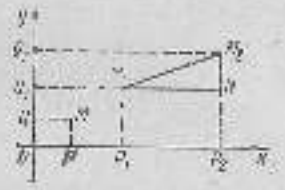


Рис. 3

Таким образом, при любом расположении на оси точек $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ расстояние M_1M_2 равно $|x_2 - x_1|$.

Перейдем от прямой к плоскости.

Две взаимно перпендикулярные оси с общим началом O образуют систему координат на плоскости. Горизонтальная ось называется *осью абсцисс* или осью Ox, вертикальная — *осью ординат* или осью Oy (рис. 3).

Пусть M — произвольная точка плоскости. Спроектируем ее на ось абсцисс и ось ординат (рис. 3).

Определение. Координата проекции точки M на ось Ox называется *абсциссой* точки M, координата проекции точки M на ось Oy называется *ординатой* точки M.

Абсцисса и ордината точки M, вместе взятые, называются координатами точки M. При этом записывают $M(x, y)$ (на первом месте всегда стоит абсцисса).

Таким образом, каждой точке плоскости соответствует определенная упорядоченная пара чисел — ее координаты x и y.

Обратно, каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка плоскости $M(x, y)$. Таким образом, координаты x и y определяют положение точки на плоскости.

Пусть даны две точки: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Справедлива следующая формула для расстояния между двумя точками на плоскости:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (17)$$

Для доказательства рассмотрим треугольник M_1M_2N (рис. 3), в котором согласно формуле (16) катет M_1N равен $|x_2 - x_1|$ и катет M_2N равен $|y_2 - y_1|$. По теореме Пифагора

$$M_1M_2 = \sqrt{M_1N^2 + M_2N^2} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} =$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Формула (17) остается верной и в том случае, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Тогда эта формула дает либо

$$M_1M_2 = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|,$$

либо

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

Например, найдем расстояние между точками $M_1(1, 3)$ и $M_2(-3, 0)$. Согласно формуле (17)

$$M_1M_2 = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (0 - 3)^2} = 5.$$

§ 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Приведем примеры задач, при решении которых используются свойство последовательных чисел (см. гл. I, § 1), деление с остатком, следствия из теоремы Безу (см. гл. II, § 3), формула бинома Ньютона (см. гл. VI, § 2) и метод индукции.

Пример 1. Доказать, что при любом простом $p > 3$ число $p^2 - 1$ делится на 24.

Решение. По свойству последовательных чисел произведение $(p-1)p(p+1)$ делится на 3.

Так как $p > 3$ — простое, то на 3 делится число $(p-1)(p+1) = p^2 - 1$. Оно является произведением двух последовательных четных чисел (всякое простое число, не равное 2, — нечетное), т. е. $(p-1)(p+1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1)$, и, следовательно, оно делится на 8.

Итак, число $p^2 - 1$ делится на взаимно простые числа 3 и 8, а значит, делится и на их произведение.

Отсюда вытекает, что число $p^2 - q^2$, где p и q — простые, бо́льшие 3, также делится на 24. В самом деле, $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1)$, и каждое слагаемое делится на 24.

Пример 2. Доказать, что квадрат любого простого числа $p \geqslant 5$ при делении на 12 дает в остатке 1.

Решение. Натуральное число при делении на 6 может дать в остатке лишь числа 0, 1, 2, 3, 4, 5. Поэтому всякое натуральное число имеет один из следующих видов:

$$6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k-3,\ 6k+4,\ 6k+5.$$

Очевидно, что числа $6k$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ составные. Поэтому простое число $p \geqslant 5$ имеет вид $6k+1$ или $6k+5$. Если $p = 6k+1$, то $p^2 = (6k+1)^2 = 36k^2 + 12k - 1$. Если $p = 6k+5$, то $p^2 = (6k+5)^2 = 36k^2 + 60k + 25 - 12(3k^2 + 5k + 2) + 1$. Таким образом, в обоих случаях остаток при делении p^2 на 12 равен 1.

Пример 3. Доказать, что при любом натуральном n число $A=4^{3n}-3^{3n}$ делится на 84.

Решение. Так как 84 равно произведению взаимно простых чисел 3, 4 и 7, то для решения надо доказать, что число A делится на 3, 4 и 7.

Представив A в виде $A=(4^{3n}-3^{3n})-7$, заметим, что число $4^{3n}-3^{3n}$ есть разность степеней с одинаковыми четными показателями. По следствию из теоремы Безу число $4^{2n}-3^{2n}$ делится на сумму оснований $4+3=7$. Таким образом, A делится на 7.

Представив A в виде $A=(4^{2n}-1)-3^{2n}\cdot 6$, заметим, что $4^{2n}-1$ делится на разность оснований $4-1=3$. Поэтому A делится на 3.

Наконец, записав A в виде $A=4^{2n}-(3^{2n}-1)-8$, заметим, что $3^{2n}-1$ делится на $3+1=4$, и, следовательно, A делится на 4.

Пример 4. Доказать, что при любом натуральном n число

$$A=\frac{10^n-1}{81}-\frac{n}{9}$$ целое.

Решение. По формуле бинома Ньютона

$$A=\frac{(9+1)^n-1-9n}{81}=\frac{9^n+n\cdot 9^{n-1}+\ldots+n\cdot 9+1-1-9n}{81}.$$

После приведения подобных членов каждое слагаемое в числителе содержит множитель $9^2=81$, т. е. A — целое.

Пример 5. Доказать, что число $A_n=4^n+15n-1$ делится на 3 и на 9.

Решение. Достаточно доказать, что число A_n делится на 9. С этой целью применим метод индукции.

При $n=1$ $A_1=4+15-1=18$ делится на 9.

Предположим, что A_k делится на 9. Тогда

$$A_{k+1}=4^{k+1}+15(k+1)-1=4\cdot 4^k+15k+14=$$
$$=4(4^k+15k-1)-45k+18=A_k-45k+18$$

также делится на 9. Таким образом, число A_n делится на 9 для любого $n\geq 1$.

Пример 6. Доказать, что при любом $n>1$ число n^4+4 составное.

Решение. Имеем

$$n^4+4=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2).$$

Если $n>1$, то

$$n^2+2n+2>5,\quad n^2-2n+2=(n-1)^2+1>1,$$

т. е. число n^4+4 разлагается на произведение двух чисел, каждое из которых не равно единице.

Пример 7. Определить показатель степени 2^α в каноническом разложении 100!

Решение. Очевидно, искомое α — показатель повторения 2 в разложении 100! равно числу всех чисел от 1 до 100, делящихся на $2, 4, \ldots, 64$.

Таким образом,

$$\alpha=\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{4}\right]+\left[\frac{100}{8}\right]+\left[\frac{100}{16}\right]+\left[\frac{100}{32}\right]+\left[\frac{100}{64}\right],$$

где $\left[\frac{100}{2^n}\right]$ — целая часть дроби $\frac{100}{2^n}$, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{100}{2^n}$:

$$\left[\frac{100}{2}\right]=50,\ \left[\frac{100}{4}\right]=25,\ \left[\frac{100}{8}\right]=12,$$
$$\left[\frac{100}{16}\right]=6,\ \left[\frac{100}{32}\right]=3,\ \left[\frac{100}{64}\right]=1.$$

Отсюда $\alpha=50+25+12+6+3+1=97$.

Пример 8. Найти все рациональные x, для которых число $\sqrt{4x^3+x-1}$ также рационально.

Решение. Положим $\sqrt{4x^3+x-1}=2x+a$. Число $2x-a$ при рациональном x будет рациональным лишь при рациональных a. Имеем

$$4x^3+x-1=4x^3+4ax+a^2,$$

откуда $x=\frac{a^2+1}{1-4a}$, где $a\neq\frac{1}{4}$ — любое рациональное число, удовлетворяющее условию: $2x+a\geq 0$.

Пример 9. Доказать, что $\log_2 3$ — иррациональное число.

Решение. Предположим противное: пусть $\log_2 3$ — рациональное число $\frac{\alpha}{\beta}$, где α и β — целые. Тогда $\log_2 3=\frac{\alpha}{\beta}$, откуда $2^\alpha=3^\beta$. Но это равенство невозможно, так как 2^α — четное число, а 3^β — нечетное. Значит наше предположение неверно, и $\log_2 3$ является иррациональным числом.

§ 8. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Введение комплексных чисел вызвано уже тем, что в множестве действительных чисел невыполнимо извлечение квадратного корня или вообще корня четной степени из отрицательного числа.

Определение. *Комплексным числом* называется выражение вида $a+bi$, где a и b — действительные числа, а i — некоторый символ. При этом a называется *действительной* (или вещественной) *частью* данного комплексного числа, b — его *мнимой частью*, i — *мнимой единицей*. Символ $a+bi$ рассматривается сначала как цельный.

Если, в частности, $b=0$, то комплексное число $a+0i$ считается совпадающим с действительным числом a, т. е.

$$a+0i=a. \tag{15}$$

Таким образом, действительные числа представляют собой частный случай комплексных чисел.

Если, в частности, $a=0$, то комплексное число $0+bi$ обозначается просто bi и называется *чисто мнимым*,

$$0+bi=bi; \tag{19}$$

при этом полагают

$$0+1i=i, \quad 0-1i=-i. \tag{20}$$

Определение. Комплексные числа $a+bi$ и $c+di$ считаются *равными*,

$$a+bi=c+di, \tag{21}$$

тогда и только тогда, когда $a=c$, $b=d$.

В частности, $a+bi$ равно нулю тогда и только тогда, когда $a=0$ и $b=0$.

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определяются, т. е. комплексные числа по величине не сравниваются.

Два комплексных числа $a+bi$ и $c-di$, отличающиеся только знаками при мнимой части, называются *комплексно сопряженными* или просто *сопряженными*.

Запись $\overline{c+di}=a+bi$ или $\overline{a+bi}=c+di$ означает, что числа $a+bi$ и $c+di$ являются сопряженными, т. е. $c=a$, $d=-b$.

Таким образом, знак «сопряжения» — черта над комплексным числом — означает изменение знака при мнимой части.

Как известно, действительные числа изображаются точками числовой оси. Комплексное число $z=a+bi$ принято изображать точкой на плоскости M с координатами a и b (рис. 4).

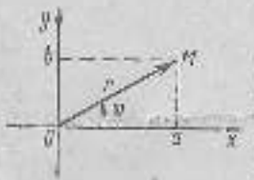


Рис. 4

Очевидно, что при этом каждой точке плоскости соответствует определенное комплексное число, и обратно, каждому комплексному числу z соответствует единственная точка плоскости, которая служит для изображения z. В частности, действительные числа изображаются точками оси абсцисс, чисто мнимые — точками оси ординат. Точка с координатами $(0,1)$ служит изображением числа i. Сопряженным числам z и $\bar{z}$ отвечают соответственно точки с координатами (a, b) и $(a, -b)$. Очевидно, что эти точки симметричны относительно оси Ox.

Плоскость xOy, которая служит для изображения комплексных чисел, называется *комплексной плоскостью*.

Полезно и другое геометрическое истолкование комплексного числа: число $z=a+bi$ рассматривается как вектор $\overrightarrow{OM}$ с началом в точке O и с концом в точке $M(a, b)$ (рис. 4).

Установив над комплексными числами арифметические действия, а также действия возведения в степень и извлечения корня,

Сложение. *Суммой* z_1+z_2 комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ называется комплексное число

$$z=z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i. \tag{22}$$

В связи с тем, что действительное число есть частный случай комплексного числа возникает вопрос: не противоречит ли действие сложения по формуле (22) ранее введенному действию сложения действительных чисел?

Если положить в формуле (22) $b=0$ и $d=0$, то согласно (18) получим справедливое равенство между действительными числами

$$(a+0i)+(c+0i)=(a+c)+(0+0)i=a+c.$$

Таким образом, противоречия нет.

Символ $a+bi$ до сих пор рассматривался как цельный. Теперь из определения суммы следует, что комплексное число $a+bi$ можно рассматривать как сумму действительного числа a с чисто мнимым числом bi.

В самом деле, согласно формулам (18), (19) и (22) имеем:

$$(a)+(bi)=(a+0i)+(0+bi)=(a+0)+(b-0)i=a+bi,$$

что и утверждалось.

Вычитание вводится как действие, обратное сложению. *Разностью* z_1-z_2 комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ называется такое число z,

$$z=z_1-z_2,$$

что $z_2+z=z_1$.

Покажем, что для любых z_1 и z_2 разность $z=x+yi$ существует и единственна.

В самом деле, согласно формуле (22)

$$a+bi=(c+di)+(x+yi)=(c+x)+(d+y)i,$$

откуда по определению равенства (21) следует, что $a=c+x$, $b=d+y$, т. е. $x=a-c$ и $y=b-d$.

Таким образом,

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i. \tag{23}$$

Очевидно, что

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a,$$

$$z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi,$$

т. е. *сумма двух комплексно сопряженных чисел есть действительное число, а разность — число мнимое.*

Умножение. *Произведением* z_1z_2 комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ называется комплексное число

$$z=z_1z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i. \tag{24}$$

Предоставляем читателю убедиться с помощью формул (18) и (24), что определенное формулой (24) действие умножения не противоречит действию умножения действительных чисел.

Из формулы (24) согласно (20) вытекает, что:

1) $b \cdot i = (b + 0i) \cdot (0 + 1i) = 0 - bi = bi$,

т. е. чисто мнимое число bi можно рассматривать как произведение действительного числа b на мнимую единицу i,

2) $i \cdot i = i^2 = (0 + 1i) \cdot (0 + 1i) = -1 + 0i = -1$,

т. е. мнимая единица есть такое число, квадрат которого равен отрицательной единице.

Таким образом, символ $a+bi$, введенный ранее как целый, теперь можно рассматривать как сумму действительного числа a с чисто мнимым bi, а последнее — как произведение числа b на мнимую единицу, и формула (24) получается по обычному правилу умножения буквенных двучленов с учетом равенства $i^2=-1$.

3) $z \cdot \bar{z} = (a+bi) \cdot (a-bi) = a^2+b^2$, т. е. *произведение двух комплексно-сопряженных чисел есть действительное неотрицательное число.*

Деление вводится как действие, обратное умножению. *Частным* $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ называется такое число z, что $z_2 \cdot z = z_1$.

Покажем, что для любого $z_2 \neq 0$ частное $z=x+yi$ существует и единственно.

В самом деле, согласно формуле (24)

$$a - bi = (c + di) \cdot (x - yi) = (cx - dy) + (dx + cy)i,$$

откуда по определению равенства (21) следует, что

$$\begin{cases} a = cx - dy \\ b = dx + cy. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

($c^2 + d^2 \neq 0$, так как $c + di \neq 0$).

Таким образом,

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i. \tag{25}$$

Замечание. Вывод формулы (25) необходим для доказательства существования и единственности частного. Практически деление выполняют по следующему правилу:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2},$$

Например,

$$\frac{1-i}{2+i} = \frac{(1-i) \cdot (2-i)}{(2+i) \cdot (2-i)} = \frac{1-3i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i.$$

Из формул (22), (23), (24), (25) вытекает, что для комплексных чисел сохраняются основные свойства арифметических действий:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$
$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3),$$
$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3.$$

Общий вывод. Все арифметические действия над комплексными числами производят по тем же правилам, по каким они производятся для чисел действительных, если учитывать при этом равенство $i^2=-1$.

Если в сумме, разности, произведении и частном комплексных чисел каждое число заменить сопряженным с ним, то и результат заменится сопряженным с ним числом:

1) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \overline{z_1 + z_2}$,

2) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = (a - bi) - (c - di) = (a - c) - (b - d)i = \overline{z_1 - z_2}$,

3) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a - bi) \cdot (c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{z_1 z_2}$,

4) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{a - bi}{c - di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

В этом нетрудно убедиться с помощью непосредственной проверки по формулам (22), (23), (24), (25). Отсюда вытекает следующее полезное правило.

Если в выражении, составленном из комплексных чисел, над которыми производятся арифметические действия, каждое комплексное число заменить сопряженным с ним, то и значение всего выражения заменится на сопряженное.

Возведение в степень. Полагают

$$z^n = \begin{cases} \underbrace{z \cdot z \ldots z}_{n \text{ раз}}, & \text{если } n \geqslant 2, \\ z, & \text{если } n = 1, \end{cases} \tag{26}$$

где n — натуральное число.

Для $z \neq 0$ полагают

$$z^0 = 1, \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}.$$

Нетрудно проверить, что при возведении комплексного числа в степень с целым показателем справедливы следующие свойства:

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, \quad (z^p)^q = z^{pq}, \quad \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q}, \quad (z_1 \cdot z_2)^p =$$

$$= z_1^p \cdot z_2^p, \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p = \frac{z_1^p}{z_2^p},$$

где p и q — целые.

Найдем степени числа i. По определению $i^0=1$, $i^1=i$, т. е., как известно, что $i^2=-1$. Поэтому

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^3 \cdot i = 1, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i$$

Вообще $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$ (k — натуральное).

Для возведения в степень числа $a+bi$ используют формулу бинома Ньютона и уже известные степени числа i

$$(a+bi)^n = a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} bi - C_n^2 \cdot a^{n-2} b^2 -$$

$$- C_n^3 \cdot a^{n-3} b^3 i + \ldots + C_n^k \cdot a^{n-k} b^k i^k + \ldots + b^n i^n.$$

Извлечение корня. *Корнем* n-й степени из комплексного числа z называется такое комплексное число w,

$$w = \sqrt[n]{z}, \tag{27}$$

что $w^n=z$ (n — натуральное ≥ 2).

Таким образом, извлечение корня определяется как действие, обратное возведению в степень.

Известен, например, квадратный корень из действительного отрицательного числа $(-a^2)$ и покажем, что

$$\sqrt{-a^2} = \pm ai,$$

в частности, $\sqrt{-1} = \pm i$.

Полагая $\sqrt{-a^2} = x + yi$, согласно (27) имеем

$$(x+yi)^2 = -a^2$$

или

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = -a^2.$$

Отсюда получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -a^2, \\ 2xy = 0, \end{cases}$$

решая которую найдем, что

$$x = 0, \quad y = \pm a$$

(случай $y=0$ невозможен, так как при этом $x^2 = -a^2$, что неверно для действительных чисел). Поэтому $\sqrt{-a^2} = \pm ai$.

Доказано, что корень $\sqrt[n]{z}$ всегда существует и имеет ровно n различных значений, если $z \neq 0$. Очевидно, $\sqrt[n]{0} = 0$.

Тригонометрическая форма. Комплексное число $z=a+bi$ геометрически изображается точкой $M(a, b)$ или вектором $\overrightarrow{OM}$ с началом в точке O и с концом в точке M (рис. 1). Для задания комплексного числа достаточно указать изображающую его точку M или вектор $\overrightarrow{OM}$. Положение точки M ранее определялось ее координатами a и b.

Однако положение точки M можно характеризовать и другим способом. Обозначим через r расстояние точки M от начала координат (т. е. длину вектора $\overrightarrow{OM}$), а через φ — угол, который образует вектор $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox, отсчитываемый от положительного направления оси (рис. 4). Очевидно, что заданные величин r и φ однозначно определяет положение точки M на плоскости.

Из тригонометрии известно, что

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r},$$

откуда

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi. \tag{28}$$

Поэтому

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{29}$$

Правая часть равенства (29) называется *тригонометрической формой* комплексного числа z, тогда как запись z в виде $a+bi$ называется его *алгебраической формой*.

Из формул (28) или непосредственно из рис. 4 получим, что

$$r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} \ (a \neq 0). \tag{30}$$

Число r является неотрицательным действительным числом, причем оно равно нулю только для $z=0$. Число r называется *модулем* комплексного числа z и обозначается символом $|z|$.

Угол φ называется *аргументом* числа z и обозначается символом $\arg z$. Угол φ определяется с точностью до $2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), так как углам φ и $\varphi+2k\pi$ при одинаковом r соответствует одна и та же точка M. Аргумент не определен только для $z=0$.

У равных комплексных чисел модули равны, а аргументы могут отличаться только на $2k\pi$.

Для перехода от алгебраической формы к тригонометрической форме удобно сначала изобразить комплексное число точкой или вектором и затем по формулам (30) найти $|z|$ и $\arg z$ (при определении аргумента φ по найденному значению $\operatorname{tg}\varphi$ нужно учитывать координатную четверть, в которой лежит изображающая точ-

ка). Переход от тригонометрической формы к алгебраической форме очевиден.

Отметим, что если некоторое комплексное число z записано в виде

$$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

где $\rho > 0$ и α — действительные числа, то ρ является модулем числа z, а α — его аргументом.

В самом деле, для этого числа z, очевидно, $a = \rho\cos\alpha$ и $b = \rho\sin\alpha$. Тогда $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\rho^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = \rho$,

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\rho\cos\alpha}{\rho} = \cos\alpha, \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{\rho\sin\alpha}{\rho} = \sin\alpha,$$

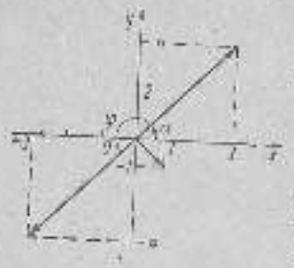


Рис. 5

откуда $\varphi = \alpha$ (с точностью до $2k\pi$).

Пример. Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

1) $z = -3$, 2) $z = 2i$, 3) $z = 1 - i$,
4) $z = -3 - 4i$.

Решение. 1) Отрицательные действительные числа лежат на отрицательной полуоси Ox (рис. 5). Следовательно, их аргумент равен π, а модули совпадают с абсолютными величинами этих чисел. Поэтому $r = |-3| = 3$, $\varphi = \arg(-3) = \pi$ и $-3 = -3(\cos\pi + i\sin\pi)$.

2) Числа вида bi, где $b > 0$, лежат на положительной полуоси Oy. Следовательно, их аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, а модуль совпадает с b ($r = \sqrt{a^2+b^2} = b$, $b > 0$). Поэтому

$$r = |2i| = 2, \quad \varphi = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$$

и

$$2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Заметим, что вторая из формул (30) здесь не применима.

3) По формулам (30) найдем для числа $z = 1 - i$, что

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{1} = -1.$$

Изображающая число z точка лежит в IV четверти или в первой отрицательной четверти (рис. 5). Поэтому для аргумента φ можно взять значения $\frac{7}{4}\pi$ или $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Следовательно,

$$1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Заметим, что равенство

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

не является тригонометрической формой числа $1 - i$.

4) По формулам (30) найдем для числа $z = -3 - 4i$, что

$$r = 5, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3}.$$

Учитывая положение изображающей точки (она лежит в III четверти), для φ остается найти такое значение, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3}$ и $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$ (рис. 5).

Как видно из рис. 5, $\varphi = \pi + \alpha$, где α — острый угол и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. Поэтому $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$ (см. гл. XII, § 3), т. е. $\varphi = \pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$. Тогда

$$-3 - 4i = 5\left[\cos\left(\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right)\right].$$

Выясним геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$. Этим числам соответствуют на плоскости точки $M_1(a_1, b_1)$ и $M_2(a_2, b_2)$.

Так как $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$, то

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

Правая часть полученного равенства есть расстояние между точками M_1 и M_2 (см. формулу 17). Следовательно,

$$|z_1 - z_2| = M_1M_2,$$

т. е. модуль $|z_1 - z_2|$ равен расстоянию между точками на плоскости, изображающими числа z_1 и z_2.

Пусть z_0 и r — заданные числа, причем z_0 — комплексное, а r — действительное и положительное. Рассмотрим окружность с центром в точке M_0, изображающей z_0, и радиусом, равным r. Обозначим через $M(x, y)$ точку на этой окружности. Тогда комплексное число $z = x + yi$ удовлетворяет равенству $|z - z_0| = r$.

Верно и обратное, т. е. из равенства $|z - z_0| = r$ вытекает, что точка, изображающая число z, лежит на указанной окружности. Таким образом, равенство

$$|z - z_0| = r \qquad (*)$$

можно рассматривать как уравнение окружности с центром в точке M_0 и радиусом, равным r.

Запишем равенство (*) в другом виде. Пусть $z_0 = a + bi$. Тогда $|z - z_0| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ и (*) означает, что

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

или

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{31}$$

Заметим, что уравнение (31) можно сразу получить из формулы (17).

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Умножение. Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)].$$

Применяя известные из тригонометрии формулы сложения (гл. X), окончательно получим:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{32}$$

Итак, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Деление.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) - i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \tag{33}$$

Итак, при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Из формул (32) и (33) видно, что

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0),$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Возведение в степень. Применяя формулу (32) последовательно n раз, получим:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{34}$$

Формулу (34) называют формулой Муавра.

Например, вычислим

$$z = \frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1+i)^8}.$$

Имеем

$$|z| = \frac{|1 - i\sqrt{3}|^5}{|1+i|^8} = \frac{2^5}{(\sqrt{2})^8} = 1,$$

$$\arg z = \arg(1 - i\sqrt{3})^5 - \arg(1+i)^8 = 5\arg(1 - i\sqrt{3}) - 8\arg(1+i).$$

Так как

$$\arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4},$$

то

$$\arg z = 5\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\cdot\frac{\pi}{4} = -\frac{9}{2}\pi.$$

Поэтому

$$z = 4\left(\cos\frac{9}{2}\pi + i\sin\frac{9}{2}\pi\right) = 4i.$$

Извлечение корня. Справедлива следующая теорема. Корень $\sqrt[n]{z}$ всегда существует и имеет ровно n различных значений, если $z \neq 0$.

Доказательство. Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Положим

$$w = \sqrt[n]{z} = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Тогда $w^n = z$ и по формуле Муавра

$$w^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha),$$

т. е.

$$\rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Так как модули равных комплексных чисел одинаковы, а аргументы могут отличаться только на $2k\pi$, то $\rho^n = r$, $n\alpha = \varphi + 2k\pi$. Отсюда $\rho = \sqrt[n]{r}$ (корень берется арифметический),

$$\alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Тогда

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \tag{35}$$

В формуле (35) достаточно положить $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

В самом деле, для этих значений k все получаемые по формуле (35) значения корней будут различны, так как их аргументы не отличаются друг от друга на число, кратное 2π.

При $k = n$ получаем $\frac{\varphi + 2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$ и соответствующий корень совпадает с корнем, который отвечает значению $k = 0$.

Любое другое целое k представимо в виде $k = nq + l$, q — целое, $0 \leqslant l < n$. Поэтому

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2l\pi}{n} + 2q\pi.$$

Отсюда следует, что соответствующий корень совпадает с корнем, отвечающим значению $k=1$. Теорема доказана.

Например, вычислим $\sqrt[3]{-1}$.
Имеем

$$\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)}=\sqrt[3]{1}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right).$$

Давая k значения 0, 1, 2, получим три значения $\sqrt[3]{-1}$:

при $k=0$ $\quad \omega_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

при $k=1$ $\quad \omega_2=-1$,

при $k=2$ $\quad \omega_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Рассмотрим решения некоторых задач на комплексные числа.

Пример 1. Найти действительные числа x и y, если

$$(5x-3y)+(x-2y)i=6-(3-x+y)i.$$

Решение. Используя условие равенства комплексных чисел, получаем

$$\begin{cases}5x-3y=6,\\ x-2y=3-x+y.\end{cases}$$

Из этой системы определяем неизвестные x и y:

$$x=-\frac{3}{3},\quad y=-\frac{28}{3}.$$

Пример 2. Возвести в степень

$$(1+i)^{21},\quad (1-i)^{21}.$$

Решение. Можно воспользоваться формулой бинома Ньютона, но проще поступить по-другому. Заметим, что

$$(1+i)^2=2i,\ (1-i)^2=-2i.$$

Тогда

$$(1+i)^{21}=[(1+i)^2]^{10}=(2i)^{10}=-2^{10};$$

$$(1-i)^{21}=[(1-i)^2]^{10}\cdot(1-i)=(-2i)^{10}\cdot(1-i)=-2^{10}(1-i).$$

Пример 3. Извлечь корень $\sqrt{5+12i}$.

Решение. Пусть $\sqrt{5+12i}=x+yi$. По определению корня имеем

$$(x+yi)^2=5+12i$$

или

$$(x^2-y^2)+2xyi=5+12i,$$

откуда получаем систему

$$\begin{cases}x^2-y^2=5,\\ 2xy=12.\end{cases}\qquad (*)$$

Возведя обе уравнения в квадрат и сложив их, получим

$$(x^2-y^2)^2=25+144 \text{ и } x^2+y^2=13.$$

Тогда из системы

$$\begin{cases}x^2+y^2=13,\\ x^2-y^2=5,\end{cases}$$

определим неизвестные x и y:

$$x=\pm 3,\ y=\pm 2.$$

Из второго уравнения системы (*) следует, что знаки у x и y совпадают. Поэтому $x_1=3$, $y_1=2$; $x_2=-3$, $y_2=-2$.

Итак, $\sqrt{5+12i}$ имеет два значения

$$3+2i \text{ и } -3-2i.$$

Пример 4. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^2+|z|=0$.

Решение. Пусть $z=x+yi$. Тогда

$$z^2=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi,\ |z|=\sqrt{x^2+y^2},$$

и данное уравнение можно записать в виде

$$(x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2})+2xyi=0.$$

Последнее возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0,\\ xy=0.\end{cases}\qquad (**)$$

Из второго уравнения системы (*) следует, что либо $x=0$, либо $y=0$.

Если $x=0$, то первое уравнение (*) принимает вид

$$-y^2+\sqrt{y^2}=0,\ \text{т. е. } -y^2+|y|=0.$$

Так как $y^2=|y|^2$ (по свойству абсолютной величины действительного числа), то имеем

$$|y|\cdot(|y|-1)=0,$$

откуда либо $|y|=0$, либо $|y|-1=0$.

Таким образом, при $x=0$ имеем: $y_1=0$, $y_2=1$, $y_3=-1$.

Если $y=0$, то из первого уравнения системы (*) получим, что $x^2+\sqrt{x^3}=0$, т. е. $x^2-|x|=0$. Но это возможно только при $x=0$ (ведь x — действительное число!).

Итак, данное уравнение имеет три корня:

$$z_1=0,\ z_2=i,\ z_3=-i.$$

Пример 5. Комплексные числа удовлетворяют условию $|z-i|=|z+2|$. Где расположены точки, изображающие эти числа?

Решение. Используем геометрический смысл модуля разности. Модули $|z-i|$ и $|z-2|=|z-(-2)|$ равно соответственно расстояниям точки, изображающей число z, до точек $A(0, 1)$ и $B(-2, 0)$.

По условию эти расстояния равны. Следовательно, решением задачи будет геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B, т. е. перпендикуляр, проведенный через середину отрезка AB.

Пример 6. Комплексные числа удовлетворяют условиям $1<|z|<2$, $\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{4}$. Где расположены точки, изображающие эти числа?

Решение. Так как $1<|z|<2$, то точки, удовлетворяющие этому условию, лежат внутри кольца, ограниченного окружностями с центром в точке O и радиусами 1 и 2. А так как $\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{4}$, то решению задачи удовлетворяют только точки, лежащие внутри области, изображенной на рис 6.

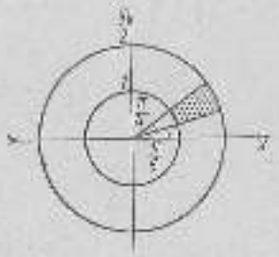


Рис. 6

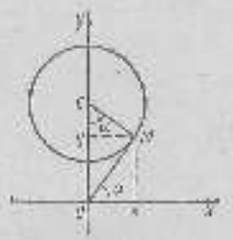


Рис. 7

Пример 7. Среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z-25i|\leqslant 15$, найти число, имеющее наименьший аргумент.

Решение. Условию $|z-25i|\leqslant 15$ удовлетворяют только числа, изображаемые точками, которые лежат внутри и на границе круга с центром в точке $C(0, 25)$ и радиусом 15 (рис. 7).

Как видно из рис. 7, числу с наименьшим аргументом отвечает точка M, в которой прямая OM касается окружности. Из прямоугольного треугольника OMC найдем, что

$$OM=\sqrt{OC^2-MC^2}=\sqrt{25^2-15^2}=20,$$

$$\cos\alpha=\frac{MC}{OC}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5},\quad \sin\alpha=\frac{OM}{OC}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}.$$

Поэтому $x=OM\cdot\cos\alpha=12$, $y=OM\cdot\sin\alpha=16$, значит искомое число $z=12+16i$.

Пример 8. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z=1+i\operatorname{tg}\alpha$, где α — данный угол, причем

а) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Решение. Преобразуем данное число z:

$$z=1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

а) Так как число $\frac{1}{\cos\alpha}>0$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и в скобке стоят косинус и синус одного и того же аргумента, то полученное выражение есть тригонометрическая форма числа z;

б) при $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ число $\frac{1}{\cos\alpha}<0$ и, значит, выполненное выше преобразование не дает тригонометрической формы числа z.

Преобразуем z по-другому:

$$z=-\frac{1}{\cos\alpha}[(-\cos\alpha)+i(-\sin\alpha)]=$$

$$=-\frac{1}{\cos\alpha}[\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha)],$$

что и дает тригонометрическую форму числа z при условии $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Пример 9. Найти аргумент числа $w=z^2-z$, если известно, что $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$.

Решение. Имеем:

$$w=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2-(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$

$$=(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+2i\sin\varphi\cos\varphi)-(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$

$$=(\cos 2\varphi-\cos\varphi)+i(\sin 2\varphi-\sin\varphi).$$

Преобразуя выражения в скобках, получаем, что

$$w = -2\sin\frac{3\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2} + i\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{3\varphi}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\left(-\sin\frac{3\varphi}{2} + i\cos\frac{3\varphi}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\varphi}{2}\right)\right].$$

При $0 < \varphi < 2\pi$ число $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$ и полученное выражение есть тригонометрическая форма числа w. Поэтому $\arg w = \frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2}$.

При $\varphi = 0$ число $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$, откуда $w = 0$. В этом случае аргумент числа w не определен.

ГЛАВА II

РАВЕНСТВА. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ. НЕРАВЕНСТВА

§ 1. РАВЕНСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Алгебраическим выражением называется выражение, составленное из чисел (обозначенных буквами или цифрами) при помощи алгебраических действий (сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня)*.

Алгебраическое выражение, содержащее величины $x, y, \ldots, z$ сокращенно записывается в виде $A(x, y, \ldots, z)$. Заранее должно быть указано, на каком множестве оно рассматривается, т. е. какие значения могут принимать величины $x, y, \ldots, z$ — действительные или комплексные, или целые и т. д.

Значения величин, при которых выполнимы все действия, указанные в выражении A, называются *допустимыми* значениями. Они образуют *область определения* или *множество допустимых значений* выражения A. Иногда в связи с конкретным смыслом A на допустимые значения налагаются дополнительные условия.

В дальнейшем алгебраические выражения будем рассматривать на множестве **действительных** чисел, если не сделано специальных оговорок.

При совместном рассмотрении нескольких алгебраических выражений нужно брать общую часть их областей определения. Например, рассматривая совместно выражения

$$A = \frac{x}{x+1} \quad \text{и} \quad B = \frac{y}{x(y+2)},$$

считают, что $x \neq -1$, $x \neq 0$, $y \neq -2$.

Два алгебраических выражения A и B, соединенные знаком равенства $(=)$, образуют равенство:

$$A = B. \tag{1}$$

При любом конкретном выборе значений величин (из общей части областей определения выражений A и B) равенство (1) обращается в числовое равенство. Полученное числовое равенство может

* Предполагается, что указанные действия применяются конечное число раз.

быть справедливым (верным) или несправедливым (ложным). Например, очевидно, что равенство $x^2+1=x^4$ является несправедливым для любого действительного числа x.

Определение 1. Равенство, верное для всех допустимых значений, входящих в него величин, называется *тождеством*. Тождествами называются также и все верные числовые равенства.

Для обозначения тождественности двух выражений применяется также символ $\equiv$:

$$A(x, y, \ldots, z) \equiv B(x, y, \ldots, z). \qquad (2)$$

Простейшими тождествами являются равенства, выражающие основные свойства арифметических действий:

$$a+b=b+a,\ (a+b)+c=a+(b+c),\ a\cdot b=b\cdot a,$$

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c),\ (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c.$$

Определение 2. Равенство, верное не для всех допустимых значений входящих в него величин, называется *уравнением*.

Таким образом, равенства (1) бывают двух видов: тождества и уравнения.

Замечание. Понятия равенства, тождества и уравнения устанавливаются не только для алгебраических, но и для любых математических выражений.

Тождества (2) обладают следующими основными свойствами:

1) если $A\equiv B$ и $B\equiv C$, то $A\equiv C$;

2) если $A\equiv B$, то $A+C\equiv B+C$;

3) если $A\equiv B$, то $A\cdot C\equiv B\cdot C$;

где выражения A, B и C рассматриваются на одном и том же множестве допустимых значений.

Переход от алгебраического выражения A к тождественному с ним алгебраическому выражению B называется *тождественным преобразованием*.

§ 2. КЛАССИФИКАЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Алгебраические выражения подразделяются на рациональные и иррациональные.

Алгебраическое выражение называется *рациональным* относительно какой-либо величины, входящей в это выражение, если над этой величиной производятся только действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Алгебраическое выражение называется *иррациональным* относительно какой-нибудь величины, если оно содержит эту величину под знаком корня (радикала).

Если говорят «рациональное алгебраическое выражение», не добавляя относительно каких величин, то предполагается, что оно

рационально относительно всех величин, которые входят в это выражение. Например, выражения

$$2\mid x-x^3,\ \frac{x^3-y}{x^2+y^2+1}$$

— рациональные выражения, а выражения $\sqrt{x^3+1}$, $y^2\sqrt[3]{x}+y\sqrt[3]{x^2}$ иррациональны относительно x и последнее из них рационально относительно y.

Рациональные выражения подразделяются на целые и дробные.

Целым рациональным выражением или *многочленом* (полиномом) относительно какой-нибудь величины называется выражение, в котором над этой величиной производятся только действия сложения, вычитания и умножения. Например, $y^2\sqrt[3]{x}+y\sqrt[3]{x^2}$ — многочлен относительно y.

Многочлен n-й степени относительно x имеет вид

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \qquad (3)$$

где $a_0\neq 0$, $n\geqslant 0$ — целое число, если его расположить по убывающим степеням x. Тот же многочлен $P(x)$ можно расположить и в каком порядке, например, по возрастающим степеням x.

Многочленом нулевой степени является любое не равное нулю число. Число нуль также считается многочленом; это единственный многочлен, степень которого не определена.

Многочлен или целое рациональное выражение $P(x, y, \ldots, z)$ является суммой членов вида

$$ax^ky^l\ldots z^q, \qquad (4)$$

где a — числовой коэффициент, k, l, …, q — неотрицательные целые числа.

Выражение (4) называется *одночленом*, а сумма $k+l+\ldots+q$ — *степенью* одночлена. Очевидно, что одночлен — частный случай многочлена.

Многочлен $P(x, y, \ldots, z)$ равен сумме одночленов. Наибольшая из степеней одночленов, составляющих многочлен, называется степенью многочлена (относительно совокупности величин $x, y, \ldots, z$).

Дробным рациональным выражением или *алгебраической дробью* называется отношение двух многочленов

$$\frac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)}. \qquad (5)$$

Алгебраическое выражение $A(x, y, \ldots, z)$ называется *однородным* с показателем однородности α, если при любом t и $x, y, \ldots, z$

$$A(tx, ty, \ldots, tz)=t^\alpha\cdot A(x, y, \ldots, z) \qquad (6)$$

(лишь бы левая и правая части этого соотношения имели смысл).

Например, для $A=\sqrt{2x-y}$ имеем

$$A(tx, ty)=\sqrt{2tx-ty}=\sqrt{t}\cdot\sqrt{2x-y}=t^{\frac{1}{2}}A(x, y),$$

следовательно, выражение A однородно с показателем $\alpha=\frac{1}{2}$.

Выражение $B(x, y)=x-y+2$ не является однородным, так как условие (6) здесь не выполняется ни при каком α.

Замена в алгебраическом выражении $A(x, y, \ldots, z)$ первой буквы второй, второй буквы третьей и т. д., наконец, последней буквы первой называется *круговой перестановкой* величин $x, y, \ldots, z$. На рис. 8 изображена круговая перестановка трех величин. Она переводит x в y, y в z, z в x. Повторная круговая перестановка переводит y в z, z в x, x в y.

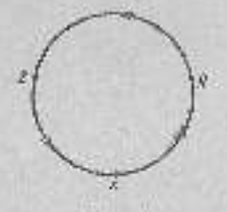


Рис. 8

Алгебраическое выражение $A(x, y, \ldots, z)$ называется *симметрическим*, если оно не изменяется при любой круговой перестановке. Например, выражение

$$\frac{x-y}{(x-z)(z-y)}+\frac{y-z}{(x-y)(x-z)}+\frac{z-x}{(y-z)(y-x)}$$

является симметрическим, а выражение $x+y-z$ не является симметрическим.

§ 3. ДЕЙСТВИЯ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ. ТЕОРЕМА БЕЗУ

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены относительно x с любыми комплексными коэффициентами.

Определение. Два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ считаются равными (или тождественно равными),

$$P(x)=Q(x),$$

в том лишь случае, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях x.

Очевидно, что равные многочлены принимают при всех значениях x одинаковые значения. В курсе высшей математики доказывается и обратное: если значения двух многочленов равны при всех значениях x, то многочлены равны, т. е. их коэффициенты при одинаковых степенях x совпадают.

Многочлены можно складывать, вычитать, умножать друг на друга. *Суммой (разностью)* двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ называется многочлен, у которого коэффициент при каждой степени x равен сумме (разности) коэффициентов при той же степени x в многочленах $P(x)$ и $Q(x)$. Чтобы умножить два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$, нужно каждый член многочлена $P(x)$ умножить на каждый член многочлена $Q(x)$ и результаты сложить.

Действия сложения, вычитания и умножения многочленов обладают основными свойствами арифметических действий.

Пусть $P(x)$ и $D(x)$ — два многочлена, причем степень многочлена $P(x)$ не меньше степени многочлена $D(x)$.

Если существует многочлен $Q(x)$ такой, что справедливо равенство

$$P(x)=D(x)\cdot Q(x), \tag{7}$$

то говорят, что многочлен $P(x)$ делится (или нацело делится) на многочлен $D(x)$. При этом $P(x)$ называется *делимым*, $D(x)$ — *делителем*, а $Q(x)$ — *частным*.

Если такой многочлен $Q(x)$ не существует, то говорят, что многочлен $P(x)$ не делится на многочлен $D(x)$, и тогда рассматривают деление с остатком.

Пусть многочлен $D(x)$ — степени не ниже первой.

Определение. Разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $D(x)$ с остатком означает представить многочлен $P(x)$ в виде

$$P(x)=D(x)\cdot Q(x)+R(x), \tag{8}$$

где $Q(x)$ и $R(x)$ — многочлены, причем степень $R(x)$ меньше степени $D(x)$.

В равенстве (8) $P(x)$ называется *делимым*, $D(x)$ — *делителем*, $Q(x)$ — *частным* и $R(x)$ — *остатком*. В частности, если $R(x)=0$, то получим формулу (7), т. е. $P(x)$ делится на $D(x)$.

Справедлива следующая теорема, которая приводится без доказательства.

Теорема. *Для любых двух многочленов $P(x)$ и $D(x)$ всегда можно найти и притом однозначно многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, для которых справедливо равенство (8).*

Для деления многочленов обычно применяется правило «деления углом». С этой целью располагают многочлены по убывающим степеням x и находят старший член частного $Q(x)$ из условия, что при умножении его на старший член делителя $D(x)$ получается старший член делимого $P(x)$. Найденный член частного умножают затем на делитель и вычитают из делимого. Следующий член частного определяют из условия, что он при умножении на старший член делителя дает старший член полученной разности и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока степень новой разности не окажется меньше степени делителя. Эта последняя разность и будет остатком от деления $R(x)$.

Пример 1. Выполнить деление, если

$$P(x)=x^3+2x+x^2-x^3+1,\ D(x)=1+x^2.$$

Решение. Для выполнения деления применяем правило «деления углом». Прежде всего располагаем $P(x)$ и $D(x)$ по убывающим степеням x.

Выкладки производятся так:

$$\begin{array}{r|l} x^4+x^3+x^2+2x+1 & x^2+1 \\ \underline{x^4\qquad\quad+x^2} & x^2+x \\ x^3+2x+1 & \\ \underline{x^3\qquad+x} & \\ x+1 & \end{array}$$

Отсюда $Q(x)=x^2+x$, $R(x)=x+1$. Следовательно,

$$x^4+x^3+x^2+2x+1=(x^2+1)(x^2+x)+x+1.$$

Пример 2. Выполнить деление, если

$$P(x)=x^3-1,\quad D(x)=x^2+x+1.$$

Решение. Здесь $Q(x)=x-1$, $R(x)=0$, так как $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Деление производится нацело, т. е. без остатка.

Замечание. Не следует смешивать делимость многочленов с делимостью их значений. Например, $P(x)=x^2-1$ делится на $D(x)=x-1$. Однако не имеет смысла говорить о делимости их значений при $x=1$, так как $D(1)=1-1=0$.

Деление с остатком многочлена

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \qquad (a_0\neq 0)$$

на двучлен $x-c$ производится следующим образом (здесь a_0, a_1, …, a_n, c — любые комплексные числа). Пусть

$$P(x)=(x-c)\cdot Q(x)+R, \qquad (9)$$

где $Q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$, а R — некоторое число, так как степень R в равенстве (9) должна быть меньше степени двучлена $x-c$, т. е. меньше единицы.

В силу равенства (9) имеем:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=(x-c)\cdot(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1})+R.$$

Сравнивая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1-cb_0,\ a_2=b_2-cb_1,\ \ldots,$$
$$a_{n-1}=b_{n-1}-cb_{n-2},\ a_n=R-cb_{n-1},$$

откуда

$$b_0=a_0,\ b_k=cb_{k-1}+a_k \qquad (k=1,2,\ldots,n), \qquad (10)$$

где

$$b_n=R.$$

Из равенств (10) следует, что коэффициент b_k частного $Q(x)$ получается умножением предыдущего коэффициента b_{k-1} на c и прибавлением соответствующего коэффициента a_k многочлена $P(x)$; так как $R=b_n=cb_{n-1}+a_n$, то и остаток находится по этому же правилу.

Таким образом, формулы (10) позволяют, не прибегая к «делению углом», определять коэффициенты частного $Q(x)$ и остаток R при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x-c$.

Практически вычисления производятся по следующей схеме, называемой схемой Горнера:

$$\begin{array}{cccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \qquad \underline{\mid c} \\ + & & b_0c & b_1c & \ldots & b_{n-1}c \\ \hline & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & \underline{b_n=R} \end{array}$$

Пример 3. Разделить $P(x)=2x^3-x+3$ на $x+1=x-(-1)$.

Решение. Составим схему Горнера:

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 0 & -1 & 3 & \qquad \underline{\mid -1} \\ + & & -2 & 2 & -1 & \\ \hline & 2 & -2 & 1 & \underline{2=R} & \end{array}$$

Искомое частное $Q(x)=2x^2-2x+1$, остаток $R=2$. Следовательно, $2x^3-x+3=(x+1)\cdot(2x^2-2x+1)+2$.

Следующая важная теорема позволяет найти остаток от деления $P(x)$ на $x-c$, не выполняя самого процесса деления.

Теорема Безу. *Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x-c$ равен значению многочлена $P(x)$ при $x=c$.*

Доказательство. Выполнив деление многочлена $P(x)$ на двучлен $x-c$, получаем равенство

$$P(x)=(x-c)\cdot Q(x)+R,$$

где остаток R — некоторое число.

Придавая x в этом равенстве значение c, находим

$$P(c)=(c-c)\cdot Q(c)+R=R,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $ax+b$ $(a\neq 0)$ равен значению многочлена $P(x)$ при $x=-\dfrac{b}{a}$.

В самом деле, согласно формуле (8)

$$P(x)=(ax+b)\cdot Q(x)+R,$$

где R — снова число.

Подставляя в это равенство $x=-\dfrac{b}{a}$, видим, что $R=P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$.

Например, остаток от деления многочлена $P(x)=8x^3+4x^2+1$ на двучлен $2x+i$ согласно замечанию (1) равен числу

$$P\left(-\frac{i}{2}\right)=8\left(-\frac{i}{2}\right)^3+4\left(-\frac{i}{2}\right)^2+1=-i^3+i^2+1=i.$$

2. Теорема верна и в том случае, если $P(x, y, \ldots, z)$ — многочлен относительно $x, y, \ldots, z$, а деление происходит на разность $x-C(y, \ldots, z)$, где $C(y, \ldots, z)$ — многочлен.

В самом деле, роль числа c здесь играет многочлен $C(y, \ldots, z)$, а вместо многочлена $P(x)$ имеем многочлен $P(x, y, \ldots, z)$.

Определение. Число c называется *корнем* многочлена $P(x)$, если при значении $x=c$ многочлен принимает значение, равное нулю, т. е. $P(c)=0$.

Следствие из теоремы Безу. *Для делимости многочлена $P(x)$ на двучлен $x-c$ необходимо и достаточно, чтобы число c было корнем многочлена $P(x)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $P(x)$ делится на $x-c$. Это значит, что остаток $R=0$. С другой стороны, по теореме Безу остаток $R=P(c)$. Отсюда следует, что $P(c)=0$, т. е. c — корень многочлена $P(x)$.

Достаточность. Пусть c — корень $P(x)$. Это значит, что $P(c)=0$. С другой стороны, по теореме Безу остаток $R=P(c)$. Отсюда следует, что $R=0$, т. е. $P(x)$ делится нацело на $x-c$.

Из теоремы Безу вытекают и другие следствия, которые используются для разложения многочлена на множители.

Определение. Преобразование многочлена к виду произведения двух или нескольких многочленов ненулевой степени называется *разложением многочлена* на множители. Если многочлен может быть разложен на множители, то он называется *приводимым*, в противном случае — *неприводимым* или неразложимым на множители.

Очевидно, что многочлен $x+3$ неприводим, на каком бы множестве — действительных или комплексных чисел его ни рассматривать. Многочлен x^2+1 неприводим на множестве действительных чисел и приводим на множестве комплексных чисел:

$$x^2+1=(x+i)\cdot(x-i).$$

Задача о разложении многочлена на множители аналогична задаче о разложении целых чисел на множители. Здесь неприводимые многочлены играют роль простых чисел, а приводимые многочлены — составных чисел.

Многочлен $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ $(a_0\neq 0)$ с произвольными комплексными коэффициентами приводим на множестве комплексных чисел (см. гл. III, § 4). При этом

$$P(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни многочлена $P(x)$.

В частности, справедливо разложение на множители квадратного трехчлена (см. гл. III, § 5)

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \qquad (a\neq 0)$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена ax^2+bx+c.

Рассмотрим вопрос о разложении на множители многочлена вида

$$P(x)=x^m\mp c^m.$$

Из теоремы Безу вытекает:

1. Многочлен x^m-c^m делится на двучлен $x-c$ при любом натуральном m, т. е. *разность одинаковых степеней делится на разность их оснований.*

2. *Многочлен x^m-c^m делится на $x+c$ при любом четном m, т. е. разность одинаковых четных степеней делится на сумму их оснований.*

3. Многочлен x^m+c^m делится на $x+c$ при любом нечетном m, т. е. *сумма одинаковых нечетных степеней делится на сумму их оснований.*

Докажем, например, последнее утверждение. В самом деле, пусть $P(x)=x^m+c^m$. Замечая, что

$$P(-c)=(-c)^m+c^m \quad \text{и} \quad (-c)^m=-c^m$$

при нечетных m, получаем:

$$P(-c)=-c^m+c^m=0.$$

Следовательно, $P(x)$ делится на $x-(-c)=x+c$. Аналогично доказываются первые два утверждения.

Выполняя деление (по правилу «деления углом» или по схеме Горнера), нетрудно получить, что

$$x^m-c^m=(x-c)(x^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots+c^{m-2}x+c^{m-1}).$$

Чтобы получить частные от деления x^m-c^m на $x+c$ при m четном и от деления x^m+c^m на $x+c$ при m нечетном, заменим в полученном выше равенстве число c на $(-c)$:

$$x^m-c^m=(x+c)(x^{m-1}-cx^{m-2}+c^2x^{m-3}-\ldots+c^{m-2}x-c^{m-1})$$

(m — четное число),

$$x^m+c^m=(x+c)(x^{m-1}-cx^{m-2}+c^2x^{m-3}-\ldots-c^{m-2}x+c^{m-1})$$

(m — нечетное число).

Советуем читателю доказать, что:

1) сумма одинаковых степеней x^m+c^m не делится на разность их оснований $x-c$;

2) разность одинаковых нечетных степеней не делится на сумму их оснований;

3) сумма одинаковых четных степеней не делится на сумму их оснований.

Существуют различные способы разложения многочлена на множители (см. гл. II, § 4). Одним из таких способов является так называемый метод неопределенных коэффициентов. Идея его состоит в следующем.

Пусть нам известно, что в результате некоторых преобразований получается выражение определенного вида и неизвестны лишь коэффициенты в этом выражении. Тогда эти коэффициенты обозначают буквами и рассматривают как неизвестные. Затем для определения этих неизвестных составляется система уравнений.

Например, в случае многочленов эти уравнения составляют из условия равенства коэффициентов при одинаковых степенях x у двух равных многочленов.

Поясним сказанное на следующем примере.

Пример 4. Методом неопределенных коэффициентов показать, что выражение $(x-1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ есть квадрат трехчлена.

Решение. Если данное выражение есть квадрат трехчлена, то справедливо равенство

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=(x^2+ax+b)^2,$$

где a и b — искомые коэффициенты.

Раскрывая в этом равенстве скобки и сравнивая коэффициенты при x^3 и x^2 в левой и правой части, получаем систему

$$\begin{cases} 2a=10, \\ a^2+2b=35, \end{cases}$$

откуда находим $a=5$, $b=5$. Убеждаемся, что при этих значениях a и b также совпадают коэффициенты при x и x^0.

Итак, данное выражение равно $(x^2+5x+5)^2$.

§ 4. МНОГОЧЛЕНЫ (РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ)

1. Делимость многочленов. При решении задач на делимость многочленов нужно отчетливо представлять себе действие деления с остатком и применять теорему Безу и ее следствие о необходимом и достаточном условии делимости многочлена на двучлен.

Пример 1. Не производя деления, найти остатки от деления многочлена $P(x)=2x^4-3x^2+2x-1$ на квадратные трехчлены:

а) x^2-x-2, б) x^2+1.

Решение. а) Находим корни трехчлена x^2-x-2:

$x_1=2$, $x_2=-1$ и разложим трехчлен на множители:

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$.

Остаток R есть многочлен первой степени $ax+b$. Следовательно, $P(x)=(x-2)(x+1)\cdot Q(x)+ax+b$, где $Q(x)$ — частное.

Придавая x значения, равные корням трехчлена, имеем

$$P(2)=2a+b, \quad P(-1)=-a+b,$$

$$P(2)=25, \quad P(-1)=-2.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 2a+b=25, \\ -a+b=-2, \end{cases}$$

находим $a=9$, $b=7$. Итак, $R=9x+7$.

б) в равенстве $P(x)=(x^2+1)\cdot Q(x)+ax+b$ положим $x=i$ (i — корень многочлена x^2+1).

Тогда $2i^3-3i^2+2i+1=ai+b$ или $5+2i=b+ai$, откуда $b=5$, $a=2$. Итак, $R=2x+5$.

Пример 2. Найти значения a, b и c, при которых многочлен $P(x)=2x^3-ax^2+bx+c$ делится на $x+2$ без остатка, а при делении на x^2-1 дает в остатке x.

Решение. Из первого условия следует, что $P(-2)=0$, т. е. $32-4a-2b+c=0$. Из условия деления на x^2-1 с остатком, равным x, имеем

$$P(x)=(x^2-1)\cdot Q(x)+x.$$

Полагая в этом равенстве $x=1$ и $x=-1$, получаем:

$$2-a+b+c=1,$$

$$2-a-b+c=-1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 4a-2b-c=32 \\ a-b-c=1 \\ a+b-c=3 \end{cases}$$

находим $a=\frac{29}{5}$, $b=1$, $c=\frac{22}{5}$.

Пример 3. При каких значениях a и b многочлен $x^4-3x^3+3x^2+ax+b$ делится без остатка на трехчлен x^2-3x+1?

Решение. Легко проверить, что корни трехчлена комплексные. Поэтому применять в данном случае метод, основанный на теореме Безу нецелесообразно.

1 способ. Применяя метод неопределенных коэффициентов:

$$x^4-3x^3+3x^2+ax+b=(x^2-3x+1)(x^2+px+q).$$

Приравнивая коэффициенты при x^3, x^2, x и свободные члены, получаем систему

$$\begin{cases} -3=p-3, \\ 3=q-3p+1, \\ a=-3q+4p, \\ b=q, \end{cases}$$

откуда находим: $p=0$, $q=-1$, $a=3$, $b=-1$.

II способ. Очевидно, что

$$x^4-3x^3-3x^2+ax+b-(x^4-3x^3+4x^2)+(-x^2-ax+b)=$$
$$=x^2(x^2-3x-4)+(-x^2-ax+b).$$

Отсюда следует, что для делимости на x^2-3x+4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $-x^2+ax+b=-(x^2-3x+4)$. Из этого равенства находим: $a=3$, $b=-4$.

Пример 4. При каких a и α многочлен x^3+ax+1 делится на двучлен $x-\alpha$ без остатка и частное от деления больше нуля при всех x?

Решение. Для нахождения частного применяем схему Горнера:

	1	0	a	1	α
+		α	α^2	$\alpha^3-a\alpha$	
	1	α	α^2-a	$\alpha^3-a\alpha+1=R$,	

откуда частное $Q(x)=x^2+\alpha x-(\alpha^2+a)$ и остаток $R=\alpha^3+a\alpha+1$. По условию $\alpha^3+a\alpha+1=0$, следовательно, $a=-\alpha^2-\frac{1}{\alpha}$ и $Q(x)=-x^2+\alpha x-\frac{1}{\alpha}$ $(\alpha\neq 0)$.

Так как по условию квадратный трехчлен $Q(x)$ принимает только положительные значения при всех x, то его дискриминант должен быть меньше нуля (см. гл. III, § 14)

$$\frac{\alpha^2}{4}+\frac{1}{\alpha}<0,$$

а это возможно только для отрицательных α и таких, что

$$\frac{\alpha^3+4}{4\alpha}<0,\ \text{т. е. } \alpha^3+4>0.$$

Итак, $-\sqrt[3]{4}<\alpha<0$, $a=-\alpha^2-\frac{1}{\alpha}$.

II. Разложение на множители. Рассмотрим различные приемы разложения многочленов на множители. В общем случае эти частные приемы не могут установить разложимости или неразложимости данного многочлена.

На практике отдельные приемы используются в различных их комбинациях и имеют важное значение.

1. Вынесение общего множителя и способ группировки. При использовании этого способа иногда целесообразно применение «искусственных» преобразований — разбиение отдельных членов на подобные слагаемые или введение сокращающихся членов.

Пример 5. Разложить на линейные множители многочлен $P(x)=x^3-3x-2$.

Решение. Имеем:

$$P(x)=(x^3-x)-(2x+2)=$$
$$=x(x+1)(x-1)-2(x+1)=(x+1)(x^2-x-2).$$

Так как $x^2-x-2=(x^2-1)-(x+1)=(x+1)(x-2)$, то $P(x)=(x+1)^2(x-2)$.

Пример 6. Представить в виде произведения двух множителей многочлен $P(x)=x^5+x+1$.

Решение. Замечая, что $P(x)=(x^5-x^2)+(x^2+x+1)$, получаем

$$x^5+x+1=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)=$$
$$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=$$
$$=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$$

2. Применение формул сокращенного умножения. Читателю хорошо известны формулы сокращенного умножения. С помощью этих формул суммы или разности представляются в виде произведения. Иногда полезно выделение квадратов.

Пример 7. Разложить на множители многочлен

$$P(x,y,z)=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2.$$

Решение. Выделяя полный квадрат, имеем:

$$P=(x^2-y^2-z^2)^2-4y^2z^2=$$
$$=(x^2-y^2-z^2-2yz)(x^2-y^2-z^2-2yz)=$$
$$=[x^2-(y+z)^2][x^2-(y-z)^2]=$$
$$=(x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z).$$

Пример 8. Разложить на множители многочлен

$$P(x,y,z)=(x-y)^5+(y-z)^5-(z-x)^5.$$

Решение. Представим $z-x$ в виде

$$z-x=(z-y)-(x-y)$$

и применим формулу

$$(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5=(a^5-b^5)-5ab(a-b)(a^3-2a^2b+2ab^2-b^3)=$$
$$=(a-b)[a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4-5ab(a^2-2ab+b^2)]=$$
$$=(a-b)(a^4-4a^3b+5a^2b^2-4ab^3+b^4).$$

Тогда получим

$$P=(x-y)^5+(y-z)^5+[(z-y)^5-(x-y)^5]=$$
$$=(x-y)(y-z)(z-x)[(x-y)^4+(x-y)^3(z-y)+(x-y)^2(z-y)^2+(x-y)(z-y)^3+(z-y)^4-5(x-y)^2(z-y)^2],$$

откуда $P=5(x-y)(y-z)(z-x)$.

3. Разложение квадратного трехчлена на множители. При использовании формулы

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\ (a\neq 0)$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена ax^2+bx+c, иногда целесообразно введение вспомогательных неизвестных.

Пример 9. Разложить многочлен

$$P(x)=(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$$

на множители с действительными коэффициентами.

Решение. Имеем

$$P(x)=(x^2+x+1)[(x^2+x+1)+1]-12=$$
$$=(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)-12.$$

Полагая $x^2+x+1=y$, имеем:

$$y^2+y-12=(y+4)(y-3),$$

так как корни трехчлена y^2+y-12 равны (-4) и 3. Переходя от y к x, получаем:

$$P(x)=(x^2+x+5)(x^2+x-2)=(x-1)(x+2)(x^2+x+5).$$

Пример 10. Разложить на линейные множители многочлен

$$P(x)=2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2.$$

Решение. Полагая $x^2+6x+1=y$, имеем многочлен

$$P(x,\ y)=2y^2+5(x^2+1)y+2(x^2+1)^2.$$

Рассматривая этот многочлен как квадратный трехчлен относительно y (считаем при этом члены с x коэффициентами), находим его корни:

$$y_{1,2}=\frac{-5(x^2+1)\pm\sqrt{25(x^2+1)^2-16(x^2+1)^2}}{4}=$$
$$=\frac{-5(x^2+1)\pm 3(x^2+1)}{4},$$

Откуда $y_1=-2(x^2+1)$ и $y_2=-\frac{x^2+1}{2}$.

Тогда

$$P(x,\ y)=2(y-y_1)(y-y_2)$$

и после перехода к x

$$P(x)=(3x^2+6x+3)(3x^2+12x+9)=9(x+1)^2(x^2+4x+1).$$

Найдем корни трехчлена x^2+4x+1 (они равны $-2\pm\sqrt{3}$) и окончательно получим:

$$P(x)=9(x+1)^2(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3}).$$

4. Применение теоремы Безу и метода неопределенных коэффициентов.

Пример 11. Разложить на множители многочлен

$$P(x,\ y,\ z)=x(y^3-z^3)-y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3).$$

Решение. Заметим, что при $x=y$ многочлен равен нулю. Тогда по теореме Безу многочлен $P(x,\ y,\ z)$ делится на $x-y$.

Так как многочлен $P(x,\ y,\ z)$ не меняется при любой круговой перестановке x, y и z, то он равен нулю и при $y=z$, и при $z=x$ и, следовательно, делится на $y-z$ и $z-x$. Поэтому

$$P(x,\ y,\ z)=k(x-y)(y-z)(z-x),$$

где k — некоторое число. Для нахождения k придадим x, y и z некоторые значения, например, $x=1$, $y=2$, $z=3$. Тогда: $2=2k$, откуда $k=1$ и

$$P(x,\ y,\ z)=(x-y)(y-z)(z-x).$$

§ 6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ, ПРОПОРЦИИ, ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1. Выражение вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)},\qquad (11)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, называется *алгебраической (или рациональной) дробью*. Дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, и *неправильной* — в противном случае.

Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. Чтобы получить такое представление дроби (11), нужно разделить с остатком многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=K(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},\qquad (12)$$

где частное $K(x)$ — целая часть дроби (11), а

$$\frac{R(x)}{Q(x)}$$

правильная рациональная дробь, так как степень остатка $R(x)$ меньше степени делителя $Q(x)$.

Представление неправильной дроби в виде (12) называется *выделением целой части* дроби. Например,

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}.$$

Определение. Алгебраические дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{и} \quad \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

считаются *равными* (или тождественно равными) лишь в том случае, если выполняется равенство

$$P(x)\cdot Q_1(x) = P_1(x)\cdot Q(x)$$

для всех значений x, удовлетворяющих условию: $Q(x)\neq 0$, $Q_1(x)\neq 0$. Например,

$$\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}, \quad (x\neq 1,\ x\neq -1)$$

так как $(x+1)\cdot(x-1)=1\cdot(x^2-1)$.

Из определения равенства дробей вытекает, что дробь не изменится, если числитель и знаменатель умножить на один и тот же многочлен $K(x)$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)\cdot K(x)}{Q(x)\cdot K(x)} \quad (Q(x)\neq 0,\ K(x)\neq 0).$$

На этом свойстве основано сокращение дробей, т. е. деление числителя и знаменателя на их общий делитель (многочлен, входящий в разложение числителя и знаменателя одновременно), и приведение дробей к общему знаменателю.

Сложение и умножение дробей определяются по следующим правилам:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P(x)\cdot Q_1(x) + P_1(x)\cdot Q(x)}{Q(x)\cdot Q_1(x)},$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P(x)\cdot P_1(x)}{Q(x)\cdot Q_1(x)},$$

где $Q(x)\neq 0$, $Q_1(x)\neq 0$.

Вычитание и деление дробей определяются как действия, обратные сложению и умножению. Из этого определения выводятся правила вычитания и деления:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P(x)\cdot Q_1(x) - P_1(x)\cdot Q(x)}{Q(x)\cdot Q_1(x)},$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P(x)\cdot Q_1(x)}{P_1(x)\cdot Q(x)},$$

где $Q(x)\neq 0$, $Q_1(x)\neq 0$ и, кроме того, в случае деления, $P_1(x)\neq 0$.

Для алгебраических дробей сохраняются основные свойства арифметических действий. Практически для выполнения сложения или вычитания приводят к общему знаменателю: разлагая знаменатели дробей на множители, приписывают за общий знаменатель многочлен наименьшей степени, делящийся нацело на все данные знаменатели. Очевидна аналогия с арифметическими дробями.

Точно так же определяются равенство и действия для алгебраических дробей вида

$$\frac{P(x, y, \ldots, z)}{Q(x, y, \ldots, z)}.$$

11. **Определение.** Два равные алгебраические дроби образуют пропорцию:

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}, \tag{13}$$

где P, Q, P_1, Q_1 — многочлены относительно x или относительно $x, y, \ldots, z$, причем $Q\neq 0$, $Q_1\neq 0$*.

Очевидно, что во всякой пропорции произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов, т. е.

$$P\cdot Q_1 = P_1\cdot Q \quad (Q\neq 0,\ Q_1\neq 0). \tag{14}$$

Верно и обратное: при выполнении условия (14) дроби $\frac{P}{Q}$ и $\frac{P_1}{Q_1}$ образуют пропорцию (13).

Если задана пропорция

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1} \quad (Q\neq 0,\ Q_1\neq 0),$$

то справедливо равенство

$$\frac{KP+LQ}{MP+NQ} = \frac{KP_1+LQ_1}{MP_1+NQ_1}, \quad (Q\neq 0,\ Q_1\neq 0,\ MP+NQ\neq 0,\ MP_1+NQ_1\neq 0), \tag{15}$$

называемое *производной пропорцией*. В самом деле, нетрудно проверить, что

$$(KP+LQ)\cdot(MP_1+NQ_1) = (KP_1+LQ_1)\cdot(MP+NQ),$$

если учесть равенство $PQ_1=P_1Q$.

Давая K, L, M и N различные значения, получаем частные случаи производной пропорции. Например:

$$\frac{P+Q}{Q} = \frac{P_1+Q_1}{Q_1}, \quad (Q\neq 0,\ Q_1\neq 0)$$

$$\frac{P-Q}{Q} = \frac{P_1-Q_1}{Q_1}, \quad (Q\neq 0,\ Q_1\neq 0)$$

$$\frac{P+Q}{P-Q} = \frac{P_1+Q_1}{P_1-Q_1}, \quad (Q\neq 0,\ Q_1\neq 0,\ P-Q\neq 0,\ P_1-Q_1\neq 0).$$

* Все оговорения в скобках будем в дальнейшем опускать, считая их подразумеваемыми, если P, Q — целые выражения (в частности, числа).

Справедливо также свойство равных отношений (равных дробей): если даны несколько равных отношений, то сумма всех предыдущих членов отношений относится к сумме всех последующих как любой из предыдущих к своему последующему, т. е. из равенств

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} = \ldots = \frac{P_n}{Q_n} \tag{16}$$

следуют равенства

$$\frac{P_1 + P_2 + \ldots + P_n}{Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n} = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} = \ldots = \frac{P_n}{Q_n}, \tag{17}$$

где

$$Q_1 \neq 0,\ Q_2 \neq 0,\ \ldots,\ Q_n \neq 0,\ Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n \neq 0.$$

Действительно,

$$\frac{P_1 + P_2 + \ldots + P_n}{Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n} = \frac{P_1}{Q_1},$$

так как из условия (16) нетрудно получить равенства

$$(P_1 + P_2 + \ldots + P_n) \cdot Q_1 = (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n) \cdot P_1,$$

что и доказывает (17).

Кроме того, из равенств (16) следуют равенства

$$\frac{P_1K_1 + P_2K_2 + \ldots + P_nK_n}{Q_1K_1 + Q_2K_2 + \ldots + Q_nK_n} = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} = \ldots = \frac{P_n}{Q_n}, \tag{18}$$

где $K_1, K_2, \ldots, K_n$ не все равны нулю, причем

$$Q_1 \neq 0,\ Q_2 \neq 0,\ \ldots,\ Q_n \neq 0,\ Q_1K_1 + Q_2K_2 + \ldots + Q_nK_n \neq 0.$$

Действительно,

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_1 \cdot K_1}{Q_1 \cdot K_1},\quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_2 \cdot K_2}{Q_2 \cdot K_2},\quad \ldots,\quad \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_n \cdot K_n}{Q_n \cdot K_n}.$$

Тогда по свойству равных отношений получаем:

$$\frac{P_1K_1 + P_2K_2 + \ldots + P_nK_n}{Q_1K_1 + Q_2K_2 + \ldots + Q_nK_n} = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} = \ldots = \frac{P_n}{Q_n},$$

что и утверждалось.

III. **Преобразования иррациональных алгебраических выражений** производятся на основании общих законов арифметических действий (таких же, как в случае алгебраических дробей) и правил действий над радикалами (см. гл. I, § 4). Специфическим является только уничтожение иррациональности в числителе или знаменателе дробного иррационального выражения вида

$$A = \frac{P}{Q}, \tag{19}$$

где хотя бы одно из выражений P или Q содержит радикалы.

Пусть S — данное выражение, содержащее радикалы.

Определение. *Сопряженным множителем* относительно S называется всякое выражение K, не равное тождественно нулю, такое, что произведение $S \cdot K$ не содержит радикалов.

Знание сопряженного множителя позволяет представить выражение (19) в виде выражения, не содержащего радикалов либо в числителе, либо в знаменателе:

$$A = \frac{P \cdot K_1}{Q \cdot K_1} = \frac{P \cdot K_2}{Q \cdot K_2},$$

где K_1 — сопряженный множитель числителя, K_2 — сопряженный множитель знаменателя. Это преобразование и называется уничтожением иррациональности (соответственно в числителе или в знаменателе).

Рассмотрим важные частные случаи отыскания сопряженного множителя.

1. Для выражения вида

$$S = \sqrt[n]{X^p Y^q \ldots Z^l},$$

где $p, q, \ldots, l$ — натуральные числа, меньшие n, сопряженный множитель K есть

$$K = \sqrt[n]{X^{n-p} Y^{n-q} \ldots Z^{n-l}},$$

так как $S \cdot K = X \cdot Y \ldots Z$.

2. Для выражения вида

$$S = \sqrt{X} \pm \sqrt{Y} \quad (X \geqslant 0,\ Y \geqslant 0)$$

сопряженный множитель есть

$$K = \sqrt{X} \mp \sqrt{Y},$$

так как

$$S \cdot K = (\sqrt{X})^2 - (\sqrt{Y})^2 = X - Y.$$

Пример 1. Уничтожить иррациональность в знаменателе выражения

$$A = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} \quad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0).$$

Решение. Имеем:

$$A = \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sqrt{z}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}}{[(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sqrt{z}] \cdot [(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - \sqrt{z}]} =$$

$$= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - (\sqrt{z})^2} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}}{x + y - z + 2\sqrt{xy}}.$$

Тогда

$$A = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})\cdot(x+y-z-2\sqrt{xy})}{(x+y-z+2\sqrt{xy})\cdot(x+y-z-2\sqrt{xy})} =$$
$$= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})\cdot(x+y-z-2\sqrt{xy})}{(x+y-z)^2-4xy},$$

где

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x+y-z-2\sqrt{xy} \neq 0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z} \neq 0.$$

3. Для выражения вида

$$S = \sqrt[3]{X} \pm \sqrt[3]{Y}$$

сопряженный множитель есть

$$K = \sqrt[3]{X^2} \mp \sqrt[3]{X\cdot Y} + \sqrt[3]{Y^2},$$

так как

$$S\cdot K = (\sqrt[3]{X})^3 \pm (\sqrt[3]{Y})^3 = X \pm Y.$$

4. Вообще для выражения вида

$$S = \sqrt[n]{X} - \sqrt[n]{Y} \quad (X \geqslant 0,\ Y \geqslant 0)$$

сопряженный множитель есть

$$K = \sqrt[n]{X^{n-1}} + \sqrt[n]{X^{n-2}\cdot Y} + \ldots + \sqrt[n]{X\cdot Y^{n-2}} + \sqrt[n]{Y^{n-1}}.$$

В самом деле, на основании тождества (см. гл. II, § 3)

$$a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

имеем

$$S\cdot K = (\sqrt[n]{X})^n - (\sqrt[n]{Y})^n = X - Y.$$

5. Аналогично для выражения вида

$$S = \sqrt[m]{X} + \sqrt[n]{Y}$$

сопряженный множитель находится на основании тождеств (см. гл. II, § 3)

$$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}\cdot b + \ldots + a\cdot b^{2n-2} - b^{2n-1}),$$

$$a^{2n-1} + b^{2n-1} = (a+b)(a^{2n-2} - a^{2n-3}\cdot b + \ldots - a\cdot b^{2n-2} + b^{2n-1}).$$

Пример 2. Уничтожить иррациональность в знаменателе выражения

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}} \quad (x>0,\ y>0).$$

Решение. Имеем

$$A = \frac{1}{\sqrt[6]{x^3}+\sqrt[6]{y^2}} =$$
$$= \frac{(\sqrt[6]{x^3})^5 - (\sqrt[6]{x^3})^4\cdot\sqrt[6]{y^2} + \ldots + \sqrt[6]{x^3}\,(\sqrt[6]{y^2})^4 - (\sqrt[6]{y^2})^5}{(\sqrt[6]{x^3})^6 - (\sqrt[6]{y^2})^6}$$

или после упрощений

$$A = \frac{x^2\sqrt{x} - x^2\sqrt[3]{y} + x\sqrt[3]{xy^2} - xy + y\sqrt[3]{x^2y} - y\sqrt[3]{y^2}}{x^3-y^2},$$

где

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^3 - y^2 \neq 0.$$

При преобразовании выражений, содержащих радикалы, часто допускают ошибки вследствие неправильного применения правил действий над радикалами (см. гл. 1, § 4). Эти ошибки вызваны неумением конкретно применить понятие арифметического корня и абсолютной величины. Поясним на примерах.

Пример 3. Упростить выражение $\sqrt{(a-b)^2}$.

Решение. Имеем $\sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$, так как корень $\sqrt{(a-b)^2}$ — арифметический, а $|a-b|^2 = (a-b)^2$, причем $|a-b| \geqslant 0$.

В данном случае следует писать:

$$\sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = \begin{cases} a-b, & \text{если } a \geqslant b, \\ b-a, & \text{если } a \leqslant b. \end{cases}$$

Пример 4. Вынести x из-под знака радикала в выражении $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$, если $x<0$.

Решение. Имеем

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x},$$

так как для $x<0$

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x.$$

Пример 5. Ввести знаменатель под знак радикала в выражении $\frac{\sqrt{x}}{y}$, если $x \geqslant 0,\ y < 0$.

Решение. Так как $y<0$, то

$$\sqrt{y^2} = -y = -\sqrt{y^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\sqrt{x}}{y} = \frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{y^2}} = -\sqrt{\frac{x}{y^2}}.$$

§ 6. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ (РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ)

Прежде всего надо найти область определения заданного выражения A, которое требуется преобразовать. Выполняя затем тождественное преобразование, следует учитывать, что области определения заданного выражения A и полученного из него выражения B могут оказаться различными.

I. Упрощение выражений. В некоторых случаях при упрощении выражений нецелесообразно не приводить сразу к общему знаменателю и, наоборот, сложную дробь разбивать на более простые.

Пример 1. Упростить выражение

$$A = \frac{b-c}{(a-b)(c-a)} + \frac{c-a}{(b-a)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)}.$$

Решение. Допустимыми являются те значения a, b и c, для которых $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$. Заметим, что выражение A является симметрическим. Преобразуем сначала первое слагаемое, разбивая его на две дроби:

$$B_1 = \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{(a-c)+(b-a)}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c}.$$

Аналогично

$$B_2 = \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{b-a},$$

$$B_3 = \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c-b}.$$

Тогда

$$A = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}.$$

При выполнении действий над радикалами надо обращать внимание на знак подкоренного выражения.

Пример 2. Упростить выражение

$$A = \left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Решение. Имеем $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = -\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$. Тогда

$$A = -\sqrt[6]{(9-4\sqrt{5})\cdot(\sqrt{5}-2)^3} + \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} =$$

$$= -\sqrt[6]{(9+4\sqrt{5})\cdot(9-4\sqrt{5})} + \sqrt[3]{-1} = -1 - 1 = -2.$$

Заметим, что сразу в выражении A выполнять умножение корней $\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}$ и $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ без преобразования последнего нельзя, так как число $2-\sqrt{5}<0$ и корень $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ не является арифметическим.

Пример 3. Упростить выражение

$$A = \frac{a^2+1}{a\sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2+1}}.$$

Решение. Выражение A имеет смысл при $a \neq 0$, так как

$$\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2 + 1 = \left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2. \text{ Поэтому}$$

$$A = \frac{a^2+1}{a\sqrt{\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2}} = \frac{a^2+1}{a\cdot\left|\frac{a^2+1}{2a}\right|} = \frac{a^2+1}{a\cdot\frac{a^2+1}{2|a|}} = \frac{2|a|}{a},$$

или в развернутой форме

$$A = \begin{cases} 2, & \text{если } a > 0, \\ -2, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Если заданное выражение громоздко, то следует разбить его на более простые части, каждую из которых упрощать затем в отдельности.

Пример 4. Упростить выражение

$$A = \frac{\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt[3]{a^4} + \sqrt{a^3b^2}:\sqrt[3]{a}}{(a^2-ab-2b^2)\cdot\sqrt{ab}} -$$

$$-a^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{2a^2}{3b-6a+2ab-b^2} : \frac{a+b}{2a-ab} - \frac{ab}{a+b}\right).$$

Решение. Множество допустимых значений A состоит из всех значений a и b, удовлетворяющих условиям

$$ab \geqslant 0,\quad a \geqslant 0,\quad b \geqslant 0,\quad b^2 - ab - 2a^2 \neq 0,$$

$$3b - 6a + 2ab - b^2 \neq 0,\quad 3a - ab \neq 0,\quad a + b \neq 0.$$

Так как

$$b^2 - ab - 2a^2 = (b^2 - a^2) - a(b + a) = (b + a)(b - 2a),$$

$$3b - 6a + 2ab - b^2 = 3(b - 2a) + b(2a - b) =$$

$$= (b - 2a)(3 - b),\quad 3a - ab = a(3 - b),$$

то, следовательно, значения a и b удовлетворяют условиям

$$a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ b \neq 2a,\ b \neq 3.$$

Преобразуя выражение A по частям, получаем:

1) $B_1 = \dfrac{\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt[3]{a^3} + \sqrt{a^2b^2} \cdot \sqrt[3]{a}}{(b^2 - ab - 2a^2)\sqrt{ab}} =$

$$= \frac{\sqrt{a^2b} \cdot a + \sqrt{a^2b^2}}{(b + a)(b - 2a)\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a^2b}\,(a + \sqrt{b^2})}{(b + a)(b - 2a)\sqrt{ab}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2}}{b - 2a} = \frac{\sqrt[3]{a}}{b - 2a};$$

2) $B_2 = a^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\dfrac{3b^2}{3b - 6a + 2ab - b^2} : \dfrac{a + b}{3a - ab} - \dfrac{ab}{a + b} \right) =$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \cdot \left[\frac{3b^2 \cdot a(3 - b)}{(b - 2a)(3 - b)(a + b)} - \frac{ab}{a + b} \right] =$$

$$= \sqrt[3]{a} \cdot \frac{3ab - ab - 2ab}{(b - 2a)(a + b)} = \frac{\sqrt[3]{a} \cdot (3a^2 + 2ab - b^2)}{(b - 2a)(a + b)};$$

3) $A = B_1 - B_2 = \dfrac{a\sqrt[3]{a}}{b - 2a} - \dfrac{\sqrt[3]{a} \cdot (3a^2 + 2ab - b^2)}{(b - 2a)(a + b)} =$

$$= \sqrt[3]{a} \cdot \frac{a(a + b) - 3a^2 - 2ab + b^2}{(b - 2a)(a + b)} = \sqrt[3]{a} \cdot \frac{b^2 - a^2 - 2a^2}{(b - 2a)(a + b)} = \sqrt[3]{a}.$$

Итак, $A = \sqrt[3]{a}$ при $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ b \neq 2a,\ b \neq 3$.

II. Доказательство тождеств. Неравенства бывают безусловные и условные. *Условным тождеством* называется равенство $A = B$, справедливое при всех допустимых значениях величин из общей части областей определения выражений A и B, причем допустимые

значения должны удовлетворять одному или нескольким заранее заданным дополнительным условиям.

Например, тождество $(a + b + c)^3 = 27abc$ при условии, что $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$, есть условное тождество. Докажем это тождество.

По условию имеем $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = -\sqrt[3]{c}$. Возведём обе части этого равенства в куб

$$a + b + 3\sqrt[3]{ab} \cdot (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) = -c,$$

откуда

$$a + b + c = -3\sqrt[3]{ab}\,(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}),$$

или

$$a + b + c = 3\sqrt[3]{abc},\quad \text{т. е. } (a + b + c)^3 = 27abc.$$

При доказательстве тождеств последние путем равносильных преобразований сводят к таким, справедливость которых уже известна, или преобразуют одну часть тождества так, чтобы получить другую.

Пример 5. Показать, что

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

Решение. Обозначим левую часть через A и используя формулу

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b),$$

где

$$a = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}},\quad b = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}},$$

перех

$$20 + 14\sqrt{2} + 20 - 14\sqrt{2} = A^3 - 3\sqrt[3]{400 - 392} \cdot A$$

или

$$40 = A^3 + 6A.$$

Последнее равенство можно представить в виде

$$A^3 - 16A + 10A - 40 = 0,$$

или

$$A(A - 4)(A - 4) + 10(A - 4) = 0,$$

или

$$(A - 4)(A^2 + 4A + 10) = 0.$$

Так как A, очевидно, действительное число, а $A^2 + 4A + 10 = (A + 2)^2 + 6 > 0$, при любом действительном A, то из последнего равенства следует, что $A = 4$.

Итак,

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

Пример 6. Доказать, что

$$\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-z)(y-x)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}=\frac{1}{xyz}.$$

Решение. Данные дроби имеют смысл при всех значениях x, y и z, удовлетворяющих условию

$$xyz(x-y)(x-z)(y-z)\neq 0.$$

Приведя дроби в левой части доказываемого тождества к общему знаменателю, получим дробь, числитель которой есть многочлен

$$yz(y-z)-xz(x-z)+xy(x-y)$$

Разложим его на множители

$$yz\cdot[(x-z)-(x-y)]-xz\cdot(x-z)+xy\cdot(x-y)=$$

$$=(x-z)(yz-xz)+(x-y)(xy-yz)=(x-y)(x-z)(y-z).$$

Следовательно, левая часть есть

$$\frac{(x-y)(x-z)(y-z)}{xyz\cdot(x-y)(x-z)(y-z)}=\frac{1}{xyz},$$

что и требовалось доказать.

При доказательстве условных тождеств можно, преобразуя дополнительные условия, получить требуемое тождество.

Пример 7. Если $\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}$, где

$$x\neq 0,\ y\neq 0,\ 1-yz\neq 0,\ 1-xz\neq 0,\ x\neq y,$$

то

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Решение. Преобразуя дополнительное условие, т. е. равенство $\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}$, используем свойство равных отношений.

Имеем

$$\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}=\frac{(x^2-yz)-(y^2-xz)}{x(1-yz)-y(1-xz)},$$

$$\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}=\frac{y(x^2-yz)-x(y^2-xz)}{yx(1-yz)-xy(1-xz)}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{(x^2-yz)-(y^2-xz)}{x(1-yz)-y(1-xz)}=\frac{y(x^2-yz)-x(y^2-xz)}{yx(1-yz)-xy(1-xz)},$$

или

$$\frac{(x^2-y^2)+(x-y)z}{x-y}=\frac{xy(x-y)-z(x^2-y^2)}{xyz(x-y)},$$

или

$$x+y+z=\frac{xy+z(x+y)}{xyz},$$

т. е.

$$x+y+z=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

В других случаях целесообразно преобразовать доказываемое тождество, используя при этом заданные условия.

Пример 8. Пусть $x=\frac{a-b}{a+b}$, $y=\frac{b-c}{b+c}$, $z=\frac{c-a}{c+a}$, где $(a+b)\times(b+c)(c+a)\neq 0$; $abc\neq 0$. Показать, что

$$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z).$$

Решение. Нужно доказать, что

$$\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1-y}{1-y}\cdot\frac{1+z}{1-z}=1.$$

Подставляя вместо x его выражение, найдем

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{b},$$

Круговой подстановкой букв получаем

$$\frac{1+y}{1-y}=\frac{b}{c},\ \frac{1+z}{1-z}=\frac{c}{a}.$$

Следовательно,

$$\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}\cdot\frac{1+z}{1-z}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1,$$

что и требовалось доказать.

III. Вычисление выражений.

Пример 9. Вычислить

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2.$$

Решение. Применим формулу сложного квадратного радикала

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Тогда $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ и

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^3}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}=\frac{(\sqrt{3}+1)^3\cdot\sqrt{2}}{2(3+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}},$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^3}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}=\frac{(\sqrt{3}-1)^3\cdot\sqrt{2}}{2(3-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^3=$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}\right)^3=\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^3=2.$$

Пример 16. Дано $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$. Вычислить $A=a^4+b^4+c^4$.

Решение. Видится полный квадрат в выражении A, имеем

$$A=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=$$
$$=(a^2+b^2+c^2)^2-2[(ab+ac+bc)^2-2abc(a+b+c)].$$

Согласно данным условиям

$$A=1-2(ab+ac+bc)^2$$

и остается найти значение выражения $(ab+ac+bc)$. Так как

$$2(ab+ac+bc)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=-1,$$

то

$$A=1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

§ 7. НЕРАВЕНСТВА И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Определение. Два действительных числа или два алгебраических выражения, соединенные знаком $>$ (больше) или $<$ (меньше) (а также знаком $\geqslant$ или $\leqslant$), образуют *неравенство*

$$A>B,\ A<B,\ A\geqslant B,\ A\leqslant B. \tag{20}$$

Неравенство состоит из двух частей: левой части A и правой части B.

Если в неравенстве фигурирует знак $>$ или $<$, то говорят, что неравенство является строгим. Неравенство, содержащее знак $\geqslant$ или $\leqslant$, называется нестрогим.

В неравенствах вида (20) выражения A и B рассматриваются на том множестве, где A и B одновременно имеют смысл. Это множество называется множеством допустимых значений неравенства. При совместном рассмотрении двух или нескольких неравенств допустимыми считаются значения величин из общей части множества допустимых значений рассматриваемых неравенств.

При конкретных (частных) значениях величин из множества допустимых значений неравенства (20) обращаются в числовые неравенства, которые могут быть справедливыми (верными) или несправедливыми (противоречивыми).

Справедливость или несправедливость числового неравенства устанавливается на основе понятий равенства и сравнения для любых двух действительных чисел a и b (см. гл. I).

Неравенство, справедливое для всех допустимых значений входящих в него величин, а также справедливое числовое неравенство называется тождественным неравенством. Например, неравенство $x^2+1>x^2$ является тождественным.

Неравенства (20) подразделяются на рациональные и иррациональные и т. д. — точно так же, как и равенства.

Замечание. Понятие неравенства установлено не только для алгебраических, но и для любых математических выражений.

Два или несколько неравенств называются неравенствами одинакового смысла, если они содержат один и тот же знак $>$ или $<$. Два неравенства называются неравенствами противоположного смысла, если в одном из них стоит знак $>$, а в другом знак $<$. Например, неравенства $A>B$ и $C>D$ имеют одинаковый смысл, а неравенства $A<B$ и $C>D$ — противоположный смысл.

Пусть a и b — действительные числа. Между ними имеет место одно и только одно из следующих соотношений: $a=b$, $a>b$, $a<b$. Число a больше числа b ($a>b$) в том и только в том случае, если разность $a-b$ есть число положительное: $a-b>0$. Число a меньше числа b ($a<b$) в том и только в том случае, если разность $a-b$ есть число отрицательное: $a-b<0$.

Отсюда вытекают следующие свойства неравенств.

Свойство 1. Если $a>b$, то $b<a$, и наоборот, если $b<a$, то $a>b$.

В самом деле, если $a>b$, то разность $a-b>0$. А тогда разность $b-a<0$, т. е. $b<a$. Наоборот, если $b<a$, то $b-a<0$, и значит $a-b>0$, т. е. $a>b$.

Свойство 2. Если $a>b$, $b>c$, то $a>c$.

В самом деле, рассмотрим разность $a-c=(a-b)+(b-c)$. По условию $a-b>0$ и $b-c>0$. Следовательно, $a-c>0$, т. е. $a>c$.

Свойство 3. Если $a>b$, то при любом c

$$a+c>b+c,$$

т. е. неравенство не нарушается *, если к каждой его части прибавить одно и то же число.

Действительно, разность

$$(a+c)-(b+c)=(a-b)+(c-c)=a-b>0,$$

т. е. $a+c>b+c$.

Следствие. Любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом знак его на противоположный.

В самом деле, пусть $a+b>c$.

Прибавив к каждой части неравенства число $(-b)$, получим

$$a>c-b,$$

т. е. слагаемое b перенесено из левой части в правую с противоположным знаком.

Свойство 4. Если $a>b$ и $c>0$, то $ac>bc$;

если $a>b$ и $c<0$, то $ac<bc$,

т. е. неравенство не нарушается, если обе части его умножить на одно и то же положительное число; неравенство превращается в неравенство противоположного смысла, если обе части его умножить на одно и то же отрицательное число.

В самом деле, если $a>b$ и $c>0$, то разность

$$ac-bc=(a-b)c$$

есть положительное число, равное произведению двух сомножителей одинакового знака, и тогда $ac>bc$.

Если же $a>b$ и $c<0$, то разность

$$ac-bc=(a-b)c$$

есть отрицательное число, равное произведению двух сомножителей противоположного знака, и тогда $ac<bc$.

Свойство 5. Если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$;

если $a>b$ и $c<d$, то $a-c>b-d$,

* Выражение «неравенство не нарушается» означает, что неравенство преобразуется в другое неравенство одинакового с ним смысла.

т. е. два неравенства одинакового смысла можно почленно складывать; два неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, оставляя знак того неравенства, из которого вычиталось другое неравенство.

В самом деле, разность $(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)>0$, если $a-b>0$ и $c-d>0$, и тогда $a+c>b+d$. Если же $c<d$, то $d>c$ и $d-c>0$. Тогда разность $(a-c)-(b-d)=(a-b)+(d-c)>0$, т. е. $a-c>b-d$. Свойство доказано.

Свойство 6. Если a, b, c, d положительны и $a>b$, $c>d$, то $ac>bd$, т. е. при почленном умножении двух неравенств, имеющих положительные члены и одинаковый смысл, получается неравенство того же смысла.

Имеем

$$ac-bd=(ac-bc)+(bc-bd)=(a-b)c+(c-d)b,$$

где $a-b>0$, $c>0$, $c-d>0$, $b>0$. Отсюда $ac-bd>0$ или $ac>bd$, что и утверждалось.

Свойство 7. Если $a>b>0$, то при любом натуральном n

$$a^n>b^n.$$

Доказательство. При $n=1$ утверждение справедливо по условию. Допустим, что утверждение справедливо при $n=k$, где k — какое-нибудь натуральное число: $a^k>b^k$.

Умножая неравенство $a^k>b^k$ почленно на неравенство $a>b$ и получим $a^{k+1}>b^{k+1}$, т. е. утверждение справедливо и при $n=k+1$.

Тогда согласно методу математической индукции утверждение справедливо и для любого натурального n. Свойство доказано.

Замечание. Можно доказать свойство 7, не применяя метод математической индукции. Используем тождество (см. гл. II, § 3):

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+\ldots+a\cdot b^{n-2}+b^{n-1}).$$

Так как $a>b>0$, то оба сомножителя справа положительны. Поэтому $a^n-b^n>0$, т. е. $a^n>b^n$.

Свойство 8. Если $a>b>0$, то при любом натуральном $n\geqslant 2$

$$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}.$$

Доказательство. Предположим от противного, что $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$. Тогда в силу свойства 7 имеем

$$(\sqrt[n]{a})^n<(\sqrt[n]{b})^n, \quad \text{т. е. } a<b,$$

что противоречит условию. Очевидно, что нельзя предполагать и то, что $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$. Следовательно, $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

Свойства 1—8 справедливы и для нестрогих неравенств. Это следует из справедливости свойств 1—8 для строгих неравенств и известных свойств равенств.

Например, если $a \geqslant b$, то $b \leqslant a$, и наоборот, если $b \leqslant a$, то $a \geqslant b$. В самом деле, утверждение справедливо для строгих неравенств. Кроме того, известно, что аналогичное утверждение справедливо и для равенств, т. е. если $a=b$, то $b=a$, и наоборот, если $b=a$, то $a=b$.

Свойства 1—8, установленные для числовых неравенств, сохраняются и для любых неравенств вида (20).

Определение. Два неравенства называются *равносильными*, если из справедливости первого вытекает справедливость второго и обратно.

Свойства 3 и 4 выражают равносильность неравенств

$$A > B \text{ и } A + C > B + C,$$

$$A > B \text{ и } A \cdot C > B \cdot C \ (C > 0),$$

где выражения A, B и C рассматриваются в общей части множеств их допустимых значений.

§ 8. ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

При решении задач на доказательство неравенств полезно знать некоторые «очевидные» неравенства.

Основные простейшие неравенства. I. Для любых действительных чисел:

$$1)\ a^2 + b^2 \geqslant 2ab \text{ или } \frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab, \tag{21}$$

причем равенство достигается лишь при $a = b$.

Действительно, доказываемое неравенство равносильно очевидному $(a-b)^2 \geqslant 0$.

$$2)\ |a+b| \leqslant |a| + |b|, \tag{22}$$

причем равенство достигается лишь в случае, когда a и b имеют одинаковые знаки. Это неравенство обобщается на любое конечное число слагаемых, т. е.

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|. \tag{22'}$$

$$3)\ |a-b| \geqslant |a| - |b|, \tag{23}$$

причем равенство достигается лишь в случае, когда $a-b$ и b имеют одинаковые знаки (доказательство пунктов 2 и 3 см. в гл. I, § 4).

$$4)\ ax^2 + bx + c \geqslant 0, \tag{24}$$

если $a > 0$ и $D = b^2 - 4ac \leqslant 0$.

Равенство достигается лишь в случае, когда $D = 0$ и $x = -\frac{b}{2a}$ (доказательство см. в гл. III, § 14).

II. Для любых положительных чисел:

$$1)\ \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \tag{25}$$

причем равенство достигается лишь при $a = b$.

Число $\frac{a+b}{2}$ называется *средним арифметическим* двух положительных чисел a и b, а число $\sqrt{ab}$ — *их средним геометрическим*.

Для доказательства неравенства (25) запишем очевидное неравенство

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

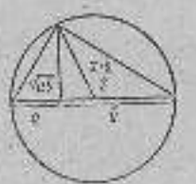


Рис. 9

Возведя в квадрат, получим

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0,$$

откуда

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

что и требовалось доказать. При этом равенство достигается лишь тогда, когда оно достигается в исходном неравенстве, т. е. при $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0$, что возможно лишь при $a = b$.

Таким образом, *среднее геометрическое двух чисел не превосходит их среднего арифметического.*

Очевидно геометрическое доказательство этого неравенства (см. рис. 9).

Понятия среднего арифметического и среднего геометрического вводятся и для n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$: это числа $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ и $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$; в этом общем случае справедливо неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

причем равенство достигается лишь при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

$$2)\ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2, \tag{26}$$

причем равенство достигается лишь при $a = b$.

Неравенство (26) равносильно неравенству (21) при условии, что a и b положительны.

$$3)\ a^3 + b^3 \geqslant ab(a+b), \tag{27}$$

причем равенство достигается лишь при $a = b$.

Неравенство (27) равносильно очевидному неравенству $a^2-ab+b^2\geqslant ab$;

4) если $c>0$ и $0<a<b$, то

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}. \tag{28}$$

В самом деле, неравенство (28) равносильно неравенству $ab+ac<ab+bc$, а последнее равносильно данному $a<b$.

Перейдем к доказательству более сложных неравенств. Основные приемы их доказательств состоят в следующем:

1. Доказываемое неравенство путем преобразований, сохраняющих равносильность, сводят к неравенству, справедливость которого известна.

2. Путем равносильных преобразований очевидное или известное неравенство сводят к неравенству доказываемому.

3. Комбинируют первый и второй методы, т. е. преобразуют как известное, так и доказываемое неравенства.

Применение этих методов покажем на следующих примерах.

Пример 1. Доказать, что для любых действительных a, b и c

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$$

Р е ш е н и е. I с п о с о б. Доказываемое неравенство равносильно неравенству $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac\geqslant 0$ или $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$. Последнее очевидно. Равенство достигается лишь при $a=b=c$.

II с п о с о б. Складывая три известные неравенства (см. 21)

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab,\quad \frac{b^2+c^2}{2}\geqslant bc \text{ и } \frac{a^2+c^2}{2}\geqslant ac,$$

получаем требуемое.

Пример 2. Доказать, что для любого действительного x

$$\frac{1}{3}\leqslant\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\leqslant 3.$$

Р е ш е н и е. Доказываемое неравенство равносильно системе двух неравенств:

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\geqslant\frac{1}{3} \quad (*) \text{ и } \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\leqslant 3. \quad (**)$$

Так как $x^2+x+1>0$ для всех x ($D=-3$, $a=1$, (см. (24), то (*) и (**) равносильны системе

$$3(x^2-x+1)\leqslant x^2+x+1 \text{ и } x^2-x+1\leqslant 3(x^2+x+1).$$

Последние, в свою очередь, равносильны системе очевидных неравенств

$$2(x-1)^2\geqslant 0 \text{ и } 2(x+1)^2\geqslant 0,$$

Пример 3. Доказать, что для любых действительных x и y

$$x^2+5y^2-4xy+2x-6y+3>0.$$

Р е ш е н и е. Рассматривая левую часть неравенства как квадратный трехчлен относительно x имеем

$$x^2+2x(1-2y)+5y^2-6y+3>0.$$

Так как

$$D=4(1-2y)^2-4(5y^2-6y+3)=$$
$$=-4(y^2-2y+2)=-4((y-1)^2+1)<0$$

для любых y, то согласно (21) квадратный трехчлен положителен для всех x и y, что и требовалось доказать.

Пример 4. Доказать, что для положительных чисел a, b и c

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc.$$

Р е ш е н и е. Согласно (25) имеем

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab},\ b+c\geqslant 2\sqrt{bc},\ c+a\geqslant 2\sqrt{ca}.$$

Перемножая эти неравенства, получаем требуемое.

Пример 5. Доказать, что если $a\geqslant b\geqslant c>0$, то

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3.$$

Р е ш е н и е. Из неравенства $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\geqslant 2$ вытекает справедливость неравенства

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geqslant\left(2-\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right).$$

Преобразуем правую часть полученного неравенства

$$2-\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3+\left(\frac{b}{c}-1\right)+\left(\frac{c}{a}-\frac{b}{a}\right)=$$
$$=3+\left(\frac{b-c}{c}-\frac{c-b}{a}\right).$$

Так как дробь

$$\frac{b-c}{c}+\frac{c-b}{a}=\frac{(b-c)(a-c)}{ac}$$

согласно условию $a\geqslant b\geqslant c>0$ неотрицательна, то

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\geqslant 3.$$

Пример 6. Доказать, что для любых действительных чисел a_1, a_2, b_1 и b_2, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 = 1, \end{cases} \qquad (*)$$

справедливо неравенство

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leqslant 1.$$

Решение. Согласно (22) и (21) имеем

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leqslant |a_1b_1| + |a_2b_2| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_1^2+b_1^2}{2} + \frac{a_2^2+b_2^2}{2} = \frac{a_1^2+a_2^2}{2} + \frac{b_1^2+b_2^2}{2} = 1,$$

т. е. $|a_1b_1 + a_2b_2| \leqslant 1$.

При доказательстве некоторых неравенств целесообразно использовать метод замены данных величин другими. Приведем, например, решение примера 6 способом замены.

II способ решения примера 6. Согласно заданным условиям (*) существуют углы α и β, для которых

$$\cos\alpha = a_1, \ \sin\alpha = a_2, \ \cos\beta = b_1, \ \sin\beta = b_2.$$

Тогда доказываемое неравенство принимает вид

$$|\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta| \leqslant 1,$$

или $|\cos(\alpha - \beta)| \leqslant 1$, что очевидно.

Пример 7. Доказать, что для положительных a и b

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Решение. Полагая $\sqrt{a} = x$, $\sqrt{b} = y$, получим неравенство

$$\frac{x^4}{y} + \frac{y^4}{x} \geqslant xy,$$

равносильное простейшему $x^3 + y^3 \geqslant xy(x+y)$ (см. (27)).

Пример 8. Доказать, что для любых действительных чисел a и b, удовлетворяющих условию $a+b=2$, справедливо неравенство

$$a^4 + b^4 \geqslant 2.$$

Решение. Пусть $a = 1+c$. Тогда $b = 2 - a = 1-c$. Поэтому

$$a^4 + b^4 = (1+c)^4 + (1-c)^4 = 2 + 12c^2 + 2c^4 \geqslant 2,$$

что и требовалось доказать.

При доказательстве неравенств, связанных с натуральными числами, часто используется метод математической индукции.

Пример 9. Доказать, что для любого натурального $n \geqslant 2$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Решение. При $n = 2$, очевидно, $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} < 2 - \frac{1}{2}$. Предполагая, что неравенство справедливо при $n = k$, т. е.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}, \qquad (*)$$

докажем его справедливость при $n = k+1$, т. е.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}. \qquad (**)$$

Пусть

$$A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2}, \quad B = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Тогда

$$B = A + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2},$$

так как $A < 2 - \frac{1}{k}$. Отсюда следует, что неравенство

$$B < 2 - \frac{1}{k+1}$$

будет заведомо справедливым, если мы докажем, что

$$-\frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < -\frac{1}{k+1}$$

или равносильное ему

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \text{ т. е. } \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}.$$

Последнее очевидно.

Итак, из справедливости неравенства (*) вытекает справедливость неравенства (**), следовательно, и доказываемого.

Метод индукции не является единственным или лучшим методом доказательств неравенств, связанных с натуральными числами. Приведем, например, другое решение примера 9.

II способ решения примера 9. Так как

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

то имеем

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Складывая эти неравенства с равенством $\frac{1}{1^2} = 1$, получим, что

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n},$$

что и требовалось доказать.

Задачи на отыскание наибольших или наименьших значений в общем случае рассматриваются в курсе высшей математики. Однако некоторые из таких задач могут быть решены методами элементарной математики и в основном с использованием неравенств.

Пример 10. Найти наименьшее значение выражения

$$A = (\lg \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2.$$

Решение. Запишем A в виде

$$A = \left(\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}\right) + 2.$$

Согласно неравенству (26) имеем

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \geqslant 2,$$

причем равенство достигается лишь при $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1$. Следовательно, при $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1$ выражение A имеет наименьшее значение $A = 4$.

Пример 11. Найти наибольшее значение функции

$$y = \frac{x}{ax^2 + b} \quad (a > 0,\ b > 0).$$

Решение. Очевидно, что следует рассматривать лишь положительные значения x. Согласно неравенству

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

имеем

$$\frac{ax^2 + b}{2} \geqslant \sqrt{ax^2 b}, \text{ или } \frac{ax^2 + b}{2} \geqslant x\sqrt{ab} \quad (x > 0).$$

Следовательно, для всех $x > 0$

$$\frac{x}{ax^2 + b} \leqslant \frac{x}{2x\sqrt{ab}}, \text{ или } \frac{x}{ax^2 + b} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{ab}},$$

причем равенство достигается лишь при $ax^2 = b$, т. е. при $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Таким образом, функция

$$y = \frac{x}{ax^2 + b} \quad (a > 0,\ b > 0)$$

при $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ имеет наибольшее значение, равное $\frac{1}{2\sqrt{ab}}$.

Используется также следующее свойство квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$:

если $a > 0$, то трехчлен принимает наименьшее значение при $x = -\frac{b}{2a}$, если же $a < 0$, то трехчлен принимает наибольшее значение при тех же значениях x.

В самом деле, трехчлен можно представить в виде

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right). \qquad (29)$$

Если $a > 0$, то первое слагаемое в правой части равенства (29) положительно при всех значениях x, кроме $x = -\frac{b}{2a}$, при которых это слагаемое равно нулю. Следовательно, трехчлен принимает наименьшее значение при $x = -\frac{b}{2a}$. Это значение равно $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

Аналогично исследуется вопрос о наибольшем значении трехчлена в случае $a < 0$.

Пример 12. Данное положительное число A представить в виде суммы двух слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение. Обозначим через x одно из искомых слагаемых. Тогда другое слагаемое будет равно $A - x$. Их произведение $x(A-x)$ является квадратным трехчленом. Преобразуем трехчлен к виду (29):

$$x(A-x) = -x^2 + Ax = -\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \frac{A^2}{4}.$$

Отсюда видно, что при $x = \frac{A}{2}$ трехчлен принимает наибольшее значение, равное $\frac{A^2}{4}$.

Итак, каждое из искомых слагаемых равно $\frac{A}{2}$.

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С УРАВНЕНИЯМИ

Равенство двух математических выражений A и B:

$$A = B$$

не являющееся тождеством на множестве допустимых значений буквенных величин входящих в это равенство, называют *уравнением* на этом множестве.

Под множеством допустимых значений уравнения, если нет специальной оговорки, понимают множество числовых значений буквенных величин, входящих в выражения A и B, при которых они одновременно имеют смысл.

Следует иметь в виду, что одно и то же равенство может быть как уравнением, так и тождеством в зависимости от того, на какое оно множестве рассматривается.

Например, равенство $\sqrt{x^2} - x = 0$, рассматриваемое на множестве действительных чисел, — уравнение (например, $\sqrt{(-3)^2} - (-3) \neq 0$). Но если это равенство рассматривать на множестве действительных неотрицательных чисел, то это уже не уравнение, а тождество, так как $\sqrt{x^2} = x (x \geqslant 0)$.

Буквенные величины, входящие в уравнение, по условию задачи могут быть неравноправными. Одни могут принимать все свои допустимые значения. Тогда их называют *известными*, или *параметрами* уравнения*. Другие буквенные величины называют *неизвестными*. В зависимости от числа неизвестных, входящих в уравнение, последнее называют уравнением с одним, с двумя и т. д. неизвестными.

При постановке задач, связанных с уравнениями, должно быть указано, какие из буквенных величин, входящих в уравнение, считать неизвестными, а какие — параметрами. Иначе задача может стать неопределенной.

* Вообще в качестве математических выражений рассматривают основные и неосновные буквенные величины. Неосновные буквенные константы называют параметрами рассматриваемого математического выражения.

Поэтому обычно неизвестные величины в уравнениях обозначаются последними буквами латинского алфавита: x, y, z ..., а параметры — начальными: a, b, c, m, n и т. д. и в таких случаях уже не делают специальных указаний.

Значения неизвестных, принадлежащие множеству допустимых значений уравнения и удовлетворяющие уравнению (т. е. обращающие его в справедливое равенство), называют корнями уравнения, или решениями. Решить уравнение — это значит найти все его корни (решения).

Например, уравнение $x^2 + 1 = 0$, рассматриваемое на множестве комплексных чисел, имеет два корня $x_1 = i$, $x_2 = -i$. Уравнение $x^2 + y^2 = 0$, рассматриваемое на множестве действительных чисел имеет одно решение $x = 0$, $y = 0$ (а не два, как иногда неправильно считают).

Множество корней уравнения может быть конечным (см. предыдущий пример), бесконечным или пустым (уравнение не имеет ни одного решения).

Например, уравнение $\sin x = 1$ имеет бесконечное множество корней

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

а уравнение $x^2 + 1 = 0$, рассматриваемое на множестве действительных чисел, не имеет корней.

Если уравнение не имеет корней, то говорят, что оно противоречивое.

Классификацию уравнений (их название) проводят по характеру математических операций, выполняемых над неизвестными. Так, различают уравнения *алгебраические* и *трансцендентные*. В алгебраических уравнениях над неизвестными могут совершаться, притом в конечном числе, лишь операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и извлечения корня.

Если над неизвестными совершаются и другие операции, как например, возведение в иррациональную степень, взятие логарифма, синуса и т. п., то уравнение называют трансцендентным. Вообще к трансцендентным уравнениям относят все неалгебраические уравнения.

Например, уравнение $\dfrac{x^{\frac{2}{3}} + x\sqrt{2}}{x^{\pi} + 1} = 3$ — алгебраическое $\left(x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}\right)$, а уравнение $\dfrac{x^{\frac{2}{3}} + x^{\sqrt{2}}}{x^4 + 1} = 3$ — трансцендентное.

Частными случаями алгебраических уравнений являются уравнения рациональные (отсутствует операция извлечения корня над выражением, содержащим неизвестные) и иррациональные (есть операция извлечения

корня). Например, уравнение $\frac{x+1}{x+9}=2x$ — рациональное; а уравнение $\sqrt{x^2+2}=x-1$ — иррациональное.

Рациональные уравнения в свою очередь подразделяются на целые рациональные (нет операции деления на выражения, содержащие неизвестные) и дробные рациональные (есть операция деления на выражения, содержащие неизвестные). Например, уравнение $x^3+2x^2-y^5+3=0$ — целое рациональное, уравнение $\frac{x+2}{3}-\frac{2}{x-1}=1$ — дробное рациональное.

Частными случаями трансцендентных уравнений являются показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения и уравнения с обратными тригонометрическими функциями.

Методы решения уравнения основаны на понятии равносильности (эквивалентности) уравнений.

Определение. Если все корни уравнения $A=B$ являются в то же время корнями уравнения $A_1=B_1$, то последнее уравнение называют *следствием* первого.

Определение. Два уравнения называют *равносильными (эквивалентными)*, если каждое из них является следствием другого.

Из этих определений следует, что уравнение — следствие может иметь и другие корни, кроме корней исходного, а равносильные уравнения имеют один и те же корни. Одни и те же два уравнения могут быть равносильными или неравносильными в зависимости от того, на каком множестве чисел они рассматриваются. Например, уравнения $(x+2)\cdot(x^2+1)=3(x^2+1)$ и $x+2=3$, рассматриваемые на множестве действительных чисел, равносильные (оба имеют один лишь действительный корень $x=1$), но если их рассматривать на множестве комплексных чисел, то они уже не равносильные (первое уравнение, кроме 1, имеет еще корни $\pm i$, т. е. или является следствием второго уравнения). Два противоречивых уравнения, очевидно, равносильны, так как они оба не имеют корней).

При решении уравнения путем различных преобразований стараются заменить его более простым, равносильным ему уравнением. Однако такая замена не всегда удается. Тогда возможны следующие два случая.

I. При переходе к новому уравнению может произойти потеря корней. Ясно, что такой переход недопустим, так как решить уравнение — это значит найти все его корни. Поэтому при переходе к новому уравнению надо тщательно следить за тем, чтобы такая потеря не могла произойти.

II. Новое уравнение может содержать корни, не являющиеся корнями исходного (так называемые посторонние корни). Посторонние корни можно выделить проверкой (подстановкой всех корней нового уравнения в исходное), но сделать это иногда технически трудно. Чтобы избежать непосредственной проверки, на неизвестные и параметры в новом уравнении накладывают некоторые

дополнительные ограничения, при которых это уравнение будет равносильно исходному. Тогда достаточно проверить — удовлетворяют ли найденные корни нового уравнения этим ограничениям или нет.

Например, уравнение $\frac{a}{a+x}+\frac{b}{b+x}=\frac{(a+b)^2}{ab}$ равносильно уравнению $ab[a(b+x)+b(a+x)]=(a+b)^2(a+x)(b+x)$ при условии, что параметры второго уравнения удовлетворяют условию $ab\neq 0$, а неизвестное условию $x\neq -a$ и $x\neq -b$. Если мы решим второе уравнение и из его корней исключим значения $x=-a$ и $x=-b$ (если такие будут), то все остальные корни, и только они, будут решениями первого уравнения (конечно при условии, что в формулах этих корней $ab\neq 0$). Подробно о решении этого уравнения см. гл. IV, § 1, пример 2.

Если же при решении уравнения не удалось избежать действий, которые могут привести к появлению посторонних корней и нельзя указать дополнительные условия, то нужно обязательно делать проверку корней путем подстановки их в исходное уравнение. Иначе решение считают неполноценным (даже если на самом деле посторонние корни и не появились). В остальных случаях проверка не нужна (при условии, конечно, что сами вычисления проводятся без ошибок).

§ 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ

Имеют место следующие свойства уравнений, справедливость которых вытекает из соответствующих свойств равенств и понятия равносильных уравнений.

I. *Уравнение* $A=B$ равносильно уравнению $A+C=B+C$, где C число или некоторое математическое выражение, имеющее смысл на множестве допустимых значений уравнения $A=B$.

II. *Уравнение* $A=B$ равносильно уравнению $AC=BC$, где C число или некоторое математическое выражение, имеющее смысл на множестве допустимых значений уравнения $A=B$ и не обращающееся на нем в нуль.

III. *Уравнение* $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ равносильно уравнению $A_1B_2=A_2B_1$, рассматриваемому на множестве допустимых значений исходного уравнения, или на своем множестве при дополнительном условии, что $A_2B_2\neq 0$, т. е. $A_2\neq 0$ и $B_2\neq 0$.

В формулировках следующих свойств используется следующее понятие.

Определение. *Уравнение* $A=B$ *равносильно совокупности двух уравнений* $A'=B'$ *и* $A''=B''$, если все решения уравнения $A=B$ содержатся среди решений обоих уравнений $A'=B'$ и $A''=B''$ и обратно: все решения обоих уравнений $A'=B'$ и $A''=B''$ в то же время являются решениями уравнения $A=B$.

IV. Уравнение $AC=BC$ равносильно совокупности двух уравнений $C=0$ и $A=B$, рассматриваемых на множестве допустимых значений исходного уравнения.

Другими словами, найдя все корни уравнений $C=0$ и $A=B$ и взяв из них те, которые принадлежат множеству допустимых значений уравнения $AC=BC$, мы найдем все корни последнего.

V. Уравнение $A^2=B^2$ равносильно совокупности двух уравнений $A=B$ и $A=-B$.

Из свойств I—V вытекают следующие следствия:

1. Любое слагаемое уравнения можно переносить с противоположным знаком из одной части уравнения в другую.

В самом деле, согласно свойству I уравнение $A=B+C$ равносильно уравнению $A+(-C)=B+C+(-C)$, т. е. уравнению $A-C=B$.

2. Обе части уравнения можно сократить на общий множитель, не обращающийся в нуль на множестве допустимых значений данного уравнения.

Действительно, согласно свойству II, уравнение $AC=BC$ равносильно уравнению $AC\left(\frac{1}{C}\right)=BC\left(\frac{1}{C}\right)$, т. е. уравнению $A=B$.

Замечание. При приведении в уравнении подобных членов может произойти расширение множества допустимых значений исходного уравнения, т. е. могут появиться посторонние корни.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{x^2-1}{x}=x^2-\frac{1}{x}$.

Решение. Переписывая уравнение в виде $x-\frac{1}{x}=x^2-\frac{1}{x}$, после приведения подобных членов, получим уравнение $x=x^2$. Его корни $x_1=0$ и $x_2=1$. Но корень $x_1=0$ не является корнем исходного уравнения $\left(\frac{1}{x}\right.$ при $\left.x=0$ не имеет смысла$\right)$. Это произошло за счет того, что множество допустимых значений исходного уравнения не содержит $x=0$, а полученного — содержит.

При решении уравнений отдельных классов (например, иррациональных, показательных, логарифмических и др.) используют и некоторые другие свойства уравнений. Они будут рассмотрены в соответствующих местах.

Основной прием решения всякого уравнения заключается в следующем: используя свойства уравнений, различные законы неизвестных и параметров другими неизвестными и параметрами, пытаются свести исходное уравнение к одному или нескольким простейшим уравнениям, правила нахождения корней которых известны. При этом, если уравнение содержит параметры, то необходимо не просто выразить неизвестные через параметры, но также исследовать зависимость полученных формул корней от допустимых значений параметров. Если этого не сделать, то эти формулы

корней для отдельных значений параметров могут оказаться просто неверными.

При решении уравнений надо помнить, что рациональные уравнения, если нет специальной оговорки, рассматриваются на множестве комплексных чисел. Все остальные уравнения в элементарной математике рассматриваются на множестве действительных чисел.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С СИСТЕМАМИ УРАВНЕНИЙ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Совокупность двух и более уравнений $A_1=B_1$, $A_2=B_2$, ..., $A_n=B_n$, рассматриваемых совместно, называют *системой уравнений* и записывают:

$$\begin{cases} A_1=B_1, \\ A_2=B_2, \\ \ldots\ldots \\ A_n=B_n. \end{cases} \qquad (S)$$

Под множеством допустимых значений системы, если нет специальной оговорки, понимают множество числовых значений буквенных величин, входящих в выражения A_1, B_1, A_2, B_2, ..., A_n, B_n, при которых все они одновременно имеют смысл.

Классификацию систем (их названия) проводят по числу и характеру уравнений, входящих в систему. Например:

а) $\begin{cases} x^2-x-2=0, \\ 2x=3+\frac{1}{x} \end{cases}$

— система двух рациональных уравнений с одним неизвестным;

б) $\begin{cases} x+2y=3, \\ 3x-y=1 \end{cases}$

— система двух уравнений первой степени (линейных) с двумя неизвестными;

в) $\begin{cases} x+\sqrt[3]{y}=a, \\ x^2-xy=b \mid z \end{cases}$

— смешанная система двух уравнений с трем неизвестными (одно уравнение — иррациональное, а другое — рациональное), или просто — алгебраическая система двух уравнений с тремя неизвестными.

Бывают системы логарифмические, тригонометрические и т. д.

Решением системы называют совокупность значений неизвестных системы, принадлежащих ее множеству допустимых значений и удовлетворяющих всем уравнениям системы одновременно.

Если, например, $x=3$, $y=-1$, $z=2$ и $x=-1$, $y=2$, $z=5$ — два решения некоторой системы с тремя неизвестными, то их обозначают

$$x_1=3,\ y_1=-1,\ z_1=2;\quad x_2=-1,\ y_2=2,\ z_2=5$$

или в виде $(3;\ -1;\ 2)$, $(-1;\ 2;\ 5)$, каждый раз сохраняя порядок записей неизвестных.

Решить систему — это значит найти множество всех ее решений. Если система не имеет решений, то говорят, что она *противоречивая* или *несовместная*.

Если все решения одной системы являются решениями другой системы, то вторую систему называют *следствием* первой системы.

Две системы называются *равносильными* (эквивалентными), если каждая из них является следствием другой.

Из этого определения следует, что равносильные системы имеют только одно и то же решения.

Очевидно, что две несовместные системы можно считать равносильными (они обе не имеют решений).

Важны также следующие понятия.

Система (S) *равносильна совокупности двух систем* (S') и (S''), если каждое решение системы (S) является в то же время решением либо системы (S'), либо системы (S'') и обратно: все решения систем (S') и (S'') являются в то же время решениями системы (S).

Уравнение $A=B$ есть *уравнение-следствие* системы (S), если все решения этой системы являются в то же время решениями уравнения $A=B$.

Например, очевидно, что уравнения $A_1+A_2+\ldots+A_n=B_1+B_2+\ldots+B_n$ и $A_1A_2\ldots A_n=B_1B_2\ldots B_n$ являются уравнениями-следствиями системы $\begin{cases} A_1=B_1, \\ A_2=B_2, \\ \ldots\ldots \\ A_n=B_n. \end{cases}$

Если обратно, все решения уравнения $A=B$ являются решениями системы (S), то это уравнение к системе называют равносильным.

Имеют место следующие свойства систем:

I. Любое уравнение системы можно заменить уравнением, ему равносильным; при этом получится равносильная система.

Справедливость этого свойства вытекает из понятий равносильности уравнений и систем.

II. Если одно из уравнений системы (S) равносильно совокупности двух уравнений, то эта система равносильна совокупности двух систем (S') и (S''), в каждой из которых это уравнение заменено на одно из уравнений равносильной совокупности, а остальные оставлены без изменения.

Справедливость этого свойства вытекает из понятий равносильности уравнения и совокупности двух уравнений и равносильности системы и совокупности двух систем.

Например, в системе

$$\begin{cases} x^3+y^3=3(x+y), \\ x^2+y^2=7 \end{cases}$$

первое уравнение равносильно совокупности двух уравнений $x+y=0$ и $x^2-xy+y^2=3$ и, следовательно, система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=7 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ x^2+y^2=7. \end{cases}$$

III. Если к уравнениям системы (S) присоединить уравнение-следствие этой системы, то новая система будет равносильна системе (S). Справедливость этого свойства очевидна из понятий уравнения-следствия системы и равносильности систем.

IV. Система двух уравнений

$$\begin{cases} A_1=B_1, \\ A_2=B_2 \end{cases} \qquad (S)$$

равносильна системе

$$\begin{cases} m_1A_1+m_2A_2=m_1B_1+m_2B_2, \\ n_1A_1+n_2A_2=n_1B_1+n_2B_2, \end{cases} \qquad (S_1)$$

где m_1, m_2, n_1, n_2 — либо числа, либо некоторые математические выражения, имеющие смысл на множестве допустимых значений системы S и такие, что выражение $\Delta=m_1n_2-n_1m_2$ не обращается ни в нуль (Δ — греческая буква «дельта»).

Действительно, умножая обе части первого уравнения системы S на m_1, а второго на m_2 и складывая, получим первое уравнение системы S_1. Умножая эти уравнения на n_1 и n_2 и складывая, получим второе уравнение системы S_1. Из этого следует, что система S_1 является следствием системы S. Обратно, умножая первое уравнение системы S_1 на n_2, а второе на $-m_2$ и складывая, получим уравнение $\Delta A_1=\Delta B_1$. Умножая первое уравнение системы S_1 на $-n_1$, а второе на m_1 и складывая, получим уравнение $\Delta A_2=\Delta B_2$. Следовательно, система

$$\begin{cases} \Delta A_1=\Delta B_1, \\ \Delta A_2=\Delta B_2, \end{cases} \qquad (S_2)$$

является следствием системы S_1, но, очевидно, система S является, в свою очередь, следствием системы S_2 (сокращая обе части уравнений системы S_2 на $\Delta\neq 0$).

Таким образом, каждая из систем S и S_1 является следствием другой, т. е. они равносильны.

Выражение Δ обычно записывают в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix}$$

и называют *определителем*, составленным из элементов m_1, m_2, n_1, n_2. Следовательно, по определению

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} = m_1 n_2 - n_1 m_2.$$

Следствия.

1. Система $\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2, \end{cases}$ (S)

равносильна системе

$$\begin{cases} mA_1 + nA_2 = mB_1 + nB_2, \\ mA_1 - nA_2 = mB_1 - nB_2 \end{cases} \quad (S_1)$$

при условии $\Delta = \begin{vmatrix} m & n \\ m & -n \end{vmatrix} = -2mn \neq 0$ (т. е. m и n не равны нулю на множестве допустимых значений системы S).

В частности, она равносильна системе

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = B_1 + B_2, \\ A_1 - A_2 = B_1 - B_2. \end{cases} \quad (m = 1,\ n = -1).$$

2. Система $\begin{cases} A_1 = B_1 \\ A_2 = B_2 \end{cases}$ равносильна системе $\begin{cases} A_1 = B_1, \\ mA_1 + nA_2 = mB_1 + nB_2 \end{cases}$

при условии $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{vmatrix} = n \neq 0.$

В частности, она равносильна системам $\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \end{cases}$ $(m = 1, n = 1)$

и $\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_1 - A_2 = B_1 - B_2. \end{cases}$ $(m = 1,\ n = -1).$

Бывает, что в системе

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2, \\ \dots\dots \\ A_n = B_n, \end{cases} \quad (S)$$

например, выражение A_1 входит составной частью в выражение A_2. Если в выражении A_2 его составную часть A_1 заменить через B_1, то получим новое выражение A_2' и тем самым новую систему

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2' = B_2, \\ \dots\dots \\ A_n = B_n, \end{cases} \quad (S_1)$$

которая отличается от системы S лишь левой частью второго уравнения.

Например, если в системе

$$\begin{cases} x^2 + y = 3, \\ z(x^2 + y) + x = 1, \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

во втором уравнении заменим $x^2 + y$ через 3, то получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y = 3, \\ 3z - x = 1, \\ x - y - z = 0. \end{cases}$$

V. Система $\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2, \\ \dots\dots \\ A_n = B_n \end{cases}$ (S) равносильна системе $\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2' = B_2, \\ \dots\dots \\ A_n = B_n, \end{cases}$ $(S_1),$

где A_2' — новое выражение, получившееся из выражения A_2 в результате замены в нем его составной части A_1 через B_1.

Действительно, из справедливости равенства $A_1 = B_1$ системы S или системы S_1 для какого-нибудь решения системы S или S_1 следует справедливость равенства $A_2 = A_2'$, а значит и равносильность систем S и S_1.

Из последнего свойства следует обоснование метода решения систем так называемым способом *подстановки*, который заключается в следующем:

1. Выражаем из какого-нибудь уравнения системы одно неизвестное через остальные (при этом надо следить, чтобы новое уравнение было равносильно исходному).

2. Исключаем это неизвестное из остальных уравнений системы, подставив найденное выражение в прочие уравнения. В результате получим систему, в которой число уравнений и неизвестных на 1 меньше, чем в исходной системе.

3. С этой системой поступаем аналогично и т. д.

В конечном итоге мы придем к одному уравнению.

4. Находим все решения последнего уравнения и подставляем их последовательно в уравнения, выражающие одно неизвестное через остальные. В итоге получим все решения первоначальной системы.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x-2y+3z=9, \\ 2x+y-z=-1, \\ -3x+2y+3z=1. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения находим

$$x=2y-3z+9. \qquad (*)$$

Подставляя это значение x во второе и третье уравнения системы, после приведения подобных получим систему

$$\begin{cases} 5y-7z=-19, \\ -y+3z=7. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы имеем

$$y=3z-7. \qquad (**)$$

Подставляя в первое уравнение, получаем $8z=16$, откуда $z=2$. Теперь из $(**)$ находим $y=-1$ и окончательно из $(*)$ имеем $x=1$.

Таким образом, первоначальная система имеет единственное решение: $x=1$, $y=-1$, $z=2$.

Однако далеко не всегда можно решить систему методом подстановки (не всегда возможно из уравнения выразить одно неизвестное через остальные). Тогда применяют различные частные приемы, которые невозможно предусмотреть общей теорией. Но какими бы приемами система ни решалась, надо тщательно следить за равносильностью преобразований. Если не удалось избежать действий, которые могут привести к появлению посторонних решений системы, то все найденные решения надо подвергнуть проверке, подставляя их в первоначальную систему.

Как и при решении уравнений, надо помнить, что если все уравнения системы рациональны относительно неизвестных и нет специальной оговорки, то решения такой системы ищутся на множестве комплексных чисел. Во всех остальных случаях системы в элементарной математике рассматриваются на множестве действительных чисел.

§ 4. ЦЕЛЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Всякое целое рациональное уравнение после перенесения всех членов в одну часть и приведения подобных может быть представлено в следующем каноническом виде:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (a_0\neq 0,\ n-\text{натуральное}). \qquad (1)$$

Левая часть такого уравнения является многочленом степени n относительно x и сокращенно обозначается $P_n(x)$, т. е.

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n. \qquad (2)$$

Корнем многочлена $P_n(x)$ называют всякое число x_0, удовлетворяющее уравнению (1), т. е. число, для которого многочлен (2) принимает значение равное нулю: $P_n(x_1)=0$.

Отметим следующие свойства многочленов:

1. Основная теорема алгебры (теорема Гаусса)*. *Всякий многочлен (2), рассматриваемый на множестве комплексных чисел имеет, по крайней мере, один корень.*

Эта теорема доказывается в курсе высшей алгебры.

2. Теорема о числе корней многочлена и разложении его на линейные множители. *Всякий многочлен, рассматриваемый на множестве комплексных чисел, имеет ровно столько корней, какова его степень и всегда разлагается на линейные множители по формуле*

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), \qquad (3)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — все корни многочлена, среди которых могут быть равные.

Доказательство. Согласно основной теореме существует число x_1 такое, что $P(x_1)=0$. Но тогда по теореме Безу (см. гл. II, § 3) многочлен $P_n(x)$ делится без остатка на двучлен $x-x_1$, т. е. имеет место тождество $P_n(x)=(x-x_1)P_{n-1}(x)$. (Здесь через $P_{n-1}(x)$ обозначен многочлен степени $n-1$ — частное от деления $P_n(x)$ на $x-x_1$.)

Рассуждая аналогично, для многочлена $P_{n-1}(x)$ получим $P_{n-1}(x)=(x-x_2)P_{n-2}(x)$. Продолжая этот процесс далее, в конце концов получим $P_1(x)=(x-x_n)P_0(x)$, где $P_0(x)$ — многочлен нулевой степени относительно x, т. е. некоторое число A.

Таким образом, существуют числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (не обязательно все разные), для которых имеют место тождества

$$P_n(x)=(x-x_1)P_{n-1}(x),\ P_{n-1}(x)=(x-x_2)P_{n-2}(x),\ \ldots,$$
$$\ldots,\ P_1(x)=(x-x_n)A.$$

Подставляя последовательно каждое следующее тождество в предыдущее, получаем

$$P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\cdot A. \qquad (4)$$

Так как (2) и (4) различные представления одного и того же многочлена, то коэффициенты при x^n должны быть одинаковыми, т. е. $A=a_0$.

Таким образом,

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

* К. Ф. Гаусс (1777—1855) — немецкий математик.

Из формулы (3) следует, что $P_n(x_1)=0$, $P_n(x_2)=0, \ldots$ $\ldots, P_n(x_n)=0$, т. е. числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются корнями многочлена (2). Очевидно, что эта совокупность содержит все корни многочлена, так как $P_n(x) \neq 0$ для любого числа x не равного числам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ни один из множителей в (3) не будет равен 0). Таким образом, теорема доказана.

Из формулы (3) вытекает следующее: если все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ различны, то многочлен $P_n(x)$ имеет ровно n различных корней; если же некоторые из этих чисел совпадают между собой, то число различных корней $P_n(x)$ будет меньше n. В этом случае среди множителей формулы (3) имеются равные.

Определение. Число x_0 называется *корнем кратности* k многочлена (2), если в формулу (3) множитель $(x-x_0)$ входит ровно k раз, т. е.

$$P_n(x) = (x-x_0)^k \cdot P_{n-k}(x), \tag{5}$$

причем $P_{n-k}(x_0) \neq 0$. Если $k=1$, то x_0 называют *простым* или *однократным* корнем.

3. **Формулы Виета*** (связь между корнями многочлена и его коэффициентами).

Если в (3) произвести умножение двучленов, то получим

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x^n + s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} + \ldots + s_n), \tag{6}$$

где

$$s_1 = (-x_1) + (-x_2) + \ldots + (-x_n) = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),$$

$$s_2 = (-x_1)\cdot(-x_2) + \ldots + (-x_{n-1})\cdot(-x_n) = x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_n = (-x_1)\cdot(-x_2)\ldots(-x_n) = (-1)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots x_n.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в (6), найдем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_2}{a_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases} \tag{7}$$

Это так называемые формулы Виета. В левых частях соотношений (7) стоят суммы всевозможных сочетаний из всех корней многочлена по одному, по два, по три и т. д. Они являются симметрическими выражениями относительно его корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В правых частях соотношений (7) стоят коэффициенты многочлена $a_1, a_2, \ldots, a_n$ при степенях $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x^0$, и т. д., деленные на коэффициент a_0 при старшей степени x и взятые со знаком $(-1)^1$, $(-1)^2, \ldots, (-1)^{n-1}$ и т. д. соответственно.

Формулы (7) позволяют по известным корням уравнения составить это уравнение в виде

$$x^n - \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}x^{n-2} + \ldots + \frac{a_n}{a_0} = 0. \tag{8}$$

Это так называемый приведенный вид уравнения n-й степени, когда коэффициент при старшей степени неизвестного равен единице.

* Виет (1540—1603) — французский математик.

4. Свойства многочленов с действительными коэффициентами

Теорема 1. *Если комплексное число $x=a+bi$ является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то и сопряженное число $\bar{x}=a-bi$ также является корнем этого многочлена.*

Доказательство. Так как $x=a+bi$ корень многочлена $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, то

$$P_n = a_0(a+bi)^n + a_1(a+bi)^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{*}$$

В этом выражении над комплексными числами производятся лишь рациональные операции.

Заменим в левой части равенства (*) все числа на сопряженные. При этом $\bar{a}_0=a_0$, $\bar{a}_1=a_1, \ldots, \bar{a}_n=a_n$ (a_k — действительны!), $\overline{a+bi}=a-bi$. Тогда согласно свойству комплексных чисел (см. гл. I, § 6) и результат заменится на сопряженный, т. е. 0 на $\bar{0}$. Но $\bar{0}=0$, поэтому имеем

$$a_0(a-bi)^n + a_1(a-bi)^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

т. е. $a-bi$ является корнем многочлена $P_n(x)$.

Теорема 2. *Многочлен с действительными коэффициентами всегда разлагается в произведение линейных и квадратных множителей, коэффициенты которых также действительны.*

Доказательство. В самом деле, если многочлен имеет лишь действительные корни, то утверждение следует из формулы (3).

Если же он имеет комплексный корень $x_1=a+bi$, то по теореме 1 он имеет и сопряженный комплексный корень $\bar{x}_1=a-bi$ и, следовательно, (теорема Безу) делится на $x-x_1$ и $x-\bar{x}_1$, т. е. на их произведение $(x-x_1)(x-\bar{x}_1)=x^2-(x_1+\bar{x}_1)x+x_1\bar{x}_1=x^2+px+q$, где $p=-(x_1+\bar{x}_1)=-(a+bi+a-bi)=-2a$ и $q=x_1\bar{x}_1=(a+bi)\times(a-bi)=a^2+b^2$ — действительные числа. Таким образом в этом случае многочлен $P_n(x)$ представим в виде $P_n(x)=(x^2+px+q)\times P_{n-2}(x)$.

Рассуждая так же относительно многочлена $P_{n-2}(x)$ и т. д., в конечном итоге получим требуемое утверждение.

Из теоремы 2, в частности, вытекает, что всякий многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень. (Если бы было не так, то такой многочлен разлагался бы лишь на множители вида x^2+px+q, которые в произведении могут лишь дать многочлен четной степени).

§ 5. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ И КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

I. *Линейным* уравнением называется уравнение первой степени

$$ax+b=0 \qquad (a\neq 0). \tag{9}$$

Это уравнение равносильно уравнению $ax=-b$, из которого следует, что

$$x=-\frac{b}{a}.$$

Таким образом, линейное уравнение всегда имеет единственный корень.

Пример 1. Решить уравнение $a^2x=a(x+2)-2$ (*).

Решение. Перенося неизвестные в одну часть равенства, а известные в другую, получаем равносильное уравнение $a(a-1)x=2(a-1)$. Если $a(a-1)\neq 0$, т. е. $a\neq 0$, $a\neq 1$, то имеем линейное уравнение, которое имеет единственный корень $x=\frac{2}{a}$.

Если $a=0$, то уравнение противоречиво ($0\cdot x=-2$), если $a=1$, то равенство (*) есть тождество, т. е. ему удовлетворяют любые значения x.

II. Уравнение

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0) \tag{10}$$

называется *квадратным*. Его левая часть есть многочлен второй степени (квадратный трехчлен).

Для решения квадратного уравнения, выделим в его левой части полный квадрат.

Имеем

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Так как $a\neq 0$, то уравнение (10) равносильно уравнению

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0,$$

или

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Последнее равносильно совокупности двух линейных уравнений

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{11}$$

(знаки $\pm$ перед радикалом обозначают в общем случае два различных значения радикала, рассматриваемого на множестве комплексных чисел).

Решая каждое из уравнений (11), находим формулу корней квадратного уравнения

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{12}$$

которая справедлива для любых коэффициентов a, b и c при условии, что $a\neq 0$.

Если $b^2-4ac\neq 0$, то согласно (12) уравнение (11) имеет два различных корня; если же $b^2-4ac=0$, то имеем два равных корня $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$.

Пример 2. Решить уравнение $x^2+ix+i-1=0$.

Решение. Согласно формуле (12) имеем

$$x_{1,2}=\frac{-i\pm\sqrt{i^2-4(i-1)}}{2}=\frac{-i\pm\sqrt{i^2-4i+4}}{2}=$$

$$=\frac{-i\pm\sqrt{(i-2)^2}}{2}=\frac{-i\pm(i-2)}{2},$$

откуда находим

$$x_1=\frac{-i+i-2}{2}=-1 \quad \text{и} \quad x_2=\frac{-i-i+2}{2}=1-i.$$

Если коэффициент при x в уравнении (10) четный, т. е.

$$ax^2+2b_1x+c=0, \tag{10'}$$

то формула (12) упрощается. В этом случае

$$x_{1,2}=\frac{-2b_1\pm\sqrt{4b_1^2-4ac}}{2a} \quad \text{или} \quad x_{1,2}=\frac{-b_1\pm\sqrt{b_1^2-ac}}{a}. \tag{12'}$$

Замечание. Если квадратное уравнение (10) неполное, т. е. либо $b=0$, либо $c=0$, то его можно решить, не прибегая к формуле (12).

1. Уравнение $ax^2+bx=0$ или $x(ax+b)=0$ равносильно совокупности двух уравнений $x=0$ и $ax+b=0$, из которых следует, что $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$.

2. Уравнение $ax^2+c=0$ или $x^2=-\frac{c}{a}$ имеет корни $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Из формулы (12) вытекает следующая зависимость между корнями и коэффициентами квадратного уравнения (*формулы Виета для квадратного уравнения*):

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}. \tag{13}$$

Действительно, из (12) имеем

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\text{и}\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Сложив и перемножив эти равенства, получим требуемое.

Формулы Виета легко позволяют получить разложение квадратного трехчлена на линейные множители

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right]=$$

$$=a\left[(x^2-x_1x)-(x_2x-x_1x_2)\right]=a\left[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right]=$$

$$=a(x-x_1)\cdot(x-x_2).$$

Таким образом, справедливо тождество

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \tag{14}$$

(*сравните с* (3), § 4).

Если $x_1=x_2$, то из (14) следует, что $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$, т. е. квадратный трехчлен является полным квадратом.

§ 6. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В теории квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ и квадратного трехчлена ax^2+bx+c большую роль играет выражение

$$D=b^2-4ac, \tag{15}$$

называемое *дискриминантом* квадратного трехчлена или уравнения. При этом формулу корней квадратного уравнения [(12), § 5] можно записать в виде

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}. \tag{16}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Квадратное уравнение с действительными коэффициентами имеет:*

1) *мнимые, причем обязательно сопряженные корни, тогда и только тогда, когда его дискриминант меньше нуля;*

2) *действительные равные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю;*

3) *действительные различные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант больше нуля.*

Доказательство. Действительно, эти утверждения в одну сторону непосредственно следуют из формулы (16). Например, если $D<0$, то в формуле (16) под знаком радикала стоит отрицательное число и так как b и a — действительные числа, то, следовательно, уравнение имеет два комплексных сопряженных корня. Аналогично доказываются остальные случаи.

Обратные утверждения легко доказываются от противного.

Если, например, x_1 и x_2 — мнимые, то предположив, что $D\geqslant 0$, мы, согласно прямым утверждениям случаев 2 и 3, не можем иметь никаких корней. Получаем противоречие. Аналогично рассуждаем в остальных случаях.

Заметим, что если корни квадратного уравнения действительные, то формулы Виета позволяют по знакам коэффициентов уравнения определить знаки корней. Например, если $a>0$, $b>0$, $c<0$, то $x_1x_2=\frac{c}{a}<0$ и, следовательно, корни имеют разные знаки (произведение действительных чисел отрицательно!).

Так как при этом $x_1+x_2=\frac{-b}{a}<0$, то из этого следует что больший по абсолютной величине корень отрицателен (сумма двух чисел разных знаков — отрицательная!). Аналогично рассуждаем в случае других комбинаций знаков коэффициентов квадратного уравнения.

§ 7. ДВУЧЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Так называют уравнения вида

$$ax^n\pm b=0\qquad(a>0,\ b>0). \tag{17}$$

Заменой

$$x=y\sqrt[n]{\frac{b}{a}}, \tag{18}$$

где $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ — арифметический корень, двучленное уравнение приводится к виду

$$y^n\pm 1=0. \tag{19}$$

Поэтому достаточно уметь находить корни уравнения (19), так как корни уравнения (17) затем найдем по формуле (18). В элементарной алгебре обычно рассматривают случаи $n=2, 3, 4, 6$.

Покажем, как находить корни в этих случаях.

I. $n=2$. Двучленные уравнения $y^2-1=0$ и $y^2+1=0$ являются неполными квадратными уравнениями. Корни первого уравнения равны ± 1, корни второго равны $\pm i$.

II. $n=3$. Уравнение $y^3-1=0$ равносильно совокупности двух уравнений $y-1=0$ и $y^2+y+1=0$. Решая каждое из них, находим $y_1=1$; $y_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Уравнение $y^3+1=0$ равносильно совокупности уравнений $y+1=0$ и $y^2-y+1=0$. Решая их, находим $y_1=-1$;

$$y_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

III. $n=4$. Уравнение $y^4-1=0$ равносильно совокупности двух уравнений $y^2-1=0$ и $y^2+1=0$. Решая их, находим

$$y_{1,2}=\pm 1;\ y_{3,4}=\pm i.$$

Для того чтобы свести уравнение $y^4+1=0$ к равносильной совокупности квадратных уравнений, дополним его левую часть до полного квадрата. Получаем

$$(y^4+2y^2+1)-2y^2=0 \text{ или } (y^2+1)^2-(\sqrt{2}y)^2=0.$$

Последнее раскладывается на два уравнения $y^2-\sqrt{2}y+1=0$ и $y^2+\sqrt{2}y+1=0$. Решая их, находим

$$y_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i),\ y_{3,4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i).$$

IV. $n=6$. Уравнение $y^6-1=0$ равносильно двум уравнениям $y^3-1=0$ и $y^3+1=0$ (см. II). Их корни:

$$y_{1,2}=\pm 1,\ y_{3,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},\ y_{5,6}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Уравнение $y^6+1=0$ сводится к предыдущему, если ввести новое неизвестное z, связанное с y формулой $y=iz$. Тогда z удовлетворяет уравнению $i^6z^6+1=0$ или $z^6-1=0$. Его корни уже известны (см. выше). Умножая их на i, получим корни данного уравнения

$$y_{1,2}=\pm i,\ y_{3,4}=\frac{-i\pm\sqrt{3}}{2},\ y_{5,6}=\frac{i\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Пример. Решить уравнение $2x^3+3=0$.

Решение. Положим $x=y\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. Тогда данное уравнение приводится к виду $y^3+1=0$. Решая его (см. случай III), найдем

$$y_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i),\ y_{3,4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i).$$

Умножая теперь каждый из этих корней на $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$, получим корни данного уравнения

$$x_{1,2}=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1\pm i),\ x_{3,4}=-\frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1\pm i).$$

В общем случае решение уравнения (19) сводится к нахождению всех корней n-й степени из ± 1. Эти корни можно получить по формулам (см. гл. I, § 6)

$$\sqrt[n]{1}=\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\qquad k=0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\sqrt[n]{-1}=\omega_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n};\ k=0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Если воспользоваться геометрической интерпретацией комплексных чисел, то точки, изображающие эти корни, очевидно, будут вершинами правильного n-угольника, вписанного в единичный круг с центром в начале координат.

§ 6. БИКВАДРАТНОЕ И ТРЕХЧЛЕННОЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение четвертой степени

$$ax^4+bx^2+c=0\qquad (a\neq 0)$$

называется *биквадратным*. Заменой $x^2=y$ решение этого уравнения сводится к решению квадратного уравнения $ay^2+by+c=0$ и затем двух двучленных уравнений $x^2=y_1$ и $x^2=y_2$, где y_1 и y_2 корни соответствующего квадратного уравнения.

Если коэффициенты биквадратного уравнения действительны, то возможны следующие случаи:

1. $y_1>0$ и $y_2>0$; тогда биквадратное уравнение имеет четыре действительных корня (с учетом кратности корней)

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1},\ x_{3,4}=\pm\sqrt{y_2};$$

2. $y_1>0$, $y_2<0$, тогда биквадратное уравнение имеет два действительных корня $x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1}$ и два чисто мнимых сопряженных корня $x_{3,4}=\pm\sqrt{y_2}=\pm i\sqrt{-y_2}$;

3. $y_1<0$ и $y_2<0$, тогда биквадратное уравнение имеет четыре чисто мнимых попарно сопряженных корня

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1}=\pm i\sqrt{-y_1},\quad x_{3,4}=\pm\sqrt{y_2}=\pm i\sqrt{-y_2}.$$

4. $y_1=u+vi$ и $y_2=u-vi$ $(v\neq 0)$, тогда биквадратное уравнение имеет четыре попарно-сопряженных комплексных корня.

Для их нахождения надо извлекать квадратные корни из комплексных чисел $u+iv$ и $u-iv$. Чтобы избежать этой операции, преобразуем данное уравнение. Перепишем уравнение в виде $x^4+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}=0$, или $x^4+px^2+q=0$, где $p=\frac{b}{a}$ и $q=\frac{c}{a}$.

Так как соответствующее квадратное уравнение имеет комплексные корни, то его дискриминант $D=p^2-4q<0$. Следовательно, $q>0$, так как при $q\leqslant 0$ дискриминант $D\geqslant 0$. Поэтому уравнение можно переписать в виде $(x^2+\sqrt{q})^2-2x^2\sqrt{q}+px^2=0$ ($\sqrt{q}$ — арифметический!) или $(x^2+\sqrt{q})^2-x^2(2\sqrt{q}-p)=0$, где $2\sqrt{q}-p>0$.

В самом деле, при $p\leqslant 0$ это очевидно, а при $p>0$ это вытекает из неравенства $p^2<4q$.

Обозначая положительное число $2\sqrt{q}-p$ через s^2, перепишем последнее уравнение в виде

$$(x^2+\sqrt{q})^2-s^2x^2=0$$

или

$$(x^2-\sqrt{q}-sx)(x^2+\sqrt{q}+sx)=0.$$

Следовательно, биквадратное уравнение в этом случае равносильно совокупности двух квадратных уравнений с действительными коэффициентами

$$x^2-sx+\sqrt{q}=0\ \text{и}\ x^2+sx+\sqrt{q}=0.$$

Решая их, найдем все четыре корня.

Пример. Решить уравнение $x^4+x^2+1=0$.

Решение. Если его решать общим приемом, то получим $y_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ и $y_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ и для нахождения значений x_1, x_2, x_3, x_4 надо извлечь корни из этих комплексных чисел. Изберем другой путь решения.

Указанным приемом преобразуем уравнение к виду

$$(x^2-1)^2-2x^2+x^2=0$$

или

$$(x^2+1)^2-x^2=0.$$

Последнее равносильно совокупности двух уравнений

$$x^2-x+1=0$$

и

$$x^2+x+1=0.$$

Решая их, находим все четыре корня данного уравнения

$$x_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2},\quad x_{3,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Биквадратное уравнение является частным случаем так называемых *трехчленных уравнений*

$$ax^{2n}+bx^n+c=0\qquad (a\neq 0,\ n\geqslant 2).$$

Заменой $x^n=y$ решение таких уравнений сводится к решению квадратного уравнения $ay^2+by+c=0$ и двух двучленных уравнений $x^n=y_1$ и $x^n=y_2$, где y_1 и y_2 — корни квадратного уравнения.

§ 9. ВОЗВРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Уравнение четвертой степени

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \tag{20}$$

называют возвратным, если существует число $\lambda\neq 0$ такое, что коэффициенты уравнения, равноудаленные от концов, удовлетворяют условию

$$d=\lambda b,\ c=\lambda^2 a \tag{21}$$

или, что то же самое, если $b\neq 0$, условию $\left(\frac{d}{b}\right)^2=\frac{e}{a}$. Например, уравнение $2x^4+3x^3-19x^2-6x+8=0$ возвратное, так как $\left(-\frac{6}{3}\right)^2=\frac{8}{2}$, т. е. $\lambda=-2$. Согласно (21) возвратное уравнение (20) можно представить в виде

$$ax^4+bx^3+cx^2+(\lambda b)x+(\lambda^2 a)=0. \tag{22}$$

Название «возвратное» происходит от следующего свойства такого уравнения.

Если в возвратном уравнении сделать замену $x=\frac{\lambda}{y}$, *то относительно нового неизвестного получим прежнее уравнение* («возвратимся» к исходному уравнению).

Действительно, подставляя в (22) $x=\frac{\lambda}{y}$, получим

$$\frac{a\lambda^4}{y^4}+\frac{b\lambda^3}{y^3}+\frac{c\lambda^2}{y^2}+\frac{\lambda^3 b}{y}+\lambda^2 a=0.$$

После приведения к общему знаменателю и сокращения на λ^2, получаем прежнее уравнение

$$(a\lambda^2)+(b\lambda)y+cy^2-by^2+ay^2=0.$$

Рассмотрим схему решения возвратного уравнения.

Так как, очевидно, $x=0$ не является корнем уравнения (22), то, разделив это уравнение почленно на x^2 и сгруппировав члены, равноудаленные от концов, получим равносильное уравнение

$$a\left(x^2+\frac{\lambda^2}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{\lambda}{x}\right)+c=0. \qquad (23)$$

Положим $x+\frac{\lambda}{x}=y$. Тогда имеем

$$x^2+\frac{\lambda^2}{x^2}=\left(x+\frac{\lambda}{x}\right)^2-2\lambda=y^2-2\lambda, \qquad (24)$$

Следовательно, относительно нового неизвестного y уравнение становится квадратным

$$a(y^2-2\lambda)+by+c=0.$$

Если y_1, y_2 — корни этого уравнения, то значения неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4 найдем из совокупности уравнений

$$x+\frac{\lambda}{x}=y_1,\quad x+\frac{\lambda}{x}=y_2.$$

Пример 1. Решить уравнение $2x^4+3x^3-13x^2-6x+8=0$.

Решение. Это уравнение, как мы уже видели, является возвратным.

Разделив на x^2 и группируя члены, равноудаленные от концов, получим равносильное уравнение $2\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{2}{x}\right)-13=0$.

Полагая $x-\frac{2}{x}=y$, найдем $x^2+\frac{4}{x^2}=y^2+4$.

После подстановки получим относительно y уравнение $2y^2+3y-5=0$, откуда $y_1=1$, $y_2=-\frac{5}{2}$. Теперь из уравнений $x-\frac{2}{x}=1$ и $x-\frac{2}{x}=-\frac{5}{2}$ находим

$$x_1=-1,\ x_2=2,\ x_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{57}}{4}.$$

Частными случаями возвратных уравнений являются уравнения *симметрические* ($\lambda=1$)

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0 \qquad (25)$$

(коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и от конца одинаковые) и *кососимметрические* ($\lambda=-1$)

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0 \qquad (26)$$

(коэффициенты членов, равноотстоящих от концов, при четных степенях равны, а при нечетных равны по абсолютной величине и противоположны по знаку).

Подстановкой $x+\frac{1}{x}=y$ для симметрического и $x-\frac{1}{x}=y$ для кососимметрического уравнения они сводятся к квадратным уравнениям.

Пример 3. Решить уравнения $y^5\pm1=0$.

Решение. Имеем $y^5-1=(y-1)\cdot(y^4+y^3+y^2+y+1)$. Следовательно, уравнение $y^5-1=0$ равносильно совокупности двух уравнений: а) $y-1=0$, откуда $y_1=1$, и б) $y^4+y^3+y^2+y+1=0$ — симметрическое уравнение. Разделив на y^2, получим равносильное уравнение

$$\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+1=0.$$

Полагая $y+\frac{1}{y}=z$, и тем самым $y^2+\frac{1}{y^2}=\left(y+\frac{1}{y}\right)^2-2=z^2-2$, получаем $z^2-2+z+1=0$ или $z^2+z-1=0$, откуда $z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Для определения y получаем совокупность двух квадратных уравнений: $2y^2-(\sqrt{5}-1)y+2=0$ и $2y^2+(\sqrt{5}+1)y-2=0$, из которых находим

$$y_{1,2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\quad y_{3,4}=-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Аналогично, уравнение $y^5+1=0$ равносильно совокупности двух уравнений: а) $y+1=0$, откуда $y_1=-1$, и б) $y^4-y^3+y^2-y+1=0$ — симметрическое уравнение.

Преобразуем его к виду $\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)-\left(y+\frac{1}{y}\right)+1=0$ и полагаем $y+\frac{1}{y}=z$. Тогда мы получим квадратное уравнение $z^2-z-1=0$, из которого следует, что $z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Теперь из уравнений $2y^2-(\sqrt{5}+1)y+2=0$ и $2y^2+(\sqrt{5}-1)y+2=0$ находим

$$y_{2,3}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm\frac{i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\quad y_{4,5}=-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

§ 10. ПОДБОР РАЦИОНАЛЬНЫХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения с целыми коэффициентами

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0,\ a_n \neq 0),$$

т. е. справедливо тождество

$$a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right) + a_n = 0, \qquad (27)$$

или

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0. \qquad (28)$$

Отсюда имеем

$$-a_nq^n = p(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + a_2p^{n-3}q^2 + \ldots + a_{n-1}q^{n-1}).$$

Так как целое число, стоящее в правой части, делится на p, то, следовательно, число a_nq^n также делится на p, но q^n не может делиться на p (q и p — взаимно простые!). Следовательно, a_n делится на p.

Из (28) также имеем

$$-a_0p^n = q(a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1}).$$

Рассуждая аналогично, получим, что a_0 делится на q.

Таким образом, *рациональные корни уравнения с целыми коэффициентами следует искать лишь среди чисел вида* $\frac{p}{q}$, *где* p *и* q — *всевозможные делители (как положительные, так и отрицательные!) соответственно свободного члена уравнения и коэффициента при старшей степени. В частности, целые корни следует искать лишь среди делителей свободного члена* ($q=1$).

Знание каждого рационального корня уравнения позволяет понизить степень уравнения на единицу.

В самом деле, если $x=\frac{p}{q}$ — корень уравнения $P(x)=0$, то согласно теореме Безу многочлен $P(x)$ делится на $qx-p$, т. е. $P(x)=(qx-p)Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен степени на единицу меньше, чем $P(x)$, и нахождение остальных корней уравнения $P(x)=0$ сводится к решению уравнения $Q(x)=0$.

Пример 1. Решить уравнение $4x^4+8x^3-3x^2-7x+3=0$.

Решение. Подлежат определению значения $p=\pm 1,\ \pm 3$ и $q=1, 2, 4$ (отрицательные значения q мы отбрасываем, так как если $\frac{p}{q}<0$, то можно считать, что $p<0$, а $q>0$). Беря всевозможные комбинации p и q, находим, что для нахождения рациональных корней надо опробовать значения $\pm 1,\ \pm 3,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{3}{4}$.

Подставляя эти числа в уравнение, находим корни $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{3}{2}$. Следовательно, левая часть уравнения делится на $(2x+1)(2x+3)=4x^2+4x-3$. Найдя частное, получаем уравнение $x^2+x-1=0$. Отсюда $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение $x^4+x^3+x^2-3x+2=0$.

Решение. Если уравнение имеет рациональные корни, то они должны содержаться среди чисел $\pm 1,\ \pm 2$, так как коэффициент при x^4 равен единице. Непосредственной проверкой убеждаемся, что годится лишь $x_1=-1$. Разделив левую часть на $x+1$, получим уравнение $x^3+x+2=0$. Поступая с этим уравнением аналогично, находим $x_2=-1$. Разделив левую часть на $x+1$, получим уравнение $x^2-x+2=0$, откуда

$$x_{5,6}=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}.$$

§ 11. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными, после перенесения неизвестных в каждом уравнении в одну часть, приводится к виду

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1, \\ a_2x + b_2y = d_2. \end{cases} \qquad (29)$$

Считаем, что в каждом уравнении хотя бы один коэффициент при неизвестном не равен нулю (в противном случае, не имеет смысла говорить о системе двух уравнений!).

Умножив первое уравнение на b_2, а второе на $-b_1$ и сложив их, получим $(a_1b_2-b_1a_2)x=d_1b_2-b_1d_2$.

Умножив первое уравнение на $-a_2$, а второе на a_1 и сложив, получим $(a_1b_2-b_1a_2)y=a_1d_2-a_2d_1$.

Если $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-b_1a_2\neq 0$, то согласно свойству III (см. § 3) получаем систему

$$\begin{cases} (a_1b_2-b_1a_2)x = d_1b_2-b_1d_2, \\ (a_1b_2-b_1a_2)y = a_1d_2-d_1a_2 \end{cases} \qquad (29')$$

равносильную системе (29).

Если положить для удобства

$$\Delta = a_1b_2 - b_1a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ (определитель системы)}, \quad (30')$$

$$\Delta_x = d_1b_2 - b_1d_2 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ (определитель неизвестного } x), \quad (30'')$$

$$\Delta_y = a_1d_2 - d_1a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \text{ (определитель неизвестного } y), \quad (30''')$$

то система (29′) принимает вид

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x, \\ \Delta \cdot y = \Delta_y, \end{cases}$$

откуда находим единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \quad (31)$$

Таким образом, *если определитель системы* (29) *не равен нулю, то система имеет решение и притом единственное.* Это решение определяется по формулам (31), где Δ, Δ_x, Δ_y — определители, вычисляемые по формулам (30′), (30″), (30‴).

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} ix - 2y = 3, \\ x + (1+i)y = -1. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} i & -2 \\ 1 & 1+i \end{vmatrix} = i(1+i) - 1(-2) = 1 + i \neq 0.$$

Теперь находим

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1+i \end{vmatrix} = 3(1+i) - (-1)(-2) = 1 + 3i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} i & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = i(-1) - 3 \cdot 1 = -3 - i.$$

Следовательно,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1+3i}{1+i} = 2 + i,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{3+i}{1+i} = -2 + i.$$

Пусть теперь $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.

Если, например, $a_1 \neq 0$ (в случае $a_1 = 0$, $b_1 \neq 0$ рассуждаем аналогично), то из равенства $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ имеем $b_2 = \frac{a_2}{a_1} \cdot b_1$. Полагая $\frac{a_2}{a_1} = \lambda$, т. е. $a_2 = a_1\lambda$, получаем, что и $b_2 = b_1\lambda$ (причем $\lambda \neq 0$, иначе $a_2 = b_2 = 0$). Следовательно, если определитель системы равен нулю, то коэффициенты при неизвестных пропорциональны. Если в этом случае и $d_2 = d_1\lambda$, то второе уравнение системы можно записать в виде $a_1\lambda x + b_1\lambda y = d_1\lambda$, или $a_1x + b_1y = d_1$, т. е. система равносильна одному уравнению $a_1x + b_1y = d_1$ и поэтому имеет бесчисленное множество решений, определяемых по формуле $x = \frac{d_1 - b_1y}{a_1}$, y — любое.

Если же $d_2 \neq d_1\lambda$, то имеем противоречивую систему

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 \\ a_1x + b_1y = \frac{d_2}{\lambda} \neq d_1 \end{cases} \quad (32)$$

(при любых x и y левые части уравнения одинаковые, а правые нет).

Таким образом, если определитель системы равен нулю, то она либо имеет бесчисленное множество решений (коэффициенты при неизвестных и свободные члены пропорциональны), либо совсем не имеет решений (коэффициенты при неизвестных пропорциональны, а свободные члены не пропорциональны). Заметим, что из условий $a_2 = a_1\lambda$, $b_2 = b_1\lambda$, $d_2 = d_1\lambda$ следует:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \lambda a_1 & \lambda b_1 \end{vmatrix} = \lambda a_1b_1 - \lambda a_1b_1 = 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ \lambda d_1 & \lambda b_1 \end{vmatrix} = \lambda b_1d_1 - \lambda b_1d_1 = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ \lambda a_1 & \lambda d_1 \end{vmatrix} = \lambda a_1d_1 - \lambda a_1d_1 = 0.$$

Так как полученные возможные случаи решения системы (29) взаимно исключают друг друга, то эти результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет:*

1) единственное решение тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля (т. е. когда коэффициенты при неизвестных не пропорциональны);

2) бесчисленное множество решений тогда и только тогда, когда определители системы и неизвестных равны нулю (т. е. когда

коэффициенты при неизвестных и свободные члены пропорциональны);

3) не имеет решений тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю, а хотя бы один из определителей неизвестных не равен нулю (т. е. когда коэффициенты при неизвестных пропорциональны, а свободные члены — не пропорциональны).

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases}(a+4)x+3y=a+1,\\ ax-(a-1)y=a-1.\end{cases}$$

Решение. Имеем

$$\Delta=\begin{vmatrix}a+4 & 3\\ a & a-1\end{vmatrix}=a^2+4,\ \Delta_x=\begin{vmatrix}a+1 & 3\\ a-1 & a-1\end{vmatrix}=(a-1)\cdot(a-2),$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}a-4 & a-1\\ a & a-1\end{vmatrix}=2(a-2).$$

Следовательно, если $a\neq\pm 2$, то $\Delta\neq 0$ и система имеет единственное решение

$$x=\frac{a-1}{a+2},\ y=\frac{2}{a+2}.$$

Если $a=2$, то $\Delta_x=\Delta_y=0$ и система имеет бесчисленное множество решений. Для их нахождения подставим $a=2$ в любое из уравнений системы, например в первое. Тогда имеем $6x+3y=3$. Отсюда $y=1-2x$, x — любое.

Если $a=-2$, то $\Delta_x\neq 0$ и, следовательно, система не имеет решений.

Геометрический смысл двух линейных уравнений с двумя неизвестными. В случае действительных коэффициентов каждое из уравнений системы (29) изображает на плоскости xOy некоторую прямую (см. гл. VII, § 9, п. 1). Поэтому описание решения такой системы эквивалентно описанию координат точек, общих этим прямым. При этом возможны следующие случаи:

1. Прямые имеют единственную общую точку, т. е. пересекаются. Алгебраически это означает, что система (29) имеет единственное решение. Из предыдущей теоремы следует, что это имеет место в том и только в том случае, когда коэффициенты при x и y не пропорциональны.

2. Прямые параллельны. Алгебраическая система не имеет решений. В силу предыдущей теоремы это имеет место в том и только в том случае, если коэффициенты при x и y пропорциональны, а свободные члены нет.

3. Прямые совпадают. В этом случае алгебраическая система имеет бесчисленное множество решений (решением будут координаты любой точки совпадающих прямых).

Согласно предыдущей теореме это имеет место в том и только в том случае, если коэффициенты при x, y и свободные члены пропорциональны.

§ 12. СИСТЕМА, СОСТОЯЩАЯ ИЗ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ И ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Такая система может быть представлена в виде

$$\begin{cases}ax+by=d,\\ Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=F,\end{cases}\tag{33}$$

где хотя бы один из коэффициентов a и b, а также A, B и C не равны нулю.

Пусть например, $b\neq 0$ (в случае $a\neq 0$ рассуждаем аналогично). Тогда из первого уравнения находим

$$y=\frac{d-ax}{b}.\tag{34}$$

Подставляя (34) во второе уравнение системы и делая приведения подобных, получим уравнение

$$a'x^2+b'x+c'=0,\tag{35}$$

где

$$a'=\frac{Ab^2+Ca^2-Bab}{b^2},\quad b'=\frac{Db^2+Bbd-2Cad-Eab}{b^2},$$

$$c'=\frac{Cd^2+Ebd-Fb^2}{b^2}.$$

Возможны следующие случаи.

I. $a'\neq 0$. Тогда из (35) находим значения x (вообще говоря, два) и, подставляя их в (34), найдем соответствующие значения y.

II. $a'=0$, $b'\neq 0$. В этом случае из (35) имеем $x=-\frac{c'}{b'}$ и из (34) находим соответствующее значение y.

III. $a'=b'=0$, $c'\neq 0$. В этом случае уравнение (35) противоречивое и, следовательно, система решений не имеет.

IV. $a'=b'=c'=0$, т. е. уравнение (35) удовлетворяется тождественно при любых x. Все решения системы содержатся в формуле (34), где x — любое.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases}x-my=1,\\ x^2-xy-2y^2-3y=0.\end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения находим $x=my+1$. После подстановки во второе уравнение и приведения подобных членов, получим

$$(m^2-m-2)y^2+2(m-2)y+1=0. \qquad (*)$$

Если $m^2-m-2\neq 0$, т. е. $m\neq 2$, $m\neq -1$, то из уравнения (*) находим $y=\dfrac{2-m\pm\sqrt{6-3m}}{m^2-m-2}$, а из формулы $x=my+1$ соответствующие значения x

$$x=\frac{m-2\pm m\sqrt{6-3m}}{m^2-m-2}.$$

Если $m=-1$, то уравнение (*) принимает вид $-6y+1=0$, откуда $y=\dfrac{1}{6}$ и соответствующее $x=\dfrac{5}{6}$. Если $m=2$, то уравнение (*) противоречиво и, следовательно, система не имеет решений.

Частный случай системы (33)

$$\begin{cases} x+y=p, \\ xy=q \end{cases} \qquad (p\neq 0,\ q\neq 0) \qquad (36)$$

целесообразней решать не способом подстановки, а с помощью вспомогательного квадратного уравнения.

Действительно, согласно формулам Виета для корней квадратного уравнения, значения неизвестных x и y системы (36) должны быть корнями квадратного уравнения

$$z^2-pz+q=0.$$

Найдя корни z_1 и z_2 этого уравнения, получим два решения системы (z_1, z_2) и (z_2, z_1), если $z_1\neq z_2$ и одно решение (z_1, z_2), если $z_2=z_1$.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x+y=-3, \\ xy=2. \end{cases}$$

Решение. Решая квадратное уравнение $z^2+3z+2=0$, находим $z_1=-2$, $z_2=-1$. Следовательно, решения системы $(-2, -1)$ и $(-1, -2)$.

Замечание. Аналогично можно решать систему

$$\begin{cases} x-y=p, \\ xy=q, \end{cases}$$

если ее переписать в виде

$$\begin{cases} x+(-y)=p, \\ x(-y)=-q. \end{cases}$$

§ 13. СИСТЕМА ДВУХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Такая система может быть представлена в виде

$$\begin{cases} A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0, & (A) \\ A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2=0, & (B) \end{cases} \qquad (37)$$

где в каждом уравнении есть коэффициенты при старших степенях неизвестных, отличные от нуля.

Приведем схему решения такой системы в предположении, что оба уравнения содержат члены с квадратами обоих неизвестных (другие частные случаи будут содержаться в этой схеме).

Рассмотрим одно из уравнений, например, уравнение (37-A) как квадратное относительно какого-нибудь неизвестного, например x, принимая при этом другое неизвестное за параметр. Имеем

$$A_1x^2+(B_1y+D_1)x+(C_1y^2+E_1y+F_1)=0. \qquad (38)$$

Если это уравнение допускает рациональное выражение x через y (в общем случае два решения) $x_1=a_1y+b_1$ и $x_2=a_2y+b_2$, то в этом случае система (37) равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x=a_1y+b_1, \\ A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2=0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x=a_2y+b_2, \\ A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2=0, \end{cases}$$

схемы решения которых рассмотрены в § 12. Если ни одно из уравнений (37-A) и (37-B) не допускает рационального выражения x через y, то с помощью уравнений (37-A) и (37-B) исключим квадрат какого-нибудь неизвестного, например, x^2. С этой целью умножим обе части первого уравнения на A_2, а второго на $-A_1$ и сложим. В результате получим уравнение вида

$$B_3xy+C_3y^2+D_3x+E_3y+F_3=0$$

или

$$(B_3y+D_3)x+C_3y^2+E_3y+F_3=0, \qquad (39)$$

где B_3, D_3, C_3, E_3, F_3 — некоторые новые коэффициенты. Это уравнение совместно с уравнением (37-A) или (37-B) образует систему, равносильную системе (37) (см. § 3).

Возможны следующие случаи.

1. $B_3=D_3=0$, т. е. уравнение (39) имеет вид

$$C_3y^2+E_3y+F_3=0. \qquad (39')$$

Найдя из этого уравнения значения y и подставляя их в уравнение (37-A) или (37-B), найдем соответствующие значения x. Если уравнение (39′) противоречиво ($C_3=E_3=0$, $F_3\neq 0$), то система

(37) решений не имеет. Если же (39′) тождество ($C_3=E_3=F_3=0$), то система (37) имеет бесчисленное множество решений. Для их нахождения надо какое-нибудь из уравнений (37-A) или (37-B) решить относительно x (или y) и в полученных формулах для x (для y) считать y — любым (x — любым).

2. $B_3\neq 0$. Тогда проверяем, не удовлетворяет ли уравнению (39) значение $y=-\frac{D_3}{B_3}$. Если это значение годится, то соответствующие значения x найдем из уравнений (37-A) или (37-B).

Чтобы найти остальные решения системы в этом случае, выразим из (39) неизвестное x через y (считая $y\neq-\frac{D_3}{B_3}$):

$$x=-\frac{C_3y^2+E_3y+F_3}{B_3y+D_3}. \qquad (40)$$

Так как в рассматриваемом случае $y=-\frac{D_3}{B_3}$ удовлетворяет (39), а, следовательно, обращает в нуль знаменатель $C_3y^2+E_3y+F_3$, то согласно теореме Безу числитель в (40) делится без остатка на знаменатель. Разделив, получим выражение для x вида

$$x=ay+b. \qquad (40')$$

Подставив в (37-A) или (37-B), найдем значения y и затем из (40′) соответствующие значения x.

3. $y=-\frac{D_3}{B_3}$ не удовлетворяет (39). Тогда из (39) находим выражение x через y в виде (40).

Подставив (40) в уравнение (37-A) или (37-B), получим в обоих случае уравнение четвертой степени относительно y. Найдя все корни этого уравнения, получим согласно (40) соответствующие им значения x.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 2x^2-xy+3y^2+6y-2=0, \\ 2xy+y^2+y-1=0. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения имеем

$$x=\frac{y\pm(5y+4)}{4}.$$

Следовательно, система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x=1-y, \\ 2xy+y^2+y-1=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=\frac{3y-2}{2}, \\ 2xy+y^2+y-1=0. \end{cases}$$

Решая их, находим решения данной системы:

$$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),$$
$$\left(\frac{-13+\sqrt{17}}{16}, \frac{1+\sqrt{17}}{8}\right), \left(\frac{-13-\sqrt{17}}{16}, \frac{1-\sqrt{17}}{8}\right).$$

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x^2-xy-y^2+y+2=0, \\ 2x^2+3xy+y^2-3y-5=0. \end{cases}$$

Решение. Убеждаемся, что ни из одного уравнения системы x не выражается рационально через y, а значит и y через x. (Читателю советуем это проверить.)

Сложив первое уравнение со вторым, получим уравнение, в котором член с y^2 отсутствует: $3x^2+2xy-2y-3=0$ или $2(x-1)y+3(x^2-1)=0$. Очевидно, этому уравнению удовлетворяет $x=1$. Соответствующие значения $y=\pm\sqrt{3}$ находим, например, из первого уравнения системы. Считая теперь $x\neq 1$, из последнего уравнения находим $y=-\frac{3(x+1)}{2}$, и подставляя его в первое уравнение системы, получаем $x^2-18x-7=0$. Следовательно, $x=9\pm\sqrt{88}$ и $y=\frac{-3(10\pm\sqrt{88})}{2}$. Таким образом, система имеет решения

$$(1, \pm\sqrt{3}), \left(9\pm\sqrt{88}, \frac{-3(10\pm\sqrt{88})}{2}\right).$$

Рассмотренный метод решения не всегда является самым рациональным в отдельных частных случаях системы (37). Например, систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ xy=b \end{cases} \qquad (37')$$

иногда удобнее решать следующим приемом: умножить второе уравнение почленно на 2 и затем один раз почленно прибавить к первому уравнению, а другой — вычесть. В результате получим систему, равносильную данной

$$\begin{cases} (x+y)^2=a+2b, \\ (x-y)^2=a-2b, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y=\pm\sqrt{a+2b}, \\ x-y=\pm\sqrt{a-2b}. \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности четырех систем линейных уравнений

1) $\begin{cases} x+y=\sqrt{a+2b}, \\ x-y=\sqrt{a-2b}, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b}, \\ x-y=-\sqrt{a-2b}, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=\sqrt{a-2b}, \\ x-y=-\sqrt{a-2b}, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b}, \\ x-y=\sqrt{a-2b}. \end{cases}$

Решив эти системы, найдем все решения исходной системы. Систему (37′) в случае действительного значения b можно также решить сведением к квадратному уравнению, если заметить, что система (37′) равносильна системе $\begin{cases} x^2-y^2=a, \\ x^2y^2=b^2 \end{cases}$ при условии, что произведение ее решений должно по знаку совпадать с b.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} x^2-y^2=4, \\ xy=-\sqrt{3}. \end{cases}$$

Решение. Возводя обе части второго уравнения в квадрат, получим систему $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x^2y^2=3 \end{cases}$ при условии $xy<0$. Решая квадратное уравнение $z^2-4z+3=0$, находим $z_1=3$, $z_2=1$. Следовательно, решения системы $(\sqrt{3}, -1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$, $(1, -\sqrt{3})$, $(-1, \sqrt{3})$.

Отдельные другие приемы решения частных случаев системы (37) рассмотрены в следующей главе.

§ 14. РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ НЕРАВЕНСТВ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Любое неравенство после перенесения всех членов в одну часть можно записать в виде

$$A \vee 0,$$

где $\vee$ может обозначать любой из символов $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, а A — выражение, содержащее известные и неизвестные (т. е. подлежащие определению) величины.

Решить неравенство — это значит указать все действительные значения неизвестных, для которых это неравенство истинно. Понятие равносильности уравнений сохраняется и для неравенств, а именно: два неравенства называются равносильными, если все решения первого являются решениями второго и, наоборот, все решения второго являются решениями первого.

При решении неравенств над ними совершают такие действия, которые сохраняют его равносильность и сводят к одному или совокупности нескольких более простых неравенств, правила решения которых известны.

Рассмотрим правила решения некоторых неравенств.

1. **Линейное неравенство**

$$ax+b \vee 0 \quad (a \neq 0). \tag{41}$$

Для определенности разберем решение неравенства $ax+b>0$. Это неравенство согласно свойствам неравенств равносильно неравенству $ax>-b$. Отсюда получаем $x>-\frac{b}{a}$, если $a>0$ и $x<-\frac{b}{a}$, если $a<0$.

В остальных случаях значения символа $\vee$ неравенство (41) решается аналогично.

Пример 1. Решить неравенство $x+1 \geqslant \frac{bx}{a}+\frac{a}{b}$.

Решение. Это неравенство равносильно неравенству

$$x\left(1-\frac{b}{a}\right) \geqslant \frac{a}{b}-1 \quad \text{или} \quad \frac{(a-b)x}{a} \geqslant \frac{a-b}{b}.$$

Очевидно, в случае $ab=0$ неравенство не имеет смысла. Исключая эти значения a и b, получаем:

в случае $a-b>0$, т. е. $a>b$, неравенство равносильно неравенству $\frac{x}{a} \geqslant \frac{1}{b}$. Отсюда $x \geqslant \frac{a}{b}$, если $a>0$, и $x \leqslant \frac{a}{b}$, если $a<0$;

в случае $a-b<0$, т. е. $a<b$, неравенство равносильно неравенству $\frac{x}{a} \leqslant \frac{1}{b}$. Отсюда $x \leqslant \frac{a}{b}$, если $a>0$, и $x \geqslant \frac{a}{b}$, если $a<0$;

в случае $a=b$ получаем $0 \cdot x \geqslant 0$, что справедливо для любого x.

Таким образом, решением неравенства будут:

1) $x \geqslant \frac{a}{b}$, если $a>b$, $a>0$ или $a<b$ и $a<0$;

2) $x \leqslant \frac{a}{b}$, если $b<a<0$ или $b>a>0$;

3) x — любое, если $a=b$.

2. **Исследование знака квадратного трехчлена. Неравенство второй степени**

$$ax^2+bx+c \vee 0 \quad (a \neq 0). \tag{42}$$

Обозначим через $D=b^2-4ac$ дискриминант квадратного трехчлена

$$ax^2+bx+c. \tag{43}$$

Тогда, вынося a за скобки и выделяя полный квадрат, представим квадратный трехчлен в виде

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right]. \tag{44}$$

Возможны следующие случаи:

I. $D<0$.

Так как $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ для любого x, а $\frac{D}{4a^2}<0$, то выражение в квадратной скобке всегда >0 и, следовательно:

1. Если $a>0$, то $ax^2+bx+c>0$ для всех x;

2. Если $a<0$, то $ax^2+bx+c<0$ для всех x.

Таким образом, если дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, то его знак для всех x совпадает со знаком коэффициента при x^2.

Отсюда следует, что в случае $D<0$ неравенства $ax^2+bx+c>0$ и $ax^2+bx+c\geqslant 0$ имеют решениями все действительные значения x при $a>0$ и не имеют решений при $a<0$.

Аналогично, неравенства $ax^2+bx+c<0$ и $ax^2+bx+c\leqslant 0$ не имеют решений в случае $a>0$ и имеют решениями все x, если $a<0$.

II. $D=0$. В этом случае согласно (44) квадратный трехчлен представим в виде $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

Следовательно, если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, то его знак для всех $x\neq -\frac{b}{2a}$ совпадает со знаком коэффициента при x^2; при $x=-\frac{b}{2a}$ он принимает значение, равное нулю. Поэтому в случае $D=0$:

1. Неравенство $ax^2+bx+c>0$ имеет решением все $x\neq -\frac{b}{2a}$, если $a>0$, и не имеет решений, если $a<0$.

2. Неравенство $ax^2+bx+c<0$ имеет решением все $x\neq -\frac{b}{2a}$, если $a<0$, и не имеет решений, если $a>0$.

3. Неравенство $ax^2+bx+c\geqslant 0$ имеет решением все x, если $a>0$ и единственное решение $x=-\frac{b}{2a}$, если $a<0$.

4. Неравенство $ax^2+bx+c\leqslant 0$ имеет решением все действительные значения x, если $a<0$ и только $x=-\frac{b}{2a}$, если $a>0$.

III. $D>0$. В этом случае квадратный трехчлен представим в виде

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \qquad (45)$$

где x_1, x_2 — действительные и различные корни (43).

Будем считать $x_1<x_2$. Очевидно, что $(x-x_1)(x-x_2)>0$ для $x<x_1$ и $x>x_2$ (оба сомножителя одного знака) и $(x-x_1)\cdot(x-x_2)<0$ для $x_1<x<x_2$ (первый сомножитель положителен, а второй отрицателен).

При $x=x_1$ или $x=x_2$, очевидно, $(x-x_1)(x-x_2)=0$. Поэтому согласно (45) в случае $a>0$ квадратный трехчлен положителен для всех x, лежащих вне промежутка (x_1, x_2), и отрицателен для всех

значений x, заключенных в промежутке (x_1, x_2). В случае $a<0$ — наоборот.

Из этого исследования следует способ решения неравенства $ax^2+bx+c\lessgtr 0$, когда $D>0$.

Геометрическая интерпретация. Графиком квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$ служит парабола (см. гл. VII, § 9—11). Расположение этой параболы относительно оси x для различных случаев представлено на рис. 10.

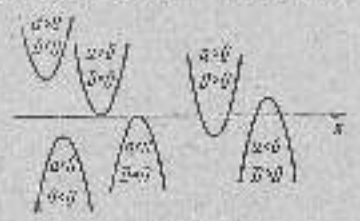


Рис. 10

Пример 2. Решить неравенство $(a-2)x^2-x-1\geqslant 0$.

Решение. При $a=2$ имеем $-x-1\geqslant 0$, т. е. $x\leqslant -1$. При $a\neq 2$ находим $D=1+4(a-2)=4a-7$.

Если $D=4a-7<0$, т. е. $a<\frac{7}{4}$, то коэффициент $a-2<0$ и, следовательно, неравенство решений не имеет (для всех x левая часть отрицательна).

Если $a=\frac{7}{4}$, т. е. $D=0$, то неравенство принимает вид $-\frac{x^2}{4}-x-1\geqslant 0$, или $-(x-2)^2\geqslant 0$. Следовательно, его решением будет лишь $x=2$.

Если $a>\frac{7}{4}$ и $a\neq 2$, то находим, что $x_1=\frac{1+\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$ и $x_2=\frac{1-\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$ — корни трехчлена. Неравенство представляется в виде $(a-2)(x-x_1)(x-x_2)\geqslant 0$.

В случае $\frac{7}{4}<a<2$ коэффициент $a-2<0$ и неравенство равносильно неравенству $(x-x_1)(x-x_2)\leqslant 0$ и так как, очевидно, в этом случае $x_1<x_2$, то, следовательно, решением неравенства будет $x_1\leqslant x\leqslant x_2$.

Для $a>2$ неравенство равносильно $(x-x_1)(x-x_2)\geqslant 0$, причем $x_1>x_2$, и поэтому решением будет $x\geqslant x_2$ и $x\leqslant x_1$.

Таким образом, решениями неравенства служат:

1) $x=2$, если $a=\frac{7}{4}$;

2) $\frac{1+\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}\leqslant x\leqslant\frac{1-\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$, если $\frac{7}{4}<a<2$;

3) $x\leqslant 1$, если $a=2$;

4) $x\leqslant\frac{1-\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$ и $x\geqslant\frac{1+\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$, если $a>2$.

В случае $a<\frac{7}{4}$ неравенство решений не имеет.

3. **Общий случай.** Всякое рациональное неравенство (т. е. неравенство, обе части которого рациональны относительно неизвест-

ного, после перенесения всех членов в одну часть приводится к виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0, \tag{16}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены относительно x.

Всякий многочлен, рассматриваемый на множестве действительных чисел, разлагается в произведение множителей вида $(x-a)$, $(x-b)^k$, (x^2+px+q) и $(x^2+p_1x+q_1)^s$, где x^2+px+q и $x^2+p_1x+q_1$ не имеют действительных корней, т. е. их дискриминанты отрицательны. Поэтому для всех x они принимают лишь положительные значения (коэффициент при x^2 равен 1). Следовательно, эти квадратные трехчлены можно в неравенстве (46) отбросить, в результате чего получится неравенство равносильное исходному.

Двучлены вида $(x-b)^k$ при четном $k=2m$ для всех $x \neq b$ принимают лишь положительные значения. Поэтому, если такой двучлен отбросить, то получим неравенство, равносильное исходному для всех $x \neq b$. Что касается нечетного k, т. е. двучлена вида $(x-b)^{2m+1}$, то как следует из равенства $(x-b)^{2m+1} = (x-b)^{2m}(x-b)$, они принимают для всех x значения, совпадающие по знаку с $x-b$. Следовательно, такой двучлен можно в неравенстве заменить его первой степенью.

Далее, если числитель и знаменатель неравенства (16) содержат одинаковые линейные множители $x-a$, то сокращая на этот множитель, мы получим неравенство, равносильное исходному при всех $x \neq a$, причем заметим, что значение $x=a$ не может входить в решение исходного неравенства (числитель и знаменатель обращаются в нуль!).

Таким образом, неравенство (46) после разложения числителя и знаменателя на простейшие множители с действительными коэффициентами, сводится к неравенству

$$A \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_k)}{(x-a_{k+1})(x-a_{k+2})\dots(x-a_n)} \vee 0 \tag{17}$$

равносильному данному для всех x за исключением быть может отдельных значений $x=b_1$, $x=b_2$, ..., причем числитель и знаменатель (47) не имеют одинаковых множителей. Для решения неравенства вида (47) удобно применять числовую ось.

Пусть $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n$ — все значения x, при которых сомножители (47), стоящие в числителе и знаменателе, обращаются в нуль (т. е. это числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, перенумерованные в порядке убывания).

Отметим на числовой оси x точки $x_1, x_2, \dots, x_n$, причем будем отмечать точки сплошной чертой, если они принадлежат решению неравенства (17) и пунктиром—если не принадлежат (см. рис. 11). (В случае большого разброса точек масштаб можно не соблюдать.) Очевидно, если символ $\vee$ обозначает $\geqslant$ или $\leqslant$, то такими точками, заведомо принадлежащими решению, будут числа a_1,

$a_2, \dots, a_k$, обращающие сомножители числителя в нуль. Точки $a_{k+1}, \dots, a_n$, обращающие знаменатель в нуль, не могут принадлежать решению неравенства (47).

Эти точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ разбивают числовую ось на $n+1$ промежутков.

Для всех x из крайнего правого промежутка ($x > x_1$), очевидно, все сомножители в (47) положительны и, следовательно, $A > 0$. Для x из следующего промежутка $x_2 < x < x_1$ сомножитель $x - x_1$ будет отрицательный, а все остальные, по-прежнему, остаются положительными, т. е. на этом промежутке $A < 0$. При переходе на следующий промежуток $x_3 < x < x_2$ все сомножители, за исключением $x-x_2$, будут принимать значения, совпадающие по знаку с их значениями на предыдущем промежутке, а сомножитель $x-x_2$ вместо положительных значений будет принимать отрицательные значения и, следовательно, на этом промежутке $A > 0$. Вообще, двигаясь справа налево вдоль числовой оси, при переходе с одного промежутка на следующий знак A в (47) меняется на противоположный, так как один из сомножителей, вместо положительного значения принимает отрицательное. Это знакочередование значений A удобно условно изображать волнистой линией, как показано на рис. 11.

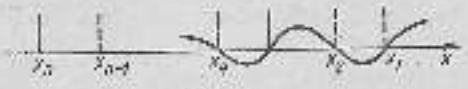


Рис. 11

Для крайнего правого промежутка $x > x_1$ эта линия всегда лежит над осью.

Итак, если линия на промежутке находится над осью, то значения A положительны, если под осью — отрицательны.

Отметив знакочередование A на числовой оси, мы, в зависимости от значения символа $\vee$, получим все решения неравенства (47). Присоединив к этим решениям те значения x, для которых могла нарушиться равносильность при переходе от неравенства (46) к неравенству (47), и которые являются решениями (46), мы получим все решения неравенства (46).

Пример 3. Решить неравенство $\dfrac{(1-2x)(x^2+x)(x^2-x-2)}{(3+5x)(x-x^2-1)(4-x)} \leqslant 0$.

Решение. Заметим, что

$$1-2x = -2\left(x-\frac{1}{2}\right), \quad x^2+x = x(x+1), \quad 4-x = -(x-4),$$

$$x^2-x-2 = (x-2)(x+1), \quad 3+5x = 5\left(x+\frac{3}{5}\right),$$

$$x-x^2-1 = -(x^2-x+1).$$

перепишем неравенство в виде $\dfrac{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)x(x+1)^2(x-2)}{5\left(x+\frac{3}{5}\right)(x^2-x+1)(x-4)} \leqslant 0$. Имеем:

$(x-1)^2>0$ для всех $x\neq -1$, причем $x=-1$ удовлетворяет неравенству; $x^2-x+1>0$ для всех x, так как дискриминант $D=1-4<0$. Поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)}{\left(x+\frac{3}{5}\right)(x-4)}\geqslant 0 \text{ при } x\neq -1$$

(при сокращении обеих частей на $-\frac{2}{5}$ знак неравенства изменили на противоположный).

Отмечая на числовой оси точки $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=2$ (сплошной линией) и $x=-\frac{3}{5}$, $x=4$ (пунктирной) и рисуя справа

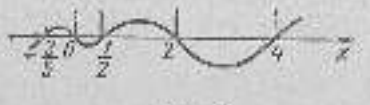


Рис. 12

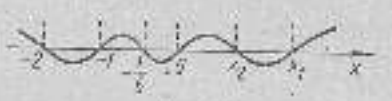


Рис. 13

налево, начиная над осью волнистую линию, получим знакочередование левой части последнего неравенства (рис. 12). «Снимая» с этого рисунка решение последнего неравенства и присоединяя к нему $x=-1$, получаем решение исходного неравенства

$$x=-1,\quad -\frac{3}{5}<x\leqslant 0,\ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2,\quad x>4.$$

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{x}{x^2-3x+1}>\frac{x}{x^2+3x+2}.$$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x}{x^2-3x+1}-\frac{x}{x^2+3x+2}>0,$$

или

$$\frac{x(6x+1)}{(x^2-3x+1)(x^2+3x+2)}>0,$$

или

$$\frac{x\left(x+\frac{1}{6}\right)}{(x-x_1)(x-x_2)(x+1)(x+2)}>0,$$

где $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Используя числовую ось (рис. 13), получаем решение

$$(-\infty,\ -2),\ \left(-1,\ -\frac{1}{6}\right),\ \left(0,\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ +\infty\right).$$

4. **Системы неравенств с одним неизвестным.** Решить систему неравенств с одним неизвестным

$$\begin{cases} A_1\vee 0,\\ A_2\vee 0,\\ \ldots\ldots\\ A_n\vee 0 \end{cases}$$

это значит указать все значения неизвестных, для которых все неравенства, входящие в систему, одновременно справедливы. Если таких значений нет, т. е. система не имеет решений, то говорят, что она противоречивая, или несовместная.

Решая каждое неравенство на своей числовой оси (во избежание путаницы) и отмечая на ней, например, штриховкой, удовлетворяющие этому неравенству промежутки, мы получим совокупность числовых осей. Если их расположить параллельно одна под другой так, чтобы начала отсчета каждой оси лежали на одной вертикальной линии, то легко получить промежутки, являющиеся решением системы.

Пример 5. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{x}<1, & (1)\\ \frac{x}{3}+\frac{4}{3}\geqslant\frac{4}{x}, & (2)\\ x^2-3x+1<0. & (3) \end{cases}$$

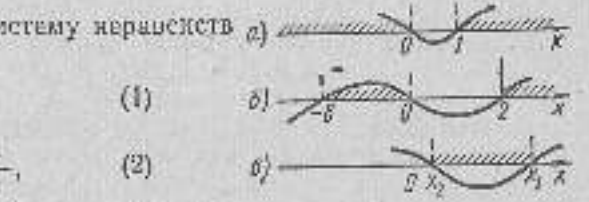


Рис. 14

Решение. Неравенство (1) равносильно $\frac{1-x}{x}<0$ или $\frac{x-1}{x}>0$. Отмечаем на числовой оси штриховкой промежутки, удовлетворяющие этому неравенству (рис. 14, *а*).

Неравенство (2) равносильно $\frac{x^2+4x-12}{3x}\geqslant 0$ или $\frac{(x+6)(x-2)}{x}\geqslant 0$. Его решение отмечено штриховкой на рис. 14, *б*.

Неравенство (3) записываем в виде $(x-x_1)(x-x_2)<0$, где $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ и отмечаем также штриховкой его решение (рис. 14, *в*). Теперь из рис. 14 получаем решение системы $2\leqslant x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (тот промежуток, где штриховка на всех осях совпадает!).

Примечание. Решение иррациональных, показательных, логарифмических неравенств см. в соответствующих местах. О решении неравенств и систем неравенств с несколькими неизвестными см. также гл. XV, § 8.

ГЛАВА IV

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВА

§ 1. РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Некоторые общие приемы решения простейших рациональных уравнений были рассмотрены в предыдущей главе.

В элементарной математике большое значение имеют частные приемы решения, выбор которых вызывается не общими соображениями, а конкретным видом данного уравнения.

Рассмотрим некоторые такие приемы.

1. **Непосредственное упрощение уравнения.** Часто то или иное уравнение путем упрощения выражений, составляющих его (приведение к общему знаменателю, раскрытие скобок и т. д.), приводится к уравнению, правила нахождения корней которого известны. Еще раз напомним, что при упрощении надо внимательно следить за тем, чтобы не нарушилась равносильность уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}.$$

Решение. Разложив знаменатели на простейшие множители, получим

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{1}{x(x-2)}.$$

После приведения к общему знаменателю $x(x^2-4)$ и приведения подобных членов получим уравнение $x^2-5x+6=0$, равносильное исходному, при условии, что $x(x^2-4)\neq 0$, т. е. $x\neq 0$, $x\neq\pm 2$. Корни последнего уравнения $x_1=3$, $x_2=2$. Так как $x_2=2$ не удовлетворяет ограничению $x\neq 2$, то, следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x=3$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{a}{a+x}+\frac{b}{b+x}=\frac{(a+b)^2}{ab}. \qquad (1)$$

Решение. Считаем $ab\neq 0$ (иначе уравнение теряет смысл). Уравнение (1) равносильно уравнению

$$ab[a(b+x)+b(a+x)]=(a+b)^2(a+x)(b+x), \qquad (2)$$

$$(x\neq -a,\ x\neq -b).$$

Подставляя $x=-a$ в (2), получим, что $x=-a$ может быть его корнем лишь при условии $a=b$. Аналогично найдем, что $x=-b$ может быть его корнем тоже лишь при условии $a=b$.

После приведения подобных членов в (2) получим, что уравнение (1) при условии $a\neq b$ равносильно уравнению

$$(a-b)^2x^2+(a-b)(a^2+b^2+ab)x+ab(a^2+b^2)=0 \qquad (3)$$

Если $a=-b$, то из (3) получаем $ab(a^2+b^2)=0$ при любом x, что невозможно, так как $ab\neq 0$. Следовательно, при $a=-b$ уравнение корней не имеет. Если $a\neq -b$, то (3) является квадратным уравнением. Решив его, найдем

$$x_1=\frac{-ab}{a+b} \text{ и } x_2=-\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

Теперь исследуем случай $a=b$. Тогда (1) принимает вид $\frac{2a}{a+x}=4$, откуда находим, что $x=-\frac{a}{2}$.

Таким образом, имеем:

в случае $a=-b$ уравнение не имеет решений,

в случае $a=b$ уравнение имеет единственный корень $x=-\frac{a}{2}$,

в случае $a^2\neq b^2$ уравнение имеет корни

$$x_1=\frac{-ab}{a+b},\ x_2=-\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

Иногда при упрощении уравнения во избежание громоздких выкладок целесообразно выделять целые части алгебраических дробей.

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+5x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}.$$

Решение. Прежде чем приводить к общему знаменателю, выделим целые части каждой дроби. Переписав уравнение в виде

$$\frac{(x+1)^2+1}{x+1}+\frac{(x+4)^2+4}{x+4}=\frac{(x+2)^2+2}{x+2}+\frac{(x+3)^2+3}{x+3},$$

получаем равносильное уравнение

$$x+2+\frac{2}{x+2}+x+3+\frac{3}{x+3}=x+1+\frac{1}{x+1}+x+4+\frac{1}{x+4},$$

Или

$$\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x+4}=\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}.$$

Члены этого уравнения уже можно приводить к общему знаменателю, но удобнее поступить иначе.

Имеем

$$\frac{4}{x+4}-\frac{3}{x+3}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1},$$

или

$$\frac{x}{(x+4)(x+3)}=\frac{x}{(x+2)(x+1)},$$

откуда

$$x_1=0 \text{ и } \frac{1}{(x+4)(x+3)}=\frac{1}{(x+2)(x+1)},$$

или

$$2x-10=0\ (x\neq -1,\ -2,\ -3,\ -4).\ \text{Отсюда } x_2=\frac{5}{2}.$$

II. **Разложение на множители.** Если левую часть уравнения $A=0$ удается разложить на множители или в обеих частях уравнения $A=B$ удается выделить общий множитель, то согласно свойствам уравнений решение исходного уравнения сводится к решению совокупности более простых уравнений.

Пример 4. Решить уравнение

$$x^3-3x-a^3+\frac{1}{a^3}\ (a\neq 0).$$

Решение. Представляя правую часть в виде

$$a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

и полагая для удобства $a-\frac{1}{a}=b$, после подстановки в уравнение получаем

$$x^3-3x=b^3-3b,$$

или

$$x^3-b^3-3(x-b).$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений $x-b=0$ и $x^2+bx+b^2=3$, решая которые получаем

$$x_1=b,\ x_{2,3}=\frac{-b\pm\sqrt{12-3b^2}}{2},\ \text{где } b=a-\frac{1}{a}.$$

Иногда разложение на множители достигается за счет изобретательности.

Пример 5. Решить уравнение

$$\frac{x+9}{x-5}\cdot\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2+\frac{x-6}{x+6}\cdot\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2=2\,\frac{x^2+28}{x^2-36}.$$

Решение. Заметим, что

$$2\,\frac{x^2+35}{x^2-36}=\frac{x+6}{x-6}+\frac{x-6}{x-6},$$

после перенесения всех членов в левую часть и группировки, получаем

$$\frac{x+9}{x-5}\left[\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2-1\right]+\frac{x-6}{x+6}\left[\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2-1\right]=0,$$

откуда после упрощения выражения в квадратных скобках следует, что

$$\frac{-18x}{(x+4)^2}\cdot\frac{x+9}{x-6}+\frac{36}{(x-9)^2}\cdot\frac{x-6}{x+6}=0.$$

Следовательно, уравнение имеет корень $x_1=0$. Для нахождения остальных корней имеем уравнение

$$\frac{9}{(x-9)^2}\cdot\frac{x-6}{x+6}=\frac{4}{(x+4)^2}\cdot\frac{x+6}{x-6}=0,$$

или

$$\frac{9(x-6)^2}{(x-9)^2}-\frac{4(x+6)^2}{(x+4)^2}=0\quad(x\neq\pm 6).$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\frac{3(x-6)}{x-9}-\frac{2(x+6)}{x+4}=0\text{ и }\frac{3(x-6)}{x-9}+\frac{2(x+6)}{x+4}=0,$$

решая которые, находим

$$x_{2,3}=\pm 6,\quad x_{4,5}=\frac{6(1\pm\sqrt{26})}{5}.$$

При решении уравнения, содержащего параметр, иногда выгодно вначале решать уравнение относительно этого параметра.

Пример 6. Решить уравнение

$$x^4-3x^2+2(a-1)x+2a-a^2=0.$$

Решение. Рассматривая это уравнение как квадратное относительно a и считая при этом x параметром, имеем

$$a^2-2(x+1)a-(x^4-3x^2-2x)=0.$$

Отсюда

$$a=x+1\pm(x^2-1).$$

Следовательно, наше уравнение равносильно совокупности двух уравнений $a=x+x^2$ и $a=x-x^2+2$. Решая эти уравнения теперь уже относительно x, получаем

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2},\quad x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{9-4a}}{2}.$$

В других случаях полезно такой параметр вводить сразу.

Пример 7. Решить уравнение

$$(x^2-x+1)^4-6x^2\cdot(x^2-x+1)^3+5x^4=0.$$

Решение. Полагая $(x^2-x+1)^2=y$, получаем уравнение $y^2-6x^2y+5x^4=0$, квадратное относительно y. Его корни $y_1=x^2$, $y_2=5x^2$. Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $(x^2-x+1)^2=x^2$ и $(x^2-x+1)^2=5x^2$. Первое из этих уравнений в свою очередь равносильно совокупности двух уравнений $x^2-x+1=x$ и $x^2-x+1=-x$. Решая их, находим $x_{1,2}=1$, $x_{3,4}=\pm i$.

Второе уравнение равносильно совокупности двух уравнений $x^2-x+1=x\sqrt{5}$ и $x^2-x+1=-x\sqrt{5}$, решая которые находим

$$x_{5,6}=\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2},\quad x_{7,8}=\frac{1-\sqrt{5}+i\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}.$$

Если подбором или из других соображений удается найти отдельные корни уравнения, то после выделения уравнения, содержащего уже найденные корни, получаем уравнение более низкой степени.

Пример 8. Решить уравнение

$$2x^5-17x^4+46x^3-36x^2-34x^2+37x+10=0,$$

если $x_1=2-i$ — его корень.

Решение. Данное уравнение с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $x_1=2-i$. Следовательно, оно имеет сопряженный комплексный корень $x_2=2+i$, т. е. левая часть уравнения содержит сомножитель $(x-x_1)(x-x_2)=x^2-4x+5$. Разделив на него левую часть уравнения, получаем для нахождения остальных корней уравнение

$$2x^3-9x^2+9x+2=0.$$

Это кососимметрическое уравнение. Разделив все его члены на x^2, после группировки получаем равносильное уравнение

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x-\frac{1}{x}\right)=0.$$

Подстановкой $x-\frac{1}{x}=y$, $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=y^2+2$ это уравнение сводится к квадратному уравнению $2y^2-9y+4=0$, корни которого $y_1=4$, $y_2=\frac{1}{2}$.

Теперь из уравнений $x-\frac{1}{x}=4$ и $x-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ находим

$$x_{3,4}=2\pm\sqrt{5},\quad x_{5,6}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}.$$

III. **Введение нового неизвестного.** При решении уравнений большую роль играет замена выражения, содержащего неизвестное, новым неизвестным, относительно которого уравнение становится более простым. С этим способом мы уже сталкивались при решении двучленных, трехчленных и возвратных уравнений. Выбор замены обусловливается видом уравнения и требует порой большой изобретательности.

Пример 9. Решить уравнение

$$(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35.$$

Решение. I способ. Умножив $3x+2$ на 2 и $x+1$ на 6, а правую часть уравнения на 12, получим равносильное уравнение

$$(6x+5)^2(6x+4)(6x+6)=420.$$

Положив $6x+5=y$, получим для нового неизвестного уравнение

$$y^2(y-1)(y+1)=420 \quad \text{или} \quad y^4-y^2-420=0,$$

корни которого

$$y_{1,2}=\pm\sqrt{21},\quad y_{3,4}=\pm 2i\sqrt{5}.$$

Теперь из соотношения $x=\frac{y-5}{6}$ имеем

$$x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{21}-5}{6},\quad x_{3,4}=\frac{\pm 2i\sqrt{5}-5}{6}.$$

II способ. После возведения в квадрат и перемножения двух остальных сомножителей, получим $(36x^2+60x-25)(3x^2+5x+2)=35$. Сделав замену $3x^2+5x+2=y$, получим уравнение $(12y+1)y=35$, из которого находим $y_1=\frac{5}{3}$, $y_2=-\frac{21}{12}$. Теперь из уравнений $3x^2+5x+2=\frac{5}{3}$, $3x^2+5x+2=-\frac{21}{12}$ имеем

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{6};\quad x_{3,4}=\frac{-5\pm 2i\sqrt{5}}{6}.$$

Иногда введение нового неизвестного становится возможным после выделения полных квадратов.

Пример 10. Решить уравнение

$$(x^2-16)(x-3)^2+9x^2=0.$$

Решение. Очевидно, $x=3$ не является корнем уравнения. Поэтому, разделив обе части уравнения на $(x-3)^2$, получаем равносильное уравнение $x^4-16-\frac{12x^2}{(x-3)^2}=0$ или $x^4+\frac{24x^2}{(x-3)^2}=16$. Выделяя в левой части квадрат суммы, имеем

$$\left(x^2+\frac{12x}{x-3}\right)^2-2x\cdot\frac{12x}{x-3}=16 \text{ или } \left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2-\frac{48x^2}{x-3}=16.$$

Полагая $\frac{x^2}{x-3}=y$, приходим к уравнению $y^2-6y=16$, корни которого $y_1=8$, $y_2=-2$.

Теперь из уравнений $\frac{x^2}{x-3}=8$ и $\frac{x^2}{x-3}=-2$ находим

$$x_{1,2}=4\pm 2\sqrt{2}, \quad x_{3,4}=-1\pm\sqrt{7}.$$

При решении отдельных уравнений полезно иметь в виду, что введением нового неизвестного y можно два двучлена $x-m$ и $x+n$ одновременно представить в виде

$$\begin{cases} x+m=y+d, \\ x-n=y-d. \end{cases}$$

Действительно, складывая и вычитая эти равенства, имеем

$$2x-m+n=2y \text{ и } m-n=2d,$$

т. е.

$$x=y-\frac{m+n}{2}, \quad d=\frac{m-n}{2}.$$

Пример 11. Решить уравнение

$$x^5+(6-x)^5=126.$$

Решение. Положим $x-y+d$, $x-6=y-d$, т. е. $x=y+3$. Тогда получим уравнение $(y+3)^5-(y-3)^5=126$, или $y^4+9y^2-2=0$. Его корни $y_{1,2}=\pm i$, $y_{3,4}=\pm i\sqrt{2}$. Следовательно, $x_{1,2}=3\pm i$, $x_{3,4}=3\pm i\sqrt{2}$.

Если обе части уравнения являются однородными одной и той же степени однородности относительно двух выражений u и v, содержащих неизвестное (см. гл. II, § 2) то уравнение называют *однородным относительно* u и v. Такие уравнения удобно решать, если положить $u=tv$, где t — новое неизвестное.

Пример 12. Решить уравнение

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^3+\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2} \quad (ab\neq 0).$$

Решение. Это однородное уравнение относительно $u=\frac{x+a}{x+b}$ и $v=\frac{x-a}{x-b}$. Полагая $\frac{x+a}{x+b}=t\cdot\frac{x-a}{x-b}$, после подстановки получим уравнение

$$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3(1+t^3)=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)t\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2.$$

Если $\frac{x-a}{x-b}=0$, то также $\frac{x+a}{x+b}=0$, т. е. одновременно и $x=a$, $x=-a$, что невозможно, так как $a\neq 0$. Поэтому последнее уравнение равносильно $1+t^3=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)t$, корни которого $t_1=\frac{a}{b}$, $t_2=\frac{b}{a}$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\frac{x+a}{x-b}=\frac{a}{b}\cdot\frac{x-a}{x-b} \text{ и } \frac{x+a}{x+b}=\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b},$$

или $(a-b)[x^2+(a+b)x-ab]=0$ и $(a-b)[x^2-(a+b)x-ab]=0$ при условии, что $x\neq\pm b$. Отсюда следует, что если $a=b$, то x — любое, кроме уже исключенных $\pm b$. Если $a\neq b$, то имеем совокупность уравнений

$$x^2+(a+b)x-ab=0, \quad x^2-(a+b)x-ab=0 \quad (x\neq\pm b).$$

Подставляя в эти уравнения $x=\pm b$ найдем, что ограничение $x\neq\pm b$ равносильно имеющемуся уже условию $ab\neq 0$. Решая эти уравнения, получим

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}(a+b\pm\sqrt{a^2+6ab+b^2}),$$

$$x_{3,4}=\frac{1}{2}(a-b\pm\sqrt{a^2+6ab+b^2}) \quad (a\neq b).$$

§ 2. РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В этом параграфе рассмотрим примеры рациональных систем и некоторые методы их решения.

I. Одним из наиболее простых и естественных приемов решения систем является *метод подстановки или исключения неизвестных*, основанный на использовании свойства V (гл. III, § 3).

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} x+xy+y=5, \\ y+yz+z=11, \\ z+zx+x=7, \end{cases}$$

Решение. В данном случае любое из неизвестных в каждом из уравнений легко выражается через два остальных. Здесь можно, например, выразить из первого уравнения x через y, а из второго z через y. Имеем $x=\frac{5-y}{y+1}$ (очевидно, $y\neq -1$), $z=\frac{11-y}{y+1}$. Подставляя эти значения x и z в третье уравнение, получаем одно уравнение с одним неизвестным

$$\frac{11-y}{y+1}+\frac{(11-y)(5-y)}{(y+1)^2}+\frac{5-y}{y+1}=7$$

или, после упрощения, $y^2+2y-8=0$. Найдя его корни $y_1=2$ и $y_2=-4$, согласно формулам $z=\frac{11-y}{y+1}$ и $x=\frac{5-y}{y+1}$ находим $z_1=3$ и $z_2=-5$, $x_1=1$ и $x_2=-3$.

Итак, система имеет два решения (1, 2, 3) и (−3, −4, −5).

В некоторых случаях целесообразно выражать комбинации неизвестных через другие неизвестные.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x+y+z=13, \\ x^2+y^2+z^2=91, \\ y^2=xz. \end{cases}$$

Решение. Перепишем второе уравнение в виде

$$(x+z)^2+y^2-2xz=91. \qquad (*)$$

Из первого уравнения находим, что $x+z=13-y$, а из третьего $xz=y^2$. Следовательно, уравнение (*) сводится к уравнению $(13-y)^2+y^2-2y^2=91$, корень которого равен 3, т. е. $y=3$.

Теперь из системы $\begin{cases} x+z=13-y, \\ xz=y^2, \end{cases}$

где $y=3$, находим $x_1=1$, $z_1=9$ и $x_2=9$, $z_2=1$.

Итак, данная система имеет два решения (1, 3, 9) и (9, 3, 1).

В следующем примере прежде чем производить подстановку, выгодно присоединить к данному уравнению новое уравнение — следствие данных уравнений.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} 3x=\frac{y}{z}+\frac{z}{y}, \\ 4y=\frac{z}{x}+\frac{x}{z}, \\ 5z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}. \end{cases}$$

Решение. После приведения к общему знаменателю, получаем систему

$$\begin{cases} y^2+z^2=3xyz, \\ z^2+x^2=4xyz, \\ x^2+y^2=5xyz, \end{cases} \qquad (*)$$

равносильную данной, при условии, что $xyz\neq 0$. Сложив правые и левые части всех уравнений системы (*), получим уравнение-следствие

$$x^2+y^2+z^2=6xyz.$$

Подставляя в него последовательно значения y^2+z^2, z^2+x^2 и x^2+y^2, выраженные из системы (*), получаем систему

$$\begin{cases} x^2=3xyz, \\ y^2=2xyz, \\ z^2=xyz, \end{cases} \qquad (**)$$

откуда перемножением всех уравнений получаем уравнение-следствие $x^2y^2z^2=6x^3y^3z^3$ или $xyz=\frac{1}{6}$ $(xyz\neq 0)$.

Теперь из системы (**), подставляя в правые части уравнений $xyz=\frac{1}{6}$, находим, что $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, $y=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, $z=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}$. Комбинируя знаки $\pm$ в соответствии с условием $xyz=\frac{1}{6}>0$, получаем все ее решения:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

II. В практике решения систем уравнений широко применяется следующий способ: из данной системы получают, как следствие, новую систему, отдельные уравнения которой получаются из уравнений исходной системы путем их различных комбинаций — сложения, вычитания, умножения, деления и т. д.

Эти комбинации подбираются так, чтобы в результате новая система уже решалась бы известным методом.

При этом нужно тщательно следить за сохранением равносильности.

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} x^3=5x+y, \\ y^3=x+5y. \end{cases}$$

Решение. Складывая и вычитая уравнения данной системы, получаем равносильную систему

$$\begin{cases} x^3+y^3=6(x+y), \\ x^3-y^3=4(x-y). \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы равносильно совокупности двух уравнений $x+y=0$ и $x^2-xy+y^2=6$, а второе уравнение равносильно совокупности $x-y=0$ и $x^2+xy+y^2=4$. Комбинируя уравнения первой пары со второй, находим, что данная система равносильна совокупности четырех систем

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=0, \\ x^2+xy+y^2=4, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-xy+y^2=6 \\ x-y=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=6, \\ x^2+xy+y^2=4, \end{cases}$$

решая которые, находим все решения данной системы

$$(0,\ 0),\ (2,\ -2)\ (-2,\ 2),\ (\pm\sqrt{6},\ \pm\sqrt{6}),$$

$$\left(\pm\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right),\ \left(\pm\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right).$$

(знаки берутся соответственно).

III. Иногда введением новых неизвестных удается свести заданную систему либо к более простой, либо к такой, методы решения которой известны.

Рассмотрим три типа систем, допускающих стандартные замены.

1. Система называется симметрической, если каждое ее уравнение симметрично относительно неизвестных. При решении систем, симметричных относительно неизвестных x и y, часто оказывается полезным введение новых неизвестных u и v по формулам

$$x+y=u, \quad xy=v.$$

При этом следует иметь в виду, что

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v,$$
$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=u^3-3uv,$$
$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2-2v)^2-2v^2$$

и т. д.

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10, \\ (x+y)(xy-1)=3. \end{cases}$$

Решение. Данная система симметрична относительно x и y. Переписав ее в виде

$$\begin{cases} x^2+y^2+x^2y^2+1=10, \\ (x+y)xy-(x+y)=3 \end{cases}$$

и полагая $x+y=u$ и $xy=v$ (тогда $x^2+y^2=u^2-2v$), имеем

$$\begin{cases} u^2+v^2-2v+1=10, \\ uv-u=3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u^2+(v-1)^2=10, \\ u(v-1)=3. \end{cases}$$

Эту систему удобно решать относительно u и $v-1$. Решив ее, найдем $u_1=3$, $v_1=2$; $u_2=-3$, $v_2=0$; $u_3=1$, $v_3=4$; $u_4=-1$, $v_4=-2$.

Теперь на системы

$$\begin{cases} x+y=u_k, \\ xy=v_k \end{cases}$$

для $k=1,\ 2,\ 3,\ 4$, получаем все решения данной системы:

$$(2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (-3,\ 0),\ (0,\ -3),\ \left(\frac{1+i\sqrt{15}}{2},\ \frac{1-i\sqrt{15}}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1-i\sqrt{15}}{2},\ \frac{1+i\sqrt{15}}{2}\right)\ (-2,\ 1),$$

$$(1,\ -2).$$

Пример 6. Решить систему

$$\begin{cases} x^4+y^4=34, \\ x-y=2. \end{cases}$$

Решение. Полагая $x+y=u$ и $xy=v$, получаем систему

$$\begin{cases} (u^2-2v)^2-2v^2=34, \\ u=2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (4-2v)^2-2v^2=34, \\ u=2, \end{cases}$$

откуда находим $u_1=2$, $v_1=9$ и $u_2=2$, $v_2=-1$.

Решая системы $\begin{cases} x+y=u_k, \\ xy=v_k, \end{cases}$

где $k=1$ и 2, получаем все решения данной системы:

$$(1+2i\sqrt{2},\ 1-2i\sqrt{2}),\ (1-2i\sqrt{2},\ 1+2i\sqrt{2}),\ (1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}),$$
$$(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}).$$

2. Если в уравнения системы неизвестные x и y входят лишь в виде комбинаций xy, $x-y$, x^2+y^2, x^3-y^3, x^3+y^3, и т. п., то удобной для решения часто оказывается замена

$$x-y=u,\quad xy=v.$$

Тогда

$$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=u^2+2v,$$
$$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=u^3+3uv,$$
$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2+2v)^2-2v^2 \text{ и т. п.}$$

Пример 7.

$$\begin{cases} 8(x^2+xy+y^2)=(x-y)^3, \\ 2(x^2-xy+y^2)=3(x-y). \end{cases}$$

Решение. Полагая $x-y=u$, $xy=v$, получим систему

$$\begin{cases} 8(u^2+3v)=u^3, \\ 2(u^2+v)=3u. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем v через u:

$$v=\frac{3u-2u^2}{2}.$$

Подставляя этот результат в первое уравнение, получаем уравнение

$$u^3+16u^2-36u=0,$$

корни которого $u_1=0$; $u_2=2$; $u_3=-18$.

Далее находим $v_1=0$, $v_2=-1$, $v_3=-351$. Решая теперь системы:

$$\begin{cases} x-y=u_k, \\ xy=v_k, \end{cases}$$

где $k=1, 2, 3$, находим все решения данной системы:

$$(0, 0),\ (1, -1),\ (-9+3i\sqrt{39},\ 9+3i\sqrt{39}),$$
$$(-9-3i\sqrt{39},\ 9-3i\sqrt{39}).$$

3. Система вида

$$\begin{cases} A(x, y)=a, \\ B(x, y)=b, \end{cases}$$

где a и b — числа, а $A(x, y)$ и $B(x, y)$ — выражения однородные относительно x и y одинаковой степени однородности (см. гл. II, § 2) часто упрощается, если ввести новое неизвестное t, связанное с x и y соотношением

$$y=tx.$$

Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 8. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y}+xy=1, \\ \frac{y^3}{x}+xy=4. \end{cases}$$

Решение. Левые части системы — однородные выражения второй степени относительно x и y. Полагая $y=tx$, имеем

$$\begin{cases} \frac{x^3}{tx}+x^2t=1, \\ \frac{x^3t^3}{x}-tx^2=4. \end{cases}$$

Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} \frac{x^2(t^2+1)}{t}=1, \\ x^2t(t^2+1)=4. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое (делитель не равен нулю), получаем $t^2=4$ и $t_{1,2}=\pm 2$.

Если $t=2$, то $x^2=\frac{2}{5}$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$ и $y_{1,2}=\pm 2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Если $t=-2$, то $x^2=-\frac{2}{5}$, $x_{3,4}=\pm i\sqrt{\frac{2}{5}}$ и $y_{3,4}=\mp 2i\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Итак, данная система имеет четыре решения:

$$\left(\sqrt{\frac{2}{5}},\ 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{2}{5}},\ -2\sqrt{\frac{2}{5}}\right),$$
$$\left(i\sqrt{\frac{2}{5}},\ -2i\sqrt{\frac{2}{5}}\right),\ \left(-i\sqrt{\frac{2}{5}},\ 2i\sqrt{\frac{2}{5}}\right).$$

Аналогичным приемом иногда можно решать и системы трех уравнений с тремя неизвестными.

Пример 9. Решить систему

$$\begin{cases} x^2-(y-z)^2=1, \\ y^2-(z-x)^2=4, \\ z^2-(x-y)^2=9. \end{cases}$$

Решение. Полагая $y=ax$, $z=cx$, где a и c — новые неизвестные, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x^2-x^2(a-c)^2=1, \\ a^2x^2-x^2(a-1)^2=4, \\ c^2x^2-x^2(1-c)^2=9, \end{cases} \quad (A) \text{ или } \quad \begin{cases} 1-(a-c)^2=\dfrac{1}{x^2}, \\ a^2-(a-1)^2=\dfrac{4}{x^2}, \\ c^2-(1-c)^2=\dfrac{9}{x^2} \end{cases}$$

($x\neq 0$, так как при $x=0$ второе и третье уравнения данной системы несовместны).

Из последней системы трех уравнений получаем систему двух уравнений для определения a и c

$$\begin{cases} 4[1-(a-c)^2]=a^2-(a-1)^2, \\ 9[1-(a-c)^2]=c^2-(1-c)^2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 4(1-a+c)(1+a-c)=(a-c+1)(a-c-1), \\ 9(1-a+c)(1+a-c)=(c-1+a)(c+1-a), \end{cases}$$

которая в свою очередь равносильна совокупности четырех систем

$$\begin{cases} 4(1-a+c)=a-c-1 \\ c-1+a=9(1+a-c) \end{cases} \text{(I)}, \quad \begin{cases} 4(1-a+c)=c+a-1 \\ 1-a+c=0 \end{cases} \text{(II)},$$

$$\begin{cases} 1+a-c=0 \\ c-1+a=9(1+a-c) \end{cases} \text{(III)}, \quad \begin{cases} 1-a-c=0 \\ 1-a+c=0 \end{cases} \text{(IV)}.$$

Решая каждую из этих систем, находим

$a=\dfrac{16}{13}$, $c=\dfrac{45}{13}$ (I); $a=1$, $c=0$ (II); $a=0$, $c=1$ (III); система (IV) несовместна.

Если $a=\dfrac{16}{13}$, $c=\dfrac{45}{13}$, то $x^2=\dfrac{169}{144}$, $x_{1,2}=\pm\dfrac{13}{12}$, $y_{1,2}=\pm\dfrac{10}{3}$, $z_{1,2}=\pm\dfrac{15}{4}$.

Если $a=1$ и $c=0$, то любое уравнение системы (A) противоречиво.

То же самое — в случае $a=0$, $c=1$.

Итак, данная система имеет два решения

$$\left(\frac{13}{12}, \frac{10}{3}, \frac{15}{4}\right) \text{ и } \left(-\frac{13}{12}, -\frac{10}{3}, -\frac{15}{4}\right).$$

Заметим, что эту систему нецелесообразней решать другим способом. Приведем его.

Раскладывая левые части уравнений на множители, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-y-z)(x-y-z)=1, \\ (y-z+x)(y+z-x)=4, \\ (z-x+y)(z+x-y)=9. \end{cases} \quad (B)$$

Присоединим к этим уравнениям уравнение-следствие, получающееся от перемножения всех уравнений системы (B):

$$(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)=\pm 6.$$

Теперь, используя уравнения системы (B), получаем, что исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} -x+y-z=6, \\ x-y+z=\dfrac{3}{2}, \\ x+y-z=\dfrac{2}{3}, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} -x+y+z=-6, \\ x-y+z=-\dfrac{3}{2}, \\ x+y-z=-\dfrac{2}{3}, \end{cases}$$

решая которые, находим все решения исходной системы:

$$\left(\frac{13}{12}, \frac{10}{3}, \frac{15}{4}\right) \text{ и } \left(-\frac{13}{12}, -\frac{10}{3}, -\frac{15}{4}\right).$$

В общем случае, подбор новых неизвестных — задача трудная и требует определенных навыков.

Приведем примеры некоторых других замен неизвестных.

Пример 10. Решить систему

$$\begin{cases} y^2(x^2-3)+xy+1=0, \\ y^2(3x^2-6)+xy+2=0. \end{cases}$$

Решение. Полагая $xy=a$, $y^2=c$, имеем

$$\begin{cases} a^2-3c+a+1=0, \\ 3a^2-6c+a+2=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $u_1 = 0$, $v_1 = -\frac{1}{3}$ и $u_2 = 1$, $v_2 = 1$. Для нахождения x и y решаем две системы

$$\begin{cases} xy = 0 \\ y^2 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} xy = 1, \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

и получаем все решения заданной системы: $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$.

Пример 11. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{5xy}{x+y} = 12, \\ \frac{6yz}{y+z} = 18, \\ \frac{3xz}{x+z} = 36. \end{cases}$$

Решение. Данная система однородна. Однако целесообразно решить ее следующим способом:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{5}{12}, \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{5}{18}, \\ \frac{x+z}{xz} = \frac{13}{36}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{12}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{18}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{13}{36}. \end{cases}$$

Полагая $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, $w = \frac{1}{z}$, имеем систему

$$\begin{cases} u + v = \frac{5}{12}, \\ v + w = \frac{5}{18}, \\ u + w = \frac{13}{36}, \end{cases}$$

решая которую, находим $u = \frac{1}{4}$, $v = \frac{1}{6}$, $w = \frac{1}{9}$. Следовательно, $x = 4$, $y = 6$, $z = 9$.

В некоторых случаях полезно ввести новое вспомогательное неизвестное, через которое легко выражаются основные неизвестные. При этом число уравнений и неизвестных может увеличиться.

Пример 12. Решить систему

$$\frac{x}{y+z} = \frac{y}{x+y+1} = \frac{z}{x+y-1} = x+y+z.$$

Решение. Введем вспомогательное неизвестное t, полагая $t = x+y+z$. Тогда данная система запишется в виде

$$\begin{cases} x+y+z = t, \\ \frac{x}{y+z} = t, \\ \frac{y}{x+y+1} = t, \\ \frac{z}{x+y-1} = t. \end{cases} \qquad (*)$$

Так как $y+z = t-x$, $x+y = t-z$, то можно записать

$$\begin{cases} x+y+z = t, \\ \frac{x}{t-x} = t, \\ \frac{y}{t-z+1} = t, \\ \frac{z}{t-z-1} = t. \end{cases} \qquad (A)$$

Используя второе и четвертое уравнение системы (A), выразим x и z через t. Имеем $x = \frac{t^2}{t+1}$, $z = \frac{t^2-t}{t+1}$ (при условии $x \neq t$ и $z \neq t-1$, что равносильно условию $t \neq 0$ и $t \neq 1$). Теперь из третьего уравнения системы (A) выразим y через t.

Имеем

$$y = t^2 - tz + t = \frac{3t^2+t}{t+1}$$

(при условии, $z \neq t+1$, что равносильно условию $t \neq -\frac{1}{3}$).

Подставляя в первое уравнение значения x, y и z, выраженные через t, получаем уравнение для определения t

$$\frac{t^2}{t+1} + \frac{3t^2+t}{t+1} + \frac{t^2-t}{t+1} = t, \quad \text{откуда } t = \frac{1}{4}$$

(значение $t = 0$ не годится). Подставляя найденное значение t в выражения для x, y и z, находим единственное решение системы $x = \frac{1}{20}$, $y = \frac{7}{20}$, $z = -\frac{3}{20}$.

§ 3. Иррациональные уравнения

Уравнение называется *иррациональным*, если над неизвестными в этом уравнении наряду с другими операциями совершается операция извлечения корня.

Иррациональные уравнения в элементарной алгебре рассматриваются лишь на множестве действительных чисел.

Радикалы четной степени, входящие в уравнение, понимаются в арифметическом смысле (см. гл. I, § 4), а у радикалов нечетной степени рассматривается их единственное действительное значение (см. там же). Поэтому, например, уравнение $\sqrt{x^2-x-1}+\sqrt[3]{2x+1}=-2$ не имеет решений, так как при любом допустимом значении x левая часть уравнения неотрицательна, а его правая часть отрицательная.

При решении уравнений, содержащих радикалы четных степеней, полезно предварительно найти множество допустимых значений этого уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+x-6}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{1-x}.$$

Решение. Множество допустимых значений этого уравнения есть решение системы неравенств

$$\begin{cases} x^2+x-6\geqslant 0,\\ 2x+3\geqslant 0,\\ 1-x\geqslant 0. \end{cases}$$

Эта система, как легко убедиться, противоречива и, следовательно, данное уравнение решений не имеет.

Иногда к множеству допустимых значений уравнения полезно присоединять условие совпадения знаков обеих частей уравнения.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=3+x^2.$$

Решение. Множество допустимых значений этого уравнения есть решение системы

$$\begin{cases} x-5\geqslant 0,\\ 2x-1\geqslant 0. \end{cases} \qquad (A)$$

Замечая, что правая часть уравнения при любом допустимом значении x положительна, присоединяем к системе (A) еще одно условие $\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}>0$ или $x-5>2x-1$. Таким образом, решение данного уравнения должно удовлетворять системе

$$\begin{cases} x-5\geqslant 0,\\ 2x-1\geqslant 0,\\ x-5>2x-1 \end{cases}$$

которая, как легко проверить, противоречива. Следовательно, данное уравнение решений не имеет.

Наиболее стандартным приемом решения иррациональных уравнений является освобождение от радикалов путем последовательного возведения обеих частей уравнения в соответствующую степень.

При решении уравнений этим приемом надо предварительно указать множество допустимых значений исходного уравнения и иметь в виду следующие свойства уравнений, рассматриваемых на множестве действительных чисел.

При возведении обеих частей уравнения в нечетную степень получается уравнение, равносильное исходному; при возведении обеих частей уравнения в четную степень получается уравнение, равносильное исходному при условии, что его решения удовлетворяют условию совпадения знаков обеих частей исходного уравнения.

Действительно, из равенства $A=B$ следуют равенства

$$A^{2n+1}=B^{2n+1} \quad \text{и} \quad A^{2n}=B^{2n}.$$

Обратно, из равенства $A^{2n+1}=B^{2n+1}$ на множестве действительных чисел следует единственное равенство $\sqrt[2n+1]{A^{2n+1}}=\sqrt[2n+1]{B^{2n+1}}$ или $A=B$. Из равенства $A^{2n}=B^{2n}$ следует равенство $\sqrt[2n]{A^{2n}}=\sqrt[2n]{B^{2n}}$ или $|A|=|B|$. Если при этом $AB\geqslant 0$, то из последнего равенства вытекает, что $A=B$ (так как случай $A=-B$ не удовлетворяет условию $AB\geqslant 0$).

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-1}.$$

Решение. Решив систему

$$\begin{cases} 2x-3\geqslant 0,\\ x+5\geqslant 0,\\ 4x-1\geqslant 0, \end{cases}$$

найдем, что множество допустимых значений уравнения есть промежуток $x\geqslant\frac{3}{2}$.

Возводя обе части данного уравнения в квадрат, получаем уравнение

$$3-x=2\sqrt{2x^2+7x-15}, \qquad (A)$$

равносильное данному, при условии, что $\sqrt{x+3}>\sqrt{2x-3}$, т. е. $x<8$. Возведя обе части уравнения (A) в квадрат, получим уравнение

$$7x^2+34x-69=0, \qquad (B)$$

равносильное уравнению (A) при условии, что $3-x\geqslant 0$, т. е. $x\leqslant 3$. Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению (B) при условии, что одновременно $x\geqslant\frac{3}{2}$, $x<8$, $x\leqslant 3$, т. е. на промежутке $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3$. Решая квадратное уравнение (B), находим, что $x_{1,2}=\frac{-17\pm\sqrt{772}}{7}$, причем $x=\frac{-17-\sqrt{772}}{7}$ не лежит в промежутке $\left[\frac{3}{2};\ 3\right]$, а $\frac{3}{2}<\frac{-17+\sqrt{772}}{7}<3$. Следовательно, $x=\frac{-17+\sqrt{772}}{7}=\frac{-17+2\sqrt{193}}{7}$ — единственный корень данного уравнения.

Пример 4. Решить уравнение

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}.$$

Решение. Корни уравнения должны удовлетворять условиям $x>0$ и $x^2>1$, т. е. $x>1$. Возведя обе части данного уравнения в квадрат, получим уравнение

$$x^2+\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1225}{144},$$

или

$$\frac{x^2}{x^2-1}+2\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1225}{144},$$

равносильное данному при условии, что $x>1$. Это квадратное уравнение относительно $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}>0$. Решив его, получим, что $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{25}{12}$ (случай $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=-\frac{49}{12}$ — не годится). Записав последнее уравнение в виде $12(x^2-1)-25\sqrt{x^2-1}+12=0$ и решив его как квадратное относительно $\sqrt{x^2-1}>0$, найдем, что оно равносильно совокупности двух уравнений

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{4}{3}\quad\text{и}\quad\sqrt{x^2-1}=\frac{3}{4}.$$

Решив эти уравнения, найдем $x_1=\frac{5}{3}$ и $x_2=\frac{5}{4}$ (значения $x=-\frac{5}{3}$ и $x=-\frac{5}{4}$ не годятся).

Прежде чем возводить обе части уравнения в степень, надо по возможности упростить данное уравнение.

Пример 5. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}=\sqrt{x^2-1},$$

Решение. Очевидно, $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\neq 0$. Поэтому, умножив числитель и знаменатель левой части уравнения на это выражение, получим равносильное уравнение

$$\frac{x+1-(x-1)+2\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}{x+1-(x-1)}=\sqrt{x^2-1},$$

или

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2-1}+1.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2=(\sqrt{x^2-1}+1)^2\ (x+1\geqslant 0,\ x-1\geqslant 0,$$

$$\sqrt{x^2-1}\geqslant 1),$$

или $2x=x^2$ ($x\geqslant\sqrt{2}$), откуда имеем $x=2$ ($x=0<\sqrt{2}$ — не годится).

Пример 6. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt[7]{12+x}}{x}+\frac{\sqrt[7]{12+x}}{12}=\frac{64}{3}\sqrt[7]{x}.$$

Решение. Множество допустимых значений этого уравнения $x\neq 0$.

Перепишем уравнение в виде $\frac{12+x}{12x}\sqrt[7]{12+x}=\frac{64}{3}\sqrt[7]{x}$ или $(12+x)\sqrt[7]{12+x}=2^7x\sqrt[7]{x}$.

Возведя обе части уравнения в седьмую степень, получим равносильное уравнение $(12+x)^8=2^{56}x^7$, которое на множестве действительных чисел равносильно совокупности двух уравнений

$$12+x=2^7x\ \text{и}\ 12+x=-2^7x.$$

Решив их, найдем, что $x_1=\frac{12}{127}$ и $x_2=-\frac{12}{129}$.

В отдельных примерах при возведении в степень удобно пользоваться формулами возведения в степень в преобразованном виде.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}.$$

Решение. Возведя обе части уравнения в куб согласно тождеству $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$, получим равносильное уравнение

$$(x+1)-(x-1)-3\sqrt[3]{x^2-1}\,(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})=\sqrt{x^2-1},$$

Учитывая, что $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{x^2-1}$, после очевидных преобразований получим

$$2\sqrt[3]{x^2-1}=1,$$

откуда найдем, что $x=\pm\frac{\sqrt{65}}{8}$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt[4]{x+1}.$$

Решение. Множество допустимых значений этого уравнения — промежуток $x\geqslant 1$. Перепишем уравнение в виде $\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}=\sqrt[4]{x}$, или

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}=1. \qquad (*)$$

Очевидно, тождество $(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$ можно переписать в виде

$$(a-b)^4=a^4+b^4-4ab(a^2+b^2)+6a^2b^2,$$

или

$$(a-b)^4=a^4+b^4-4ab[(a-b)^2+2ab]+6a^2b^2,$$

или

$$(a-b)^4=a^4+b^4-4ab(a-b)^2-2a^2b^2.$$

Возведя обе части уравнения (*) в четвертую степень согласно приведенному тождеству, получим равносильное уравнение

$$1+\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x}-4\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}\right)^2-$$

$$-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1.$$

Заменяя выражение в скобках единицей, после упрощения имеем уравнение

$$2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+4\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}=1.$$

Это квадратное уравнение относительно $\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}$. Решив его, найдем, что $\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$ $\left(\text{случай } \sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{-2-\sqrt{6}}{2}\right.$ не годится.$\left.\right)$

Возведя обе части последнего уравнения в четвертую степень, получим рациональное уравнение

$$x^2=\frac{9}{9\sqrt{5}-45},\ \text{или}\ x^2=\frac{4(4\sqrt{5}+9)}{25},$$

из которого находим, что исходное уравнение имеет единственный корень $x_1=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{4\sqrt{5}+9}{5}}$ ($x_2<0$ не удовлетворяет условию $x\geqslant 1$).

Другим основным приемом решения иррациональных уравнений является *способ введения новых неизвестных*, относительно которых получается либо более простое иррациональное уравнение, либо рациональное.

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}+\sqrt{\frac{x-4}{x+3}}=\frac{7}{x+2}\sqrt{\frac{x+2}{x+3}}.$$

Решение. Так как левая часть уравнения неотрицательна, то необходимо, чтобы $x+2\geqslant 0$, а следовательно, и $x+3\geqslant 0$, $x-5\geqslant 0$, $x-4\geqslant 0$, что равносильно одному условию $x\geqslant 5$. Учитывая это, запишем данное уравнение в виде

$$\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}}+\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+3}}=\frac{7}{\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x+3}}.$$

После приведения к общему знаменателю получим уравнение

$$\sqrt{x^2-2x-15}+\sqrt{x^2-2x-8}=7.$$

Положив $x^2-2x-8=y$, получим относительно y уравнение

$$\sqrt{y-7}+\sqrt{y}=7\ \text{или}\ \sqrt{y-7}=7-\sqrt{y},$$

или

$$y-7=49-14\sqrt{y}+y,\ (7\leqslant y\leqslant 49).$$

Отсюда находим, что $y=16$.

Теперь из уравнения $x^2-2x-8=16$ имеем $x=6$ ($x=-4<5$ — не годится).

Пример 10. Решить уравнение

$$(3-x)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}+(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}}=2.$$

Решение. Положив $\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=y\neq 0$, после подстановки получим уравнение $(3-x)y+\frac{x-1}{y}=2$, или $(3-x)y^2-2y+x-1=0$.

Решив это уравнение как квадратное относительно y, найдем, что $y=1$ и $y=\frac{x-1}{3-x}$. Следовательно, данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\frac{3-x}{x-1}=1$ и $\frac{3-x}{x-1}=\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^n$, каждое из которых имеет единственный корень $x=2$.

Пример 11. Решить уравнение

$$\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^n x^n}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{a^n x^n}}=b,$$

где n — натуральное и $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $x\geqslant 0$.

Решение. Положим $\sqrt[n+1]{x^n}-y\geqslant 0$; $\sqrt[n+1]{a^n}=c$ и тем самым $x^n=y^{n+1}$, а $a^n=c^{n+1}$. После подстановки получим уравнение

$$\sqrt[n]{y^{n+1}+cy^n}+\sqrt[n]{c^{n+1}+c^n y}=b,$$

или $(y+c)\sqrt[n]{y+c}=b$, которое равносильно уравнению $(y+c)^{n+1}=b^n$. Это уравнение в свою очередь равносильно уравнению $y+c=b^{\frac{n}{n+1}}$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $\sqrt[n+1]{x^n}=b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}$. Так как левая часть неотрицательна, то должно быть $b\geqslant a$ и тогда имеем единственный корень $x=(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}}$.

В случае $b<a$ уравнение противоречиво.

Иногда при решении иррациональных уравнений бывает полезна *тригонометрическая замена*.

Пример 12. Решить уравнение

$$x+\frac{2x}{\sqrt{2+x^2}}=\sqrt{2}.$$

Решение. Очевидно, что $x>0$. Положим $x=\sqrt{2}\operatorname{tg} t$, где $0<t<\frac{\pi}{2}$. Сделав эту подстановку, получим тригонометрическое уравнение

$$\sqrt{2}\operatorname{tg} t+\frac{2\sqrt{2}\operatorname{tg} t}{\sqrt{2}\sec t}=\sqrt{2}, \text{ или } \sqrt{2}(\cos t-\sin t)=\sin 2t.$$

В указанных пределах изменения t, очевидно, $\sin 2t>0$. Поэтому должно быть $\cos t-\sin t>0$, т. е. $\operatorname{tg} t<1$. После возведения в квадрат при указанных ограничениях на $\operatorname{tg} t$ получим равносильное уравнение $2(1-\sin 2t)=\sin^2 2t$, решив которое найдем, что $\sin 2t_1=-\sqrt{3}-1$ и $\sin 2t_2=-\sqrt{3}+1$. Очевидно, $0<\sin 2t_2<1$, а $\sin 2t_1<-1$ и поэтому не имеет смысла. Так как $\sin 2t=\frac{2\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$, то из

уравнения $\frac{2\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}=-\sqrt{3}+1$ находим, что $\operatorname{tg} t_1=\frac{1+\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{3}-1}$ и $\operatorname{tg} t_2=\frac{1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{3}-1}$. Легко убедиться, что $\operatorname{tg} t_1>1$, а $0<\operatorname{tg} t_2<1$. Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень $x=\sqrt{2}\frac{1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{3}-1}$.

В принципе любое иррациональное уравнение путем введения нескольких новых вспомогательных неизвестных можно заменить равносильной рациональной системой. Но к этому приему следует прибегать лишь в случае, когда получающаяся рациональная система может быть решена известными приемами.

Пример 13. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}.$$

Решение. Положим $\sqrt[3]{2-x}=y$, $\sqrt{x-1}=z\geqslant 0$, получаем равносильную рациональную систему

$$\begin{cases} 2-x=y^3, \\ x-1=z^2, \\ y=1-z. \end{cases}$$

Выразив из второго уравнения $x(x=1+z^2)$, а из третьего уравнения $y(y=1-z)$ и подставляя их в первое, получаем уравнение $1-z^2=(1-z)^3$, решив которое, найдем, что $z_1=1$, $z_2=0$, $z_3=3$. Все эти значения z удовлетворяют условию $z\geqslant 0$ и, следовательно, годятся.

Теперь из соотношения $x=1+z^2$ находим корни данного уравнения $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=10$.

Пример 14. Решить уравнение

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$$

Решение. Положив $\sqrt{a-x}=y\geqslant 0$, получим иррациональную систему

$$\begin{cases} \sqrt{a+x}=y\geqslant 0, \\ \sqrt{a-y}=x\geqslant 0, \end{cases}$$

которая равносильна при этих ограничениях на x, y рациональной системе

$$\begin{cases} a+x=y^2, \\ a-y=x^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим равносильную систему

$$\begin{cases} x+y=y^2-x^2, \\ a-y=x^2. \end{cases}$$

которая равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x+y=0 \\ a-y=x^2 \end{cases} \quad (1) \quad \text{и} \quad \begin{cases} y-x=1 \\ a-y=x^2 \end{cases} \quad (2)$$

Из первого уравнения системы (1) в силу условия $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ следует, что $x=y=0$, и значит $a=0$.
Решив систему (2), находим, что

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}, \quad x_2=\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}.$$

Учитывая ограничение $x \geqslant 0$, окончательно получаем: если $a=0$, то уравнение имеет единственный корень $x=0$, если $a \geqslant 1$, то уравнение также имеет единственный корень $x=\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$. Для остальных значений параметра a уравнение не имеет решений.

§ 4. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Если в любом иррациональном уравнении заменить знак равенства на один из знаков неравенства: $>$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$, то получим иррациональное неравенство. Обычно решение иррационального неравенства сводят к решению равносильной ему совокупности рациональных систем неравенств. Эти системы получаются при наложении ограничений на неизвестное и возведении неравенства в степень. При возведении в степень используют соответствующие свойства неравенств (см. гл. II, § 7).

Покажем сказанное на примерах.

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-3x-10} > x-2.$$

Решение. Множество допустимых значений неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию

$$x^2-3x-10 \geqslant 0. \qquad (*)$$

Если при этом $x-2<0$, то данное неравенство, очевидно, будет справедливо для всех x, удовлетворяющих неравенству (*). Если же $x-2 \geqslant 0$, то данное неравенство равносильно неравенству $x^2-3x-10 > (x-2)^2$ при условии (*).

Таким образом, данное неравенство равносильно совокупности двух рациональных систем неравенств

$$\begin{cases} x^2-3x-10 \geqslant 0, \\ x-2<0 \end{cases} \quad (A) \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2-3x-10 \geqslant 0, \\ x-2 \geqslant 0, \\ x^2-3x-10 > (x-2)^2. \end{cases} \quad (B)$$

Решив эти системы (см. гл. III, § 14), найдем решения исходного неравенства $x \leqslant -2$, $x > 14$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\sqrt{2x+1} < \frac{2(x+1)}{2-x}.$$

Решение. Очевидно, решение неравенства должно удовлетворять условиям $2x+1 \geqslant 0$ и $\frac{2(x+1)}{2-x} > 0$ (если $\frac{2(x+1)}{2-x} \leqslant 0$, то неравенство противоречиво). При этих условиях данное неравенство равносильно неравенству $2x+1 < \frac{4(x+1)^2}{(2-x)^2}$, которое после упрощений приводит к неравенству $x(2x^2-11x-4)<0$.

Таким образом, данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+1 \geqslant 0, \\ \frac{x+1}{2-x} > 0, \\ x(2x^2-11x-4)<0, \end{cases}$$

решив которую, получим его решение: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{11-\sqrt{153}}{4}\right) \cup (0; 2)$.

При решении иррациональных неравенств, как и при решении иррациональных уравнений, иногда полезно ввести новые вспомогательные неизвестные.

Пример 3. Решить неравенство

$$x^2+\sqrt{x^2-3x+5} > 3x+7.$$

Решение. Положим $\sqrt{x^2-3x+5}=y \geqslant 0$ и тем самым $x^2-3x=y^2-5$, получим неравенство $y^2+y-12>0$, решение которого $y>3$ ($y<-4$ не годится, так как противоречит условию $y \geqslant 0$). Следовательно, данное неравенство равносильно неравенству $x^2-3x-5>9$, решение которого состоит из двух бесконечных промежутков $x<-1$ и $x>4$.

При решении иррациональных и других неравенств полезно иметь в виду следующий прием, который мы разберем на примере.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} < 1.$$

Решение. Рассмотрим функцию $y=\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}-1$. Тогда поставленную задачу можно сформулировать следующим образом: найти те значения x, для которых функция y принимает отрицательные значения.

Область существования этой функции или множество допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, для которых

$1-8x^2 \geqslant 0$ и $x \neq 0$, т. е. все x из промежутков $0 < x \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$ и $-\frac{1}{2\sqrt{2}} \leqslant x < 0$.

Найдем теперь все значения x, для которых функция y обращается в нуль. Для этого надо решить уравнение $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} = 1$. Решив его, найдем единственный корень $x = \frac{1}{3}$. Этот корень разбивает область существования функции $y = \frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} - 1$ на три промежутка:

$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \leqslant x < 0$ (I), $0 < x < \frac{1}{3}$ (II), $\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (III).

Взяв какое-нибудь x из промежутка (I), например $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, находим, что

$$y\Big|_{x=-\frac{1}{2\sqrt{2}}} = -\sqrt{2} - 1 < 0.$$

Так как наша функция на этом промежутке в нуль не обращается, то она и для всех других x из этого промежутка будет принимать лишь отрицательные значения. (Строгое обоснование этого свойства элементарных функций дается в курсе высшей математики.)

Взяв теперь $x = \frac{1}{4}$ из промежутка (II), мы видим, что y также отрицательно.

Для $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ из промежутка (III) имеем $y\Big|_{x=\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1 > 0$, т. е. функция для всех x из этого промежутка принимает лишь положительные значения.

Таким образом, решением исходного неравенства являются все значения x из промежутков $-\frac{1}{2\sqrt{2}} \leqslant x < 0$, $0 < x < \frac{1}{3}$.

§ 6. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Иррациональной или *алгебраической* системой называют всякую систему, в которой, по крайней мере, одно уравнение иррациональное, а остальные либо иррациональные, либо рациональные.

Как и иррациональные уравнения, такие системы рассматриваются на множестве действительных чисел, радикалы четной степени понимаются в арифметическом смысле, а у радикалов нечетной степени берется их единственное действительное значение.

При решении иррациональных систем используют те же приемы, что и при решении иррациональных уравнений и рациональных систем.

Прежде чем рассматривать уравнения системы совместно, надо по возможности каждое уравнение системы заменить одним или несколькими более простыми уравнениями, равносильными ему.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}, \\ x(x+y) + \sqrt{x^2+xy+4} = 52. \end{cases}$$

Решение. Положив $\sqrt{\frac{x+y}{6x}} = z > 0$, получим относительно z уравнение $z + \frac{1}{z} = \frac{5}{2}$. Решив это уравнение, найдем $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$. Следовательно, первое уравнение системы равносильно совокупности двух уравнений $\frac{x+y}{6x} = 4$ и $\frac{x+y}{6x} = \frac{1}{4}$. Положив $\sqrt{x^2+xy+4} = t > 0$, получим относительно t уравнение $t^2 + t - 56 = 0$, откуда $t = 7$ ($t = -8$ — не годится). Следовательно, второе уравнение системы равносильно уравнению $x(x+y) = 45$. Таким образом, исходная система равносильна совокупности двух рациональных систем

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x} = 24, \\ x(x+y) = 45 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{x+y}{x} = \frac{3}{2}, \\ x(x+y) = 45. \end{cases}$$

Решив эти системы, найдем все решения данной системы:

$$\left(\frac{1}{4}\sqrt{30}, \frac{24}{4}\sqrt{30}\right), \left(-\frac{1}{4}\sqrt{30}, -\frac{24}{4}\sqrt{30}\right),$$

$$\left(\sqrt{30}, \frac{\sqrt{30}}{2}\right), \left(-\sqrt{30}, \frac{-\sqrt{30}}{2}\right).$$

В отдельных случаях при решении иррациональных систем удобно использовать наличие одинаковых выражений, содержащих неизвестные в уравнениях системы. Если таких выражений нет, то их иногда удается получить за счет преобразований уравнений системы.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^3 - y^3} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$$

Решение. Считая $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, после возведения обеих частей второго уравнения системы в квадрат, получим равносильное ему уравнение $x+y+2\sqrt{xy}=16$. Умножив обе части первого уравнения системы на $\sqrt{2}$, получим систему,

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+2y^2}+2\sqrt{xy}=16, \\ x+y+2\sqrt{xy}=16, \end{cases}$$

равносильную данной.

Вычитая почленно из первого уравнения второе, получим уравнение $\sqrt{2x^2+2y^2}=x+y$, которое в силу условия $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ равносильно уравнению $2x^2+2y^2=(x+y)^2$ или $x^2-2xy+y^2=0$, откуда следует, что $y=x$. Таким образом, данная система равносильна системе

$$\begin{cases} y=x, \\ x+y+2\sqrt{xy}=16, \end{cases}$$

из которой находим решение $x=4$, $y=4$.

При решении иррациональных систем иногда оказывается эффективным присоединение к уравнениям системы уравнения-следствия.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} x=2(x+y+z)\sqrt[5]{xyz}, \\ y=3(x+y+z)\sqrt[5]{xyz}, \\ z=4(x+y+z)\sqrt[5]{xyz}. \end{cases}$$

Решение. Сложив почленно уравнения системы, получим уравнение-следствие $(x+y+z)=9(x+y+z)\sqrt[5]{xyz}$, которое равносильно совокупности двух уравнений $x+y+z=0$ и $\sqrt[5]{xyz}=\frac{1}{9}$. Следовательно, данная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x=2(x+y+z)\sqrt[5]{xyz}, \\ y=3(x+y+z)\sqrt[5]{xyz}, \\ z=4(x+y+z)\sqrt[5]{xyz}, \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad (S_1) \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=2(x+y+z)\sqrt[5]{xyz}, \\ y=3(x+y+z)\sqrt[5]{xyz}, \\ z=4(x+y+z)\sqrt[5]{xyz}, \\ \sqrt[5]{xyz}=\frac{1}{9}. \end{cases} \quad (S_2)$$

Система S_1, очевидно, имеет единственное решение (0, 0, 0). Система S_2 равносильна системе

$$\begin{cases} 9x=2(x+y+z), \\ 9y=3(x+y+z), \\ 9z=4(x+y+z), \\ \sqrt[5]{xyz}=\frac{1}{9} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 7x-2y-2z=0, \\ 3x-6y+3z=0, \\ 4x+4y-5z=0, \\ \sqrt[5]{xyz}=\frac{1}{9}. \end{cases}$$

Первое уравнение последней системы является суммой второго и третьего уравнений и, следовательно, его можно отбросить. Из второго и третьего уравнений находим $y=\frac{2z}{3}$, $x=\frac{z}{2}$ и тогда из третьего уравнения получим $\sqrt[5]{\frac{2z^3}{3}}=\frac{1}{9}$, откуда $z=\frac{2}{9\sqrt[3]{3}}$ и, следовательно, $x=\frac{1}{9\sqrt[5]{3}}$, $y=\frac{1}{6\sqrt[3]{3}}$. Таким образом, искомая система имеет два решения: (0, 0, 0) и $\left(\frac{1}{9\sqrt[5]{3}}, \frac{1}{6\sqrt[3]{3}}, \frac{2}{9\sqrt[3]{3}}\right)$.

В принципе, любая иррациональная система, как и иррациональные уравнения, путем введения новых вспомогательных неизвестных может быть заменена равносильной ей рациональной системой. Но этот прием целесообразно применять лишь в том случае, когда для получающейся рациональной системы решение может быть доведено до конца.

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} x=\sqrt[5]{xyz}+\frac{7}{3}\sqrt[6]{xyz}, \\ y=\sqrt[5]{xyz}+\frac{7}{5}\sqrt[6]{xyz}, \\ z=\sqrt[5]{xyz}-\frac{7}{8}\sqrt[6]{xyz}. \end{cases}$$

Решение. Введем вспомогательное неизвестное t, положив $\sqrt[6]{xyz}=t \geqslant 0$. Получим равносильную рациональную систему

$$\begin{cases} x=t\left(t+\frac{7}{3}\right), \\ y=t\left(t+\frac{7}{5}\right), \\ z=t\left(t-\frac{7}{8}\right), \\ xyz=t^6. \end{cases}$$

Подставляя x, y, z из первых трех уравнений в четвертое, получим одно уравнение с одним неизвестным

$$t^6\left(t+\frac{7}{3}\right)\left(t+\frac{7}{5}\right)\left(t-\frac{7}{8}\right)=t^6.$$

Отсюда $t_1=0$ и $\left(t+\frac{7}{3}\right)\left(t-\frac{7}{5}\right)\left(t-\frac{7}{8}\right)=t^6$. Раскрывая скобки в левой части, после упрощения получим $t^3=1$, откуда $t=1$ ($t=-1<0$ — не годится). Подставляя найденное значение t в первые три уравнения последней системы, получим решения данной системы: $(0, 0, 0)$ $\left(\frac{13}{3}, \frac{12}{5}, \frac{1}{8}\right)$.

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}-1=\frac{1}{\sqrt{xy}},\\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}=2.\end{cases}$$

Решение. Очевидно, решение должно удовлетворять условию $xy\geqslant 0$. Если $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$, то полагая $\sqrt{x}=z\geqslant 0$, $\sqrt{y}=t\geqslant 0$ и тем самым $x=z^2$, $y=t^2$, получим систему

$$\begin{cases}\frac{z}{t}+\frac{t}{z}-1=\frac{1}{zt},\\ z^3t+zt^3=2,\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}z^3-t^3-zt+1,\\ zt(z^2+t^2)=2,\end{cases}$$

из которой находим, что $z=t=1$ (случай $z-t=-1<0$ — не годится). Следовательно, $x=1$ и $y=1$. В случае $x<0$, $y<0$, полагая $\sqrt{-x}=u\geqslant 0$, $\sqrt{-y}=v\geqslant 0$ и тем самым $x=-u^2$, $y=-v^2$, получим систему

$$\begin{cases}\frac{u}{v}+\frac{v}{u}-1=\frac{1}{u\cdot v},\\ u^3v+uv^3=2.\end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $u=v=1$, удовлетворяющее условию $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$. Следовательно, данная система имеет еще одно решение $x=y=-1$. Таким образом, исходная система имеет лишь два решения $(1, 1)$, $(-1, -1)$.

§ 6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ АБСОЛЮТНУЮ ВЕЛИЧИНУ

Алгебраические уравнения, неравенства и системы, содержащие неизвестные под знаком абсолютной величины, если нет специальной оговорки, рассматриваются на множестве действительных чисел.

Пользуясь определением абсолютной величины действительного числа и ее свойствами (см. гл. I, § 4), такую задачу сводят к подобной, уже не содержащей абсолютной величины.

Приведем некоторые свойства уравнений, которыми удобно пользоваться при решении уравнений и систем, связанных с абсолютной величиной.

I. Уравнение $|A|=a$, где $a\geqslant 0$, равносильно совокупности двух уравнений $A=a$ и $A=-a$.

II. Уравнение $|A|=a$, где $a<0$ — противоречиво, так как $|A|\geqslant 0$.

III. Уравнение $|A|=B$ равносильно совокупности двух уравнений:

1) $A=B$, при условии, что корни этого уравнения удовлетворяют неравенству $A\geqslant 0$ и

2) $-A=B$ при условии, что корни этого уравнения удовлетворяют неравенству $A<0$.

Справедливость всех этих свойств непосредственно вытекает из определения и свойств абсолютной величины действительного числа.

Рассмотрим несколько примеров уравнений с одним неизвестным, содержащих его под знаком абсолютной величины.

Пример 1. Решить уравнение

$$|2|x-1|-3|=5.$$

Решение. Согласно свойству I это уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$2|x-1|-3=5\quad\text{и}\quad 2|x-1|-3=-5,$$

или

$$|x-1|=4\quad\text{и}\quad|x-1|=-1.$$

Второе из этих уравнений противоречиво (см. свойство II). Первое же уравнение равносильно в свою очередь совокупности двух уравнений $x-1=4$ и $x-1=-4$, корни которых $x_1=5$ и $x_2=-3$.

Пример 2. Решить уравнение

$$|1-2x|=3x-2.$$

Решение. Очевидно, неизвестное x должно удовлетворять условию $3x-2\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant\frac{2}{3}$. При этом условии наше уравнение равносильно совокупности двух уравнений $1-2x=3x-2$ и $1-2x=-(3x-2)$. Корень первого из этих уравнений $x=\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$ не годится. Корень второго уравнения $x=1$ удовлетворяет условию $x\geqslant\frac{2}{3}$ и, следовательно, является искомым.

Иногда при решении удобно пользоваться числовой осью.

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{|3-2x|-|x|}{|2+3x|+x-2}=5.$$

Решение. Пользуясь свойствами абсолютной величины действительного числа перепишем уравнение в виде

$$\frac{2\left|x-\frac{3}{2}\right|-|x|}{3\left|x+\frac{2}{3}\right|+x-2}=5.$$

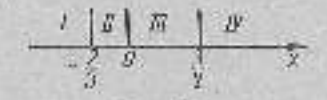


Рис. 15

Отметим на числовой оси x точки, где каждое выражение под знаком абсолютной величины обращается в нуль (см. рис. 15). Эти точки разбивают числовую ось на четыре промежутка:

$$x\leqslant-\frac{2}{3}\ (\mathrm{I});\quad -\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 0\ (\mathrm{II});\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\ (\mathrm{III});\quad x\geqslant\frac{3}{2}\ (\mathrm{IV}).$$

На первом промежутке, очевидно, $x-\frac{3}{2}<0$, $x<0$, $x+\frac{2}{3}\leqslant 0$; поэтому данное уравнение равносильно на этом промежутке уравнению

$$\frac{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)+x}{-3\left(x+\frac{2}{3}\right)-x-2}=5,$$

корень которого $x=-\frac{23}{9}$ входит в указанный промежуток и, следовательно, является решением данного уравнения.

На втором промежутке $x-\frac{3}{2}<0$, $x\leqslant 0$, $x+\frac{2}{3}\geqslant 0$, поэтому данное уравнение равносильно на этом промежутке уравнению

$$\frac{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)-x}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)+x-2}=5.$$

Корень этого уравнения $x=\frac{1}{7}$ не принадлежит указанному промежутку и, следовательно, не является решением данного уравнения.

На третьем промежутке $x-\frac{3}{2}\leqslant 0$, $x\geqslant 0$, $x+\frac{2}{3}>0$, поэтому на этом промежутке данное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)-x}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)+x-2}=5,$$

Его корень $x=\frac{3}{23}$ принадлежит указанному промежутку и, следовательно, является решением данного уравнения.

И, наконец, на четвертом промежутке $x-\frac{3}{2}\geqslant 0$, $x>0$, $x+\frac{2}{3}>0$ и поэтому данное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)-x}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)+x-2}=5,$$

корень которого $x=-\frac{3}{19}$ не принадлежит рассматриваемому промежутку и, следовательно, не является корнем данного уравнения.

Таким образом, данное уравнение имеет два корня $x=-\frac{23}{9}$ и $x=\frac{3}{23}$.

В отдельных случаях к уравнениям, содержащим неизвестное под знаком абсолютной величины, приводятся иррациональные уравнения с радикалами четных степеней, в случаях, когда подкоренные выражения представляют собой полные квадраты относительно неизвестных.

Пример 4. Решить уравнение

$$x^2=\sqrt{4x^2-4x+1}+3.$$

Решение. Заметив, что $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$, перепишем уравнение в виде

$$x^2=|2x-1|+3 \text{ или } |2x-1|=x^2-3$$

(радикал четной степени понимается в арифметическом смысле!). Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений

$$2x-1=x^2-3 \text{ и } 2x-1=3-x^2$$

при условии, что $x^2\geqslant 3$, т. е. $x\leqslant-\sqrt{3}$ и $x\geqslant\sqrt{3}$.

Решая первое из этих уравнений, имеем

$$x^2-2x-2=0,\ x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}.$$

Очевидно, $x_2=1-\sqrt{3}$ не удовлетворяет ограничению и, следовательно, не является корнем данного уравнения.

Из второго уравнения получаем

$$x^2+2x-4=0,\ x_{3,4}=-1\pm\sqrt{5}.$$

Число $x_3=-1+\sqrt{5}$ не удовлетворяет ограничению.

Таким образом, уравнение имеет два корня

$$x_1 = 1+\sqrt{5} \text{ и } x_2 = -1-\sqrt{5}.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Решение. Полагая $\sqrt{x-1} = y \geqslant 0$ и тем самым $x = y^2 + 1$, перепишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{y^2+4-4y} + \sqrt{y^2+9-6y} = 1$$

или

$$|y-2| + |y-3| = 1 \qquad (A)$$

равносильное данному, при условии, что $y \geqslant 0$.

На промежутке $0 \leqslant y < 2$, где $y-2 < 0$ и $y-3 < 0$ уравнение (A) имеет решение $y = 2$.

На промежутке $2 \leqslant y \leqslant 3$ уравнение (A) равносильно уравнению $y-2-y+3=1$, которое обращается на нем в тождество $1=1$.

На промежутке $y \geqslant 3$ уравнение (A) равносильно уравнению $y-2+y-3=1$, корень которого $y=3$ является и корнем уравнения (A). Итак, все корни уравнения (A) полностью заполняют промежуток $2 \leqslant y \leqslant 3$, следовательно, корнями данного уравнения являются все значения x из промежутка $5 \leqslant x \leqslant 10$ $(x = y^2+1)$.

Напомним, что при решении любой задачи, содержащей параметры, необходимо исследовать решение в зависимости от допустимых значений параметров.

Пример 6. Решить уравнение

$$\left|x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right| = -x^2 - 4x + a.$$

Решение. Если $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant -\frac{1}{2}$ и $x \geqslant 2$, то уравнение можно записать в виде $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = -x^2 - 4x + a$ или $4x^2 + 5x - 2a - 2 = 0$, откуда находим $x_1 = \frac{-5+\sqrt{32a+57}}{8}$ и $x_2 = \frac{-5-\sqrt{32a+57}}{8}$. Эти корни будут действительными числами, если $32a + 57 \geqslant 0$, т. е., если $a \geqslant -\frac{57}{32}$, причем в случае $a = -\frac{57}{32}$ $x_1 = x_2 = -\frac{5}{8} < -\frac{1}{2}$ и, следовательно, это решение годится. Требуя теперь $x_1 \leqslant -\frac{1}{2}$, получаем неравенство $\frac{-5+\sqrt{32a+57}}{8} \leqslant -\frac{1}{2}$, которое выполняется для $-\frac{57}{32} \leqslant a \leqslant -\frac{7}{4}$.

Требуя $x_1 \geqslant 2$, получаем неравенство $\frac{-5+\sqrt{32a+57}}{8} \geqslant 2$, решив которое, находим, что $a \geqslant 12$.

Далее очевидно, что $x_2 = \frac{-5-\sqrt{32a+57}}{8} < -\frac{1}{2}$ для $a > -\frac{57}{32}$.

В случае $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 < 0$, т. е. $-\frac{1}{2} < x < 2$, получаем уравнение $-\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right) = -x^2 - 4x + a$, отсюда $x = \frac{2(a+1)}{11}$. Это решение будет годиться, если $-\frac{1}{2} < \frac{2(a+1)}{11} < 2$, т. е. если $-\frac{7}{4} < a < 12$.

Объединяя полученные результаты, имеем:

если $a < -\frac{57}{32}$, то уравнение решений не имеет;

если $a = -\frac{57}{32}$, то уравнение имеет единственное решение $x = -\frac{5}{8}$;

если $-\frac{57}{32} < a \leqslant -\frac{7}{4}$ или $a \geqslant 12$, то уравнение имеет два корня

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{32a+57}}{8};$$

если $-\frac{7}{4} < a < 12$, то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{2(a+1)}{11}$.

При решении неравенств, связанных с абсолютной величиной, полезно иметь в виду следующие свойства:

I. Неравенство $|A| < a$, где $a > 0$ равносильно двойному неравенству $-a < A < a$.

Действительно, если $A \geqslant 0$, то $|A| = A$ и, следовательно, $A < a$; если $A < 0$, то $|A| = -A$, следовательно, $-A < a$ или $A > -a$. Объединяя оба эти результата, получаем требуемое.

В частности, неравенство $|A| < a$ $(a > 0)$ равносильно неравенству $-a < A < a$.

II. Неравенство $|A| \leqslant a$, где $a < 0$ — противоречиво, так как $|A| \geqslant 0$.

III. Неравенство $|A| > a$, где $a > 0$ равносильно совокупности двух неравенств $A > a$ и $A < -a$.

Доказательство аналогично доказательству свойства I.

IV. Неравенство $|A| \geqslant a$, где $a \leqslant 0$ справедливо для всех допустимых значений выражения A, так как $|A| \geqslant 0$.

V. Неравенство $|A|\vee B$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} A\geqslant 0, \\ A\vee B \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} A<0, \\ -A\vee B. \end{cases}$$

Это свойство следует непосредственно из определения абсолютной величины действительного числа.

Пример 7. Решить неравенство

$$|2x-1|-3|\geqslant 2.$$

Решение. Это неравенство равносильно совокупности двух неравенств $|2x-1|-3\geqslant 2$ и $|2x-1|-3\leqslant -2$, или $|2x-1|\geqslant 5$ (A) и $|2x-1|<1$, (B).

Неравенство (A) равносильно совокупности двух неравенств $2x-1\geqslant 5$ и $2x-1\leqslant -5$ или $x\geqslant 3$ и $x\leqslant -2$. Неравенство (B) равносильно двойному неравенству $-1<2x-1<1$, или $0<2x<2$, отсюда $0<x<1$. Следовательно, решением исходного неравенства являются все x из промежутков $(-\infty, -2)$, $(0,1)$ и $(3, +\infty)$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\sqrt{9x^2+6x+1}<2-x.$$

Решение. Данное неравенство перепишем в виде $|3x+1|<2-x$, которое равносильно (см. свойство V) совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} 3x+1\geqslant 0, \\ 3x+1<2-x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x+1<0, \\ -(3x+1)<2-x. \end{cases}$$

Решением первой системы служит промежуток $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$, решением второй системы — промежуток $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$. Следовательно, решением данного неравенства является промежуток $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Пример 9. Решить неравенство

$$x+|3-2x|>|x+1|-1.$$

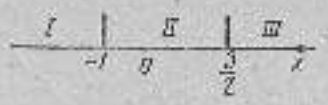


Рис. 16

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$x+2\left|x-\frac{3}{2}\right|>|x+1|-1$$

и отметим на числовой оси x значения $x=-1$ и $x=\frac{3}{2}$ (см. рис. 16), в которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль. Эти точки разбивают числовую ось на 3 промежутка

$$x\leqslant -1 \text{ (I)}; \quad -1\leqslant x\leqslant \frac{3}{2} \text{ (II)}; \quad x\geqslant \frac{3}{2}. \qquad \text{(III)}$$

Рассматривая x последовательно на каждом промежутке, получим, что исходное неравенство равносильно следующим трем системам неравенств:

$$\begin{cases} x\leqslant -1, \\ x-2\left(x-\frac{3}{2}\right)>-(x+1)-1, \end{cases} \quad \begin{cases} -1\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}, \\ x-2\left(x-\frac{3}{2}\right)>x+1-1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geqslant \frac{3}{2}, \\ x+2\left(x-\frac{3}{2}\right)>x+1-1, \end{cases}$$

Решая каждую из этих систем, последовательно находим, что решением первой является промежуток $x\leqslant -1$, решением второй — промежуток $-1\leqslant x<\frac{3}{2}$ и решением третьей — промежуток $x>\frac{3}{2}$.

Итак, решением данного неравенства являются все действительные числа x, кроме $x=\frac{3}{2}$.

В заключение рассмотрим решение систем, содержащих неизвестные под знаком абсолютной величины.

Пример 10. Решить систему

$$\begin{cases} |x+1|-|y+2|=-2, \\ |x-2|+2y=3. \end{cases}$$

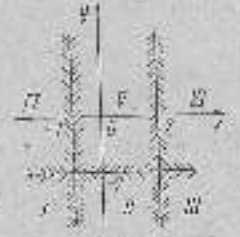


Рис. 17

Решение. Для удобства решения введем в рассмотрение плоскость xOy и построим прямые (см. рис. 17) $x=-1$, $x=2$, $y=-2$, на которых выражения, стоящие под знаком абсолютной величины, обращаются в нуль. Эти прямые разбивают плоскость на 6 областей, задаваемых следующими системами неравенств:

$$\begin{cases} x\leqslant -1, \\ y\leqslant -2 \end{cases} \text{(I)}, \quad \begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 2, \\ y\leqslant -2 \end{cases} \text{(II)}, \quad \begin{cases} x\geqslant 2, \\ y\leqslant -2 \end{cases} \text{(III)},$$

$$\begin{cases} x\leqslant -1, \\ y\geqslant -2 \end{cases} \text{(IV)}, \quad \begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 2, \\ y\geqslant -2 \end{cases} \text{(V)}, \quad \begin{cases} x\geqslant 2, \\ y\geqslant -2 \end{cases} \text{(VI)}.$$

Рассмотрим данную систему на каждой из этих областей.

Для x и y, принадлежащих области (I), имеем

$$\begin{cases} -(x+1)-(y+2)=-2, \\ -(x-2)+2y=3. \end{cases}$$

Решение этой системы $x=7$, $y=1$ не принадлежит рассматриваемой области и, следовательно, не является решением данной системы.

Для x и y, принадлежащих области (II), имеем

$$\begin{cases} (x-1)+(y+2)=-2, \\ -(x-2)-2y=3. \end{cases}$$

Решение этой системы $x=\frac{-11}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$ не принадлежит этой области и также не является решением данной системы.

Для x и y из области (III) имеем

$$\begin{cases} (x+1)+(y+2)=-2, \\ (x-2)+2y=3. \end{cases}$$

Ее решение $x=-15$ $y=10$ также не годится.

Для x и y из области (IV) имеем

$$\begin{cases} -(x+1)-(y+2)=-2, \\ -(x-2)+2y=3. \end{cases}$$

Ее решение $x=-1$, $y=0$ принадлежит этой области и, следовательно, является решением данной системы.

Для x и y из области (V) имеем

$$\begin{cases} (x+1)-(y+2)=-2, \\ -(x-2)+2y=3. \end{cases}$$

Ее решение $x=-1$, $y=0$ принадлежит этой области и, следовательно, является решением данной системы.

И, наконец, для x и y из области (VI) получаем систему

$$\begin{cases} (x+1)-(y-2)=-2, \\ (x-2)+2y=3, \end{cases}$$

решение которой $x=1$, $y=2$ не годится.

Таким образом, заданная система имеет единственное решение $(-1, 0)$.

В отдельных случаях решение системы упрощается, если использовать некоторые свойства абсолютной величины действительного числа.

Пример 11. Решить систему

$$\begin{cases} |x-y|=1, \\ |x|-|y|=1. \end{cases}$$

Решение. Из данной системы следует равенство $|x+y|=-|x|+|y|$, которое возможно лишь в случае $xy\geqslant 0$ (см. гл. I, § 4). Если $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, то данная система имеет вид

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x+y=1, \end{cases}$$

что равносильно одному уравнению $x+y=1$.

Если $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$, то данная система принимает вид

$$\begin{cases} -(x+y)=1, \\ -(x+y)=1, \end{cases}$$

что равносильно одному уравнению $x+y=-1$.

Таким образом, системе удовлетворяет любая пара неотрицательных чисел, сумма которых равна $+1$, а также любая пара неположительных чисел, сумма которых равна -1.

§ 7. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С УРАВНЕНИЯМИ, НЕРАВЕНСТВАМИ, СИСТЕМАМИ

Рассмотрим ряд задач, связанных с выявлением определенных свойств уравнений и их решений.

Пример 1. Исследовать корни уравнения

$$(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$$

в зависимости от допустимых действительных значений параметра.

Решение. Очевидно, параметр a может быть любым действительным числом. Дискриминант этого уравнения

$$D=a^2-(a-2)(2a-3)=-(a-1)(a-6),$$

по формулам Виета

$$P=x_1x_2=\frac{2a-3}{a-2}=\frac{2\left(a-\frac{3}{2}\right)}{a-2}, \quad (a\neq 2)$$

$$S=x_1+x_2=\frac{2a}{a-2}, \quad (a\neq 2).$$

По правилу решения рациональных неравенств, найдем на числовой оси интервалы знакопостоянства величин D, P, S (см. рис. 18).

Анализируя полученный результат, имеем:

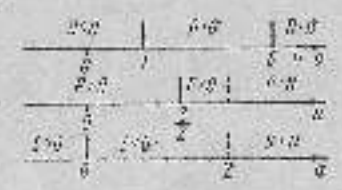


Рис. 18

На интервале $a<0$ дискриминант $D<0$, а $S>0$ и, следовательно, корни комплексно-сопряженные: $x=\alpha\pm\beta i$, причем $\alpha>0$.

При $a=0$ величина $S=0$, а $D<0$, т. е. корни чисто мнимые: $x=\pm\beta i$.

На интервале $0<a<1$ имеем $D<0$, $S<0$, т. е. корни комплексно-сопряженные: $x=\alpha\pm\beta i$, причем $\alpha<0$.

При $a=1$ имеем $D=0$, $P>0$, $S<0$ и, следовательно, корни равные ($D=0$) отрицательные ($S<0$).

На интервале $1<a<\frac{3}{2}$ дискриминант $D>0$, $P>0$, $S<0$ и, следовательно, корни различные и оба отрицательные ($P>0$, $S<0$).

При $a=\frac{3}{2}$ дискриминант $D>0$, $P=0$, $S<0$ и, следовательно, один корень равен нулю, а другой — отрицательный ($P=0$, $S<0$).

На интервале $\frac{3}{2}<a<2$ дискриминант $D>0$, $P<0$, $S<0$ и, следовательно, корни разных знаков ($P<0$), причем больший по абсолютной величине корень отрицательный ($S<0$).

При $a=2$ величины P и S не имеют смысла (уравнение не является квадратным). Подставляя это значение a в заданное уравнение, получим уравнение $-4x+1=0$, которое имеет единственный положительный корень $x=\frac{1}{4}$.

На интервале $2<a<6$ дискриминант $D>0$, $P>0$, $S>0$ и, следовательно, корни различные, оба положительные.

При $a=6$ дискриминант $D=0$, $P>0$, $S>0$ и, следовательно, корни равные положительные. На интервале $a>6$ дискриминант $D<0$, $S>0$ и, следовательно, корни комплексные, сопряженные $x=\alpha\pm\beta i$, причем $\alpha>0$.

Пример 2. Доказать, что уравнение

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{x-1}=1,$$

где a и b — действительные числа, не равные нулю одновременно, имеет лишь действительные корни.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$x^2-(a^2+b^2+1)x+a^2=0 \qquad (*)$$

при условии, что $x\neq 0$, $x\neq 1$ и $ab\neq 0$. Дискриминант уравнения (*)

$$D=(a^2+b^2+1)^2-4a^2=(a^2+b^2+1-2a)(a^2+b^2+1+2a)=$$
$$=[(a+1)^2+b^2][(a-1)^2+b^2]\geqslant 0$$

при любых действительных a и b. Следовательно, уравнение (*) имеет лишь действительные корни.

Если $a=0$ ($b\neq 0$), то исходное уравнение принимает вид $\frac{b^2}{x-1}=1$, корень которого $x=1+b^2$ — действителен при любом действительном b.

Если $b=0$ ($a\neq 0$), то исходное уравнение принимает вид $\frac{a^2}{x}=1$, корень которого $x=a^2$ также действителен при любом действительном a.

Таким образом, при любых a и b, одновременно не равных нулю, исходное уравнение имеет лишь действительные корни.

Пример 3. Доказать, что если между коэффициентами уравнений

$$x^2+p_1x+q_1=0 \quad \text{и} \quad x^2+p_2x+q_2=0,$$

где p_1, q_1, p_2, q_2 — действительные числа, существует соотношение $p_1p_2=2(q_1+q_2)$, то, по крайней мере, одно из уравнений имеет действительные корни.

Решение. Для доказательства достаточно показать, что хотя бы один из дискриминантов

$$D_1=p_1^2-4q_1 \quad \text{и} \quad D_2=p_2^2-4q_2$$

не отрицателен. А это следует из неравенства

$$D_1+D_2=p_1^2+p_2^2-4(q_1+q_2)=p_1^2+p_2^2-2p_1p_2=(p_1-p_2)^2\geqslant 0,$$

так как в случае $D_1<0$ и $D_2<0$ их сумма D_1+D_2 была бы также отрицательна.

Пример 4. Доказать, что уравнение

$$x^3+px+q=0$$

не может иметь рациональных корней, если p и q — целые нечетные числа.

Решение. Предположим противное, т. е. что это уравнение имеет рациональные корни. Тогда дискриминант уравнения $D=p^2-4q$ является квадратом нечетного числа (так как p и q — нечетные, то, следовательно, и $D=p^2-4q$ — нечетное), т. е. справедливо равенство $p^2-4q=(2k+1)^2$, где $p=2m+1$, $q=2n+1$. Таким образом, должно выполняться равенство $(2k+1)^2=(2m+1)^2-4(2n+1)$, где k, m, n — некоторые целые числа.

Последнее равенство равносильно равенству

$$k(k+1)=m(m+1)-(2n+1),$$

которое противоречиво, так как слева стоит четное число, а справа — нечетное. Следовательно, наше предположение ошибочно, т. е. данное уравнение не имеет рациональных корней.

Пример 5. Доказать, что если все корни уравнения

$$x^3+px+q=0$$

с действительными коэффициентами p и q действительны, то $p\leqslant 0$.

Решение. Согласно формулам Виета имеем

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$p=x_1x_2+x_3(x_1+x_2)=x_1x_2-(x_1+x_2)^2=$$
$$=-(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=-\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right]\leqslant 0,$$

так как выражение, стоящее в квадратных скобках, при любых действительных x_1 и x_2 неотрицательно.

При решении задач на отыскание параметров, при которых корни уравнения удовлетворяют наперед заданным ограничениям, неопытный учащийся зачастую находит лишь необходимые, но не достаточные условия. Естественно, что это приводит к неверному результату.

Проиллюстрируем сказанное на следующем примере.

Пример 6. При каких действительных значениях a корни уравнения

$$(a+1)x^2-3ax+4a=0 \quad (a\neq -1)$$

действительные и больше 1.

Решение. Часто эту задачу «решают» следующим образом. Так как корни уравнения действительны, то должно быть выполнено условие

$$D=9a^2-16a(a+1)\geqslant 0.$$

Далее, корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $x_1>1$ и $x_2>1$. Поэтому

$$\frac{3a}{a+1}=x_1+x_2>2 \quad \text{и} \quad \frac{4a}{a+1}=x_1x_2>1.$$

После этих правильных рассуждений делается вывод, что при значениях a, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} D\geqslant 0, \\ x_1+x_2>2, \\ x_1x_2>1, \end{cases}$$

оба корня будут больше 1. Это уже неверно, так как не исключает, например возможности, что при каком-нибудь a, удовлетворяющем этой системе, уравнение будет иметь корни $x_1=3>1$ и $x_2=\frac{1}{2}<1$.

Теперь приведем правильное решение этой задачи.

Пусть D — дискриминант уравнения, x_1 и x_2 — его корни. Согласно условию задачи должна быть справедлива следующая система неравенств

$$\begin{cases} D\geqslant 0, \\ x_1-1>0, \\ x_2-1>0, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} D\geqslant 0, \\ (x_1-1)+(x_2-1)>0, \\ (x_1-1)(x_2-1)>0 \end{cases} \qquad (*)$$

(если сумма и произведение двух действительных чисел положительны, то и сами числа положительны). Раскрывая скобки во втором и третьем неравенствах системы (*), имеем

$$\begin{cases} D\geqslant 0, \\ x_1+x_2-2>0, \\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что

$$D=9a^2-16a(a+1), \quad x_1+x_2=\frac{3a}{a+1} \quad \text{и} \quad x_1x_2=\frac{4a}{a+1},$$

получаем систему

$$\begin{cases} 9a^2-16a(a+1)\geqslant 0, \\ \dfrac{3a}{a+1}-2>0, \\ \dfrac{4a}{a+1}-\dfrac{3a}{a+1}+1>0, \end{cases}$$

Решая ее, находим, что $-\frac{16}{7}\leqslant a<-1$.

Пример 7. При каких действительных m множество решений неравенства

$$x^2+mx+m^2+6m<0$$

содержит интервал $1<x<2$?

Решение. Прежде всего заметим, что дискриминант квадратного трехчлена D должен быть положительным, так как при $D\leqslant 0$ будет справедливо неравенство

$$x^2+mx+m^2+6m\geqslant 0$$

для всех действительных значений x.

Обозначая корни трехчлена через α и β и учитывая, что $D>0$, получаем, что $x^2+mx+m^2+6m<0$ лишь для x, заключенных в интервале между α и β. Но этот интервал должен содержать интервал $(1, 2)$, что возможно, в том и только в том случае, когда $\alpha\leqslant 1$ и $\beta\geqslant 2$ или $\beta\leqslant 1$ и $\alpha\geqslant 2$.

Эти условия равносильны следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} (\alpha-1)(\beta-1)\leqslant 0, \\ (\alpha-2)(\beta-2)\leqslant 0, \\ D=m^2-4(m^2+6m)>0. \end{cases}$$

Раскрывая скобки в двух первых неравенствах, получаем

$$\begin{cases} \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\leqslant 0, \\ \alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\leqslant 0, \end{cases}$$

откуда, учитывая, что $x_1+x_2=\alpha+\beta=-m$, $\alpha\beta=x_1x_2=m^2+6m$, находим, что значения параметра m должны удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} m^2+6m+m+1\leqslant 0, \\ m^2+6m+2m+4\leqslant 0, \\ m^2-4(m^2+6m)>0, \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем $\frac{-7-\sqrt{15}}{2}\leqslant m\leqslant\sqrt{12}-4$.

Пример 8. Найти значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x\leqslant 1 \\ x=-y+a=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найти соответствующие решения.

Решение. Подставляя $y=x+a$ в заданное неравенство, получаем неравенство

$$2x^2+2(a+1)x+a^2-1\leqslant 0,$$

которое имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$D=(a+1)^2-2(a^2-1)=0.$$

Из полученного уравнения находим $a_1=-1$, $a_2=3$.

Если $a_1=-1$, то $2x^2\leqslant 0$ и, следовательно, $x=0$, $y=-1$. Если $a=3$, то $2x^2+8x+8\leqslant 0$ и, следовательно, $x=-2$, $y=1$.

К числу распространенных задач относятся задачи, связанные с симметрическими выражениями относительно корней многочлена. Такие задачи обычно хорошо решаются путем применения формул Виета.

Пример 9. Вычислить выражение

$$A=\frac{4x_1^2x_2-x_1^3+2x_1x_2+4x_1x_2^2-x_2^3}{(2x_1-1)(2x_2-1)},$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2-2x+3=0$.

Решение. Если найти корни уравнения и подставить их в исходное выражение, то это приведет к громоздким вычислениям. Проще поступить иначе.

Согласно формулам Виета

$$x_1+x_2=1,\ x_1x_2=\frac{3}{2}.$$

Поэтому

$$A=\frac{4x_1x_2(x_1+x_2)+2x_1x_2-(x_1+x_2)^3+3x_1x_2(x_1+x_2)}{4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1}=$$
$$=\frac{4\cdot\frac{3}{2}+2\cdot\frac{3}{2}-1+3\cdot\frac{3}{2}}{4\cdot\frac{3}{2}-2+1}=\frac{5}{2}.$$

Пример 10. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2+kx+2k-1=0.$$

Найти все значения k, при которых справедливо неравенство

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}>1.$$

Решение. Переписав неравенство в виде

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}>1 \quad\text{или}\quad \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}>1$$

и воспользовавшись тем, что $x_1+x_2=-k$, $x_1x_2=2k-1$, имеем

$$\frac{k^2-2(2k-1)}{2k-1}>1.$$

Решая это неравенство, найдем, что ему удовлетворяют все значения k, заключенные в интервалах:

$$\left(\frac{1}{2},\ 3-\sqrt{6}\right)\ \text{и}\ (3+\sqrt{6},\ +\infty).$$

В заключение приведем примеры уравнений и систем, имеющих, вообще говоря, бесчисленное множество решений, из которых требуется выделить решения определенного класса (целые, рациональные и пр.).

Пример 11. При каких действительных a система

$$\begin{cases} 2x+z=a, \\ 5x^2+2y^2+2xy-2x+1=z^2 \end{cases}$$

имеет единственное действительное решение? Найти соответствующие решения.

Решение. Выражая z из первого уравнения и подставляя найденное значение ($z=a-2x$) во второе, получаем

$$x^2+2y^2+2xy+2(2a+1)x+1-a^2=0,$$

Перепишем левую часть этого уравнения, располагая его члены по убывающим степеням буквы x: $x^2+2x(y+2a+1)+2y^2+1-a^2-0$.

Выделяя в левой части полный квадрат относительно x, получаем

$$(x-y-2a-1)^2+y^2-2(2a+1)y-5a^2-4a=0.$$

Выделим теперь в оставшихся слагаемых полный квадрат относительно y

$$(x-y+2a+1)^2+(y-2a-1)^2=9a^2+8a+1.$$

Очевидно, единственное действительное решение этого уравнения возможно лишь в том случае, когда

$$9a^2+8a+1=0,$$

т. е. при $a=1$ и $a=-9$.

Решая систему

$$\begin{cases} x+y+2a+1=0 \\ y-2a-1=0 \end{cases}$$

при значениях $a=1$ и $a=-9$, находим:
если $a=1$, то $x=-6$, $y=3$ и $z=a-2x=13$;
если $a=-9$, то $x=34$, $y=-17$, $z=-77$.

Пример 12. Найти все рациональные решения уравнения

$$y^2=4x^2-5x+1.$$

Решение. Полагая $4x^2-5x+1=(2x+t)^2$, находим, что

$$x=\frac{1-t^2}{4t+5}. \qquad (*)$$

Тогда

$$y=\pm(2x+t)=\pm\frac{2t^2+5t+2}{4t+5}. \qquad (**)$$

Таким образом, все рациональные решения данного уравнения содержатся в формулах (*) и (**), где t — любое рациональное число $\neq -\frac{5}{4}$.

Замечание. Для уравнения $y^2=ax^2+bx+c^2$ нужно положить $ax^2+bx+c^2=(tx+c)^2$.

Пример 13. Решить в целых числах уравнение

$$xy=2x-y.$$

Решение. Решая это уравнение относительно y, находим, что

$$y=\frac{2x}{x+1}.$$

Выделяя из дроби целую часть, получаем

$$y=2-\frac{2}{x+1}. \qquad (*)$$

Очевидно, что значение y будет целым лишь в случае, когда дробь $\frac{2}{x+1}$ будет целое число, что возможно при целом x лишь в случае, когда $x+1=\pm1$ или $x+1=\pm2$. Подставляя соответствующие x в формулу (*), находим все целые решения:

$$x_1=0;\quad y_1=0;\quad x_2=-2;\quad y_2=4;\quad x_3=1,\quad y_3=1,$$
$$x_4=-3;\quad y_4=2.$$

ГЛАВА V
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ. ПРОГРЕССИИ

§ 1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

1. **Определение.** Если каждому натуральному числу n отнесено по некоторому закону число a_n, то говорят, что задана числовая *последовательность*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \qquad (1)$$

Числа a_1, a_2, a_3 и т. д. называются *членами* последовательности (1); они не обязательно различны между собой. В некоторых случаях последовательность задается формулой ее общего члена

$$a_n = f(n),\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (2)$$

Зная ее, мы можем получить любой член последовательности. Для этого достаточно в правую часть формулы (2) вместо n подставить номер искомого члена. Например,

$$a_n = \frac{1}{n}:\quad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots,$$

$$a_n = (-1)^n:\quad -1,\quad 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ \ldots,$$

$$a_n = 5:\quad 5,\ 5,\ 5,\ \ldots,\ 5,\ \ldots$$

(Такая последовательность, общий член которой не зависит от n, называется постоянной.)

Структура формулы общего члена может быть и более сложной. Например, формула

$$a_n = \begin{cases} n, & n = 2k, \\ \dfrac{1}{n}, & n = 2k+1, \end{cases}$$
$$k = 1,\ 2,\ \ldots$$

задает последовательность

$$1,\ 2,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{2k-1},\ 2k,\ \frac{1}{2k+1},\ \ldots,$$

у которой члены с четными номерами и члены с нечетными номерами образуются по разным законам.

Иногда последовательность задается так называемым рекуррентным соотношением, т. е. формулой, позволяющей находить члены последовательности по известным предыдущим. Например, $a_{n+1} = 2a_n + n$, $a_1 = 1$. Давая n значения 1, 2, 3, ..., мы последовательно получаем один за другим a_1, a_2, a_3, ...

при $n = 1$ получаем $a_2 = 2a_1 + 1 = 3$,

при $n = 2$ получаем $a_3 = 2a_2 + 2 = 8$,

при $n = 3$ получаем $a_4 = 2a_3 + 3 = 19$ и т. д.

Формула общего члена $a_n = f(n)$ может быть заданной для n, начиная с некоторого номера k.

Тогда пишут $a_n = f(n)$, $n = k,\ k+1,\ldots$ При этом первые члены последовательности $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{k-1}$ указываются. Например,

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ \ldots,\ \text{где } a_n = 2n - 4 \text{ для } n = 7,\ 8,\ \ldots$$

Первые шесть членов последовательности a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6 указаны: они не получаются из формулы для общего члена $a_n = 2n - 4$, которая задана лишь при $n \geqslant 7$.

Заметим, что по известным первым членам последовательности, если нет каких-либо других указаний, невозможно указать закон ее образования. Так, первые четыре члена некоторой последовательности

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$$

могут быть, например, началом последовательности нечетных чисел или последовательности простых чисел.

Не всякую последовательность можно задать формулой общего члена или рекуррентной формулой. Например, их нельзя указать для последовательности простых чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ \ldots$$

или для последовательности десятичных приближений (с недостатком) числа $\sqrt{2}$

$$1,\ 4;\quad 1,\ 41;\quad 1,\ 414;\quad 1,\ 4142,\ \ldots$$

Но для каждой последовательности должен быть задан закон, по которому мы можем получить любой ее член. В каких виде задан этот закон — это не имеет значения.

II. Последовательность называется *ограниченной*, если существует положительное число M такое, что для всех членов последовательности выполняется неравенство $|a_n| \leqslant M$.

Если для любого числа $M > 0$ найдутся члены последовательности, превосходящие M по абсолютной величине, то такая последовательность называется *неограниченной*.

Например, последовательности

$$1,\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots, \qquad (M = 1)$$

$$1,\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \ldots,\quad \frac{(-1)^{n+1}}{n},\quad \ldots,\qquad (M=1)$$

$$1,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{3},\quad \ldots,\quad \frac{2n-1}{n},\quad \ldots,\qquad (M=2)$$

ограниченные, а последовательность

$$1,\ 4,\ 9,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots$$

неограниченная.

Последовательность называется *возрастающей*, если для всех n

$$a_n < a_{n+1}.$$

Последовательность называется *убывающей*, если для всех n

$$a_n > a_{n+1}.$$

Возрастающие и убывающие последовательности называются монотонными.

Например, последовательности

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \ldots,\quad \frac{1}{n},\quad \ldots,$$

$$1,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{3},\quad \ldots,\quad \frac{2n-1}{n},\quad \ldots,$$

$$1,\ 4,\ 9,\ \ldots,\ n^2$$

монотонные, а последовательности

$$1,\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \ldots,\quad \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

$$1,\ 0,\ 3,\ 0,\ \ldots,\ 2n-1,\ 0,\ \ldots,$$

не монотонные.

Замечание. К монотонным последовательностям относят также неубывающие ($a_n \leqslant a_{n+1}$) и невозрастающие последовательности ($a_n \geqslant a_{n+1}$).

III. **Предел последовательности. Определение.** Число A называется *пределом* последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, если для любого положительного числа ε можно подобрать такое натуральное число N, что для всех значений $n > N$ выполняется неравенство

$$|a_n - A| < \varepsilon. \qquad (3)$$

В этом случае пишут: $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

На множестве действительных чисел неравенство (3) эквивалентно неравенству (см. гл. I)

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N,$$

которое означает, что в интервале $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$ (рис. 19) находятся все члены последовательности, номер которых превосходит N, а вне этого интервала лишь конечное число (не больше, чем N).

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n} = 2$.

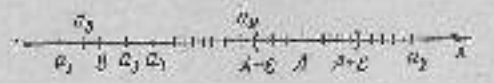


Рис. 19

Решение. Возьмем, например, $\varepsilon = 10^{-3}$. Найдем те члены данной последовательности, которые лежат в интервале $(2-10^{-3},\ 2+10^{-3})$, т. е. удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{2n-1}{n} - 2\right| < 10^{-3}.$$

Решая его, находим $\dfrac{1}{n} < 10^{-3}$, $n > 10^3$.

Итак, внутри интервала $(2-10^{-3},\ 2+10^{-3})$ попадают все члены последовательности, номер которых $n > 1000$.

Если взять $\varepsilon = 10^{-5}$ и интервал $(2-10^{-5},\ 2+10^{-5})$, то внутри этого интервала попадут все члены последовательности, номер которых $n > 100\,000$.

Вообще для любого $\varepsilon > 0$ внутри интервала $(2-\varepsilon,\ 2+\varepsilon)$ попадут все члены последовательности, которые удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{2n-1}{n} - 2\right| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Решая последнее неравенство, находим, что $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, все члены последовательности, номер которых $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, удовлетворяют неравенству (*). А это согласно определению предела последовательности и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n} = 2$.

Не всякая последовательность имеет предел. Рассмотрим, например, последовательность с общим членом $a_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Очевидно, $a_1 = 0$, $a_2 = \dfrac{3}{2}$, $a_3 = -\dfrac{2}{3}$, $a_4 = \dfrac{5}{4}$, $a_5 = -\dfrac{4}{5}$ и т. д. Члены последовательности сгущаются к точкам -1 и 1. Эта последовательность не имеет предела. Действительно, если взять интервалы $(-1-\varepsilon,\ -1+\varepsilon)$ и $(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$, то в них $\left(\text{при } \varepsilon < \dfrac{2}{3}\right)$ находятся

бесконечно много членов последовательности, но и вне каждого из них — также бесконечно много (рис. 20).

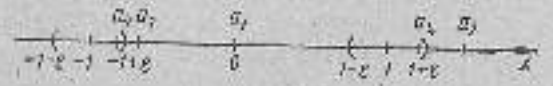


Рис. 20

Следующие теоремы дают достаточное условие существования предела последовательности:

Теорема I. *Всякая ограниченная монотонная последовательность имеет предел.*

Теорема II. *Если члены последовательности b_n, начиная с некоторого номера N, заключены между соответствующими членами a_n и c_n двух других последовательностей, т. е.*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \quad \text{для} \quad n \geqslant N$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, *то данная последовательность имеет предел, причем*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

Доказательство этих теорем приводится в курсе высшей математики.

Тоже без доказательства отметим следующие свойства предела последовательности:

I. *Если последовательность имеет предел, то этот предел единственный.*

II. *Предел постоянной последовательности равен этой постоянной, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} c = c.$$

III. *Предел алгебраической суммы последовательностей равен алгебраической сумме пределов этих последовательностей, если последние существуют, только, если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *существуют, то*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n.$$

IV. *Предел произведения последовательностей равен произведению пределов сомножителей, если последние существуют, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n.$$

В частности, если $a_n = a$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\lim_{n\to\infty}(a \cdot b_n) = a \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Последнее означает, что при переходе к пределу, постоянный множитель выносится за знак предела.

V. *Предел отношения двух последовательностей равен отношению пределов числителя и знаменателя, если последние существуют и предел знаменателя не равен нулю, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \qquad (\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0).$$

§ 2. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Определение. Последовательность чисел с общим членом $a_n = a + (n-1)d$, где a и d — любые заданные числа, называется *арифметической прогрессией.*

Число a называется *первым членом* арифметической прогрессии, d — *разностью* арифметической прогрессии. Для обозначения арифметической прогрессии употребляют знак $\div$, т. е. пишут

$$\div a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

При $d > 0$ прогрессия будет возрастающей, так как $a_{n+1} = a_1 + nd > a_1 + (n-1)d = a_n$, т. е. $a_{n+1} > a_n$; при $d < 0$ прогрессия убывающая ($a_{n+1} < a_n$).

Из данного определения вытекают следующие свойства членов арифметической прогрессии.

1. *Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с разностью d, т. е.*

$$a_{k+1} = a_k + d,$$
$$a_1 = a, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

В самом деле,

$$a_{k+1} = a + k \cdot d = [a + (k-1)d] + d = a_k + d.$$

2. *Каждый член арифметической прогрессии есть среднее арифметическое двух равноудаленных от него членов этой прогрессии, т. е.*

$$a_k = \frac{a_{k+m} + a_{k-m}}{2}, \tag{5}$$

где k и m любые натуральные числа и $k > m$.

Действительно,

$$a_{k+m} = a_1 + d(k + m - 1); \quad a_{k-m} = a_1 + d(k - m - 1),$$

поэтому

$$a_{k+m} + a_{k-m} = 2a_1 + d(2k - 2) = 2[a_1 + d(k-1)],$$

откуда

$$\frac{a_{k+m}+a_{k-m}}{2}=a_1+d(k-1)=a_k.$$

3. Для любой арифметической прогрессии

$$a_k+a_l=a_r+a_s, \tag{5}$$

где k, l, r, s — номера членов, удовлетворяющие условию $k+l=r+s$.

В самом деле,

$$a_k+a_l=a_1+d(k-1)+a_1+d(l-1)=2a_1+d(k+l-2),$$
$$a_r+a_s=a_1+d(r-1)+a_1+d(s-1)=2a_1+d(r+s-2)$$

и так как, по условию $r+s=k+l$, то

$$a_k+a_l=a_r+a_s.$$

В частности, если арифметическая прогрессия состоит из n членов, то a_k и a_{n-k+1} являются ее членами, равноотстоящими от концов a_1 и a_n, причем

$$1+n=k+(n-k+1).$$

Поэтому согласно свойству 3

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+a_n. \tag{6'}$$

т. е. для любой конечной арифметической прогрессии сумма двух членов, равноотстоящих от ее концов, есть величина постоянная для данной прогрессии, равная сумме крайних членов.

Замечание. Свойство 1 так же, как и свойство 2, является условием достаточным для того, чтобы соответствующая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ была арифметической прогрессией. Действительно, если для последовательности

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

$$a_{k+1}=a_k+d \quad \text{для} \quad k=1, 2, \ldots,$$

$a_1=a$, где a и d — заданные числа,

то написав эту формулу для $k=1, 2, \ldots, n$,

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_n=a_{n-1}+d$$

и сложив все эти равенства, получаем

$$a_n=a_1+d(n-1).$$

Последнее означает, что $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — арифметическая прогрессия.

Таким образом, арифметическую прогрессию можно определить как последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, заданную рекуррентным соотношением: $a_{k+1}=a_k+d$, $a_1=a$, $k=1, 2, \ldots$.

Предлагаем читателю доказать, что последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, заданная рекуррентным соотношением $a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$, $a_1=a$, $k=2, 3, \ldots$, есть арифметическая прогрессия.

Последовательность же чисел, удовлетворяющая свойству 3, может и не быть арифметической прогрессией. Например, 1, 2, 4, 5 — не есть арифметическая прогрессия, хотя $1+5=2+4$.

Сумма n членов арифметической прогрессии. Обозначим через S_n сумму первых членов арифметической прогрессии

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n. \tag{7}$$

Запишем слагаемые в обратном порядке

$$S_n=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1. \tag{8}$$

Складывая почленно равенства (7) и (8) и группируя члены, получаем

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1).$$

В скобках, число которых равно n, стоят суммы членов, равноудаленных от концов прогрессии.

По свойству 3 каждая из этих сумм равна a_1+a_n. Следовательно,

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}, \tag{9}$$

т. е. сумма n последовательных членов арифметической прогрессии равна полусумме ее крайних членов, умноженной на число членов.

Если в формуле (9) выразить a_n по формуле общего члена, то получаем

$$S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n. \tag{9'}$$

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Определение. Последовательность чисел с общим членом $a_n=aq^{n-1}$, где $a\neq 0$ и $q\neq 0$ — любые заданные числа, называется *геометрической прогрессией.*

Число a называется *первым членом* геометрической прогрессии, q — *знаменателем* геометрической прогрессии. Для обозначения геометрической прогрессии употребляют знак $\div$, т. е. пишут

$$\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Из условия $a \neq 0$, $q \neq 0$ следует, что среди членов геометрической прогрессии не могут быть нули. При $a>0$ и $q>1$ геометрическая прогрессия возрастающая, так как

$$a_{k+1} - a_k = a_1 q^k > a_1 q^{k-1} = a_k, \text{ т. е. } a_{k+1} > a_k, \text{ при } 0<q<1 —$$

убывающая ($a_{k+1} < a_k$).

Если $q<0$, то члены прогрессии знакочередующиеся и она не будет монотонной.

Из определения геометрической прогрессии вытекают следующие свойства ее членов:

1. *Каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на знаменатель прогрессии*, т. е.

$$a_{k+1} = a_k \cdot q, \quad a_1 = a, \ k = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

В самом деле,

$$a_{k+1} = a_1 q^k = a_1 q^{k-1} \cdot q = a_k \cdot q.$$

2. *Квадрат каждого члена геометрической прогрессии равен произведению двух равноудаленных от него членов этой прогрессии*, т. е.

$$a_k^2 = a_{k-m} \cdot a_{k+m}, \tag{11}$$

где k и m — любые натуральные числа и $k > m$.

Действительно,

$$a_{k+m} = a_1 q^{k+m-1}, \ a_{k-m} = a_1 q^{k-m-1}.$$

Поэтому

$$a_{k+m} \cdot a_{k-m} = a_1^2 q^{2(k-1)} = a_k^2.$$

Если все члены геометрической прогрессии положительные числа, то свойство (2) можно записать формулой

$$a_k = \sqrt{a_{k-m} \cdot a_{k+m}} \tag{12}$$

что означает, что каждый член такой геометрической прогрессии есть среднее геометрическое членов, равноудаленных от него.

3. *Для любой геометрической прогрессии* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

$$a_k \cdot a_l = a_r \cdot a_s, \tag{13}$$

где k, l, r, s — *номера членов и* $k + l = r + s$.

В самом деле, по определению геометрической прогрессии

$$a_k \cdot a_l = a_1 q^{k-1} \cdot a_1 q^{l-1} = a_1^2 q^{k+l-2},$$

$$a_r \cdot a_s = a_1 q^{r-1} \cdot a_1 q^{s-1} = a_1^2 q^{r+s-2},$$

и так как по условию $k + l = r + s$, то

$$a_k \cdot a_l = a_r \cdot a_s.$$

В частности, если геометрическая прогрессия состоит из n членов, то

$$a_k \cdot a_{n-k+1} = a_1 \cdot a_n \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{13'}$$

т. е. произведение двух членов конечной геометрической прогрессии равноотстоящих от ее концов, есть величина постоянная, равная произведению ее крайних членов.

Замечание. Так же, как и в случае арифметической прогрессии, каждое из свойств 1 и 2 является условием необходимым и достаточным для того, чтобы соответствующая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, была геометрической прогрессией.

Представляем читателю доказать, что последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, заданная рекуррентным соотношением $a_{k+1} = a_k q$ ($q \neq 0$), $a_1 = a \neq 0$ есть геометрическая прогрессия (см. замечание к § 2).

Покажем, что последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, заданная рекуррентным соотношением $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$ заданные числа, $k = 2, 3, \ldots$ есть геометрическая прогрессия. С этой целью запишем каждое из равенств $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, $k = 2, 3, \ldots$, в виде пропорции

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k} \quad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Получаем:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}, \ \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3}, \ \ldots, \ \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

или

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

где q — величина каждого из равных отношений.

Приравнивая q каждое из этих отношений, получаем:

$$a_2 = a_1 q, \ a_3 = a_2 q, \ \ldots, \ a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Перемножая правые и левые части этих равенств после сокращений, получаем $a_{n+1} = a q^n$. Следовательно, данная последовательность есть геометрическая прогрессия.

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, удовлетворяющая свойству 3, может не быть геометрической прогрессией. Например, числа $1, 2, 3, 6$ не образуют геометрической прогрессии, хотя $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$.

Сумма n членов геометрической прогрессии. Обозначим через S_n сумму n членов геометрической прогрессии

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \tag{14}$$

Умножая все члены этого равенства на знаменатель прогрессии q и учитывая, что $a_k \cdot q = a_{k+1}$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$, имеем

$$S_n q = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_n q. \qquad (15)$$

Вычтем из (14) равенство (15). Тогда

$$S_n(1-q) = a_1 - a_n q,$$

т. е.

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}, \qquad (16)$$

если $q \neq 1$. Так как $a_n = a_1 q^{n-1}$, то из формулы (16) получим формулу

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \qquad (17)$$

определяющую сумму S_n членов прогрессии через ее знаменатель и первый член.

Если $q=1$, то $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$.

$$S_n = n \cdot a_1.$$

§ 4. БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

I. Определение. Бесконечная геометрическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, знаменатель которой $|q|<1$, называется *бесконечно убывающей геометрической* прогрессией.

При $a>0$ и $0<q<1$ члены прогрессии монотонно убывают:

$$a_n = a_1 q^{n-1} < a_1 q^{n-2} = a_{n-1}.$$

При $q<0$ прогрессия не монотонна (см. § 3).

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно заданное положительное число. Рассмотрим неравенство $|q^n - 0| < \varepsilon$. Решая его относительно n, находим

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ и всех n, бо́льших числа $\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$, справедливо неравенство $|q^n - 0| < \varepsilon$, что по определению предела последовательности означает

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Из леммы и свойств предела вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a q^{n-1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} q^{n-1} = 0,$$

если $|q|<1$, т. е. член бесконечно убывающей геометрической прогрессии стремится к нулю, когда его номер неограниченно возрастает.

II. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Совершенно очевидно, что понимая сумму в обычном смысле, ее нельзя определить для бесконечного числа слагаемых (складывая последовательно слагаемые, мы никогда не закончим процесс суммирования). Поэтому в случае бесконечно убывающей геометрической прогрессии поступают следующим образом.

Вычисляют по формуле (17) сумму двух, трех, ... и т. д. первых ее членов

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{a_1(1-q^2)}{1-q},$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q},$$

. . . . . .

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q},$$

. . . . . .

Эти суммы тоже образуют бесконечную последовательность, которая имеет предел. Действительно, по свойству предела

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \frac{a_1}{1-q}. \qquad (18)$$

При увеличении n в сумму S_n будет входить все большее и большее количество членов геометрической прогрессии. Поэтому, естественно понимать под выражением

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

предел последовательности $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, который и называют суммой S бесконечно убывающей прогрессии.

Таким образом, учитывая это определение и результат (18), имеем

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \frac{a_1}{1-q}.$$

§ 5. ЗАДАЧИ

Прогрессии определяются двумя элементами: первым членом и разностью в случае арифметической и первым членом и знаменателем в случае геометрической прогрессии. Если прогрессии конечны, то для их определения нужно знать и n — число ее членов.

Пример 1. Найти все прогрессии, являющиеся одновременно и геометрическими и арифметическими.

Решение. Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ составляют геометрическую прогрессию. Тогда $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Так как они составляют и арифметическую прогрессию, то по свойству 2 (§ 2) $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$, т. е. $a_1 q^{n-2} + a_1 q^n = 2a_1 q^{n-1}$ или $a_1 q^{n-2}(q^2 - 2q + 1) = 0$. Сокращая на $a_1 q^{n-2}$ ($a_1 \neq 0$, $q \neq 0$), получаем уравнение $(q-1)^2 = 0$, откуда следует, что $q = 1$ и данная прогрессия есть последовательность равных чисел $a_1, a_1, \ldots, a_1, \ldots$.

Вывод. *Только последовательность равных чисел является одновременно и геометрической и арифметической прогрессией.*

Отсюда вытекает, что арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, у которых не все $a_i = b_i$, не могут иметь равными любую тройку своих последовательных членов, так как из условия $a_i = b_i$, $a_{i+1} = b_{i+1}$, $a_{i+2} = b_{i+2}$, вытекает, что $b_n = a_n$ для всех n.

Случай $a_i = b_i$ и $a_{i+1} = b_{i+1}$ возможен.

Пример 2. Даны две возрастающие прогрессии с положительными членами: геометрическая $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ и арифметическая $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, у которых $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$. Доказать, что $a_n < b_n$ при $n \geqslant 3$.

Решение. Из условия $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$ следует, что $a_1 + d = a_1 q$. Поэтому $d = a_1(q-1)$ и $a_n = a_1 + d(n-1) = a_1 + a_1(n-1)(q-1)$. Таким образом, наша задача сводится к доказательству неравенства

$$a_1 + a_1(n-1)(q-1) < a_1 q^{n-1},$$

или

$$(n-1)(q-1) < q^{n-1} - 1 \qquad (a_1 \neq 0!)$$

Раскладывая правую часть последнего неравенства на множители, получаем:

$$(n-1)(q-1) < (q-1)(q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q + 1),$$

$$n - 1 < q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q + 1.$$

Последнее, очевидно, так как $q > 1$.

Пример 3. Найти все прямоугольные треугольники, стороны которых составляют: 1) арифметическую прогрессию, 2) геометрическую прогрессию.

Решение. 1. Пусть a, $a+d$, $a+2d$ — стороны прямоугольного треугольника, где $a > 0$ и $d > 0$. Тогда $(a+2d)^2 = a^2 + (a+d)^2$. После приведения подобных членов и группировки получаем

$$(a-d)(3d-a) = 0.$$ Так как $a + d > 0$, то $a = 3d$.

Итак, стороны искомых треугольников равны соответственно $3d$, $4d$, $5d$, где d — любое положительное число.

2. Пусть a, aq, aq^2 — стороны прямоугольного треугольника, где $a > 0$, $q > 1$. Тогда $a^2q^4 = a^2 + a^2q^2$. Решая это уравнение, находим, что $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ (корень уравнения $-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} < 0$ отбрасываем). Итак, стороны искомых треугольников равны соответственно a, $\frac{a\sqrt{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$, $\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$, где a — любое положительное число.

Пример 4. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 8, то прогрессия станет арифметической. Но если после этого увеличить последнее число на 64, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

Решение. Можно решать задачу с тремя неизвестными a, b, c и свести ее к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} b^2 = ac, \\ 2(b+8) = a + c, \\ (b+8)^2 = a(c+64). \end{cases}$$

Однако проще свести задачу к системе двух уравнений с двумя неизвестными. Обозначая числа через a, aq и aq^2, имеем

$$\begin{cases} 2(aq+8) = a + aq^2, \\ (aq+8)^2 = a(aq^2+64). \end{cases}$$

Упрощая второе уравнение, получаем

$$aq + 4 - 4a = 0.$$

Исключая из первого и полученного уравнения a, имеем

$$q^2 + 2q - 15 = 0,$$

откуда следует, что $q_1 = 3$, $q_2 = -5$, $a^{(1)} = \frac{4}{4-q_1} = 4$, $a^{(2)} = \frac{4}{4-q_2} = \frac{4}{9}$. Таким образом, мы получили две геометрические прогрессии

$$\pm 4,\ 12,\ 36 \text{ и } \pm\frac{4}{9},\ -\frac{20}{9},\ \frac{100}{9}.$$

Для определения a и q имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} a + 2aq^2 - aq = 14, \\ aq + aq^2 = 12. \end{cases}$$

Исключая из этой системы a, получаем квадратное уравнение $5q^2 - 13q + 6 = 0$, откуда находим: $q_1 = 2$, $q_2 = \frac{3}{5}$.

Соответствующие значения a равны 2 и $\frac{25}{2}$.

Итак, мы получили два решения:

$$2,\ 4,\ 8,\ 12 \text{ и } \frac{25}{2},\ \frac{15}{2},\ \frac{9}{2},\ \frac{3}{2},$$

Пример 6. Три числа, сумма которых равна 114, можно рассматривать как три последовательных члена геометрической, или как первый, четвертый и двадцать пятый члены арифметической прогрессии. Найти эти числа.

Решение. Прежде всего возникает вопрос, как обозначить неизвестные три числа — как члены арифметической, или как члены геометрической прогрессии?

Если их обозначить как члены геометрической прогрессии: a, aq и aq^2, то из условия задачи имеем следующие 3 уравнения:

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 114, \\ aq = a + 3d, \\ aq^2 = a + 24d, \end{cases}$$

где d — промежуточная неизвестная величина. Если же их обозначить как члены арифметической прогрессии a, $a+3d$, $a+24d$, то имеем два уравнения:

$$a + a + 3d + a + 24d = 114,$$
$$(a + 3d)^2 = a(a + 24d).$$

Этот способ, очевидно, предпочтительней. Упрощая последнюю систему, находим

$$\begin{cases} a + 9d = 38, \\ d^2 = 2ad. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим два решения: 38, 38, 38 и 2, 14, 98.

Первый член геометрической прогрессии порой выгодно обозначать через $\frac{a}{q^k}$, *где* k — *некоторое натуральное число; такое обозначение может упростить решение задачи. Аналогично для арифметической прогрессии — первый член равен* $a - d(k-1)$.

Пример 7. Определить три числа, образующие геометрическую прогрессию, если сумма их равна 21, а сумма обратных величин равна $\frac{7}{12}$.

Решение. Искомые числа обозначены через $\frac{a}{q}$, a, aq. Из условий задачи имеем

$$\begin{cases} \frac{a}{q} + a + aq = 21, \\ \frac{q}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{aq} = \frac{7}{12}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 21, \\ \frac{1}{a}\left(q + 1 + \frac{1}{q}\right) = \frac{7}{12}. \end{cases}$$

Деля первое уравнение на второе $\left(q + 1 + \frac{1}{q} \neq 0\right)$, находим

$$a^2 = 36,\ a = \pm 6,\ q^2 + q + 1 = \pm \frac{7}{2} q.$$

Для $a = 6$ получаем:

$$q_1^{(1)} = \frac{1}{2};\ q_2^{(1)} = 2.$$

Для $a = -6$ получаем:

$$q_1^{(2)} = \frac{-9 + \sqrt{65}}{4};\quad q_2^{(2)} = \frac{-9 - \sqrt{65}}{4}.$$

Таким образом, мы получаем четыре решения:

$$\underline{12,\ 6,\ 3};\ \underline{3,\ 6,\ 12};\ \underline{\frac{24}{9 - \sqrt{65}},\ -6,\ \frac{3(9 - \sqrt{65})}{2}};$$

$$\underline{\frac{3(9 - \sqrt{65})}{2},\ -6,\ \frac{24}{9 - \sqrt{65}}}.$$

Замечание. Прогрессии a_1, a_2, a_3 и a_3, a_2, a_1 считаются различными.

Пример 8. Определить стороны треугольника, если они выражаются целыми числами, образующими арифметическую прогрессию, причем периметр треугольника равен 15.

Р е ш е н и е. Выгодно обозначить стороны треугольника через $a-d$, a, $a+d$ ($d \geqslant 0$, $a > d$). Тогда из условий имеем $a-d+a+a+d=15$, т. е. $a=5$.

Так как в треугольнике $a+d<(a-d)+a$, то $d<\frac{a}{2}$ и целое. Следовательно, $d=0$, $d=1$ и $d=2$. Получаем три решения: 5, 5, 5; 4, 5, 6 и 3, 5, 7.

Очевидно, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют прогрессию арифметическую или геометрическую, то числа $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$, записанные в обратном порядке, образуют также прогрессию арифметическую или геометрическую соответственно. При этом, если d — разность первой прогрессии, то $-d$ — разность второй (для геометрической: q — знаменатель первой прогрессии, $\frac{1}{q}$ — знаменатель второй).

Используем это замечание при решении следующей задачи.

Пример 9. Найти числа, составляющие арифметическую прогрессию, зная, что сумма первых четырех членов равна 68, сумма последних четырех членов равна -36, а сумма всех членов равна 68.

Р е ш е н и е. Сумма последних четырех членов прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с разностью d есть сумма первых четырех членов прогрессии $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$ с разностью $-d$. Следовательно, согласно формуле (9') из условия задачи имеем

$$\begin{cases} \frac{2a_1+3d}{2}\cdot 4=68, \\ \frac{2a_n-3d}{2}\cdot 4=-36, \\ \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=68. \end{cases}$$

Складывая два первые уравнения системы, находим, что $a_1+a_n=8$. Тогда из третьего уравнения следует, что $n=17$. Дальнейшее решение очевидно. Решив систему

$$\begin{cases} 2a_1+3d=34, \\ 2a_1+29d=-18, \end{cases}$$

получаем $a_1=20$, $d=-2$.

Как в геометрической, так и в арифметической прогрессии любой член a_k можно выразить через любой другой a_l соответственно по формулам

$$a_k=a_l\cdot q^{k-l} \text{ и } a_k=a_l+d(k-l).$$

Пример 10. В геометрической прогрессии все члены которой положительны, даны $a_{m-n}=A$ и $a_{m+n}=B$. Найти a_m и a_n.

Р е ш е н и е. Так как $a_{m+n}=a_{m-n}\cdot q^{m+n-(m-n)}$, то $A=B\cdot q^{2n}$, откуда $q=\sqrt[2n]{\frac{A}{B}}$ (берем арифметическое значение корня, так как $q>0$ по условию).

Теперь находим a_m и a_n:

$$a_m=a_{m-n}\cdot q^{m-(m-n)}=a_{m-n}\cdot q^n=A\cdot\sqrt[2n]{\left(\frac{A}{B}\right)^n}=\sqrt{AB},$$

$$a_n=a_{m+n}\cdot q^{n-(m+n)}=a_{m+n}\cdot q^{-m}=A\cdot\sqrt[2n]{\left(\frac{A}{B}\right)^{-m}}=A\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{m}{2n}}.$$

З а м е ч а н и е. Член a_m можно найти сразу, воспользовавшись свойством 2 (§ 3). Так как члены a_{m-n} и a_{m+n} равноудалены от a_m, то

$$a_m=\sqrt{a_{m-n}\cdot a_{m+n}}=\sqrt{A\cdot B}.$$

При решении некоторых задач полезно использовать следующее свойство геометрической прогрессии.

Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ две геометрические прогрессии, то при любых действительных α, β и $A\neq 0$ числа $c_n=A\cdot(a_n)^\alpha\cdot(b_n)^\beta$ ($n=1, 2, \ldots$) тоже образуют геометрическую прогрессию.

В самом деле, если q_1 — знаменатель первой прогрессии, а q_2 — знаменатель второй прогрессии, то

$$a_n=a_1q_1^{n-1}, \quad b_n=b_1\cdot q_2^{n-1}$$

и

$$c_n=Aa_1^\alpha q_1^{\alpha(n-1)}\cdot b_1^\beta\cdot q_2^{\beta(n-1)}=Aa_1^\alpha\cdot b_1^\beta\,(q_1^\alpha\cdot q_2^\beta)^{n-1}=c_1\cdot q^{n-1},$$

где $c_1=Aa_1^\alpha b_1^\beta$, $q=q_1^\alpha\cdot q_2^\beta$.

Это означает, что последовательность $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ есть геометрическая прогрессия, первый член которой равен $Aa_1^\alpha b_1^\beta$, а знаменатель $q_1^\alpha q_2^\beta$.

Из этого свойства вытекают следующие частные случаи:

1. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — геометрическая прогрессия, то числа $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2, \ldots$ также образуют геометрическую прогрессию (достаточно взять $A=1$ и $b_n=1$).

2. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — геометрическая прогрессия, то числа $Aa_1, Aa_2, \ldots, Aa_n, \ldots$ также образуют геометрическую прогрессию.

Приведем несколько задач, при решении которых используются эти свойства.

Пример 11. Последовательность чисел образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, сумма членов которой равна 8. Найти эту прогрессию, если сумма их кубов равна $\frac{512}{3}$.

Решение. Согласно доказанному кубы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии также образуют геометрическую прогрессию, причем бесконечно убывающую, так как $|q^3|<1$, если $|q|<1$.

Обозначая через a первый член, а через q знаменатель данной прогрессии, согласно формуле (18) имеем

$$\frac{a}{1-q}=8.$$

Первый член новой прогрессии равен a^3, ее знаменатель q^3, поэтому

$$\frac{a^3}{1-q^3}=\frac{512}{7}.$$

Решая систему

$$\begin{cases}\dfrac{a}{1-q}=8,\\[2ex] \dfrac{a^3}{1-q^3}=\dfrac{512}{7},\end{cases}$$

находим $q_1=\frac{1}{2}$, $q_2=2$ (не годится), $a=4$. Следовательно, $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$ — искомая прогрессия.

Пример 12. Доказать, что если члены a_p, a_q, a_r и a_s арифметической прогрессии составляют геометрическую прогрессию, то $p-q$, $q-r$ и $r-s$ будут последовательными членами геометрической прогрессии.

Решение. Четыре последовательных члена геометрической прогрессии дают следующий ряд равных отношений

$$\frac{a_s}{a_r}=\frac{a_r}{a_q}=\frac{a_q}{a_p}=q.$$

Составляя производную пропорцию (см. гл. II), получаем

$$\frac{a_q-a_p}{a_p}=\frac{a_r-a_q}{a_q}=\frac{a_s-a_r}{a_r}. \qquad (19)$$

Но $a_q-a_p=d(q-p)$, $a_r-a_q=d(r-q)$, $a_s-a_r=d(s-r)$ — по свойству членов арифметической прогрессии (см. указания к задаче 10). Тогда из (19) следует, что

$$\frac{q-p}{a_p}=\frac{r-q}{a_q}=\frac{s-r}{a_r}=A,$$

где A — величина равных отношений, или $q-p=A\cdot a_p$, $r-q=A\cdot a_q$, $s-r=A\cdot a_r$. Числа $q-p$, $r-q$, $s-r$ пропорциональны последовательным членам геометрической прогрессии и, следовательно, также образуют геометрическую прогрессию.

Пример 13. Даны две геометрические прогрессии, состоящие из одинакового числа членов. Первый член первой прогрессии равен 80, знаменатель ее $\frac{3}{4}$. Первый член второй прогрессии равен 4, а знаменатель $\frac{2}{3}$. Если перемножить члены этих прогрессий с одинаковыми номерами, то сумма всех таких произведений равна $158\frac{3}{4}$. Найти число членов этих прогрессий.

Решение. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — первая прогрессия и $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ — вторая прогрессия. Тогда последовательность $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \ldots, a_nb_n$ также является геометрической прогрессией, первый член которой $a_1b_1=80$ и $q=q_1\cdot q_2=\frac{1}{2}$. По формуле суммы n членов геометрической прогрессии имеем

$$S_n=\frac{a_1b_1(1-q^n)}{1-q},$$

или

$$158\frac{3}{4}=\frac{80\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}.$$

Решая последнее уравнение относительно n, находим $\frac{1}{2^n}=\frac{1}{128}$, т. е. $n=7$.

В замечаниях, сделанных в конце § 2 и 3, мы показали, что как для арифметической, так и для геометрической прогрессии существуют 3 эквивалентных между собой определения. В каких случаях выгодно брать то или иное определение, зависит от условий задач.

Пример 14. Доказать, что если положительные числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то числа $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$ и $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ также образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Покажем, что $\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ при условии, что a, b и c образуют арифметическую прогрессию, т. е. $2b=a+c$.

Имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{b-c}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}=$$

$$=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{-d}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{-d}=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{d}=\frac{c-a}{d(\sqrt{c}+\sqrt{a})}=$$

$$=\frac{2d}{d(\sqrt{c}+\sqrt{a})}=\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}.$$

Следовательно, числа $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$ и $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, из которых первое и второе есть среднеарифметические крайних, образуют арифметическую прогрессию.

§ 8. СУММИРОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Пусть даны числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Как найти сумму

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n?$$

Эта задача решена нами для случая прогрессии арифметической и геометрической. В общем же случае далеко не всегда удается найти S_n и даже в тех случаях, когда это можно сделать, для ее нахождения требуются большие навыки и изобретение различных приемов.

Остановимся на некоторых задачах и методах их решений.

1. Сведение к известным суммам. Под известными суммами мы будем понимать суммы прогрессий и суммы равных степеней натуральных чисел $S_n^p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$ для 1) $p = 2$ и 2) $p = 3$. Напомним их.

Пример 1. Найти выражения S_n^2 и S_n^3.

Решение. 1. Положим в тождестве $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ последовательно $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.
Имеем:

$$\begin{aligned}
(0+1)^3 &= 1^3,\\
(1+1)^3 &= 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1,\\
(2+1)^3 &= 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(n+1)^3 &= n^3 + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1.
\end{aligned}$$

Складывая левые и правые части всех этих равенств, получим

$$(n+1)^3 = 3S_n^2 + 3S_n^1 + n + 1,$$

где $S_n^1 = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n+1}{2}\cdot n$ — сумма членов арифметической прогрессии. Поэтому

$$S_n^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 3\frac{n+1}{2}\cdot n - n - 1\right] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Положим в тождестве $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ последовательно $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.
Имеем:

$$\begin{aligned}
(0+1)^4 &= 1^4,\\
(1+1)^4 &= 1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1,\\
(2+1)^4 &= 2^4 + 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(n+1)^4 &= n^4 + 4\cdot n^3 + 6\cdot n^2 + 4\cdot n + 1.
\end{aligned}$$

Складывая левые и правые части всех этих равенств, получим

$$(n+1)^4 = 4S_n^3 + 6S_n^2 + 4S_n^1 + n + 1$$

и

$$S_n^3 = \frac{1}{4}\left[(n+1)^4 - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n - n - 1\right] = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Так последовательно можно найти выражения S_n^p для любого натурального p.

Пример 2. Дана последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такая, что $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1}$ $(= d)$. Найти сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Решение. Прежде всего найдем формулу для общего члена этой последовательности. Обозначив $S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$, запишем эту сумму один раз прямо и один раз в обратном порядке:

$$\begin{aligned}
S_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_k,\\
S_k &= a_k + a_{k-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.
\end{aligned}$$

После вычитания из верхнего равенства нижнего, получим

$$\begin{aligned}
0 &= a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_k - a_{k-1}) - a_k =\\
&= 1 + 2 + \ldots + k - a_1 - \frac{k(k+1)}{2} - a_1,
\end{aligned}$$

Итак,

$$a_k = \frac{k+1}{2}\cdot k - \frac{1}{2}(k^2 + k).$$

Теперь легко получаем S_n:

$$S_n = \frac{1}{2}\left[(1^2+1) + (2^2+2) + \ldots + (n^2+n)\right] = \frac{1}{2}\left[S_n^{(2)} + S_n^{(1)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n+1}{2}\cdot n\right] = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Пример 3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая, а $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ — геометрическая прогрессии и $q \neq 1$. Найдем сумму произведений $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$.

Решение. Обозначая $S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$, находим $S_n \cdot q$, где q — знаменатель геометрической прогрессии.

$$S_nq = a_1b_1q + a_2b_2q + \ldots + a_nb_nq = a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_{n-1}b_n + a_nb_nq.$$

Вычитая S_n и S_nq один раз другой из одного на один член

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n,\\
S_nq &= \quad a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_nb_nq,
\end{aligned}$$

и вычитая из верхнего равенства нижнее, получаем

$$S_n(1-q) = a_1b_1 + b_2(a_2 - a_1) + b_3(a_3 - a_2) + \ldots + b_n(a_n - a_{n-1}) - a_nb_nq =$$

$$= a_1b_1 + d(b_2 + b_3 + \ldots + b_n) - a_nb_nq = a_1b_1 + d\frac{b_2 - b_nq}{1-q} - a_nb_nq,$$

где d — разность арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Пример 4. Дана последовательность $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, ..., $a_n = \underbrace{11\ldots1}_{n}$. Найти сумму

$$S_n = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{n}.$$

Р е ш е н и е. Найдем формулу общего члена данной последовательности в виде

$$a_1 = \frac{10-1}{9},\quad a_2 = \frac{10^2-1}{9},\quad a_3 = \frac{10^3-1}{9},\quad \ldots,\quad a_n = \frac{10^n-1}{9}.$$

Тогда

$$S_n = \frac{1}{9}\left[(10-1)+(10^2-1)+\ldots+(10^n-1)\right] = \frac{1}{9}\left[10+10^2+\ldots+10^n-n\right] =$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right] = \frac{10^{n+1}-10}{81}-\frac{n}{9}.$$

II. **Применение метода математической индукции.** Метод математической индукции применим в том случае, когда нам удалось угадать формулу, выражающую S_n в зависимости от n, и нужно доказать справедливость этой формулы.

Пример 5. Доказать, что

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} =$$

$$= (-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}. \qquad (23)$$

Р е ш е н и е. Для $n=1$ и $n=2$ формула (23) справедлива, так как

$$1-\frac{x}{1!} = (-1)^1\frac{x-1}{1} \quad \text{и} \quad 1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!} = (-1)^2\frac{(x-1)(x-2)}{2!}.$$

Допустим теперь, что равенство (23) справедливо для $n-1$, докажем его для n. Согласно нашему допущению

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+2)}{(n-1)!} =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(x-1)\ldots(x-n+1)}{(n-1)!}.$$

Тогда

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!} =$$

$$= -(-1)^{n-1}\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{(n-1)!}+$$

$$+(-1)^n\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!} =$$

$$= -(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!}(-n+x) =$$

$$= (-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)(x-n)}{n!}.$$

III. **Представление членов последовательности в виде алгебраической суммы отдельных слагаемых.** Такое представление при суммировании приводит иногда к сокращению почти всех членов последовательности. Проиллюстрируем этот метод на следующих примерах.

Пример 6. Найти сумму $S_n = 1\cdot1! + 2\cdot2! + \ldots + n\cdot n!$

Р е ш е н и е. Преобразуем каждый член данной суммы по формуле

$$k\cdot k! = [(k+1)-1]\,k! = (k+1)! - k!.$$

Тогда

$$S_n = (2!-1!)+(3!-2!)+\ldots+[(n+1)!-n!] = (n+1)!-1.$$

Пример 7. Найти сумму $S_n = \dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Р е ш е н и е. Каждое слагаемое $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ представим в виде алгебраической суммы трех дробей

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}, \qquad (24)$$

где коэффициенты A, B и C нужно подобрать так, чтобы равенство (24) было справедливым для всех натуральных k. С этой целью приведем правую часть (24) к общему знаменателю. Получим

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A(k^2+3k+2)+B(k^2+2k)+C(k^2+k)}{k(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k^2(A+B+C)+k(3A+2B+C)+2A}{k(k+1)(k+2)}.$$

Из равенства этих дробей вытекает равенство их числителей, т. е.

$$1 = k^2(A+B+C)+k(3A+2B+C)+2A. \qquad (25)$$

Для того чтобы (25) имело место для всех k, достаточно, чтобы

$$\begin{cases} A+B+C=0,\\ 3A+2B+C=0,\\ 2A=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $A=\dfrac{1}{2}$; $B=-1$; $C=\dfrac{1}{2}$.

Подставляя полученные значения A, B и C в (24), получаем тождество

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right), \qquad (26)$$

справедливое для любого натурального k. Полагая в (26) $k=1, 2, \ldots, n$, находим

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+\right.$$

$$\left.+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right].$$

Теперь нетрудно заметить, что все слагаемые записанной суммы, кроме трех, взаимно уничтожаются, т. е.

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

ГЛАВА VI

СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА

§ 1. СОЕДИНЕНИЯ. ВИДЫ СОЕДИНЕНИЙ

Пусть A совокупность различных предметов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, объединяющихся каким-нибудь общим признаком. Например, A — есть совокупность нечетных чисел от 1 до 99, или учащихся данной школы, или заданных точек на плоскости и т. д. Вместо слова «совокупность» будем говорить «множество».

Итак, A — множество, состоящее из конечного числа элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Из различных элементов множества A можно образовывать группы. Если в каждую группу входит одно и то же число элементов m ($m \leqslant n$), взятых из множества A, то говорят, что они образуют *соединения* из n элементов по m в каждом. В зависимости от того, входят ли в соединение все элементы множества A или только часть их, играет ли роль порядок элементов или не играет, различают три вида соединений: 1) *размещения*, 2) *перестановки* и 3) *сочетания*.

Определение 1. Соединения, каждое из которых содержит m различных элементов ($m \leqslant n$), взятых из n элементов множества A, отличающихся друг от друга или составом элементов, или их порядком, называются *размещениями* из n элементов по m в каждом.

Число таких размещений обозначается символом A_n^m. Так, например, различные трехзначные числа, составленные из девяти цифр 1, 2, 3, ..., 9 и не содержащие одинаковые цифры, образуют размещения. Их число есть A_9^3.

Определение 2. Соединения, в каждое из которых входят все n элементов множества A и которые, следовательно, отличаются друг от друга только порядком элементов, называются *перестановками* из n элементов. Число таких перестановок обозначается символом P_n. Перестановки являются частным случаем размещений, когда $m = n$. Поэтому $P_n = A_n^n$.

Определение 3. Соединения, каждое из которых содержит m различных элементов ($m \leqslant n$), взятых из n элементов множества A, отличающихся друг от друга по крайней мере одним элементом, называются сочетаниями из n элементов по m.

Число таких сочетаний обозначается символом C_n^m или $\binom{n}{m}$. Изменение порядка элементов внутри одного сочетания не приводит к новому сочетанию. Например, всевозможные комбинации трех различных сомножителей, образованные из пяти цифр 1, 2, 3, 5, 7 есть сочетания из пяти элементов по 3, так как изменение порядка сомножителей здесь не дает ничего нового.

Выведем формулу числа размещений, перестановок и сочетаний.

Теорема 1. *Число всевозможных размещений из n элементов по m в каждом равно произведению последовательно убывающих на единицу чисел, из которых большее есть n, т. е.*

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)^*. \qquad (1)$$

Доказательство проведем методом индукции. Если $m = 1$, то, очевидно, что $A_n^1 = n$, так как из n различных элементов можно составить n различных размещений по одному элементу в каждом.

Допустим теперь, что составлены все A_n^{m-1} размещений, причем число таких размещений равно

$$A_n^{m-1} = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)+1] = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+2). \qquad (2)$$

Составим теперь размещения из n элементов по m в каждом. С этой целью возьмем произвольное размещение, содержащее $m-1$ элементов и будем присоединять к его правому краю, по одному элементу из $n-m+1$ не входящих в него элементов. При этом получится $n-m+1$ различных размещений по m элементов. Поступая так с каждым размещением, содержащим $m-1$ элементов (число этих размещений равно A_n^{m-1}), получаем $(n-m+1)A_n^{m-1}$ размещений по m элементов. Все эти размещения различны. В самом деле, два произвольных размещения по m элементов либо образованы из одного размещения, содержащего $m-1$ элементов, и тогда они отличаются присоединенными крайними элементами справа. Если они образованы из двух различных размещений, содержащих $m-1$ элементов, то они отличаются порядком или элементами среди первых $m-1$ членов.

Покажем, что в это число вошли все размещения по m элементов из n. Действительно, любое размещение из m элементов после отбрасывания крайнего справа элемента вошло в число размещений, содержащих по $m-1$ элементов и, следовательно, образовано

---

* Такое произведение называется обобщенной степенью и обозначается символом $n^{[m]} = n(n-1)(n-2)\ldots$ $(n-m+1)$. Если $n = m$, то произведение $n^{[n]} = n(n-1)(n-2)\ldots 1$ обозначается символом $n!$ (n — факториал), причем условились считать, что $0! = 1$. В дальнейшем будет понятно удобство такого соглашения. В литературе встречается также символ $n!! = n(n-2)(n-4)\ldots 1$. Например, $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1) = (2n+1)!!$ Легко, что $(2n)!! = 2^n \cdot n!$

из него приписываем справа отброшенного элемента, который не содержится среди его первых $n-1$ элементов.

Таким образом, число всех различных размещений из n элементов по m, т. е. A_n^m вычисляется по формуле

$$A_n^m = (n-m+1)\cdot A_n^{m-1},$$

или в силу нашего предположения (2)

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m)(n-m+2)(n-m+1). \quad (3)$$

Следствие. Полагая в равенстве (3) $m=n$, имеем

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!, \quad (4)$$

т. е. число всевозможных перестановок из n элементов равно $n!$.

Теорема 2. *Число всех различных сочетаний из n элементов по m в каждом выражается формулой*

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть составлены все сочетания из n элементов по m в каждом. Если в каждом из этих сочетаний произвести всевозможные перестановки элементов, то получатся все размещения из n элементов по m в каждом. В самом деле, взяв произвольное размещение из m элементов, можно указать сочетание, содержащее те же элементы, которое может отличаться от взятого размещения только лишь порядком элементов. Но тогда это размещение совпадает с одной из перестановок, которая получается из соответствующего сочетания. Остается показать, что среди всех полученных размещений нет одинаковых. Для этого возьмем два различных размещения. Они получены либо из одного сочетания и тогда отличаются порядком, либо из различных сочетаний и тогда отличаются хотя бы одним элементом. И в том, и в другом случае эти размещения различны.

Из одного сочетания получается $P_m = m!$ перестановок, из C_n^m сочетаний — $C_n^m \cdot P_m$ перестановок.

Следовательно, $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$ и $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$.

Формулу (5) можно записать в другом виде.

Предполагая, что $1 \leqslant m < n$, умножим числитель и знаменатель дроби (5) на произведение $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-m) = (n-m)!$. Имеем

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots 1}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (6)$$

Заметим, что формула (6), выведенная в предположении $1 \leqslant m < n$, остается верной для $m=n$. В самом деле, при $m=n$ равенство $C_n^n = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$ ($0! = 1$, см. сноску на стр. 207) очевидно, так как из n элементов можно образовать только одно сочетание, содержащее n элементов.

Из определения размещений, перестановок и сочетаний следует, что выражения A_n^m, P_n и C_n^m имеют смысл лишь для $1 \leqslant m \leqslant n$. При $m > n$ полагают по соглашению $A_n^m = C_n^m = 0$. Если $m=0$, то считают $A_n^0 = 1$ и $C_n^0 = 1$. Последнее согласуется с формулой (6). Полагая в ней $m=0$, имеем

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,n!} = 1.$$

Таким образом, можно считать, что формула (6) справедлива для $0 \leqslant m \leqslant n$.

Свойства сочетаний. 1. Для всех $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ справедливо равенство

$$C_n^m = C_n^{n-m}. \quad (7)$$

Согласно (6)

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\,(n-n+m)!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = C_n^m.$$

Можно доказать свойство (7) для $m \neq 0$ и $m \neq n$ другим способом. Образуем всевозможные сочетания из n элементов по m в каждом и рассмотрим соединения из элементов, не входящих в каждое из таких сочетаний. Этих соединений будет столько, сколько сочетаний по m элементов, т. е. C_n^m. С другой стороны, эти соединения образуют всевозможные различные сочетания из n элементов по $n-m$ в каждом. (Доказательство этих утверждений проводится по той же схеме, как в теореме 2. Предоставляем его читателю).

Таким образом, $C_n^{n-m} = C_n^m$.

2. Для всех $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ справедливо равенство

$$(n+1)C_n^m = (m+1)C_{n+1}^{m+1}. \quad (8)$$

В самом деле, согласно (6)

$$(m+1)C_{n+1}^{m+1} = \frac{(n+1)\,n!}{(m+1)!\,(n-m)!} = (n+1)\cdot\frac{n!}{m!\,(n-m)!} = (n+1)C_n^m.$$

3. Для всех $m = 1, 2, \ldots, n$ справедливо равенство

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}. \quad (9)$$

В самом деле, согласно (6) для $m = 1, 2, \ldots, n-1$

$$C_{n-1}^{m} + C_{n-1}^{m-1} = \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} =$$
$$= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m-1)!}\left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{m}\right) = \frac{(n-1)!\,n}{m!(n-m)!} =$$
$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m.$$

Приведенные выкладки теряют смысл при $n = m$, так как в этом случае $(n-m-1)! = (-1)!$. Однако формула (9) остается верной для $n = m$. Это проверяется непосредственной подстановкой $m = n$ в левую и правую часть (9). Действительно, так как

$$C_n^0 = 1,\ C_{n-1}^{n} = 0,\ C_{n-1}^{n-1} = 1, \text{ то } C_{n-1}^{n-1} + C_n^n = C_n^n.$$

Формулу (9) для $m \neq 0$ и $m \neq n$ можно доказать и другим способом. Разобьем все сочетания из n элементов по m в каждом на два класса: к первому отнесем все сочетания из n по m, не содержащие какой-нибудь фиксированный элемент, например a, ко второму отнесем все остальные сочетания, содержащие элемент a. Число сочетаний в первом классе равно, очевидно, C_{n-1}^{m} (из множества A исключаем элемент a), число элементов во втором классе равно C_{n-1}^{m-1} (из множества A исключаем элемент a и образуем из оставшихся $n-1$ элементов сочетания по $m-1$ элементу в каждом, а затем к каждому получившемуся сочетанию приписываем элемент a). Так как число всех сочетаний из n элементов по m равно C_n^m, то

$$C_n^m = C_{n-1}^{m} + C_{n-1}^{m-1}.$$

§ 2. БИНОМ НЬЮТОНА

Теорема. *Для любого натурального n справедлива формула*

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1}a + C_n^2 x^{n-2}a^2 + \ldots + C_n^n a^n. \qquad (10)$$

Доказательство. Формула (10) верна для $n = 2$ и $n = 3$

$$(x+a)^2 = C_2^0 x^2 + C_2^1 x \cdot a + C_2^2 a^2 = x^2 + 2xa + a^2,$$
$$(x+a)^3 = C_3^0 x^3 + C_3^1 x^2 \cdot a + C_3^2 x \cdot a^2 + C_3^3 a^3 = x^3 + 3x^2 a + 3xa^2 + a^3.$$

Допуская, что она справедлива для $n-1$, т. е.

$$(x+a)^{n-1} = C_{n-1}^0 x^{n-1} + C_{n-1}^1 x^{n-2}\cdot a + C_{n-1}^2 x^{n-3}a^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}a^{n-1},$$

покажем ее справедливость для n. Имеем

$$(x+a)^n = (x+a)(x+a)^{n-1} = (x+a)(C_{n-1}^0 x^{n-1} + C_{n-1}^1 x^{n-2}a + \ldots +$$
$$C_{n-1}^k x^{n-k-1}a^k + \ldots + C_{n-1}^{n-1}a^{n-1}) = C_{n-1}^0 x^n + x^{n-1}(C_{n-1}^1 a + C_{n-1}^0 a) +$$

$$+ x^{n-2}(C_{n-1}^2 a^2 + C_{n-1}^1 a^2) + \ldots + x^{n-k}(C_{n-1}^k a^k + C_{n-1}^{k-1}a^k) +$$
$$+ \ldots + x(C_{n-1}^{n-1}a^{n-1} + C_{n-1}^{n-2}a^{n-1}) + C_{n-1}^{n-1}a^n. \qquad (11)$$

Согласно тождеству (9) $C_{n-1}^1 + C_{n-1}^0 = C_n^1$,

$$C_{n-1}^2 + C_{n-1}^1 = C_n^2, \ldots, C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k, \ldots, C_n^{n-1} + C_{n-1}^{n-2} = C_n^{n-1}.$$

Кроме того, $C_{n-1}^{n-1} = C_n^n = 1$ и $C_{n-1}^0 = C_n^0 = 1$. Следовательно, равенство (11) принимает вид

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1}\cdot a + C_n^2 x^{n-2}a^2 + \ldots + C_n^k x^{n-k}a^k + \ldots + C_n^n a^n,$$

или

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}a + C_n^2 x^{n-2}a^2 + \ldots + C_n^k x^{n-k}a^k + \ldots + a^n. \qquad (12)$$

Теорема доказана.

Формула (10) или (12) называется *формулой бинома Ньютона*, а ее правая часть называется *разложением* бинома. Коэффициенты $1, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^k, \ldots, 1$ называются *биномиальными*.

Записывая разность $x-a$ в виде $x+(-a)$, имеем

$$(x-a)^n = x^n - C_n^1 x^{n-1}\cdot a + C_n^2 x^{n-2}a^2 + \ldots +$$
$$+ (-1)^k C_n^k x^{n-k}a^k + \ldots + (-1)^n a^n. \qquad (13)$$

Отметим следующие свойства разложения бинома:

1. Число всех членов разложения на единицу больше показателя бинома.

2. Сумма показателей степеней x и a каждого члена разложения равна показателю степени бинома.

3. Общий член разложения T_{k+1} имеет вид

$$T_{k+1} = C_n^k x^{n-k}\cdot a^k. \qquad (14)$$

Полагая в этой форме $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, мы получаем первый, второй и другие члены разложения.

4. Биномиальные коэффициенты членов, равноотстоящих от концов разложения, равны между собой, так как

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

5. Биномиальный коэффициент $k+1$-го члена разложения связан с предшествующим биномиальным коэффициентом соотношением

$$C_n^k = \frac{n+1-k}{k}\,C_n^{k-1}, \qquad (15)$$

из которого вытекает правило их образования:

каждый биномиальный коэффициент разложения, начиная со второго, равен предшествующему биномиальному коэффициенту,

умноженному на показатель степени у буквы x в предшествующем члене (степень x убывает) и делению на число предшествующих ему членов.

6. Из равенства (15) следует, что $C_n^k > C_n^{k-1}$, если $\frac{n+1-k}{k} > 1$, т. е. $k < \frac{n+1}{2}$ и $C_n^k < C_n^{k-1}$, если $\frac{n+1-k}{k} < 1$, т. е. $k > \frac{n+1}{2}$.

Если показатель бинома — число нечетное ($n = 2p + 1$), то биномиальные коэффициенты $C_{2p+1}^0, C_{2p+1}^1, \ldots, C_{2p+1}^p$ возрастают ($p < p+1$), а $C_{2p+1}^{p+1}, C_{2p+1}^{p+2}, \ldots, C_{2p+1}^{2p+1}$ — убывают. Коэффициенты $C_{2p+1}^p = C_{2p+1}^{p+1}$ — наибольшие.

Если показатель бинома — число четное $n = 2p$, то биномиальные коэффициенты $C_{2p}^0, C_{2p}^1, \ldots, C_{2p}^p$ — возрастают, $\left(p < \frac{2p+1}{2}\right)$, а $C_{2p}^p, C_{2p}^{p+1}, \ldots, C_{2p}^{2p}$ — убывают. Разложение имеет один наибольший коэффициент C_{2p}^p.

7. Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n. В самом деле, полагая в формуле (10) $x = a = 1$, имеем

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n.$$

8. Сумма биномиальных коэффициентов членов разложения, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах, и равна 2^{n-1}, т. е.

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}.$$

Доказательство получается из формулы (13), если положить в ней $x = a = 1$.

Используя формулу (10), найдем разложение трехчлена $(x + y + z)$. С этой целью запишем его в виде бинома $[x + (y + z)]^n$, в котором второй член равен $y + z$. Согласно формулам (14) и (12) для $k = 1, 2, \ldots, n$

$$T_{k+1} = C_n^k x^{n-k}(y+z)^k = C_n^k x^{n-k}\left[C_k^0 y^k + C_k^1 y^{k-1} \cdot z + \right.$$
$$+ C_k^2 y^{k-2} z^2 + \ldots + C_k^p y^{k-p} z^p + \ldots + \left. C_k^k z^k\right] = C_n^0 C_n^k x^{n-k} y^k +$$
$$+ C_n^1 C_n^k x^{n-k} y^{k-1} z + \ldots + C_n^p C_n^k x^{n-k} y^{k-p} z^p + \ldots = C_k^k C_n^k x^{n-k} z^k. \quad (16)$$

(Это равенство будет справедливым и при $k = 0$, если принять условие, что $C_0^0 = 1$. Кроме того, $C_k^p = 0$, если $p > k$). Все разложение запишется в виде суммы $T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n+1}$, где каждое T_{k+1} вычисляется по формуле (16).

Отметим некоторые свойства разложения трехчлена.

1. Разложение трехчлена содержит $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ членов. В самом деле, T_1 получается при $k = 0$ и содержит один член x^n, T_2 содержит два члена и т. д. Следовательно, число членов в сумме $T_1 + T_2 + \ldots + T_{n+1}$, среди которых нет подобных (они отличаются, например, степенью x), равно сумме

$$1 + 2 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

2. Сумма показателей при x, y и z в каждом члене разложения равна показателю трехчлена

$$\alpha - k + k - p + p = n.$$

3. Формула общего члена разложения трехчлена:

$$U_{n,k,p} = C_n^k C_k^p x^{n-k} y^{k-p} z^p,$$

где $0 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant p \leqslant k$.

Коэффициент $C_n^k \cdot C_k^p$ называется биномиальным. Вычисляя его по формуле (6), имеем

$$C_n^k C_k^p = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{p!(k-p)!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-p)!p!},$$

тогда

$$U_{n,k,p} = \frac{n!}{(n-k)!(k-p)!p!} x^{n-k} y^{k-p} z^p. \quad (17)$$

§ 3. ЗАДАЧИ

1. Задачи, связанные с определением числа различных способов образования каких-либо групп из заданного множества элементов, относятся к классу так называемых комбинаторных задач. Их решение требует применения логических рассуждений и аппарата теории соединений.

Проиллюстрируем сказанное следующими задачами.

Задача 1. На десяти карточках записаны цифры 0, 1, 2, 3, ... 9. Берут четыре карточки и составляют из цифр, записанных на них, четырехзначное число. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить таким образом?

Решение. Всего различных комбинаций из четырех карточек можно составить столько, сколько существует размещений из 10 элементов по 4. Но условиям задачи не удовлетворяют комбинации цифр, начинающихся нулем. Таких комбинаций будет $A_9^3 = \frac{9!}{6!}$. Вычтя их из общего числа размещений A_{10}^4, получаем искомое:

$$A_{10}^4 - A_9^3 = \frac{10!}{6!} - \frac{9!}{6!} = \frac{9!(10-1)}{6!} = \frac{9!\,9}{6!}.$$

Задача 2. Сколько различных правильных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, так чтобы в каждую дробь входило два числа?

Решение. Очевидно, всего различных дробей из данных чисел можно составить столько, сколько существует размещений из 8 элементов по 2 (A_8^2), но нас интересуют лишь правильные дроби, которых будет в два раза меньше, т. е.

$$\frac{1}{2} \cdot A_8^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 = 28.$$

Эту задачу можно решить иначе,

Любая пара данных чисел образует только одну правильную дробь. Всего же различных пар, в которых первый элемент меньше второго, будет столько, сколько существует сочетаний из 8 элементов по 2, т. е.

$$C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

Задача 3. Сколькими способами можно поставить на книжную полку n книг так, чтобы m определенных книг оказались рядом?

Решение. Пусть m определенных книг оказались в крайнем правом положении. Остальные $n-m$ книг можно расставить $(n-m)!$ способами (число перестановок из $n-m$ элементов). Но m интересующих нас книг можно поставить $m!$ различными способами, так, чтобы они занимали крайнее правое положение. Комбинируя каждую из расстановок «m» интересующих нас книг с расстановками остальных книг, мы имеем $m!(n-m)!$ способов расстановки книг, при которых интересующие нас книги занимают крайнее правое положение. Но группу из m рядом стоящих книг, как единое целое, можно поставить $(n-m+1)$ способами (первая из этих книг занимает первое, второе, ... $(n-m+1)$-ое место). Таким образом, число всех способов расстановки книг равно $(n-m+1)m!(n-m)!$.

Задача 4. Сколько различных вариантов хоккейной команды можно составить из 9 нападающих, 5 защитников и 3 вратарей, если в состав команды должны войти 3 нападающих, 2 защитника и 1 вратарь?

Решение. Из 9 нападающих можно выбрать трех C_9^3 различными способами. Из 5 защитников можно выбрать двух C_5^2 различными способами. Из трех вратарей можно выбрать одного вратаря тремя способами. Комбинируя каждую тройку нападающих с парами защитников, получаем $C_9^3 \cdot C_5^2$ различных команд без вратаря. Комбинируя эти команды с каждым из вратарей, имеем

$$C_9^3 \cdot C_5^2 \cdot 3 = \frac{9!\,5! \cdot 3}{6!\,3!\,3!\,2!} = 2880$$

различных команд.

Задача 5. Некто забыл нужный ему номер телефона, который состоит из одной из десяти букв и пяти цифр, но он помнит, что в образовании этого номера участвуют цифры 2, 3, 6, 7. Какое наибольшее число проб надо сделать, чтобы дозвониться нужному абоненту?

Решение. В искомый телефонный номер должны войти четыре цифры, которые можно разместить на пяти местах $A_5^4 = \frac{5!}{1} = 5!$ различными способами; но пятая цифра может быть любой из 10. Поэтому различных телефонных номеров без букв будет $10 \cdot A_5^4$. Комбинируя эти номера с каждой из десяти букв, получаем

$$10^5 \cdot A_5^4 = 100 \cdot 5! = 12\,000$$

различных проб.

Задача 6. Сколькими способами можно из 40 человек, поступающих в вуз, создать 4 группы разных специальностей по 10 человек в каждой?

Решение. Первую группу можно создать C_{40}^{10} способами. Вторую группу можно создать из оставшихся 30 человек C_{30}^{10} способами. Третью группу можно создать из оставшихся 20 человек C_{20}^{10} способами. Оставшиеся 10 человек составят четвертую группу. Итак, число всех различных способов составления 4-х групп из 40 человек равно

$$C_{40}^{10} \cdot C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10} = \frac{40!}{10!\,30!} \cdot \frac{30!}{10!\,20!} \cdot \frac{20!}{10!\,10!} = \frac{40!}{(10!)^4}.$$

Задача 7. Группа из 14 юношей и 15 девушек решила посетить театр, но в кассе оказалось лишь 20 билетов (12-й ряд с 1 по 20-е место). Сколькими способами можно распределить 20 билетов между юношами и девушками так, чтобы никакие две девушки и два юноши не сидели бы рядом.

Решение. Допустим, 10 юношей займут нечетные места, а девушки четные. В этом случае никакие две девушки не окажутся рядом. Количество способов, которыми можно 10 юношей из 14 рассадить по 10 нечетным местам есть число размещений из 14 по 10 (A_{14}^{10}). 15 девушек при этом по 10 четным местам можно рассадить A_{15}^{10} способами. Таким образом, будет $A_{14}^{10} \cdot A_{15}^{10}$ способов. Такое же число способов будет, если юноши займут четные места, а девушки нечетные. Общее число способов равно $2A_{14}^{10} \cdot A_{15}^{10}$.

2. Уравнение или система, содержащие выражения A_n^m, C_n^m и P_n, где один или оба индекса n и m содержат неизвестное, с помощью формул (1)—(8) сводятся к уравнению или системе, равносильные данным при одном ограничении, что m и n — натуральные.

В некоторых случаях формулу для A_n^m удобно записать в факториальной форме

$$A_n^m = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1} = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (18)$$

Заметим, что из равенства $P_n = P_k$ следует, что $n = k$, из равенства $A_n^l = A_n^t$ следует, что $m = l$, а из равенства $C_n^m = C_n^l$ следует, что либо $m = l$, либо $n - m = l$.

Задача 8. Найти x из уравнения $\frac{P_{x+2}}{A_x^n \cdot P_{x-n}} = 132$, где n — натуральное $\geqslant 10$.

Решение. Согласно формулам (1) и (18) имеем

$$\frac{(x+2)!\,(x-n)!}{(x-n)!\,x!}=132, \text{ или } \frac{(x+2)!}{x!}=132,$$

где $x+2\geqslant 0$, $x-n\geqslant 0$ и $x\geqslant 0$.

Сокращая дробь на $x!$ $[(x+2)!=x!(x+1)(x+2)]$, получаем квадратное уравнение $x^2+3x-130=0$, равносильное данному, если x — натуральное. Решая квадратное уравнение, находим, что $x=10$ (корень $x=-13<0$ отбрасывается).

Задача 9. Найти x из уравнения $x^2C_{x-1}^{x-1}=A_4^2C_{x+1}^2-xC_x^{x-2}$.

Решение. Учитывая, что $A_4^2=12$, перепишем данное уравнение в виде

$$x(x+1)C_{x-1}^{x-2}=12C_{x+1}^2 \quad \text{или} \quad \frac{x}{4}C_{x-1}^{x-4}=\frac{3}{x+1}C_{x+1}^2,$$

где $x\geqslant 4$.

Согласно (6) и (7)

$$\frac{x}{4}C_{x-1}^{x-4}=\frac{x}{4}C_{x-1}^3=C_x^4 \quad \text{и} \quad \frac{3}{x+1}C_{x+1}^2=C_x^2,$$

поэтому уравнение примет вид

$$C_x^4=C_x^2,$$

откуда следует, что $x-4=2$, т. е. $x=6$.

Задача 10. Решить уравнение

$$\frac{1}{C_4^x}-\frac{1}{C_5^x}=\frac{1}{C_6^x}.$$

Решение. Согласно формуле (5) имеем

$$\frac{x!\,(4-x)!}{4!}-\frac{x!\,(5-x)!}{5!}=\frac{x!\,(6-x)!}{6!}.$$

Так как $0<x<4$ ($x=0$ и $x=4$ не удовлетворяют уравнению) и $(6-x)!=(6-x)(5-x)(4-x)!$, то после сокращения на $\frac{x!\,(4-x)!}{4!}$, получаем уравнение $1-\frac{5-x}{5}=\frac{(5-x)(6-x)}{5\cdot 6}$, равносильное данному при условии, что $x<4$ и натуральное. Решая его, находим $x^2-17x+30=0$, откуда $x=2$ ($x=15$ отбрасываем).

Задача 11. Найти x и y из условия:

$$C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^y:C_{x+1}^{y-1}=5:5:3.$$

Решение. Данное условие равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} C_{x+1}^{y+1}=C_{x+1}^y, \\ 3C_{x+1}^y=5C_{x+1}^{y-1}, \end{cases}$$

где $x\geqslant y$ — натуральные числа.

Из первого уравнения следует, что $y+1+y=x+1$, т. е. $x=2y$. Тогда из второго уравнения получаем

$$3C_{2y+1}^y=5C_{2y+1}^{y-1} \quad \text{или} \quad \frac{3(2y+1)!}{y!\,(y+1)!}=\frac{5(2y+1)!}{(y-1)!\,(y+2)!}.$$

Сокращая на общий множитель $\frac{(2y+1)!}{(y+1)!\,(y-1)!}$ (положительный), имеем $3(y+2)=5y$, откуда $y=3$ и $x=6$.

3. Формула $T_{k+1}=C_n^k x^{n-k}a^k$ общего члена бинома $(x+a)^n$ позволяет, не производя всего разложения целиком, записать любой член разложения, если указан его номер, или найти член, имеющий заданный коэффициент, или заданный показатель, если таковые существуют и т. д.

Задача 12. Найти все рациональные члены разложения бинома $(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})^5$.

Решение. Пусть искомый член есть T_{k+1}. Тогда

$$T_{k+1}=C_5^k(\sqrt[3]{3})^{5-k}\cdot(\sqrt{2})^k=C_5^k\cdot 3^{\frac{5-k}{3}}\cdot 2^{\frac{k}{2}},$$

где $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Из этих чисел нужно выбрать такое k, при котором показатели $\frac{5-k}{3}$ и $\frac{k}{2}$ суть целые числа. Очевидно, что $k=2$ и искомый член $T_{3}=C_5^2\cdot 3\cdot 2=60$.

Задача 13. Найти x, если известно, что третий член разложения бинома $(x+x^{\lg x})^5$ равен 1 000 000.

Решение.

$$T_{2+1}=C_5^2\cdot x^{5-2}(x^{\lg x})^2=10x^{3+2\lg x}.$$

По условию

$$10x^{3+2\lg x}=1\,000\,000.$$

Логарифмируя данное равенство по основанию 10 ($x>0$) (см. гл. VIII), получаем уравнение

$$2\lg^2 x+3\lg x-5=0,$$

откуда находим, что $x_1=10$, $x_2=10^{-5/2}$.

Задача 14. Найти коэффициент при x^4 в разложении

$$(1+2x+3x^2)^{10}.$$

Решение. Записав данное выражение в виде $[(1+2x)+3x^2]^{10}$, имеем

$$[(1+2x)+3x^2]^{10}=(1+2x)^{10}+10\cdot 3x^2(1+2x)^9+$$
$$+C_{10}^2 9x^4(1+2x)^8+\ldots$$

Следующие члены не выписываем, так как они содержат x в степени выше четвертой. Выписывая коэффициенты при x^4 у каждого слагаемого правой части, находим

$$C_{10}^4\cdot 2^4+10\cdot 3\cdot C_9^2\cdot 2^2+C_{10}^2\cdot 9=8085.$$

Задача 15. Определить показатель n (n — целое, положительное) разложения $\left(\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\right)^n$ по убывающим степеням величины x, если 10-й от начала член разложения имеет наибольший коэффициент.

Решение.

$$T_{9+1}=C_n^9\left(\frac{1}{5}\right)^{n-9}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^9=C_n^9\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot 2^9.$$

Так как коэффициент этого члена наибольший, а коэффициенты 11 и 9 членов равны соответственно $C_n^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot 2^{10}$ и $C_n^8\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot 2^8$, то

$$\begin{cases} C_n^9\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot 2^9>C_n^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot 2^{10}, \\ C_n^9\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot 2^9>C_n^8\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot 2^8, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_n^9>2C_n^{10}, \\ C_n^9>\frac{1}{2}C_n^8. \end{cases}$$

Раскрывая символы C_n^k и производя все сокращения, получаем

$$\begin{cases} n<14, \\ n>\frac{25}{2}, \end{cases}$$

где n целое.

Таким образом, если решение задачи существует, то оно единственное и равно 13. Остается показать, что решение существует, т. е. $C_{13}^9\cdot 2^9\geqslant C_{13}^k\cdot 2^k$, для всех $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 13$. Беря отношение коэффициентов предыдущего члена к последующему, имеем

$$\frac{C_{13}^k\cdot 2^k}{C_{13}^{k+1}\cdot 2^{k+1}}=\frac{(13-k-1)!\,(k+1)!}{(13-k)!\,k!\,2}=\frac{k+1}{2(13-k)},$$

так как $\frac{k+1}{2(13-k)}<1$ при $k<9$ и $\frac{k+1}{2(13-k)}>1$ при $k>9$, то

отсюда следует, что при $k<9$ коэффициенты членов возрастают, с ростом k при $k>9$ они убывают. Поэтому, коэффициент 10-го члена от начала — наибольший.

Задача 16. Найти показатель бинома $(a+5)^n$ и номер члена, коэффициент которого при степени a равен 853 125, если его биномиальный коэффициент равен 1365.

Решение. Допустим, что искомый номер равен $p+1$. Тогда $T_{p+1}=C_n^p a^{n-p}\cdot 5^p$, причем $C_n^p=1365$, а $C_n^p\cdot 5^p=853\,125$. Отсюда следует, что $5^p=625=5^4$ и $p=4$.

Для определения n имеем уравнение

$$C_n^4=1365 \quad \text{или} \quad n(n-1)(n-2)(n-3)=41\cdot 1365.$$

Разложив 1365 на простые множители

$$1365=13\cdot 7\cdot 5\cdot 3,$$

Тогда

$$n(n-1)(n-2)(n-3)=13\cdot 15\cdot 7\cdot 3\cdot 2^3=15\cdot 14\cdot 13\cdot 12.$$

Так как n целое, то $n=15$. Это решение единственное, так как при $n>15$ величина $n(n-1)(n-2)(n-3)>15\cdot 14\cdot 13\cdot 12$, а при $n<15$ величина $n(n-1)(n-2)(n-3)<15\cdot 14\cdot 13\cdot 12$.

4. Используя формулы (6), (7) и (8), (10) и свойства биномиальных коэффициентов, удается получить ряд соотношений между числами C_n^p.

Задача 17. Вычислить сумму

$$S_n=C_n^0+2C_n^1+2^2\cdot C_n^2+\ldots+2^n\cdot C_n^n.$$

Решение. Согласно формуле (10)

$$(x+2)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}\cdot 2+\ldots+C_n^kx^{n-k}\cdot 2^k+\ldots+C_n^n\cdot 2^n.$$

Полагая $x=1$, имеем

$$3^n=C_n^0+2C_n^1+\ldots+2^kC_n^k+\ldots+2^n\cdot C_n^n.$$

Задача 18. Показать, что при $n>p$

$$C_n^p=C_{n-1}^{p-1}+C_{n-2}^{p-1}+\ldots+C_{p+1}^{p-1}+C_p^{p-1}+C_{p-1}^{p-1}.$$

Решение. Согласно формуле (9)

$$C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k \text{ для любого } 0\leqslant k\leqslant n.$$

Поэтому

$$C_n^p=C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^p,$$
$$C_{n-1}^p=C_{n-2}^{p-1}+C_{n-2}^p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_{p+1}^p=C_p^{p-1}+C_p^p,$$
$$C_p^p=C_{p-1}^{p-1}+0.$$

Складывая левые и правые части всех этих равенств, после приведения подобных получаем

$$C_n^0 - C_{n-1}^0 - C_{n-2}^0 - \ldots - C_2^{n-2} - C_{n-1}^{n-1} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Задача 19. Вычислить сумму

$$S_n = C_n^0 - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^{n-1}}{n} + \frac{C_n^n}{n+1}.$$

Решение. Согласно формуле (8)

$$\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}.$$

Полагая $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, имеем

$$\frac{C_n^0}{1} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^1, \quad \frac{C_n^1}{2} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^2, \quad \ldots,$$

$$\frac{C_n^{n-1}}{n} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^n, \quad \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{n+1},$$

откуда

$$C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1} [C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}].$$

В квадратных скобках стоит сумма всех биномиальных коэффициентов бинома $(x+a)^{n+1}$, кроме первого $C_{n+1}^0 = 1$. По свойству биномиальных коэффициентов она равна $2^{n+1} - 1$ и

$$S_n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Задача 20. Вычислить сумму

$$S_n = C_n^0 - C_n^1 + 2C_n^2 - 3C_n^3 + \ldots + (-1)^n n C_n^n \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Решение. Вновь используя формулу (8) для $n = 1, 2, \ldots, n$, имеем

$$C_n^1 = nC_{n-1}^0, \; 2C_n^2 = nC_{n-1}^1, \; 3C_n^3 = nC_{n-1}^2, \; \ldots,$$

$$nC_n^n = nC_{n-1}^{n-1}.$$

Поэтому

$$S_n = 1 - n[C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1}] = 1,$$

так как по свойству биномиальных коэффициентов выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю.

В некоторых случаях выгодно подобрать такой многочлен, чтобы искомая сумма была коэффициентом при некоторой степени x.

Задача 21. Вычислить сумму

$$S_n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2.$$

Решение. Искомая сумма является коэффициентом при x^n в многочлене

$$Q(x) = (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n) \times$$

$$\times (C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^n).$$

Учитывая, что $C_n^1 = C_n^{n-1}$, имеем

$$Q(x) = (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n)^2 = (1+x)^{2n},$$

причем x^n содержит $(n+1)$-й член

$$T_{n+1} = C_{2n}^n x^n.$$

Следовательно, искомая сумма $S_n = C_{2n}^n$.

ГЛАВА VII
ФУНКЦИЯ

§ 1. ПОСТОЯННАЯ И ПЕРЕМЕННАЯ ВЕЛИЧИНА

В своей практической деятельности человек сталкивается с величинами различной природы: длина, площадь, объем, масса, температура, вес и т. д.

В зависимости от конкретных условий некоторые из этих величин принимают одно и то же постоянное значение, т. е. не меняются; другие, наоборот, принимают различные значения.

Отвлекаемся от физической природы величин и будем рассматривать только их числовые значения.

Те из величин, которые в рассматриваемом процессе принимают различные значения, называются *переменными* (величинами); величины, которые в рассматриваемом процессе сохраняют неизменное значение, называются *постоянными* (величинами).

Переменная величина считается заданной, если указано множество значений, которые она может принимать. Это множество называется областью изменения переменной. Например, остаток от деления натуральных чисел на число 6 есть переменная, которая может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. Последние образуют область изменения остатка. Остаток при делении четного числа на два принимает единственное значение — 0. В данном случае этот остаток есть постоянная величина.

Вообще, постоянную величину можно рассматривать как частный случай переменной, область изменения которой состоит из одного числа.

Область изменения переменной (величины) может быть самой разнообразной природы. Для некоторых из них, наиболее важных и часто встречающихся, введены специальные названия и обозначения.

Числовой *отрезок* $[a, b]$ — множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leqslant x \leqslant b$.

Числовой *интервал* (a, b) — множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$.

Числовые *полуинтервалы* $[a, b)$ или $(a, b]$ — множество действительных чисел, удовлетворяющих соответственно неравенствам $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$.

Бесконечные промежутки (a, ∞), $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$ — множество всех действительных чисел, удовлетворяющих соответственно

неравенствам $a < x < \infty$, $-\infty < x < b$, $-\infty < x < \infty$ и $[a, \infty)$ и $(-\infty, b]$ — множество всех действительных чисел, удовлетворяющих соответственно неравенствам $a \leqslant x < \infty$ или $-\infty < x \leqslant b$.

§ 2. ФУНКЦИЯ

Математика изучает не изменение каждой переменной в отдельности, а зависимость между ними в процессе их изменения. Так, например, при изменении радиуса шара, меняется и его объем, но мы не изучаем изменение каждой из этих величин в отдельности, а рассматриваем вопрос об изменении объема шара в зависимости от изменения его радиуса.

Совместно могут изменяться несколько переменных величин (например, объем, радиус основания и высота конуса). Мы рассмотрим самый простой случай двух совместно изменяющихся переменных величин. Выражение «две совместно изменяющиеся переменные величины» мы употребляем в том смысле, что каждое значение одной из них вполне определяется значением другой.

Определение. Если в силу некоторого закона каждому значению переменной x, изменяющейся на множестве E, отвечают определенные значения y, то y называется *функцией* от x.

Переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом функции*, множество E — *областью задания* или *областью определения функции*.

Множество всех значений, которые принимает функция, называется *областью изменения функции*.

Если каждому x из области задания функции соответствует единственное значение y, последняя называется *однозначной*. В противном случае функция называется *многозначной*. В математике обычно рассматриваются только однозначные функции (если не сделано дополнительных оговорок).

Для указания того, что y есть функция от x, употребляют запись вида $y=f(x)$ или $y=g(x)$, или $y=y(x)$ и т. д. Буквы f, g, y и т. д. символизируют закон, по которому получается значение y, соответствующее данному значению x. Если нужно указать значение y_0, отвечающее выбранному значению x_0, то пишут $y_0=f(x_0)$, или $y_0=g(x_0)$, или $y_0=y(x_0)$ и т. д.

Рассмотрим частный случай функции, когда область ее задания состоит из всех натуральных чисел, т. е. $x=1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. В этом случае вместо $y=f(n)$ пишут y_n. Когда n пробегает все свои значения, функция $y=f(n)$ принимает значения $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$. Функция натурального аргумента называется *последовательностью* (см. гл. V, § 1).

§ 3. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Задать функцию $y=f(x)$ на множестве E, это значит указать закон, по которому для каждого x из E получается соответствующее ему значение y. Из различных возможных способов задания

функции остановимся на трех.

1. Аналитический способ. Этот способ состоит в том, что задается формула, т. е. последовательность математических операций, которые нужно произвести над аргументом x, чтобы получить значение функции. При этом функция может задаваться одной формулой во всей области ее задания, или несколькими, различными для разных частей области ее задания, например,

$$y = x^2 + 2x - 1,$$

$$y = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{если } x < 0, \\ x + 1, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

В общем случае, если нет специальной оговорки, за область определения функции, заданной аналитически, принимают область существования соответствующего аналитического выражения, т. е. множество значений x, для которых это выражение имеет смысл *. Так функция $y = \pi x^2$ определена на всей числовой оси, как и задающее ее аналитическое выражение. Но если эта функция выражает зависимость площади круга от величины радиуса (т. е. $x = R$, $y = S$), то функция $S = \pi R^2$ задана в области $R > 0$.

Область задания функции $y_n = \frac{1}{n^2 + 1}$ есть множество всех натуральных чисел, в то время как аналитическое выражение $\frac{1}{x^2 + 1}$ имеет смысл для всех действительных значений x, а не только для натуральных.

2. Табличный способ. Этот способ состоит в том, что записываются в виде таблицы значения аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и соответствующие им значения функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Такое задание функции наиболее употребительно во время опытов, когда хотят найти зависимость между некоторыми величинами. Недостаток табличного задания функции состоит в том, что таблица полностью не задает функцию, так как не известны ее значения в точках, не вошедших в таблицу. Удобство таблицы в том, что по ней сразу, без вычислений, находятся значения функции, соответствующие тем значениям аргументов, которые помещены в таблицу. Поэтому таблица употребляется и как способ представления известных функций.

Так, нам хорошо знакомы таблицы логарифмов, тригонометрических функций, степеней чисел и др.

3. Графический способ. Пусть $y = f(x)$ есть функция от x, заданная на множестве E. Это означает, в силу определения функции, что каждому значению x из E соответствует определенное значение y. Каждую такую пару x и y будем рассматривать как абсциссу и ординату точки M в некоторой выбранной прямоугольной системе координат (см. гл. I, § 4). Геометрическое место всех таких точек называется *графиком* рассматриваемой функции (рис. 21).

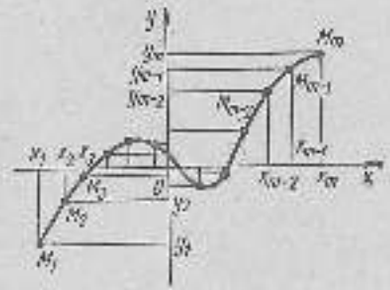


Рис. 21

Графический способ задания функции очень употребителен в экспериментальных работах, особенно там, где используются самопишущие приборы. Получив соответствующую кривую, по ней изучают ту зависимость, которую «задает» этот график. График является удобным представлением функции, когда она задана аналитическим или табличным способом. Наглядность графика является хорошим средством для иллюстрации и исследования свойств функции. Простейших способов построения графика функции является так называемый способ построения по точкам.

Составляют таблицу

x	x_1	x_2	x_3	.	.	.	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	y_3	.	.	.	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n

и затем наносят на чертеж точки $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{n-2}, M_{n-1}, M_n$ с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)$ соответственно. Эти точки соединяют плавной кривой, которая с некоторым приближением, иногда весьма грубым, изображает график функции (рис. 21). Чем больше число взятых точек, тем точнее полученная кривая воспроизводит график функции.

§ 4. ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых двух различных значений аргумента из области ее определения, отличающихся только знаком, ее значения совпадают, т. е. $f(-x) = f(x)$. Этим свойством обладают, например, функции $y = x^n$, $y = |x|$, $y = 5$ и т. д.

В самом деле, $(-x)^2 = x^2$, $|-x| = |x|$, $y = 5$ для всех x, в частности, для x и $-x$.

Сумма, разность, произведение и частное четных функций есть также четная функция.

Действительно, если $y = f(x)$ и $y = g(x)$ * — четные функции, то для их суммы $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ и произведения $\psi(x) = f(x) \cdot g(x)$

* В предыдущих главах мы называли это множество «множеством допустимых значений».

* Речь идет в одном тексте о различных функциях. Поэтому их надо обозначать различными буквами f, g, φ, ψ и т. д.

имеем: 1) $\varphi(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=\varphi(x)$, т. е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

2) $\psi(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=\psi(x)$, т. е. $\psi(-x)=\psi(x)$.

Аналогично для разности и частного.

Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если значения функций, вычисленные для двух любых значений аргумента из области задания функции, отличающихся только знаком, также отличаются только знаком, т. е. $f(-x)=-f(x)$.

К нечетным функциям относятся, например, $y=x^3$, $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ и т. д. В самом деле $(-x)^3=-x^3$, $\dfrac{-x}{(-x)^2+1}=-\dfrac{x}{x^2+1}$.

Сумма и разность нечетных функций есть функция нечетная, а произведение и частное нечетных функций — функция четная. Так, например, если $f(x)$ и $g(x)$ нечетные функции, то для их суммы $\psi(x)=f(x)-g(x)$ и произведения $\psi(x)=f(x)\cdot g(x)$ имеем:

$$\psi(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-[f(x)+g(x)]$$

т. е. $\psi(-x)=-\psi(x)$.

$$\psi(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=-f(x)\cdot[-g(x)]=f(x)\cdot g(x),$$

т. е. $\psi(-x)=\psi(x)$.

Предлагаем читателю доказать, что произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.

Однако не надо думать, что каждая функция является четной или нечетной. Большинство функций не относятся ни к одному из этих классов. Например, такова функция $y=x^3+1$. В самом деле $(-x)^3+1=-x^3+1$, т. е. $(-x)^3+1\neq-(x^3+1)$ и также $(-x)^3+1\neq x^3+1$.

Вообще, сумма двух функций различной четности не является четной, а также нечетной функцией (доказать!).

Заметим, что если функция $y=f(x)$ четная или нечетная, то область ее задания обязательно симметрична относительно центра O: если x принадлежит области задания, то $-x$ также принадлежит этой области. По этой причине радикалы с четными показателями $2n\left(y=\sqrt[2n]{x}\right)$ не могут быть четными или нечетными функциями, так как их область задания $x\geqslant 0$ не симметрична относительно центра O (см. § 9).

Из определения четных и нечетных функций вытекает, что *график четной функции симметричен относительно оси Oy, а нечетной — относительно центра O.*

В самом деле, пусть точка $M(x_0, y_0)$ лежит на графике четной функции $y=f(x)$, т. е.

$$y_0=f(x_0). \qquad (1)$$

Рассмотрим точку $N(-x_0, y_0)$ (рис. 22), симметричную точке M относительно оси Oy.

В силу четности данной функции и равенства (1)

$$f(-x_0)=f(x_0)=y_0,$$

а это означает, что точка $N(-x_0, y_0)$ также принадлежит графику функции $y=f(x)$.

Аналогично доказывается, что график нечетной функции симметричен относительно начала системы координат (рис. 23).

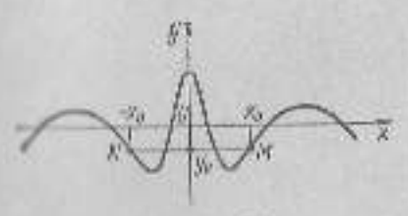


Рис. 22

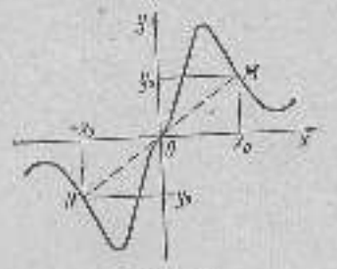


Рис. 23

Таким образом, график четной (нечетной) функции достаточно построить для $x\geqslant 0$, а затем эту кривую симметрично отобразить относительно оси Oy (начала системы координат).

Свойства четности и нечетности связаны с областью задания функции. Так, например, функция $y=x^3$, заданная на отрезке $[-1, 2]$ не является четной на нем (хотя бы потому, что этот отрезок не симметричен относительно начала O). Однако эта функция четная на части этого отрезка, например на отрезке $[-1, 1]$.

§ 8. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T\neq 0$, такое, что для каждого значения аргумента x из области ее задания имеют место равенства $f(x+T)=f(x)$ и $f(x-T)=f(x)$.

Число T, прибавление или вычитание которого из аргумента x не меняет значение функции $y=f(x)$, называется *периодом* этой функции.

Из этого определения вытекает, что если T есть период функции, то числа kT ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) также являются ее периодом. Действительно,

$$f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=\ldots=f(x+kT)$$

и

$$f(x)=f(x-T)=f(x-2T)=\ldots=f(x-kT).$$

Наименьший положительный период, если он существует, называется *основным* периодом. Например, основной период функций $\sin x$ и $\cos x$ равен 2π, основной период функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ равен π (см. гл. IX, § 3).

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если T основной период функции $y=f(x)$, то число $\frac{T}{\omega}$ является основным периодом функции $y=f(\omega x)$.*

(Запись $f(\omega x)$ означает, что в выражении $f(x)$ все x заменены на ωx. Например, если $f(x)=x^2+\sqrt{x}+2\sin x+1$, то $f(\omega x)=(\omega x)^2+\sqrt{\omega x}+2\sin\omega x+1$.)

Доказательство. Положим

$$f(\omega x)=\varphi(x). \tag{1}$$

Тогда для любого числа $x+l$, принадлежащего области определения функции $\varphi(x)$, имеем

$$\varphi(x+l)=f[\omega(x+l)]=f(\omega x+\omega l). \tag{2}$$

Так как T основной период функции $f(x)$, то наименьшее положительное число, при котором $f(\omega x+\omega l)=f(\omega x)$ есть $\omega l=T$. Тогда согласно (1) и (2) получаем

$$\varphi(x+l)=f(\omega x+\omega l)=f(\omega x)=\varphi(x).$$

Последнее означает, что $l=\frac{T}{\omega}$ есть основной период функции $\varphi(x)=f(\omega x)$.

Аналогично

$$\varphi(x-l)=f(\omega x-\omega l)=f(\omega x)=\varphi(x) \text{ при } l=\frac{T}{\omega}.$$

Например, основной период функции $\sin 2x$ равен $\frac{2\pi}{2}=\pi$, а функции $\sin\frac{x}{2}$ равен $2\pi:\frac{1}{2}=4\pi$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ периодические с периодами T_1 и T_2 соответственно, то число T, кратное T_1 и T_2, является периодом их суммы, произведения, разности и частного.

В самом деле, пусть $T=kT_1$ и $T=mT_2$, где k и m — натуральные числа. Число T, по доказанному ранее, есть период каждой из функций $f(x)$ и $g(x)$. Тогда для функции $\varphi(x)=f(x)+g(x)$ имеем

$$\varphi(x+T)=f(x+T)+g(x+T)=f(x+kT_1)+g(x+kT_2)=$$
$$=f(x)+g(x)=\varphi(x).$$

Для частного $\psi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ имеем

$$\psi(x+T)=\frac{f(x+T)}{g(x+T)}=\frac{f(x+kT_1)}{g(x+mT_2)}=\frac{f(x)}{g(x)}=\psi(x) \text{ и т. д.}$$

Используя это свойство, найдем период функции

$$y=\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{3}.$$

Период первого слагаемого $\left(\cos\frac{3x}{2}\right)$ равен $\frac{4\pi}{3}$, период второго слагаемого $\left(\sin\frac{x}{3}\right)$ равен 6π. Число $T=12\pi$ кратно $T_1=\frac{4\pi}{3}$ и $T_2=6\pi$ ($12\pi=9T_1$ и $12\pi=2T_2$). Следовательно, число 12π есть период функции

$$y=\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{3}.$$

Замечание. Не следует считать, что если T_1 и T_2 основные периоды функций $f(x)$ и $g(x)$, то число T, являющееся наименьшим общим кратным T_1 и T_2, всегда является основным периодом функций $f(x)+g(x)$ и $f(x)\cdot g(x)$. Например, основной период функций $\sin x$ и $\cos x$ есть 2π, а основной период их произведения $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ равен π.

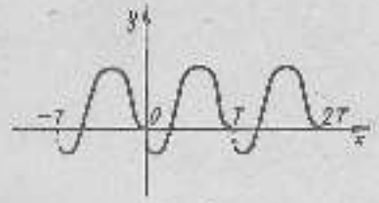


Рис. 24

График периодической функции с основным периодом T достаточно построить на любом отрезке длины T, например на $[0, T]$, а затем сдвигать эту кривую вправо и влево на отрезки $T, 2T, \ldots$ (рис. 24).

§ 6. ОГРАНИЧЕННЫЕ И НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ФУНКЦИИ. МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной* в области своего задания E, если существует такое положительное число M, что для всех x из области E, значения $f(x)$ по абсолютной величине не превосходят этого числа M, т. е. $|f(x)|\leqslant M$.

В противном случае функция называется *неограниченной*. Если функция неограничена, то какое бы число $M>0$ мы ни взяли, всегда найдется в области E такое x_0, что $|f(x_0)|>M$. Например, функция $y=\frac{1}{1+x^2}$ — ограниченная, так как $\left|\frac{1}{1+x^2}\right|\leqslant 1$ для всех действительных значений x. К ограниченным функциям относятся также тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$, $y=\sqrt{a^2-x^2}$ (a — постоянная) и др. На рис. 25 приведены графики ограниченной и неограниченной функций. График ограниченной функции целиком лежит внутри полосы $y=M$, $y=-M$, так как неравенство $|f(x)|\leqslant M$ равносильно неравенству $-M\leqslant f(x)\leqslant M$ (см. гл. 1, § 4).

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на некотором промежутке, конечном или бесконечном (см. § 1), если для любых двух значений x из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. из

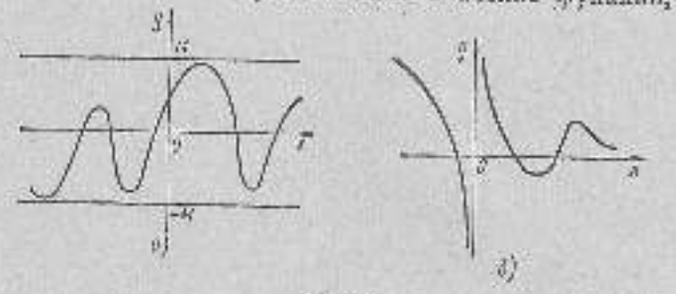


Рис. 25

условия $x_1<x_2$ следует, что $f(x_1)<f(x_2)$ для любых x_1 и x_2 данного промежутка.

Функция называется *убывающей* на некотором промежутке, если из условия $x_1<x_2$ следует, что $f(x_1)>f(x_2)$ для любых x_1 и x_2 этого промежутка.

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными* функциями.

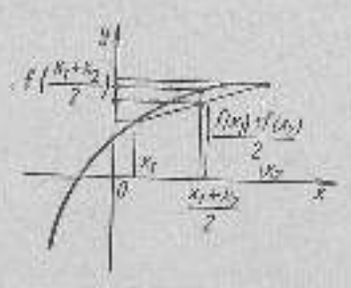


Рис. 26

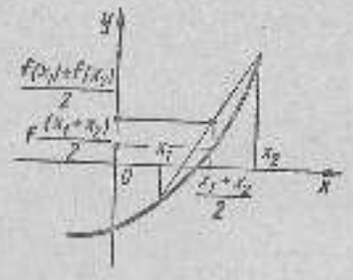


Рис. 27

Замечание. При построении графика функции полезно использовать такие характеристики поведения кривой, как выпуклость и вогнутость и наличие асимптот.

Определение 3. Если для любых точек x_1 и x_2 из некоторого промежутка справедливо неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \qquad (1)$$

то кривая, определяемая уравнением $y=f(x)$, называется выпуклой на этом промежутке.

Неравенство (1) означает, что середина любой хорды кривой $y=f(x)$ лежит ниже точки кривой с той же абсциссой $\frac{x_1+x_2}{2}$ (рис. 26). Если же для любых x_1 и x_2 из некоторого промежутка

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \qquad (2)$$

то кривая, определяемая уравнением $y=f(x)$, называется вогнутой на этом промежутке.

В этом случае середина любой хорды кривой лежит выше соответствующей точки ее дуги (рис. 27).

Определение 4. Прямая линия называется *асимптотой* кривой, если расстояние от точки кривой до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Асимптоты разделяются на горизонтальные, вертикальные и наклонные (рис. 28).

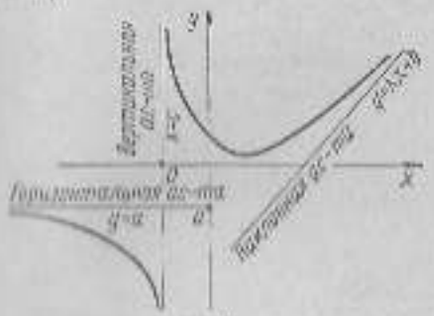


Рис. 28

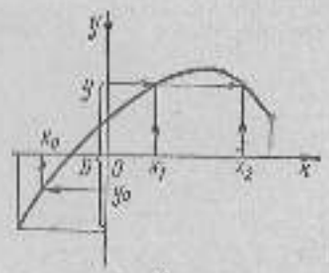


Рис. 29

§ 7. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

Пусть на некотором промежутке E задана функция $y=f(x)$ и D — область ее изменения.

Возьмем какое-нибудь число y_0 из области D. В области E обязательно найдется хотя бы одно число x_0, при котором наша функция принимает именно значение y_0, так что $y_0=f(x_0)$. Чтобы получить это значение x_0, достаточно через y_0 на оси ординат (рис. 29) провести прямую, параллельную оси абсцисс. Эта прямая пересечет график функции $y=f(x)$ в одной или нескольких точках. Абсциссы этих точек и дают искомые значения x (одно из них x_0), при которых функция равна y_0. Таким образом, каждому значению y_0 из области D соответствует одно или несколько значений x, принадлежащих промежутку E. Этим определяется в области D однозначная (если каждому y из D соответствует единственное значение x из E) или многозначная функция $x=g(y)$, которая называется обратной для функции $y=f(x)$.

График функции $y=f(x)$ и обратной для нее функции $x=g(y)$ совпадают, только аргумент обратной функции рассматривается на оси Oy. Но если, следуя нашим привычкам, аргумент обозначать буквой x и откладывать его на оси абсцисс, т. е. вместо уравнения $x=g(y)$ писать уравнение $y=g(x)$, то график функции $y=g(x)$ будет отличным от графика функции $y=f(x)$. Покажем, что графики функции $y=f(x)$ и обратной ей функции $y=g(x)$ симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов. В самом деле, пусть

точка $M(a, b)$ принадлежит графику функции $y=g(x)$ (рис. 30). Это значит, что справедливо равенство

$$b=g(a). \qquad (1)$$

Рассмотрим точку $N(b, a)$. Ее координаты удовлетворяют уравнению $x=g(y)$, так как согласно (1)

$$b=g(a).$$

Следовательно, точка $N(b, a)$ лежит на графике функции $x=g(y)$ или $y=f(x)$, так как эти графики совпадают.

Докажем, что точки $M(a, b)$ и $N(b, a)$ симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов. С этой целью соединим центр O с точками M и N и рассмотрим прямоугольные треугольники MOM_1 и NON_1. Так как $M_1O=N_1O=|b|$, а $M_1M=N_1N=|a|$, то эти треугольники равны. Из их равенства вытекает, что $MO=NO$, $\angle MOM_1=\angle NON_1$. Следовательно, $\triangle MON$ — равнобедренный и прямая OC — биссектриса I и III координатных углов является его биссектрисой, так как $\angle MOC=\angle NOC$ (дополнения равных углов до 45°). Но тогда OC является также медианой и высотой, т. е. $MN\perp OC$ и $MC=CN$. Последнее и означает, что точки M и N симметричны относительно биссектрисы OC.

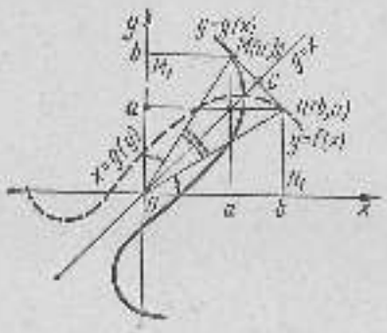


Рис. 30

Итак, каждая точка M графика обратной функции $y=g(x)$ симметрична некоторой точке графика $y=f(x)$ и, как легко показать, обратно: каждая точка графика $y=f(x)$ симметрична некоторой точке графика $y=g(x)$. Поэтому весь график $y=g(x)$ симметричен графику $y=f(x)$ относительно биссектрисы I и III координатных углов.

Если функция $y=f(x)$ монотонна в промежутке L, то указанная прямая $y=y_0$, где $y_0\in D$, пересекает ее график лишь в одной точке. Это значит, что каждому значению y из области D соответствует единственное значение x, т. е. обратная функция $x=g(y)$ — однозначна.

В случае, когда $y=f(x)$ немонотонная, обратная функция $x=g(y)$ — многозначна, так как некоторым значениям y будет соответствовать несколько значений x.

Все эти рассуждения помогут понять смысл следующей важной теоремы.

Теорема. *Если $y=f(x)$ возрастает (или убывает) на промежутке L и D — множество всех ее значений (область изменения функции), то обратная ей функция $y=g(x)$ определена в области D, однозначна и также возрастает (или убывает).*

Доказательство этой теоремы дается в курсе высшей математики.

Замечание. Если уравнение $y=f(x)$ можно разрешить относительно x, т. е. получить уравнение $x=g(y)$, то, очевидно, функция $y=g(x)$ является обратной по отношению к функции $y=f(x)$.

Например, пусть $y=\dfrac{x}{x+1}$ — заданная функция. Выразив x через y, найдем, что

$$x=\frac{y}{1-y}.$$

Следовательно, функция $y=\dfrac{x}{1-x}$ будет обратной относительно заданной $y=\dfrac{x}{x+1}$.

§ 8. ПРОСТЕЙШИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ

Пусть нам известен график функции $y=f(x)$ и $a>0$.

Сдвинем все точки этого графика параллельно оси Ox на отрезок, равный a единиц вправо. Тогда мы получим некоторую новую кривую (рис. 31). Если $M(x_0, y_0)$ — произвольная точка графика $y=f(x)$, т. е.

$$y_0=f(x_0), \qquad (1)$$

то после сдвига она перейдет в точку N с координатами $x=x_0+a$, $y=y_0$. Отсюда следует, что $x_0=x-a$, $y_0=y$ и согласно (1)

$$y=f(x-a).$$

Последнее означает, что сдвинутая кривая есть график уравнения $y=f(x-a)$.

Итак, мы получили следующее правило.

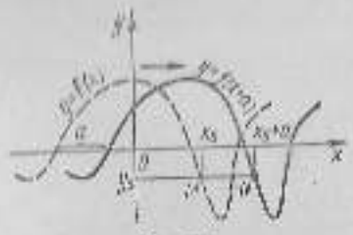


Рис. 31

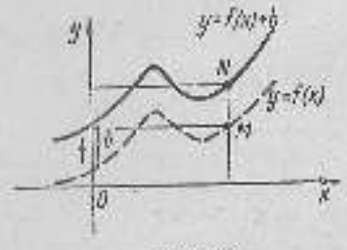


Рис. 32

Правило 1. График функции $y=f(x-a)$ ($y=f(x+a)$) получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом последнего вдоль оси Ox на a единиц вправо (влево), $a>0$.

Сдвинем все точки графика $y=f(x)$ параллельно оси Oy на $b<0$ единиц вверх (рис. 32). После этого сдвига мы получим на-

вую кривую. Рассуждая так же, как в случае сдвига вдоль оси Ox, убедимся, что эта кривая будет графиком функции $y=f(x)+b$. Таким образом, справедливо:

Правило II. График функции $y=f(x)+b$ ($y=f(x)-b$) получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом последнего вдоль оси Oy на b единиц вверх (вниз), $b>0$.

Заметим, что оба правила можно объединить в одно правило.

Правило III. График функции $y=f(x-a)+b$ получается из графика функции $y=f(x)$ путем двух параллельных сдвигов последнего: вдоль оси Ox на $|a|$ единиц (вправо, если $a>0$ и влево, если $a<0$) и затем вдоль оси Oy на $|b|$ единиц (вверх, если $b>0$ и вниз, если $b<0$).

II. Умножим абсциссу каждой точки графика $y=f(x)$ на число $\frac{1}{a}$, не меняя при этом ее ординаты. Тогда каждая точка $M(x_0, y_0)$ графика $y=f(x)$ перейдет в новую точку N, координаты которой (рис. 33)

$$x=\frac{x_0}{a};\quad y=y_0.$$

Такое преобразование называется *сжатием* вдоль оси Ox с коэффициентом $a>0$.

Так как $y_0=f(x_0)$, а $x_0=ax$ и $y_0=y$, то $y=f(ax)$.

Последнее означает, что кривая, полученная в результате преобразования сжатия графика $y=f(x)$, будет графиком функции $y=f(ax)$ (на рис. 33 $a=2$).

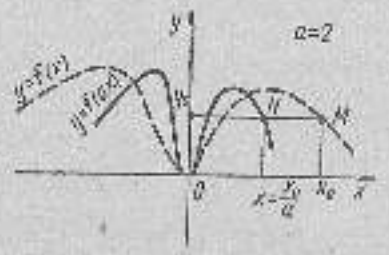


Рис. 33

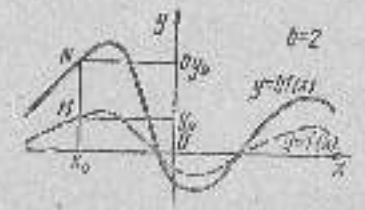


Рис. 34

Правило IV. График функции $y=f(ax)$, где $a>0$, получается из графика $y=f(x)$ сжатием последнего вдоль оси Ox с коэффициентом, равным a.

Умножим теперь ординату каждой точки графика $y=f(x)$ на число $b>0$, не меняя при этом ее абсциссы. Это преобразование называется *растяжением* вдоль оси Oy с коэффициентом, равным b. Полученная кривая, как легко показать, будет графиком функции $y=bf(x)$ (рис. 34).

Правило V. График функции $y=bf(x)$ получается из графика $y=f(x)$ растяжением последнего вдоль оси Oy с коэффициентом $b>0$.

Замечание. При $a<1$, очевидно, $\frac{x}{a}>x$, т. е. абсцисса x увеличивается (по существу график растягивается, а не сжимается). Аналогично $by<y$ при $b<1$, т. е. ордината уменьшается (кривая сжимается к оси Ox, а не растягивается). Однако в любом случае умножение координаты на число называется растяжением, а деление ее на число — сжатием.

III. От каждой точки $M(x_0, y_0)$ графика $y=f(x)$ перейдем к точке N, симметричной M относительно оси Oy (рис. 35). Очевидно, что координаты точек M и N связаны соотношениями

$$x=-x_0,\ y=y_0.$$

Но тогда $y=f(-x)$. Это означает, что геометрическое место точек N образует график уравнения

$$y=f(-x).$$

Правило VI. График функции $y=f(-x)$ получается из графика $y=f(x)$ симметричным отображением последнего относительно оси Oy (рис. 35).

Правило VII. График функции $y=-f(x)$ получается из графика $y=f(x)$ симметричным отображением последнего относительно оси Ox (рис. 36).

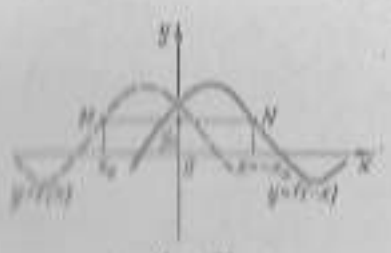


Рис. 35

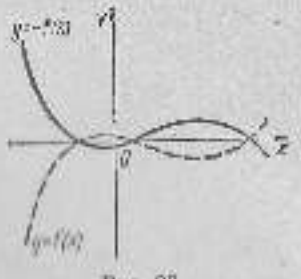


Рис. 36

§ 9. ОБЗОР СВОЙСТВ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ. ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ

Функция $y=f(x)$ называется *элементарной*, если при вычислении ее значений применяются и притом в конечном числе лишь следующие операции: сложение, вычитание, умножение и деление; возведение в произвольную степень и извлечение корня произвольной степени; взятие логарифма числа по произвольному положительному основанию; нахождение синуса, косинуса, тангенса, котангенса, арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса числа.

В общем случае исследование функции проводится по следующему плану.

1. Находят область определения и область изменения функции.

2. Проверяют, не является ли функция четной, нечетной, периодической.

3. Находят промежутки монотонности и промежутки знакопостоянства функции.

4. Определяют наибольшее и наименьшее значения функции и т. д.

После этого анализа нужно построить график функции. При этом следует дополнительно к уже рассматриваемым свойствам:

1) определить точки пересечения графика с осями координат (для того чтобы найти точки пересечения с осью Ox, решаем уравнение $f(x)=0$; для нахождения точек пересечения с осью Oy полагаем $x=0$ и вычисляем значение $f(0)$);

2) найти промежутки выпуклости и вогнутости графика;

3) выяснить, имеет ли прямая, определяемая уравнением $y=f(x)$, асимптоты.

В некоторых случаях проще построить график функции, а затем, исследуя его, выяснить свойства функции.

I. Линейная функция $y=kx+b$.

1) Рассмотрим частный случай, когда $k=0$. Тогда

$$y=b.$$

Эта функция определена на всей оси Ox и для каждого x принимает одно и то же постоянное значение b. Следовательно, ее график есть прямая, параллельная оси Ox (рис. 37) и отстоящая от нее на $|b|$ единиц (вверх, если $b>0$ и вниз, если $b<0$). При $b=0$ графиком функции $y=0$ является ось абсцисс.

2) При $b=0$, $y=kx$. Такое соотношение между x и y при $k\neq 0$ называется *прямой пропорциональной зависимостью*. Эта функция определена всюду. Она монотонно возрастает при $k>0$ и убывает при $k<0$.



Рис. 37

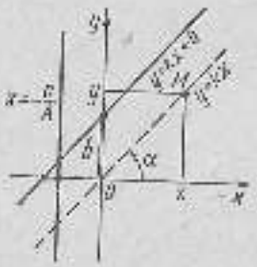


Рис. 38

Для построения его графика заметим, что точка $(0, 0)$ удовлетворяет данному уравнению. Для всякой другой его точки $M(x, y)$ будет справедливо равенство $\frac{y}{x}=k$. Но $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, образуемый прямой OM с положительной полуосью абсцисс (он отсчитывается от положительной полуоси против часовой стрелки, рис. 38).

Обратно, всякая точка, лежащая на прямой, проходящей через начало координат под углом α к положительной полуоси Ox, удовлетворяет уравнению $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha=k$ или $y=kx$. Следовательно, график прямой пропорциональной зависимости есть прямая, проходящая через начало координат.

Угол α наклона этой прямой определяется коэффициентом k ($k=\operatorname{tg}\alpha$), который называется *угловым коэффициентом* прямой.

3) Общий случай: $y=kx+b$. График этой функции можно получить из графика функции $y=kx$ параллельным сдвигом последнего вдоль оси Oy на отрезок $|b|$ (вверх, если $b>0$, и вниз, если $b<0$, см. правило II, § 8). При этом преобразовании мы вновь получаем прямую с угловым коэффициентом k, отсекающую на оси Oy отрезок величины $|b|$ (вверх от точки O, если $b>0$, и вниз, если $b<0$).

Для построения этой прямой достаточно найти любые две ее точки, например, точки пересечения с координатными осями (рис. 38).

Пример. Построить график функции $y=5x+1$.

Решение. График этой функции есть прямая. Найдем точки ее пересечения с осями Ox и Oy. Если $y=0$, то $x=-\frac{1}{5}$, если $x=0$, то $y=1$. Следовательно, эта прямая проходит через точки $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$ и $(0,1)$ (рис. 39).

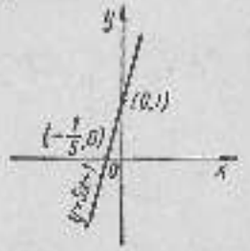


Рис. 39

Следствие. Уравнение $Ax+By+C=0$ (A и B — одновременно не равны нулю) определяет прямую.

Действительно, если $B\neq 0$, то уравнение можно записать в виде $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}=kx+b$, где $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$. Если же $B=0$ ($A\neq 0$), то уравнение принимает вид $Ax+C=0$ или $x=-\frac{C}{A}=b$. И в том, и в другом случае, мы получаем прямую.

II. **Дробно-линейная функция** $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c, d — постоянные, причем $c\neq 0$ (иначе мы имели бы линейную функцию) и $ad\neq bc$ (иначе произошло бы сокращение и мы получили бы функцию вида $y=\text{const}$).

Сначала рассмотрим более простой случай.

1. Обратная пропорциональная зависимость $y=\frac{k}{x}$ ($k\neq 0$).

Разберем случай $k>0$:

1) функция определена всюду, кроме $x=0$, т. е. область ее определения — интервалы $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$;

2) функция нечетная, так как $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$, т. е. начало координат служит центром симметрии и поэтому дальнейшее исследование проводим для $x > 0$;

3) знак y совпадает со знаком x;

4) функция убывающая, так как для $x_1 < x_2$ имеем $\frac{k}{x_1} > \frac{k}{x_2}$, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$;

когда x стремится к нулю, оставаясь больше нуля, значения y неограниченно возрастают.

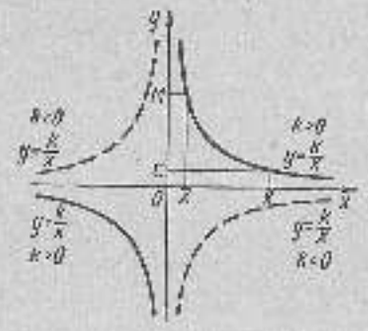


Рис. 40

Какое бы число $M > 0$ мы ни взяли, всегда можно указать такое значение $\overline{x}$, что для $0 < x < \overline{x}$ значения $\frac{k}{x}$ превзойдут M, т. е. $\frac{k}{x} > M$ (рис. 40). Тогда говорят, что $y = \frac{k}{x}$ стремится к положительной бесконечности при $x \to 0$ и $x > 0$ и пишут

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{k}{x} = +\infty.$$

График неограниченно приближается к оси Oy, нигде ее не пересекая: ось Oy является асимптотой. При возрастании x значения y неограниченно уменьшаются, оставаясь при этом положительными (рис. 40).

Какое бы малое число ε мы ни взяли, можно найти такое значение $\overline{x}$, что для $x > \overline{x}$ значения $\frac{k}{x} < \varepsilon$. Тогда говорят, что $y = \frac{k}{x}$ стремится к нулю при x, стремящемся к бесконечности, и пишут $\lim_{x \to \infty} \frac{k}{x} = 0$.

График неограниченно приближается к оси Ox, нигде ее не пересекая: ось Ox является асимптотой. График вогнутый. Действительно, неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\frac{2k}{x_1 + x_2} < \frac{k}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) \text{ или } \frac{4}{x_1 + x_2} < \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2},$$

или $4x_1x_2 < (x_1 + x_2)^2$, или $(x_1 - x_2)^2 > 0$, что очевидно.

Используя все эти свойства, строим график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ (рис. 40). Полученная кривая называется гиперболой, она состоит из двух ветвей, расположенных в I и III координатных углах (квадрантах).

График функции $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$ получается из графика $y = \frac{|k|}{x}$ симметричным отображением последнего относительно оси Ox. Эта кривая также называется гиперболой: ее ветви расположены во II и IV координатных углах (рис. 40).

2. Общий случай: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$. Функция стремится к бесконечности при $x = -\frac{d}{c}$. Для построения ее графика преобразуем правую часть равенства. Разделив числитель на знаменатель, выделим целую часть:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a\left(x + \frac{d}{c} - \frac{d}{c}\right) + b}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left(x + \frac{d}{c}\right) + \left(b - \frac{ad}{c}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} =$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}.$$

Полагая $k = \frac{bc - ad}{c^2}$, $m = \frac{d}{c}$, $n = \frac{a}{c}$ убеждаемся, что дробно-линейную функцию всегда можно привести к виду

$$y = n + \frac{k}{x + m}.$$

Согласно правилу III, § 8, график функции $y = n + \frac{k}{x + m}$ можно получить сдвигом гиперболы $y = \frac{k}{x}$ на $|m|$ единиц вдоль оси Ox и на $|n|$ единиц вдоль оси Oy в том или ином направлении в зависимости от знаков m и n (рис. 41).

При этом сдвиге асимптоты гиперболы $y = \frac{k}{x}$ (координатные оси) перейдут в прямые $x = -m\left(x = -\frac{d}{c}\right)$ и $y = n\left(y = \frac{a}{c}\right)$. Эти прямые будут асимптотами дробно-линейной функции.

Для более точного построения ее графика целесообразно найти точки его пересечения с координатными осями. Итак, график дробно-линейной функции есть гипербола (смещенная).

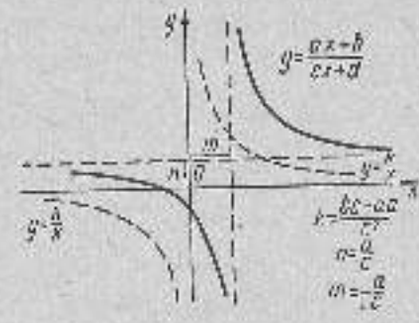


Рис. 41

Пример. Построить график функции $y = \frac{4x+1}{2x-3}$.

Решение. Выделяя целую часть, имеем

$$y = 2 + \frac{\frac{7}{2}}{x - \frac{3}{2}}.$$

Отсюда следует, что прямые $x = \frac{3}{2}$ и $y = 2$ являются асимптотами этой гиперболы.

Теперь находим точки ее пересечения с осями Ox и Oy. Если $x = 0$, то $y = -\frac{1}{3}$; если $y = 0$, то $x = -\frac{1}{4}$. Следовательно, гипербола пересекает ось Ox в точке $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ и ось Oy в точке $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$. Взяв еще несколько «контрольных» точек, строим требуемый график (рис. 42).

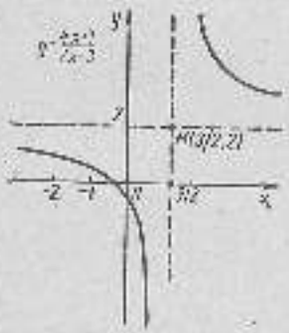


Рис. 42

III. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, иначе функция — линейна).

Рассмотрим сначала более простой случай.

I. Квадратичная функция $y = ax^2$.

Разберем случай $a > 0$:

1) Функция определена для всех x, причем $y = ax^2 \geqslant 0$. Следовательно, ее наименьшее значение равно нулю и достигается при $x = 0$;

2) функция четная, так как $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$. Поэтому ось Oy служит осью симметрии и дальнейшее исследование проводим для $x \geqslant 0$;

3) функция возрастающая. Действительно, из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $ax_1^2 < ax_2^2$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$. Очевидно, что при возрастании x значения функции y также неограниченно растут (при $x \to +\infty$, $y \to +\infty$);

4) график этой функции — вогнутый.

Действительно, неравенство $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ в рассматриваемом случае имеет вид $a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}(ax_1^2 + ax_2^2)$ или $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 > 0$, что очевидно.

Используя эти замечания, получим, что график квадратичной функции имеет вид кривой, изображенной на рис. 43. Эта кривая носит название *параболы*. Точка O, называемая *вершиной* параболы, делит ее на две ветви — правую и левую, направления которых совпадает с положительным направлением оси Oy.

При $a < 0$ из равенства $y = ax^2 = -|a|x^2$ следует, согласно правилу VII, § 8, что графиком $y = ax^2$ будет парабола, ветви которой направлены в отрицательную сторону оси Oy (рис. 43).

2. Общий случай $y = ax^2 + bx + c$.

Для построения графика квадратного трехчлена выделим полный квадрат

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

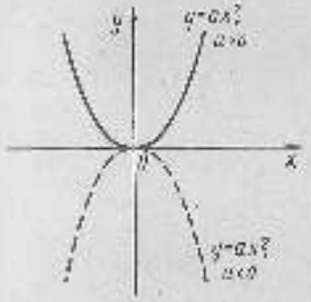


Рис. 43

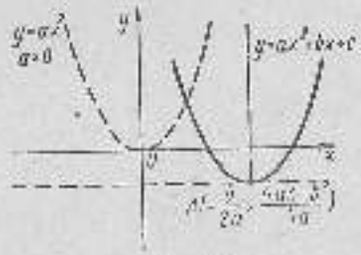


Рис. 44

Полагая $\frac{b}{2a} = m$, $\frac{4ac - b^2}{4a} = n$, видим, что квадратный трехчлен всегда можно привести к виду $y = a(x - m)^2 + n$. График последней получается из графика функции $y = ax^2$ согласно правилу III, § 8 путем двух параллельных переносов.

После этих параллельных переносов направления ветвей не меняются, а вершина переходит в точку $A(-m, n)$. Вертикаль $x = a$, проходящая через вершину, является осью симметрии полученной кривой.

Таким образом, график квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Ее ветви направлены вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$ (рис. 44).

Для более точного построения графика рекомендуется найти точки ее пересечения с координатными осями.

Пример. Построить график функции $y = x^2 - 4x$.

Решение. Это парабола. Записав данное уравнение в виде $y = (x-2)^2 - 4$, мы видим, что ее вершина находится в точке $(2, -4)$ и ветви направлены вверх.

Если $y = 0$, то $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$. Следовательно, парабола пересекает ось Ox в точках $(0, 0)$ и $(4, 0)$. Взяв еще несколько «контрольных» точек, строим ее график (рис. 45).

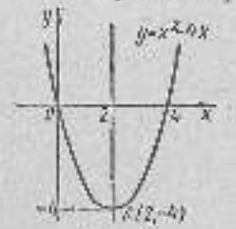


Рис. 45

IV. Степенная функция $y = x^n$.

1. Рассмотрим сначала случай, когда $n = 2k$. Функция $y = x^{2k}$:

1) определена на всей числовой оси;

2) четная, так как $(-x)^{2k} = x^{2k}$. Поэтому ее достаточно исследовать лишь на полуинтервале $[0, \infty]$;

3) на интервале $(0, \infty)$ она возрастает, так как из неравенства $x_1 < x_2$ следует, очевидно, неравенство $x_1^{2k} < x_2^{2k}$;

4) когда x неограниченно возрастает, y также неограниченно возрастает. Наименьшее значение функции равно нулю: $x^{2k} \geqslant 0$, причем $y = 0$ при $x = 0$;

5) покажем, что при $x > 0$ график функции $y = x^n$ при любом натуральном n вогнут, т. е. что справедливо неравенство

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^n < \frac{x_1^n + x_2^n}{2}, \qquad (*)$$

где $0 < x_1 < x_2$.

Доказательство проведем методом индукции. При $n = 2$ очевидно,

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 < \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}.$$

Допустим, что неравенство (*) справедливо для некоторого n и докажем, что тогда

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{n+1} < \frac{x_1^{n+1} + x_2^{n+1}}{2} \qquad (**)$$

Умножая обе части (*) на $\frac{x_1 + x_2}{2} > 0$, получим

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{n+1} < \frac{(x_1^n + x_2^n)(x_1 + x_2)}{4},$$

или

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{n+1} < \frac{x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_1^n x_2 + x_1 x_2^n}{4}. \qquad (***)$$

Сравнивая (**) и (***), видим, что неравенство (**) по свойству транзитивности будет заведомо справедливо, если будет справедливо

$$\frac{x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_1^n x_2 + x_1 x_2^n}{4} < \frac{x_1^{n+1} + x_2^{n+1}}{2}$$

или равносильное ему неравенство

$$x_1^{n+1} + x_2^{n+1} - x_1^n x_2 - x_1 x_2^n > 0,$$

Последнее преобразуется к виду

$$(x_1 - x_2)(x_1^n - x_2^n) > 0.$$

Отсюда следует его очевидность, так как $x_1 - x_2$ и $x_1^n - x_2^n$ имеют одинаковые знаки.

2. Функция $y = x^{2k+1}$:

1) определена всюду;

2) нечетная, так как $f(-x) = (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1} = -f(x)$, и поэтому ее достаточно исследовать на промежутке $x \geqslant 0$;

3) она возрастает на всей числовой оси. В самом деле, если $0 < x_1 < x_2$, то $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

Если $x_1 < x_2 < 0$, то вновь $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1} < 0$;

4) график функции $y = x^{2k+1}$ выпуклый на интервале $(0, \infty)$ (см. пункт (1)).

Так как эта функция нечетная, то ее график симметричен относительно начала координат и, следовательно, на интервале $(-\infty, 0)$ он выпуклый.

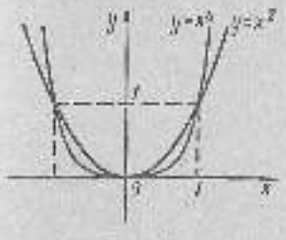


Рис. 46

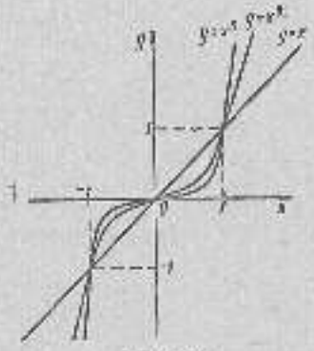


Рис. 47

Графики функции $y = x^n$ для $n = 2k$ и $n = 2k + 1$ приведены на рис. 46 и 47. Эти кривые называются параболами. При $n = 2$ — это просто парабола, при $n = 3$ — кубическая парабола и т. д.

V. Радикал $y = \sqrt[n]{x}$.

Радикал определяется, как функция, обратная степенной функции $y = x^n$.

Рассмотрим случай $n = 2k$.

Так как функция $y = x^{2k}$ монотонно возрастает на промежутке $[0, \infty)$ и принимает все значения от 0 до ∞, то согласно теореме об обратной функции (§ 7) функция $y = \sqrt[2k]{x}$

1) определена на промежутке $[0, \infty)$, являющемся областью изменения функции $y = x^{2k}$;

2) монотонно возрастает от 0 до ∞.

График этой функции изображен на рис. 48. Он может быть получен путем зеркального отображения относительно биссектрисы I координатного угла графика $y = x^{2k}$, соответствующего участку $x \geq 0$;

3) если $n = 2k + 1$, то функция $y = x^{2k+1}$ монотонно возрастает на всей числовой оси и принимает любые положительные и отрицательные значения. Следовательно, согласно теореме об обратной функции, функция

$$y = \sqrt[2k+1]{x};$$

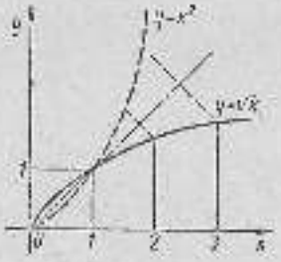


Рис. 48.

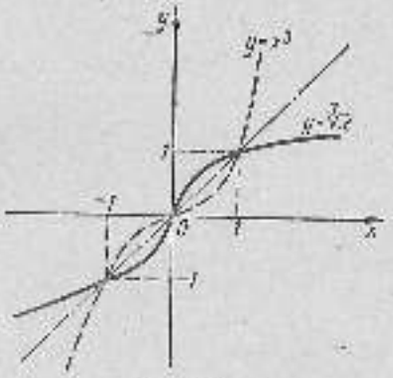


Рис. 49

1) определена на всей числовой оси (область изменения функции $y = x^{2k+1}$);

2) монотонно возрастает; область ее изменения — вся числовая ось. Ее график получается путем зеркального отображения параболы $y = x^{2k+1}$ относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 49).

В следующей главе мы рассмотрим показательную и логарифмическую функции. В главах IX—XIII познакомимся тригонометрических и обратными тригонометрическим функциям.

ГЛАВА VIII

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 1. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Определение. Функция, определяемая равенством

$$y = a^x, \tag{1}$$

где a — постоянное положительное основание, не равное единице, называется *показательной*.

Показательная функция рассматривается только при положительном основании a, так как при $a<0$ выражение a^x в области действительных чисел не имеет смысла, например для любого иррационального x и всех рациональных чисел $\frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь и $q=2k$. При $a=1$ число $1^x=1$ для любых x и это тоже не представляет интереса *.

Все свойства показательной функции непосредственно вытекают из свойств степени с любым показателем (см. гл. I, § 4).

Перечислим их.

I. Показательная функция $y=a^x$ определена для всех действительных значений аргумента x, т. е. ее область определения есть вся числовая ось $(-\infty, \infty)$.

II. $a^0=1$ при любом основании $a \neq 0$.

III. При $a>1$ выражение $a^x>1$ для $x>0$ и $a^x<1$ для $x<0$. При $0<a<1$ — наоборот.

Полное доказательство этого пункта дается в курсе высшей математики; оно связано со свойствами предела. Остановимся лишь на случае рационального x. Если $x=\frac{m}{n}$, где $m>0$, $n>0$ и целые, то

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Так как $a^m>1$ при $a>1$, то $\sqrt[n]{a^m}>1$, т. е. $a^{\frac{m}{n}}>1$.

* Заметим, что выражение a^x для отдельных значений x может иметь смысл и для отрицательных значений a, например, $(-1)^3=-1$, $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$ и т. п.

Если $x=-\frac{m}{n}$, то

$$a^x=a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}<1 \text{ при } a>1.$$

Если $a<1$, то полагая $b=\frac{1}{a}>1$, имеем

$$a^{\frac{m}{n}}=\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{b^m}}<1$$

и

$$a^{-\frac{m}{n}}=\left(\frac{1}{b}\right)^{-\frac{m}{n}}=b^{\frac{m}{n}}>1.$$

IV. Показательная функция $y=a^x$ положительна во всей области своего определения и принимает все положительные значения. Последнее означает, что для любого $y>0$ существует такое значение x, при котором $a^x=y$.

Первая часть утверждения следует из свойства степени с положительным основанием. Вторая часть доказывается в курсе высшей математики.

V. Показательная функция $y=a^x$ монотонна. Она возрастает при $a>1$ и убывает при $a<1$.

Покажем это. Пусть $a>1$ и $x_1<x_2$. Так как $a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}(a^{x_2-x_1}-1)$ и $a^{x_1}>0$, то знак разности $a^{x_2}-a^{x_1}$ совпадает со знаком разности $a^{x_2-x_1}-1$. По свойству III $a^{x_2-x_1}>1$ при $x_2-x_1>0$. Следовательно, $a^{x_2-x_1}-1>0$ и $a^{x_2}>a^{x_1}$. Последнее означает, что $y=a^x$ возрастает при $a>1$.

Если $a<1$, то $b=\frac{1}{a}>1$. Тогда для $x_1<x_2$ разность $a^{x_2}-a^{x_1}=\frac{b^{x_1}-b^{x_2}}{b^{x_1+x_2}}<0$, так как $b^{x_1}-b^{x_2}<0$, а $b^{x_1+x_2}>0$. Итак, в случае $a<1$ разность $a^{x_2}-a^{x_1}<0$ при $x_1<x_2$, т. е. $y=a^x$ убывает.

VI. Из равенства $a^{x_1}=a^{x_2}$ следует, что $x_1=x_2$. Это свойство вытекает из монотонности функции $y=a^x$.

VII. Если $a<b$, то $a^x<b^x$ для $x>0$ и $a^x>b^x$ для $x<0$. При $x=0$ значения a^x и b^x совпадают.

В самом деле, по свойству показателя степени $\frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x$, где $\frac{a}{b}<1$. Поэтому $\frac{a^x}{b^x}<1$ при $x>0$ и $\frac{a^x}{b^x}>1$ при $x<0$.

VIII. График функции $y=a^x$ — выпуклый.

Действительно, неравенство $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ в нашем случае означает, что

$$a^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\frac{1}{2}(a^{x_1}+a^{x_2})$$

или

$$a^{x_1}+a^{x_2}-2a^{\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}}>0,$$

что очевидно, так как

$$(a^{\frac{x_1}{2}}-a^{\frac{x_2}{2}})^2>0.$$

Учитывая перечисленные свойства функции $y=a^x$, построим ее график.

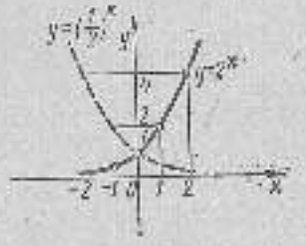


Рис. 50

Рассмотрим сначала случай $a>1$. Так как $a^x>0$ при всех x, то график функции лежит над осью абсцисс и пересекает ось ординат в точке (0, 1) при любых $a>0$. При увеличении x кривая быстро растет вверх (при $x=1$, $y=a$, при $x=2$, $y=a^2$ и т. д.). При движении в отрицательном направлении оси Ox ($x\to-\infty$) ординаты неограниченно уменьшаются, принимая, однако, лишь положительные значения. Ось абсцисс является ее горизонтальной асимптотой.

Для построения графика функции $y=a^x$ при $a<1$ заметим, что $a^x=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, где $\frac{1}{a}>1$. Это означает, что график функции $y=a^x$ с основанием, меньшим единицы, симметричен относительно оси Oy графику $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ с основанием, большим единицы (см. гл. VII). Эти графики имеют вид кривых, изображенных на рис. 50. Они называются *экспонентами*.

§ 2. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Так как показательная функция $y=a^x$ ($a\neq1$, $a>0$) монотонна во всей области своего определения, то согласно теореме об обратной функции (гл. VII, § 7) она имеет обратную однозначную функцию, определенную во всей области изменения этой показательной функции.

Определение. Функция, обратная показательной функции $y=a^x$, называется *логарифмической* функцией и обозначается символом $x=\log_a y$, где y является независимой переменной, x — функцией.

Если перейти к привычным обозначениям, то получаем

$$y = \log_a x \tag{2}$$

(читается: «y равен логарифму числа x по основанию a»). По определению логарифмической функции равенство (2) равносильно равенству

$$x = a^y. \tag{3}$$

Это означает, что *логарифмом числа x по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число x.* Равенство (3) можно переписать в ином виде, если заменить в нем y его значением (2), т. е.

$$x = a^{\log_a x}. \tag{4}$$

Все свойства логарифмической функции наглядно изображены на ее графике (рис. 51). Этот график получается из графика показательной функции $y=a^x$ зеркальным отображением последнего относительно биссектрисы I и III координатных углов (см. гл. VII, § 7). Перечислим эти свойства.

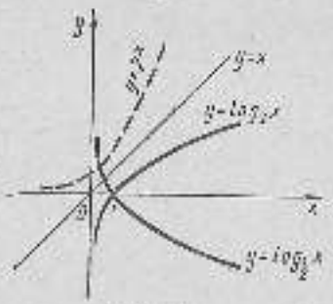


Рис. 51

I. Логарифмическая функция $y=\log_a x$ при положительном основании $a\neq 1$ определена для всех положительных значений аргумента x, т. е. область определения этой функции есть бесконечный интервал $(0, \infty)$ (поэтому говорят, что отрицательные числа не имеют логарифмов).

II. $\log_a 1=0$ и $\log_a a=1$ при любом $a>0$, $a\neq 1$.

III. Логарифмическая функция $y=\log_a x$ принимает все действительные значения, т. е. область ее изменения есть бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$.

IV. Логарифмическая функция $y=\log_a x$ монотонна во всей области своего определения. Она возрастает при $a>1$ и убывает при $a<1$.

V. Из равенства $\log_a x_1=\log_a x_2$ следует, что $x_1=x_2$. Это равенство вытекает из монотонности логарифма.

Основные тождества:

1. $a^{\log_a x}=x$. Эта формула вытекает из определения логарифма.

2. *Логарифм произведения положительных сомножителей равен сумме логарифмов сомножителей при том же основании*, т. е.

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Доказательство. Согласно равенству (4)

$$x_1 = a^{\log_a x_1} \text{ и } x_2 = a^{\log_a x_2}.$$

Поэтому

$$x_1 \cdot x_2 = a^{\log_a x_1} \cdot a^{\log_a x_2} = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2}.$$

Полученное равенство согласно (2) и (3) равносильно равенству

$$\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a (x_1 \cdot x_2).$$

Свойство (2) распространяется на любое конечное число положительных сомножителей.

Замечание. Если $x_1 \cdot x_2 > 0$, то $\log_a (x_1 \cdot x_2)$ существует даже в том случае, когда $x_1<0$ и $x_2<0$. Тогда

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|,$$

так как в этом случае $x_1 \cdot x_2 = |x_1| \cdot |x_2|$.

3. *Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя при том же основании*, т. е.

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

Доказательство. Согласно (4)

$$x_1 = a^{\log_a x_1} \text{ и } x_2 = a^{\log_a x_2}.$$

Поэтому

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a^{\log_a x_1}}{a^{\log_a x_2}} = a^{\log_a x_1 - \log_a x_2}.$$

Следовательно,

$$\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \frac{x_1}{x_2}.$$

Замечание. Если $\frac{x_1}{x_2}>0$, а $x_1<0$ и $x_2<0$, то $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|$, так как в этом случае $\frac{x_1}{x_2} = \frac{|x_1|}{|x_2|}$.

4. *Логарифм степени равен произведению логарифма основания этой степени на показатель*, т. е.

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x,$$

где α — любое действительное число, а $x>0$.

Доказательство. Так как $x = a^{\log_a x}$, то $x^\alpha = (a^{\log_a x})^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$. Следовательно, $\alpha \log_a x = \log_a x^\alpha$.

Замечание. Если $x<0$, то $\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|$, так как $x^{2k} = |x|^{2k}$.

Следствие. Если $\alpha = \frac{1}{n}$, то $x^{\alpha} = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ и $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$, т. е. логарифм корня равен логарифму того же основания от подкоренного выражения, делённому на показатель корня.

5. Модуль перехода. Пусть нам известен логарифм некоторого положительного числа x по основанию a. Найдем логарифм того же числа x по другому основанию b ($b>0$, $b \neq 1$).

Представив число x в виде

$$x = b^{\log_b x},$$

найдем $\log_a x$. Имеем

$$\log_a x = \log_a (b^{\log_b x}) = \log_b x \cdot \log_a b.$$

Отсюда получаем, что

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}. \tag{5}$$

Выражение $\frac{1}{\log_a b}$, не зависящее от числа x, называется *модулем перехода* от основания a к новому основанию b. Обозначая его буквой M (M зависит только от a и b), перепишем (5) в виде

$$\log_b x = M \cdot \log_a x.$$

Из равенства (5) вытекают следующие следствия.

Следствие 1. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ или $\log_a a = \frac{1}{\log_b b}$. (6)

В самом деле, полагая в (5) $x = a$, имеем

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}. \tag{7}$$

Следствие 2. $\log_a x_1 \cdot \log_b x_2 = \log_a x_2 \cdot \log_b x_1$ для любых $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$.

В самом деле, согласно формуле (5)

$$\log_a x_1 = \frac{\log_b x_1}{\log_b a}, \quad \log_b x_2 = \frac{\log_a x_2}{\log_a b}.$$

Перемножая эти равенства и учитывая (6), получаем (7).

Следствие 3. Логарифм не изменит своего значения, если число и основание возвести в одну и ту же степень, т. е.

$$\log_{a^\alpha} x^\alpha = \log_a x, \tag{8}$$

где α — любое действительное число.

В самом деле, полагая в равенстве (5) $b = a^\alpha$, для числа x^α имеем

$$\log_{a^\alpha} x^\alpha = \frac{\log_a x^\alpha}{\log_a a^\alpha},$$

или

$$\log_{a^\alpha} x^\alpha = \frac{\alpha \log_a x}{\alpha \log_a a} = \log_a x.$$

В частности, из формулы (8) имеем

$$\log_{a^\alpha} x = \log_{a^\alpha} x^{\frac{\alpha}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \log_a x \tag{9}$$

для любого $x > 0$.

Логарифмирование и потенцирование. Каждому положительному числу при заданном основании соответствует определенное значение его логарифма. Нахождение логарифмов заданных чисел или выражений называется операцией *логарифмирования*. Заметим, что логарифмируя некоторое алгебраическое выражение, мы сводим операции возведения в степень, извлечения корня, умножения и деления к более простым операциям сложения и вычитания логарифмов и их умножения и деления на число.

Для нахождения логарифмов чисел существуют таблицы логарифмов для различных оснований (а не только «классические» для $a = 10$). Общий принцип построения таблиц логарифмов состоит в следующем. Пусть $a > 1$ — основание логарифма и x — положительное число. Всегда можно подобрать такое целое число m, чтобы x было заключено между числами a^m и a^{m+1}, т. е. $a^m \leqslant x < a^{m+1}$.

Представим число x в виде

$$x = a^m \cdot \frac{x}{a^m} = a^m \cdot x_1, \tag{10}$$

где $1 \leqslant x_1 = \frac{x}{a^m} < a$ (например, для $a = 2$ и $x = 17$ имеем $17 = 2^4 \cdot \frac{17}{16} = 2^4 \cdot 1{,}0625$; для $a = 10$ и $x = 0{,}1093$ имеем $0{,}1093 = 10^{-1} \cdot 1{,}093$ и т. д.).

Тогда из (10) получаем, что

$$\log_a x = \log_a (a^m \cdot x_1) = m + \log_a x_1,$$

причем $0 \leqslant \log_a x_1 < 1$.

Итак, логарифм любого положительного числа x можно представить в виде суммы двух частей — целой, называемой его *характеристикой*, и дробной, называемой его *мантиссой*. Характеристика может быть и отрицательной, мантисса всегда неотрицательна. Если характеристика отрицательна, то знак минус пишут над ней в виде черточки. Например, если $m = -3$, а $\log_a x_1 = -0{,}0825$, то пишут

$$\log_a x = \bar{3}{,}0825.$$

Рассмотрим десятичные логарифмы ($a = 10$). Записав x в десятичной системе счисления $x = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_k \cdot 10^{n-k}$, где $a_0 \neq 0$, имеем

$$10^n \leqslant x < 10^{n+1}.$$

Следовательно, характеристика $\lg x^*$ равна n. Например, $\lg 2{,}031 = 0, \ldots$, так как $2{,}031 = 2 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}$; $\lg 0{,}02031 = -2, \ldots$, так как $0{,}02031 = 2 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-5}$.

Вообще, если $x \geqslant 1$, то характеристика $\lg x$ на единицу меньше числа десятичных разрядов в изображении целой части числа x.

Если $0 < x < 1$, то характеристика $\lg x$ содержит столько отрицательных единиц, сколько имеется нулей до первой значащей цифры в изображении числа x.

Операция, обратная логарифмированию, называется *потенцированием*. Она состоит в отыскании x по заданному значению $\log_a x$. (Так как $x = a^{\log_a x}$, то операция потенцирования есть возведение в степень.)

Так как логарифмическая функция монотонна, то операции логарифмирования и потенцирования однозначны.

§ 3. УПРАЖНЕНИЯ

Пример 1. Что больше 202^{303} или 303^{202}?

Решение. I способ. Из свойств показательной функции следует, что $a^c < b^c$ при $1 < a < b$ и $c > 0$; $a^b < a^c$ при $a > 1$ и $b < c$.

В данном примере и основания и показатели сравниваемых величин различны. Обозначая $A = 202^{303}$ и $B = 303^{202}$, приведем их к одному показателю. Имеем

$$A = (2 \cdot 101)^{3 \cdot 101} = (8 \cdot 101^3)^{101}, \quad B = (3 \cdot 101)^{2 \cdot 101} = (9 \cdot 101^2)^{101}.$$

Так как $8 \cdot 101^3 > 9 \cdot 101^2$, то $(8 \cdot 101^3)^{101} > (9 \cdot 101^2)^{101}$, т. е. $A > B$.

II способ. Прологарифмируем A и B по основанию 10. Имеем $\lg A = 303 \cdot \lg 202 = 303 \cdot 0, \ldots, > 606$. (Характеристика $\lg 202$ равна 2.)

$$\lg B = 202 \cdot \lg 303 = 202 \cdot 2, \ldots < 606.$$

Таким образом, $\lg A > \lg B$ и, следовательно, $A > B$.

Пример 2. Найти ошибки в следующих «рассуждениях». Очевидно, что $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Следовательно,

$$\log_a \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \log_a \left(\frac{1}{2}\right)^3, \tag{11}$$

или

$$2 \log_a \frac{1}{2} > 3 \log_a \frac{1}{2}. \tag{12}$$

* Логарифмы по основанию 10 обозначаются символом «lg».

Сокращая последнее неравенство на общий множитель, получаем явно неверный результат

$$2 > 3.$$

Ошибки состоят в следующем: при $a > 1$ равенства (11) и (12) верны, однако при сокращении на $\log_a \frac{1}{2} < 0$ знак полученного неравенства изменится на обратный, т. е.

$$2 < 3.$$

При $a < 1$ из условия $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$ вытекает, что $\log_a \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \log_a \left(\frac{1}{2}\right)^3$, т. е.

$$2 \log_a \frac{1}{2} < 3 \log_a \frac{1}{2},$$

откуда следует, что $2 < 3$, так как $\log_a \frac{1}{2} > 0$ $(a < 1)$.

При решении задач на упрощение выражений, содержащих логарифмические или показательные функции, а также при доказательстве тождеств используются формулы, выведенные в § 2.

Пример 3. Вычислить без таблиц следующие выражения:

1) $2^{\log_2 3 + 1}$; 2) $5^{\frac{3 - \lg 6}{\lg 25}}$.

Решение: 1) так как $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$, то

$$2^{\log_2 9 + 1} = 2^{\log_2 9} \cdot 2.$$

Но $\log_{a^k} b^k = \log_a b$. Поэтому $\log_4 9 = \log_2 3$ и $2^{\log_4 9} = 2^{\log_2 3} = 3$. Итак,

$$2^{\log_2 9 + 1} = 3 \cdot 2 = 6;$$

2) так как $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, то $\frac{1}{\lg 25} = \frac{1}{2} \log_5 10$.

Поэтому $5^{\frac{3 - \lg 6}{\lg 25}} = 5^{\lg 10^3 - \lg 6 + \frac{1}{2} \log_5 10} = 5^{\log_5 10^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}} = 10\sqrt{10} : \sqrt{5} - 10\sqrt{2}$.

Пример 4. Упростить выражения:

1) $a^{\frac{\lg \lg a}{\lg a}}$, 2) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \ldots \log_9 10$.

Решение: 1) так как $a^b = (a^b)^{\log_a a}$ и $\frac{1}{\lg a} = \log_a 10$,

то

$$a^{\frac{\lg \lg a}{\lg a}} = a^{\log_a 10 \cdot \lg \lg a} = (a^{\log_a 10})^{\log \log a} = 10^{\log \log a} = \lg a;$$

2) обозначая данное выражение через A и переходя в каждом логарифме к основанию 10 (формула 5), имеем

$$A=\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 5}{\lg 4}\cdot\ldots\cdot\frac{\lg 9}{\lg 10}=\frac{1}{\lg 2}=\log_2 10.$$

Пример 5. Найти $\log_{14} 168$, если $\log_7 12=a$ и $\log_{12} 24=b$.

Решение. Разложим числа 168, 54, 12, 24 и 7 на простые множители:

$$168=2^3\cdot 3\cdot 7,\quad 54=2\cdot 3^3,\quad 12=2^2\cdot 3,\quad 24=2^3\cdot 3,\quad 7=7.$$

Отсюда видно, что число различных простых множителей, входящих в разложение, равно трем (2, 3, 7). Обозначая $\log_2 3=x$ и $\log_2 7=y$, мы можем выразить через x и y все логарифмы, содержащиеся в данной задаче. Действительно,

$$\left.\begin{aligned}\log_7 12&=\frac{\log_2 12}{\log_2 7}=\frac{\log_2(2^2\cdot 3)}{y}=\frac{2+x}{y},\\ \log_{12}24&=\frac{\log_2 24}{\log_2 12}=\frac{\log_2(2^3\cdot 3)}{\log_2(2^2\cdot 3)}=\frac{3+x}{2+x},\\ \log_{14}168&=\frac{\log_2 168}{\log_2 56}=\frac{\log_2(2^3\cdot 3\cdot 7)}{\log_2(2\cdot 3^3)}=\frac{3+x+y}{1+3x}.\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

Используя данные задачи, составляем для определения x и y систему двух уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{2+x}{y}=a\\[2mm] \dfrac{3+x}{2+x}=b,\end{cases}$$

решая каждую, находим, что $x=\dfrac{3-2b}{b-1}$, $y=\dfrac{1}{a(b-1)}$. Подставляя найденные значения x и y в третье равенство (13), получаем

$$\log_{14}168=\frac{1+ab}{a(3-2b)}.$$

Замечание. Исследование способа решения показывает, что подобная задача имеет решение, если число различных простых множителей чисел и оснований на единицу больше числа условий. Тогда, принимая один из множителей за основание, мы получаем систему уравнений, число которых равно числу неизвестных. Задачи, где все логарифмы рассматриваются при одном основании, решаются проще, без составления системы.

Пример 6. Вычислить $\log_{30}8$, если $\log_{30}3=a$ и $\log_{30}5=b$.

Решение. Замечая, что $30=2\cdot 3\cdot 5$, имеем

$\log_{30}2+\log_{30}3+\log_{30}5=\log_{30}30=1$, или $a+b+\log_{30}2=1$. Отсюда находим $\log_{30}2=1-(a+b)$ и $\log_{30}8=3(1-a-b)$.

Пример 7. Найти $\lg 2$ и $\lg 5$, если $\lg 2\cdot\lg 5=a$.

Решение. Так как $\lg 2+\lg 5=\lg 10=1$, а по условию $\lg 2\cdot\lg 5=a$, то $\lg 2$ и $\lg 5$ являются корнями квадратного уравнения

$$z^2-z+a=0.$$

Решая его, находим $z_{1,2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4a})$, откуда

$$\lg 5=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4a}),\ \lg 2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4a}),\ [\lg 5>\lg 2,\ 4a<1].$$

Пример 8. Сколько цифр содержит число 2^{75}?

Решение. Вычисляя $\lg 2^{75}$, имеем

$$\lg 2^{75}=75\cdot\lg 2=75\cdot 0{,}3010=22{,}5750.$$

Отсюда следует, что характеристика этого десятичного логарифма равна 22. Но характеристика на единицу меньше количества цифр. Следовательно, число 2^{75} содержит 23 цифры.

Пример 9. Доказать, что если $a^2+b^2=7ab$, причем $ab\neq 0$, то

$$\lg\frac{|a+b|}{3}=\frac{1}{2}(\lg|a|+\lg|b|).$$

Решение. Дополним левую часть данного равенства до полного квадрата, имеем

$$a^2+2ab+b^2=9ab.$$

Из равенства положительных чисел вытекают равенства их логарифмов, взятых по одному и тому же основанию, т. е.

$$\lg(a-b)^2=\lg 9ab.$$

Так как $\lg x^2=2\lg|x|$ и $\lg(x_1\cdot x_2)=\lg|x_1|+\lg|x_2|$, то из последнего равенства следует, что

$$2\lg|a-b|=2\lg 3+\lg|a|+\lg|b|,$$

или

$$\lg|a+b|-\lg 3=\frac{1}{2}(\lg|a|+\lg|b|),\ \text{что окончательно дает}$$

$$\lg\frac{|a+b|}{3}=\frac{1}{2}(\lg|a|+\lg|b|).$$

Пример 10. Доказать, что

$$\log_a N\cdot\log_b N+\log_b N\cdot\log_c N+\log_c N\cdot\log_a N=\frac{\log_a N\cdot\log_b N\cdot\log_c N}{\log_{abc}N},$$

где $N>0$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$, $c\neq 1$, $abc\neq 1$, $N\neq 1$.

Решение. Используя тождество $\log_{a_1} b = \frac{1}{\log_b a}$, перейдем в каждом сомножителе левой части к основанию N. Обозначая ее через A, имеем

$$A = \frac{1}{\log_a a} \cdot \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_a b} \cdot \frac{1}{\log_a c} + \frac{1}{\log_a c} \cdot \frac{1}{\log_a a} =$$

$$= \frac{\log_a c + \log_a a + \log_a b}{\log_a a \cdot \log_a b \cdot \log_a c} = \frac{\log_a abc}{\log_a a \cdot \log_a b \cdot \log_a c}.$$

Преобразуя каждый логарифм к числу N, получаем

$A = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}$, что и требовалось доказать.

§ 4. РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Логарифмические и показательные уравнения, т. е. такие, где неизвестное входит в показатель степени или находится под знаком логарифмической функции, принадлежат к классу трансцендентных уравнений. Остановимся на некоторых типах таких уравнений и укажем приемы, сводящие эти уравнения к ранее изученным.

I. Рассмотрим показательное уравнение

$$a^x = a^\alpha, \tag{14}$$

где $a \neq 1$ — положительный параметр, а один из показателей α и β или оба содержат неизвестное x. Согласно свойству VI (§ 1) из равенства степеней с одинаковыми основаниями вытекает равенство их показателей и обратно, т. е. $\alpha = \beta$.

Пример 1. Решить уравнение

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}.$$

Решение. Преобразуя данное уравнение к виду (14), имеем

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1-\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$x - 1 - \frac{1}{x} = 2,$$

решая которое, находим

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

II. Рассмотрим уравнение вида $\log_a u = \log_a v$ (15), где $a \neq 1$, $a > 0$, а одна из величин u и v или обе содержат неизвестное.

Согласно свойству V (§ 2) из равенства логарифмов с одинаковыми основаниями вытекает равенство чисел, т. е. (15) равносильно уравнению $u = v$, при условии, что $u > 0$ и $v > 0$.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{\lg 2x}{\lg (4x - 15)} = 2$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\lg 2x = \lg (4x - 15)^2$$

при условии, что $4x - 15 > 0$ и $4x - 15 \neq 1$.

Переходя к равенству чисел, получаем квадратное уравнение $2x = (4x - 15)^2$, корни которого $x_1 = \frac{9}{2}$ и $x_2 = \frac{25}{8}$. Так как $4x_1 - 15 = 3 > 0$, а $4x_2 - 15 < 0$, то $x_2 = \frac{25}{8}$ не является корнем данного уравнения. Итак, единственный корень $x = \frac{9}{2}$.

Пример 3. Решить уравнение $\frac{\lg 2 + \lg (4 - 5x - 6x^2)}{\lg (2x - 1)} = 3$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\lg 2 (4 - 5x - 6x^2) = \lg (2x - 1)^3 \quad (2x - 1 \neq 1),$$

а последнее равносильно алгебраическому уравнению

$$2 (4 - 5x - 6x^2) = (2x - 1)^3$$

при условии, что $4 - 5x - 6x^2 > 0$ и $2x - 1 > 0$ и $2x - 1 \neq 1$.

Решая систему неравенств

$$\begin{cases} 4 - 5x - 6x^2 > 0, \\ 2x - 1 > 0, \end{cases}$$

убеждаемся, что она несовместна, так как первое неравенство выполняется в интервале $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right)$, а второе в интервале $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. Из несовместности системы следует, что данное уравнение не имеет корней.

Замечание. Этот вывод можно получить сразу, убедившись, что множество допустимых значений левой части данного уравнения пустое, т. е. не содержит ни одного числа.

III. Уравнения вида

$$Aa^x = Bb^x, \tag{16}$$

где x и β содержат неизвестное, в общем случае решаются логарифмированием обеих частей по одному основанию.

Пример 4. Решить уравнение $2^{x+3}-3^{x-2}=3^{x+1}-2^{x-1}$.

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду (16). Имеем

$$8\cdot 2^x-\frac{1}{9}\cdot 3^x=3\cdot 3^x-\frac{1}{2}\cdot 2^x,$$

или $\frac{17}{2}\cdot 2^x=\frac{28}{9}\cdot 3^x$, или $3^x=\frac{153}{56}\cdot 2^x$.

Прологарифмируем обе части последнего уравнения по основанию 3

$$x=\log_3\frac{153}{56}+x\log_3 2.$$

Решая это уравнение, находим

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\log_3 2\pm\sqrt{\log_3^2 2+4\log_3\frac{153}{56}}\right).$$

IV. Рассмотрим уравнения вида

$$Aa^x+Bb^x=C \qquad (17)$$

(или $Aa^x+Bb^x=Cc^x$), сводящееся к первому делением на $c^x\neq 0$. В некоторых случаях это уравнение удается свести к алгебраическому уравнению относительно нового неизвестного. Например, если $ab=1$, то заменой $a^x=y$ $\left(\text{тогда } b^x=\frac{1}{y}\right)$ уравнение (17) сводится к квадратному уравнению $Ay^2-Cy+B=0$. Если $b=a^m$ (m — целое), то той же заменой уравнение (17) сводится к алгебраическому

$$Ay+By^m=C.$$

Пример 5. Решить уравнение $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$.

Решение. Замечая, что $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=1$, положим $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=y$ ($y>0$). После этой замены получаем квадратное уравнение $y^2-4y+1=0$, равносильное данному при условии, что $y>0$. Его корни $y_1=2+\sqrt{3}$, $y_2=(2+\sqrt{3})^{-1}=2-\sqrt{3}$.

Возвращаясь к неизвестному x, имеем $(2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}}=2+\sqrt{3}$, откуда $x_1=2$ и $(2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}}=(2+\sqrt{3})^{-1}$, откуда $x_2=-2$.

Пример 6. Решить уравнение $4^{-\frac{1}{x}}-6^{-\frac{1}{x}}=9^{-\frac{1}{x}}$.

Решение. Разделив все члены уравнения на $4^{-\frac{1}{x}}$ и заметив, что $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, имеем

$$1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}.$$

Принимая, что $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=y$, получаем квадратное уравнение $y^2+y-1=0$, равносильное данному при условии, что $y>0$. Его корни $y_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $y_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, причем $y_2<0$ не подходит. Возвращаясь к неизвестному x, имеем $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Прологарифмируем это равенство по основанию 10 и найдем, что

$$x=\frac{\lg 3-\lg 2}{\lg 2-\lg(\sqrt{5}-1)}.$$

V. Рассмотрим уравнение вида

$$u^v=u^z. \qquad (18)$$

Где u, v и z (все или некоторые) содержат неизвестное. Функция u^v (или u^z) определена только для положительного основания и при этом условии уравнение (18) равносильно уравнению $u^{v-z}=1$ или $(v-z)\log u=0$, которое в свою очередь равносильно совокупности двух уравнений

$$v-z=0 \quad \text{и} \quad u=1.$$

Как мы уже отмечали в сноске на стр. 245, при отдельных значениях v и z выражения u^v и u^z имеют смысл и для неположительных значений u. Однако те значения x, которые хотя формально и удовлетворяют равенству (18), но при которых $u\leqslant 0$, не принято считать корнями уравнения (18).

Пример 7. Решить уравнение $(x-1)^{\sqrt{x+1}}=(x-1)^{\frac{x+1}{2}}$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\left(\frac{x+1}{2}-\sqrt{x+1}\right)\lg(x-1)=0$$

или совокупности двух уравнений

$$x-1=1 \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{2}-\sqrt{x+1}=0$$

при условии, что $x>1$. Из первого уравнения получаем $x_1=2$. Решая иррациональное уравнение, находим его корни $x_2=3$ и $x_3=-1$. При $x_3=-1$ основание $x-1<0$, поэтому $x_3=-1$ не является корнем данного уравнения (хотя формально $(-1-1)^{\sqrt{-1+1}}=(-1-1)^{\frac{-1+1}{2}}$). Итак, данное уравнение имеет два корня $x_1=2$; $x_2=3$.

Пример 8. Решить уравнение $5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$.

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду (18)

$$5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 2 \cdot 5^2 \text{ или } 5^{x-2} \cdot 2^{\frac{x-2}{x+1}} = 1, \text{ или } (5 \cdot 2^{\frac{1}{x+1}})^{x-2} = 1.$$

Так как основание $u = 5 \cdot 2^{\frac{1}{x+1}} > 0$ при всех x, то последнее уравнение равносильно уравнению

$$(x-2) \log_2 (5 \cdot 2^{\frac{1}{x+1}}) = 0$$

или совокупности двух уравнений

$$x - 2 = 0 \quad \text{и} \quad \log_2 5 + \frac{1}{x+1} = 0.$$

Решая эти уравнения, находим

$$x_1 = 2; \; x_2 = -1 - \frac{1}{\log_2 5} = -1 - \log_5 2.$$

VI. В некоторых случаях с помощью подстановки

$$y = \log_a u \quad \text{или} \quad y = \log_u a$$

(u содержит неизвестное), логарифмическое уравнение сводится к алгебраическому.

Пример 9. Решить уравнение

$$\log_x \sqrt{5} + \log_{5x} (5x) - 2{,}25 = (\log_x \sqrt{5})^2.$$

Решение. Учитывая, что $\log_x \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log_x 5$, $\log_{5x} (5x) = \log_{5x} 5 + 1$, $(\log_x \sqrt{5})^2 = \frac{1}{4} \log_x^2 5$, перепишем данное уравнение:

$$\frac{1}{2} \log_{5x} 5 + \log_{5x} 5 + 1 - 2{,}25 = \frac{1}{4} \log_{5x}^2 5$$

или

$$\log_{5x}^2 5 - 6 \log_{5x} 5 + 5 = 0.$$

Обозначив $\log_{5x} 5 = y$, имеем

$$y^2 - 6y + 5 = 0.$$

Корни этого уравнения $y_1 = 1$, $y_2 = 5$. Возвращаясь к неизвестному x, находим

$$\log_{5x} 5 = 1, \; x_1 = 5,$$

$$\log_{5x} 5 = 5, \; x^5 = 5, \; x_2 = \sqrt[5]{5}.$$

В некоторых случаях перед заменой целесообразно привести логарифмы, входящие в уравнение, к одному основанию.

Пример 10. Решить уравнение $\sqrt{\log_x \sqrt{3x} \cdot \log_3 x} = -1$.

Решение. Заметим, что $\log_x \sqrt{3x} = \frac{1}{2} \log_x 3 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \log_3 x} + \frac{1}{2}$. Тогда, обозначая $\log_3 x = y \; (y < 0)$, получаем иррациональное уравнение

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + 1 \right) \cdot y} = -1.$$

Решая его, находим, что $y = -2$ ($y = 1$ отбрасываем). Следовательно, $\log_3 x = -2$ и $x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

Пример 11. Решить уравнение

$$\log_{2x} \left(\frac{2}{x} \right) \log_2^2 x = \log_2^2 x - 1.$$

Решение. Так как $\log_{2x} \left(\frac{2}{x} \right) = \frac{\log_2 \frac{2}{x}}{\log_2 2x} = \frac{1 - \log_2 x}{1 + \log_2 x}$, то полагая $\log_2 x = y$, получаем алгебраическое уравнение $\frac{1-y}{1+y} y^2 + y^2 = 1$ или $y^5 + y^4 - y^3 - y^2 - y - 1 = 0 \; (y \neq -1)$. Выделяя корень $y_1 = 1$, имеем симметричное уравнение $y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y - 1 = 0$ (см. гл. III). Решая его, находим $y_{2,3} = \frac{-1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$ ($y_{4,5}$ — иррациональные). Возвращаясь к неизвестному x, имеем

$$\log_2 x = 1, \text{ т. е. } x_1 = 2, \; \log_2 x = \frac{-1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2},$$

т. е.

$$x_{2,3} = 2^{\frac{-1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}}.$$

Не останавливаясь подробно на логарифмических уравнениях, содержащих параметры (исследование решений в зависимости от параметров детально проведено в гл. IV), приведем лишь один пример такого уравнения.

Пример 12. Решить уравнение

$$1 + \log_b (2 \lg a - x) \cdot \log_x b = \frac{2}{\log_b x}, \; a > 0, \; b > 0, \; b \neq 1.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\log_b x + \log_b (2 \lg a - x) \log_x b \cdot \log_b x = \log_b b^2 \quad (x > 0, \; x \neq 1),$$

заменяем, что оно равносильно уравнению

$$x(2\lg a - x) = b^2$$

при условии, что $2\lg a - x > 0$, $x > 0$ и $x \neq 1$. Решая уравнение $x^2 - 2x\lg a + b^2 = 0$, находим, что

$$x_{1,2} = \lg a \pm \sqrt{\lg^2 a - b^2} \qquad (*)$$

Из формулы (*) следует, что $x_{1,2}$ действительны и положительны в том и только в том случае, когда $\lg a > 0$ и $\lg^2 a - b^2 \geqslant 0$, т. е. $\lg a \geqslant b$. При этом x_1 и x_2 удовлетворяют ограничительному условию, так как $2\lg a - x_{1,2} = \lg a \pm \sqrt{\lg^2 a - b^2} > 0$. При $a < 1$, $\lg a < 0$ решение не существует. Остается исключить те значения параметра, при которых $x = 1$, т. е. $\lg a \pm \sqrt{\lg^2 a - b^2} = 1$. Последнее имеет место при условии $\lg a = \frac{b^2+1}{2}$.

Итак, данное уравнение имеет два решения $x_{1,2} = \lg a \pm \sqrt{\lg^2 a - b^2}$ при $a > 10^{\frac{b^2+1}{2}}$ и $a \neq 10^{\frac{b^2+1}{2}}$ и одно решение $x = b^2$ при $a = 10^{\frac{b^2+1}{2}}$. При $a < 10^{\frac{b^2+1}{2}}$ уравнение решений не имеет. При $a = 10^{\frac{b^2+1}{2}}$ уравнение имеет решение $x = b^2$.

В заключение этого параграфа рассмотрим несколько систем логарифмических и показательных уравнений.

Пример 13. Решить систему

$$\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^4\sqrt{y+1}}{2} = 2, \\ \log_8 x \cdot \log_2 (y+1)^3 = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Решение. Так как $x > 0$, то из первого уравнения имеем

$$2\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 (y+1) - 1 = 2 \text{ или } 4\log_2 x + \log_2 (y+1) = 6.$$

Во втором уравнении $\log_8 x$ преобразуем к логарифму с основанием 2. Получаем (см. § 8)

$$\log_{2^3} x^{\frac{1}{3}} \cdot 2\log_2 (y+1) = \frac{4}{3}$$

или

$$\frac{2}{3}\log_2 x \cdot \log_2 (y+1) = \frac{4}{3} \text{ или } \log_2 x \cdot \log_2 (y+1) = 2.$$

Таким образом, данная система равносильна системе

$$\begin{cases} 4\log_2 x + \log_2 (y+1) = 6, \\ \log_2 x \cdot \log_2 (y+1) = 2, \end{cases}$$

которая заменой $\log_2 x = u$ и $\log_2 (y+1) = v$ сводится к алгебраической

$$\begin{cases} 4u + v = 6, \\ u \cdot v = 2. \end{cases}$$

Решая ее, находим $u_1 = 1$; $v_1 = 2$ и $u_2 = \frac{1}{2}$, $v_2 = 4$.

Теперь для определения x и y мы получаем следующую совокупность систем:

$$\begin{cases} \log_2 x = 1, \\ \log_2 (y+1) = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \log_2 x = \frac{1}{2}, \\ \log_2 (y+1) = 4. \end{cases}$$

Решая каждую из них, находим

$$x_1 = 2,\ y_1 = 3 \text{ и } x_2 = \sqrt{2},\ y_2 = 15.$$

Пример 14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\log_x 0{,}5}{\log_x 0{,}5 + \log_y 0{,}5} = -\dfrac{1}{\log_0 0{,}125}, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Решение. Выразив из второго уравнения одно из неизвестных через другое, можно свести систему к одному уравнению. Однако проще первое уравнение заменить равносильным алгебраическим уравнением. Преобразуя каждый логарифм к основанию 0,5, имеем

$$\frac{\dfrac{1}{\log_{0,5} x}}{\dfrac{1}{\log_{0,5} x} + \dfrac{1}{\log_{0,5} y}} = \frac{1}{3}\log_{0,5} y \text{ или } \frac{\log_{0,5} y}{\log_{0,5} xy} = \frac{\log_{0,5} y}{3},$$

Так как $\log_{0,5} y \neq 0$ $(y \neq 1)$, то последнее уравнение равносильно уравнению $\log_{0,5} xy = 3$ или $xy = 0{,}125$ при условии $x > 0$ и $y > 0$.

Итак, данная система равносильна системе

$$\begin{cases} xy = 0{,}125, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Решая ее, находим $x_1 = 0{,}5(1 + \sqrt{0{,}5})$, $y_1 = 0{,}5(1 - \sqrt{0{,}5})$ и $x_2 = 0{,}5(1 - \sqrt{0{,}5})$, $y_2 = 0{,}5(1 + \sqrt{0{,}5})$.

Пример 15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y, \\ y^{\sqrt{x}} = x^3. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения следует, что $x = y^{\frac{1}{4}\sqrt{y}}$. Тогда из первого уравнения получаем

$$(y^{\frac{1}{4}\sqrt{y}})^{\sqrt{y}} = y, \text{ или } y^{\frac{1}{4}y} = y, \text{ причем } y > 0.$$

Поэтому последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений $y = 1$ и $\frac{1}{4}y = 1$. Итак, $y_1 = 1$, $y_2 = 4$. Решая уравнение $x = y^{\frac{1}{4}\sqrt{y}}$, находим

$$x_1 = y_1^{\frac{1}{4}\sqrt{y_1}} = 1 \text{ и } x_2 = y_2^{\frac{1}{4}\sqrt{y_2}} = 4^{\frac{1}{4}\cdot 2} = 4^{\frac{1}{2}} = 2.$$

Итак, система имеет 2 решения:

$$x_1 = y_1 = 1;\ x_2 = 2,\ y_2 = 4.$$

Пример 16. Решить систему

$$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[12]{y^8}, \\ y^{\frac{3}{8}} = \sqrt[15]{z^2}, \\ z = \sqrt{x} - \sqrt{y}. \end{cases}$$

Решение. Из данной системы следует, что $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и $z \geqslant 0$. Из первого и второго уравнений выражаем x через y и z:

$$x = (y^{\frac{8}{12}})^{\frac{3}{2}} = y^{\frac{8}{8}},$$

$$x = (z^{\frac{2}{3}})^{\frac{15}{2}} = z^{\frac{30}{6}}.$$

Сравнивая правые части полученных равенств, имеем

$$y^{\frac{8}{8}} = z^{\frac{30}{6}}.$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений $y = 1$ и $\frac{8}{8} = \frac{30}{6}$. Из последнего уравнения находим, что $z = \frac{4}{5}$. Взяв $y_1 = 1$, из первого уравнения системы получаем $x_1 = 1$. Тогда из третьего уравнения следует, что $z_1 = 2$. Взяв $z = \frac{4}{5}$, имеем $x = y^{\frac{8}{30}} = y^{\frac{4}{15}}$. Тогда из третьего уравнения системы следует, что

$$\frac{4}{5} = y - \sqrt{y},\ y_2 = \left(\sqrt{\frac{21}{5}} - 1\right)^2 = \frac{1}{4};\ x_2 = \left(\sqrt{\frac{21}{5}} - 1\right)^{\frac{4}{15}\cdot 2} = \frac{1}{10}.$$

Итак, данная система имеет 2 решения:

$$x_1 = y_1 = 1,\ z_1 = 2 \text{ и } x_2 = \frac{1}{10}\left(\sqrt{\frac{21}{5}} - 1\right)^{\frac{4}{15}\cdot 2},\ y_2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{21}{5}} - 1\right)^2,$$

$$z_2 = \frac{4}{5}.$$

§ 5. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ЛОГАРИФМИЧЕСКУЮ И ПОКАЗАТЕЛЬНУЮ ФУНКЦИИ

I. Пусть дано неравенство

$$\alpha < a^u < \beta, \tag{20}$$

где u — некоторое выражение, содержащее неизвестное x, α, β и a — заданные положительные числа или параметры.

Прологарифмируем данное неравенство по основанию a. Если $a > 1$, то неравенство (20) равносильно неравенству $\log_a \alpha < u < \log_a \beta$. Если $a < 1$, то (20) равносильно неравенству

$$\log_a \alpha > u > \log_a \beta.$$

II. Если основание степени также зависит от x, т. е.

$$v^\alpha < v^u < v^\beta \tag{21}$$

(v зависит от x, т. е. содержит x, причем $v > 0$), то (21) равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} \alpha < u < \beta, \\ v > 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \beta < u < \alpha, \\ 0 < v < 1. \end{cases}$$

III. Неравенство

$$\alpha < \log_a u < \beta \tag{22}$$

можно представить в виде

$$\log_a a^\alpha < \log_a u < \log_a a^\beta. \tag{23}$$

В силу монотонности логарифмической функции (23) равносильно одному из неравенств

$$a^\alpha < u < a^\beta \text{ при } a > 1$$

или

$$a^\alpha > u > a^\beta \text{ при } 0 < a < 1.$$

В частности, неравенство

$$\log_a u < \beta \tag{24}$$

равносильно одному из неравенств

$$0 < u < a^\beta \text{ при } a > 1$$

или $u > a^\beta$ при $0 < a < 1$.

(Из последнего следует, что $a>0$, так как $a^\beta>0$).

Неравенство

$$\log_{a^\beta} a>3 \qquad (25)$$

равносильно одному из неравенств

$$a>a^\beta, \text{ если } a>1,$$

или $0<a<a^\beta$, если $0<a<1$.

Пример 1. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1)}<1.$$

Решение. Это неравенство типа (20), где $a=\log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1)$, $\beta=1$. Так как $a=\frac{1}{2}<1$, то оно равносильно неравенству

$$\log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1)>0.$$

Последнее согласно (25) равносильно неравенству

$$0<x^2-3x+1<1.$$

Решая его (см. гл. III, § 14), находим

$$0<x<\frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ и } \frac{3+\sqrt{5}}{2}<x<3.$$

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{1}{100}<\log^2_{0,1} x<1.$$

Решение. Данное неравенство перепишем в виде

$$0,1<|\log_{0,1} x|<1$$

Последнее равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} 0,1<\log_{0,1} x<1, \\ \log_{0,1} x>0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} -1<\log_{0,1} x<-0,1, \\ \log_{0,1} x<0 \end{cases}$$

или согласно (23), (25) и (24) совокупности систем

$$\begin{cases} 0,1<x<\sqrt[10]{0,1}, \\ 0<x<1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \sqrt[10]{10}<x<10, \\ x>1. \end{cases}$$

Таким образом, решения данного неравенства — интервалы $(0,1;\ \sqrt[10]{0,1})$ и $(\sqrt[10]{10},\ 10)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$4x^2+3\cdot 3^{\sqrt{x}}+x\cdot 3^{\sqrt{x}}<2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}+2x+6.$$

Решение. Сгруппируем члены, содержащие $3^{\sqrt{x}}$. Имеем

$$(2x^2-x-3)(3^{\sqrt{x}}-2)>0.$$

Последнее равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} 2x^2-x-3>0, \\ 3^{\sqrt{x}}-2>0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x^2-x-3<0, \\ 3^{\sqrt{x}}-2<0. \end{cases}$$

Решая первую систему, находим $x>\frac{3}{2}$; решая вторую, находим $0\leqslant x<\log^2_3 2$.

И при решении неравенств иногда целесообразна замена неизвестного.

Пример 4. Решить неравенство

$$\log_2\log_3\frac{x+1}{x-1}<\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-1}{x+1}.$$

Решение. Учитывая, что $\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-1}{x+1}=\log_3\frac{x+1}{x-1}$, и полагая $\log_3\frac{x+1}{x-1}=y$, получаем $\log_2 y<\log_{\frac{1}{2}} y$ или $\log_2 y<-\log_2 y$, т. е. $\log_2 y<0$. Последнее равносильно неравенству $0<y<1$. Возвращаясь к неизвестному x, имеем

$$0<\log_3\frac{x+1}{x-1}<1,$$

что в соответствии с (21) равносильно неравенству

$$1<\frac{x+1}{x-1}<3.$$

Решая последнее, находим $2<x<\infty$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\log_{\frac{2}{2}}\left(4^{x^2+x}+2^{x^2+x-1}-\frac{1}{2}\right)<1.$$

Решение. Данное неравенство согласно (24) равносильно неравенству

$$0<4^{x^2+x}+2^{x^2+x-1}-\frac{1}{2}<\frac{3}{2}.$$

Полагая $y = 2^{x^2+4x}$ (тогда $4^{x^2+4x} = y^2$), имеем $0 < y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} < \frac{9}{2}$, или $0 < 2y^2 + y - 1 < 9$, причем $y > 0$. Таким образом, данное неравенство равносильно следующей системе

$$\begin{cases} 2y^2 + y - 1 > 0, \\ 2y^2 + y - 10 < 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим, что $\frac{1}{2} < y < 2$. Следовательно, $\frac{1}{2} < 2^{x^2+4x} < 2$ или $2^{-1} < 2^{x^2+4x} < 2^1$. Это неравенство согласно (21) равносильно неравенству $-1 < x^2 + 4x < 1$, из которого находим, что

$$-2 - \sqrt{5} < x < -2 - \sqrt{3} \text{ и } -2 + \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{5}.$$

ГЛАВА IX

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. УГОЛ В ТРИГОНОМЕТРИИ

Пусть луч, выходящий из точки O, занимает исходное положение OA. Сделав некоторый поворот от этого исходного положения против или по часовой стрелке, он займет положение OB (рис. 52). Это новое положение вместе с исходным образует угол AOB, у которого OA называется *начальной*, а OB — *конечной* сторонами. Угол называется *положительным*, если он образован поворотом луча против часовой стрелки, и *отрицательным* — в противоположном случае. Наименьший положительный поворот, при котором конечная сторона совместится с начальной, называется полным углом.

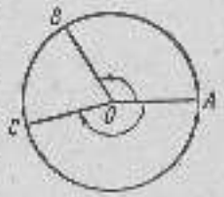


Рис. 52

При вращении луча от начальной стороны OA до конечной OB, он может совершить несколько полных положительных или отрицательных поворотов, т. е. одно и то же взаимное расположение лучей OA и OB может быть достигнуто бесконечным множеством различных поворотов. Следовательно, чтобы задать угол AOB, недостаточно знать его начальную и конечную стороны, а нужно указать еще тот поворот, который переводит луч из начального положения OA в конечное OB. Этим и определяется угол в тригонометрии.

Как и в геометрии, углы в тригонометрии измеряются в градусах и радианах*. Но если мера или величина геометрического угла есть число положительное, принимающее значения от 0 до 360° (градусов) или от 0 до 2π (радиан), то величина тригонометрического угла есть число, которое может принимать любые положительные и отрицательные значения.

Два угла называются *равными*, если равны их величины. При этом, очевидно, их начальные и конечные стороны могут быть совмещены. Обратное утверждение не имеет места, т. е. из совпадения сторон двух углов α и β не вытекает, вообще говоря, равенство этих углов. Однако они могут отличаться друг от друга только

* Существуют и другие единицы для измерения углов. Мы на них останавливаться не будем.

ко на полное число оборотов положительных или отрицательных, т. е.

$$\alpha - \beta = 360^\circ \cdot k \text{ или } \alpha - \beta = 2\pi k,$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Здесь, как и в дальнейшем, под словом угол понимают и величину угла (т. е. слово «величина» опускается так же, как говоря «сторона треугольника $a = 3$», опускают слово «длина»).

Суммой двух углов α и β называется третий угол γ, построенный по следующему правилу:

принимая конечную сторону первого угла за начальную сторону второго, откладывают от нее второй угол против или по часо-

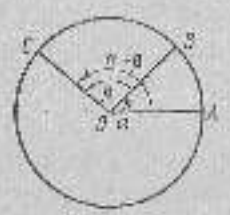


Рис. 53

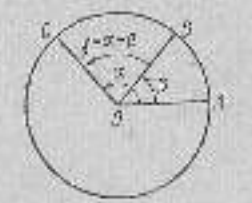


Рис. 54

вой стрелке, в зависимости от знака второго слагаемого (рис. 53). Вычитание углов определяется как действие, обратное сложению, т. е. $\alpha - \beta = \gamma$, если $\beta + \gamma = \alpha$.

Таким образом, если углы α и β откладывать от общей стороны OA и за начальную сторону разности γ принять конечную сторону OB вычитаемого β, то конечная сторона γ совпадет с конечной стороной OC уменьшаемого α (рис. 54). Заметим, что всякое вычитание может быть рассмотрено как сложение, т. е.

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

Очевидно, сложению углов соответствует сложение их величин, т. е. величина суммы углов равна сумме величин слагаемых.

§ 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ КРУГ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Для удобства в тригонометрии используется так называемый «тригонометрический круг» — окружность произвольного радиуса R с центром в начале прямоугольной системы координат (рис. 55). Координатные оси делят этот круг на четыре квадранта, или четверти, соответствующие координатным четвертям и занумерованные в том же порядке. Горизонтальный радиус OA принимают за неподвижный и считают его начальной стороной всех углов в круге (если не сделано дополнительной оговорки). Конечную сторону этих углов образует другой радиус OB, который называют по-

движным. Каждому действительному числу α соответствует единственное положение подвижного радиуса OB (или точки B на окружности), образующее угол в α радиан. Обратная связь неоднозначна — каждому положению подвижного радиуса OB (или точки B на окружности) соответствует бесчисленное множество действительных чисел α — величины всех углов, определенных этим положением подвижного радиуса OB. Все эти числа содержатся в формуле $\alpha + 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и α — одно из этих чисел.

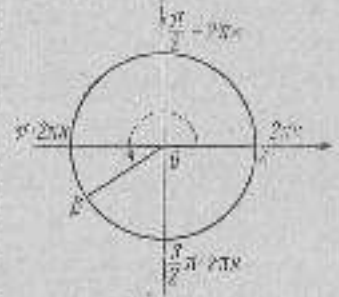


Рис. 55

Говорят, что угол α оканчивается в той четверти, в которой лежит соответствующий ему подвижный радиус. В частности, если α — острый угол, т. е. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то говорят, что он принадлежит 1-й четверти.

Углы, конечная сторона которых лежит на горизонтальном или вертикальном диаметре (границы четвертей), обычно не относят ни к одной четверти. Таким образом, углы, изменяющиеся в интервалах $\left(2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, или $(360^\circ \cdot k, 90^\circ + 360^\circ k)$, оканчиваются в первой четверти. Углы, изменяющиеся в интервалах $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi(2k+1)\right)$, или $(90^\circ + 360^\circ k, 180^\circ + 360^\circ \cdot k)$, оканчиваются во второй четверти. Углы, изменяющиеся в интервалах $\left(\pi + 2\pi k, \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right)$, или $(180^\circ + 360^\circ \cdot k, 270^\circ + 360^\circ \cdot k)$, оканчиваются в третьей четверти. И, наконец, углы, изменяющиеся в интервалах $\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k\right)$ или $(270^\circ + 360^\circ \cdot k, 360^\circ + 360^\circ \cdot k)$, оканчиваются в четвертой четверти.

Замечание. Вместо углов в круге можно говорить о соответствующих им дугах окружности, как положительных, так и отрицательных. При этом градусные измерения тех и других совпадают. Поэтому, все, что в дальнейшем будет говориться об углах, в равной мере следует относить и к дугам.

Пусть α — некоторый угол и OB — соответствующий ему подвижный радиус. Обозначим через x и y координаты точки B и докажем, что для любого угла α величина отношения $\frac{y}{R}$ и $\frac{x}{R}$ не зависят от длины радиуса R. С этой целью рассмотрим два тригонометрических круга с радиусами R и R_1 (рис. 56).

Пусть для определенности $R < R_1$. Продолжая радиус OB, получим на второй окружности точку B_1 с координатами x_1 и y_1. Очевидно, что тот же угол α во втором круге определяется радиу-

сек OB_1. Если точки B и B_1 совпадают на концы вертикального или горизонтального диаметра, то справедливость нашего утверждения очевидна (например, для левого конца горизонтального диаметра $y=y_1=0$, $x=-R$, $x_1=-R_1$ и, следовательно, $\frac{y}{R}=\frac{y_1}{R_1}=0$, $\frac{x}{R}=\frac{x_1}{R_1}=-1$. Аналогично исследуются другие три случая). Во всех остальных случаях можно построить подобные треугольники OBC и OB_1C_1, где C и C_1 — проекции точек B и B_1 на горизонтальный диаметр.

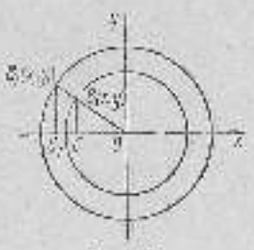


Рис. 58

Из подобия этих треугольников имеем

$$\frac{BC}{R}=\frac{B_1C_1}{R_1} \text{ и } \frac{OC}{R}=\frac{O_1C_1}{R_1}.$$

Так как $BC=|y|$, $B_1C_1=|y_1|$, $OC=|x|$ и $OC_1=|x_1|$, то

$$\frac{|y|}{R}=\frac{|y_1|}{R_1} \text{ и } \frac{|x|}{R}=\frac{|x_1|}{R_1},$$

откуда в силу совпадения знаков x и x_1, y и y_1 следует требуемое, т. е.

$$\frac{y}{R}=\frac{y_1}{R_1} \text{ и } \frac{x}{R}=\frac{x_1}{R_1}. \qquad (*)$$

Из равенств (*), справедливых для любого α, следует независимость от длины радиуса R отношения $\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}=\frac{y_1}{x_1}\right)$, если $x\neq 0$ и $x_1\neq 0$, т. е. $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ и отношения $\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}=\frac{x_1}{y_1}\right)$, если $y\neq 0$ и $y_1\neq 0$, т. е. $\alpha\neq k\pi$. Все эти четыре отношения, зависящие только от угла α, называются тригонометрическими функциями этого угла, а именно:

1. *Синусом* угла α называется отношение ординаты конца подвижного радиуса, соответствующего α, к длине радиуса

$$\sin\alpha=\frac{y}{R}.$$

2. *Косинусом* угла α называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса, соответствующего α, к длине радиуса

$$\cos\alpha=\frac{x}{R}.$$

3. *Тангенсом* угла α называется отношение ординаты конца подвижного радиуса, соответствующего α, к его абсциссе

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}.$$

4. *Котангенсом* угла α называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса угла, соответствующего α, к его ординате

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}.$$

Иногда, кроме этих четырех функций, рассматриваются еще две функции: секанс и косеканс.

Секансом угла α называется величина, обратная косинусу α, т. е. $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$. *Косекансом* угла α называется величина, обратная синусу α, т. е. $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$. Эти две функции специального интереса не представляют, ими пользуются лишь как удобными представлениями выражений $\frac{1}{\sin\alpha}$ и $\frac{1}{\cos\alpha}$. Поэтому мы в дальнейшем будем изучать свойства только первых четырех функций: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$. Из определения тригонометрических функций вытекает, что

1) функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определены для любого α, причем $|\sin\alpha|\leqslant 1$ и $|\cos\alpha|\leqslant 1$;

2) функция $\operatorname{tg}\alpha$ определена для всех $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots$). Подвижный радиус, соответствующий значению $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$, лежит на вертикальном диаметре (абсцисса его конца равна нулю);

3) функция $\operatorname{ctg}\alpha$ определена для всех $\alpha\neq k\pi$. Подвижный радиус, соответствующий значению $\alpha=k\pi$, лежит на горизонтальном диаметре (ордината его конца равна нулю).

Знаки функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ совпадают со знаками ординаты и абсциссы конца соответствующего радиуса. Знаки функций $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ положительны в тех четвертях, где совпадают знаки координат x и y. Следовательно, $\sin\alpha>0$, если α оканчивается в I и II четвертях, $\cos\alpha>0$, если α оканчивается в I и IV четвертях, $\operatorname{tg}\alpha>0$ и $\operatorname{ctg}\alpha>0$, если α оканчивается в I и III четвертях.

Вместо тригонометрической функции угла или дуги можно говорить о тригонометрической функции действительного числа α.

Тригонометрической функцией *действительного аргумента* α называется одноименная тригонометрическая функция дуги или угла в α радиан. Все свойства тригонометрических функций мы будем формулировать для любого аргумента α, который может быть углом, дугой или числом.

§ 3. СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Четность и нечетность. Для любых двух аргументов α и $-\alpha$, отличающихся только знаком, соответствующие им подвижные радиусы OB и OB_1 симметричны относительно оси абсцисс. Поэтому $x_B=x_{B_1}$, $y_B=-y_{B_1}$, и

$$\sin(-\alpha)=\frac{y_{B_1}}{R}=-\frac{y_B}{R}=-\sin\alpha,$$

$$\cos(-\alpha)=\frac{x_{B_1}}{R}=\frac{x_B}{R}=\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{-y_{B_1}}{x_{B_1}}=\frac{-y_B}{x_B}=-\operatorname{tg}\alpha,\quad\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right);$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{x_{B_1}}{y_{B_1}}=\frac{x_B}{-y_B}=-\operatorname{ctg}\alpha,\quad(\alpha\neq\pi k)$$

Согласно определению четной и нечетной функции (см. гл. VI) отсюда вытекает, что функция $\cos\alpha$ — четная, а функции $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ — нечетные.

II. **Периодичность.** Значения тригонометрических функций определяются положением подвижного радиуса, которое не изменится, если его повернуть на полный угол по или против часовой стрелки. Это означает, что при прибавлении к аргументу α числа $\pm 2\pi$

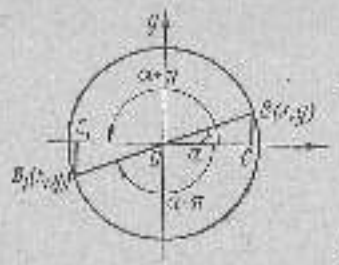


Рис. 57

$$\sin(\alpha\pm 2\pi)=\sin\alpha \qquad \text{для любого } \alpha.$$

$$\cos(\alpha\pm 2\pi)=\cos\alpha \qquad \text{для любого } \alpha.$$

Что касается тангенса и котангенса, то

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\pi)=\operatorname{tg}\alpha \qquad \text{для } \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\pi)=\operatorname{ctg}\alpha \qquad \text{для } \alpha\neq\pi n.$$

В самом деле, точки $B(x, y)$ и $B_1(x_1, y_1)$ окружности (рис. 57), соответствующие аргументам α и $(\alpha+\pi)$ (или α и $\alpha-\pi$), симметричны относительно начала координат, т. е.

$x=-x_1$, $y=-y_1$. Отсюда следует, что $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x}{y}$ и $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y}{x}$, т. е. $\operatorname{tg}(\alpha\pm\pi)=\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}(\alpha\pm\pi)=\operatorname{ctg}\alpha$. Таким образом, функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ — периодические (см. VII).

Покажем, что основной период функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ равен 2π, а функций $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ равен π.

Предварительно заметим, что 1) $\sin\alpha=1$ в том единственном случае, когда соответствующий подвижный радиус совпадает с верхней половиной вертикального диаметра, т. е. $\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k$; 2) $\cos\alpha=1$ в том единственном случае, когда соответствующий подвижный радиус совпадает с правой половиной горизонтального диаметра, т. е. $\alpha=2\pi k$; 3) $\operatorname{tg}\alpha=0$ в том единственном случае, когда соответствующий подвижный радиус лежит на горизонтальном диаметре, т. е. $\alpha=\pi k$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha=0$ в том единственном случае,

когда соответствующий подвижный радиус лежит на вертикальном диаметре, т. е. $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k$. Из этих замечаний следует, что

1) наименьший положительный поворот, через который может повториться единичное значение синуса и косинуса, равен 2π. Это означает, что период синуса и косинуса не может быть меньше, чем 2π. Следовательно, период 2π является основным для этих функций;

2) наименьший положительный поворот, через который может повториться нулевое значение тангенса и котангенса, равен π. Следовательно, период π является для этих функций основным.

III. **Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.** Пусть аргументу α соответствует подвижный радиус OB и x, y — координаты точки B. Имеем:

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{y}{R}\right)^2+\left(\frac{x}{R}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{R^2}=1$, так как $x^2+y^2=R^2$ (см. гл. I). Таким образом, для любого α

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1; \tag{1}$$

2) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\frac{y}{R}}{\frac{x}{R}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

для любого $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$*;

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{\frac{x}{R}}{\frac{y}{R}}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

для любого $\alpha\neq\pi k$.

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \tag{3}$$

3) к этим трем тождествам присоединим еще два, определяющие функции $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\quad\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right), \tag{4}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}\quad(\alpha\neq\pi k). \tag{5}$$

* Здесь и в дальнейшем $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Тождества (1)—(5) называются основными. Из них получаются еще три тождества.

Из (2) и (3) следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}k\right). \tag{6}$$

Из (2), (1) и (4) следует, что

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha,$$

т. е.

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right). \tag{7}$$

Из (3), (1) и (5) следует, что

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha,$$

т. е.

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha \ (\alpha \neq k\pi). \tag{8}$$

§ 4. ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Дальнейшие свойства тригонометрических функций мы получим при анализе их графиков.

1. $y = \sin x$. Возьмем окружность единичного радиуса с центром в точке $(-1, 0)$ и разделим на m равных частей верхнюю полуокружность (рис. 58). Точки деления обозначим через A_0, A_1, ..., A_m (нумерация проводится против часовой стрелки). На то же число m равных частей разделим отрезок $[0, \pi]$ оси абсцисс. Точки деления обозначим через $x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots, x_m = \pi$. Очевидно, что $\sin x_k$ равен ординате точки A_k окружности. Поэтому, проведя из $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$ вертикали и спроектировав на них $A_0, A_1, \ldots, A_m$

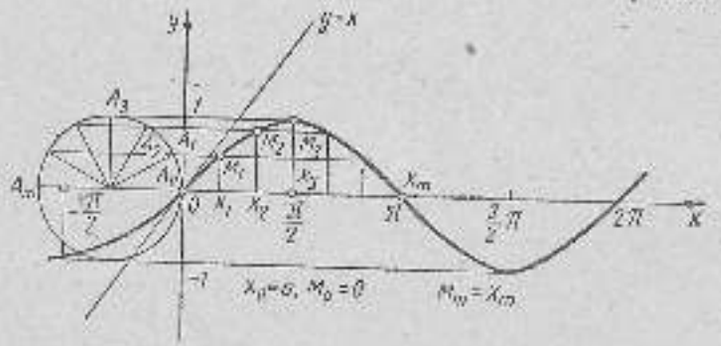


Рис. 58

соответственно, мы найдем ряд точек $M_0, M_1, \ldots, M_m$, лежащих на искомом графике. Теперь соединим их плавной кривой и мы получим график синуса на отрезке $[0, \pi]$. Используя свойство нечетности, а затем периодичности синуса, строим его график сначала на отрезке $[-\pi, 0]$, а затем на всей числовой оси. Полученная кривая называется *синусоидой*, а каждая ее часть, соответствующая отрезкам $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, ... или $[-\pi, \pi]$, $[\pi, 3\pi]$ и т. д., называется *волной* синусоиды.

Замечание. 1) так как $\sin x < x$ (см. § 5), то синусоида лежит ниже биссектрисы I координатного угла и выше биссектрисы III координатного угла.

2) при соединении точек $M_0, M_1, \ldots, M_m$ полезно учесть, что график функции $y = \sin x$ выпуклый на интервале $(0, \pi)$. В самом деле, условием выпуклости в нашем случае является справедливость неравенства

$$\sin\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2},$$

или

$$\sin x_1 + \sin x_2 < 2\sin\frac{x_1 + x_2}{2},$$

где

$$0 < x_1 < x_2 < \pi.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству

$$2\sin\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \cos\frac{x_2 - x_1}{2} < 2\sin\frac{x_1 + x_2}{2},$$

или

$$\cos\frac{x_2 - x_1}{2} < 1$$

(см. гл. X).

Последнее очевидно, так как $0 < \left|\frac{x_2 - x_1}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$.

Мы видим, что функция $y = \sin x$:

1) монотонно возрастает от -1 до 1 на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, принимая при этом все значения от -1 до 1, и монотонно убывает от 1 до -1 на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right]$, принимая при этом все значения от $+1$ до -1;

2) принимает наибольшее значение равное 1, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и наименьшее значение, равное -1, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

3) обращается в нуль при $x = \pi k$.

II. $y=\cos x$. Так как $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ (см. гл. X), то график функции $y=\cos x$ получается сдвигом графика $y=\sin x$ на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево вдоль оси OX (см. гл. VII, § 8). Полученная кривая (*косинусоида*) симметрична относительно оси Oy (рис. 59).

Мы видим, что функция $y=\cos x$:

1) монотонно возрастает от -1 до 1 на каждом из промежутков $[\pi+2\pi k,\ 2\pi+2\pi k]$, принимая при этом все промежуточные значения от -1 до 1, и монотонно убывает от 1 до -1 на каждом из

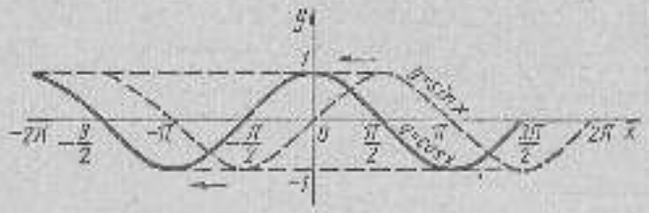


Рис. 59

промежутков $[2\pi k,\ \pi+2\pi k]$, принимая при этом все значения от 1 до -1;

2) принимает наибольшее значение, равное 1 при $x=2\pi k$, и наименьшее значение, равное -1 при $x=\pi+2\pi k$;

3) обращается в нуль при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

III. $y=\operatorname{tg} x$. Проведем единичную окружность с центром в точке $(-1,\ 0)$ (рис. 60). Разделив дугу первой четверти на m равных частей, получаем точки $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_m=\frac{\pi}{2}$ $(A_0=0)$. Проведем радиусы $OA_0,\ OA_1,\ \ldots,\ OA_{m-1}$ и продолжим их до пересечения с осью OY в точках $C_0,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{m-1}$. Одновременно разделим отрезок $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ оси OX на m равных частей точками $x_0=0$, $x_1,\ \ldots,\ x_m=\frac{\pi}{2}$. Очевидно, значение тангенса в точке x_k численно равно длине отрезка OC_k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1)$. Поэтому, проведя вертикали из точек $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{m-1}$ и спроектировав на них точки $C_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_{m-1}$ соответственно, находим точки $M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_{m-1}$, лежащие на графике $y=\operatorname{tg} x$. Соединив их плавной кривой, получаем график функции $y=\operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 60).

Замечание. 1) Из неравенства $\operatorname{tg} x>x$ для $0<x<\frac{\pi}{2}$ (см. гл. IX, § 5) следует, что график $y=\operatorname{tg} x$ на интервале $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ лежит выше биссектрисы первого координатного угла;

2) при доказательстве точек $M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_{m-1}$ полезно учесть, что график функции $y=\operatorname{tg} x$ вогнут на промежутке $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. В самом деле, условием вогнутости в нашем случае является справедливость неравенства

$$\operatorname{tg}\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\operatorname{tg} x_1+\operatorname{tg} x_2}{2}$$

или

$$2\operatorname{tg}\frac{x_1+x_2}{2}<\operatorname{tg} x_1+\operatorname{tg} x_2,$$

где $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$, и, следовательно, $0<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}$. Используя формулы 28 и 30 гл. X, получаем равносильное неравенство

$$\frac{\sin(x_1+x_2)}{1+\cos(x_1+x_2)}<\frac{\sin x_1+\sin x_2}{\cos x_1+\cos x_2},$$

которое равносильно в свою очередь неравенству

$$2\cos x_1+\cos x_2<1+\cos(x_1+x_2),$$

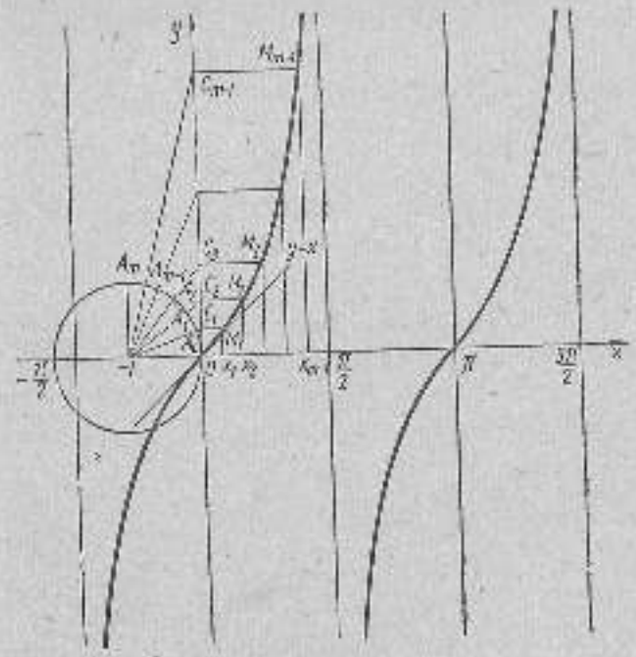


Рис. 60

Переходя в левой части от произведения к сумме (см. формулу 28 гл. X), получим неравенство

$$\cos(x_2+x_2)+\cos(x_1-x_2)<1+\cos(x_1+x_2)$$

или

$$\cos(x_1-x_2)<1,$$

которое очевидно.

Используя нечетность и периодичность тангенса ($T=\pi$), строим его график сначала на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, а затем на всей числовой оси (рис. 60).

График функции $y=\operatorname{tg} x$ называется *тангенсоидой*. Тангенсоида состоит из ряда отдельных одинаковых частей (ветвей), на которые она распадается при прохождении аргумента x через точки $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$. Поэтому достаточно рассмотреть одну из таких ветвей, например, на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. На этом интервале $y=\operatorname{tg} x$ возрастает, принимая при этом все значения, как положительные, так и отрицательные. Когда аргумент приближается к правому концу интервала, то функция $y=\operatorname{tg} x$ неограниченно возрастает.

Это означает, что для любого $M>0$ существует интервал $\left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$, в котором $\operatorname{tg} x>M$ (см. гл. VII). В этом случае говорят, что $\operatorname{tg} x$ стремится к положительной бесконечности, когда x стремится к $\frac{\pi}{2}$, оставаясь все время меньше $\frac{\pi}{2}$, и пишут

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

Когда аргумент x приближается к левому концу указанного интервала, то функция $y=\operatorname{tg} x$ неограниченно убывает.

Это означает, что для любого $M>0$ существует интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, x_1\right)$, в котором $\operatorname{tg} x<-M$. В этом случае пишут

$$\lim_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\ x>-\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Прямые $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ являются вертикальными асимптотами тангенсоиды.

IV. $y=\operatorname{ctg} x$. Так как $\operatorname{ctg} x=-\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, то согласно правилам I и VII (гл. VII, §8) график котангенса получается из графика тангенса путем двух преобразований: сначала сдвигаем тангенсоиду $y=\operatorname{tg} x$ на $\frac{\pi}{2}$ единиц вправо вдоль оси Ox, а затем полученный график $y=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ отображаем симметрично относительно оси абсцисс (рис. 61).

График функции $y=\operatorname{ctg} x$ называется *котангенсоидой*. Он состоит из одинаковых «ветвей», соответствующих интервалам $(\pi k, \pi(k+1))$. На каждом из этих интервалов $y=\operatorname{ctg} x$ монотонно убывает, причем $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \operatorname{ctg} x=+\infty$ и $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} \operatorname{ctg} x=-\infty$. Прямые $x=\pi k$ являются его вертикальными асимптотами.

V. График простого гармонического колебания (гармоника). Простое гармоническое колебание описывается уравнением $y=A\sin(\omega x+\varphi)$, где $A>0$ называется *амплитудой*, ω — *частотой*, а φ — *начальной фазой*. Представив эту функцию в виде $y=A\sin\omega\left(x+\frac{\varphi}{\omega}\right)$, мы видим, что ее график получается из графика $y=\sin x$ путем следующих его последовательных преобразований.

1. Согласно правилу VI, гл. VII, §8 сжатием вдоль оси Ox с коэффициентом ω из графика $y=\sin x$, получаем график $y=\sin\omega x$ (рис. 62, *а*).

2. Сдвигая кривую $y=\sin\omega x$ вдоль оси Ox на отрезок $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ (вправо, если $\frac{\varphi}{\omega}<0$ и влево, если $\frac{\varphi}{\omega}>0$), получаем график функции $y=\sin\omega\left(x+\frac{\varphi}{\omega}\right)$ (рис. 62, *б*).

3. Растягивая кривую $y=\sin\omega\left(x+\frac{\varphi}{\omega}\right)$ вдоль оси Oy с коэффициентом A, получаем требуемый график $y=A\sin\omega\left(x+\frac{\varphi}{\omega}\right)$ или $y=A\cdot\sin(\omega x+\varphi)$ (рис. 62, *б*).

Так как функция $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ — периодическая с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$ (см. гл. VII, § 5), то достаточно построить ее график сначала на отрезке $\left[-\frac{\pi}{\omega}-\varphi, \frac{\pi}{\omega}-\varphi\right]$, а затем полученную основную волну гармоники продолжить периодически. Основная волна гармоники получается путем преобразований 1, 2, 3 основной волны синусоиды $y=\sin x$, $|x|\leqslant\pi$.

Итак, графиком гармоники $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ есть синусоида с периодом $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Ее основная волна расположена внутри прямоугольника со сторонами $y=\pm A$ и $x=\pm\frac{\pi}{\omega}-\varphi$.

Пример. Построить график функции

$$y=2\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

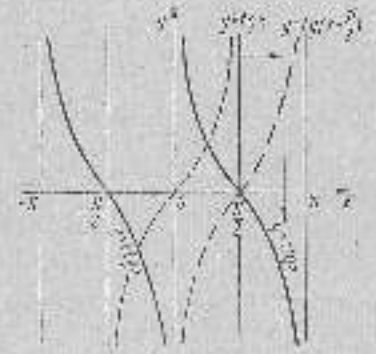


Рис. 51

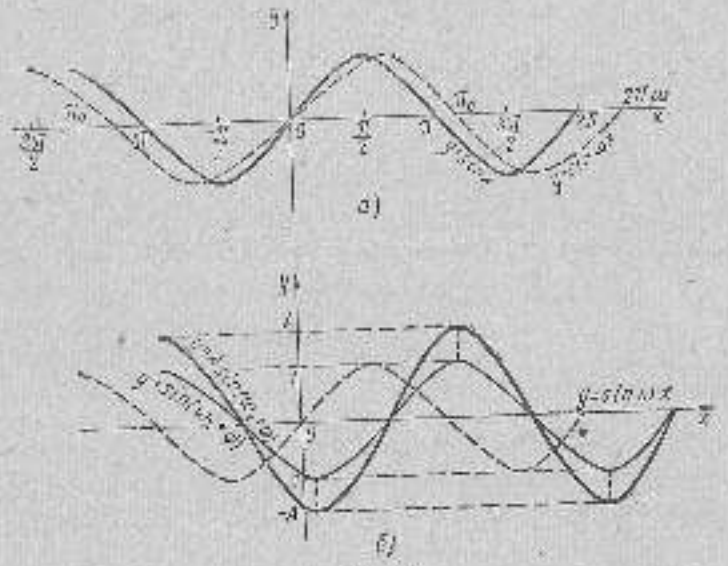


Рис. 52

Решение. Мы видим, что искомый график есть гармоника с амплитудой $A=2$, периодом $T=4\pi$ и начальной фазой $\varphi=-\frac{\pi}{3}$. Ее основная волна расположена в прямоугольнике со сторонами $y=\pm 2$, $x=\pm 2\pi+\frac{\pi}{3}$. Наибольшее значение $A=2$ достигается при $x=\pi+\frac{\pi}{3}$, наименьшее — при $x=-\pi+\frac{\pi}{3}$ (рис. 63).

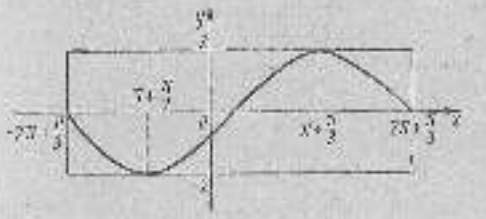


Рис. 63

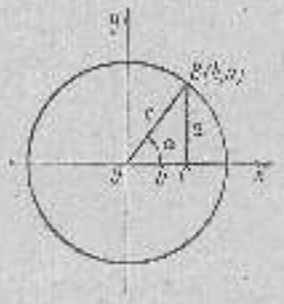


Рис. 64

§ 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА

Пусть α — острый угол $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ и OB — соответствующий ему подвижный радиус. Тогда этот угол можно рассматривать как острый угол в прямоугольном треугольнике BOC, в котором катеты OC и BC равны соответственно координатам x и y точки B, а гипотенуза OB равна радиусу круга (рис. 64). Верно и обратное. Всякий прямоугольный треугольник BOC с острым углом α, гипотенузой c и катетами a и b можно поместить в тригонометрический круг радиуса $R=c$ так, как это указано на рис. 64. При этом координаты точки B совпадают с длинами катетов: $B(b,\ a)$.

Согласно определению тригонометрических функций произвольного угла имеем:

1) $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, т. е. синус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к гипотенузе;

2) $\cos\alpha=\frac{b}{c}$, т. е. косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к гипотенузе;

3) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$, т. е. тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему;

4) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, т. е. котангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к противолежащему.

Очевидно, что все тригонометрические функции острого угла в прямоугольном треугольнике положительны.

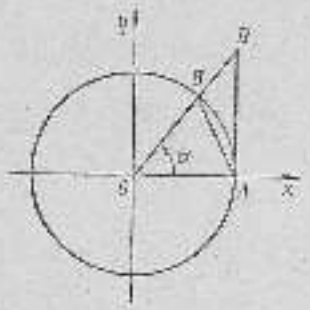


Рис. 65

Пусть α — радианная мера острого угла. Продолжим соответствующий ему подвижный радиус OB до пересечения в точке D с вертикальной касательной, проведенной к окружности в точке A (рис. 65). Рассмотрим треугольники BOA и DOA и круговой сектор BOA. Все они содержат общий угол α. Согласно свойству площадей (см. гл. XIV)

$$S_{BOA} < S_{\text{сект}} < S_{DOA}. \qquad (*)$$

Вычисляя эти площади, имеем

$$S_{BOA} = \frac{1}{2} OB \cdot \sin\alpha \cdot OB = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin\alpha,$$

$$S_{\text{сект}} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \alpha \text{ и } S_{DOA} = \frac{1}{2} OA \cdot AD = \frac{1}{2} OA \cdot OA \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{R^2}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Подставляя найденные значения площадей в неравенство (*) и сокращая все его члены на множитель $\frac{R^2}{2}$, получаем

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha. \qquad (9)$$

Итак, мы доказали важное неравенство, справедливое для действительных чисел α, заключенных в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Заметим, что $\sin\alpha < \alpha$ для любого $\alpha > 0$.

§ 6. ЗАДАЧИ

Пример 1. Для каких значений x определены следующие функции:

$$1)\ \operatorname{ctg}(3x - 45^\circ), \quad 2)\ \operatorname{tg}\frac{(x-1)^2}{2}.$$

Решение. 1. Функция $\operatorname{ctg}\alpha$ определена для всех углов $\alpha \neq 180^\circ \cdot k$. Следовательно, функция $\operatorname{ctg}(3x - 15^\circ)$ определена для всех x, при которых $3x - 45^\circ \neq 180^\circ \cdot k$, т. е. при $x \neq 15^\circ + 60^\circ \cdot k$.

2. Функция $\operatorname{tg}\frac{(x-1)^2}{2}$ определена для всех действительных значений x, при которых $\frac{(x-1)^2}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, т. е. для $x \neq 1 \pm \sqrt{\pi(2k+1)}$. Здесь k

Здесь k принимает лишь положительные целые и нулевое значения, так как при $k = -1, -2, \ldots$ подкоренное выражение $\pi(2k+1) < 0$.

Пример 2. Определить знак чисел: 1) $\cos 2$, 2) $\cos(\sin\alpha)$, 3) $\sin 5 - \operatorname{tg} 4$.

Решение. 1. Так как $\pi = 3{,}1416\ldots$, то $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$. В этом интервале косинус принимает отрицательные значения. Следовательно, $\cos 2 < 0$.

2. Так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$ для любого α, то $-\frac{\pi}{2} < \sin\alpha < \frac{\pi}{2}$. Но в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ косинус принимает положительные значения, поэтому $\cos(\sin\alpha) > 0$.

3. Так как $\pi = 3{,}1416, \ldots, \frac{3}{2}\pi = 4{,}71, \ldots, 2\pi = 6{,}28, \ldots$, то $\frac{3}{2}\pi < 5 < 2\pi$ и $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$. Поэтому $\sin 5 < 0$, $\operatorname{tg} 4 > 0$. Следовательно, $\sin 5 - \operatorname{tg} 4 < 0$.

Пример 3. В каких четвертях может оканчиваться α, если 1) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2$, 2) $\cos\alpha = -\frac{\pi}{2}$, 3) $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$.

Решение. 1. Число $-\frac{\pi}{2} + 2 > 0$. Следовательно, α оканчивается в тех четвертях, где тангенс принимает положительное значение, т. е. в I и III четвертях. Это значит, что α может лежать лишь в одном из интервалов $\left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

2. Так как $-\frac{\pi}{2} < -1$, а косинус изменяется в пределах от -1 до 1, то не существует действительного α, при котором $\cos\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

3. Данное равенство справедливо для тех α, для которых $|\operatorname{tg}\alpha| = -\operatorname{tg}\alpha$. А это означает, что $\operatorname{tg}\alpha < 0$. Следовательно, α может оканчиваться во II и IV четвертях, т. е. в одном из интервалов $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi k\right)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Пример 4. Какие тригонометрические функции могут принимать значения

$$1)\ a + \frac{1}{a}\ (a \neq 0), \quad 2)\ 1 - \frac{1}{b}\ (b > 0)?$$

Решение. 1. Если $a \neq 0$, то $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geqslant 2$ (см. гл. II, § 8). Следовательно, эти значения могут принимать лишь функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

2. Функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ могут принимать любые значения, в частности, и значения $1 - \frac{1}{b}$ при любом $b \neq 0$.

Функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ могут принимать значения $1-\frac{1}{b}$ лишь для тех b, при которых $\left|1-\frac{1}{b}\right|\leqslant 1$. Решая это неравенство и учитывая, что $b>0$, находим $\frac{1}{2}\leqslant b<\infty$. Таким образом, функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ принимают значения $1-\frac{1}{b}$ в случае, если $b\geqslant\frac{1}{2}$. Функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ могут принимать значения $1-\frac{1}{b}$ при любых $b\neq 0$.

Пример 5. Какие из приведенных ниже функций являются четными и нечетными?

$$1)\ y=\sin^2 x,\quad 2)\ y=\sin x+2,\quad 3)\ y=\sqrt{\sin x}.$$

Решение. 1. $y=\sin^2 x=\sin x\cdot\sin x$ есть произведение двух нечетных функций и, следовательно, функция четная.

2. $y=\sin x+2$ есть сумма нечетной и четной функции и, следовательно, не обладает четностью, т. е. не является ни четной, ни нечетной функцией.

3. Так как $y=\sin x$ — нечетная функция, то отсюда следует, что $\sqrt{\sin x}$ четностью не обладает (радикал с четным показателем от нечетной функции (см. гл. VII, § 6).

Пример 6. Доказать, что функция $y=\sin\sqrt{x}$ не имеет периода.

Решение. Предположим, что T — период функции $\sin\sqrt{x}$. Тогда, по определению периода $\sin\sqrt{x+T}=\sin\sqrt{x}$ для любого x.

Взяв в частности $x=0$ и $x=T$, получаем два равенства

$$\sin\sqrt{T}=0\ \text{ и }\ \sin\sqrt{2T}=\sin\sqrt{T},$$

из которых вытекает, что $\sqrt{T}=\pi k$ и $\sqrt{2T}=\pi n$, где k и n — целые. Отсюда следует, что $\pi^2k^2=\frac{1}{2}\pi^2n^2$, т. е. $2=\frac{n^2}{k^2}$, что невозможно при целых n и k (см. гл. I).

Пример 7. Доказать, что $|\cos\alpha|+|\sin\alpha|\geqslant 1$.

Решение. Очевидно, что $\cos^2\alpha=|\cos\alpha|^2\leqslant|\cos\alpha|$ и $\sin^2\alpha=|\sin^2\alpha|\leqslant|\sin\alpha|$. Отсюда следует, что $|\cos\alpha|+|\sin\alpha|\geqslant 1$, причем это равенство достигается лишь в том случае, когда либо $|\sin\alpha|=1$, либо $|\cos\alpha|=1$, т. е. при $\alpha=\pi k$ и $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k$. Последние два равенства можно объединить в одно $\alpha=\frac{\pi}{2}\cdot n$, $n=0,\pm 1,\pm 2,\pm\ldots$

Можно дать другое доказательство, использующее тригонометрический круг. Пусть $\alpha\neq\frac{\pi}{2}n$ и $OB=1$ — подвижный радиус, соответствующий α. Рассмотрим прямоугольный треугольник BOC (C — проекция точки B на горизонтальный диаметр). Очевидно, $|\sin\alpha|=\frac{BC}{1}=BC$, $|\cos\alpha|=\frac{OC}{1}=OC$, $OB=R=1$. По свойству сторон треугольника $BC+OC>OB$, то и дает требуемое неравенство $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|>1$.

При $\alpha=\frac{\pi}{2}n$, либо $|\cos\alpha|=0$ и $|\sin\alpha|=1$, либо $|\sin\alpha|=1$ и $|\cos\alpha|=0$ и $|\cos\alpha|+|\sin\alpha|=1$.

Пример 8. В каких четвертях справедливо неравенство $\sin\alpha+\cos\alpha<1$?

Решение. В первой четверти $\sin\alpha=|\sin\alpha|$, $\cos\alpha=|\cos\alpha|$ и, следовательно, $\sin\alpha+\cos\alpha\geqslant 1$ (см. задачу 7). Во второй четверти $\cos\alpha<0$ и поэтому $\sin\alpha+\cos\alpha<\sin\alpha<1$. В третьей четверти $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha<0$ и поэтому $\sin\alpha+\cos\alpha<1$. В четвертой четверти $\sin\alpha<0$ и поэтому $\sin\alpha+\cos\alpha<\cos\alpha<1$. Итак, неравенство $\sin\alpha+\cos\alpha<1$ справедливо для всех α, оканчивающихся во второй, третьей и четвертой четвертях.

Пример 9. Определить, что больше: 1) $\sin 1$ или 1, 2) $\operatorname{tg}1$ или 1, 3) $\operatorname{tg}\frac{1}{5}$ или $\operatorname{tg}0{,}8$?

Решение. 1. Из неравенства $\sin\alpha<\alpha$ ($\alpha>0$) сразу следует, что $\sin 1<1$.

2. Из неравенства $\alpha<\operatorname{tg}\alpha$, $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ и $0<1<\frac{\pi}{2}$ сразу следует, что $\operatorname{tg}1>1$.

3. Так как $\frac{\pi}{5}<0{,}8$ и $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает в промежутке $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}<\operatorname{tg}0{,}8$.

Пример 10. Зная, что $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, найти значения всех тригонометрических функций этого аргумента.

Решение. I способ. Согласно формуле (1) $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (перед радикалом берется знак «—», так как в указанных пределах $\sin\alpha<0$). Затем, по формулам (2) и (3) находим $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\sqrt{2}$ и $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

II способ. Будем решать эту задачу, исходя из определения тригонометрических функций. Так как значения тригонометрических функций не зависят от радиуса тригонометрического круга, то полагая $R=3$, из равенства $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ находим, что абсцисса соответствующей точки круга равна -1 ($x=-1$). Из равенства $x^2+y^2=R^2$ находим ординату y этой точки $y=-2\sqrt{2}$ (в III четверти $y<0$). Зная x, y и R, определяем значения остальных тригонометрических функций.

Пример 11. Выразить через $\operatorname{tg}\alpha$ остальные тригонометрические функции этого аргумента, если $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Решение. В равенстве $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ полагаем $x = -1$ (в III четверти $x < 0$). Тогда $y = -\operatorname{tg}\alpha$ и $R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$. Согласно определению тригонометрических функций имеем

$$\sin\alpha = \frac{y}{R} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad \cos\alpha = \frac{x}{R} = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Пример 12. Упростить выражения

1) $\sqrt{\sec^2\alpha - 1}$, 2) $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, где $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, 3) $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, где $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Во всех случаях имеется в виду, как всегда, арифметическое значение корня.

1. Из равенства $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$ следует, что $\sec^2\alpha - 1 = \operatorname{tg}^2\alpha$ и $\sqrt{\sec^2\alpha - 1} = |\operatorname{tg}\alpha|$, так как знак $\operatorname{tg}\alpha$ неизвестен.

2. $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = |\sec\alpha| = -\sec\alpha$, так как $\sec\alpha < 0$, если $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

3. $\sqrt{1-\sin^2\alpha} = |\cos\alpha| = -\cos\alpha$, так как $\cos\alpha < 0$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

ГЛАВА X

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

§ 1. ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СУММЫ АРГУМЕНТОВ (ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ)

Будем рассматривать α и β как углы в тригонометрическом круге радиуса R. Отложим их от общего начала — радиуса OA. Пусть углу α соответствует радиус OB_1 и x_1, y_1 — координаты точки B_1, а углу β — радиус OB_2 и x_2, y_2 — координаты точки B_2 (рис. 66).

Согласно формуле расстояния между двумя точками (см. гл. I)

$$(B_1B_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Разделив все члены этого равенства на R^2 и учитывая, что

$$\frac{x_1}{R} = \cos\alpha, \quad \frac{y_1}{R} = \sin\alpha,$$

$$\frac{x_2}{R} = \cos\beta \text{ и } \frac{y_2}{R} = \sin\beta,$$

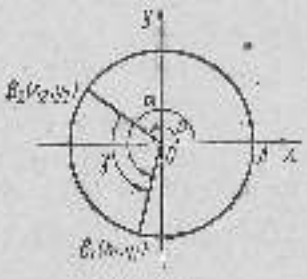


Рис. 66

получаем

$$\frac{(B_1B_2)^2}{R^2} = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2,$$

или

$$\frac{(B_1B_2)^2}{R^2} = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta). \tag{1}$$

Мы видим, что расстояние B_1B_2 зависит только от величин α и β и не зависит от выбора их общей начальной стороны.

Пусть $\gamma = \alpha - \beta$. Согласно определению величины углов (см. гл. IX, § 1), если принять радиус OB_2 за начальную сторону угла γ, то OB_1 совпадает с его конечной стороной (рис. 66).

Примем OB_2 за начальную сторону двух углов: нулевого (ему соответствует сам радиус OB_2) и угла, равного γ (ему соответ-

ствует радиус OB_1). Тогда по формуле (1), заменяя в ней α на γ, а β на 0, находим

$$\frac{(B_1A_1)^2}{R^2} = 2 - 2(\cos\gamma\cdot\cos 0 + \sin\gamma\cdot\sin 0). \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2) и учитывая, что $\cos 0 = 1$, а $\sin 0 = 0$, имеем

$$2 - 2(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta) = 2 - 2\cos\gamma.$$

Учитывая, что $\gamma = \alpha - \beta$, окончательно получаем тождество

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta, \qquad (3)$$

справедливое для любых α и β.

Так как $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$, то из формулы (3) вытекает, что

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) + \sin\alpha\cdot\sin(-\beta),$$

откуда в силу четности косинуса и нечетности синуса вытекает тождество

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta, \qquad (4)$$

также справедливое для любых α и β.

Полагая в (3) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и учитывая, что $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, а $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, получаем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta, \qquad (5)$$

справедливое для любого β. Отсюда, в свою очередь, следует справедливость для любого β равенства

$$\cos\beta = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right). \qquad (6)$$

Используя равенства (5), (3) и (6), имеем

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cdot\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta,$$

т. е.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta. \qquad (7)$$

Так как $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, то из (7) получаем

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta, \qquad (8)$$

Формулы (7) и (8) справедливы для любых α и β.

Пусть $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. Согласно формуле (2) гл. IX и формулам (7) и (4) этого параграфа

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}},$$

при условии, что $\cos\alpha\cdot\cos\beta \neq 0$, т. е. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$.

Производя сокращение и снова используя формулу (2) гл. IX, получаем

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \qquad (9)$$

для любых α и β, удовлетворяющих условию $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, где k, n и m — целые числа и нуль. Замечая, что $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ и $\operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg}\beta$, из формулы (9) получаем, что

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \qquad (10)$$

для любых α и β, удовлетворяющих условию $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$.

В качестве упражнения предлагаем читателю получить формулу

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta} \qquad (11)$$

$$(\alpha \pm \beta \neq k\pi, \quad \alpha \neq n\pi, \quad \beta \neq m\pi).$$

§ 2. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Формулами приведения называются тождества, связывающие тригонометрические функции аргументов

$$\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \quad \pi \pm \alpha, \quad \frac{3}{2}\pi \pm \alpha$$

с функциями аргумента α. Все эти формулы можно разбить на следующие группы:

I группа: для $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ $(90^\circ \pm \alpha)$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\alpha, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg}\alpha \quad (\alpha \neq \pi k),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin\alpha, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg}\alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right).$$

II группа: для $\pi \pm \alpha$ $(180^\circ \pm \alpha)$.

$$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin\alpha, \quad \operatorname{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg}\alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right),$$

$$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha, \quad \operatorname{ctg}(\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{ctg}\alpha \quad (\alpha \neq \pi k).$$

III группа: для $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$ $(270^\circ \pm \alpha)$.

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi \pm \alpha\right) = -\cos\alpha, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg}\alpha \quad (\alpha \neq \pi k),$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi \pm \alpha\right) = \pm \sin\alpha, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg}\alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right).$$

(Знаки в обеих частях равенств берутся соответственно.)

Все записанные тождества являются следствиями формул предыдущего параграфа (если принять в них один из аргументов равным $\frac{\pi}{2}$, π и $\frac{3}{2}\pi$) и формул: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Например, для первой группы формул получаем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha \pm \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha = \cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha \mp \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = \mp\sin\alpha$$

$$\left(\sin\frac{\pi}{2} = 1, \ \cos\frac{\pi}{2} = 0\right).$$

Далее

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\mp\sin\alpha} = \mp\operatorname{ctg}\alpha$$

и

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)} = \frac{\mp\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mp\operatorname{tg}\alpha.$$

Анализируя все формулы приведения, можно отметить следующее:

1) если α откладывается от горизонтального диаметра $(\pi \pm \alpha)$, то наименование приводимой функции, т. е. функции аргумента $(\pi \pm \alpha)$, не меняется; если же α откладывается от вертикального диаметра $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \ \frac{3}{2}\pi \pm \alpha\right)$, то наименование приводимой функции заменяется на сходное (синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот);

2) все формулы приведения справедливы для любого α, кроме указанных, в частности для $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Так как все тригонометрические функции такого α положительны, то знак правой части совпадает со знаком приводимой функции для $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (т. е. для острого угла, если α — угол).

Например, составим формулу приведения для $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$: 1) название тангенс меняем на котангенс $\left(\text{угол } \frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$. 2) если считать угол α острым, то угол $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ будет оканчиваться в IV четверти, а там тангенс отрицателен. Поэтому пишем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Замечание. Формулы приведения позволяют выразить значение тригонометрической функции любого угла (для которого она, конечно, имеет смысл) через значение тригонометрической функции угла, заключенного в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{4}$ (или от 0 до 45°).

Действительно, любое β можно представить как $\beta = 2k\pi + \beta_1$, где угол β_1 удовлетворяет условию $0 \leqslant \beta_1 < 2\pi$. Воспользовавшись свойством периодичности тригонометрических функций, перейдем от функции угла β к функции угла $0 \leqslant \beta_1 < 2\pi$. Но угол β_1 с каким-нибудь из диаметров круга (горизонтальным или вертикальным) образует острый угол $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$. Применяя соответствующую формулу приведения, мы значение функции угла β_1 выразим через значение функции угла α. Например,

$$\sin(-783^\circ) = \sin(-3 \cdot 360^\circ + 297^\circ) = \sin 297^\circ =$$

$$= \sin(270^\circ + 27^\circ) = -\cos 27^\circ.$$

Из всего сказанного следует, что при составлении таблиц тригонометрических функций (а также их логарифмов) достаточно

знать значения тригонометрических функций лишь для углов, взятых от 0 до 45°.

§ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КРАТНЫХ АРГУМЕНТОВ

Полагая в формулах (7) и (4) $\beta=\alpha$, получаем

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha, \tag{12}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \tag{13}$$

Используя тождество $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ и формулу (13), находим другое представление

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1. \tag{14}$$

Формулы (12) — (14) справедливы для любого α.

Полагая в (9) и (11) $\beta=\alpha$, находим, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \left(2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right). \tag{15}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} \quad (\alpha \text{ и } 2\alpha \neq n\pi). \tag{16}$$

Далее, имеем

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cdot\cos\alpha + \cos 2\alpha\cdot\sin\alpha,$$

откуда согласно (12) и (13) следует, что

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha. \tag{17}$$

Аналогично находим, что

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \tag{18}$$

Разделив тождество (17) на тождество (18), находим

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha - \sin^3\alpha}{\cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

Разделив теперь числитель и знаменатель дроби на $\cos^3\alpha$, получаем

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \left(3\alpha \text{ и } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right). \tag{19}$$

Читателю в качестве упражнения предлагаем получить формулу

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1} \quad (3\alpha \text{ и } \alpha \neq n\pi), \tag{20}$$

Все эти тождества, причем в более общем виде, пригодном для любого n (n — целое), можно получить другим способом, в основе которого лежит формула Муавра $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ (см. гл. I, § 6). Раскрывая левую часть по формуле бинома Ньютона (см. гл. VI, § 2), имеем

$$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos^n\alpha + iC_n^1\cdot\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha -$$

$$- C_n^2\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha - iC_n^3\cos^{n-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha + \ldots + i^n\sin^n\alpha.$$

Приравнивая действительные и мнимые части двух равных комплексных выражений (см. гл. I, § 6), получаем

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha + \ldots. \tag{21}$$

$$\sin n\alpha = C_n^1\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\cdot\sin^5\alpha + \ldots \tag{22}$$

(так как $i^2=-1$, $i^3=-i$, то знаки в правых частях равенств (21) и (22) чередуются, при этом в (21) входят четные степени $\sin\alpha$, а (22) — нечетные). Многоточия означают, что слагаемые пишутся до тех пор, пока в коэффициентах C_n^k верхний индекс k не станет больше n (см. гл. VI, § 1). Разделив тождество (22) на тождество (21), получаем

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{C_n^1\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\cdot\sin^5\alpha + \ldots}{\cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha - \ldots}$$

и после деления числителя и знаменателя на $\cos^n\alpha$ имеем

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{C_n^1\operatorname{tg}\alpha - C_n^3\operatorname{tg}^3\alpha + C_n^5\operatorname{tg}^5\alpha + \ldots}{1 - C_n^2\operatorname{tg}^2\alpha + C_n^4\operatorname{tg}^4\alpha + \ldots}. \tag{23}$$

Разделив (21) на (22), так же находим

$$\operatorname{ctg} n\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^n\alpha - C_n^2\operatorname{ctg}^{n-2}\alpha + C_n^4\operatorname{ctg}^{n-4}\alpha - \ldots}{C_n^1\operatorname{ctg}^{n-1}\alpha - C_n^3\operatorname{ctg}^{n-3}\alpha + C_n^5\operatorname{ctg}^{n-5}\alpha - \ldots}. \tag{25}$$

§ 4. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ В СУММУ. ФОРМУЛЫ ПОНИЖЕНИЯ СТЕПЕНИ

Складывая и вычитая почленно равенства (3) и (4), получаем тождества

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)], \tag{26}$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)], \tag{27}$$

справедливые для любых α и β. Аналогично, складывая равенства (7) и (8), получаем тождество

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)], \tag{28}$$

также справедливое для любых α и β.

Полагая в (26) и (27) $\beta=\alpha$ и учитывая, что $\cos 0=1$, находим

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \tag{29}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}. \tag{30}$$

Далее, имеем

$$\cos^3\alpha=\cos^2\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{(1+\cos 2\alpha)\cos\alpha}{2}.$$

Раскрывая скобки и преобразуя произведение $\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha$ по формуле (26), находим

$$\cos^3\alpha=\frac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{4}. \tag{31}$$

Аналогично имеем

$$\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}. \tag{32}$$

Таким же способом можно получить формулы для $\cos^4\alpha$, $\sin^4\alpha$ и т. д.

Замечание. Формулы (29)—(32) можно также получить из равенств (14), (17) и (18).

Укажем общий метод получения формул для понижения степеней $\cos^n\alpha$ и $\sin^n\alpha$.

Полагая $a=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $b=\cos\alpha-i\sin\alpha$, имеем

$$\cos\alpha=\frac{a+b}{2},\quad \sin\alpha=\frac{a-b}{2i}.$$

Согласно формуле Муавра (см. гл. 1, § 6) для любого натурального n

$$a^n=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$$

и

$$b^n=(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha-i\sin n\alpha.$$

Отсюда находим

$$\left.\begin{aligned} a^nb^n&=1,\quad a^n+b^n=2\cos n\alpha,\\ a^n-b^n&=2i\sin n\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Следовательно,

$$\cos^n\alpha=\left(\frac{a+b}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}(a^n+na^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+b^n),$$

$$\sin^n\alpha=\left(\frac{a-b}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n\cdot i^n}(a^n-na^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+(-1)^nb^n).$$

Группируя в каждой из скобок члены, равноудаленные от концов, и используя (33), получаем некоторые формулы. Например,

1) $\cos^4\alpha=\frac{1}{2^4}(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)=$

$$=\frac{1}{16}[(a^4+b^4)+4ab(a^2+b^2)+6a^2b^2]=$$

$$=\frac{1}{16}(2\cos 4\alpha+8\cos 2\alpha+8)=\frac{1}{8}(\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3).$$

2) $\sin^4\alpha=\frac{1}{2^4\cdot i^4}(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)=\frac{1}{16}[(a^4+b^4)-$

$$-4ab(a^2+b^2)+6a^2b^2]=\frac{1}{8}(\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3).$$

3) $\sin^5\alpha=\frac{1}{2^5\cdot i^5}(a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5)=$

$$=\frac{1}{32i}[(a^5-b^5)-5ab(a^3-b^3)+10a^2b^2(a-b)]=$$

$$=\frac{1}{32i}(2i\sin 5\alpha-10i\sin 3\alpha+20i\sin\alpha)=\frac{1}{16}(\sin 5\alpha-5\sin 3\alpha+10\sin\alpha).$$

§ 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА. ВЫРАЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

Заменяя в равенствах (29) и (30) α на $\frac{\alpha}{2}$ и извлекая корень, получаем

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \tag{34}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \tag{35}$$

Разделив тождество (35) на (34), имеем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{36}$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right).$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \tag{37}$$

$$\frac{\alpha}{2}\neq\pi k.$$

Знак перед радикалом берется в зависимости от знака соответствующей функции аргумента $\frac{\alpha}{2}$ (а не α).

Наряду с формулой (36), которая выражает $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через $\cos\alpha$ рационально, имеют место два тождества выражающие его через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ рационально, а именно

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\quad\left(\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right),$$

откуда, согласно (12) и (29) следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\tag{38}$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right).$$

Далее

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0;\quad\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0\right),$$

откуда согласно (12) и (30) следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\tag{39}$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}\cdot k\right).$$

Аналогично доказываются тождества

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\tag{40}$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\neq\pi k\right)$$

и

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\tag{41}$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\neq\pi k\right)$$

В некоторых случаях существенную пользу приносят формулы, выражающие тригонометрические функции аргумента α через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Разделив числители и знаменатели правой части тождеств

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\quad\text{и}\quad\cos\alpha=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

на $\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, получаем

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\tag{42}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\tag{43}$$

справедливые для любого $\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Заменяя в равенстве (15) α на $\frac{\alpha}{2}$, имеем

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\quad\left(\alpha\ \text{и}\ \frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right).\tag{44}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\quad(\alpha\neq\pi k).\tag{45}$$

Отметим, что все тригонометрические функции аргумента α выражаются через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ рационально.

§ 6. ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ АРГУМЕНТОВ

1. $\alpha=\frac{\pi}{6}$ ($\alpha=30°$). Пусть OB — подвижный радиус, соответствующий $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Рассматривая прямоугольный треугольник OBC (рис. 67),

имеем $y = BC = \frac{R}{2}$ (катет, лежащий против угла в 30°), $OC = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Поэтому

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{y}{R} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{x}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \frac{x}{y} = \sqrt{3}.$$

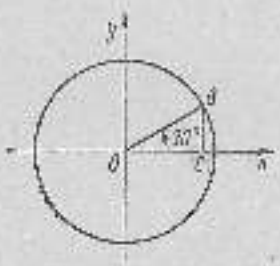


Рис. 67

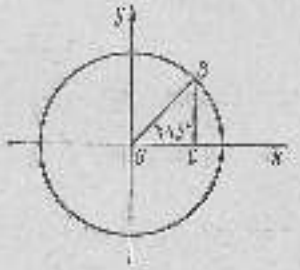


Рис. 68

2. $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($\alpha = 45°$). В этом случае прямоугольный треугольник OBC — равнобедренный (см. рис. 68), т. е. $x = y$ и так как $x^2 + y^2 = R^2$, то $x = y = R\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$. Поэтому

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{y}{R} = \frac{x}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = \frac{y}{x} = \frac{x}{y} = 1.$$

Замечание. Значения тригонометрических функций аргумента $\frac{\pi}{4}$ можно получить по формулам половинных аргументов, зная, что $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$, причем $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ и $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

3. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ($\alpha = 60°$).

Так как $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$, то воспользовавшись формулами приведения и известными уже значениями тригонометрических функций аргумента $\frac{\pi}{6}$, получаем

$$\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. $\alpha = \frac{\pi}{10}$ ($\alpha = 18°$).

Заметим, что при $\alpha = \frac{\pi}{10}$, $2\alpha + 3\alpha = \frac{\pi}{2}$, имеем

$$\sin 2\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right) = \cos 3\alpha,$$

откуда согласно (12) и (18) следует, что

$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \text{ или } 4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0.$$

Обозначая $\sin\alpha = x$, получаем квадратное уравнение $4x^2 + 2x - 1 = 0$. Решая его, находим

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \text{ (не годится)}$$

Итак, $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Теперь находим значения других тригонометрических функций этого аргумента

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\pi}{10}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{10} = \frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}.$$

Воспользовавшись формулами сложения и формулами двойных и кратных аргументов, мы можем теперь найти значения тригонометрических функций от целого ряда других аргументов.

Так, например, замечая, что $\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}$, или лучше $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$, находим

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=2-\sqrt{3}.$$

Замечая, что $\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$, имеем

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}},$$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}=\sqrt{2}-1.$$

Теперь по формулам приведения можно вычислить значения тригонометрических функций аргументов $\frac{5\pi}{12}$ (75°) $\frac{3\pi}{8}$ (67,5°), $\frac{\pi}{24}$ (7,5°) и т. д. Также определяются значения тригонометрических функций аргументов $\frac{2}{5}\pi$ (72°), $\frac{\pi}{5}$ (36°), $\frac{\pi}{20}$ (9°) и т. д.

Примечание. Значение тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ следует помнить. Остальные нужно уметь находить при необходимости.

§ 7. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Представляя аргументы α и β в виде

$$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2},$$

согласно тождествам (7) и (8) имеем

$$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+$$

$$+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-$$

$$-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получаем

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{46}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{47}$$

Используя аналогично тождества (3) и (4), получаем

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{48}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}. \tag{49}$$

Далее

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\beta\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

Замечая, что в числителе стоит $\sin(\alpha+\beta)$, окончательно имеем

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\quad\left(\alpha\text{ и }\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right). \tag{50}$$

Аналогично получаем

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\quad\left(\alpha\text{ и }\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right) \tag{51}$$

и

$$\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\quad(\alpha\text{ и }\beta\neq\pi k) \tag{52}$$

(знаки в обеих частях равенства берутся соответственно). В отдельных задачах тригонометрии удобно также пользоваться следующими тождествами.

Из формул (9), (10) и (11) имеем

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = (1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta), \tag{53}$$

$$\left(\alpha \pm \beta,\ \alpha,\ \beta \text{ не равны } \frac{\pi}{2} + \pi k\right),$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = (\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \mp 1) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta), \tag{54}$$

$$(\alpha \pm \beta,\ \alpha,\ \beta \text{ не равны } \pi k).$$

(Знаки в обеих частях равенств берутся соответственно.)

При решении задач мы будем ссылаться и на следующий ряд тождеств

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \tag{55}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} \cdot k,$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\operatorname{ctg} 2\alpha, \tag{56}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot k.$$

$$\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{4} \pm \cos\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right). \tag{57}$$

Вообще

$$a\sin\alpha \pm b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin\alpha \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos\alpha\right). \tag{58}$$

Рассмотрим точку с координатами $(a,\ b)$. Она лежит на тригонометрическом круге радиуса $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ и ей соответствует некоторый угол φ, для которого $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Тогда равенство (58) перепишется в виде

$$(a\sin\alpha \pm b\cos\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2}\,(\cos\varphi \cdot \sin\alpha \pm \sin\varphi \cdot \cos\alpha) =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\alpha \pm \varphi), \tag{59}$$

где φ угол, для которого $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

Замечание. Если $a > 0$ и $b > 0$, то φ оканчивается в I четверти и тогда можно писать (см. главу XII), что

$$\varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Если $a > 0$, а $b < 0$, то φ оканчивается в четвертой четверти и тогда

$$\psi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Если $a < 0$, а $b > 0$, то φ оканчивается во второй четверти и тогда

$$\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \operatorname{arcctg}\frac{a}{b}.$$

§ 8. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ АРГУМЕНТАМИ α И β, ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ РАВЕНСТВА ИХ ОДНОИМЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Пусть α и β — два аргумента, синусы которых равны, т. е. $\sin\alpha = \sin\beta$. Переписав это равенство в виде $\sin\alpha - \sin\beta = 0$ и используя формулу (47), имеем

$$2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2} = 0.$$

Последнее справедливо лишь в том случае, когда либо $\cos\frac{\alpha + \beta}{2} = 0$, либо $\sin\frac{\alpha - \beta}{2} = 0$.

Из первого условия вытекает, что $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где n — некоторое целое число (подвижный радиус, соответствующий аргументу $\frac{\alpha + \beta}{2}$, вертикален).

Из второго условия вытекает, что $\frac{\alpha - \beta}{2} = \pi k$, где k — некоторое целое число (подвижный радиус, соответствующий аргументу $\frac{\alpha - \beta}{2}$, горизонтален).

Таким образом, из равенства синусов двух аргументов α и β следует, что либо сумма этих аргументов равна $\pi + 2\pi n$:

$$\alpha + \beta = \pi + 2\pi n,$$

либо их разность равна $2\pi k$:

$$\alpha - \beta = 2\pi k,$$

где n и k некоторые целые числа.

II. Пусть $\cos\alpha = \cos\beta$. Переписав это равенство в виде $\cos\alpha - \cos\beta = 0$ и используя формулу (19), имеем

$$-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0,$$

откуда следует, что либо $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0$, либо $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$, т. е. либо $\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi n$, либо $\frac{\alpha-\beta}{2}=\pi k$ (см. пункт I). Таким образом, из равенства косинусов двух аргументов α и β следует, что либо сумма, либо разность этих аргументов есть число, кратное 2π, т. е. либо $\alpha+\beta=2\pi n$, либо $\alpha-\beta=2\pi k$.

III. Пусть $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$. Переписав это равенство в виде $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=0$ и используя формулу (51), имеем

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=0,$$

причем $\cos\alpha\neq 0$ и $\cos\beta\neq 0$. Последнее справедливо лишь в том случае, когда $\alpha-\beta=\pi n$.

Итак, из равенства тангенсов двух аргументов α и β следует, что их разность есть число πn.

IV. Аналогично получаем, что из равенства $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta$ следует, что разность аргументов есть число πk:

$$\alpha-\beta=\pi k,$$

ГЛАВА XI

ЗАДАЧИ НА ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ТРИГОНОМЕТРИИ

Все требования, предъявляемые к тождественным преобразованиям и рассмотренные в главе II, в равной степени относятся и к тригонометрии (область допустимых значений букв, входящих в тождество, обоснование решения и т. д. — см. гл. II).

При решении задач на тождественные преобразования используются те же тождества, которые мы рассмотрели в IX и X главах. Будем называть все эти тождества основными или первичными.

Первичных тождеств очень много. Неудачный выбор их при решении той или иной задачи приводит к громоздкому, нерациональному решению, а порою и вовсе заводит в тупик.

Естественно, что нельзя дать общий «рецепт» решения всех задач. Приведем лишь некоторые различные типы задач на тождественные преобразования и методы их решения.

§ 1. УПРОЩЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Умение преобразовать к простейшему виду то или иное тригонометрическое выражение играет основную роль в задачах тригонометрии (особенно при решении тригонометрических уравнений).

1. Если тригонометрическое выражение содержит тригонометрические функции числовых аргументов, то в общем случае следует перейти к тригонометрическим функциям острых углов, выраженных в градусах или радианах.

Пример 1. Упростить выражение

$$A=\left(\frac{\sec 125^\circ\cdot\operatorname{ctg}305^\circ}{\sec(-215^\circ)}+\sin(-35^\circ)\cdot\cos 125^\circ\right):\sin^2 125^\circ.$$

Решение. Имеем

$$\sec 125^\circ=\frac{1}{\cos 125^\circ}=\frac{1}{\cos(90^\circ+35^\circ)}=-\frac{1}{\sin 35^\circ},$$

$$\operatorname{ctg}305^\circ=\operatorname{ctg}(270^\circ+35^\circ)=-\operatorname{tg}35^\circ,$$

$$\sec(-215^\circ)=\frac{1}{\cos 215^\circ}=\frac{1}{\cos(180^\circ+35^\circ)}=-\frac{1}{\cos 35^\circ},$$

$$\cos 125^\circ = \cos(90^\circ + 35^\circ) = -\sin 35^\circ,$$

$$\sin 125^\circ = \sin(90^\circ + 35^\circ) = \cos 35^\circ,$$

$$A = (-1 + \sin^2 35^\circ) : \cos^2 35^\circ = -1.$$

Пример 2. Упростить выражение

$$B = \operatorname{tg}^2(-4{,}7\pi) \cdot \cos^2(-7{,}8\pi) + \sin^2(-11{,}7\pi).$$

Решение. $\operatorname{tg}(-4{,}7\pi) = -(\operatorname{tg}(5\pi - 0{,}3\pi) = (\operatorname{tg} 0{,}3\pi = \operatorname{ctg} 0{,}2\pi,$

$$\cos(-7{,}8\pi) = \cos(8\pi - 0{,}2\pi) = \cos 0{,}2\pi;\ \sin(-11{,}7\pi) =$$

$$= -\sin(12\pi - 0{,}3\pi) = \sin 0{,}3\pi = \cos 0{,}2\pi.$$

Подставляя полученные результаты в данное выражение, получаем

$$B = \operatorname{ctg}^2 0{,}2\pi \cdot \cos^2 0{,}2\pi + \cos^2 0{,}2\pi = \cos^2 0{,}2\pi (\operatorname{ctg}^2 0{,}2\pi + 1) =$$

$$= \operatorname{ctg}^2 0{,}2\pi.$$

В отдельных случаях выражение удается упростить, выделяя в нем так называемую тригонометрическую единицу $(\sin^2 x + \cos^2 x)^k = 1$, где k целое.

Пример 3. Упростить выражение

$$A = 2(\sin^6 x + \sin^3 x \cdot \cos^3 x + \cos^6 x)^2 - (\sin^5 x + \cos^5 x).$$

Решение. Замечая, что 1) $\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x =$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

2) $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x =$

$$= [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x]^2 - 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x =$$

$$= 1 - 4\sin^2 x \cos^2 x + 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x,$$

получаем

$$A = 2(1 - \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (1 - 4\sin^2 x \cos^2 x + 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x) = 1.$$

При тождественных преобразованиях нужно хорошо знать все основные тождества и «видеть» их в самых разнообразных записях.

Пример 4. Упростить выражение

$$A = \cos^3 \alpha \cos 3\alpha + \sin^3 \alpha \cdot \sin 3\alpha.$$

Решение. Имеем $A = \cos\alpha(1 - \sin^2\alpha)\cos 3\alpha +$ $+ \sin\alpha(1 - \cos^2\alpha)\sin 3\alpha.$

Раскрывая скобки и группируя, получаем

$$A = (\cos\alpha \cos 3\alpha + \sin\alpha \cdot \sin 3\alpha) - \sin\alpha \cos\alpha (\sin\alpha \cos 3\alpha + \cos\alpha \sin 3\alpha) =$$

$$= \cos(3\alpha - \alpha) - \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin(\alpha + 3\alpha) =$$

$$= \cos 2\alpha - \sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \cos 2\alpha (1 - \sin^2 2\alpha) = \cos^3 2\alpha.$$

В большинстве задач в процессе решения приходится использовать различные основные тождества несколько раз подряд.

Пример 5. Упростить выражение

$$A = \cos^2(a - x) + \cos^2(b - x) - 2\cos(a - b)\cos(a - x)\cos(b - x).$$

Решение. Нецелесообразно пользоваться здесь формулой косинуса разности двух углов. Это приведет к очень громоздкому выражению. Проще вначале избавиться от квадратов функций с помощью формул понижения степени. Тогда

$$B = \cos^2(a - x) + \cos^2(b - x) = \frac{1 + \cos(2a - 2x)}{2} + \frac{1 + \cos(2b - 2x)}{2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}[\cos(2a - 2x) + \cos(2b - 2x)].$$

Воспользовавшись теперь формулой сложения косинусов, получаем

$$B = 1 + \cos(a - b - 2x)\cos(a - b).$$

Теперь видим, что произведение двух последних сомножителей в A нужно разложить в сумму

$$C = 2\cos(a - x) \cdot \cos(b - x) = \cos(a + b - 2x) + \cos(a - b).$$

Окончательно получаем

$$A = B - C \cdot \cos(a - b) = 1 + \cos(a + b - 2x)\cos(a - b) -$$

$$- \cos(a + b - 2x)\cos(a - b) - \cos^2(a - b) = 1 - \cos^2(a - b) =$$

$$= \sin^2(a - b).$$

При действиях с радикалами нужно помнить, что для четного показателя берется арифметическое значение корня, для нечетного — его единственное действительное значение.

Пример 6. Упростить выражение

$$A = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4\alpha}}},\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Имеем $2 + 2\cos 4\alpha = 2(1 + \cos 4\alpha) = 4\cos^2 2\alpha$. Поэтому $\sqrt{2 + 2\cos 4\alpha} = 2|\cos 2\alpha|$. Но $|\cos 2\alpha| = \cos 2\alpha$, если $\cos 2\alpha \geqslant 0$, т. е. если $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$ и $|\cos 2\alpha| = -\cos 2\alpha$, если $\cos 2\alpha \leqslant 0$, т. е. если $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Таким образом,

$$\sqrt{2 + 2\cos 4\alpha} = \begin{cases} 2\cos 2\alpha, & \text{если } 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}, \\ -2\cos 2\alpha, & \text{если } \frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

Дальнейшие преобразования проводим отдельно для каждой указанной области изменения α.

1. Если $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$, то $A = \frac{2}{\sqrt{2+2\cos 2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha}$, так как $\cos\alpha > 0$.

2. Если $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $A = \frac{2}{\sqrt{2-2\cos 2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha}$, так как $\sin\alpha > 0$.

Итак,

$$A = \begin{cases} \frac{1}{\cos\alpha}, & \text{если } 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{\sin\alpha}, & \text{если } \frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

В отдельных примерах при преобразовании суммы или разности тангенсов (и котангенсов) полезно пользоваться формулами

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)(1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta).$$

Пример 7. Упростить выражение

$$A = \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) + \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha).$$

Решение. Область допустимых значений: 2α, $30^\circ - \alpha$, $60^\circ - \alpha$ не равны $90^\circ + 180^\circ \cdot k$.

$$B = \operatorname{tg} 2\alpha [\operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)] =$$

$$= \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha + 60^\circ - \alpha) \cdot [1 - \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)] =$$

$$= \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot [1 - \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)] =$$

$$= 1 - \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha).$$

Тогда

$$A = B + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) = 1.$$

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ БЕЗ ТАБЛИЦ

Конечно, не всякое тригонометрическое выражение от числовых значений аргументов можно вычислить без таблиц. Однако в некоторых случаях удается преобразовать заданное тригонометрическое выражение или к числу, или к тригонометрическим функциям аргументов $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ и т. д. Значения тригонометрических функций этих аргументов учащийся должен уметь находить без таблиц (см. гл. X, § 6).

Пример 1. Вычислить без таблиц

$$A = \operatorname{ctg} 7^\circ,5 + \operatorname{tg} 67^\circ,5 - \operatorname{tg} 7^\circ,5 - \operatorname{ctg} 67^\circ,5.$$

Решение. Группируя тангенсы и котангенсы, получаем

$$(\operatorname{ctg} 7^\circ,5 - \operatorname{ctg} 67^\circ,5) + (\operatorname{tg} 67^\circ,5 - \operatorname{tg} 7^\circ,5) = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 7^\circ,5 \cdot \sin 67^\circ,5} +$$

$$+ \frac{\sin 60^\circ}{\cos 67^\circ,5 \cdot \cos 7^\circ,5} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\cos 67^\circ,5 \cdot \cos 7^\circ,5 + \sin 7^\circ,5 \cdot \sin 67^\circ,5}{\sin 7^\circ,5 \cdot \sin 67^\circ,5 \cdot \cos 67^\circ,5 \cdot \cos 7^\circ,5} =$$

$$= 2\sqrt{3} \frac{\cos(67^\circ,5 - 7^\circ,5)}{\sin 15^\circ \cdot \sin 135^\circ} = 2\sqrt{3} \frac{\cos 60^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \sin 45^\circ} =$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 6 + 2\sqrt{3}.$$

Пример 2. Вычислить без таблиц

$$A = \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{9\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}.$$

Решение. Используя формулу $\sin^2\alpha = \frac{(1-\cos 2\alpha)^2}{4}$ и формулы приведения, преобразуем каждое слагаемое данного выражения. Получаем

$$A = \frac{\left(1 - \cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{4} + \frac{\left(1 - \cos\frac{3\pi}{8}\right)^2}{4} + \frac{\left(1 - \cos\frac{5\pi}{8}\right)^2}{4} +$$

$$+ \frac{\left(1 - \cos\frac{7\pi}{8}\right)^2}{4} = \frac{\left(1 - \cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{4} + \frac{\left(1 - \cos\frac{3\pi}{8}\right)^2}{4} +$$

$$+ \frac{\left(1 + \cos\frac{3\pi}{8}\right)^2}{4} + \frac{\left(1 + \cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{4} = \frac{4 + 2\cos^2\frac{\pi}{8} + 2\cos^2\frac{3\pi}{8}}{4} =$$

$$= \frac{4 + 2\cos^2\frac{\pi}{8} + 2\sin^2\frac{\pi}{8}}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Чтобы вычислить значение произведения косинусов от аргументов, образующих геометрическую прогрессию со знаменателем $q=2$, полезно это произведение умножить и разделить на синус наименьшего аргумента и затем, применяя последовательно несколько раз формулу $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$, свернуть его.

Пример 3. Вычислить без таблиц

$$A = \cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 72^\circ \cdot \cos 84^\circ.$$

Решение. Замечая, что $\cos 84^\circ = -\cos 96^\circ$ разобьем данное произведение на два: $A = A_1 \cdot A_2 \cdot \cos 60^\circ$, где $A_1 = -\cos 12^\circ \times$

$\times \cos 24° \cdot \cos 48° \cdot \cos 96°$, $A_3 = \cos 36° \cdot \cos 72°$ и вычислим каждое из них:

$$A_1 = -\frac{\cos 12° \cdot \cos 24° \cdot \cos 48° \cdot \cos 96° \cdot \sin 12°}{\sin 12°} =$$

$$= -\frac{\sin 24° \cdot \cos 24° \cdot \cos 48° \cdot \cos 96°}{2\sin 12°} = -\frac{\cos 48° \cdot \sin 48° \cdot \cos 96°}{4\sin 12°} =$$

$$= -\frac{\sin 96° \cdot \cos 96°}{8\sin 12°} = -\frac{\sin 192°}{16\sin 12°} = \frac{\sin 12°}{16\sin 12°} = \frac{1}{16}.$$

$$A_2 = \frac{\sin 36° \cdot \cos 36° \cos 72°}{\sin 36°} = \frac{\sin 72° \cdot \cos 72°}{2\sin 36°} = \frac{\sin 144°}{4\sin 36°} = \frac{1}{4}.$$

Окончательно, $A = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{128}$.

Если аргументы, стоящие под знаком косинусов, не образуют геометрическую прогрессию, следует разложить произведение тригонометрических функций в сумму, заменяя при этом известные значения функций числами. Иногда это приводит к цели.

Пример 4. Вычислить без таблиц

$$A = \cos 5° \cdot \cos 55° \cdot \cos 65°.$$

Решение. Последовательно применяем формулу перехода от произведения к сумме:

$$A = (\cos 5° \cdot \cos 55°) \cdot \cos 65° = \frac{1}{2}[(\cos 60° + \cos 50°]\cos 65° =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 65° + \frac{1}{2}\cos 50° \cdot \cos 65° = \frac{1}{4}\cos 65° + \frac{1}{4}(\cos 115° + \cos 15°) =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 65° - \frac{1}{4}\cos 65° + \frac{1}{4}\cos 15° = \frac{1}{4}\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{16}.$$

Чтобы вычислить значение суммы синусов или косинусов от аргументов, образующих арифметическую прогрессию с разностью d, полезно каждое слагаемое этой суммы умножить и разделить на $2\sin\frac{d}{2}$ и затем получившиеся произведения преобразовать в сумму.

Пример 5. Вычислить без таблиц

$$A = \cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}.$$

Решение. Аргументы образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = \frac{2\pi}{11}$. Согласно указанию имеем

$$2A\sin\frac{\pi}{11} = 2\sin\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{3\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\times$$

$$\times\cos\frac{5\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{7\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{9\pi}{11} = \sin\frac{2\pi}{11} +$$

$$+\left(\sin\frac{4\pi}{11} - \sin\frac{2\pi}{11}\right) + \left(\sin\frac{6\pi}{11} - \sin\frac{4\pi}{11}\right) + \left(\sin\frac{8\pi}{11} - \sin\frac{6\pi}{11}\right) +$$

$$+\left(\sin\frac{10\pi}{11} - \sin\frac{8\pi}{11}\right).$$

После приведения подобных членов, получаем

$2A\cdot\sin\frac{\pi}{11} = \sin\frac{10\pi}{11}$, или $2A\sin\frac{\pi}{11} = \sin\frac{\pi}{11}$. Итак $A = \frac{1}{2}$.

Если в заданное выражение входят тригонометрические функции углов $\frac{\pi}{10}$ (18°), $\frac{\pi}{5}$ (36°), $\frac{3\pi}{10}$ (54°), $\frac{2\pi}{5}$ (72°), то тогда удается путем различных преобразований свести эту задачу к вычислению выражения $\cos 36° \cdot \cos 72°$, которое равно $\frac{1}{4}$ (см. пример 3).

Пример 6. Вычислить без таблиц выражение

$$\operatorname{tg}^2 36° \cdot \operatorname{tg}^2 72°.$$

Решение. Имеем

$$\operatorname{tg}^2 36° \cdot \operatorname{tg}^2 72° = \frac{\sin^2 36° \cdot \sin^2 72°}{\cos^2 36° \cdot \cos^2 72°} =$$

$$= \frac{(\sin^2 36° \cdot \sin^2 72° - \cos^2 36° \cdot \cos^2 72°) + \cos^2 36° \cdot \cos^2 72°}{\cos^2 36° \cdot \cos^2 72°} =$$

$$= \frac{(\sin 36° \cdot \sin 72° - \cos 36° \cdot \cos 72°)(\sin 36° \cdot \sin 72° + \cos 36° \cdot \cos 72°)}{\cos^2 36° \cdot \cos^2 72°} +$$

$$+ 1 = \frac{-\cos(72° + 36°) \cdot \cos(72° - 36°)}{\cos^2 36° \cdot \cos^2 72°} + 1 = 1 + \frac{-\cos 108° \cdot \cos 36°}{\cos^2 36° \cdot \cos^2 72°} =$$

$$= \frac{\cos 72° \cdot \cos 36°}{\cos^2 72° \cdot \cos^2 36°} + 1 = \frac{1}{\cos 72° \cdot \cos 36°} + 1 = 4 + 1 = 5.$$

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ ПО ИЗВЕСТНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ ДРУГИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Эта задача состоит в том, чтобы вычислить значение заданного выражения, если известны значения одного или нескольких других выражений. С подобной задачей мы уже встречались в главе IX, когда по известному значению некоторой тригонометрической

функции аргумента α определяли значения всех остальных тригонометрических функций этого аргумента.

Один из приемов решения таких задач состоит в том, что все величины, входящие в выражение, значение которого нужно определить, мы выражаем через ту величину, значение которой задано.

Пример 1. Вычислить

$$A=\frac{\sin^3 x+\cos^3 x+\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x},\ \text{если}\ \operatorname{tg} x=2.$$

Решение. Мы не можем вычислять непосредственно $\sin x$ и $\cos x$ по известному значению тангенса этого угла, так как не знаем, в какой четверти лежит угол x и поэтому не сумеем выбрать знаки у функций синус и косинус. Этой неопределенности можно избежать, если сообразить, что числитель и знаменатель можно сделать однородными выражениями одного и того же измерения относительно $\sin x$ и $\cos x$ (см. гл. XIII). В самом деле,

$$\frac{\sin^3 x+\cos^3 x+\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}=\frac{\sin^3 x+\cos^3 x+\sin x(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{(\sin^3 x+\cos^3 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)}.$$

Теперь, разделив числитель и знаменатель на $\cos^3 x$ и заменив, что $\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x=2$, получаем

$$A=\frac{\operatorname{tg}^3 x+1+\operatorname{tg} x(\operatorname{tg}^2 x+1)^2}{(\operatorname{tg}^3 x+1)(\operatorname{tg}^2 x+1)}=\frac{2^3+1+2(4+1)^2}{(2^3+1)(2^2+1)}=\frac{83}{45}.$$

Пример 2. Найти $\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha=\frac{a-b}{a+b}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Решение. Выразим $\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$ через $\sin\alpha$. Имеем

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{90^\circ-\alpha}{2}=\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{1+\cos(90^\circ-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=$$
$$=-\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1+\sin\alpha}.$$

(Перед радикалом взят знак $-$, так как α — угол второй четверти.) Замечая, что $1+\sin\alpha>0$, находим

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=-\sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}}=-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=$$
$$=-\sqrt{\frac{1-\frac{a-b}{a+b}}{1+\frac{a-b}{a+b}}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Исследуем, при каких значениях параметров a и b задача имеет решение. Так как α — угол второй четверти, то $0<\frac{a-b}{a+b}<1$. Это неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases}0<a-b<a+b,\\ a+b>0\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}0>a-b>a+b,\\ a+b<0.\end{cases}$$

Из первой системы следует, что $a>b>0$, а из второй: $a<b<0$. Итак, данная задача имеет решение для всех тех значений a и b, которые удовлетворяют одному из условий:

$$a>b>0\ \text{или}\ a<b<0.$$

Пример 3. Вычислить $\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 2y$, если

$$\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=a,\\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=b.\end{cases}$$

Решение. Выразим $\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 2y$ через $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y$ и $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y$, значения которых заданы. Имеем

$$\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2y=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}+\frac{2\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg}^2 y}=\frac{2(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y)-2\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y)}{(1-\operatorname{tg}^2 x)(1-\operatorname{tg}^2 y)}=$$
$$=\frac{2(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y)(1-\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y)}{1+\operatorname{tg}^2 x\cdot\operatorname{tg}^2 y-(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y)^2+2\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y}=\frac{2a(1-b)}{(1+b+a)(1+b-a)}.$$

Задача имеет решение для всех значений a и b, не обращающих в нуль знаменатель полученной дроби, т. е. при условии, что $1+b\neq\pm a$.

В других случаях удобнее преобразовать то выражение, значение которого известно.

Пример 4. Вычислить

$$A=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma,$$

если

$$2\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta\cdot\operatorname{tg}^2\gamma+\operatorname{tg}^2\beta\cdot\operatorname{tg}^2\gamma+\operatorname{tg}^2\gamma\cdot\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta=1.$$

Решение. Введем обозначения: $\sin^2\alpha=a$, $\sin^2\beta=b$, $\sin^2\gamma=c$. Тогда $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{a}{1-a}$, $\operatorname{tg}^2\beta=\frac{b}{1-b}$, $\operatorname{tg}^2\gamma=\frac{c}{1-c}$, и задача сводится

к определению величины $A = a + b + c$, если

$$\frac{2ab}{(1-a)(1-b)(1-c)} + \frac{bc}{(1-b)(1-c)} + \frac{ac}{(1-a)(1-c)} + \frac{ab}{(1-a)(1-b)} = 1. \qquad (*)$$

После приведения равенства (*) к общему знаменателю и очевидных преобразований получаем

$$a + b + c = 1.$$

Итак, $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$.

В некоторых случаях рассматриваемые примеры решаются комбинированным методом: из данных задачи находят численное значение некоторых вспомогательных выражений, через которые в свою очередь выражают искомую величину.

Пример 5. Найти значение выражения $a\sin^2(\alpha+\beta) + b\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) + c\cos^2(\alpha+\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Решение. Считаем, что $a \neq 0$, так как в противном случае уравнение $ax^2+bx+c=0$ не было бы квадратным.

По теореме Виета

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = -\frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{c}{a},$$

откуда следует, что для $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{b}{c-a}.$$

(Из последнего равенства вытекает, что требование $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ равносильно требованию $c - a \neq 0$.)

Теперь преобразуем искомое выражение. Обозначая его через A, имеем

$$A = \cos^2(\alpha+\beta)\left[a\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta) + b\operatorname{tg}(\alpha+\beta) + c\right] =$$

$$= \frac{a\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta) + b\operatorname{tg}(\alpha+\beta) + c}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)} = \frac{\frac{a^2}{(c-a)^2} + \frac{b^2}{c-a} + c}{1 + \frac{b^2}{(c-a)^2}} =$$

$$= \frac{c\left[b^2 + (c-a)^2\right]}{b^2 + (c-a)^2} = c.$$

Мы получили, что $A = c$, при условии, что $a \neq c$. Если $a = c \neq 0$, т. е. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \pi k$, то $\cos(\alpha+\beta) = 0$, $\sin^2(\alpha+\beta) = 1$ и в этом случае также $A = c$.

При $a = 0$ задача не имеет смысла.

Пример 6. Найти $\sin(\alpha+\beta)$, если

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta.$$

Решение. Преобразуя заданное равенство, имеем

$$a(\cos\alpha - \cos\beta) = b(\sin\beta - \sin\alpha);$$

$$2a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = 2b\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}. \qquad (*)$$

Исследуем равенство (*).

1. Пусть $\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = 0$, т. е. $\beta - \alpha = 2\pi n$. При этом условии равенство (*) является тождеством и, следовательно, $\sin(\alpha+\beta)$ может принимать любое значение в пределах от -1 до 1. Задача становится неопределенной.

2. Пусть $\sin\frac{\beta-\alpha}{2} \neq 0$, т. е. $\beta - \alpha \neq 2\pi n$. Сокращая обе части равенства (*) на $\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$, имеем равенство

$$a\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (**)$$

Коэффициенты a и b не могут обращаться в нуль одновременно (задача становится неопределенной). Поэтому допустим, что $a \neq 0$. Из этого вытекает, что $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ также не нуль.

В самом деле, если допустить, что $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$, то из равенства (**) следовало бы, что и $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$ ($a \neq 0$!), что невозможно $\left(\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 1\right)$.

Тогда, разделив все члены равенства (**) на $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, имеем $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{b}{a}$ и

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2}. \qquad (***)$$

Если $a = 0$, то $b \neq 0$. Тогда из равенства (**) следует, что $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$, и поэтому

$$\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0.$$

Заметим, что этот результат содержится в (***), если положить в нем $b=0$.

Итак, $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$ при условии, что $\beta-\alpha\neq 2\pi n$.

Иногда к данным равенствам удобно присоединить некоторые основные тождества, содержащие те же функции, что и заданные равенства.

Пример 7. Вычислить $\sin x$ и $\cos x$, если

$$a\sin x+b\cos x=c.$$

Решение. Задача имеет смысл, если $|c|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$. Присоединяя к данному равенству тождество $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, получаем систему двух уравнений относительно функций $\sin x$ и $\cos x$.

$$\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 x=1,\\ a\sin x+b\cos x=c.\end{cases}$$

Решая ее, находим

$$\text{либо}\begin{cases}\sin x=\dfrac{ac+b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},\\ \cos x=\dfrac{bc-a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},\end{cases}\qquad\text{либо}\begin{cases}\sin x=\dfrac{ac-b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},\\ \cos x=\dfrac{bc+a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.\end{cases}$$

В некоторых случаях проще вычислить квадрат искомого значения. Тогда при переходе к самому значению, т. е. при извлечении корня, могут появиться лишние решения. Поэтому при таком методе решения необходимо провести исследование знака искомого значения.

Пример 8. Вычислить значение $A=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, если $\sin 2\alpha=m$, $-1<m<0$, $\frac{3\pi}{2}<2\alpha<2\pi$.

Решение. Вычислим сначала A^2. Имеем

$$A^2=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\frac{1+m}{1-m}.$$

Проведем исследование знака A. Так как $\frac{3\pi}{2}<2\alpha<2\pi$, то $\frac{3}{4}\pi<\alpha<\pi$. Если α лежит в этих пределах, то $|\sin\alpha|<|\cos\alpha|$, причем $\sin\alpha>0$, а $\cos\alpha<0$. Поэтому $\sin\alpha+\cos\alpha<0$, $\sin\alpha-\cos\alpha>0$ и $A<0$. Поэтому $A=-\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}$.

Исследование знака искомого числового значения иногда бывает столь затруднительно, что проще вычислить значение A непосредственно. Даже в этом примере, где исследование проводится довольно просто, удобнее вычислять значение A сразу.

В самом деле, $A=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{1+\sin 2\alpha}{-\cos 2\alpha}=\frac{1+\sin 2\alpha}{-\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}}=$

$=-\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}$

($\cos 2\alpha=+\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}$, так как 2α оканчивается в IV четверти).

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Для того чтобы при вычислении числовых значений выражений можно было бы пользоваться таблицей логарифмов, нужно это выражение представить в виде произведений. Это особенно важно при решении вычислительных задач по геометрии.

Пример 1. Преобразовать в произведение следующие выражения:

1) $A=1+\operatorname{tg}67^\circ+\operatorname{tg}68^\circ$,

2) $B=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos 2\beta}-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$.

Решение. 1. Используя формулу

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=(1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta),$$

находим $\operatorname{tg}67^\circ+\operatorname{tg}68^\circ=(1-\operatorname{tg}67^\circ\cdot\operatorname{tg}68^\circ)\cdot\operatorname{tg}(67^\circ+68^\circ)=-1+\operatorname{tg}67^\circ\cdot\operatorname{tg}68^\circ$. Следовательно, $A=\operatorname{tg}67^\circ\cdot\operatorname{tg}68^\circ$.

2. Приведем к общему знаменателю и каждое из слагаемых числителя представим в виде суммы

$$B=\frac{\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos\beta-\cos 2\beta\cdot\cos\alpha}{\cos 2\beta\cdot\cos\beta}=$$

$$=\frac{[\cos\alpha+\cos(\alpha-2\beta)]-[\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha-2\beta)]}{2\cos 2\beta\cdot\cos\beta}=\frac{\cos\alpha-\cos(\alpha+2\beta)}{2\cos 2\beta\cdot\cos\beta}.$$

Теперь числитель представим в виде произведения и окончательно получим

$$B=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta}{\cos 2\beta\cdot\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\beta}{\cos 2\beta},\quad\text{где}\quad\beta\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n\quad\text{и}\quad\beta\neq$$

$$\neq\frac{\pi}{2}+\pi n.$$

В ряде случаев при преобразовании в произведение целесообразно вводить вспомогательный аргумент. Для выражений вида $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ подобный метод подробно изложен в главе X.

При этом полезно помнить, что

$$1=\sin\frac{\pi}{2}=\cos 0=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{6}=2\cos\frac{\pi}{3},$$

$$\sqrt{2} = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{4},$$

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = 3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{\pi}{6}.$$

Пример 2. Преобразовать в произведение следующие выражения

1) $A = 2\sin^2\alpha + \sqrt{3}\sin 2\alpha - 1,$

2) $B = \dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} + \operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha + \sin\alpha.$

Решение. 1. Понижая степень первого слагаемого, имеем

$$A = 1 - \cos 2\alpha + \sqrt{3}\sin 2\alpha - 1 =$$

$$= \sqrt{3}\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = 2\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin 2\alpha - 2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos 2\alpha =$$

$$= 2\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right).$$

2. Предварительно упрощаем данное выражение. Обозначая первое слагаемое через B_1, имеем

$$B_1 = \frac{2\cos^2\alpha - 1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cdot\cos^2\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right]} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 1,$$

($\cos 2\alpha \neq 0$, так как в противном случае B_1, а следовательно, и B не имеет смысла.)

Тогда

$$B = B_1 + \operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha + \sin\alpha = 1 + \operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha + \sin\alpha =$$

$$= \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha} + (\cos\alpha - \sin\alpha) - (\cos\alpha + \sin\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha + \sin\alpha)(1 + \cos\alpha).$$

Но

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right), \quad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

поэтому $B = \dfrac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$ ($\cos\alpha \neq 0$, так как в противном случае $\operatorname{tg}\alpha$, а следовательно, и B не имеет смысла).

Вспомогательный аргумент может быть любым острым углом. Его всегда можно найти по таблицам тригонометрических функций.

Пример 3. Введением вспомогательного угла преобразовать в произведение выражения

1) $A = \sqrt{2 - 3\sin\alpha},$

2) $B = \sqrt{2 + 3\sin^2\alpha}.$

Решение. 1. Замечая, что $2 - 3\sin\alpha = 3\left(\frac{2}{3} - \sin\alpha\right)$, подберем острый угол φ такой, что $\sin\varphi = \frac{2}{3}$. Тогда $A = \sqrt{3(\sin\varphi - \sin\alpha)} = \sqrt{6\sin\frac{\alpha + \varphi}{2}\cdot\cos\frac{\alpha - \varphi}{2}}$ для всех α, для которых $\sin\alpha \geqslant -\frac{2}{3}$.

2. Если слепо следовать методу решения предыдущего примера, то ничего не получится. Поэтому поступим иным образом. Представляя B в виде $B = \sqrt{2\left(1 + \frac{3}{2}\sin^2\alpha\right)}$, подберем острый угол φ такой, что $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{3}{2}}|\sin\alpha|$. Тогда

$$B = \sqrt{2}(1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi}.$$

Пример 4. Преобразовать в произведение выражение

$$A = \sqrt{a - b} + \sqrt{a - b}.$$

Решение. Множество допустимых значений данного выражения состоит из тех значений a и b, для которых

$$\begin{cases} a + b \geqslant 0, \\ a - b \geqslant 0. \end{cases}$$

Решая это неравенство, находим, что $a \geqslant |b|$. При $a = 0$ также $b = 0$ и, следовательно, $A = 0$. Пусть $a > 0$. Тогда

$$A = \sqrt{a}\left(\sqrt{1 + \frac{b}{a}} + \sqrt{1 - \frac{b}{a}}\right),$$

где $\left|\frac{b}{a}\right| \leqslant 1$.

Положим $\frac{b}{a}=\cos\varphi$. При такой замене

$$A=\sqrt{a}\left(\sqrt{1+\cos\varphi}+\sqrt{1-\cos\varphi}\right)=\sqrt{a}\left(\sqrt{2}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|+\right.$$

$$\left.+\sqrt{2}\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\right)=2\sqrt{a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|+\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\right).$$

Если $b>0$, то угол φ берем в I четверти и тогда

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\cos\frac{\varphi}{2},\quad\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|=\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Если $b<0$, то угол φ берем во II четверти: $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$. При этом $\frac{\pi}{4}<\frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{2}$ и снова

$$\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|=\cos\frac{\varphi}{2}\ \text{ и }\ \left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|=\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Итак, при любых $|b|<a\neq 0$

$$A=2\sqrt{a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)=2\sqrt{a}\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

где $\varphi=\arccos\frac{b}{a}$ (см. гл. XII).

Замечание. Очевидно, что вспомогательный аргумент можно вводить разным способом. При этом полученные результаты могут иметь самые различные виды.

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВ

Рассмотрим ряд задач на доказательство наперед заданных тождеств и равенств и укажем некоторые приемы, полезные при этих доказательствах. Заметим, что и здесь каждый раз необходимо указать множество допустимых значений углов и параметров, входящих в данные выражения. В противном случае, решение неполноценно.

Часто при доказательстве тождеств преобразуют одну более сложную часть к другой более простой, которая в данном случае является, так сказать, «неподвижной», при этом преобразования нужно выбирать такие формулы, которые приводили бы к функциям и аргументам, стоящим в «неподвижной части».

Пример 1. Доказать тождества:

1) $\dfrac{\cos^2 2\alpha-2\cos^2\alpha+3}{\cos^2 2\alpha+4\cos^2\alpha-1}=\operatorname{tg}^4\alpha$,

2) $1+\sec 20^\circ=\sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg}40^\circ$.

Решение 1. Преобразуем левую часть данного выражения. Выражая $\cos^2 2\alpha$ и $\cos^2\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$, имеем

$$\frac{\cos^2 2\alpha-4\cos^2\alpha+3}{\cos^2 2\alpha+4\cos^2\alpha-1}=\frac{\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2-\frac{4}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+3}{\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2+\frac{4}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-1}=\operatorname{tg}^4\alpha.$$

Анализируя решение, замечаем, что это тождество справедливо для всех $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$.

2. Преобразуем левую часть данного выражения так, чтобы получить угол 40°, стоящий в «неподвижной части»,

$$1+\sec 20^\circ=\frac{\cos 20^\circ+1}{\cos 20^\circ}=\frac{2\sin 20^\circ(\cos 20^\circ+1)}{2\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 40^\circ+2\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{(\sin 40^\circ+\sin 20^\circ)+\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}=$$

$$=\frac{2\sin 30^\circ\cdot\cos 10^\circ+\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{\cos 10^\circ+\cos 70^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{2\cos 40^\circ\cdot\cos 30^\circ}{\sin 40^\circ}=$$

$$=\sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg}40^\circ.$$

Если не удается преобразовать одну часть тождества или равенства к другой части или это очень сложно, то надо попробовать преобразовать обе части к одному и тому же выражению.

Пример 2. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta)=\frac{2(\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta)}{(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)^2}.$$

Решение. Обозначая левую часть через A, а правую через B, имеем

$$A=\frac{1-\cos(2\alpha+2\beta)}{1+\cos(2\alpha+2\beta)}+\frac{1-\cos(2\alpha-2\beta)}{1+\cos(2\alpha-2\beta)}=$$

$$=\frac{2-2\cos(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha-2\beta)}{[1+\cos(2\alpha+2\beta)][1+\cos(2\alpha-2\beta)]},\ \alpha+\beta\text{ и }\alpha-\beta\text{ не равны }\frac{\pi}{2}+\pi n,$$

$$B=\frac{1-\cos 4\alpha+1-\cos 4\beta}{4\cos^2(\alpha+\beta)\cdot\cos^2(\alpha-\beta)}=\frac{2-2\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\alpha-2\beta)}{[1+\cos(2\alpha+2\beta)][1+\cos(2\alpha-2\beta)]}$$

при тех же ограничениях на углы. Таким образом, $A=B$ при условии, что $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$ не равны $\frac{\pi}{2}+\pi n$.

Пример 3. Доказать тождество

$$1+\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(25^\circ-\alpha)=\frac{2\cos(10^\circ+2\alpha)-1}{2\cos(10^\circ+2\alpha)+1}+$$

$$+\sin 2\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha).$$

Р е ш е н и е. Множество допустимых значений произведений тангенсов состоит из всех углов α, для которых $35^\circ+\alpha \neq 25^\circ-\alpha$ и не равны $90^\circ+180^\circ\cdot n$. Преобразуя произведение тангенсов, которое мы обозначим через A, имеем

$$A=\operatorname{tg}(35^\circ+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(25^\circ-\alpha)=\frac{\sin(35^\circ+\alpha)\cdot\sin(25^\circ-\alpha)}{\cos(35^\circ+\alpha)\cdot\cos(25^\circ-\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos(10^\circ+2\alpha)-\cos 60^\circ}{\cos(10^\circ+2\alpha)+\cos 60^\circ}=\frac{2\cos(10^\circ+2\alpha)-1}{2\cos(10^\circ+2\alpha)+1}.$$

Таким образом, A равно первому слагаемому правой части и нам остается доказать, что второе слагаемое правой части (обозначим его через B) равно 1. В самом деле,

$$B=\sin 2\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha)-\sin 2\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha+\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\cos\alpha}=1,$$

причем $\alpha\neq 90^\circ n$.

Иногда путем равносильных преобразований удается свести доказываемое тождество к очевидному или уже известному.

Пример 4. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{ctg}8\alpha=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Р е ш е н и е. Доказательство данного тождества равносильно задаче о доказательстве тождества

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha.$$

Обозначая его левую часть через A и используя тождество $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$ (см. гл. X), имеем

$$A=(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=2(\operatorname{ctg}2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha)-$$

$$-4\operatorname{tg}4\alpha=4(\operatorname{ctg}4\alpha-\operatorname{tg}4\alpha)=8\operatorname{ctg}8\alpha\left(8\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right).$$

Иногда при доказательстве тождеств удобно исходить из уже известных тождеств (основных).

Пример 5. Доказать тождества

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}\right)$$

и

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}\right),$$

если $90^\circ\leqslant\alpha\leqslant 270^\circ$.

Р е ш е н и е. Возьмем два основных тождества

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1,$$

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha.$$

Складывая их и вычитая, получаем два новых тождества

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2=1+\sin\alpha,$$

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2=1-\sin\alpha.$$

Так как $45^\circ\leqslant\frac{\alpha}{2}\leqslant 135^\circ$, то $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\geqslant 0$ и $\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant 0$. Поэтому

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1+\sin\alpha},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{1-\sin\alpha}.$$

Складывая и вычитая полученные тождества, получаем требуемое.

§ 8. УСЛОВНЫЕ РАВЕНСТВА

Равенства, справедливые при всех допустимых значениях аргументов, удовлетворяющих каким-либо дополнительным условиям (условиям связи), называются *условными*. Например, равенство

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta \qquad (*)$$

справедливо не при всех допустимых значениях аргументов α и β, а лишь при некоторых дополнительных условиях, например, когда $\alpha+\beta=2\pi k$.

В отличие от условных, равенства, рассмотренные в § 5, называются *безусловными*.

Рассмотрим условные равенства следующих видов:

1. Требуется доказать некоторое соотношение между тригонометрическими функциями, если задано соотношение (одно или несколько) между аргументами.

Пример 1. Доказать, что $\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z-1=(-1)^n 2\cos x\times\cos y\cdot\cos z$, если $x+y+z=n\pi$.

Решение. Так как $x+y=\pi n-z$, то

$$A=\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z-1=\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 2y}{2}-1+\cos^2 z=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 2y)+\cos^2 z=\cos(\pi n-z)\cos(x-y)+\cos^2 z.$$

Заметим, что $\cos(\pi n-z)=\cos z$ при n четном и $\cos(\pi n-z)=-\cos z$ при n нечетном, мы можем записать, что $\cos(\pi n-z)=(-1)^n\cos z$. Тогда

$$A=(-1)^n\cos z\cdot\cos(x-y)+\cos^2 z=\cos z[(-1)^n\cos(x-y)+\cos z].$$

С другой стороны, правая часть доказываемого равенства при заданном условии приводится к тому же виду

$$(-1)^n 2\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z=(-1)^n[\cos(x+y)+\cos(x-y)]\cos z=$$

$$=(-1)^n[\cos(\pi n-z)-\cos(x-y)]\cos z=$$

$$=(-1)^n[\cos z\cdot(-1)^n+\cos(x-y)]\cos z=$$

$$=[(-1)^n\cos(x-y)+\cos z]\cos z.$$

2. Требуется доказать некоторое соотношение между тригонометрическими функциями, если даны другие соотношения (одно или несколько) также между тригонометрическими функциями тех же аргументов. При решении этих задач можно непосредственно доказывать требуемое, используя при этом заданное условие.

Пример 2. Доказать, что

$$\frac{1+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{m+n}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{m-n},\quad\text{если}\quad\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}=\frac{n}{m}.$$

Решение. Множество допустимых значений состоит из всех аргументов α, не равных $\frac{\pi}{2}\cdot n$, и β, не равных $\frac{\pi}{2}+\pi n$. Кроме того, $2\alpha+\beta\neq\pi n$, где n — целые числа, и $m(m-n)(m+n)\neq 0$.

Доказываемое равенство равносильно равенству

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)}=\frac{m+n}{m-n},$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{m+n}{m-n}.$$

Применяя к последнему производную пропорцию, получаем

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{m+n-m-n}{m-n+m+n},$$

или

$$\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}=\frac{n}{m}.$$

Итак, дополнительное условие есть равенство, равносильное доказываемому, следовательно, последнее справедливо.

В других случаях выгоднее преобразовать заданное дополнительное условие так, чтобы получить из него равенство, которое требуется доказать.

Пример 3. Доказать, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{n\sin\beta}{\cos\beta-n}$, если $\sin\alpha=n\sin(\alpha+\beta)$.

Решение. Множество допустимых значений состоит из всех аргументов α и β, сумма которых не равна $\frac{\pi}{2}+k\pi$. Кроме того, $\cos\beta\neq n$.

Преобразуем заданное соотношение.

Так как доказываемое равенство не содержит аргумента α, а содержит $\alpha+\beta$, то представим его в виде $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$. Тогда, заменяя α в заданном равенстве, получаем

$$\sin[(\alpha+\beta)-\beta]=n\sin(\alpha+\beta),$$

$$\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta=n\sin(\alpha+\beta),$$

или

$$\sin(\alpha+\beta)(\cos\beta-n)=\cos(\alpha+\beta)\sin\beta.$$

Деля полученное равенство на произведение $\cos(\alpha+\beta)(\cos\beta-n)$ $\left(\alpha+\beta\neq\pi k+\frac{\pi}{2},\ \cos\beta-n\neq 0\right)$, получаем $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{n\sin\beta}{\cos\beta-n}$, что и требовалось доказать.

Пример 4. Доказать, что

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

если

$$\frac{\cos x-\cos\alpha}{\cos x-\cos\beta}=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2\beta\cdot\cos\alpha}.$$

Решение. Множество допустимых значений аргументов состоит из всех $\frac{x}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$, α, не равных $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\beta\neq n\pi$, и таких, что $\cos x\neq\cos\beta$. Полагая (для удобства выкладок) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=y$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=a$ и $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=b$, преобразуем дополнительное условие.

Так как $\cos\gamma=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}$, а $\sin\gamma=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}$, то имеем

$$\frac{\frac{1-a^2}{1+y^2}-\frac{1-y^2}{1+a^2}}{\frac{1-y^2}{1+a^2}-\frac{1-b^2}{1+b^2}}=\frac{\frac{2a^2}{(1+a^2)^2}:\frac{1-b^2}{1+b^2}}{\frac{4b^2}{(1+b^2)^2}:\frac{1-a^2}{1+a^2}},$$

что после упрощения приводится к виду

$$\frac{a^2-b^2}{y^2-a^2}=\frac{a^2(1-b^2)}{b^2(1-a^2)}, \text{ или } (a^2-b^2)y^2=a^2b^2(a^2-b^2).$$

Если $a^2-b^2\neq 0$, то $y^2=a^2b^2$ и $y=\pm ab$, что в наших обозначениях означает $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, если $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\neq 0$.

Если $a^2-b^2=0$, то равенство $\frac{a^2-y^2}{y^2-y^2}=\frac{a^2(1-b^2)}{b^2(1-a^2)}$ справедливо для любых допустимых y, в частности, для $y=\pm ab$, т. е. и в этом случае $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

Заметим, что в некоторых случаях выгодно перейти от заданного дополнительного соотношения между аргументами к соотношению между тригонометрическими функциями этих аргументов.

Пример 5. Доказать, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma$, если $\alpha=\beta+\gamma$.

Решение. Множество допустимых значений состоит из всех $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\beta\neq\pi n$, $\gamma\neq\pi n$. Требуемое получим из дополнительного условия (равенства $\alpha=\beta+\gamma$). Так как $\alpha=\beta+\gamma$, то равны их соответствующие тригонометрические функции. В данном случае выгодно рассматривать равенство тангенсов этих аргументов.

Итак, $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\beta+\gamma)$ или

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}.$$

Переходя в правой части к котангенсам, находим, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}+\frac{1}{\operatorname{ctg}\gamma}}{1-\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}\gamma}}, \text{ т. е. } \operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma-1}.$$

После приведения последнего тождества к общему знаменателю получаем требуемое.

3. Дополнительные условия задаются в виде нескольких равенств, на которых некоторые связывают аргументы, а другие — тригонометрические функции этих аргументов.

Пример 6. Доказать, что

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

если

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \text{ и } A+B+C=\pi.$$

Решение. Считаем, что $\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\neq 0$. Обозначая равные отношения через t, имеем

$$a=t\cdot\sin A,\quad b=t\cdot\sin B,\quad c=t\cdot\sin C.$$

Тогда

$$b^2+c^2-2bc\cdot\cos A=t^2(\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\cdot\sin C\cdot\cos A)=$$

$$=t^2\left\{\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}-[\cos(B-C)-\cos(B+C)]\times\right.$$

$$\left.\times\cos[\pi-(B+C)]\right\}=t^2\left\{1-(\cos 2B+\cos 2C)\cdot\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+\cos(B+C)[\cos(B-C)-\cos(B+C)]\right\}=$$

$$=t^2[1-\cos(B+C)\cdot\cos(B-C)+\cos(B+C)\cos(B-C)-$$

$$-\cos^2(B+C)]=t^2\cdot\sin^2(B+C)=t^2\cdot\sin^2A=a^2,$$

что и требовалось доказать.

4. Требуется доказать соотношение между аргументами, если задаются соотношения между тригонометрическими функциями этих аргументов.

Пример 7. Доказать, что $\alpha+\beta+\gamma=(2k+1)\pi$, если

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1. \qquad (*)$$

Решение. Сгруппируем два первых члена равенства (*), а в третьем слагаемом перейдем к функциям синус и косинус. Имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)+\frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}-1=0,$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}-\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}=0,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)-\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=0.$$

После перенесения знака в обеих частях последнего равенства получаем

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=0.$$

Из последнего следует, что $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, или $\alpha+\beta+\gamma=\pi+2\pi k$, что и требовалось доказать.

§ 3. ИСКЛЮЧЕНИЕ АРГУМЕНТОВ ИЗ СИСТЕМЫ РАВЕНСТВ

Пример 1. Исключить x из системы равенств

$$\begin{cases}\cos x-\sin x=m,\\ \sin 2x=n.\end{cases}$$

Решение. Задачу надо понимать следующим образом: считая данные равенства справедливыми и используя свойства равенств, получить как следствие такое равенство, которое бы не содержало x.

Если рассматривать эти два равенства как уравнения относительно x, то, исключив x, мы найдем необходимое условие (см. гл. III), которому должны удовлетворять параметры m и n, чтобы эта система была совместной (см. гл. III); однако эти условия могут быть недостаточными, поэтому вполне допустимыми являются такие преобразования, которые могут дать посторонние корни (например, возведение обеих частей уравнения в квадрат и т. д.). Общий метод исключения параметров из системы двух уравнений состоит в том, что решают одно из уравнений относительно параметра и найденное для него значение подставляют в другое. Однако некоторые искусственные приемы позволяют получать нужный результат значительно быстрее.

В данном случае, возводя первое равенство в квадрат, находим

$$\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cdot\cos x=m^2 \text{ или } 1-\sin 2x=m^2.$$

Затем, используя второе равенство, получаем $1-n=m^2$. Этот результат надо понимать так: если m и n не удовлетворяют найденному условию, то заведомо не существует такого x, чтобы оба равенства были одновременно справедливы. Но надо помнить, что найденное условие не является, вообще говоря, достаточным условием совместности системы, т. е., если m и n удовлетворяют найденному условию, то это еще не значит, что существует такое x, которому удовлетворяют оба уравнения одновременно. Например, при $n=-2$, $m=\sqrt{3}$ оба уравнения не имеют смысла.

Пример 2. Исключить углы из следующих систем равенств.

1) $\begin{cases}\cos(x-y)=c,\\ \sin x+\sin y=a,\\ \cos x+\cos y=b,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}p\cos^2\theta+q\cos^2\varphi=1,\\ p\operatorname{ctg}^2\theta+q\operatorname{ctg}^2\varphi=1,\\ p\sin\theta=q\sin\varphi.\end{cases}$

3) $\begin{cases}x\sin\alpha-y\cos\alpha=\sqrt{x^2+y^2},\\ \dfrac{\sin^2\alpha}{a^2}+\dfrac{\cos^2\alpha}{b^2}=-\dfrac{1}{x^2+y^2}.\end{cases}$

Решение. 1. Возводя второе и третье равенства в квадрат и складывая их, имеем $(\sin^2x+\cos^2x)+2(\sin x\cdot\sin y+\cos x\cdot\cos y)+(\sin^2y+\cos^2y)=a^2+b^2$, т. е. $2+2\cos(x-y)=a^2+b^2$. Используя первое равенство, окончательно получаем $2+2c=a^2+b^2$.

Хотя числа $a=2$, $b=2$, $c=3$ удовлетворяют полученному соотношению, но при $c=3$ первое уравнение теряет смысл.

2. Область допустимых значений данных выражений состоит из всех $\varphi\neq\pi k$ и $\theta\neq\pi k$ (π и k — целые). Следовательно, $\sin\varphi\neq0$ и $\sin\theta\neq0$. Отсюда следует, что $p\neq0$ и $q\neq0$. В самом деле, если $p=0$, то из третьего уравнения следует, что и $q=0$. Но в этом случае первые два уравнения системы теряют смысл.

Переходим к решению задачи. Запишем первое равенство системы в виде

$$p(1-\sin^2\theta)+q(1-\sin^2\varphi)=1 \text{ или } p\sin^2\theta+q\sin^2\varphi=p+q-1.$$

Возведя третье равенство в квадрат, имеем $p^2\sin^2\theta=q^2\sin^2\varphi$. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases}p\sin^2\theta+q\sin^2\varphi=p+q-1,\\ p^2\sin^2\theta-q^2\sin^2\varphi=0\end{cases}$$

двух уравнений относительно величин $\sin^2\theta$ и $\sin^2\varphi$. Исключая из системы двух равенств сначала $\sin^2\theta$, затем $\sin^2\varphi$, получаем

$$q(p+q)\sin^2\varphi=q(p+q-1),$$

$$p(p+q)\sin^2\theta=q(p+q-1).$$

Так как $p\neq0$, $q\neq0$, $\sin\varphi\neq0$ и $\sin\theta\neq0$, то из этой системы следует, что и $p+q\neq0$ (в противном случае $p+q=1$, что несовместно с условием $p+q=0$). Поэтому

$$\sin^2\varphi=\frac{p(p+q-1)}{q(p+q)};\quad \sin^2\theta=\frac{q(p+q-1)}{p(p+q)}.$$

Перепишем теперь второе равенство заданной системы в виде

$$\frac{p(1-\sin^2\theta)}{\sin^2\theta}+\frac{q(1-\sin^2\varphi)}{\sin^2\varphi}=1$$

и подставляя найденные значения $\sin^2\varphi$ и $\sin^2\theta$, после упрощения получаем $(p^2-q^2)^2=-pq$.

3. Возводя первое равенство в квадрат, получаем последовательно

$$x^2\sin^2\alpha + y^2\cos^2\alpha - 2xy\sin\alpha\cos\alpha = x^2 + y^2$$

$$x^2(1-\sin^2\alpha) + y^2(1-\cos^2\alpha) + 2xy\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$x^2\cos^2\alpha - y^2\sin^2\alpha + 2xy\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 = 0,$$

т. е.

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0.$$

Отсюда $x^2\cos^2\alpha = y^2\sin^2\alpha$. Таким образом, с одной стороны, $x^2\cos^2\alpha = y^2(1-\cos^2\alpha)$, т. е.

$$\cos^2\alpha = \frac{y^2}{x^2+y^2},$$

с другой стороны, $x^2(1-\sin^2\alpha) = y^2\sin^2\alpha$, т. е.

$$\sin^2\alpha = \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

Подставляя $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$ во второе равенство, получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

При решении задач на исключение углов, в зависимости от выбранного способа решения, могут получаться различные результаты.

Пример 3. Исключить β, если

$$\begin{cases} \cos(\beta+\alpha) = m, \\ \cos(\beta-\alpha) = n. \end{cases}$$

Решение. 1 способ. Складывая и вычитая данные равенства, получаем:

$$\begin{cases} 2\cos\beta\cdot\cos\alpha = m+n, \\ -2\sin\beta\cdot\sin\alpha = m-n \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 4\cos^2\beta\cdot\cos^2\alpha = (m+n)^2, \\ 4\sin^2\beta\cdot\sin^2\alpha = (m-n)^2. \end{cases}$$

Отсюда, умножая первое равенство полученной системы на $\sin^2\alpha$, а второе — на $\cos^2\alpha$ и складывая, имеем

$$4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta) = (m+n)^2\sin^2\alpha + (m-n)^2\cos^2\alpha,$$

т. е.

$$\sin^2 2\alpha = (m+n)^2\sin^2\alpha + (m-n)^2\cos^2\alpha.$$

II способ. Заметив, что $\beta+\alpha = (\beta-\alpha)+2\alpha$, имеем

$$n = \cos[(\beta-\alpha)+2\alpha] = \cos(\beta-\alpha)\cdot\cos 2\alpha - \sin(\beta-\alpha)\cdot\sin 2\alpha.$$

Используя второе равенство и учитывая, что $\sin(\beta-\alpha) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\beta-\alpha)}$, получаем $n = n\cos 2\alpha \pm \sqrt{1-n^2}\sin 2\alpha$ или $\pm\sqrt{1-n^2}\sin 2\alpha = n\cos 2\alpha - n$, т. е.

$$(1-n^2)\sin^2 2\alpha = (n\cos 2\alpha - n)^2.$$

§ 8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

При доказательстве тригонометрических неравенств используются те же приемы, что и при доказательстве неравенств, рассмотренных в курсе алгебры (см. гл. II, § 8).

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих различные методы доказательства.

В некоторых случаях тригонометрическое неравенство можно свести к алгебраическому.

Пример 1. Доказать неравенство

$$4\sin 3\alpha + 5 \geqslant 4\cos 2\alpha + 5\sin\alpha.$$

Решение. Обозначая $\sin\alpha = a$ и используя тождества $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$, мы можем данное условие переписать в виде $4(3a-4a^3)+5 \geqslant 4(1-2a^2)+5a$, где $|a| \leqslant 1$. После соответствующих преобразований получаем

$$16a^3 - 8a^2 - 7a - 1 \leqslant 0 \text{ или } (a-1)(4a+1)^2 \leqslant 0.$$

Последнее очевидно, так как $a-1 \leqslant 0$.

Заметим, что знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда $\sin\alpha = 1$ и $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$.

Пример 2. Доказать, что $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma \geqslant 1$, если $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Область допустимых значений состоит из всех α, β и γ, не равных $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Из условия $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$ следует, что $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha = 1$ (предлагаем читателю доказать это). Если положить $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{tg}\beta = b$, $\operatorname{tg}\gamma = c$, то доказательство данного неравенства сводится к доказательству алгебраического неравенства $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$ при условии $a>0$, $b>0$, $c>0$. Это неравенство мы доказали (см. гл. II, § 8).

При доказательствах некоторых неравенств полезно использовать уже известные неравенства $\sin\alpha < \alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha > \alpha$, справедливые для $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Пример 3. Доказать, что $\alpha - \operatorname{tg}\alpha > \beta - \operatorname{tg}\beta$, если $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Решение. $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha = (1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}(\beta - \alpha)$. Так как $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\beta > 0$, $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) > \beta - \alpha$, то $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha > \beta - \alpha$, откуда следует, что $\alpha - \operatorname{tg}\alpha > \beta - \operatorname{tg}\beta$.

Пример 4. Доказать, что $\cos\alpha + \alpha\sin\alpha > 1$, если $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Так как $\sin\alpha < \alpha$ и $\cos\alpha < 1$, то $\sin^2\alpha < \alpha\sin\alpha$ и $\cos^2\alpha < \cos\alpha$. Складывая эти неравенства, получаем

$$\cos\alpha + \alpha\sin\alpha > 1.$$

В некоторых случаях полезно найти область изменения правой и левой части заданного неравенства.

Пример 5. Доказать, что $|\sin\alpha + \cos\alpha| < |\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha|$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}\cdot k$.

Решение. Так как $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, то $|\sin\alpha + \cos\alpha| \leqslant \sqrt{2}$. С другой стороны, $|\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha| = \frac{2}{|\sin 2\alpha|} \geqslant 2$. Отсюда следует, что

$$|\sin\alpha + \cos\alpha| < |\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha|.$$

При доказательстве некоторых неравенств можно использовать метод математической индукции.

Пример 6. Доказать, что $\operatorname{tg} n\alpha > n\operatorname{tg}\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}$, где $n = 2, 3, \ldots$

Решение. При $n = 2$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, $0 < \operatorname{tg}\alpha < 1$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$, поэтому $\operatorname{tg} 2\alpha > 2\operatorname{tg}\alpha$.

Допустим теперь, что $\operatorname{tg} n\alpha > n\operatorname{tg}\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}$, докажем, что $\operatorname{tg}(n+1)\alpha > (n+1)\operatorname{tg}\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4n}$. Имеем $(n+1)\operatorname{tg}\alpha = n\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha$. Согласно нашему допущению отсюда следует, что

$$(n+1)\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg}\alpha.$$

Но $\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg}\alpha = (1 - \operatorname{tg} n\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha)\operatorname{tg}(n+1)\alpha$. Поэтому

$$(n+1)\operatorname{tg}\alpha < (1 - \operatorname{tg} n\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha)\operatorname{tg}(n+1)\alpha. \qquad (*)$$

Оценим множитель $1 - \operatorname{tg} n\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Так как $0 < n\alpha < \frac{\pi}{4}$, то $0 < \operatorname{tg} n\alpha < 1$. Поэтому $0 < \operatorname{tg} n\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha < 1$ и $0 < 1 - \operatorname{tg} n\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha < 1$. Учитывая последнее неравенство, из (*) получаем, что $(n+1)\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}(n+1)\alpha$, что и требовалось доказать.

§ 8. СУММИРОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Задачи на суммирование тригонометрических выражений требуют большой изобретательности.

Во многих случаях они решаются представлением членов последовательности в виде разностей определенных функций так, чтобы получить подобные члены разных знаков, или методом индукции (обычно, когда предлагается доказать формулу суммы) и т. д.

Проиллюстрируем сказанное на следующих примерах.

Пример 1. Найти сумму

$$S_n = \sin x + \sin 3x + \sin 2x + \sin 5x + \ldots + \sin 2^{n-1}x + \sin 3 \cdot 2^{n-1}x.$$

Решение. Каждое произведение правой части представим в виде разности

$$a_k = \sin 2^{k-1} \sin 3 \cdot 2^{k-1}x = \frac{1}{2}(\cos 2^k x - \cos 2^{k+1}x).$$

Тогда

$$S_n = \frac{1}{2}[(\cos 2x - \cos 2x) + (\cos 2^2 x - \cos 3x) + \ldots + (\cos 2^{n-1}x - \cos 2^n x) + (\cos 2^n x - \cos 2^{n+1}x)],$$

откуда после приведения подобных получим

$$S_n = \frac{\cos 2x - \cos 2^{n+1}x}{2}.$$

Иногда можно перейти от заданной последовательности к другой, методы суммирования которой известны.

Пример 2. Найти сумму

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \sin 2x \cdot \sin 3x + \ldots + \sin nx \cdot \sin(n+1)x.$$

Решение. Вновь представляем каждое произведение левой части в виде разности

$$a_k = \sin kx \cdot \sin(k+1)x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos(2k+1)x).$$

Тогда

$$S_n = \frac{1}{2}[(\cos x - \cos 3x) + (\cos x - \cos 5x) + \ldots + (\cos x - \cos(2n+1)x)] = \frac{1}{2}n\cos x - \frac{1}{2}S_1,$$

где

$$S_1 = \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos(2n+1)x \qquad (*)$$

есть сумма косинусов, аргументы которых составляют арифметическую прогрессию с разностью $d = 2x$ (см. гл. XI, § 1). Для нахождения S_1 умножим обе части равенства (*) на $2\sin x$ и используем формулу $2\sin\alpha\cdot\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$. Получим $2S_1\sin x = (\sin 4x - \sin 2x) + (\sin 6x - \sin 4x) + \ldots + [\sin 2(n+1)x - \sin 2nx] = \sin 2(n+1)x - \sin x$.

Отсюда при $\sin x \neq 0$ находим $S_1 = \frac{\sin 2(n+1)x - \sin 2x}{2\sin x}$ и, окончательно,

$$S_n = \frac{n\cos x}{2} - \frac{\sin 2(n+1)x - \sin 2x}{4\sin x} = \frac{(n+1)\sin 2x - \sin 2(n+1)x}{4\sin x}.$$

Если $\sin x = 0$, т. е. $x = \pi k$, то $S_n = 0$.

При суммировании синусов или косинусов кратных аргументов (kx, $k=1, 2, \ldots$) с коэффициентами, образующими геометрическую прогрессию, можно особенно использовать формулу Муавра $(\cos x+\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$ (см. гл. 1).

Пример 8. Найти сумму $S_n=\cos x+2\cos 2x+4\cos 3x+\ldots+2^{n-1}\cos nx$, и $\sigma_n=\sin x+2\sin 2x+4\sin 3x+\ldots+2^{n-1}\sin nx$, где $x=\dfrac{2\pi}{n}$.

Решение. Вычислим сумму $S_n+i\sigma_n$:

$$S_n+i\sigma_n=(\cos x+i\sin x)+2(\cos 2x+i\sin 2x)+\ldots+$$
$$+2^{n-1}(\cos nx+i\sin nx)=(\cos x+i\sin x)+2(\cos x+i\sin x)^2+\ldots+$$
$$+2^{n-1}(\cos x+i\sin x)^n.$$

Справа стоит сумма n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q=2(\cos x+i\sin x)$ и первым членом $a=\cos x+i\sin x$. Поэтому

$$S_n+i\sigma_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{(\cos x+i\sin x)[1-2^n(\cos x+i\sin x)^n]}{1-2(\cos x+i\sin x)}=$$
$$=\frac{(\cos x+i\sin x)(1-2^n\cos nx-i2^n\sin nx)}{(1-2\cos x)-2i\sin x}.$$

Заменим, что

$$\frac{\cos x+i\sin x}{1-2\cos x-2i\sin x}=\frac{(\cos x+i\sin x)(1-2\cos x+2i\sin x)}{(1-2\cos x)^2+4\sin^2 x}=$$
$$=\frac{\cos x-2+i\sin x}{5-4\cos x}$$

и $x=\dfrac{2\pi}{n}$, получаем

$$S_n+i\sigma_n=\frac{\left(\cos\frac{2\pi}{n}-2+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)(1-2^n\cos 2\pi-i\cdot 2^n\sin 2\pi)}{5-4\cos\frac{2\pi}{n}}=$$
$$=\frac{\left(\cos\frac{2\pi}{n}-2+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)(1-2^n)}{5-4\cos\frac{2\pi}{n}}=\frac{(1-2^n)\left(\cos\frac{2\pi}{n}-2\right)}{5-4\cos\frac{2\pi}{n}}+$$
$$+i\frac{(1-2^n)\sin\frac{2\pi}{n}}{5-4\cos\frac{2\pi}{n}},$$

Из равенства двух комплексных чисел следует равенство их действительных и мнимых частей, поэтому

$$S_n=\frac{(2^n-1)\left(2-\cos\frac{2\pi}{n}\right)}{5-4\cos\frac{2\pi}{n}};\quad \sigma_n=\frac{(1-2^n)\sin\frac{2\pi}{n}}{5-4\cos\frac{2\pi}{n}}.$$

В следующем примере используем метод математической индукции.

Пример 4. Доказать, что

$$1)\ \frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}+\frac{\cos 3x}{\cos^3 x}+\ldots+\frac{\cos nx}{\cos^n x}=\frac{\sin(n+1)x}{\cos^n x\cdot\sin x}. \qquad (*)$$

Решение. При $n=1$ равенство очевидно ($2=2$). Допуская это равенство справедливым для некоторого $n>1$, докажем справедливость его для $n+1$. Очевидно, что

$$S_{n+1}=S_n+\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}=\frac{\sin(n+1)x}{\cos^n x\cdot\sin x}+\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}=$$
$$=\frac{\sin(n+1)x\cos x+\cos(n+1)x\cdot\sin x}{\cos^{n+1}x\cdot\sin x}=\frac{\sin(n+2)x}{\cos^{n+1}x\cdot\sin x},$$

т. е. равенство (*) справедливо и для $n+1$.

К задачам на суммирование тесно примыкают задачи на вычисление произведений. Эти задачи также требуют большей изобретательности и иногда решаются умножением и делением произведения на некоторую тригонометрическую функцию.

Пример 5. Вычислить

$$P_n=(1+\sec 2x)(1+\sec 4x)\ldots(1+\sec 2^n x).$$

Решение. 1. Очевидно

$$P_n=\frac{1+\cos 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{1+\cos 4x}{\cos 4x}\cdot\ldots\cdot\frac{1+\cos 2^n x}{\cos 2^n x}=$$
$$=\frac{2\cos^2 x}{\cos 2x}\cdot\frac{2\cos^2 2x}{\cos 4x}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cos^2 2^{n-1}x}{\cos 2^n x}=$$
$$=\frac{2^n\cos^2 x}{\cos 2^n x}\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 2^2 x\ldots\cos 2^{n-1}x.$$

Мы получили произведение косинусов, аргументы которых образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=2$. Поэтому умножим и разделим это произведение на $\sin x\neq 0$ (см. § 2, гл. 3). Применяя затем последовательно формулу $\sin x\cdot\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$, получаем

$$P_n=\frac{2^n\cos x}{\cos 2^n x}\cdot\frac{\sin 2^n x}{2^n\sin x}=\frac{\operatorname{tg}2^n x}{\operatorname{tg}x}.$$

Если $\sin x=0$, т. е. $x=\pi k$, то $P_n=2^n$.

Пример 6. Вычислить

$$P_n=\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\beta}{4}\right)\ldots\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}+\sin\frac{\beta}{2^n}\right)$$

Решение. Умножим и разделим произведение на

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}\right)\neq 0.$$

Заметим, что

$$(\cos x-\cos y)(\cos x+\cos y)=\cos^2 x-\cos^2 y=\frac{\cos 2x-\cos 2y}{2},$$

имеем:

$$P_n=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\beta}{4}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}+\cos\frac{\beta}{2^{n-1}}\right)\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}+\cos\frac{\beta}{2^n}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}\right)}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\beta}{4}\right)\ldots$$

$$\ldots\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}+\cos\frac{\beta}{2^{n-1}}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}-\cos\frac{\beta}{2^{n-1}}\right)\right]=\ldots=$$

$$=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{2^n\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}\right)},$$

Если $\cos\frac{\alpha}{2^n}=\cos\frac{\beta}{2^n}$, т. е. $\beta=2^n 2k\pi\pm\alpha$, то $P_n=2^n\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\ldots$ $\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n}$.

Умножим и разделим правую часть на $\sin\frac{\alpha}{2^n}\neq 0$ и применяя затем последовательно формулу $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$, получим

$$P_n=\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}.$$

Если, наконец, и $\sin\frac{\alpha}{2^n}=0$, т. е. $\alpha=2^n k\pi$, то

$$P_n=(-1)^{k}2^n.$$

ГЛАВА XII

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Все тригонометрические функции, будучи периодическими, не являются монотонными во всей области своего существования. Отсюда следует (см. гл. VII, § 7), что функции, обратные тригонометрическим, рассмотренным во всей области их существования, многозначны. Чтобы получить однозначные ветви этих многозначных функций, нужно взять промежутки монотонности, на которых тригонометрическая функция либо возрастает, либо убывает, принимая при этом все возможные для нее значения.

Рассмотрим обратные функции для каждой из тригонометрических функций в отдельности.

§ 1. АРКСИНУС

Как известно, функция $y=\sin x$ монотонна на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right]$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$. Возьмем промежуток $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$. На нем $y=\sin x$ возрастает, принимая все свои значения от -1 до 1. Согласно общей теории (см. гл. VII, § 7) существует обратная однозначная функция, определенная на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$ и монотонно возрастающая на нем от значения $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Эта обратная функция обозначается символом

$$x=\arcsin y \qquad (1)$$

(читается: «x равен арксинусу y»).

Следуя нашей привычке обозначать аргумент через x, поменяем местами x и y в равенстве (1) и будем писать

$$y=\arcsin x.$$

Таким образом, *функцией* $y=\arcsin x$ *называется переменная величина* y, *лежащая на отрезке* $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, *синус которой равен* x. Это значение y может рассматриваться как радианная мера угла (дуги).

Взаимная обратность функций $\sin x$ и $\arcsin x$ хорошо видна из следующей записи

$$\sin(\arcsin x) = x, \text{ если } |x| \leqslant 1, \tag{2}$$

т. е. знаки операций взятия «arcsin», а затем «sin» уничтожаются, если они следуют одна за другой. Обратный порядок этих операций дает тот же результат в том случае, когда $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, т. е.

$\arcsin(\sin x) = x$, если $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

График функции $y = \arcsin x$ можно получить из части графика $y = \sin x$, $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$ зеркальным отражением последнего относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 69). На этом графике наглядно отражены все свойства функции $y = \arcsin x$. Перечислим их еще раз.

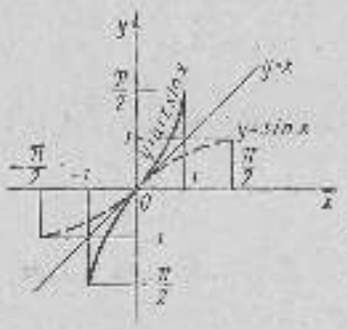


Рис. 69

Функция $y = \arcsin x$:

1) определена и однозначна на отрезке $[-1, 1]$,

2) монотонно возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, принимая при этом все промежуточные значения,

3) является нечетной функцией, т. е. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Многозначная функция, обратная тригонометрической функции $y = \sin x$ во всей области ее существования, обозначается символом $Y = \operatorname{Arcsin} x$.

Таким образом, $Y = \operatorname{Arcsin} x$ есть множество в с е х чисел, синус которых равен x.

Найти все значения $Y = \operatorname{Arcsin} x$ — это значит найти все числа (или углы, или дуги) Y, синус которых равен x, т. е.

$$\sin Y = x, \tag{3}$$

где x — некоторое фиксированное число, удовлетворяющее условию $|x| \leqslant 1$.

Пусть y_0 — число, взятое из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ такое, что $y_0 = \arcsin x$, или

$$\sin y_0 = x. \tag{4}$$

Сравнивая равенства (3) и (4), имеем

$$\sin Y = \sin y_0, \tag{5}$$

и наша задача свелась к отысканию всех чисел Y (или углов, или дуг), удовлетворяющих условию (5). Последнее справедливо для

всех Y и y_0, связанных равенствами $Y - y_0 = 2\pi n$ и $Y + y_0 = \pi + 2\pi n$ (см. главу X, § 8). Отсюда следует, что $Y = y_0 + 2\pi n$ и $Y = -y_0 + \pi(2n+1)$. Итак, все значения $Y = \operatorname{Arcsin} x$, т. е. все числа, синус которых равен x, заключены в формулах

$$\operatorname{Arcsin} x = \begin{cases} \arcsin x + 2\pi n, \\ -\arcsin x + \pi(2n+1), \end{cases} \tag{6}$$

которые можно объединить в одну:

$$\operatorname{Arcsin} x = (-1)^k \arcsin x + \pi k. \tag{7}$$

В самом деле, если k четно, т. е. $k = 2n$, то из (7) следует верхняя формула (6), если $k = 2n+1$, то из (7) получаем нижнюю часть формулы (6).

З а м е ч а н и е. При $x = \pm 1$ формула (7) упрощается:

$$\operatorname{Arcsin} 1 = (-1)^n \arcsin 1 + \pi n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi k, & \text{если } n = 2k, \\ -\frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi k, & \text{если } n = 2k+1, \end{cases}$$

т. е. $\operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ при любом k.

$$\operatorname{Arcsin}(-1) = (-1)^n \arcsin(-1) + \pi n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, & \text{если } n = 2k, \\ +\frac{\pi}{2} - \pi + 2\pi k, & \text{если } n = 2k-1, \end{cases}$$

т. е. $\operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ при любом k.

§ 2. АРККОСИНУС

Эту функцию строят по той же схеме, что и арксинус.

На промежутке $[0, \pi]$ функция $y = \cos x$ монотонно убывает от 1 до -1 и принимает при этом все промежуточные значения. Следовательно, существует обратная однозначная функция, определенная на отрезке $-1 \leqslant y \leqslant 1$ и монотонно убывающая на нем от π до 0. Эта обратная функция обозначается символом

$$x = \arccos y$$

(читается: «x равен арккосинусу y»), или, если независимое переменное обозначать через x,

$$y = \arccos x.$$

Таким образом, *функцией* $y=\arccos x$ *называется переменная величина* y, *лежащая на отрезке* $[0,\ \pi]$, *косинус которой равен* x. Из этого определения следует, что

$$\cos(\arccos x)=x, \tag{8}$$

если $|x|\leqslant 1$.

($\arccos(\cos x)=x$ в том случае, когда $0\leqslant x\leqslant\pi$ (см. § 1)).

График функции $y=\arccos x$ можно получить из графика функции $y=\cos x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$ зеркальным отражением последнего относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 70).

Итак, функция $y=\arccos x$:

1) определена и однозначна на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$;

2) монотонно убывает от π до 0, принимая при этом все промежуточные значения $0\leqslant y\leqslant\pi$.

Заметим, что функция $y=\arccos x$ не является ни четной, ни нечетной. Так, например,

$$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}\quad\left(\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\right)$$

а

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi\quad\left(\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}\right).$$

Многозначная функция, обратная функции $y=\cos x$ во всей области ее существования, обозначается символом $Y=\operatorname{Arccos} x$.

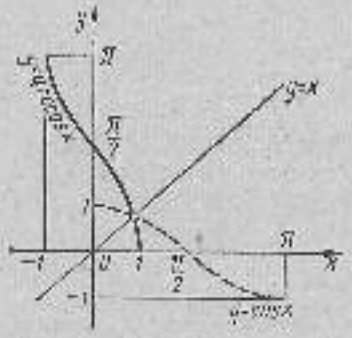


Рис. 70

Таким образом, $Y=\operatorname{Arccos} x$ есть множество всех чисел Y, косинус которых равен x.

Найти все значения $Y=\operatorname{Arccos} x$ — это значит найти все числа (или углы, или дуги), косинус которых равен x, т. е.

$$\cos Y=x, \tag{9}$$

где $|x|\leqslant 1$ — некоторое фиксированное число. Возьмем в промежутке $[0,\ \pi]$ $y_0=\arccos x$. Для него также

$$\cos y_0=x. \tag{10}$$

Сравнивая (9) и (10), имеем

$$\cos Y=\cos y_0, \tag{11}$$

и наша задача свелась к отысканию всех чисел (углов или дуг), удовлетворяющих условию (11). Последнее справедливо для всех Y и y_0, связанных равенствами $Y=y_0\pm 2n\pi$, где n — любое целое число (см. гл. X, § 8).

Итак, все значения $Y=\operatorname{Arccos} x$, т. е. все числа, косинус которых равен x, заключены в формуле

$$\operatorname{Arccos} x=\pm\arccos x+2n\pi. \tag{12}$$

Замечание. При $x=0$ формула (12) упрощается

$$\operatorname{Arccos} 0=\pm\arccos 0+2n\pi=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\\[2ex] -\dfrac{\pi}{2}+2n\pi=-\dfrac{\pi}{2}+\pi(2n-1),\end{cases}$$

т. е. $\operatorname{Arccos} 0=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$, где n — любое целое число.

§ 3. АРКТАНГЕНС И АРККОТАНГЕНС

В интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ функция $y=\operatorname{tg} x$ монотонно возрастает от $-\infty$ до ∞ и принимает при этом все действительные значения. Следовательно, существует обратная ей однозначная функция, определенная на всей числовой оси и монотонно возрастающая от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{\pi}{2}$. Эта обратная функция обозначается символом $x=\operatorname{arctg} y$ (*ex* равен арктангенсу *игрек*) или

$$y=\operatorname{arctg} x,$$

если угодно обозначать через x.

Таким образом, *функцией* $y=\operatorname{arctg} x$ *называется переменная величина* y, *лежащая в интервале* $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, *тангенс которой равен* x.

Из этого определения следует, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$ для любого действительного x [$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x$ в том случае, когда $|x|<\dfrac{\pi}{2}$].

График этой функции может быть получен зеркальным отображением относительно биссектрисы I и III координатных углов ветви тангенсоиды, соответствующей интервалу $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ (рис. 71).

Итак, функция $y=\operatorname{arctg} x$:

1) определена и однозначна на всей числовой прямой;

2) монотонно возрастает от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{\pi}{2}$, принимая при этом все промежуточные значения;

3) является нечетной функцией, т. е. $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x$.

Многозначная функция, обратная функции $y=\operatorname{tg} x$, рассмотренной во всей области ее существования, обозначается символом

$$Y=\operatorname{Arctg} x.$$

Таким образом, $Y=\operatorname{Arctg} x$ есть множество всех чисел Y, тангенс которых равен x, т. е.

$$\operatorname{tg} Y=x, \tag{14}$$

Найдем все эти значения Y. С этой целью возьмем $y_0 = \operatorname{arcctg} x$. Сравнивая равенство $\operatorname{ctg} y_0 = x$ с равенством (14), имеем

$$\operatorname{tg} y_0 = \operatorname{tg} Y,$$

откуда следует, что $Y = y_0 + n\pi$.

Итак, все значения $Y = \operatorname{Arcctg} x$, т. е. все числа, тангенс которых равен x, заключены в формуле

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + n\pi. \tag{15}$$

На интервале $(0, \pi)$, функция $y = \operatorname{ctg} x$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$ и принимает все действительные значения. Следовательно, существует обратная ей однозначная функция, определенная на всей числовой оси и монотонно убывающая от π до 0. Эта функция обозначается символом $x = \operatorname{arcctg} y$, или

$$y = \operatorname{arcctg} x,$$

если аргумент обозначать через x.

Таким образом, *функцией* $y = \operatorname{arcctg} x$ *называется переменная величина* y, *лежащая в интервале* $(0, \pi)$, *котангенс которой равен* x.

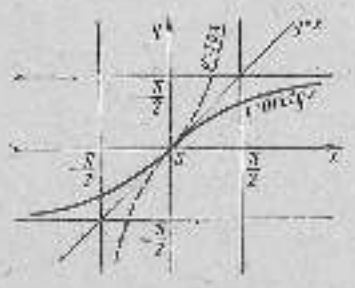


Рис. 71

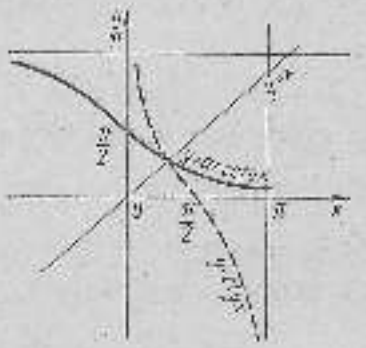


Рис. 72

Из этого определения вытекает, что $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ для любого действительного x. [$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ в том случае, когда $0 < x < \pi$].

График этой функции дан на рис. 72. Мы видим, что функция $y = \operatorname{arcctg} x$:

1) определена и однозначна на всей числовой прямой;

2) монотонно убывает от π до 0, принимая при этом все промежуточные значения;

3) так же, как и арккосинус, $\operatorname{arcctg} x$ не является ни четной, ни нечетной функцией. Так, например, $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1\right)$, а $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3}{4}\pi \quad \left(\operatorname{ctg}\frac{3}{4}\pi = -1\right)$.

Все значения Y, котангенс которых равен x, записываются символом $Y = \operatorname{Arcctg} x$. Все эти значения Y заключены в формуле

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + n\pi \tag{15}$$

(доказательство представляется читателю).

Вместо промежутков $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ для синуса и тангенса, т. е. $(0, \pi)$ — для косинуса и котангенса можно рассматривать другие промежутки монотонности этих функций. Каждому такому промежутку будет соответствовать обратная однозначная функция. Таким образом, каждая многозначная функция $x = \operatorname{Arcsin} x$, $y = \operatorname{Arccos} x$, $y = \operatorname{Arctg} x$ и $y = \operatorname{Arcctg} x$ имеет бесконечное число однозначных ветвей, среди которых находятся функции $y = \operatorname{arcsin} x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$. Последние называются главными однозначными ветвями обратных тригонометрических функций, или, проще, их *главными значениями*.

§ 4. ОСНОВНЫЕ ТОЖДЕСТВА

1. При всех допустимых значениях аргумента x справедливы тождества

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \tag{17}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}. \tag{18}$$

Докажем одно из них, например (18).

Перепишем его в виде $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$, вычислим тангенс числа $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$.

По формулам приведения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x.$$

Так как $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, то $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x < \frac{\pi}{2}$. Таким образом, два числа $\operatorname{arctg} x$ и $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$, заключенные в одном интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, имеют равные значения тангенса, т. е.

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right).$$

Отсюда следует равенство этих аргументов, т. е.

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x,$$

вид

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично доказывается тождество (17).

Отметим еще одну пару тождеств.

II. При всех допустимых значениях аргумента x справедливы тождества

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \tag{19}$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \tag{20}$$

Докажем одно из них, например (19).

Имеем

$$\cos[\arccos(-x)] = -x$$

и

$$\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x,$$

т. е.

$$\cos[\arccos(-x)] = \cos(\pi - \arccos x).$$

Так как $0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi$ для любого $|a| \leqslant 1$, то $0 \leqslant \arccos(-x) \leqslant \pi$ и $0 \leqslant \pi - \arccos x \leqslant \pi$. Таким образом, числа $\arccos(-x)$ и $\pi - \arccos x$, заключенные в одном промежутке $[0, \pi]$, имеют равные значения косинуса. Следовательно, эти числа равны, т. е.

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Второе равенство доказывается аналогично.

§ 5. ЗАДАЧИ

Пример 1. Найти область определения следующих функций:

$$1)\ y = \arcsin\frac{2x}{x-1}, \quad 2)\ y = \sqrt{\pi - 4\arccos\frac{x}{2}}.$$

Решение. 1. Арксинус определен для всех значений аргумента, не превосходящих по абсолютной величине единицы. Следовательно, область определения данной функции состоит из всех значений x, удовлетворяющих неравенству

$$-1 \leqslant \frac{2x}{x-1} \leqslant 1.$$

Решая его, находим

$$-1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}.$$

Итак, область определения функции $y = \arcsin\frac{2x}{x-1}$ есть отрезок $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$.

2. Область определения этой функции состоит из всех значений x, для которых $-1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1$ и $\pi - 4\arccos\frac{x}{2} \geqslant 0$, или $|x| \leqslant 2$ и $\arccos\frac{x}{2} \leqslant \frac{\pi}{4}$. Учитывая, что $\frac{\pi}{4} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$, последнее неравенство можно переписать в виде

$$\arccos\frac{x}{2} \leqslant \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{21}$$

Так как арккосинус монотонно убывает в области своего определения, то из (21) следует, что

$$1 \geqslant \frac{x}{2} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ т. е. } \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2,$$

причем этот отрезок содержится в отрезке $[-2, 2]$.

Итак, область определения функции $y = \sqrt{\pi - 4\arccos\frac{x}{2}}$ есть отрезок $[\sqrt{2}, 2]$.

Пример 2. Вычислить $\arcsin(\sin 257^\circ)$.

Решение. 1. Так как $\arcsin(\sin x) = x$ лишь в том случае, когда $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$ (см. § 1), то $\sin 257^\circ$ нужно с помощью формул приведения свести к синусу угла, заключенного в указанных пределах. Имеем

$$\sin 257^\circ = \sin(180^\circ + 77^\circ) = -\sin 77^\circ = \sin\left(-\frac{77}{180}\pi\right),$$

причем $\left|-\frac{77}{180}\pi\right| < \frac{\pi}{2}$.

Поэтому

$$\arcsin(\sin 257^\circ) = \arcsin\left[\sin\left(-\frac{77\pi}{180}\right)\right] = -\frac{77}{180}\pi$$

(напомним, что $\arcsin x$ выражается только в радианах).

Пример 3. Вычислить $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{11}\right)\right]$.

Решение. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ лишь в том случае, когда $0 < x < \pi$. Так как π — период котангенса, то

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{11}\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{11} + \pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{10\pi}{11}$$

и

$$\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{11}\right)\right] = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{10\pi}{11}\right) = \frac{10\pi}{11}.$$

Пример 4. Вычислить $\operatorname{arctg}(\lg 6)$.

Решение: $\operatorname{arctg}(\lg x) = x$, если $|x| < \frac{\pi}{2}$.

В силу периодичности тангенса

$$\operatorname{tg} 6 = \operatorname{tg}(6 - 2\pi),$$

причем $-\frac{\pi}{2} < 6 - 2\pi < 0$. Поэтому

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6) = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(6 - 2\pi)] = 6 - 2\pi.$$

Пример 5. Вычислить $\arccos[\sin(-3)]$.

Решение. Прежде всего переходим от $\sin(-3)$ к косинусу дополнительного аргумента

$$\sin(-3) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3\right).$$

Но $\arccos(\cos x) = x$ в том случае, когда $0 \leqslant x \leqslant \pi$, а $\frac{\pi}{2} + 3 > \pi$. Поэтому, используя формулу $\cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi)$, получаем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3 - \pi\right) = -\cos\left(3 - \frac{\pi}{2}\right),$$

причем $0 < 3 - \frac{\pi}{2} < \pi$. Тогда согласно тождествам (19) и (18)

$$\arccos[\sin(-3)] = \arccos\left[-\cos\left(3 - \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \pi - \arccos\left[\cos\left(3 - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \pi - \left(3 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - 3.$$

Пример 6. Определить знак выражения

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(3\arccos\frac{\sqrt{5}}{3} + \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right).$$

Решение. Укажем границы, в которых лежат значения выражений, стоящих в скобках, и определим знак каждого сомножителя:

а) из неравенства $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ и возрастания арктангенса следует, что $\operatorname{arctg} 0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$. Учитывая, что $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, получаем

$$0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{6} \text{ и } 0 < 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{3}.$$

Так как $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, то $0 < 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\pi}{2}$, следовательно,

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0;$$

б) из неравенства $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ и убывания арккосинуса следует, что

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} > \arccos\frac{\sqrt{5}}{3} > \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Учитывая, что $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, получаем

$$\frac{\pi}{6} < \arccos\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{\pi}{4},$$

и

$$\frac{\pi}{2} < 3\arccos\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{3\pi}{4}. \qquad (22)$$

Далее из неравенства $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{1}{3}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ и возрастания арксинуса следует, что

$$\arcsin\frac{1}{2} < \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}} < \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Учитывая, что $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, получаем

$$\frac{\pi}{6} < \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}} < \frac{\pi}{4}. \qquad (23)$$

Таким образом, из (22) и (23) вытекает, что

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} < 3\arccos\frac{\sqrt{5}}{3} + \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}} < \pi,$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\left(3\arccos\frac{\sqrt{5}}{3} + \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right) < 0$.

Итак, данное выражение как произведение двух чисел различных знаков отрицательно.

При решении многих задач, связанных с обратными тригонометрическими функциями, удобно выражать одну из аркфункций* через другие. При этом можно учитывать следующие их свойства:

1. Если аргумент данной аркфункции положителен, то ее значение лежит в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ и эта аркфункция может быть

* Для сокращения будем называть все обратные тригонометрические функции: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ аркфункциями. (Новоселов, «Обратные тригонометрические функции»).

выражена через любую из остальных. В этом случае можно рассматривать данную аркфункцию как радианную меру острого угла в прямоугольном треугольнике (см. гл. IX и задачу 7 этого параграфа).

2. Если аргумент данной аркфункции отрицателен, то ее значение лежит либо в промежутках $\left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ и $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ (арксинус и арктангенс), либо в промежутках $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$ и $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ (арккосинус и арккотангенс). Следовательно, чтобы выразить арксинус и арктангенс отрицательных аргументов через арккосинус и арккотангенс и наоборот, нужно использовать тождества

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$$

и

$$\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg}x,$$

которые позволяют перейти от отрицательных аргументов к положительным.

Пример 7. Выразить $\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}$ через все остальные аркфункции.

Решение. I способ. Обозначая $\alpha=\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}$, имеем $\sin\alpha=\frac{7}{\sqrt{50}}$, причем $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найдем остальные тригонометрические функции угла α:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sqrt{50}},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=7,\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{7}.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{50}}=\operatorname{arctg}7=\operatorname{arcctg}\frac{1}{7}.$$

II способ. Так как $0<\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}<\frac{\pi}{2}$, то $\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}$ можно рассматривать как радианную меру острого угла в прямоугольном треугольнике, в котором противолежащий ему катет $a=7$, гипотенуза $c=\sqrt{50}$. По теореме Пифагора находим другой катет b: $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{50-49}=1$. Теперь в треугольнике нам известны все три стороны. Поэтому тот же угол α можно рассматривать как арккосинус или арктангенс, или арккотангенс соответствующих чисел. Имеем: $\alpha=\arccos\frac{b}{c}=\arccos\frac{1}{\sqrt{50}}$,

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{a}{b}=\operatorname{arctg}7\ \text{и}\ \alpha=\operatorname{arcctg}\frac{b}{a}=\operatorname{arcctg}\frac{1}{7}.$$

Пример 8. Выразить $\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1{,}5}$ через все остальные аркфункции.

Решение. Данная аркфункция определена для всех действительных значений x, $|x|\leqslant 1$, удовлетворяющих условию $\left|\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1{,}5}\right|\leqslant 1$. Решая его, находим, что оно справедливо для всех $|x|\leqslant 1$.

Так как $\frac{\pi}{2}<\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1{,}5}<\pi$, то данный арккосинус непосредственно выражается только через арккотангенс. Чтобы его выразить через остальные аркфункции, воспользуемся тождеством

$$\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1{,}5}=\pi-\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{1{,}5-x},\qquad (24)$$

где

$$0<\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{1{,}5-x}<\frac{\pi}{2}.$$

Теперь $\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{1{,}5-x}$ можно рассматривать как радианную меру угла α в прямоугольном треугольнике, в котором прилежащий к этому углу катет $b=\sqrt{1-x^2}$, $|x|\neq 1$, гипотенуза $c=1{,}5-x$, противолежащий катет $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{2x^2-3x+1{,}25}$. Поэтому, зная $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, можем записать

$$\alpha=\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{1{,}5-x}=\arcsin\frac{\sqrt{2x^2-3x+1{,}25}}{1{,}5-x}=$$

$$=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2x^2-3x+1{,}25}{1-x^2}}=\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{1-x^2}{2x^2-3x+1{,}25}}.$$

(Если $x=1$, то $\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1{,}5}=\frac{\pi}{2}$, и мы имеем $\arccos 0=\arcsin 1=\operatorname{arctg}0$.)

Возвращаясь к (24), окончательно получаем

$$\arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1{,}5}=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{2x^2-3x+1{,}25}}{1{,}5-x}=$$

$$=\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2x^2-3x+1{,}25}{1-x^2}}=\pi-\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{1-x^2}{2x^2-3x+1{,}25}},\ |x|\neq 1,$$

причем

$$\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x^2}{2x^2-3x+1{,}25}}=\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{\frac{1-x^2}{2x^2-3x+1{,}25}}\right).$$

При вычислении тригонометрических функций от аркфункций и их комбинаций используют основные тождества, выведенные в гл. IX и X, и тождества (2), (8), (13), (17) — (20) этой главы.

Пример 9. Вычислять $\cos(\operatorname{arctg} x)$.

Решение. Обозначая $\alpha = \operatorname{arctg} x$, имеем $\operatorname{tg}\alpha = x$, причем $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Таким образом, наша задача сводится к уже известной: найти $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = x$ и $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Согласно тождеству $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, имеем

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(перед радикалом берется знак «+», так как в указанных пределах $\cos\alpha > 0$).

Пример 10. Вычислять $\operatorname{tg}\left[2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$.

Решение. Обозначая $\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, имеем $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, где $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Таким образом, наша задача сводится к отысканию $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$. Решая эту, уже знакомую нам задачу, получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{\sqrt{5}}{1-\frac{5}{4}} = 4\sqrt{5}$$

$\left(\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = -\frac{\sqrt{5}}{2}\right.$, перед радикалом берется знак «—», так как в указанных пределах $\left.\operatorname{tg}\alpha < 0.\right)$

Пример 11. Вычислить $\cos(\arcsin x + 2\arccos x)$.

Решение. Обозначая $\alpha = \arcsin x$ и $\beta = \arccos x$, имеем $\sin\alpha = x$, $\cos\beta = y$, где $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Таким образом, задача сводится к отысканию $\cos(\alpha + 2\beta)$ по известным значениям $\sin\alpha$ и $\cos\beta$. Раскрывая косинус суммы, находим

$$\cos(\alpha + 2\beta) = \cos\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin\alpha\cdot\sin 2\beta =$$
$$= \cos\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - 2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta,$$

где $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$, а $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-y^2}$

(оба радикала берутся со знаком «+», так как $\cos\alpha \geqslant 0$ и $\sin\beta \geqslant 0$). Поэтому получаем

$$\cos(\alpha + 2\beta) = \sqrt{1-x^2}(y^2 - 1 + y^2) - 2xy\sqrt{1-y^2} =$$
$$= \sqrt{1-x^2}(2y^2 - 1) - 2xy\sqrt{1-y^2}.$$

Пример 12. Вычислять $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$.

Решение. Обозначая искомую величину через A: $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = A$, вычислим $\operatorname{tg} A$.

Имеем

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3)} = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1.$$

Теперь остается найти A по заданному значению тангенса этого аргумента. Для того чтобы эта задача была однозначной, нужно указать пределы изменения A. Так как $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 3 < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 < \pi$, т. е. аргумент A оканчивается во второй четверти. Следовательно, $A = \frac{3\pi}{4}$.

Пример 13. Вычислить $A = \arcsin a + \arccos b$, где $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$.

Решение. Так как $0 < \arcsin a < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \arccos b < \frac{\pi}{2}$, то $0 < \arccos b + \arcsin a < \pi$. На интервале $(0, \pi)$ функция синус не монотонна и A по найденному значению $\sin A$ определяется неоднозначно. На этом же интервале косинус монотонно убывает, следовательно, по найденному значению $\cos A$ значение A определяется однозначно. Поэтому будем вычислять $\cos A$:

$$\cos(\arcsin a + \arccos b) = \cos(\arcsin a)\cdot\cos(\arccos b) -$$
$$- \sin(\arcsin a)\cdot\sin(\arccos b) = b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2}.$$

Итак, $\cos A = b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2}$. Поэтому $A = \arccos(b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2})$.

При решении уравнений, связанных с аркфункциями, используется свойство однозначности тригонометрических функций, заключающееся в том, что равным аргументам соответствуют равные значения одноименных тригонометрических функций, если они имеют смысл для этих аргументов.

Вычисляя эти функции от аргументов, заданных в виде аркфункций, получаем более простое уравнение (например, алгебраическое). Проверка корней необходима, так как из условия равенства одноименных тригонометрических функций не всегда следует равенство их аргументов.

Пример 14. Решить уравнение $\arcsin\frac{3}{5}x+\arcsin\frac{4}{5}x=\arcsin x$.

Решение. Область допустимых значений $|x|\leqslant 1$. Приравнивая синусы правой и левой частей заданного уравнения и учитывая, что $\sin(\arcsin a)=a$ и $\cos(\arcsin a)=\sqrt{1-a^2}$ при любом $-1\leqslant a\leqslant 1$, получаем

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}x+\arcsin\frac{4}{5}x\right)=\sin(\arcsin x),$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}x\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}x\right)+$$

$$+\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}x\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}x\right)=\sin(\arcsin x).$$

Таким образом, имеем

$$\frac{3}{5}x\sqrt{1-\frac{16}{25}x^2}+\frac{4}{5}x\cdot\sqrt{1-\frac{9}{25}x^2}=x.$$

Выделяя корень $x=0$, после необходимых преобразований находим

$$25-9x^2=16,\quad x=\pm 1.$$

Итак, мы получили три корня $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 1$. Непосредственной подстановкой их в исходное уравнение убеждаемся, что все они годятся. Например, для $x=1$:

$$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5}=\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{3}{5}=\frac{\pi}{2}.$$

Пример 15. Решить уравнение $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\operatorname{arctg}\frac{x^2}{7}=0$.

Решение. Как легко заметить, $x>0$ не может быть корнем уравнения $\left(\text{при } x>0,\ \text{очевидно, } \operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\operatorname{arctg}\frac{x^2}{7}>0\right)$. Перепишем данное уравнение в виде

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=-\operatorname{arctg}\frac{x^2}{7},$$

перейдем к равенству тангенсов левой и правой его частей:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)=-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x^2}{7}\right),$$

откуда следует, что

$$\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)\cdot\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)}=-\frac{x^2}{7},$$

т. е.

$$\frac{x+\frac{x}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}=-\frac{x^2}{7},$$

Выделяя корень $x=0$, после необходимых преобразований получаем

$$(x-3)(x^2+3x+7)=0,$$

откуда находим $x=3$ (второе уравнение не имеет действительных корней). Однако это число положительно и не удовлетворяет заданному уравнению. Итак, единственный корень уравнения $x=0$

$$(\operatorname{arctg}0+\operatorname{arctg}0+\operatorname{arctg}0=0=\operatorname{arctg}0).$$

Пример 16. Решить уравнение $2\arcsin x+\arccos(1-x)=0$.

Решение. Область допустимых значений — множество всех x, удовлетворяющих неравенствам $|x|\leqslant 1$ и $|1-x|\leqslant 1$; отсюда следует, что $0\leqslant x\leqslant 1$.

Прибегаем к уравнению тождественных.

Так как $0\leqslant x\leqslant 1$, то $0\leqslant 2\arcsin x\leqslant\pi$ и $0\leqslant\arccos(1-x)\leqslant\frac{\pi}{2}$. Поэтому сумма этих выражений равна нулю в том и только в том случае, когда оба слагаемые обращаются в нуль одновременно, т. е.

$$2\arcsin x=0\ \text{и}\ \arccos(1-x)=0.$$

Последнее выполняется только при $x=0$. Итак, $x=0$ — единственный корень этого уравнения.

Пример 17. Решить уравнение $(\arcsin x)^3+(\arccos x)^3=\pi^3$.

Решение. Используя тождество $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ и учитывая, что $a+b=\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, имеем

$$\pi^3=\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+3\frac{\pi}{2}\cdot\arcsin x\cdot\arccos x$$

или

$$\arcsin x\cdot\arccos x=-\frac{\pi^2}{12}. \tag{25}$$

Полагая $y=\arcsin x\left(y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ и тем самым $\arccos x=\frac{\pi}{2}-y$ (см. 17), получаем квадратное уравнение

$$y^2-\frac{\pi}{2}y-\frac{\pi^2}{12}=0,$$

корни которого по абсолютной величине больше $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, данное уравнение не имеет решений. Заметим, что в этом можно убедиться непосредственным анализом данного уравнения.

Пример 18. Решить систему

$$\begin{cases} \arcsin x \cdot \arcsin y = \dfrac{\pi^2}{12}, \\ \arccos x \cdot \arccos y = \dfrac{\pi^2}{24}. \end{cases}$$

Решение. Выразим все арифункции через одну, например арккосинус через арксинус. Имеем

$$\begin{cases} \arcsin x \cdot \arcsin y = \dfrac{\pi^2}{12}, \\ \left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin x\right)\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin y\right) = \dfrac{\pi^2}{24}. \end{cases}$$

После упрощения второго уравнения получаем

$$\begin{cases} \arcsin x \cdot \arcsin y = \dfrac{\pi^2}{12}, \\ \arcsin x + \arcsin y = \dfrac{7\pi}{12}. \end{cases}$$

Таким образом, $\arcsin x$ и $\arccos y$ являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - \frac{7\pi}{12} z + \frac{\pi^2}{12} = 0.$$

Решая его, находим $z_1 = \dfrac{\pi}{3}$, $z_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

Возвращаясь к неизвестным x и y, имеем:

1) $\arcsin x = \dfrac{\pi}{3}$, $\arcsin y = \dfrac{\pi}{4}$, откуда получаем, что $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\arcsin x = \dfrac{\pi}{4}$, $\arcsin y = \dfrac{\pi}{3}$; тогда $x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Итак, данная система имеет два решения.

Доказательство тождеств. Пусть требуется доказать тождество $A = B$, где A и B — обратные тригонометрические функции или их комбинации.

Непосредственно (прикидкой) выделяем промежуток, в котором лежат значения A и B, а затем берем ту тригонометрическую функцию, которая монотонна на этом промежутке. Тогда из равенства значений этой функции от аргументов A и B будет следовать искомое равенство $A = B$. Например, если A и B лежат в промежутке $(0, \pi)$, то берем функцию косинус (или котангенс). Тогда из равенства $\cos A = \cos B$ (или $\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} B$) следует, что $A = B$.

Из нескольких функций, монотонных на указанном промежутке, целесообразно выбрать ту, при которой доказываемое тождество сводится к более простому.

Поясним сказанное следующими примерами.

Пример 19. Доказать тождество

$$\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Заменим левое выражение равносильным

$$\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{4}{5},$$

или

$$\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \arccos \frac{4}{5}.$$

Оценим величину аргумента $\arcsin \dfrac{5}{13} + \arcsin \dfrac{16}{65}$. Так как $\dfrac{5}{13} < \dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{16}{65} < \dfrac{1}{2}$, то

$$0 < \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} < \arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{1}{2} < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}.$$

Итак, числа $\arcsin \dfrac{5}{13} + \arcsin \dfrac{16}{65}$ и $\arccos \dfrac{4}{5}$ лежат в промежутке $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, на котором косинус изменяется монотонно.

Следовательно, достаточно доказать, что

$$\cos\left(\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65}\right) = \cos\left(\arccos \frac{4}{5}\right).$$

Раскрывая косинус суммы, имеем

$$\cos\left(\arcsin \frac{5}{13}\right)\cos\left(\arcsin \frac{16}{65}\right) - \sin\left(\arcsin \frac{5}{13}\right)\cdot\sin\left(\arcsin \frac{16}{65}\right) = \frac{4}{5}$$

или

$$\sqrt{\left(1 - \frac{25}{169}\right)\left(1 - \frac{256}{4225}\right)} - \frac{5 \cdot 16}{13 \cdot 65} = \frac{4}{5}.$$

После упрощения левой части получаем тождество $\dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{5}$. Отсюда следует, что тождество (26) также справедливо.

Пример 20. Доказать, что

$$\arcsin \sqrt{\frac{2x+1}{4}} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+2x}{3-2x}} = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Множество допустимых значений данного выражения

на всех действительных значениях x, для которых

$$0 \leqslant \frac{2x+1}{2} \leqslant 1 \text{ и } \frac{1+2x}{1-2x} \geqslant 0, \text{ т. е. } -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}.$$

Вместо данного будем доказывать равносильное ему равенство

$$\arcsin\sqrt{\frac{2x+1}{2}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}},$$

или

$$\arcsin\sqrt{\frac{2x+1}{2}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}} = \frac{\pi}{2}.$$

Оба числа $\arcsin\sqrt{\frac{2x+1}{2}}$ и $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ лежат в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, в котором тангенс изменяется монотонно. Поэтому нам достаточно показать, что

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2x+1}{2}}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}\right).$$

Последнее вытекает из равенства $\operatorname{tg}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2x+1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$

Пример 21. Показать, что $\operatorname{arctg}\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi} = \operatorname{arctg}\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} = \varphi$, где $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Обозначим выражение $A = \operatorname{arctg}\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi} - \operatorname{arctg}\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}$

Так как $\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi} > 0$, то $0 < \operatorname{arctg}\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi} < \frac{\pi}{2}$ и $0 <$

$< \operatorname{arctg}\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} < \frac{\pi}{2}$. Поэтому $|A| < \frac{\pi}{2}$. На промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg}\alpha$ монотонно возрастает, поэтому достаточно доказать, что

$$\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi} - \operatorname{arctg}\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right] = \operatorname{tg}\varphi. \quad (27)$$

Раскрывая тангенс разности двух аргументов, получаем

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}\right) - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)} = \frac{1}{2}\left|\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi} - \frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right.$$

Упрощая левую часть доказываемого равенства, убеждаемся, что она равна $\operatorname{tg}\varphi$. Итак, равенство (27) справедливо.

ГЛАВА XIII
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида:

1) $\sin x = a$; 2) $\cos x = b$; 3) $\operatorname{tg} x = c$; 4) $\operatorname{ctg} x = d$.

Их решения легко находятся по формулам, полученным в главе XII. В самом деле, решить уравнение $\sin x = a$ это значит найти все числа x (или углы, или дуги), синус которых равен a. А все эти числа заключены в формуле

$$x = \operatorname{Arcsin} a = (-1)^n \arcsin a + \pi n.$$

Таким образом, при $|a| \leqslant 1$ уравнение имеет бесчисленное множество решений и не имеет ни одного решения при $|a| > 1$. Аналогично для уравнения $\cos x = b$. Все его решения заключены в формуле

$$x = \operatorname{Arccos} b = \pm \arccos b + 2\pi n, \text{ где } |b| \leqslant 1.$$

Уравнения $\operatorname{tg} x = c$ и $\operatorname{ctg} x = d$ имеют решения при любых действительных c и d. Все эти решения заключены в формулах

$$x = \operatorname{Arctg} c = \operatorname{arctg} c + \pi n$$

и

$$x = \operatorname{Arcctg} d = \operatorname{arcctg} d + \pi n$$

соответственно. Рекомендуется помнить все эти формулы и их частные случаи, когда $a = \pm 1$ и $b = 0$:

если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

если $\sin x = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

К простейшим уравнениям приводятся уравнения вида

$$\sin\alpha_1 = \sin\beta_1, \quad \cos\alpha_2 = \cos\beta_2, \quad \operatorname{tg}\alpha_3 = \operatorname{tg}\beta_3, \quad \operatorname{ctg}\alpha_4 = \operatorname{ctg}\beta_4.$$

где некоторые или все α_i и β_i содержат неизвестное. Из условия равенства одноименных тригонометрических функций вытекают определенные соотношения между их аргументами (см. гл. X, § 6). Так, из первого уравнения $\sin\alpha_1=\sin\beta_1$ получаем $\alpha_1+\beta_1=2\pi k+\pi$, $\alpha_1-\beta_1=2\pi k$. Из второго уравнения $\cos\alpha_2=\cos\beta_2$ вытекает, что $\alpha_2\pm\beta_2=2\pi k$ и т. д.

Пример 1. Решить уравнение $\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}7x$.

Решение. Из условия равенства тангенсов находим

$$7x-3x=\pi n,\quad \text{т. е.}\quad x=\frac{\pi n}{4}.$$

Из этой совокупности нужно отбросить те значения x, которые не принадлежат множеству допустимых значений данного уравнения, т. е. те, для которых $3x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ и $7x=\frac{\pi}{2}+m\pi$. Проверяя первое условие, мы видим, что нужно отбросить те значения n, при которых равенство $\frac{3\pi n}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ выполняется при целых k, или (что то же самое), те значения n, при которых $k=\frac{3n-2}{4}$ — целое число. Чтобы выделить эти значения, представим n в виде $n=4s+l$, где l принимает значения 0, 1, 2, 3. Очевидно, что всякое целое число можно представить в таком виде (см. гл. I). Тогда $k=\frac{3(4s+l)-2}{4}=4s+\frac{3l-2}{4}$ будет целым в том и только в том случае, когда $l=2$. Таким образом, при $n=4s+2$ значения $x=\frac{\pi n}{4}$ не входят в множество допустимых значений n, следовательно, не являются корнями данного уравнения.

Проверим второе условие, мы видим, что нужно отбросить те значения n, для которых $\frac{7\pi n}{4}=\frac{\pi}{2}+m\pi$ при целом m или $n=\frac{2m-2}{4}$ есть целое число. Представляя n в виде $n=4s+l$ ($l=0,1,2,3$) находим, что n будет целым в том единственном случае, когда $l=2$, т. е. $n=4s+2$.

Итак, все решения данного уравнения содержатся в формуле $x=\frac{\pi n}{4}$, где $n\neq 4s+2$ ($s=0,\pm1,\pm2,\ldots$).

Пример 2. Решить уравнение $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\cos\pi x\right)=-\frac{1}{2}$.

Решение. Сразу находим, что $\frac{5\pi}{3}\cos\pi x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, откуда $\cos\pi x=\frac{3}{5}\left((-1)^n\frac{1}{6}+n\right)$. Последнее уравнение имеет решения для тех значений n, для которых $\left|(-1)^n\cdot\frac{1}{6}+n\right|\leqslant\frac{5}{3}$,

т. е. для $n=0$ и $n=\pm1$. При этих значениях n мы имеем три простейших уравнения:

1) $\cos\pi x=\frac{1}{10}$, $\pi x_1=\pm\arccos\frac{1}{10}+2\pi k$ и $x_1=\pm\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{10}+2k$,

2) $\cos\pi x=\frac{1}{2}$, $\pi x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ и $x_2=\pm\frac{1}{3}+2k$,

3) $\cos\pi x=-\frac{7}{10}$, $\pi x_3=\pm\arccos\left(-\frac{7}{10}\right)+2\pi k$ и $x_3=\pm\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{7}{10}\right)+2k$.

Отметим также тригонометрические уравнения вида $\sin^2x=a^2$, $\cos^2x=b^2$, $\operatorname{tg}^2x=c^2$, $\operatorname{ctg}^2x=d^2$, каждое из которых равносильно двум простейшим. Решая, например, уравнение $\sin^2x=a^2$, получаем $\sin x=a$ и $\sin x=-a$. Отсюда находим, что $x_1=(-1)^k\arcsin a+\pi k$ и $x_2=-(-1)^k\arcsin a+\pi n$. Очевидно, обе эти формулы можно объединить в одну

$$x=\pm\arcsin a+\pi n.$$

Итак, все решения уравнения $\sin^2x=a^2$ содержатся в формуле $x=\pm\arcsin a+\pi n$.

Для уравнения $\cos^2x=b^2$ получаем $\cos x=b$ и $\cos x=-b$. Отсюда находим $x_1=\pm\arccos b+2\pi n$ и $x_2=\pm\arccos(-b)+2\pi n$. Учитывая что $\arccos(-b)=\pi-\arccos b$, получим: $x_2=\pm\arccos b+\pi(2n+1)$. Сравнивая формулы для x_1 и x_2, мы видим, что их можно объединить в одну

$$x=\pm\arccos b+\pi k,$$

где k — любое целое число. При $k=2n$ получаем x_1, при $k=2n+1$ получаем x_2.

Итак, все решения уравнения $\cos^2x=b^2$ содержатся в формуле $x=\pm\arccos b+\pi k$.

Аналогично получаем, что все решения уравнения $\operatorname{tg}^2x=c^2$ содержатся в формуле $x=\pm\operatorname{arctg}c+\pi k$, а решения уравнения $\operatorname{ctg}^2x=d^2$ — в формуле $x=\pm\operatorname{arcctg}d+\pi k$.

Если уравнение не является простейшим, то с помощью тождественных преобразований его нужно свести к одному или нескольким простейшим. При этом (еще раз предостерегаем читателя!) по возможности нужно избегать тех преобразований, которые нарушают равносильность. В случае неизбежности таких преобразований, необходимо провести соответствующие исследования (см. гл. III, § 1, 2).

§ 2. СВЕДЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ К ПРОСТЕЙШИМ С ПОМОЩЬЮ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В этом параграфе приведен ряд тригонометрических уравнений, решение которых основано на известных уже тождественных преобразованиях (см. гл. XI).

Пример 1. Решить уравнение

$$\cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1 = 0.$$

Решение. Сгруппируем первый член с третьим, второй с четвертым и каждую группу свернем в произведение. Имеем

$$(\cos 10x - \cos 6x) + (1 - \cos 8x) = 0,$$

$$-2\sin 8x \cdot \sin 2x + 2\sin^2 4x = 0.$$

Чтобы получить общий множитель, развернем $\sin 8x$ по формуле двойного аргумента

$$-4\sin 4x \cdot \cos 4x \cdot \sin 2x + 2\sin^2 4x = 0,$$

Один из множителей вычитаемого ($\sin 4x$) также развернем по формуле двойного аргумента

$$-4\sin 4x \cdot \cos 4x \cdot \sin 2x + 4\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \sin 4x = 0,$$

$$\sin 4x \cdot \sin 2x (\cos 4x - \cos 2x) = 0.$$

Последнее уравнение распадается на три уравнения:

$$\sin 4x = 0, \quad \sin 2x = 0, \quad \cos 4x = \cos 2x,$$

Решая каждое из них, находим

$$4x_1 = \pi n \text{ и } x_1 = \frac{\pi n}{4}, \quad 2x_2 = \pi n \text{ и } x_2 = \frac{\pi n}{2},$$

$$4x_3 + 2x_3 = 2\pi n \text{ и } x_3 = \frac{\pi n}{3}, \quad 4x_4 - 2x_4 = 2\pi n \text{ и } x_4 = \pi n.$$

Если решение тригонометрического уравнения получено в виде нескольких формул, то необходимо проверить, не повторяют ли эти формулы одни и те же значения x. Так, в нашем случае $x_2 = \frac{\pi n}{2}$ содержится в формуле $x_1 = \frac{\pi n}{4}$, а $x_4 = \pi n$ содержится в формуле $x_3 = \frac{\pi n}{3}$ или в x_1. Значит формулы $x_2 = \frac{\pi n}{2}$ и $x_4 = \pi n$ не дают ничего нового по сравнению с x_3 и x_4 (они входят в них). Поэтому лишние формулы нужно отбросить, и мы окончательно получаем $x_1 = \frac{\pi n}{4}$, $x_2 = \frac{\pi n}{3}$. Заметим при этом, что некоторые решения входят как в первую, так и во вторую формулу и можно было бы

продолжать «изъятие» повторяющихся решений. Однако это уже не столь важно и можно эти «изъятия» не продолжать.

Пример 2. Решить уравнение

$$\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$

Решение. Переходя от аргумента $2x$ к аргументу x и вынося за скобки общий множитель $\cos x + \sin x$, имеем

$$(\sin x + \cos x)\left(\cos x - \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Данное уравнение распадается на два

$$\sin x + \cos x = 0 \text{ или } \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$$

(см. гл. X, § 7)

$$\text{и } \cos x - \sin x = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \text{ или } \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}.$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}\Big).$$

Из уравнения $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$ находим $\frac{\pi}{4} + x_1 = \pi n$ и $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$. Из уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\frac{\pi}{12}$ следует, что

$$\frac{\pi}{4} + x_2 + \frac{\pi}{12} = 2\pi n \text{ и } \frac{\pi}{4} + x_2 - \frac{\pi}{12} = 2\pi n,$$

откуда $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ и $x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$.

Итак, все решения данного уравнения содержатся в формулах

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x.$$

Решение. Преобразуя сумму тангенсов в произведение и перенося $\operatorname{tg} 3x$ в левую часть уравнения, имеем

$$\frac{\sin 3x}{\cos x \cdot \cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0.$$

После приведения к общему знаменателю и отбрасывания последнего получаем уравнение

$$\sin 3x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 0, \qquad (*)$$

равносильное данному при условии, что $\cos x \neq 0$,

$$\cos 2x \neq 0 \quad \text{и} \quad \cos 3x \neq 0.$$

Уравнение (*) равносильно, в свою очередь, совокупности двух уравнений

$$\sin 3x = 0 \quad \text{и} \quad \cos 3x - \cos x \cdot \cos 2x = 0.$$

Решая первое из них, получаем $3x_1 = \pi k$ и $x_1 = \frac{\pi k}{3}$. Во втором уравнении произведение $\cos x \cdot \cos 2x$ преобразуем в сумму. Получаем

$$\frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) - \cos 3x = 0 \quad \text{или} \quad \cos 3x = \cos x.$$

Отсюда следует, что $3x = x = 2\pi n$, т. е. $x_2 = \pi n$ и $x_3 = \frac{\pi n}{2}$. Анализируя полученные формулы для $x_1 x_2$ и x_3, замечаем, что x_1 и x_2 входят в ОДЗ данного уравнения при всех целых значениях k, а из x_3 нужно исключить углы $x_3' = \frac{\pi(2k+1)}{2} = \pi k + \frac{\pi}{2}$, для которых $\cos x_3' = 0$ ($n = 2k + 1$).

Если же $n = 2k$, то $\frac{\pi \cdot 2k}{2} = \pi k$ входят в формулу для x_2. Таким образом, все решения данного уравнения содержатся в формуле $x_1 = \frac{\pi k}{3}$.

В следующих уравнениях при преобразовании к произведению целесообразно ввести вспомогательный аргумент.

Пример 4. Решить уравнение

$$a \sin x + b \cos x = c, \quad a > 0, \quad b \neq 0.$$

Решение. Представим левую часть уравнения в виде $\sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi)$, где $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (см. X, § 7), имеем

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Это простейшее уравнение имеет решения, если $|c| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$, т. е. $c^2 \leqslant a^2 + b^2$. При этом условии

$$x + \varphi = (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n$$

и $x = -\varphi + (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n$. Так как $\cos\varphi > 0$, то аргумент φ можно брать в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $\varphi = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Тогда решение уравнения $a\sin x + b\cos x = c$ запишется формулой

$$x = -\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n.$$

Замечание. Ограничение $a > 0$ несущественно, так как заменой знаков членов уравнения всегда можно сделать коэффициент при $\sin x$ положительным.

Пример 5. Решить уравнение

$$4\sin(2x + 20°) - \cos(2x + 200°) = 3.$$

Решение. Заменяя, что $\cos(2x + 200°) = -\cos(2x + 20°)$, имеем

$$4\sin(2x + 20°) + \cos(2x + 20°) = 3$$

$$\sqrt{17}\sin(2x + 20° + \varphi) = 3, \text{ где } \varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Итак, мы получили простейшее уравнение

$$\sin(2x + 20° + \varphi) = \frac{3}{\sqrt{17}},$$

откуда находим, что

$$2x + 20° + \varphi = (-1)^n \arcsin \frac{3}{\sqrt{17}} + \pi n,$$

$$x = -\frac{\pi}{18} - \frac{1}{2}\arcsin \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{1}{2}(-1)^n \arcsin \frac{3}{\sqrt{17}} + \frac{\pi}{2}n.$$

Пример 6. Решить уравнение

$$3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 5\sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Решение. Учитывая, что $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6}\right] = -\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, перепишем уравнение, сгруппировав при этом первые два члена,

$$\left[3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 4\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] + 5\sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Преобразуя содержимое квадратной скобки в произведение, получаем

$$5\sin\left(x-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)+5\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=0,$$

где $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$. Отсюда следует, что

$$\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x-\varphi\right),$$

т. е.

$$5x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x-\varphi=\pi+2\pi n$$

и

$$6x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+x+\varphi=2\pi n.$$

Решая эти уравнения относительно x, находим

$$x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\varphi}{4}-\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{4}\arcsin\frac{4}{5}+\frac{\pi n}{2}$$

и

$$x_2=\frac{\pi}{36}-\frac{\varphi}{6}+\frac{\pi n}{3}=\frac{\pi}{36}-\frac{1}{6}\arcsin\frac{4}{5}+\frac{\pi n}{3}.$$

В следующих уравнениях перед преобразованием суммы в произведение полезно понизить показатели степени функции синус и косинус.

Пример 7. Решить уравнение

$$2\cos^2(80^\circ-x)+\cos 2x=1+\sin 20^\circ.$$

Решение. Понижая вторую степень косинуса, имеем

$$1+\cos(160^\circ-2x)+\cos 2x=1+\sin 20^\circ.$$

Сворачивая сумму косинусов в произведение, получаем

$$2\cos 80^\circ\cdot\cos(80^\circ-2x)=\sin 20^\circ$$

или

$$2\sin 10^\circ\cdot\cos(80^\circ-2x)=2\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ.$$

Отсюда следует, что $\cos(80^\circ-2x)=\cos 10^\circ$, т. е. $80^\circ-2x=\pm 10^\circ+360^\circ\cdot n$.

Итак, $x_1=45^\circ+180^\circ\cdot n$, $x_2=35^\circ-180^\circ\cdot n$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\cos\frac{1}{3}x+\sin^2\frac{3}{2}x+2\sin^2\frac{1}{6}x=\cos^2\frac{3}{2}x.$$

Решение. Понижая степени и приводя подобные члены, имеем

$$\cos\frac{1}{3}x-\cos 3x-\cos\frac{5}{3}x+1=0.$$

Группируя первый член с третьим, второй с четвертым и каждую группу преобразуем в произведение. Получаем

$$2\sin\frac{2x}{3}\cdot\sin\frac{x}{3}-2\sin^2\frac{3x}{2}=0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$\sin\frac{3}{2}x=0 \text{ и } \sin\frac{x}{6}=\sin\frac{3}{2}x.$$

Решая первое, находим

$$\frac{3}{2}x=\pi n,\quad x_1=\frac{2\pi n}{3}.$$

Из второго следует, что

$$\frac{x}{6}+\frac{3x}{2}=\pi+2\pi n$$

и

$$\frac{x}{6}-\frac{3x}{2}=2\pi n,$$

т. е.

$$x_2=-\frac{3\pi}{7}+\frac{6\pi n}{5},\quad x_3=\frac{3\pi n}{2}.$$

В следующих уравнениях выделяем тригонометрическую единицу $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^n$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3-\cos 8x}{4}.$$

Решение. Выделяя в левой части полный квадрат, имеем

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{3-\cos 8x}{4}$$

или

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{3-\cos 8x}{4}.$$

Понижаем степень синуса и после очевидных преобразований получаем уравнение $\cos 8x=-\cos 4x$, или $\cos 8x=\cos(\pi-4x)$, откуда находим, что $8x\pm(\pi-4x)=2\pi n$. В первом случае имеем $2x_1=-\pi+$

$+2\pi n$ и $x_1 = -\frac{\pi}{3} + \pi n$. Во второй случае: $10x_2 = \pi + 2\pi n$ и $x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$.

Пример 10. Решить уравнение

$$\sin^4 2x + \cos^4 2x - 2\sin 4x - \frac{3}{4}\sin^2 4x = 0.$$

Решение. Дополнив $\sin^4 2x + \cos^4 2x$ до полного квадрата, получаем

$$(\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x \cdot \cos^2 2x - 2\sin 4x + \frac{3}{4}\sin^2 4x = 0$$

или

$$1 - \frac{1}{4}\sin^2 4x - 2\sin 4x = 0.$$

Мы получили квадратное уравнение относительно $\sin 4x$. Решая его, находим $\sin 4x = 4 - 2\sqrt{5}$ (корень $4 + 2\sqrt{5} > 1$ — не годится). Следовательно, $4x = (-1)^n \arcsin(4 - 2\sqrt{5}) + \pi n$ и

$$x = \frac{(-1)^n}{4}\arcsin(4 - 2\sqrt{5}) + \frac{\pi n}{4}.$$

Пример 11. Решить уравнение

$$\sin^6\frac{2x-3}{2} + \cos^6\frac{2x-3}{2} = \frac{7}{16}.$$

Решение. Используя тождество $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$, где $a = \sin^2\frac{2x-3}{2}$, $b = \cos^2\frac{2x-3}{2}$ и учитывая, что $a + b = 1$, имеем

$$1 - 3\sin^2\frac{2x-3}{2}\cos^2\frac{2x-3}{2} = \frac{7}{16} \text{ или } \sin^2(2x-3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

Решая последнее уравнение (см. с. 4), находим

$$2x - 3 = \pm\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n \text{ и } x = \frac{3}{2} \pm \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}.$$

Если уравнение содержит произведение тригонометрических функций, то иногда целесообразно это произведение превратить в сумму.

Пример 12. Решить уравнение

$$\cos 7\pi x \cdot \sin 6\pi x = \cos 3\pi x \cdot \sin 8\pi x.$$

Решение. Раскладывая каждое произведение в алгебраическую сумму, получаем

$$\frac{1}{2}(\sin 13\pi x - \sin\pi x) = \frac{1}{2}(\sin 11\pi x + \sin 5\pi x)$$

или

$$\sin 3\pi x = \sin(-\pi x).$$

Из последнего уравнения следует, что $3\pi x = -\pi x - \pi + 2\pi n$ и $3\pi x + \pi x = 2\pi n$. Таким образом, $x_1 = \frac{1}{2} + n$ и $x_2 = \frac{n}{2}$. Легко заметить, что первая формула получается из второй, если в последней n — нечетно. Поэтому окончательно можно записать $x = \frac{n}{2}$.

Пример 13. Решить уравнение

$$\cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2} - \sin x \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Решение. Записав уравнение в виде

$$\cos x\left(\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2}\right) - \sin x\left(\sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{3x}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

преобразуем содержимое каждой скобки в алгебраическую сумму. Тогда

$$\frac{1}{2}\cos x(\cos 2x + \cos x) - \frac{1}{2}\sin x(\cos x - \cos 2x) = \frac{1}{2},$$

или

$$\cos 2x \cdot \cos x + \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 2x = 1.$$

Если каждое произведение вновь преобразовать в сумму, то полученный результат не будет содержать подобных членов и уравнение усложнится. Лучше заменить $\cos^2 x$ через $1 - \sin^2 x$ и сгруппировать полученные члены.

$(\cos 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 2x) - \sin x(\cos x + \sin x) = 0$, что дает

$$(\cos 2x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0.$$

Итак, данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos 2x - \sin x = 0 \text{ и } \cos x + \sin x = 0.$$

Решая первое, находим $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и $2x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n$, откуда получаем, что $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$.

Из второго уравнения находим, что $x_3 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

Пример 14. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}(40^\circ + x) \cdot \operatorname{ctg}(5^\circ - x) = \frac{2}{3}.$$

Решение. Множество допустимых значений данного уравнения состоит из всех действительных значений x, для которых

$\sin(5°-x)\neq 0$ и $\cos(40°+x)\neq 0$. Переходя в левой части уравнения к функциям синус и косинус и преобразуя числитель и знаменатель в сумму, получаем уравнение

$$3[\sin 45° + \sin(35° + 2x)] = 2[\sin 45° - \sin(35° + 2x)],$$

равносильное данному на его множестве допустимых значений.

Последнее уравнение сводится к простейшему $\sin(35° + 2x) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, откуда находим, что

$$x = -\frac{7\pi}{72} - \frac{(-1)^n}{2}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) + \frac{\pi}{2}\cdot n.$$

Пример 15. Решить уравнение

$$4\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 5x + \frac{1+\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x} = \cos 6x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}2x.$$

Решение. Множество допустимых значений данного уравнения состоит из всех действительных значений x, для которых $\sin x\neq 0$, $\cos x\neq 0$, $\cos 2x\neq 0$ и $\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x\neq 0$.

Прежде чем переходить к решению уравнения, упростим выражение

$$A = \frac{1+\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x}.$$

$$1+\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}x = \frac{\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x}{\cos 2x\cdot\cos x} = \frac{\cos x}{\cos 2x\cdot\cos x} = \frac{1}{\cos 2x},$$

$$\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Поэтому $A = \frac{\sin 2x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}2x$.

Заменяя A полученным значением, после приведения подобных членов имеем

$$4\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 5x = \cos 6x.$$

Переходя в левой части от произведения к сумме, находим

$$2\cos 2x(\cos 6x+\cos 4x) = \cos 6x,$$

$$2\cos 2x\cdot\cos 6x + 2\cos 2x\cdot\cos 4x = \cos 6x.$$

Второе слагаемое преобразуем в сумму

$$2\cos 2x\cos 6x + \cos 6x + \cos 2x = \cos 6x.$$

Имеем

$$2\cos 6x\cdot\cos 2x + \cos 2x = 0.$$

Это уравнение распадается на два простейших: $\cos 2x = 0$ и $\cos 6x = -\frac{1}{2}$. Однако решения первого уравнения не входят во множество допустимых значений данного уравнения и их надо отбросить. Остается лишь второе уравнение $\cos 6x = -\frac{1}{2}$, корни которого содержатся в формуле

$$x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$$

При решении уравнения нужно знать его множество допустимых значений, чтобы не получить лишних корней, как это могло случиться в предыдущем примере.

Рассмотрим еще одно уравнение, при решении которого неопытный учащийся может допустить подобную ошибку.

Пример 16. Решить уравнение

$$2\operatorname{ctg}2x - 3\operatorname{ctg}3x = \operatorname{tg}2x.$$

Решение. Множество допустимых значений данного уравнения состоит из всех действительных значений x, для которых $\sin 2x\neq 0$, $\sin 3x\neq 0$ и $\cos 2x\neq 0$. Переписав уравнение в виде

$$2(\operatorname{ctg}2x - \operatorname{ctg}3x) = \operatorname{tg}2x + \operatorname{ctg}3x,$$

переходим к синусам и косинусам в его левой и правой частях. Получаем

$$\frac{\sin x}{\cos 2x\cdot\sin 3x} = \frac{\cos x}{\sin 3x\cdot\cos 2x},$$

откуда равносильно уравнению

$$\sin x\cdot\cos 2x = \cos x\cdot\sin 2x \text{ или } \sin x = 0$$

при указанных ограничениях.

Однако корни уравнения $\sin x = 0$ не входят в множество допустимых значений данного уравнения и, следовательно, не являются его решениями.

Итак, данное уравнение не имеет решений.

В заключение этого параграфа приведем следующие полезные примеры.

Пример 17. Решить уравнение

$$\sin\frac{x}{2}\cos 2x = 1.$$

Решение. Так как $\left|\sin\frac{x}{2}\right|\leqslant 1$ и $|\cos 2x|\leqslant 1$, то левая часть уравнения равна 1 тогда и только тогда, когда одновременно

$$\text{либо (а)}\ \begin{cases}\sin\frac{x}{2}=1,\\ \cos 2x=1,\end{cases}\quad \text{либо (б)}\ \begin{cases}\sin\frac{x}{2}=-1,\\ \cos 2x=-1.\end{cases}$$

В случае (а) из первого уравнения находим, что $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, т. е. $x=\pi+4\pi n$. Из этих значений x нужно выбрать такие, которые одновременно удовлетворяют и второму уравнению. Подставляя эти значения x в левую часть второго уравнения, получаем $\cos 2(\pi+4\pi n)=\cos 2\pi=1$.

Таким образом, значения $x=\pi+4\pi n$ являются решением данного уравнения.

В случае (б) из первого уравнения находим, что $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, откуда $x=-\pi+4\pi n$. Подставляя эти значения в левую часть второго уравнения, имеем

$$\cos 2(-\pi+4\pi n)=\cos 2\pi=1.$$

Последнее означает, что $x=-\pi+4\pi n$ не является решением системы (б), следовательно, и данного уравнения.

Пример 18. Решить уравнение

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx=n.$$

Решение. Так как $|\sin kx|\leqslant 1$ при любом k, а число слагаемых равно n, то левая часть данного уравнения равна n в том единственном случае, когда каждое слагаемое равно 1, т. е. $\sin x=1$, $\sin 2x=1$, $\sin 3x=1,\ldots,\sin nx=1$. Решая первое уравнение, находим, что $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$. Однако эти значения не обращают в единицу уже второе слагаемое $\sin 2x$, так как $\sin 2\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=0$ при любом k. Следовательно, данное уравнение не имеет решений.

Пример 19. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Решение. Левая часть уравнения может быть равна 1 в том единственном случае, когда

$$\text{либо (а)}\ \begin{cases}\sin x=0,\\ \cos x=1,\end{cases}\quad \text{либо (б)}\ \begin{cases}\sin x=1,\\ \cos x=0.\end{cases}$$

В самом деле, складывая очевидные неравенства $\sin^2 x\leqslant\sin^2 x$, $\cos^2 x\leqslant\cos^2 x$, получаем $\sin^2 x+\cos^2 x\leqslant 1$. В последнем неравенстве равенство достигается для тех значений x, для которых оно достигается одновременно в исходных неравенствах, т. е. когда $\sin x=0$ и $\cos x=1$, или $\sin x=1$ и $\cos x=0$. Таким образом, наше уравнение равносильно двум системам (а) и (б), каждая из которых содержит одно неизвестное.

Решая (а), находим, что $x=2\pi n$. Решая (б), находим, что $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$. Итак, все решения данного уравнения содержатся в формулах $x_1=2\pi n$ и $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

Пример 20. Решить уравнение

$$(\cos 4x-\cos 2x)^2=\sin 3x+5.$$

Решение. Преобразуя левую часть уравнения в произведение, имеем

$$4\sin^2 x\cdot\sin^2 3x=\sin 3x+5. \qquad (*)$$

Так как при любых x справедливы неравенства $4\sin^2 x\cdot\sin^2 3x\leqslant 4$ и $\sin 3x+5\geqslant 4$, то равенство (*) возможно лишь для тех значений x, для которых одновременно

$$4\sin^2 x\cdot\sin^2 3x=4\ \text{и}\ \sin 3x+5=4,$$

Итак, наше уравнение равносильно системе двух уравнений с одним неизвестным

$$\begin{cases}\sin^2 x=1,\\ \sin 3x=-1.\end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$. Подставляя эти значения в левую часть второго уравнения, получаем

$$\sin 3x=\sin\left(3\,\frac{\pi}{2}+3\pi n\right)=\begin{cases}-1, & \text{если } n=2k,\\ 1, & \text{если } n=2k+1.\end{cases}$$

Отсюда мы видим, что решения первого уравнения $\sin^2 x=1$ удовлетворяют второму лишь при $n=2k$. Итак, все решения данного уравнения заключены в формуле $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

§ 3. СВЕДЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ К РАЦИОНАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Пусть тригонометрическое уравнение приведено к одному аргументу, т. е. все тригонометрические функции, входящие в уравнение, содержат один и тот же аргумент α. Тогда все тригонометрические функции могут быть выражены через какую-либо одну, и мы получаем уравнение с одним неизвестным. Такой метод реше-

вия целесообразен в том случае, когда в результате всех преобразований получается рациональное уравнение невысокой степени, равносильное данному (или мы можем указать условия, при которых полученное уравнение равносильно данному).

Пример 1. Решить уравнение

$$(2\sin^2 x + 5\sin x + 1)\operatorname{ctg} x = 4\sec x(1 + \sin x).$$

Решение. Множество допустимых значений данного уравнения состоит из всех действительных значений x, для которых $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$. Поэтому, переходя к функциям $\sin x$ и $\cos x$ после приведения к общему знаменателю, получаем уравнение

$$(2\sin^2 x + 5\sin x + 1)\cos^2 x = 4\sin x(1 + \sin x),$$

равносильное данному на его множестве допустимых значений. Перейдем к одной функции. Для этого $\cos^2 x$ заменяем на $1-\sin^2 x$. Получаем

$$(2\sin^2 x + 5\sin x + 1)(1 - \sin^2 x) = 4\sin x(1 + \sin x)$$

или

$$(1 + \sin x)(2\sin^2 x + 3\sin x - 1) = 0. \qquad (*)$$

Так как $\cos x \neq 0$, то $1+\sin x \neq 0$ и уравнение (*) равносильно уравнению $2\sin^2 x + 3\sin x - 1 = 0$. Левая часть последнего уравнения раскладывается на множители

$$(1 + \sin x)(2\sin^2 x + \sin x - 1) = 0,$$

и мы получаем еще более простое уравнение $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, равносильное данному при указанных ограничениях.

Итак, мы пришли к квадратному уравнению относительно функции $\sin x$. Решая его, находим $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ и $\sin x = -1$. Последние значения не входят во множество допустимых значений данного уравнения.

Укажем несколько приемов, сводящих тригонометрическое уравнение к рациональному.

1. **Общий метод рационализации.** Всякое тригонометрическое уравнение, рациональное* относительно всех входящих в него тригонометрических функций одного и того же допустимого аргумента α, приводится к рациональному уравнению с одним неизвестным.

В самом деле, все тригонометрические функции аргумента α рационально выражаются через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\alpha \neq \pi + 2\pi k$ (см. гл. X, § 5):

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Производя в данном уравнении эту замену, мы получаем рациональное уравнение относительно неизвестного $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Дальнейшее решение полученного уравнения подробно рассмотрено в курсе алгебры (см. гл. III, § 4). Однако, решая уравнение таким методом, мы можем потерять корни вида $\alpha = \pi - 2\pi k$, для которых вышеуказанная замена не имеет смысла. Поэтому, при решении уравнения этим методом, необходимо проверить, являются ли числа $x = 2\pi k$ корнями данного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение

$$3\sin x - 2\cos x = 2.$$

Решение. Это уравнение можно решить методом введения вспомогательного угла (см. пример 4, § 2).

Укажем другой путь его решения.

Предполагая, что $x \neq \pi + 2\pi n$, выразим $\sin x$, $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Получим уравнение

$$3\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 2\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 2,$$

которое после приведения к общему знаменателю и дальнейших упрощений примет вид

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{2}{3},$$

Отсюда находим, что $x = 2\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + 2\pi n$. Остается проверить, будут ли числа $x = \pi + 2\pi n$ удовлетворять исходному уравнению. Подставляя их в левую часть этого уравнения

$$3\sin(\pi + 2\pi n) - 2\cos(\pi + 2\pi n) = -2\cos\pi - 2,$$

убеждаемся, что они также ему удовлетворяют.

---

* Это означает, что тригонометрические функции аргумента α, входящие в уравнение, связаны операциями сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Итак, все корни данного уравнения заключены в формулах

$$x_1 = 2\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + 2\pi n \text{ и } x_2 = \pi + 2\pi n.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\sin 4x + \operatorname{tg} 2x = 2.$$

Решение. Выражая $\sin 4x$ через $\operatorname{tg} 2x$, получаем уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg} 2x}{1+\operatorname{tg}^2 2x} + \operatorname{tg} 2x = 2,$$

равносильное данному, которое после очевидных упрощений приводится к кубическому уравнению относительно $\operatorname{tg} 2x$

$$\operatorname{tg}^3 2x - 2\operatorname{tg}^2 2x + 3\operatorname{tg} 2x - 2 = 0.$$

Левая часть этого уравнения раскладывается на множители

$$(\operatorname{tg} 2x - 1)(\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg} 2x + 2) = 0.$$

Решая уравнение $\operatorname{tg} 2x - 1 = 0$, находим: $2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ и $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$.

Второе уравнение $\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg} 2x - 2 = 0$ не имеет действительных корней.

Заметим, что общий метод рационализации не всегда является приемлемым. Часто он приводит к рациональным уравнениям высоких степеней. Так, решая этим методом уравнение $2\sin 2x = -3(\sin x + \cos x)$, получаем уравнение $3x^4 + 10x^3 - 2x - 3 = 0$ $\left(x = -\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$, которое не имеет рациональных корней (см. гл. III, § 10).

Решение этого уравнения другим методом будет приведено в пункте III этого параграфа.

II. Однородные тригонометрические уравнения и приводящиеся к ним. Тригонометрическое уравнение вида

$$A_0 \cos^n x + A_1 \cos^{n-1} x \cdot \sin x + A_2 \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x + \ldots + A_n \sin^n x = 0 \quad (1)$$

называется *однородным* уравнением относительно функций $\sin x$ и $\cos x$. Степень его однородности равна n.

Будем в дальнейшем это уравнение называть просто однородным. Так, например, уравнение $\sin x + 3\cos x = 0$ является однородным (1-й степени однородности), а уравнение $\sin 2x + \cos x = 0$ не однородно, что ясно после приведения к одному аргументу x:

$$2\sin x \cdot \cos x + \cos x = 0.$$

Предположим, что коэффициенты $A_0 \neq 0$ и $A_n \neq 0$. В этом случае решениями уравнения (1) не могут быть те значения x, для которых $\sin x = 0$ или $\cos x = 0$.

Допустим противное. Пусть $\sin x = 0$. При этом $\cos x = \pm 1$. Тогда из уравнения (1) получаем, что $A_0 \cos^n x = 0$ и так как $A_0 \neq 0$, то

$\cos x = 0$. Получилось противоречие. Аналогично доказывается, что $\cos x \neq 0$. А если это так, то, разделив уравнение (1) на $\cos^n x$ или $\sin^n x$, мы получаем уравнение

$$A_0 \operatorname{tg}^n x + A_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + A_2 \operatorname{tg}^{n-2} x + \ldots + A_n = 0 \quad (3)$$

или

$$A_n + A_{n-1}\operatorname{ctg} x + A_{n-2}\operatorname{ctg}^2 x + \ldots + A_0 \operatorname{ctg}^n x = 0, \quad (4)$$

равносильные данному. Уравнения (3) и (4) являются рациональными относительно $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$ соответственно.

В том случае, когда коэффициенты A_0 или A_n обращаются в нуль, левая часть уравнения (1) раскладывается на множители. Приравнивая нулю каждый из них, получаем два уравнения, из которых одно простейшее $\cos x = 0$ (или $\sin x = 0$), а другое однородное, сводящееся к уравнениям (3) или (4).

Умножением на тригонометрическую единицу $(\sin^2 x + \cos^2 x)^k$ можно привести к однородному некоторые уравнения, не являющиеся однородными. Например, неоднородное уравнение $\sin x \cos x - \sin^2 x - 3\cos^2 x = 5$ приводится к однородному

$$\sin x \cdot \cos x + \sin^2 x - 3\cos^2 x = 5(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

или

$$\sin x \cdot \cos x - 4\sin^2 x - 8\cos^2 x = 0.$$

Уравнение $\sin x + \cos 2x \cdot \cos x = 0$, не являющееся однородным, приводится к однородному уравнению

$$\sin x(\sin^2 x + \cos^2 x) + (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x = 0$$

и т. д.

Пример 4. Решить уравнение

$$a(\sin x + \cos x) = b(\cos x - \sin x).$$

Решение. Уравнение является однородным. Разделив все его члены на $\cos x$, получаем равносильное данному простейшее уравнение

$$(a - b)\operatorname{tg} x = b - a.$$

Пусть $a + b \neq 0$. Тогда $\operatorname{tg} x = \frac{b-a}{b+a}$ и $x = \operatorname{arctg}\frac{b-a}{b+a} + \pi k$. Если $a + b = 0$, то данное уравнение является также простейшим: $\cos x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sin^3 2x + \cos 2x \cos 4x = 3\sin 2x \cdot \cos^2 2x - \cos 2x.$$

Решение. Переходя к одному аргументу $2x$, имеем

$$\sin^3 2x + \cos 2x = 3\sin 2x \cdot \cos^2 2x(1 + \cos 4x).$$

$$2\cos^2 2x - 3\sin 2x\cdot\cos^2 2x + \sin^2 2x = 0,$$

которое равносильно уравнению $\operatorname{tg}^2 2x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$. Последнее распадается на два: $\operatorname{tg} 2x - 1 = 0$ и $\operatorname{tg} 2x + 2 = 0$. Решая их, находим $2x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, и $x_2 = -\frac{\operatorname{arctg} 2}{2} + \frac{\pi n}{2}$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sin(x+5) + \cos(x-2) = \cos(x+7).$$

Решение. Уравнение имеет «страшный» вид. Однако это однородное уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$. Раскрывая синус суммы и косинус суммы и разности и группируя члены, имеем

$$\sin x(\cos 5 + \sin 2 + \sin 7) + \cos x(\sin 5 + \cos 2 - \cos 7) = 0.$$

Так как $\cos 5 > 0$, $\sin 2 > 0$ и $\sin 7 > 0$, то $\cos 5 + \sin 2 + \sin 7 > 0$ и последнее уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos 7 - \sin 5 - \cos 2}{\sin 2 + \cos 5 + \sin 7},$$

откуда получаем

$$x = \operatorname{arctg}\frac{\cos 7 - \sin 5 - \cos 2}{\sin 2 + \cos 5 + \sin 7} + \pi n.$$

Пример 7. Решить уравнение

$$m^2(\cos x - \sin x) = \sqrt{1 - 2\sin x\cdot\cos x}.$$

Решение. Так как

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

а

$$1 + 2\sin x\cdot\cos x = (\sin x + \cos x)^2 = 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

то данное уравнение можно записать в виде

$$m^2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Последнее равносильно совокупности двух уравнений

(а) $m^2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ при условии, что $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$

и

(б) $m^2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ при условии, что $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$, причем оба уравнения однородные.

Решая (а), находим, что $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = m^2$, $x = -\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} m^2 + \pi n$. При $n = 2k$ аргумент $x + \frac{\pi}{4}$ оканчивается в I четверти, где $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$. При $n = 2k + 1$ аргумент $x + \frac{\pi}{4}$ оканчивается в III четверти, где $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$. Следовательно, $n = 2k + 1$ не подходит, т. е. $x = -\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} m^2 + 2\pi k$. Решая (б), находим, что $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -m^2$, $x = -\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} m^2 + \pi n$. При $n = 2k$ аргумент $x + \frac{\pi}{4}$ оканчивается в IV четверти, где $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$. При $n = 2k + 1$ аргумент $x + \frac{\pi}{4}$ оканчивается во II четверти, где $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$. Следовательно, $n = 2k + 1$ не подходит, т. е. $x = -\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} m^2 + 2\pi k$.

Итак, все решения данного уравнения заключены в формулах:

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} m^2 + 2\pi n \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} m^2 + 2\pi n.$$

Очевидно, обе эти формулы можно объединить в одну

$$x = -\frac{\pi}{4} \pm \operatorname{arctg} m^2 + 2\pi n.$$

III. **Уравнения, рациональные относительно выражений $\sin x + \cos x$ и $\sin x\cdot\cos x$.** Такие уравнения можно записать формулой $R(\sin x + \cos x, \sin x\cdot\cos x) = 0$, где буква R обозначает, что над аргументами $\sin x + \cos x$ и $\sin x\cdot\cos x$ (рассмотренными как единые), производятся лишь рациональные операции (см. гл. III, § 4). Обозначая $\sin x + \cos x = a$, из тождества $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cdot\cos x$ находим, что $\sin x\cdot\cos x = \frac{a^2 - 1}{2}$. Заменяя в уравнении $R(\sin x + \cos x, \sin x\cdot\cos x) = 0$ $\sin x + \cos x$ и $\sin x\cdot\cos x$ их выражениями через a, получаем $R\left(a, \frac{a^2 - 1}{2}\right) = 0$. Последнее уравнение является, очевидно, рациональным относительно a. Найдя из него a, решаем уравнение $\sin x + \cos x = a$ или $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}$, где a — известная величина.

Замечание. Если после нахождения a искать x из уравнения $\sin x \cdot \cos x = a$, то среди последних могут оказаться лишние корни, так как этому уравнению будут удовлетворять и все корни уравнения $\sin x + \cos x = -a$.

Аналогично решаются уравнения $R(\sin x - \cos x, \sin x \cdot \cos x) = 0$. Обозначая $\sin x - \cos x = a$, находим, что $\sin x \cdot \cos x = \frac{1 - a^2}{2}$ и т. д.

Пример 8. Решить уравнение

$$a(\sin x + \cos x) = b \sin x \cdot \cos x = c.$$

Решение. Обозначая $\sin x + \cos x = u$, $\sin x \cos x = \frac{u^2 - 1}{2}$, получаем

$$2au - \frac{b}{2}(1 - u^2) = c$$

или

$$bu^2 + 2au - (b + 2c) = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим

$$u = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b(b + 2c)}}{b},$$

при условии, что $b \neq 0$ и $a^2 + b^2 + 2bc \geqslant 0$. Очевидно, что данное уравнение имеет решение, если выполнены указанные условия и, кроме того, $|u| \leqslant \sqrt{2}$.

Рассматривая, в частности, уравнение $2\sin 2x = 3(\sin x + \cos x)$, имеем: $3a - 2(a^2 - 1) = 0$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = 2$ (не подходит). Следовательно, $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$, или $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Отсюда находим, что $x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + 2\pi n$,

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + 2\pi n.$$

Пример 9. Решить уравнение

$$\sec x + \operatorname{cosec} x + \sec x \cdot \operatorname{cosec} x = 5.$$

Решение. Множество допустимых значений данного уравнения состоит из всех действительных значений x, для которых $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$. В этих условиях данное уравнение равносильно уравнению

$$\sin x + \cos x - 5\sin x \cdot \cos x + 1 = 0.$$

Замена $\sin x + \cos x = u$ сводит это уравнение к квадратному $5u^2 - 2u - 7 = 0$, корни которого равны -1 и $\frac{7}{5}$. Итак, наше урав-

нение сводится к двум уравнениям: $\sin x + \cos x = \frac{7}{5}$ и $\sin x + \cos x = -1$. Решая первое, находим

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{5\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad x_1 = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{7}{5\sqrt{2}} + 2\pi n.$$

Решая второе, находим

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4} \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$$

Однако значения x_2 не являются решениями уравнения.

Пример 10. Решить уравнение

$$\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x + \cos x - 2} = \frac{4(\sin x + \cos x)}{9 - 8\sin 2x}.$$

Решение. Замена $\sin x + \cos x = a$ сводит данное уравнение к рациональному

$$\frac{a - 1}{a - 2} = \frac{4a}{9 + 3(1 - a^2)}.$$

Решая последнее, находим: $a_1 = \frac{2}{3}$ и $a_2 = -3$ (не подходит). Итак, данное уравнение равносильно уравнению

$$\sin x + \cos x = \frac{2}{3} \quad \text{или} \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3\sqrt{2}},$$

откуда находим, что

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{2}{3\sqrt{2}} + 2\pi n.$$

В некоторых случаях выгодно производить замену аргумента. Покажем это на следующем уравнении.

Пример 11. Решить уравнение

$$\lg x = \lg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Решение. Обозначая $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = y$, перепишем уравнение в виде $\lg\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) = \lg^2 y$, или $\operatorname{ctg} 2y = \lg^2 y (2y \neq \pi n)$.

Переходя к функции $\lg y$, получаем биквадратное уравнение

$$2\lg^4 y + \lg^2 y - 1 = 0,$$

решая которое, находим: $\operatorname{tg} y_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{3,4}$ — лишние. Следовательно, $y = \pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n$. Возвращаясь к x, получаем

$$x = \frac{\pi}{2} - 2y = \frac{\pi}{2} \mp 2\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n.$$

§ 4. СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При решении систем тригонометрических уравнений, последние сводят либо к одному уравнению с одним неизвестным, либо к алгебраической системе уравнений относительно каких аргументов или функций этих аргументов. Все эти приемы проиллюстрируем на системе двух уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Множество допустимых значений этой системы — все действительные числа, кроме $\frac{\pi}{2} + \pi n$.

I способ. Сведем данную систему к одному уравнению. Согласно первому уравнению имеем: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{3}$. Это уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg} x \cdot \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x}{1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x} = \frac{1}{3} \quad \text{или} \quad (\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1)^2 = 0,$$

так как $1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x \neq 0$*. Отсюда получаем $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$ и $y = \frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{6} - \pi n$.

II способ. Переходя во втором уравнении от произведения к сумме и используя первое уравнение, получаем

$$\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)} = \frac{1}{3} \quad \text{или} \quad \frac{\cos(x-y) - \frac{1}{2}}{\cos(x-y) + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Из последнего уравнения находим, что $\cos(x-y) = 1$ и $x - y = 2\pi n$. Комбинируя это уравнение с первым уравнением данной системы

* Если $1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$, то $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$. Тогда $y = \frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ не входит в множество допустимых значений данной системы.

имеем $x + y = \frac{\pi}{3}$ и $x - y = 2\pi n$. Отсюда следует, что $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $y = \frac{\pi}{6} - \pi n$.

III способ. Из первого уравнения следует, что $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (при этом мы получаем лишние корни, так как из равенства одноименных функций не вытекает равенство аргументов). Раскрывая тангенс суммы и используя второе уравнение, имеем $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Комбинируя это уравнение со вторым, получаем алгебраическую систему относительно $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Заметим, что эта система не равносильна данной: $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$ являются корнями уравнения $z^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} z + \frac{1}{3} = 0$, решая которое, находим $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Следовательно, $x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $y_1 = \frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{6} - \pi n$.

Замечание. Если искать y из уравнения $\operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то $y = \frac{\pi}{6} + \pi k$. Совокупность $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$ и $y = \frac{\pi}{6} + \pi k$, где n и k меняются независимо, содержит лишние решения данной системы — те значения, которые не удовлетворяют уравнению $x + y = \frac{\pi}{3}$. Поэтому из всей совокупности $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$ и $y = \frac{\pi}{6} + \pi k$ нужно выбрать те, которые удовлетворяют условию $x + y = \frac{\pi}{3}$, т. е. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi(n+k) = \frac{\pi}{3}$. Отсюда следует, что $k = -n$, и мы приходим к уже полученным решениям $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$ и $y = \frac{\pi}{6} - \pi n$.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \frac{3}{4}, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$$

Решение. Множество допустимых значений — все действительные числа, не равные $\frac{\pi}{2}+\pi k$. Переходя во втором уравнении к синусу и косинусу и используя первое уравнение, имеем

$$\sin y\cdot\cos x=\frac{1}{4}.$$

Комбинируя это уравнение с первым уравнением, получим систему

$$\begin{cases}\sin x\cdot\cos y=\frac{3}{4},\\ \cos x\cdot\sin y=\frac{3}{4},\end{cases}$$

равносильную данной при условии, что $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$.

Перейдем в каждом уравнении от произведения к сумме

$$\begin{cases}\sin(x+y)+\sin(x-y)=\frac{1}{2},\\ \sin(x+y)-\sin(x-y)=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Отсюда получаем, что $\sin(x+y)=1$ и $\sin(x-y)=-\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\\ x-y=-\frac{\pi}{6}(-1)^k+\pi k.\end{cases}$$

Итак,

$$x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}(-1)^k+\pi\left(k+\frac{n}{2}\right),\quad y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}(-1)^k+\pi\left(n-\frac{k}{2}\right),$$

причем k и n меняются независимо друг от друга (ср. с предыдущей системой).

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases}x+y+z=\pi,\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=3,\\ \operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z=6.\end{cases}$$

Решение. Выражая z через x и y из первого уравнения и исключая его из третьего уравнения, получаем

$$\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}[\pi-(x+y)]=6 \quad\text{или}\quad \operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}(x+y)=-6.$$

Раскроем тангенс суммы двух углов. Тогда, учитывая второе уравнение, имеем

$$\operatorname{tg}y\cdot\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}=-6,\quad\text{или}\quad\frac{3+\operatorname{tg}^2y}{1-3}=-6.$$

Мы получили уравнение $\operatorname{tg}^2y=9$, откуда находим, что

$$y=\pm\operatorname{arctg}3+\pi k.$$

Из третьего уравнения находим, что $\operatorname{tg}z=\frac{6}{\operatorname{tg}y}=\pm2$ и $z=\pm\operatorname{arctg}2+\pi k$. Теперь из первого уравнения найдем x:

$$x=\pi-(z+y)=\pi\mp\operatorname{arctg}2\pm\operatorname{arctg}3+\pi(n+k)=$$

$$=\pi\mp(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3)+\pi(n+k)=\pi\mp\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\pi(n+k).$$

Итак, система имеет два решения

$$x_1=\frac{\pi}{4}+\pi(n+k),\quad y_1=\operatorname{arctg}3+\pi n,\quad z_1=\operatorname{arctg}2+\pi k,$$

$$x_2=\frac{7\pi}{4}+\pi(n+k),\quad y_2=-\operatorname{arctg}3+\pi n,\quad z_2=-\operatorname{arctg}2+\pi k,$$

где n и k принимают любые целые значения независимо друг от друга.

§ 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида

$$a_1<\sin\alpha<b_1,\quad a_2<\cos\alpha<b_2,\quad a_3<\operatorname{tg}\alpha<b_3,\quad a_4<\operatorname{ctg}\alpha<b_4,$$

где a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4 — заданные числа. При решении этих неравенств удобно в качестве вспомогательного средства пользоваться графиком соответствующей тригонометрической функции или тригонометрическим кругом.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{1}{3}<\sin x<\frac{1}{2}.$$

Решение. Рассмотрим график функции $y=\sin x$ на отрезке $(0;\ 2\pi)$ (рис. 73) и отметим на нем значения $x_1=\arcsin\frac{1}{3}$, $x_2=\pi-\arcsin\frac{1}{3}$, синус которых равен $\frac{1}{3}$, и также значения $x_3=\frac{\pi}{6}$ и $x_4=\frac{5\pi}{6}$, синус которых равен $\frac{1}{2}$. Эти четыре точки разбивают весь промежуток $(0;\ 2\pi)$ на пять промежутков: $(0;\ x_1)$, $(x_1;\ x_3)$, $(x_3;\ x_4)$, $(x_4;\ x_2)$, $(x_2;\ 2\pi)$. Используя неравенство $\sin x$ на каждом из этих про-

* $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=2\frac{\pi}{4}$ (см. гл. XII, пример 12).

межутков, убеждаемся, что $\frac{1}{3} < \sin x < \frac{1}{2}$ на промежутках (x_1, x_2) и (x_3, x_4), т. е. на промежутках $\left(\arcsin\frac{1}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{6}, \pi - \arcsin\frac{1}{3}\right)$. Переходя от промежутка $(0, 2\pi)$ на всю числовую ось и учитывая периодичность синуса, окончательно получаем: $\frac{1}{3} < \sin x < \frac{1}{2}$ на всех промежутках

$$\left(\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n, \ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \text{ и}$$
$$\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n\right).$$

Пример 2. Решить неравенство

$$-1 < \operatorname{ctg} x < 2.$$

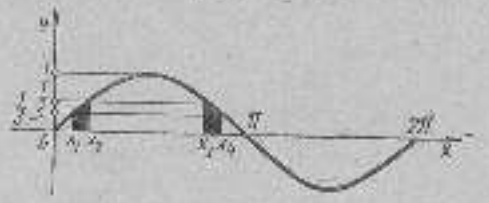


Рис. 73

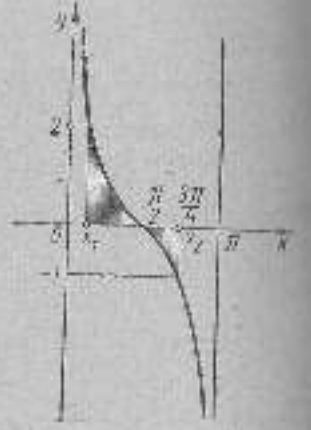


Рис. 74

Решение. Рассмотрим график функции $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0, \pi)$ и отметим на нем числа $x_1 = \operatorname{arcctg} 2$, котангенс которого равен 2, и $x_2 = \frac{3\pi}{4}$, котангенс которого равен -1 (рис. 74). Точки x_1 и x_2 разбивают весь промежуток $(0, \pi)$ на три промежутка: $(0, x_1)$, (x_1, x_2) и (x_2, π), причем в среднем из них (x_1, x_2) функция $\operatorname{ctg} x$ убывает от 2 до -1. Переходя ко всей числовой оси, учитывая периодичность котангенса и заменяя x_1 и x_2 их значениями, получаем $-1 < \operatorname{ctg} x < 2$ на каждом из промежутков

$$\left(\operatorname{arcctg} 2 + \pi n, \ \frac{3}{4}\pi + \pi n\right).$$

Неравенства, не являющиеся простейшими, с помощью тождественных преобразований нужно свести к одному или системе простейших неравенств, равносильных данному.

Пример 3. Решить неравенство

$$\cos^6 x \sin 3x + \sin^6 x \cos 3x < \frac{3}{8}.$$

Решение. Упрощая левую часть неравенства, получаем равносильное неравенство $\sin 4x < \frac{1}{2}$. Взяв вспомогательный тригонометрический круг (рис. 75), мы видим, что искомым значениям $4x$ соответствуют точки дуги MNP, т. е.

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < 4x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n.$$

Отсюда следует, что

$$-\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}.$$

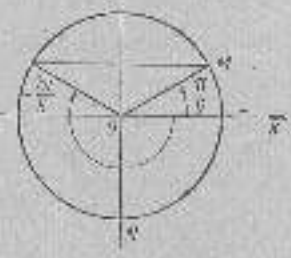


Рис. 75

Пример 4. Решить неравенство

$$2\sin^4 x - 3\sin^2 x + 1 > 0.$$

Решение. Переходя к аргументу $2x$, получаем равносильное неравенство $\cos^2 2x + \cos 2x > 0$, которое равносильно в свою очередь совокупности двух систем

$$\text{(а)} \begin{cases} \cos 2x + 1 > 0 \\ \cos 2x > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{(б)} \begin{cases} \cos 2x + 1 < 0, \\ \cos 2x < 0. \end{cases}$$

Первое неравенство системы (а) справедливо для всех x, кроме тех, для которых $\cos 2x = -1$, т. е. для $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$. Из второго неравенства (а) следует, что $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < 2x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, т. е. $-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n$, причем точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ не входят в эти промежутки ни при каком n. Итак, решением системы (а) являются промежутки $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n, \ \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$.

Система (б) несовместна, так как первое неравенство (б) не имеет решений. Следовательно, решения системы (а) являются решениями данного неравенства.

Пример 5. Решить неравенство

$$4\sin x \cdot \cos x (\cos^3 x - \sin^3 x) < \sin 6x.$$

Решение. Перенося все члены неравенства в левую часть и затем преобразуя полученное выражение в произведение, имеем $\sin x \cdot \cos 5x > 0$. А это неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\text{(а)} \begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos 5x > 0, \end{cases} \quad \text{(б)} \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos 5x < 0. \end{cases}$$

Из системы (а) следует, что $2\pi n < x < 2\pi n + \pi$ и $-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5} < x < \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$ одновременно. А это означает, что k может принимать лишь такие целые значения, при которых интервалы

$\left(-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}, \frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}\right)$ попадают в I и II четверть. Давая k последовательно значения 0, 1, 2, 3, 4, получаем интервалы:

$\left(-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right)$ (соответствует $k=0$),

$\left(\frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\right)$ (соответствует $k=1$),

$\left(\frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}\right)$ (соответствует $k=2$).

При $k=3$ и $k=4$ соответствующие им интервалы не попадают в I и II четверть. При $k=5$, очевидно, получается интервал $\left(-\frac{\pi}{10}+2\pi, \frac{\pi}{10}+2\pi\right)$. Вообще, представляя k в виде $k=5n+l$, где $l=0, 1, 2, 3, 4$, мы видим, что только при $l=0, 1, 2$ соответствующие им интервалы (или часть интервала): 1) $\left(2\pi n, \frac{\pi}{10}+2\pi n\right)$, 2) $\left(\frac{3\pi}{10}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ и 3) $\left(\frac{7\pi}{10}+2\pi n, \frac{9\pi}{10}+2\pi n\right)$ попадают в I и II четверть. Итак, системе (а) удовлетворяют все значения x, лежащие в указанных интервалах 1), 2), 3).

Из системы (б) следует, что $(2n+1)\pi<x<(2n+2)\pi$ и $\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}<x<\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}\right)$ одновременно. Из всех значений x выбираем лишь те, при которых интервалы $\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}, \frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}\right)$ попадают в III и IV четверть.

Проводя те же рассуждения, что в случае (а), получаем, что этим свойством обладают указанные интервалы или их части при $k=2, 3, 4$.

Итак, данному неравенству удовлетворяют все значения, лежащие в промежутках

$\left(2\pi k, \frac{\pi}{10}+2\pi k\right)$, $\left(\frac{3\pi}{10}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$,

$\left(\frac{7\pi}{10}+2\pi k, \frac{9\pi}{10}+2\pi k\right)$, $\left(\pi+2\pi k, \frac{\pi}{10}+\pi(2k+1)\right)$,

$\left(\frac{13\pi}{10}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$ $\left(\frac{17\pi}{10}+2\pi k, \frac{19\pi}{10}+2\pi k\right)$.

Пример 6. Найти все значения x, лежащие в промежутке $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ и удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg}\frac{1}{x}\geqslant 1$.

Решение. Решением неравенства $\operatorname{tg}\frac{1}{x}\geqslant 1$ будут все значения x, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{4}+\pi n<\frac{1}{x}<\frac{\pi}{2}+\pi n$. Так как по условию $1<\frac{1}{x}<6$, то нужно выбрать такие значения x, при ко-

торых промежутки $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ попадают целиком или частично внутрь промежутка $(1, 6)$. Очевидно, таких единственных значений будет $n=1$. Итак, $\frac{1}{x}<\frac{\pi}{2}+\pi$. Следовательно, $\frac{2}{5\pi}<x<\frac{1}{4}$.

§ 6. РЕШЕНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Тригонометрическое уравнение — пример трансцендентного уравнения. К этому же классу уравнений относятся логарифмические и показательные уравнения, уравнения связанные с аркфункциями, и т. д.

В этом параграфе рассмотрим несколько уравнений смешанного типа.

Пример 1. Решить уравнение

$$\cos(\pi\lg x)+\sin(\pi\lg x)=1.$$

Решение. Преобразуя левую часть уравнения, получаем равносильное данному простейшее уравнение $\sin\left(\pi\lg x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда следует, что $\pi\lg x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}(-1)^n+\pi n$ или $\lg x=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(-1)^n+n$. Мы получили логарифмическое уравнение. Решая его, находим, что $x=10^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(-1)^n+n}$. Если $n=2k$, то $x=10^{2k}$, если $n=2k+1$, то $x=10^{\frac{1}{2}+2k}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{1+\lg\operatorname{tg}x}+\sqrt[3]{1-\lg\operatorname{tg}x}=2.$$

Решение. Используя тождество $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, где $a=\sqrt[3]{1+\lg\operatorname{tg}x}$, $b=\sqrt[3]{1-\lg\operatorname{tg}x}$, $a^3+b^3=2$, $a+b=2$, получаем уравнение $2+3\sqrt[3]{1-\lg^2\operatorname{tg}x}\cdot 2=8$, или $\lg^2\operatorname{tg}x=0$, равносильное данному. Из последнего уравнения следует, что $\operatorname{tg}x=1$ и $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$.

Пример 3. Решить уравнение $\sin(\pi\operatorname{arctg}x)=\cos(\pi\operatorname{arctg}x)$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}(\pi\operatorname{arctg}x)=1,$$

откуда следует, что $\pi\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, где n — целые числа, для которых $\left|\frac{\pi}{4}+\pi n\right|<\frac{\pi^2}{2}$ или $\left|\frac{1}{4}+n\right|<\frac{\pi}{2}$. Решая это неравенство относительно n, находим, что $n=0$, $n=-1$ и $n=1$. Следовательно, мы имеем три уравнения

$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{4}$ $(n = 0)$ $\operatorname{arcctg} x = \frac{5}{4}\pi$ $(x = 1)$, $\operatorname{arcctg} x = -\frac{3}{4}\pi$ $(x = -1)$,

из которых получаем

$$x_1 = \operatorname{tg}\frac{1}{4}, \quad x_2 = \operatorname{tg}\frac{5}{4}, \quad x_3 = -\operatorname{tg}\frac{1}{4}.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$\log_2(\operatorname{arctg} x) - \log_2(\operatorname{arcctg} x) = a.$$

Решение. Потенцируя данное уравнение, получаем уравнение $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x = 2^a$, равносильное данному, при условии, что $\operatorname{arctg} x > 0$ и $\operatorname{arcctg} x > 0$ (т. е. $x > 0$).

Преобразуя полученное уравнение к виду

$$\operatorname{arctg} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = 2^a,$$

решаем это квадратное уравнение. Имеем

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 2^{a+3}}}{4}.$$

Исследуя полученную формулу, видим, что она дает решение данного уравнения при условии, что $\pi^2 - 2^{a+3} \geqslant 0$ и $0 < \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 2^{a+3}}}{4} < \frac{\pi}{2}$. Первое и второе неравенства выполняются при $a \leqslant 2\log_2 \pi - 4$. При этих условиях

$$x = \operatorname{tg}\frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 2^{a+3}}}{4}.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$\arcsin 2^{x+2} + \arcsin(\sqrt{3} \cdot 2^x) = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Полагая $2^{x+2} = y$ $(y > 0)$, перепишем уравнение в виде $\arcsin y + \arcsin y\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$, или $\frac{\pi}{2} - \arcsin y = \arcsin y\sqrt{3}$. Множество допустимых значений которого состоит из всех значений y, заключенных в промежутке $0 < y\sqrt{3} \leqslant 1$. Приравнивая синусы обеих частей последнего уравнения (при этом мы можем получить лишние корни), имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y\right) = y\sqrt{3}, \quad \sqrt{1 - y^2} = y\sqrt{3},$$

$$\cos(\arcsin y) = y\sqrt{3}, \quad 1 - y^2 = 3y^2; \quad y = \pm\frac{1}{2}.$$

Отрицательное значение y отбрасываем. Возвращаясь к аргументу x, получаем $2^{x+2} = \frac{1}{2}$, $x + 2 = -1$, $x = -3$. Проверка показывает, что $x = -3$ удовлетворяет данному уравнению.

ГЛАВА XIV

ПРИЛОЖЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ К РЕШЕНИЮ ТРЕУГОЛЬНИКОВ, ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ФИГУР

Основными элементами треугольника называются его стороны и углы.

Из признаков равенства треугольников, доказываемых в геометрии, вытекает, что последние определяются тремя основными элементами, из которых хотя бы один должен быть стороной. В частности, прямоугольные и равнобедренные треугольники определяются двумя основными элементами, из которых хотя бы один должен быть стороной, а равносторонний треугольник определяется одним основным элементом — его стороной. Отсюда следует, что задав необходимое число основных элементов, можно по ним вычислить все остальные основные его элементы.

Чтобы решить эту задачу, необходимо знать различные соотношения между углами и сторонами треугольника.

Прежде всего перечислим все те соотношения между элементами треугольника, которые выводятся в геометрии как в виде равенств, так и в виде неравенств.

1. *Сумма внутренних углов треугольника равна* 180°. *Каждый внешний угол треугольника равен сумме внутренних, с ним не смежных.*

2. *В треугольнике против больших сторон лежат большие углы и обратно. Стороны треугольника, лежащие против равных углов, равны и обратно — против равных углов лежат равные стороны. Катет, лежащий против угла в* 30°, *равен половине гипотенузы.*

3. *Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше их разности.*

4. *Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Квадрат катета является средней геометрической между всей гипотенузой и проекцией данного катета на эту гипотенузу.*

Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла, является средней геометрической между отрезками, на которые он делит гипотенузу.

5. *Квадрат стороны, лежащей против острого угла в треугольнике, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного*

произведения известной стороны на проекцию на нее другой из оставшихся сторон.

Соответствующая теорема дается для квадрата стороны, лежащей против тупого угла.

Помимо приведенных соотношений между углами и сторонами треугольника, доказывается ряд свойств его специальных линий: высот, биссектрис, медиан, перпендикуляров из середин сторон, средних линий и т. д. Перечислим и их.

6. *Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.*

7. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, равноудаленной от сторон треугольника. Эта точка является центром вписанной в треугольник окружности. Кроме того, биссектриса внутреннего угла делит противолежащую сторону на части, пропорциональные двум другим прилежащим сторонам.*

8. *Все медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая отстоит от каждой медианы на две трети, считая от вершины.*

9. *Все три высоты треугольника пересекаются в одной точке.*

10. *Перпендикуляры из середин сторон также пересекаются в одной точке, равноудаленной от всех вершин треугольника. Эта точка является центром описанного вокруг треугольника круга.*

Анализируя все эти соотношения, легко увидеть, что с их помощью решаются лишь специально подобранные задачи. Например, зная из двух сторон прямоугольного треугольника найти третью сторону (теорема Пифагора) или по заданному углу в 30 или в 60, или в 45° и стороне прямоугольного треугольника найти все остальные его элементы. Что касается косоугольного треугольника, то приведенная здесь теорема «работает» лишь в том случае, когда известна величина проекции одной данной стороны на другую (ее можно вычислить либо, когда дана соответствующая высота, либо угол между известными сторонами равен 30 или 45, или 60°).

В следующих параграфах получим ряд соотношений между сторонами и произвольными углами треугольника.

§ 1. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА. ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РЕШЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Выражения тригонометрических функций острого угла через стороны прямоугольного треугольника (см. гл. IX, § 5) позволяют вывести следующие соотношения между его углами и сторонами.

1. Из формул $\sin A = \frac{a}{c}$ и $\cos A = \frac{b}{c}$ следует, что $a = c \cdot \sin A$ и $b = c \cdot \cos A$, т. е. *катет равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или косинус прилежащего к определяемому катету углу.*

2. Из формул $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$ и $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$ следует, что $a = b \cdot \operatorname{tg} A$ и $b = a \cdot \operatorname{ctg} A$, т. е. *катет равен произведению другого катета на тангенс противолежащего или котангенс прилежащего к определяемому катету угла.*

Простейшая задача решения треугольника состоит в том, чтобы по минимальному числу основных элементов, определяющих этот треугольник, найти остальные. Прямоугольный треугольник определяется двумя элементами; строя различные комбинации из шести основных элементов по 2, среди которых имеется хотя бы одна сторона, мы получаем следующие четыре так называемые основные случаи решения прямоугольных треугольников:

I случай. Даны катеты a и b. Найти гипотенузу c и острые углы A и B.

Решение. 1. Используя формулу $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, находим угол A, затем угол B: $B = 90° - A$.

2. Гипотенузу c находим по формуле $c = \frac{a}{\sin A}$. Подставляя в эти формулы численные значения данных a и b, вычисляем значения $\operatorname{tg} A$. Угол A находим по таблицам. (Например, по таблице Брадиса.) Затем находим значения угла B и гипотенузы c.

Чтобы убедиться в правильности расчетов, полезно для контроля взять одну из формул, не использованную в ходе решения и содержащую искомые величины. В нашем случае можно взять, например, теорему Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$.

II случай. Даны катет a и гипотенуза c. Найти катет b и острые углы A и B.

Решение. 1. Используя формулу $\sin A = \frac{a}{c}$, находим угол A, затем B: $B = 90° - A$.

2. Катет b находим по формуле $b = c \cdot \sin B$.

Формула для проверки: $c^2 = a^2 + b^2$.

III случай. Даны катет a и острый угол B. Найти катет b, гипотенузу c и угол A.

Решение. 1. Используя формулы $A = 90° - B$ и $c = \frac{a}{\sin B}$, находим A и c.

2. Катет b находим по формуле $b = a \cdot \operatorname{tg} B$. Формула для проверки: $a^2 + b^2 = c^2$.

IV случай. Даны гипотенуза c и острый угол B. Найти катеты a и b и угол A.

Решение. 1. Используя формулы $a = c \cdot \sin A$ и $B = 90° - A$, находим a и B.

2. Катет b находим по формуле $b = c \cdot \cos A$. Формула для проверки: $a^2 + b^2 = c^2$.

Отметим, что предложенные способы решения этих случаев так же как и формулы для проверки не являются единственными. Важно лишь, что в качестве контроля нужно брать формулу, не использованную при ее решении.

§ 2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ЛЮБОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема синусов. *В любом треугольнике отношение стороны к синусу противолежащего угла есть величина постоянная, равная диаметру описанной окружности, т. е.*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \qquad (1)$$

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай, когда угол A — острый. Опишем вокруг треугольника ABC окружность (рис. 75) и из вершины B (или C) проведем диаметр BD. Соединим точки D и C и рассмотрим треугольник BCD. В этом треугольнике $\angle BCD = 90°$ как угол, опирающийся на диаметр, а $\angle BDC = A$, так как эти вписанные в окружность углы опираются на одну и ту же дугу.

Из прямоугольного треугольника BCD следует, что неизвестный катет BC равен гипотенузе BD, умноженной на синус противолежащего угла BDC, т. е.

$$BC = BD \cdot \sin BDC \text{ или } \frac{a}{\sin A} = 2R,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказываются остальные две формулы для $B < 90°$ и $C < 90°$.

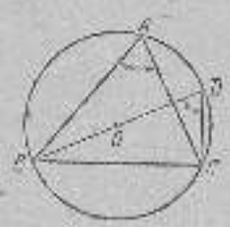


Рис. 76

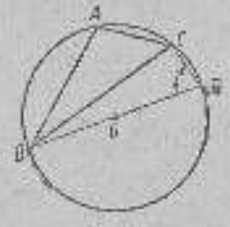


Рис. 77

2. Пусть теперь угол A — тупой. Описав вокруг треугольника ABC окружность (рис. 77), проведем из вершины B (или C) диаметр BD и рассмотрим прямоугольный треугольник BCD, где $\angle BCD = 90°$. Из этого треугольника имеем

$$BC = BD \cdot \sin \angle BDC,$$

но $\angle BAC + \angle BDC = 180°$, следовательно,

$$\sin \angle BDC = \sin(180° - \angle BAC) = \sin \angle BAC = \sin A,$$

а потому $BC = BD \cdot \sin A$ или $\frac{a}{\sin A} = 2R$

3. Если угол A — прямой, то в прямоугольном треугольнике ABC сторона a является гипотенузой и, следовательно, $a = 2R \sin 90°$, т. е. теорема остается верной и в этом случае.

Замечание. Теорема синусов устанавливает связь между радиусом описанного круга и основными элементами треугольника:

$$a = 2R \cdot \sin A, \quad b = 2R \cdot \sin B, \quad c = 2R \cdot \sin C.$$

Теорема косинусов. *Квадрат стороны любого треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без их удвоенного произведения на косинус угла, заключенного между ними, т. е.*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A. \qquad (2)$$

Доказательство. 1. Пусть угол A — острый. В треугольнике ABC проведем высоту BD (рис. 78) и рассмотрим полученный при этом прямоугольный треугольник BDC. В этом треугольнике

$$BC^2 = DC^2 + BD^2$$

или

$$a^2 = (b - b_1)^2 + h^2 \qquad (3)$$

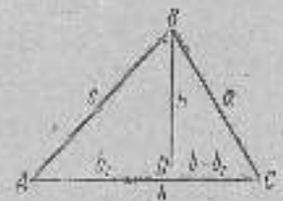


Рис. 78

(обозначения ясны из рис. 78).

Выразим теперь величины b_1 и h через основные элементы треугольника ABC. Рассмотрим треугольник ABD. Имеем

$$h = c \cdot \sin A, \qquad (**)$$

$$b_1 = c \cdot \cos A. \qquad (***)$$

Заменив h и b_1 в выражении (3) их значениями (**) и (***), найдем, что

$$a^2 = (b - c \cdot \cos A)^2 + c^2 \cdot \sin^2 A,$$

откуда после очевидных упрощений получим

$$a^2 = b^2 - 2bc \cdot \cos A + c^2(\cos^2 A + \sin^2 A) = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A,$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть угол A — тупой. Из вершины B опустим высоту BD на продолжение стороны AC (рис. 79).

Из прямоугольного треугольника BDC имеем

$$BC^2 = BD^2 + DC^2$$

или

$$a^2 = h^2 + (b + b_1)^2. \tag{4}$$

Величины h и b_1 выразим через основные элементы треугольника ABC.

Рассматривая треугольник ABD, имеем

$$h = c \cdot \sin(180^\circ - A) = c \cdot \sin A, \tag{5}$$

$$b_1 = c \cdot \cos(180^\circ - A) = -c \cdot \cos A. \tag{6}$$

Заменив h и b_1 в выражении (4) их значениями (5) и (6), после необходимых преобразований получим

$$a^2 = c^2 \sin^2 A + (b - c\cos A)^2 = c^2 - b^2 - 2bc \cdot \cos A,$$

что и требовалось доказать.

3. Пусть угол A — прямой. В этом случае $\cos A = 0$ и, следовательно,

$$b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2, \tag{7}$$

Но по теореме Пифагора

$$b^2 + c^2 = a^2. \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), мы получим

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A,$$

что и требовалось доказать.

Читатель, знакомый с элементами векторной алгебры, предлагаем другой вывод теоремы косинусов.

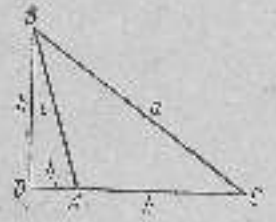


Рис. 79

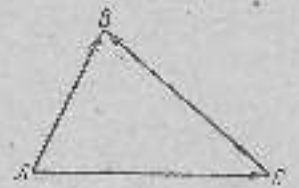


Рис. 80

Рассмотрим векторы AC, AB и CB (рис. 80). Очевидно, что

$$CB = AB - AC \text{ и } CB^2 = CB \cdot CB = (AB - AC)^2.$$

Здесь $CB \cdot CB$ — скалярное произведение вектора CB на себя. Согласно свойствам скалярного произведения

$$CB^2 = AB^2 - 2AB \cdot AC + AC^2. \tag{9}$$

Учитывая, что $CB^2 = a^2$, $AB^2 = c^2$, $AC^2 = b^2$ и $AB \cdot AC = c \cdot b \cdot \cos A$, перепишем равенство (9): $a^2 = c^2 - 2bc \cdot \cos A + b^2$, что и требовалось доказать.

Записав формулу (2) в виде

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

замечаем, что

1) если $a^2 = b^2 + c^2$, то $\cos A = 0$ и $A = 90^\circ$. Следовательно, если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник — прямоугольный;

2) если $a^2 < b^2 + c^2$, то $\cos A > 0$ и $A < 90^\circ$, т. е. в этом случае треугольник остроугольный;

3) если $a^2 > b^2 + c^2$, то $\cos A < 0$ и $A > 90^\circ$, т. е. в этом случае треугольник — тупоугольный.

Весьма полезной при решении задач является следующая формула, выражающая тангенс угла через стороны треугольника. Последняя в отличие от формулы «косинусов» приведена к виду, удобному для логарифмирования.

Теорема тангенсов. *В любом треугольнике*

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \tag{10}$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b - c)$ — его полупериметр.

Доказательство. Из теоремы косинусов вытекает, что

$$1 + \cos A = \frac{2bc - a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc} =$$

$$= \frac{2p \cdot 2(p-a)}{2bc} = \frac{2p(p-a)}{bc} \tag{11}$$

$$1 - \cos A = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) вытекает, что

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Радиус описанной в треугольник окружности может быть вычислен по формуле

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}. \tag{13}$$

Доказательство. Соединим центр вписанной окружности с вершинами треугольника ABC (рис. 81), в котором

$$OD = OE = OF = r.$$

Из треугольника AOD следует, что $r = OD = AD \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2}$. Для нахождения AD заметим, что $AD = AE$, $BF = BP$ и $FC = CD$ как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки. Поэтому

$$2p = a + b + c = 2AD + 2CF + 2BF = 2AD + 2(BF + FC) = 2AD + 2a.$$

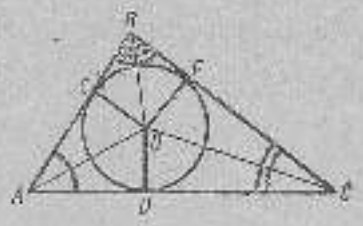


Рис. 81

Отсюда следует, что $AD = p - a$. Используя формулу (10), имеем

$$r = AD \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2} =$$

$$= (p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{(p-a)c}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{c}},$$

что и требовалось доказать.

Ниже будет дано выражение радиуса описанной окружности через стороны треугольника.

§ 3. ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РЕШЕНИЯ КОСОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Так же как и для прямоугольных треугольников существует четыре основные случая решения косоугольных треугольников.

Рассмотрим каждый из них.

Случай I. Даны стороны a, b и c. Найти углы A, B, C.

Решение. Задача имеет единственное решение при условии, что $a + b > c$, где $b \leqslant a < c$. Используя теорему тангенсов (10), находим

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Формула для проверки: $A + B + C = 180°$.

Заметим, что угол A можно найти и по теореме косинусов.

Случай II. Даны две стороны a и b и угол C, заключенный между ними. Найти сторону c и углы A и B.

Решение. 1. Используя теорему косинусов, находим сторону c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C}.$$

2. Используя теорему синусов, находим угол B. Пусть $a \geqslant b$. Тогда угол B острый и

$$\sin B = \frac{b \sin C}{c},\quad A = 180° - (B + C).$$

Формула для проверки: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.

Замечание. Угол A может быть острым или тупым, если $C < 90°$. Поэтому, если искать сначала угол A (по формуле $\sin A = \frac{a \sin C}{c}$), то без дополнительных исследований мы не сможем однозначно определить значение угла A по известному значению его синуса.

Случай III. Даны две стороны a и b и угол A, лежащий против одной из известных сторон. Найти сторону c и углы B и C.

Решение. 1. Используя теорему синусов, находим угол B, а затем C:

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a};\quad C = 180° - (B + A).$$

2. Вторично используя теорему синусов, находим сторону c:

$$c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}.$$

Формула для проверки: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$.

Исследование решения: 1) если $a > b$, то $a > b \sin A$ и $\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} < 1$. Задача имеет решение. Это решение единственно, так как угол B острый ($a > b$);

2) если $a < b$, то задача имеет решение при условии, что $b \cdot \sin A \leqslant a$. При этом имеют место два случая: если $a = b \cdot \sin A$, то $\sin B = 1$ и $B = 90°$. Задача имеет единственное решение.

Если $b \cdot \sin A < a$, то задача имеет два решения, так как для угла B нужно брать два значения (по известному значению его синуса).

Если $b \cdot \sin A > a$, то $\sin B > 1$ и задача не имеет решения;

3) если $a = b$, то $A < 90°$, $b \cdot \sin A < a$ и задача имеет единственное решение.

Случай IV. Даны сторона a и прилежащие к ней углы B и C. Найти стороны b, c и угол A.

Решение. 1. $A = 180° - (B + C)$.

2. Дважды применяя теорему синусов, находим b и c:

$$b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A},\quad c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}.$$

Формула для проверки: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$.

Предложенные способы решения каждого из этих случаев не являются единственными. Так, например, в случае I можно сначала найти r, а затем искать углы по формулам:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b},\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c},$$

непосредственно вытекающих из формул (10) и (13). Или можно искать $\cos A$ по теореме косинусов, а затем $\sin B$ по теореме синусов и т. д.

§ 4. ПОНЯТИЕ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

Всякое измерение представляет собой сравнение измеряемой величины с некоторой величиной той же размерности.

В частности, при измерении площадей измеряемые фигуры сравнивают с единичным квадратом, площадь которого принимают за единицу площади (1 квадратная единица, или 1 ед.^{2}).

Если каждую из двух смежных сторон единичного квадрата разделить на q равных частей (q — целое) и через точки деления провести прямые, перпендикулярные этим сторонам, то весь квадрат будет состоять из q^2 малых квадратов. Поэтому естественно считать, что площадь квадрата со стороной $\frac{1}{q}$ равна $\frac{1}{q^2}$ ед^2.

Подобным рассуждением получаем, что площадь квадрата со стороной $\frac{p}{q}$, где p и q — целые, равна $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ ед^2.

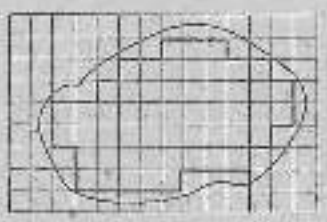


Рис. 82

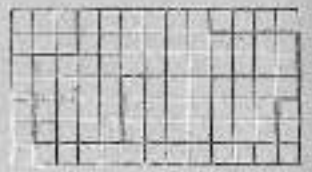


Рис. 83

Пусть F — плоская фигура. Наложим на нее квадратную сетку, состоящую из квадратов со стороной $\frac{1}{10^n}$ ($n=0, 1, 2, \ldots$). Будем называть такую сетку сеткой ранга n. Обозначим через S_n сумму площадей всех квадратов сетки ранга n, целиком лежащих внутри фигуры F (рис. 82). Если при некотором n эти квадраты целиком покрывают фигуру F (рис. 83), то говорят, что площадь фигуры F равна S_n ед^2. Если такого целого n не существует, то рассматривают последовательность

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots.$$

Легко заметить, что эта последовательность монотонно возрастает и ограничена. Следовательно, она имеет конечный предел, который и называется *площадью* фигуры F:

$$\text{пл. } F=\lim_{n\to\infty} S_n=S.$$

Отметим следующие свойства площади.

1. *Равные фигуры имеют равные площади.*
2. *Если фигура F составляет часть фигуры G, то*

$$\text{пл. } F\leqslant \text{пл. } G.$$

3. *Если фигура F с помощью ломаной разбивается на две фигуры F_1 и F_2, то* пл. $F=$пл. F_1+пл. F_2.

Доказательство свойств 2 и 3 непосредственно вытекает из определения площади и доказывается в более подробных курсах геометрии.

В согласии с данным определением площадей выведем формулы для вычисления площадей прямолинейных фигур.

§ 5. ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА И ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема 1. *Площадь прямоугольника равна произведению длин двух его смежных сторон (двух измерений), т. е.*

$$S=a\cdot b.$$

Доказательство. 1. Пусть a и b рациональны: $a=\frac{p}{q}$, $b=\frac{r}{q}$. Покроем прямоугольник сеткой из квадратов со стороной равной $\frac{1}{q}$ и такой, что две взаимно перпендикулярные прямые сетки совпадают с двумя смежными сторонами прямоугольника. Очевидно, что в прямоугольнике полностью уложится $p\cdot r$ таких квадратов. Так как площадь каждого квадрата равна $\frac{1}{q^2}$ ед.^{2}, то площадь всего прямоугольника равна произведению

$$p\cdot r\cdot\frac{1}{q^2}=\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{q}=a\cdot b\ (\text{ед.}^2).$$

2. Одно или оба числа a и b иррациональны. Обозначим через a_n и b_n десятичные приближения по недостатку чисел a и b соответственно (если b рационально, то $b_n=b$):

$$a_n=\frac{p_n}{10^n},\quad b_n=\frac{r_n}{10^n},\quad \lim_{n\to\infty} a_n=a,\quad \lim_{n\to\infty} b_n=b.$$

Строя квадратные сетки ранга n, так чтобы две из взаимно перпендикулярных линий совпадали с двумя смежными сторонами прямоугольника, имеем

$$S_1=a_1\cdot b_1,\ S_2=a_2\cdot b_2,\ \ldots,\ S_n=a_n\cdot b_n,\ \ldots\ (\text{см. } \S 4)$$

Отсюда вытекает, что площадь прямоугольника

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту:*

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h.$$

Доказательство. Допустим для простоты, что углы B и C — острые. Дополним данный треугольник до прямоугольника $BCDE$ с основанием a и высотой h, как это указано на рис. 84. Прямоугольник $BCDE$ составлен из четырех треугольников BEA, BAF, FAC и CAD, причем $\triangle BEA = \triangle BAF$, а $\triangle FAC = \triangle CAD$. Согласно свойствам 3 и 1

$$\text{пл. } BCDE = \text{пл. } BEA + \text{пл. } BAF + \text{пл. } FAC + \text{пл. } CAD =$$

$$= 2\,\text{пл. } BAF + 2\,\text{пл. } FAC = 2(\text{пл. } BAF + \text{пл. } FAC) = 2\,\text{пл. } ABC.$$

Следовательно, пл. $ABC = S = \frac{1}{2}$, пл. $BCDE = \frac{1}{2} a \cdot h$, что и требовалось доказать.

Предоставляем читателю получить доказательство в случае, когда A или C — тупой угол.

Используя теорему 2 о соотношении между элементами треугольника, получим еще несколько формул для вычисления его площади.

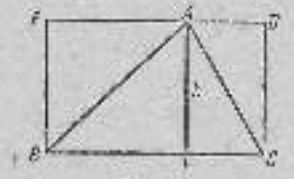


Рис. 84

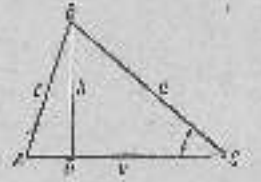


Рис. 85

1. *Площадь треугольника равна произведению двух его сторон на синус угла, заключенного между ними:*

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C. \qquad (14)$$

Доказательство. Рассмотрим 3 возможных случая.

1. Угол C — острый. Опустив из вершины B высоту $BD = h$, рассмотрим прямоугольный треугольник BDC (рис. 85). Имеем

$$BD = h = a \cdot \sin C.$$

Тогда

$$\text{пл. } \triangle ABC = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C.$$

2. Угол C — тупой (рис. 86). Опустив из вершины B высоту $BD = h$ на продолжение стороны AC, рассмотрим прямоугольный треугольник CBD. Имеем

$$BD = h = a \cdot \sin(180^\circ - C) = a \sin C.$$

Тогда

$$\text{пл. } \triangle ABC = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C.$$

3. Угол C — прямой. Тогда $\sin C = 1$ и $h = a$.

$$\text{пл. } \triangle ABC = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C.$$

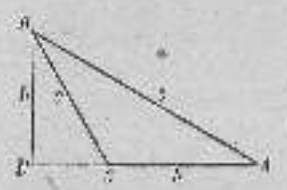


Рис. 86

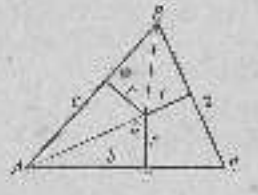


Рис. 87

II. *Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности*

$$\text{пл. } \triangle ABC = p \cdot r, \qquad (15)$$

где

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Доказательство. Пусть O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, r — ее радиус (рис. 87). Соединим центр O с вершинами A, B и C, получим треугольники AOC, BOC и AOB с высотами, равными r. Согласно третьему свойству площадей

$$\text{пл. } \triangle ABC = \text{пл. } \triangle AOC + \text{пл. } \triangle AOB + \text{пл. } \triangle BOC =$$

$$= \frac{1}{2} b \cdot r + \frac{1}{2} c \cdot r + \frac{1}{2} a \cdot r = \frac{r}{2}(a + b + c) = p \cdot r.$$

III. *Площадь треугольника равна произведению всех его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной окружности, т. е.*

$$\text{пл. } \triangle ABC = \frac{abc}{4R}. \qquad (16)$$

Доказательство. Согласно формуле (14)

$$\text{пл. } \triangle ABC = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C.$$

Исключим из последнего равенства $\sin C$. Так как

$$\sin C = \frac{c}{2R},$$

то

$$\text{пл. } \triangle ABC = \frac{abc}{4R}.$$

Теорема 3. (формула Герона). *Площадь треугольника со сторонами a, b, c и полупериметром p равна выражению*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (17)$$

Доказательство. Проводя то же построение, что в пункте (2), согласно формуле (15) имеем

$$S = \text{пл. } \triangle ABC = p \cdot r.$$

Выражая r через стороны треугольника a, b и c, получаем (см. § 4)

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Тогда

$$S = p \cdot r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Формулы (13) и (16) могут быть использованы для вычисления радиусов вписанной и описанной окружностей, если известны стороны треугольника. (Тогда его площадь можно вычислить по формуле Герона.)

§ 5. ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА И МНОГОУГОЛЬНИКА

Теорема 1. *Площадь любого четырехугольника* (рис. 88) *равна половине произведения его диагоналей на синус угла, заключенного между ними*, т. е.

$$\text{пл. } ABCD = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha. \qquad (18)$$

Доказательство. Четырехугольник $ABCD$ диагоналями AC и BD разбивается на четыре треугольника AOB, BOC, COD и AOD, причем

$$\text{пл. } AOB = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin\alpha, \quad \text{пл. } BOC = \frac{1}{2} BO \cdot CO \cdot \sin(180^\circ - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} BO \cdot CO \cdot \sin\alpha, \quad \text{пл. } COD = \frac{1}{2} CO \cdot DO \cdot \sin\alpha$$

и

$$\text{пл. } AOD = \frac{1}{2} AO \cdot DO \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} AO \cdot DO \cdot \sin\alpha.$$

Следовательно,

$$\text{пл. } ABCD = \frac{1}{2} \sin\alpha \,[(AO - CO)\, BO + DO\,(AO + CO)] =$$

$$= \frac{1}{2} \sin\alpha\,(AO + CO)\,(BO + DO).$$

Замечая, что $AO + CO = AC$ и $BO + DO = BD$, получаем требуемое

$$\text{пл. } ABCD = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha.$$

Следствие. *Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.*

Доказательство вытекает из формулы (18), если учесть, что угол $\alpha = 90^\circ$ и $\sin\alpha = 1$.

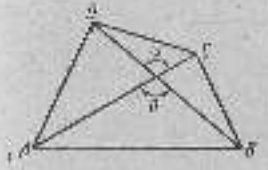


Рис. 88

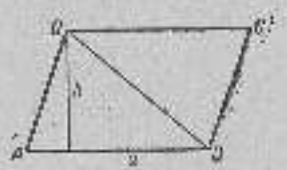


Рис. 89

Теорема 2. *Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.*

Доказательство. Диагональ BD (рис. 89) делит данный параллелограмм с основанием a и высотой h на два равных треугольника ABD и DBC. Следовательно,

$$\text{пл. } ABCD = 2 \text{ пл. } ABD = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = a \cdot h.$$

Следствие. *Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла, заключенного между ними.*

Доказательство следствия вытекает из равенства

$$\text{пл. } ABCD = 2 \text{ пл. } ABD,$$

где

$$\text{пл. } ABD = \frac{1}{2} AD \cdot AB \cdot \sin A.$$

Тогда

$$\text{пл. } ABCD = AD \cdot AB \cdot \sin A.$$

Теорема 3. *Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту* (рис. 90), т. е.

$$\text{пл. } ABCD = \frac{AB+CD}{2}\,h. \tag{19}$$

Доказательство. Проведем из вершины C отрезок CE, параллельный стороне AD (рис. 66). Он разобьет трапецию на параллелограмм $AECD$ и треугольник ECB с равными высотами h. Следовательно,

$$\text{пл. } ABCD = \text{пл. } AECD + \text{пл. } ECB = AE \cdot h + \frac{BE \cdot h}{2}$$

Но $AE = MK$, $BE = 2\,KN$, где MN — средняя линия трапеции, а KN — средняя линия треугольника. Поэтому

$$\text{пл. } ABCD = (MK + KN)\,h = MN \cdot h = \frac{AB+DC}{2} \cdot h.$$

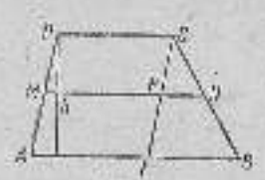


Рис. 90

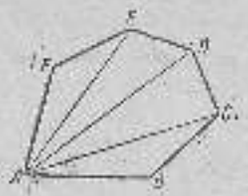


Рис. 91

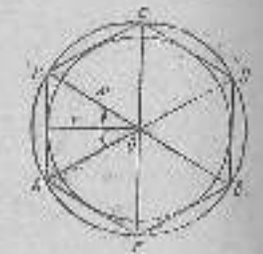


Рис. 92

Для определения площади произвольного многоугольника, например $ABCDEF$ (рис. 91), его разбивают на треугольники диагоналями, проведенными из одной вершины. Подсчитывая площади каждого из получившихся треугольников и суммируя их, получаем площадь многоугольника

$$\text{пл. } ABCDEF = \text{пл. } ABC + \text{пл. } ACD + \text{пл. } ADE + \text{пл. } AEF.$$

Если многоугольник правильный, то его целесообразно делить на треугольники другим способом, как это указано в следующей теореме.

Теорема 4. *Площадь правильного n-угольника равна его полупериметру p_n, умноженному на радиус вписанного круга* (рис. 92):

$$\text{пл. } ABCDEF = p_n \cdot r. \tag{20}$$

Доказательство. Соединив центр O многоугольника со всеми его вершинами, получим n равных треугольников AOB, BOC, ..., где n — число сторон данного многоугольника. Высоты этих треугольников равны радиусу вписанного круга, поэтому

$$\text{пл. } ABCDEF = n \cdot \frac{1}{2}\,AB \cdot r,$$

где $p_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot AB$ — полупериметр.

Следствие. *Площадь правильного многоугольника равна половине произведения числа сторон многоугольника на квадрат радиуса описанного круга и на* $\sin \frac{360^\circ}{n}$

$$\text{пл. } ABCDEF = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}. \tag{21}$$

Доказательство. Угол AOB равен $\frac{360^\circ}{n}$ (рис. 92). Поэтому

$$\text{пл. } AOB = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$

и

$$\text{пл. } ABCDEF = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

§ 7. ЗАДАЧИ

Помимо выведенных в этой главе соотношений между основными элементами треугольника полезно знать или уметь вывести формулы, выражающие высоты, медианы и биссектрисы треугольника через его стороны и, наоборот, стороны через медианы и высоты.

В следующих задачах предлагается вывод таких формул.

Задача 1. В треугольнике ABC даны три стороны a, b и c. Найти его медианы m_a, m_b и m_c* (рис. 93).

Решение. Для вычисления медианы $m_a = AD$ продолжим ее на отрезок $DE = AD$ и точку E соединим с вершинами B и C. Полученный четырехугольник $ABCD$ есть параллелограмм, ибо диагонали AE и BC делятся в точке пересечения пополам. Так как сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, т. е. $2c^2 + 2b^2 = a^2 + (2m_a)^2$, то отсюда следует, что

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}.$$

Аналогично получаем, что

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \text{ и } m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

* Всюду в дальнейшем индекс при вершине указывает, что соответствующая медиана проведена из вершины A и т. д.

Задача 2. В треугольнике ABC даны его медианы m_a, m_b и m_c. Найти его стороны a, b и c.

Решение. Для вычисления стороны a продолжим отрезок AO (рис. 94) на отрезок $DF = ED = \frac{m_a}{3}$ и точку F соединим с вершинами B и C. Полученный четырехугольник $BFCE$ есть параллелограмм, в котором стороны $BE = FC = \frac{2}{3} m_b$, $BF = EC = \frac{2}{3} m_c$, диагонали $BC = a$ и $EF = \frac{2}{3} m_a$. Поэтому

$$2 \cdot \frac{4}{9} m_b^2 + 2 \cdot \frac{4}{9} m_c^2 = a^2 + \frac{4}{9} m_a^2,$$

откуда следует, что

$$a = \frac{2}{3} \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}.$$

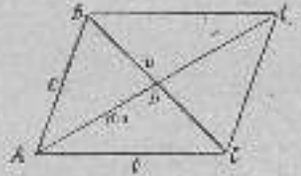


Рис. 93

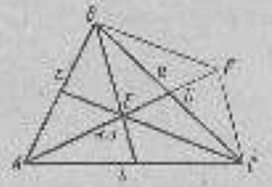


Рис. 94

Аналогично находим, что

$$b = \frac{2}{3} \sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2} \text{ и } c = \frac{2}{3} \sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}.$$

Задача 3. В треугольнике ABC даны три стороны a, b и c. Найти его высоты h_a, h_b и h_c.

Решение. Пусть S — площадь треугольника ABC. Тогда $S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ и $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Из этих равенств следует, что

$$\frac{1}{2} c \cdot h_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ и } h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Аналогично находим, что

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ и } h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Задача 4. В треугольнике ABC даны его высоты h_a, h_b и h_c. Найти его стороны a, b и c.

Решение. Пусть S — площадь треугольника ABC. Тогда

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c.$$

Следовательно,

$$a = \frac{2S}{h_a}, \quad b = \frac{2S}{h_b} \text{ и } c = \frac{2S}{h_c}. \qquad (*)$$

С другой стороны, по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right),$$

$$p-a = \frac{1}{2}(-a+b+c) = S\left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right),$$

$$p-b = \frac{1}{2}(a-b+c) = S\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right),$$

$$p-c = \frac{1}{2}(a+b-c) = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right).$$

Следовательно,

$$S = S^2 \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \times \left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)},$$

т. е.

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \times \left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}} = \frac{1}{q},$$

Теперь, используя равенства (*), находим a, b и c

$$a = \frac{2}{h_a \cdot q},$$

$$b = \frac{2}{h_b \cdot q},$$

$$c = \frac{2}{h_c \cdot q}.$$

Задача 5. Доказать, что квадрат биссектрисы равен произведению двух прилежащих сторон треугольника без произведения отрезков, на которые она делит противолежащую сторону (рис. 95), т. е.

$$l_c^2 = ab - a_1 b_1.$$

Решение. Рассмотрим треугольники ACD и DCB. Согласно теореме косинусов имеем

$$b_1^2 = b^2 + l_c^2 - 2bl_c \cdot \cos\alpha$$
$$a_1^2 = a^2 + l_c^2 - 2a \cdot l_c \cdot \cos\alpha, \text{ где } \alpha = \frac{C}{2}.$$

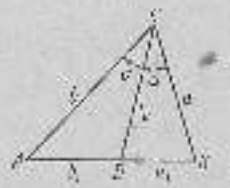


Рис. 95

Отсюда следует, что

$$\frac{a^2 + l_c^2 - a_1^2}{2a} = \frac{b^2 - l_c^2 - b_1^2}{2b}$$

и

$$l_c^2 (b - a) = ab(b - a) - (ab_1^2 - a_1^2 b). \qquad (*)$$

По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}, \text{ т. е. } ab_1 = a_1 b.$$

Тогда

$$ab_1^2 - a_1^2 b = a_1 b_1 \cdot b - a_1 b_1 a = a_1 b_1 (b - a)$$

и равенство (*) перепишется в виде

$$l_c^2 (b - a) = ab(b - a) - a_1 b_1 (b - a).$$

Таким образом,

$$l_c^2 = ab - a_1 b_1$$

при условии, что $b \neq a$. Если $b = a$, то $b_1 = a_1 = \frac{a}{2}$, $l_c^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$, что согласуется с доказанным равенством, если положить в нем $a = b$.

Задача 6. В треугольнике ABC даны стороны a, b и c. Найти его биссектрисы l_a, l_b и l_c.

Решение. Используя результат задачи 5, имеем

$$l_c^2 = ab - a_1 b_1, \text{ или } l_c^2 = ab - a_1 (c - a_1).$$

Выразим a_1 через стороны треугольника.

Из равенства $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{c - a_1}$ находим, что $a_1 = \frac{ac}{a + b}$. Тогда

$$l_c^2 = ab - \frac{ac}{a+b}\left(c - \frac{ac}{a+b}\right) = ab \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2},$$

т. е.

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

Аналогично находим, что

$$l_a = \frac{\sqrt{bc(a-b+c)(b+c-a)}}{b+c} \text{ и } l_b = \frac{\sqrt{ac(a+b+c)(a-b+c)}}{a+c}.$$

При решении многих задач приходится предварительно выводить некоторые новые соотношения, используя при этом формулы (1)—(20).

Приведем примеры таких дополнительных соотношений. Рекомендуем читателю запомнить их вывод, так как мы будем на них ссылаться при решении последующих задач.

Задача 7. Найти площадь треугольника, если известны его сторона и два прилежащих к ней угла.

Решение. Пусть известная сторона равна a, прилежащие углы B и C. Согласно формуле (14) имеем

$$\text{пл. } ABC = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B.$$

С другой стороны, по теореме синусов (см. (1))

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

откуда

$$c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} \text{ и пл. } ABC = \frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{2 \sin (B + C)}. \qquad (22)$$

Задача 8. Доказать, что в любом треугольнике радиус вписанного круга равен произведению любой стороны на синусы прилежащих половинных углов, деленному на синус противолежащего половинного угла, т. е.

$$r = \frac{a \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}. \qquad (23)$$

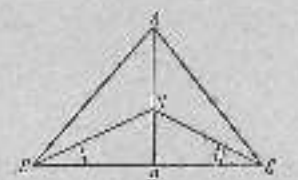


Рис. 96

Решение. Пусть O — центр вписанного круга, r — его радиус, AO, BO и CO — биссектрисы углов A, B и C (рис. 96). Из прямоугольных треугольников BOD и DOC имеем

$$BD = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{B}{2}, \quad DC = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

Складывая эти равенства и замечая, что $BD + DC = a$, получаем

$$a - r\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right) = \frac{r \cdot \sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}} = \frac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}}.$$

Таким образом,

$$r = \frac{a \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Задача 9. Доказать, что в любом треугольнике

$$\sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}}. \qquad (24)$$

Решение. $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$. Выражая $\cos A$ через стороны треугольника, получаем

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

и

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Итак, $\sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}}$, причем равенство достигается при $b = c$, т. е. в случае равнобедренного треугольника.

Задача 10. Доказать, что площадь описанного четырехугольника равна $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c, d — стороны четырехугольника, а $2p$ — его периметр.

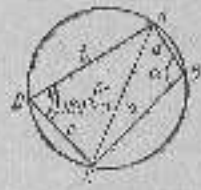


Рис. 97

Решение. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна сумме площадей треугольников ABC и ADC, в которых угол B обозначен через α и тогда угол $D = 180° - \alpha$ (рис. 97). Согласно формуле (14) находим

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin(180° - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\alpha \qquad (*)$$

(обозначения ясны из рис. 97). Выразим $\sin\alpha$ через стороны a, b, c, d. По теореме косинусов из треугольников ABC и ADC имеем

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

$$AC^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha.$$

Приравнивая правые части этих равенств, получаем

$$a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha = c^2 + d^2 + 2cd\cdot\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(cd+ab)}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{4(cd+ab)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2}}{2(cd+ab)}.$$

Подставляя найденное значение $\sin\alpha$ в равенство (*), находим

$$\text{пл. } ABCD = \frac{1}{4}\sqrt{4(cd+ab)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2} \qquad (**)$$

Преобразуем подкоренное выражение, которое является разностью квадратов. Имеем

$$4(cd+ab)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = (2cd+2ab+a^2+b^2-c^2-d^2)\times$$

$$\times(2cd+2ab-a^2-b^2+c^2+d^2) = [(a+b)^2-(c-d)^2]\times$$

$$\times[(c+d)^2-(a-b)^2] = (a+b+c-d)(a+b-c+d)\times$$

$$(c+d+a-b)(c+d-a+b)$$

Замечая, что $a+b+c-d = a+b+c+d-2d = 2(p-d)$ и аналогично

$$(a+b-c+d) = 2(p-c),\ a-b+c+d = 2(p-b)$$

и

$$(c+d-a+b) = 2(p-a)$$

и возвращаясь к равенству (**), окончательно получаем

$$\text{пл. } ABCD = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \qquad (25)$$

В частности, заметим, что если в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, т. е.

$$a + c = b + d,$$

то формула (25) упрощается. В этом случае

$$p - a = \frac{a+b+c+d}{2} - a = a + c - a - c,$$

$$p - b = \frac{a+b+c+d}{2} - b - d + b - b = d,$$

$$p - c = \frac{a+b+c+d}{2} - c = c + a - c - a,$$

$$p - d = \frac{a+b+c+d}{2} - d - b + d - d = b$$

и

$$S = \sqrt{abcd}.$$

Приведем несколько задач, при решении которых используются результаты задач 7—10.

Задача 11. Доказать, что в любом треугольнике отношение радиуса вписанной к радиусу описанной окружности не превосходит $\frac{1}{2}$.

Решение. Согласно формулам (23) и (1)

$$r = \frac{a \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \quad \text{и} \quad R = \frac{a}{2\sin A},$$

где r — радиус вписанного, а R — радиус описанного кругов. Следовательно,

$$\frac{r}{R} = \frac{2a \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \cdot \sin A}{a \cdot \cos\frac{A}{2}} = 4\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}.$$

Применяя во вписанное неравенство (24), окончательно получаем

$$\frac{r}{R} \leqslant 4 \cdot \frac{a}{2\sqrt{bc}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{ac}} \cdot \frac{c}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{2}.$$

Итак, $\frac{r}{R} \leqslant \frac{1}{2}$, причем равенство достигается в случае, когда $a = b = c$.

Задача 12. Определить углы прямоугольного треугольника, в котором отношение радиуса вписанного к радиусу описанного круга имеет наибольшее значение.

Решение. Вновь используя формулу (23), имеем

$$r = \frac{c \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},$$

где $C = 90°$ и $\cos\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому учитывая, что $R = \frac{c}{2}$, получаем

$$\frac{r}{R} = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right] =$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos 45°\right] = \sqrt{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Отсюда ясно, что отношение $\frac{r}{R}$ принимает наибольшее значение, когда $\cos\frac{A-B}{2} = 1$, что возможно при $A = B = 45°$. При этом отношение

$$\frac{r}{R} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - 1.$$

Задача 13. Доказать, что в любом треугольнике

$$\frac{d_1 \cdot d_2 \cdot d_3}{r} = \frac{abc}{p},$$

где r — радиус вписанного круга; d_1, d_2 и d_3 — расстояния от центра этого круга до вершин треугольника; a, b и c — стороны треугольника и p — его полупериметр.

Решение. Из центра O вписанного круга опустим перпендикуляры $OD = OF = OE = r$ на стороны треугольника (рис. 98) и рассмотрим образовавшиеся при этом построении треугольники AOD, OEB и COF. В каждом из них выразим отрезки d_1, d_2 и d_3 через радиус r. Имеем

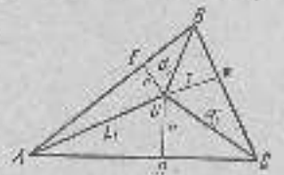


Рис. 98

$$d_1 = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}, \quad d_2 = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}, \quad d_3 = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Перемножая эти равенства, получаем

$$d_1 d_2 d_3 = \frac{r^3}{\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}}. \qquad (*)$$

С другой стороны, согласно формуле (23)

$$r = \frac{a\sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \quad r = \frac{b \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}} \quad \text{и} \quad r = \frac{c \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

и

$$r^3 = \frac{abc\sin^2\frac{A}{2} \cdot \sin^2\frac{B}{2} \cdot \sin^2\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}}. \qquad (**)$$

Тогда из равенств (*) и (**) следует, что

$$d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 = abc \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2}. \qquad (***)$$

Выражая $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ по формуле (10), находим, что

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^4}} = \frac{S}{p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{r}{p}$$

(мы использовали формулу Герона и формулу (15)). Возвращаясь к равенству (***) и учитывая последний результат, получаем

$$d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 = \frac{abc \cdot r}{p}$$

или

$$\frac{d_1 d_2 d_3}{r} = \frac{abc}{p}.$$

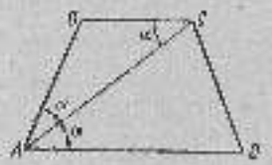


Рис. 99

Задача 14. В равнобочной трапеции верхнее основание в два раза меньше нижнего и диагональ делит угол при нижнем основании пополам. Найти стороны трапеции, зная, что ее площадь равна S.

Решение. Равнобочную трапецию можно вписать в окружность, следовательно, для ее площади справедлива формула (25).

Обозначим основание BC через x, а равные углы CAD и CAB через α (рис. 99). Так как $\angle DAC = \angle BCA = \alpha$, то треугольник ABC равнобедренный и $AB = BC = x$. Тогда

$$2p = AD + 2AB + BC = 5x, \quad p = \frac{5}{2}x, \quad p - AD = \frac{1}{2}x,$$

$$p - AB = p - BC = p - CD = \frac{3x}{2} \text{ и } S = \sqrt{\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{3}{2}x\right)^3} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3^3}}, \quad AD = \frac{4\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}, \quad AB = BC = CD = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}.$$

Рассмотрим несколько задач на решение треугольников, когда последние заданы не основными элементами, а величинами, зависящими от них, или другими элементами.

Будем считать задачу этого типа решенной, если она сведена к одному из основных случаев.

Задача 15. В треугольнике ABC даны угол A, противолежащая ему сторона a и отношение двух других сторон $\frac{b}{c} = k \neq 1$. Найти b, c и угол B.

Решение. 1. Из теоремы синусов $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ следует, что $\frac{\sin B}{\sin C} = k$.

Таким образом, для определения углов треугольника мы имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} \sin B = k \cdot \sin C, \\ B + C = 180^\circ - A, \end{cases}$$

решая которую, находим

$$\sin B = k \sin(A + B),$$

$$\sin B = k \sin A \cdot \cos B + k \cos A \cdot \sin B,$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{k \sin A}{1 - k \cos A}$$

или

$$\sin B = \frac{k \sin A}{\sqrt{1 - 2k \cos A + k^2}}$$

($1 - 2k \cos A + k^2 > 0$ для любых $A \neq 0$ и $k \neq 1$).

2. Далее используя теорему синусов, находим b и c

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \text{ и } c = \frac{b}{k}$$

или

$$b = \frac{ak \sin A}{\sqrt{1 - 2k \cos A + k^2} \cdot \sin A} = \frac{ak}{\sqrt{1 - 2k \cos A + k^2}},$$

$$c = \frac{a}{\sqrt{1 - 2k \cos A + k^2}}.$$

Задача 16. В прямоугольном треугольнике даны высота h и биссектриса l, проведенные из вершины прямого угла. Найти стороны и углы треугольника.

Решение. Пусть CE — высота, CD — биссектриса и угол $DCE = \alpha$ (рис. 100). Из прямоугольного треугольника ECD ($E = 90^\circ$) находим угол α:

$$\cos \alpha = \frac{CE}{CD} = \frac{h}{l}.$$

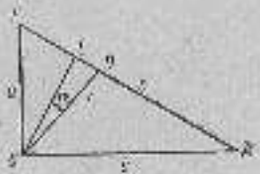


Рис. 100

Теперь нам известны угол $BCE = \frac{\pi}{4} - \alpha$ и $ACE = \frac{\pi}{4} + \alpha$, т. е. и в прямоугольных треугольниках CBE и ACE по два основных элемента. Решая эти треугольники, находим

$$BC = \frac{CE}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{2h}{\sqrt{2}(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{\sqrt{2}h}{h + \sqrt{l^2 - h^2}},$$

$$AC=\frac{CE}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{2h}{\frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)}=\frac{\sqrt{2}\,h}{h-\sqrt{l^2-h^2}}$$

$\left(\text{заметим, что } \alpha<\frac{\pi}{4},\ \text{т. е. } \cos\alpha>\sin\alpha;\ \text{поэтому } h>\sqrt{l^2-h^2}\right)$.

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC^2\left[\left(\frac{1}{h-\sqrt{l^2-h^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{h+\sqrt{l^2-h^2}}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{4l^2h^2}{(2l^2-h^2)^2},\quad AB=\frac{2lh}{2l^2-h^2}.$$

Задача 17. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B. Стороны $AB=c$, $AC=b$. Определить сторону BC и углы треугольника.

Решение. Обозначая углы B и A через α и 2α, а сторону BC через a, согласно теореме синусов имеем

$$\frac{a}{\sin 2\alpha}=\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin 3\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\quad\text{или}\quad a=2b\cdot\cos\alpha$$

и

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}\quad\text{или}\quad\frac{b}{c}=\frac{1}{4\cos^2\alpha-1},\ \text{т. е. } \cos^2\alpha=\frac{b+c}{4c}.$$

Подставляя найденное значение $\cos\alpha$ в формулу, определяющую a, получаем

$$a=2b\cdot\cos\alpha=2b\sqrt{\frac{b+c}{4c}}=\sqrt{b(b+c)}.$$

Угол B находим из равенства

$$\cos B=\cos\alpha=\sqrt{\frac{b+c}{4c}}\quad(\alpha<90^\circ),$$

т. е.

$$B=\arccos\sqrt{\frac{b+c}{4c}}\quad\text{и}\quad A=2\arccos\sqrt{\frac{b+c}{4c}}.$$

Задача имеет решение, если $c<3b$.

Задача 18. В треугольнике ABC даны площадь S, радиус вписанного круга r и угол A. Найти стороны и углы треугольника.

Решение. Пусть O — центр вписанной окружности, $OD\perp AC$, причем $OD=r$ (рис. 101).

1. Из треугольника AOD имеем

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{OD}{AD}=\frac{r}{p-a}\quad\text{или}\quad p-a=r\cdot\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

($AD+BE+EC=p$ или $AD+a=p$). С другой стороны, из формулы $S=p\cdot r$ следует, что

$$p=\frac{S}{r}.$$

Поэтому

$$a=p-r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{S}{r}-r\cdot\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{S-r^2\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{r}.$$

2. Найдем углы треугольника. Из формулы (22)

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$$

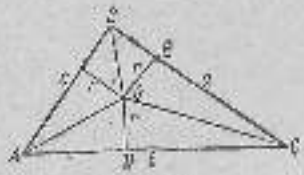


Рис. 101

имеем

$$2S\cdot\sin A=\frac{1}{2}a^2\left[\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right]$$

или

$$4S\sin A=a^2\cos\frac{B-C}{2}-a^2\sin\frac{A}{2}.$$

Решая это уравнение относительно $\cos\frac{B-C}{2}$, получаем

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{4S\sin A+a^2\sin\frac{A}{2}}{a^2},$$

т. е.

$$B-C=2\arccos\frac{4S\sin A+a^2\sin\frac{A}{2}}{a^2}.$$

Так как $B+C=180^\circ-A$, то окончательно находим

$$B=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}+\arccos\frac{4S\sin A+a^2\sin\frac{A}{2}}{a^2}$$

и

$$C = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} - \arccos \frac{4S \cdot \sin A + a^2 \sin \frac{A}{2}}{a^2}.$$

Теперь в треугольнике ABC известны сторона и углы, т. е. задача сведена к основному случаю решения треугольника. Задача имеет единственное решение, если $S > r^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$.

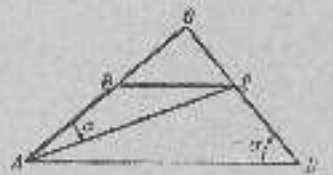


Рис. 102

При вычислении площадей из нескольких выведенных ранее формул нужно выбрать ту, которая в условиях данной задачи приведет к более короткому решению.

Задача 19. Непараллельные стороны трапеции перпендикулярны друг к другу. Одна из них, равная a, составляет с диагональю угол α, а другая наклонена под тем же углом к основанию. Вычислить площадь трапеции (рис. 102).

Решение. Продолжим боковые стороны до пересечения в точке O. Так как угол $BOC = 90°$, то

$$\angle OAD = 90° - \alpha, \quad \angle CAD = 90° - 2\alpha = \angle ACB,$$
$$\angle ACD = 90° - \alpha \quad \text{и} \quad \angle ABC = 90° + \alpha.$$

Из треугольника ABC, в котором известна сторона $AB = a$ и все углы, находим AC:

$$\frac{AC}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{AB}{\sin(90° - 2\alpha)} \quad \text{и} \quad AC = \frac{a \cos \alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Мы имеем все данные для вычисления площадей треугольников ABC и ACD (см. формулу 22). Поэтому

$$\text{пл. } ABCD = \text{пл. } ABC + \text{пл. } ACD = \frac{1}{2} AB^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin(90° + \alpha)}{\sin(90° - 2\alpha)} +$$
$$+ \frac{1}{2} AC^2 \cdot \frac{\sin(90° - 2\alpha) \cdot \sin(90° + \alpha)}{\sin \alpha} - \frac{a^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cos 2\alpha} +$$
$$+ \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{2 \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha} = \frac{a^2 \cos \alpha}{2 \cos 2\alpha} \left(\sin \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{a^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2 \cos 2\alpha}.$$

Задача 20. Углы треугольника, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью φ. Найти площадь треугольника, если его периметр равен $2p$.

Решение. Обозначая углы треугольника A, B и C через α, $\alpha + \varphi$ и $\alpha + 2\varphi$, находим, что $3(\alpha + \varphi) = 180°$, т. е. $B = \alpha + \varphi = 60°$. Площадь треугольника будем считать по формуле $S = p \cdot r$, где радиус вписанного круга найдем из равенства

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p - b},$$

а сторону b — по теореме синусов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{a}{\sin(\alpha + 2\varphi)}.$$

По свойству равных отношений имеем

$$\frac{a + b + a}{\sin \alpha + \sin(\alpha + \varphi) + \sin(\alpha + 2\varphi)} = \frac{b}{\sin(\alpha + \varphi)},$$

или

$$\frac{2p}{\frac{\sqrt{3}}{2}(2\cos \varphi + 1)} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

откуда

$$b = \frac{2p}{2\cos \varphi + 1}.$$

Тогда

$$p - b = \frac{p(2\cos \varphi - 1)}{2\cos \varphi + 1}, \quad r = (p - b) \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{p(2\cos \varphi - 1)}{\sqrt{3}(2\cos \varphi + 1)}$$

и

$$S = p \cdot r = \frac{p^2(2\cos \varphi - 1)}{\sqrt{3}(2\cos \varphi + 1)}.$$

Задача имеет решение при $0 < \varphi < 60°$ (тогда $2\cos \varphi - 1 > 0$).

Задача 21. Найти площадь треугольника, в котором задана медиана, проведенная из вершины C, и два прилежащих угла α и β.

Решение. Задача будет решена, если мы найдем хотя бы одну сторону, например $AB = c$. Тогда

$$\text{пл. } ABC = \frac{AB^2 \cdot \sin A \cdot \sin B}{2 \sin C} = \frac{c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}. \qquad (*)$$

Чтобы найти сторону AB, выразим через нее стороны AC и BC и воспользуемся соотношением между тремя сторонами треугольника и медианой. Имеем

$$AC = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad CB = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$2(AC^2 + CB^2) - AB^2 = 4m_c^2, \text{ или } \frac{2c^2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} - c^2 = 4m_c^2.$$

Решая последнее уравнение относительно c, находим

$$c^2 = \frac{4m_a^2 \sin^2(\alpha-\beta)}{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta - \sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Используя формулу (*), получаем

$$\text{пл. } ABC = \frac{2m_a^2 \cdot \sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta - \sin^2(\alpha+\beta)}.$$

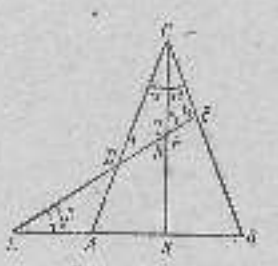


Рис. 103

Предоставляем читателю убедиться, что задача имеет решение для любых α и β при условии, что $\alpha+\beta<180°$.

Задача 22. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 2α. Прямая, проходящая через середину высоты и образующая с продолжением основания угол β, делит треугольник на две части. Найти отношение площадей этих частей.

Решение. Выразим площади треугольника DCE и четырехугольника $ADEB$ через высоту h и углы α и β (рис. 103). Легко подсчитать, что

$$\angle CDF = \angle 1 = 90° - (\alpha+\beta), \quad \angle DFC = \angle 2 = 90° + \beta,$$

$$\angle CFE = \angle 3 = 90° - \beta \quad \text{и} \quad \angle CEF = \angle 4 = 90° - (\alpha-\beta).$$

Для подсчета площади треугольника воспользуемся формулой (22)

$$1.\ \text{пл. } CDE = S_1 = \text{пл. } DCF + \text{пл. } CFE = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^2\left(\frac{\sin\alpha\cdot\sin\angle 2}{\sin\angle 1} + \frac{\sin\alpha\cdot\sin\angle 3}{\sin\angle 4}\right) = \frac{h^2}{8}\left(\frac{\sin\alpha\cdot\sin(90°+\beta)}{\sin(90°-\alpha-\beta)} + \frac{\sin\alpha\cdot\sin(90°-\beta)}{\sin(90°-\alpha+\beta)}\right) =$$

$$= \frac{h^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\beta}{4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

2. пл. $ADEB = S_2 =$ пл. $ABC -$ пл. $DCE =$ пл. $ABC - S_1 = AK\cdot CK - S_1 = h^2\cdot\operatorname{tg}\alpha - S_1$.

Следовательно,

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{h^2\operatorname{tg}\alpha}{S_1} - 1 = \frac{4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\beta} - 1 =$$

$$= \frac{4\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta - 4\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta} - 1 = 3 - 4\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta,$$

$$\left(3 - 4\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta > 0, \text{ так как } \operatorname{tg}\alpha = \frac{AK}{h},\right.$$

$$\left.\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{2LK} \text{ и } \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = \frac{AK}{2LK} < \frac{1}{2}\right).$$

При решении целого ряда геометрических задач, условия которых как будто бы не содержат ничего, связанного с тригонометрией, полезно применять аппарат тригонометрии. С этой целью вводят вспомогательные углы, которые затем из решения исключаются. Рассмотрим несколько таких задач.

Задача 23. Доказать, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон есть величина постоянная для данного треугольника.

Решение. Пусть M — произвольная точка основания, MD и ME — ее расстояния до боковых сторон (рис. 104). Введем угол $\alpha = \angle BAC = \angle BCA$. Тогда из прямоугольных треугольников ADM ($MD \perp AB$) и CMF ($ME \perp BC$) находим

$$DM = AM\cdot\sin\alpha, \quad ME = MC\cdot\sin\alpha$$

и

$$DM + ME = AM\cdot\sin\alpha + MC\cdot\sin\alpha = (AM + MC)\cdot\sin\alpha = AC\cdot\sin\alpha,$$

а это есть величина постоянная для данного треугольника.

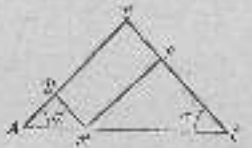


Рис. 104

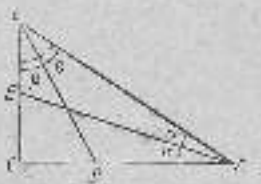


Рис. 105

Задача 24. Доказать, что в прямоугольном треугольнике с прямым углом C биссектрисы из вершин A и B связаны с его сторонами соотношением

$$2l_a\sqrt{c+b} = b\cdot l_b\sqrt{c-a}$$

Решение. Введем углы $\alpha = \angle CAE = \angle EAB$ и $\beta = \angle CBD = \angle ABD$. Выразим стороны $l_a = AE$ и $l_b = BD$ через катеты a и b и углы α и β (рис. 105). Из треугольника AEC и BCD находим

$$l_a = \frac{b}{\cos\alpha}, \quad l_b = \frac{a}{\cos\beta}.$$

Следовательно

$$al_a\cos\alpha = bl_b\cos\beta. \qquad (*)$$

Так как

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1+\cos 2\beta}} = \sqrt{\frac{1+\frac{a}{c}}{1+\frac{b}{c}}} = \sqrt{\frac{c+a}{c+b}},$$

то согласно равенству (*) имеем

$$a \cdot l_a = b \cdot l_b \cdot \frac{\sqrt{c+a}}{\sqrt{c+b}}, \text{ или } a \cdot l_a \sqrt{c+b} = b l_b \sqrt{c+a}.$$

Задача 25. Доказать, что расстояния от любой точки окружности до вершин правильного вписанного в нее треугольника удовлетворяют соотношению

$$MA = MB + MC,$$

где M — точка окружности, а A — наиболее удаленная от точки M вершина (рис. 106).

Решение. Обозначим через α равные углы MBC и MAC (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу $M\breve{n}C$).

Рассмотрим треугольники ABM и MAC, в которых

$\angle ABM = 180^\circ - \angle MCA$. Согласно теореме синусов имеем

$$\frac{AM}{\sin ABM} = \frac{BM}{\sin BAM} \text{ или } \frac{AM}{\sin(60^\circ+\alpha)} = \frac{BM}{\sin(60^\circ-\alpha)}$$

и

$$\frac{AM}{\sin(180^\circ - ABM)} = \frac{MC}{\sin MAC} \text{ или } \frac{AM}{\sin(60^\circ+\alpha)} = \frac{MC}{\sin\alpha}.$$

Тогда

$$\frac{AM}{\sin(60^\circ+\alpha)} = \frac{BM}{\sin(60^\circ-\alpha)} = \frac{MC}{\sin\alpha}$$

и по свойству равных отношений отсюда следует, что

$$\frac{AM}{\sin(60^\circ+\alpha)} = \frac{BM+MC}{\sin(60^\circ-\alpha)+\sin\alpha}. \qquad (*)$$

Так как $\sin(60^\circ-\alpha)+\sin\alpha = 2\sin 30^\circ \cdot \cos(30^\circ-\alpha) = \sin(60^\circ+\alpha)$, то из равенства (*) вытекает искомое, т. е.

$$AM = BM + MC.$$

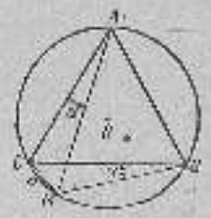


Рис. 106

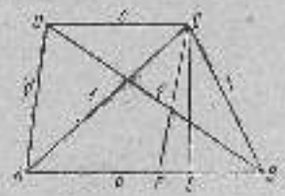


Рис. 107

Задача 26. Доказать, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна удвоенному произведению ее оснований, сложенному с суммой квадратов боковых сторон, т. е.

$$AC^2 + BD^2 = 2AB \cdot CD + BC^2 + AD^2$$

(рис. 107).

Решение. Обозначим $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=l$ и $DB=q$. Рассмотрим треугольники ADB и ACB. Согласно теореме косинусов имеем

$$DB^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A$$

и

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B,$$

или в наших обозначениях

$$q^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos A \quad \text{и} \quad l^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos B.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$l^2 + q^2 = 2a^2 + b^2 + d^2 - 2a(d\cos A + b\cos B). \qquad (*)$$

Из вершины C проведем прямую $CF \parallel AD$. В образовавшемся треугольнике FCB стороны $FB=a-c$, $CF=d$, $CB=b$. Высота CE делит основание на отрезки $FE=d\cos A$ и $BE=b\cos B$.

Следовательно, $FB = FE + BE = d\cos A + b\cos B$ или $a-c = d\cos A + b\cos B$. Таким образом, выражение, стоящее в скобках в равенстве (*), есть $a-c$. Поэтому имеем

$$l^2 + q^2 = 2a^2 + b^2 + d^2 - 2a(a-c)$$

или

$$l^2 + q^2 = b^2 + d^2 + 2ac,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что используя методы тригонометрии, можно упростить доказательство некоторых теорем, рассматриваемых в курсе геометрии. Приведем, например, доказательство теоремы о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника.

Теорема. *Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам*, т. е.

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}. \qquad \text{(рис. 108)}$$

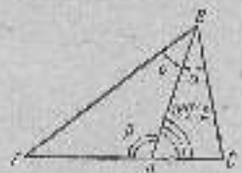


Рис. 108

Доказательство. Согласно теореме синусов имеем

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\beta} \text{ или } \frac{AD}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad (\triangle ABD)$$

то $$\frac{DC}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin[\pi-(\alpha+\beta)]} \text{ или } \frac{DC}{BC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad (\triangle DBC)$$

Отсюда следует, что $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$ или $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, что и требовалось доказать.

Во многих случаях вместо «вспомогательных углов» целесообразно вводить площадь, используя при этом различные ее выражения через элементы треугольника. Так, например, решались задачи 3 и 4. Приведем еще две задачи этого типа.

Задача 27. Даны стороны b и c треугольника. Найти третью сторону, если она равна высоте, на нее опущенной. При каких соотношениях между b и c решение существует?

Решение. Пусть S — площадь треугольника ABC и x — его третья сторона. Вычисляя площадь по формуле Герона, имеем

$$S = \sqrt{\frac{b+c+x}{2}\cdot\frac{b+c-x}{2}\cdot\frac{b+x-c}{2}\cdot\frac{x-b+c}{2}} = \sqrt{\frac{[(b+c)^2-x^2]}{4}\cdot\frac{[x^2-(b-c)^2]}{4}}. \qquad (*)$$

С другой стороны,

$$S = \frac{1}{2}x\cdot x = \frac{1}{2}x^2. \qquad (**)$$

Сравнивая правые части равенств (*) и (**), получаем уравнение для определения x:

$$[(b+c)^2-x^2][x^2-(b-c)^2] = 4x^4$$

или

$$3x^4 - 2x^2(b^2+c^2) + (b^2-c^2)^2 = 0.$$

Решая это биквадратное уравнение, находим

$$x = \sqrt{\frac{b^2+c^2+\sqrt{(b^2+c^2)^2-3(b^2-c^2)^2}}{3}}.$$

Задача имеет решение, если $(b^2+c^2)^2-3(b^2-c^2)^2 \geqslant 0$. Предположим, что $b \geqslant c$ (при $b<c$ во второй скобке нужно знаки на обратные). Тогда $b^2-c^2 \geqslant 0$ и данное неравенство равносильно неравенству

$$b^2+c^2 \geqslant \sqrt{3}(b^2-c^2)$$

или

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1 \geqslant \sqrt{3}\left(\frac{b}{c}\right) - \sqrt{3},$$

из которого получаем, что

$$\frac{b}{c} \leqslant \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Учитывая наше предположение, что $b \geqslant c$, окончательно имеем $1 \leqslant \frac{b}{c} \leqslant \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Если $b=c$, то $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sqrt{b^2+c^2} = \frac{2b}{\sqrt{3}}$,

если $b = \frac{c(\sqrt{3}+1)}{2}$, то $x = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{3}}$.

В этих случаях задача имеет единственное решение. При $1 \leqslant \frac{b}{c} < \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ задача имеет два решения.

Итак, $1 \leqslant \frac{b}{c} \leqslant \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Задача 28. Точка M лежит внутри треугольника на расстоянии x, y и z от его сторон BC, AC и AB (рис. 109). Доказать, что $\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$, где h_a, h_b и h_c — высоты треугольника, проведенные из вершин A, B и C соответственно.

Доказательство. Соединив точку M с вершинами A, B и C, получаем 3 треугольника BMC, AMC и ABM, высоты которых равны x, y и z соответственно. Обозначая через S площадь треугольника ABC, имеем

$$S = \frac{1}{2}(ax+by+cz). \qquad (*)$$

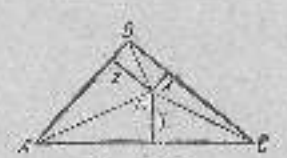


Рис. 109

С другой стороны,

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \quad S = \frac{1}{2}bh_b, \quad S = \frac{1}{2}ch_c. \qquad (**)$$

Комбинируя равенства (*) и (**), находим

$$1 = \frac{ax}{ah_a} + \frac{by}{bh_b} + \frac{cz}{ch_c},$$

т. е.

$$1 = \frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c}.$$

ГЛАВА XV
ГРАФИКИ

§ 1. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ С ПОМОЩЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В предыдущих главах были построены графики функций

$$y = kx + b,\quad y = \frac{ax+b}{cx+d},\quad y = ax^2 + bx + c,\quad y = x^n,\quad y = \sqrt[n]{x},$$

$$y = a^x,\quad y = \log_a x,\quad y = A\sin(\omega x + \varphi),\quad y = A\cos(\omega x + \varphi),$$

$$y = \arcsin x,\quad y = \arccos x,\quad y = \operatorname{arctg} x,\quad y = \operatorname{arcctg} x.$$

В § 8 главы VII были рассмотрены некоторые простейшие преобразования графиков и правила, по которым из графика функции $y=f(x)$ можно получить графики следующих функций:

I. $y = f(x+a)$ (переход от функции $y=f(x)$ к функции $y = f(x+a)$ условимся в дальнейшем обозначать символом $x \dot{+} x+a$),

II. $y = f(x) + b$ или $y - b = f(x)$ (коротко: $y \dot{+} y - b$),

III. $y = f(x+a) + b$ или $y - b = f(x+a)$ (коротко: $x \dot{+} x + a$, $y \dot{+} y - b$),

IV. $y = f(ax)$, где $a > 0$ (коротко: $x \dot{+} ax$),

V. $y = bf(x)$, или $\frac{y}{b} = f(x)$ $\left(\text{коротко: } y \dot{+} \frac{y}{b}\right)$,

VI. $y = f(-x)$ (коротко: $x \dot{+} -x$),

VII. $y = -f(x)$ или $-y = f(x)$ (коротко: $y \dot{+} -y$).

К этим правилам добавим еще два правила.

VIII. **Правило** получения графика функции $y = f(|x|)$ по графику функции $y = f(x)$ (коротко: $x \dot{+} |x|$).

Запись $f(|x|)$ означает, что в выражении $f(x)$ буква x, в него входящая, заменяется на $|x|$.

Например, если $f(x) = \sin(2x+1)$, то $f(|x|) = \sin(2|x|+1)$.

Так как $f(|-x|) = f(|x|)$, то, следовательно, функция $y = f(|x|)$ — четная и поэтому достаточно построить ее график для $x \geqslant 0$ (см. гл. VII). Но для $x \geqslant 0$ имеем $|x| = x$ и поэтому $f(|x|) = f(x)$, т. е. график функции $y = f(|x|)$ для $x \geqslant 0$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Таким образом, мы получили следующее правило.

График функции $y=f(|x|)$ совпадает с графиком функции $y=f(x)$ в правой полуплоскости ($x \geqslant 0$), а в левой полуплоскости ($x<0$) симметричен этой части графика относительно оси y (рис. 110).

IX. **Правило** получения графика функции $y = |f(x)|$ по графику функции $y=f(x)$ (коротко: $f(x) \dot{+} |f(x)|$).

Согласно определению абсолютной величины действительного числа имеем

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Так как график функции $y = -f(x)$ согласно правилу VII симметрален графику функции $y=f(x)$ относительно оси x, то, следовательно, имеет место следующее правило.

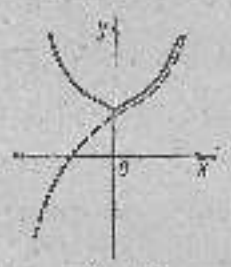


Рис. 110

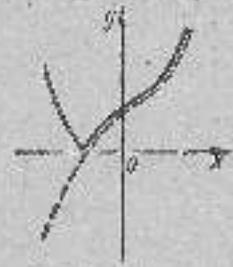


Рис. 111

График функции $y=|f(x)|$ совпадает с графиком функции $y=f(x)$ для тех участков оси x, где $f(x) \geqslant 0$, и является симметричным отображением его относительно оси x для тех участков, где $f(x)<0$ (рис. 111).

Способ построения графика функции $y=f(x)$, использующий рассмотренные элементарные преобразования, заключается в следующем. Составляют так называемую «цепочку» функций:

$$u = f(x),\quad y = f_1(x),\quad y = f_2(x),\quad \ldots,\quad y = f_n(x)$$

таким образом, чтобы две соседние функции $y=f_k(x)$ и $y=f_{k+1}(x)$ отличались друг от друга каким-нибудь из разобранных признаков, а график последней функции «цепочки» $y=f_n(x)$ был бы известен. Затем последовательно строят графики функций 1) $y=f_{n-1}(x)$, 2) $y=f_{n-2}(x)$, ... $n+1$) $y=f(x)$, получая каждый следующий график из предыдущего по известному правилу.

Такие построения в отдельных случаях во избежание нагромождения графиков удобнее производить на отдельных рисунках. «Цепочки» можно составлять по-разному, но лишь таким образом, чтобы переход от одной функции к другой каждый раз подчинялся какому-нибудь одному из рассмотренных правил.

Примеры. Построить графики следующих функций:

1. $y = -\sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

Прежде всего заметим, что $y = -\sqrt{x^2 - 4x + 4} = -\sqrt{(x-2)^2} = -|x-2|$. Теперь составим «цепочку», например, таким образом:

$$y = -|x-2| \quad (y \div -y), \qquad 3)$$

$$y = |x-2| \quad (f(x) \div |f(x)|), \qquad 2)$$

$$y = x - 2. \qquad 1)$$

Здесь и в дальнейшем в скобках указывается в сокращенных обозначениях то правило, по которому график этой функции получается из графика последующей функции.

Теперь согласно этим правилам строим последовательно графики 1), 2), 3) (рис. 112).

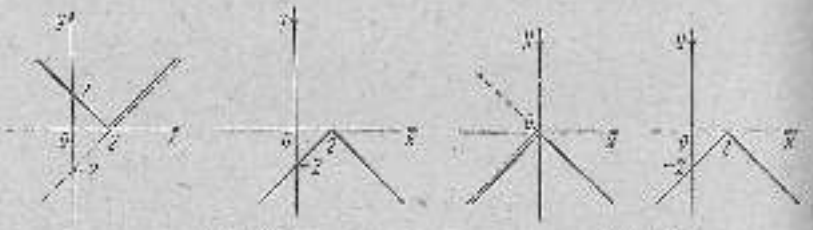


Рис. 112

Рис. 113

Если составить «цепочку» следующим образом:

$$y = -|x-2| \quad (x \div x-2), \qquad 3)$$

$$y = -|x| \quad (x \div |x|), \qquad 2)$$

$$y = -x \qquad 1)$$

и теперь последовательно построим графики функций 1), 2), 3) (рис. 113), то как видим, результат получается тот же.

2. $y = \sqrt{-x} - 1$.

Составляем «цепочку»

$$y = \sqrt{-x} - 1 \quad (y \div y + 1), \qquad 3)$$

$$y = \sqrt{-x} \quad (x \div -x), \qquad 2)$$

$$y = \sqrt{x}. \qquad 1)$$

Теперь строим последовательно графики 1) — 3) (рис. 114).

3. $x = \sqrt{1-y} + 1$.

В этом примере x является функцией y. Выразим из этого уравнения y как функцию x.

Имеем $x - 1 = \sqrt{1-y}$, откуда замечаем, что $x - 1 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 1$ (так как арифметический корень не может принимать отрицательных значений). Возводя в квадрат, получаем $(x-1)^2 = 1 - y$ и окончательно $y = -(x-1)^2 + 1$. Графиком этой функции будет па-

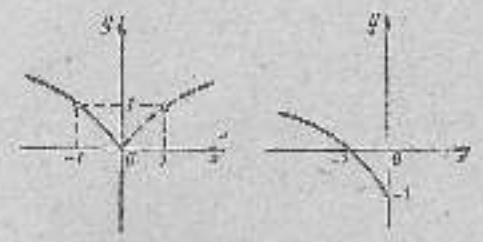


Рис. 114



Рис. 115

рабола, изображенная на рис. 115, а графиком искомой функции будет правая ветвь этой параболы, для которой $x \geqslant 1$. Очевидно, левая ветвь параболы будет графиком функции $x = -\sqrt{1-y} + 1$.

Заметим, что можно и не разрешать данное уравнение относительно y, а рассматривать y как независимое переменное.

4. $y = (1-x)^n$.

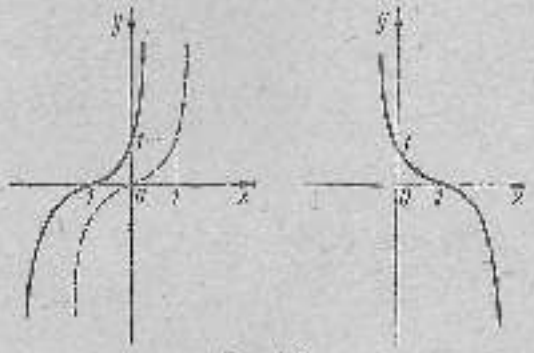


Рис. 116

Составим «цепочку», например так:

$$y = (1-x)^n \quad (x \div -x), \qquad 3)$$

$$y = (1+x)^n \quad (x \div x+1), \qquad 2)$$

$$y = x^n \qquad 1)$$

График изображен на рис. 116.

5. $y = 3^{|x+1|} - 1$.

Составим «цепочку», например, так:

$y = 3^{|x|} - 1$ $(x \div x + 1,\ y \div\!\to y + 1)$ 3)

$y = 3^{|x|}$ $(x \div |x|)$, 2)

$y = 3^x$. 1)

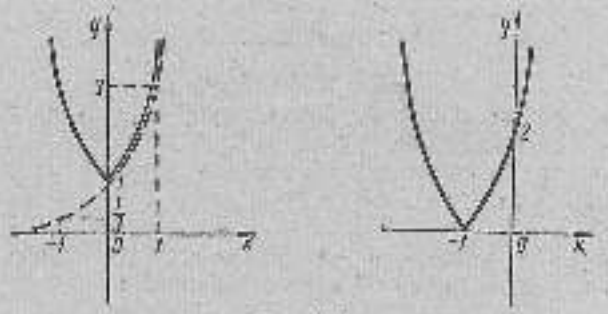


Рис. 117

Строим последовательно графики функций 1) — 3) (рис. 117).

6. $y = \lg_{\frac{1}{3}} (x+1)^2$.

Эту функцию можно задать как $y = 2\lg_{\frac{1}{3}} |x+1|$ (при вынесении показателя степени за знак логарифма основание степени взято по абсолютной величине, так как $\lg_{\frac{1}{3}} (x+1)^2$ имеет смысл и при $x+1<0$, см. гл. VIII, § 2).

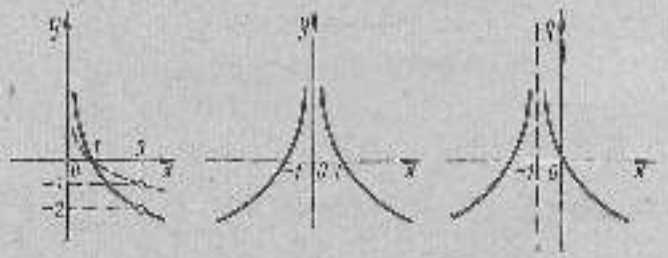


Рис. 118

Теперь составим «цепочку», например, так:

$y = 2\lg_{\frac{1}{3}} |x+1|$ $(x \div x+1)$, 4)

$y = 2\lg_{\frac{1}{3}} |x|$ $(x \div |x|)$, 3)

$y = 2\lg_{\frac{1}{3}} x$ $\left(y \div\!\to \frac{y}{2}\right)$ 2)

$y = \lg_{\frac{1}{3}} x$. 1)

Строим последовательно графики функций 1) — 4) (рис. 118).

7. $y = \lg_3 \frac{1}{3x-2}$.

Записав эту функцию в виде $y = -\lg_3 (3x-2)$, составляем «цепочку»:

$y = -\lg_3 (3x-2) = \lg_{\frac{1}{3}} 3\left(x - \frac{2}{3}\right)$ $\left(x \div x - \frac{2}{3}\right)$ 3)

$y = \lg_{\frac{1}{3}} 3x$ $(x \div 3x)$, 2)

$y = \lg_{\frac{1}{3}} x$ 1)

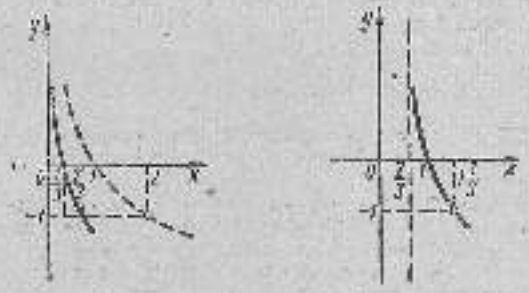


Рис. 119

и строим последовательно графики 1) — 3) (рис. 119).

8. $y = 2\sin(1-2x)$.

Имеем

$y = 2\sin(1-2x) = -2\sin(2x-1)$ $(y \div -y)$ 2)

$y = 2\sin(2x-1) = 2\sin 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 1)

Теперь строим последовательно графики функций 1), 2) (рис. 120). Для контроля графика данной функции находим что при $x = 0$ значение $y = 2\sin 1 \approx 2\sin 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1{,}7$.

9. $y = |2\cos \pi x - 1|$.

Составляем «цепочку», например, так:

$$y = |2\cos \pi x - 1| \quad (f(x) \to |f(x)|), \qquad 3)$$

$$y = 2\cos \pi x - 1 \quad (y \to y - 1), \qquad 2)$$

$$y = 2\cos \pi x. \qquad 1)$$

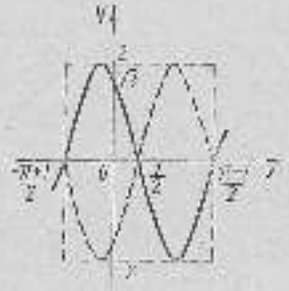


Рис. 120

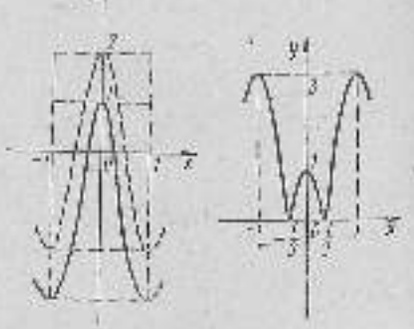


Рис. 121

Строим последовательно графики функций 1) — 3) (рис. 121). Для контроля и большей точности построения найдем точки пересечения искомого графика с осью абсцисс, полагая $y = 0$, получаем $|2\cos \pi x - 1| = 0$, или $2\cos \pi x - 1 = 0$, или $\cos \pi x = \frac{1}{2}$, откуда $\pi x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, т. е. $x = 2k \pm \frac{1}{3}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

10. $y = \operatorname{tg} \frac{|x| - 1}{2}$.

Составим «цепочку»:

$$y = \operatorname{tg} \frac{|x| - 1}{2} \quad (x \to |x|), \qquad 4)$$

$$y = \operatorname{tg} \frac{x - 1}{2} \quad (x \to x - 1), \qquad 3)$$

$$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \left(x \to \frac{x}{2}\right), \qquad 2)$$

$$y = \operatorname{tg} x. \qquad 1)$$

Строим последовательно графики функций 1) — 4) (рис. 122). Для более точного построения графика 3) найдем точку пересечения с осью ординат, при $x = 0$ получим $y = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} \approx -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \approx 0{,}6$.

11. $y = -\operatorname{ctg} |x + 1|$.

Составим «цепочку», например, так:

$$y = -\operatorname{ctg} |x + 1| \quad (x \to x + 1), \qquad 4)$$

$$y = -\operatorname{ctg} |x| \quad (x \to |x|), \qquad 3)$$

$$y = -\operatorname{ctg} x \quad (y \to -y), \qquad 2)$$

$$y = \operatorname{ctg} x. \qquad 1)$$

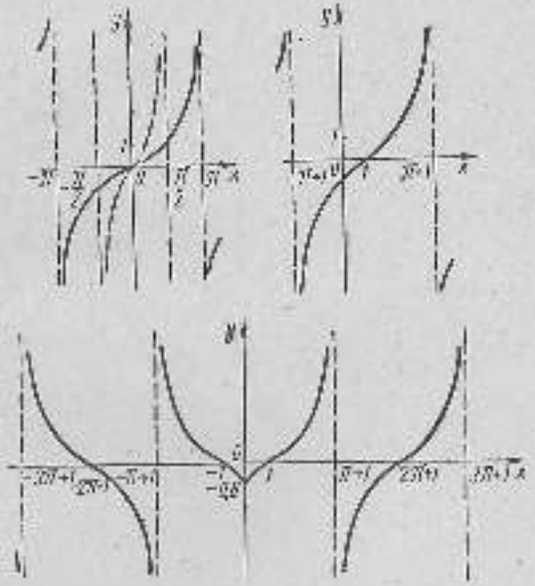


Рис. 122

Теперь строим последовательно графики функций 1)— 4) (рис. 123).

12. $y = \arcsin(|x| - 1)$.

Составляем «цепочку»:

$$y = \arcsin(|x| - 1) \quad (x \to |x|), \qquad 3)$$

$$y = \arcsin(x - 1) \quad (x \to x - 1), \qquad 2)$$

$$y = \arcsin x, \qquad 1)$$

Строим последовательно графики функций 1) — 3) (рис. 124).

13. $y = 2\arccos\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

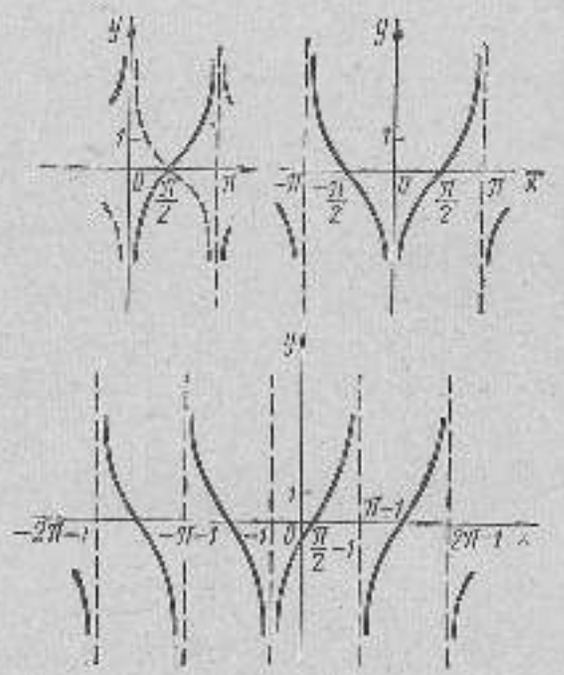


Рис. 123

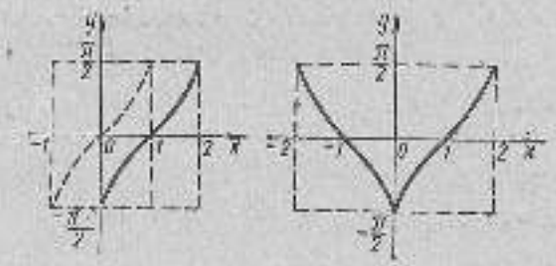


Рис. 124

Составляем «цепочку»:

$$y = 2\arccos\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2\arccos\frac{1}{2}(x+2) \quad (x \dashrightarrow x+2), \qquad 3)$$

$$y = 2\arccos\frac{x}{2} \quad \left(x \dashrightarrow \frac{x}{2},\ y \dashrightarrow \frac{y}{2}\right), \qquad 2)$$

$$y = \arccos x, \qquad 1)$$

Строим последовательно графики функций 1) — 3) (рис. 125).

14. $y = |\operatorname{arctg} 2x + 1|$.

Составляем «цепочку»:

$$y = |\operatorname{arctg} 2x + 1| \quad (f(x) \dashrightarrow |f(x)|), \qquad 4)$$

$$y = \operatorname{arctg} 2x + 1 \quad (y \dashrightarrow y - 1), \qquad 3)$$

$$y = \operatorname{arctg} 2x \quad (x \to 2x), \qquad 2)$$

$$y = \operatorname{arctg} x. \qquad 1)$$

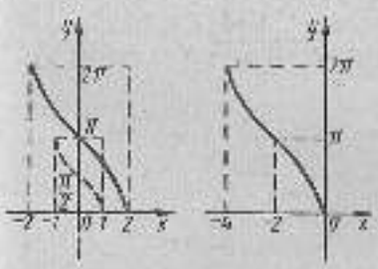


Рис. 125

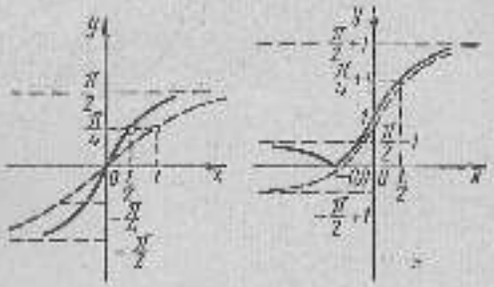


Рис. 126

Строим последовательно графики функций 1) — 4) (рис. 126).

График функции $y = \operatorname{arctg} 2x + 1$ пересекает ось абсцисс в точке, где $\operatorname{arctg} 2x + 1 = 0$, т. е. $2x = \operatorname{tg}(-1) \approx -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, т. е. $x \approx -0{,}8$.

15. $y = \operatorname{arctg}|1 - x|$.

Составим «цепочку»:

$$y = \operatorname{arctg}|1 - x| = \operatorname{arctg}|x - 1| \quad (x \dashrightarrow x - 1), \qquad 3)$$

$$y = \operatorname{arctg}|x| \quad (x \dashrightarrow |x|), \qquad 2)$$

$$y = \operatorname{arctg} x. \qquad 1)$$

Строим последовательно графики функций 1)—3) (рис. 127). Графики заданной функции пересекают ось ординат в точке, где

$$y = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx \frac{3}{4}.$$

Замечание. Не следует думать, что график любой функции может быть получен из графиков простейших функций путем элементарных преобразований. Например, график функции $y=\lg_2(x^2-1)$ не может быть получен из графика функции $y=\lg_2 x$ за счет рассмотренных геометрических преобразований (см. пример 4, § 7 данной главы).

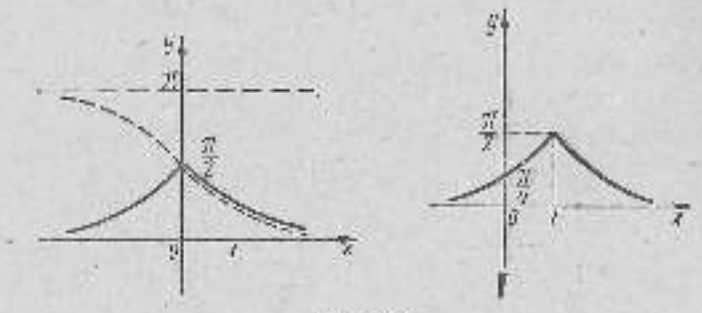


Рис. 127

§ 2. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ РАЗНЫМИ ФОРМУЛАМИ НА РАЗЛИЧНЫХ ПРОМЕЖУТКАХ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В этом случае искомый график состоит из совокупности графиков, построенных на каждом из этих промежутков. Иногда, даже если функция задана одной формулой во всей области ее определения, выгодно перейти (если это возможно) к ее заданию разными формулами для различных промежутков этой области.

Примеры. Построить графики следующих функций:

1. $y=\dfrac{|x|}{x}$.

Функция определена для всех x, кроме $x=0$.

Так как для $x>0$ $|x|=x$, а для $x<0$ $|x|=-x$, то данную функцию можно задать в виде

$$y=\begin{cases} 1, & \text{если } x>0, \\ -1, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Теперь ясно, что график будет состоять из двух лучей (рис. 128) с «выколотыми» точками (0, 1) и (0, −1).

2. $y=x^2-|2x-1|$.

Очевидно, данную функцию можно задать в виде

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1 & \text{для } x\geqslant\frac{1}{2}, \\ x^2+2x-1 & \text{для } x<\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Строим графики функций $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$ и $y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$ (рис. 129 — пунктирные линии).

При $x=\frac{1}{2}$ (линия раздела) обе функции принимают одно значение $y=\frac{1}{4}$.

Взяв от первого графика его часть лежащую правее прямой, $x=\frac{1}{2}$, а от второго — левее этой прямой, получаем график данной функции (рис. 129).

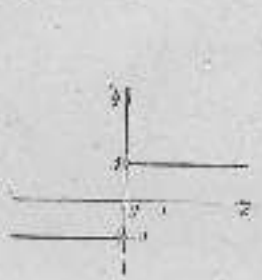


Рис. 128

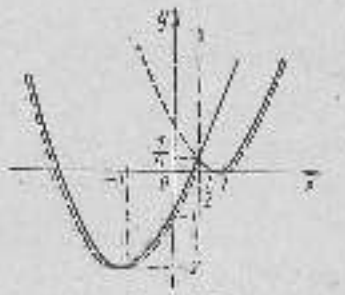


Рис. 129

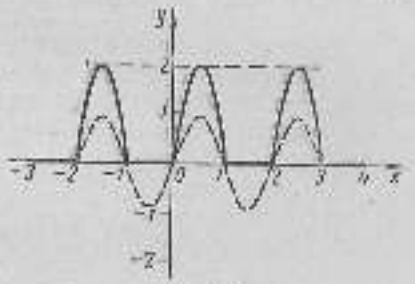


Рис. 130

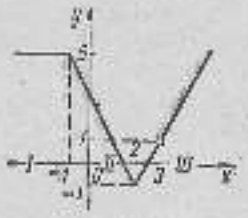


Рис. 131

3. $y=\sin\pi x+|\sin\pi x|$.

Функцию, очевидно, можно задать в виде

$$y=\begin{cases} 2\sin\pi x, & \text{если } \sin\pi x\geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \sin\pi x<0. \end{cases}$$

Эта функция периодическая с основным периодом $T=2$.

Искомый график изображен на рис. 130 сплошной линией, а вспомогательный график функции $y=\sin\pi x$ — пунктирной линией.

4. $y=|4-2x|-\sqrt{x^2-2x+1}+x$.

Извлекая корень, получим $y=|4-2x|-|x+1|+x$, или $y=2|x-2|-|x-1|+x$. Точки $x=-1$ и $x=2$ разбивают ось x на три промежутка: I, II, III (рис. 131).

Рассмотрим функцию на каждом из промежутков.

I: для любого $x \leqslant -1$ имеем $x-2<0$ и $x+1=x-(-1)\leqslant 0$ и поэтому

$$y=-2(x-2)+(x+1)+x-5.$$

II: для любого $-1 \leqslant x \leqslant 2$ имеем $x-2 \leqslant 0$, $x+1 \geqslant 0$ и поэтому

$$y=-2(x-2)-(x+1)+x=-2x+3.$$

III: для любого $x \geqslant 2$ имеем $x-2 \geqslant 0$, $x+1>0$ и поэтому

$$y=2(x-2)-(x+1)+x=2x-5.$$

Таким образом, нашу функцию можно задать так:

$$y=\begin{cases} 5, & \text{если } x \leqslant -1, \\ 3-2x, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2x-5, & \text{если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Отсюда видно, что на каждом из указанных промежутков графиком служит часть прямой (рис. 131).

§ 3. ГРАФИК СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ ФУНКЦИЙ

Бывает, что функцию $y=f(x)$ можно представить в виде суммы двух функций $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$, графики которых легко построить. Тогда, построение графика функции $y=f(x)$ сводится к геометрическому сложению соответствующих ординат: $y=y_1+y_2$. Заметим, что разность двух функций всегда можно свести к соответствующей сумме двух функций

$$y=f_1(x)-f_2(x)=f_1(x)+[-f_2(x)].$$

Примеры. Построить графики следующих функций:

1. $y=\dfrac{3^x-3^{-x}}{2}$.

Очевидно, если положить $y_1=\dfrac{3^x}{2}$, $y_2=-\dfrac{3^{-x}}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, то $y=y_1+y_2$.

Теперь по правилу построения графика показательной функции строим графики функций $y_1=\dfrac{3^x}{2}$ и $y_2=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ (пунктирные линии на рис. 132) и далее путем геометрического сложения соответствующих ординат этих графиков находим ряд точек искомого графика, соединив которые плавной кривой получим искомый график (сплошная линия на рис. 132).

2. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Очевидно, $y=x+\dfrac{1}{x}=y_1+y_2$, где $y_1=x$, $y_2=\dfrac{1}{x}$.

Строим графики функций $y_1=x$ и $y_2=\dfrac{1}{x}$ и затем геометрическим сложением соответствующих ординат получаем искомый график (рис. 133).

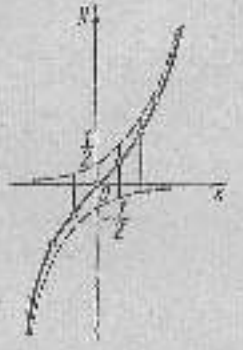


Рис. 132

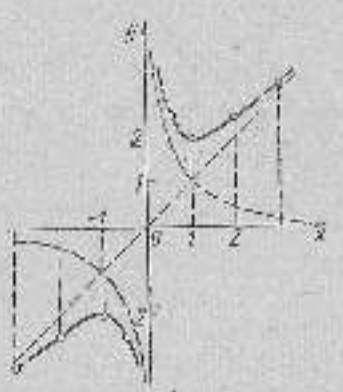


Рис. 133

Прямая $y=x$ является асимптотой полученного графика.

3. $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}+x$.

Полагая $y_1=\sin\dfrac{\pi x}{2}$, $y_2=x$, имеем $y=y_1+y_2$. Строим графики функций y_1 и y_2 (рис. 134 — пунктирные линии).

Отметим те значения x, где первое слагаемое обращается в 0 и ± 1. В этих точках значения ординат y будут равны соответственно y_2 и $y_2\pm 1$.

Построив ряд таких точек и соединив их плавной кривой, получим искомый график (рис. 134). Так как данная функция нечетная (сумма двух нечетных функций), то ее график симметричен относительно начала координат.

4. $y=\cos 2x-\sin x$.

Полагая $y_1=\cos 2x$ и $y_2=-\sin x$, имеем $y=y_1+y_2$. Так как функции y_1 и y_2 периодические с основными периодами $T_1=\pi$ и $T_2=2\pi$, то и функция y — периодическая с периодом $T=2\pi$. Поэтому требуемый график строим на промежутке $[-\pi, \pi]$. Построив на этом промежутке графики функций y_1 и y_2 (рис. 135 — пунктирные линии) и сложив ординаты ряда характерных точек (где одно из слагаемых равно нулю, где $y_1=y_2$, $y_1=-y_2$), найдем ряд точек искомого графика (рис. 135).

Соединив эти точки плавной кривой, получим, что искомый график имеет вид кривой, изображенной на рис. 135 сплошной линией. Вне промежутка $[-\pi, \pi]$ график получается по свойству периодичности функции.

Полученная кривая является графиком сложного гармонического колебания.

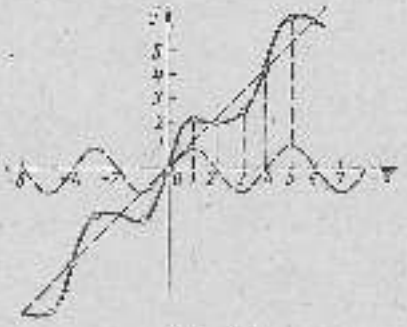


Рис. 134

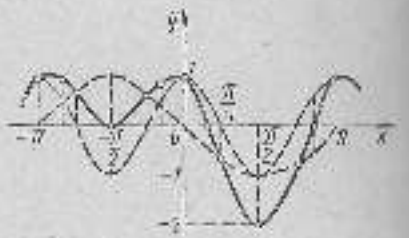


Рис. 135

Замечание. Не всегда целесообразно график суммы двух функций строить сложением графиков слагаемых. Иногда такую сумму можно заменить одной функцией, график которой строится проще. Так, например, функция $y = \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)$, которая является нечетной (сумма двух нечетных функций) и определенной всюду, кроме $x = 0$, при $x > 0$ преобразуется к виду $y = \frac{2}{\pi}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$ (см. гл. XII, § 3). Следовательно, эту функцию можно представить в виде

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Если сравнить с примером 1, § 2, то мы тем самым получили, что

$$\frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) = \frac{|x|}{x}$$

§ 4. ГРАФИК ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ФУНКЦИЙ

Геометрическое перемножение ординат весьма затруднительно. Но анализ произведения двух функций $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$ все же часто облегчается, если предварительно построить графики функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$.

При анализе особенное внимание следует обращать на точки, где функции y_1 и y_2 равны 0, 1 и -1.

Примеры. Построить графики следующих функций:

1. $y = x(x^8 - 1)$.

Полагая $y_1 = x$, $y_2 = x^8 - 1$, строим пунктиром эти графики (рис. 136).

Функция y_1 — нечетная, а функция y_2 — четная и поэтому данная функция y будет нечетной. Поэтому дальнейший анализ будем проводить для $x \geqslant 0$. Имеем:

при $x = 0$ значение $y_1 = 0$ и поэтому $y = y_1 y_2 = 0$;

при $x = 1$ значение $y_2 = 0$ и поэтому $y = 0$;

при $0 < x < 1$ имеем $y_1 > 0$, а $y_2 < 0$ и поэтому $y = y_1 y_2 < 0$; в точке, где $y_2 = 1$, значение $y = y \cdot y_2 = y_1$.

Для x, при которых $y_1 > 1$ и $y_2 > 1$, величина y будет быстро расти с увеличением x (быстрее, чем y_1).

Используя эти рассуждения, получаем, что график искомой функции будет иметь вид кривой, изображенной на рис. 136 (сплошная линия).

Замечание. Этот график можно также получить как график суммы $y = x^8 + (-x)$.

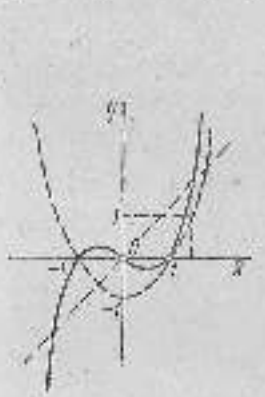


Рис. 136

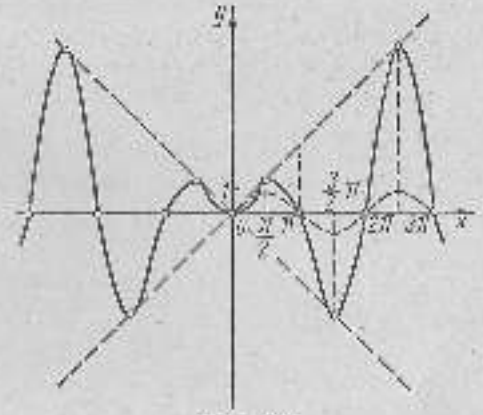


Рис. 137

2. $y = x \sin x$.

Замечаем, что функция y как произведение двух нечетных функций будет четной функцией и поэтому анализ будем проводить для $x \geqslant 0$. Строим графики функций $y_1 = x$ и $y_2 = \sin x$ (рис. 137 — пунктирные линии).

В точках, где $y_2 = \sin x = 0$, получаем $y = y_1 y_2 = 0$.

В точках, где $y_2 = \sin x = 1$, будет $y = y_1 y_2 = y_1$, а в точках, где $\sin x = -1$, получим $y = y_1 y_2 = -y_1 = -x$ (строим график функции $y_3 = -x$).

Отметив ряд таких точек и учитывая, что для промежуточных точек $|y| = |x \sin x| < |x|$, получаем искомый график (рис. 137 — сплошная линия).

На промежутке $x<0$ график получается симметричным отображением относительно оси y.

§ 5. ГРАФИК ФУНКЦИИ $y=\frac{1}{f(x)}$

Пусть требуется построить график функции $y=\frac{1}{f(x)}$, а график функции $y_1=f(x)$ нам известен (рис. 138—пунктирная линия). Заметим, что для одних и тех же значений аргумента значения функции $y_1=f(x)$ и данной функции $y=\frac{1}{y_1}$ будут обратными по величине.

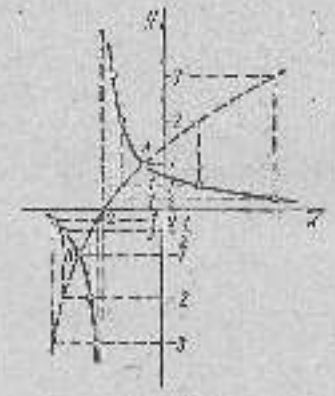


Рис. 138

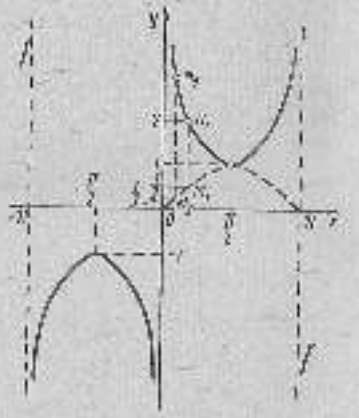


Рис. 139

Отметив несколько таких точек, соединяют их плавной кривой и учитывая поведение функции вблизи асимптот (вертикальные прямые, проходящие через точки, где $f(x)=0$, получают искомый график (рис. 138 — сплошная линия).

Примеры. Построить графики следующих функций.

1. $y=\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$.

Так как функция $y_1=\sin x$ нечетная и периодическая, то и функция $y=\frac{1}{\sin x}$ также нечетная и имеет тот же период. Поэтому достаточно построить график на промежутке $(0, \pi)$. Сначала строим график $y_1=\sin x$ для этого промежутка (рис. 139 — пунктирная линия). Так как $\sin x=0$ в точках $x=0$ и $x=\pi$, то поэтому прямые $x=0$ и $x=\pi$ будут вертикальными асимптотами. Исследуем поведение функции вблизи асимптот.

При $x\to 0$ справа и $x\to\pi$ слева значение $y\to+\infty$. Точка

$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ общая обоим графикам. Далее, отмечая точки M_1 и $M_{1'}$, где $\sin x=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, находим соответствующие точки N_2 и $N_{2'}$, где $\frac{1}{\sin x}=2, 3$. Соединив полученные точки плавной кривой, получим график функции $y=\frac{1}{\sin x}$ на промежутке $(0, \pi)$ и, отражая его симметрично относительно начала координат, получим график данной функции для промежутка $(-\pi, 0)$ (рис. 139), а затем в силу ее периодичности и вне промежутка $(-\pi, \pi)$.

2. $y=\frac{1}{x^2-1}$.

Строим график функции $y_1=x^2-1$ (рис. 140 — пунктирная линия). График функции $y_1=x^2-1$ симметричен относительно оси ординат и поэтому график искомой функции также будет симметричен относительно оси ординат.

Прямая $x=1$ будет вертикальной асимптотой: при $x\to 1$ справа значение $y\to+\infty$, а при $x\to 1$ слева значение $y\to-\infty$. Ось абсцисс будет горизонтальной асимптотой, так как при $x\to+\infty$ получаем, что $y=\frac{1}{x^2-1}\to 0$, оставаясь положительным.

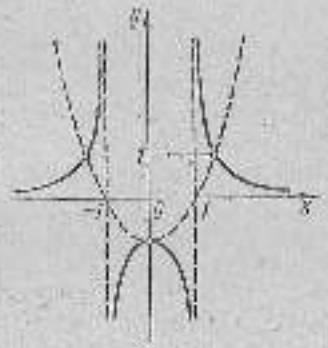


Рис. 140

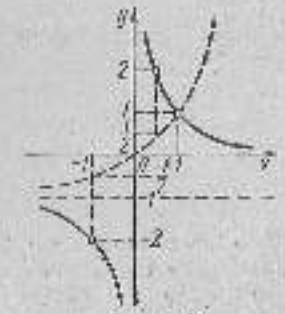


Рис. 141

Точки графика функции $y_1=x^2-1$, где $y_1=1$ и $y_1=-1$ будут общими у обоих графиков. Используя эти исследования, получаем, что искомый график будет иметь вид кривой, изображенной на рис. 140.

3. $y=\frac{1}{2^x-1}$.

Строим вспомогательный график функции $y_1=2^x-1$ (рис. 141 — пунктирная линия). Замечаем, что при $x\to 1$ значение $y_1=1$ и, следовательно, $y=\frac{1}{y_1}=1$, т. е. точка $(1, 1)$ — общая обоим графикам.

При изменении x от 1 до $+\infty$ значения y_1 быстро и неограниченно возрастают и, следовательно, значения y будут быстро и неограниченно уменьшаться $\left(\text{при } x \to +\infty \text{ значение } y_1 \to +\infty, \text{ а } y = \frac{1}{y_1} \to 0\right)$, т. е. ось x является горизонтальной асимптотой искомого графика. При изменении x от 1 до 0 значения y уменьшаются также от 1 до 0, а следовательно, значения $y = \frac{1}{y_1}$ будут неограниченно возрастать от 1 до $-\infty$, т. е. ось Oy служит вертикальной асимптотой искомого графика.

При построении графика для $x < 0$ возьмем за исходную точку $x = -1$, для которой $y_1 = -\frac{1}{2}$, а $y = \frac{1}{y_1} = -2$. Тогда получаем:

при изменении x от -1 до 0 переменная y_1 изменяется от $\frac{1}{2}$ до 0, оставаясь отрицательной, а следовательно, значения $y = \frac{1}{y_1}$ будут изменяться от -2 до $-\infty$ (график асимптотически приближается к отрицательной полуоси Oy);

при изменении x от -1 до $-\infty$ переменная y_1 изменяется от $-\frac{1}{2}$ до -1 (вернее стремится асимптотически к -1, оставаясь по абсолютной величине меньше 1), а следовательно, $y = \frac{1}{y_1}$ будет изменяться от -2 до -1 (вернее также стремится асимптотически к -1, но уже оставаясь по абсолютной величине больше 1).

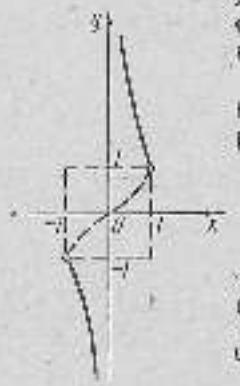


Рис. 142

Таким образом, искомый график имеет вид кривой, изображенной сплошной линией на рис. 141.

4. $y = \frac{x}{2 \arcsin x}$.

Строим график функции $y_1 = \frac{x}{\pi} \arcsin x$ (рис. 142 — пунктирная линия) и теперь легко строим график данной функции $y = \frac{1}{y_1}$ (рис. 142 — сплошная линия).

§ 6. ГРАФИК ЧАСТНОГО ДВУХ ФУНКЦИЙ

Все сказанное о произведении двух функций в равной степени относится и к частному двух функций.

Построив на одном чертеже графики функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, путем их анализа исследуем, как в зависимости от x изменяется частное $y = \frac{y_1}{y_2}$, и тем самым получаем общий вид искомого графика, который всегда можно уточнить с помощью таблицы значений функции.

При анализе особое внимание следует обращать на точки, где значения функций y_1 и y_2 обращаются в 0, ± 1, где они равны между собой или отличаются только знаком.

Примеры. Построить графики следующих функций:

1. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Функция нечетная $\left(f(-x) = \frac{-x}{x^2 - 1} = -f(x)\right)$, и поэтому анализ будем проводить лишь для $x \geqslant 0$.

Полагая $y_1 = x$ и $y_2 = x^2 - 1$, строим графики этих функций для $x \geqslant 0$ (рис. 143 — пунктирные линии).

Замечаем:

1) при $x = 0$ имеем $y_1 = 0$ и поэтому $y = \frac{y_1}{y_2} = 0$;

2) при $x = a$, где значения y_1 и y_2 отличаются только знаком, будет $y = \frac{y_1}{y_2} = -1$ $\left(a$ — положительный корень уравнения: $-y_1 = y_2$, т. е. $-x = x^2 - 1$, т. е. $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$;

3) при $x = 1$ имеем $y_2 = 0$, а $y_1 = 1$ и, следовательно, прямая $x = 1$ — вертикальная асимптота, если $x \to 1$ слева, то $y_1 \to 1$, а $y_2 \to 0$, оставаясь отрицательным, и поэтому $y = \frac{y_1}{y_2} \to -\infty$, если $x \to 1$ справа, то, наоборот, $y \to +\infty$;

4) при $x = b$, где $y_1 = y_2$, очевидно, $y = \frac{y_1}{y_2} = 1$ $\left(b$ — положительный корень уравнения: $y_1 = y_2$, т. е. $x = x^2 - 1$, т. е. $b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$;

5) при $x \to +\infty$ заметим, что $y = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} \to 0$, оставаясь положительным, т. е. ось абсцисс служит горизонтальной асимптотой.

Объединяя все эти замечания, получаем общий вид графика, изображенный на рис. 143 сплошной линией.

График частного двух функций $y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ иногда удобнее строить как график произведения двух функций.

Действительно, если положить $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = \frac{1}{f_2(x)}$, то $y = y_1 \cdot y_2$.

2. $y = \frac{2 \cos \pi x}{x}$.

Представим функцию в виде $y = \frac{2}{x} \cdot \cos \pi x$ и построим графики вспомогательных функций $y_1 = \frac{2}{x}$ и $y_2 = \cos \pi x$ для $x > 0$ (пунктирные линии на рис. 144), так как наша функция нечетная (произведение нечетной и четной функций). В тех точках, где $y_2 = \cos \pi x = 0$, будут и значения $y = 0$. В тех точках, где $y_2 = \cos \pi x = 1$ (кроме $x = 0$), очевидно, $y = y_1$, а где $y_2 = \cos \pi x = -1$, значение $y = -y_1 = -\frac{2}{x}$. Строим для удобства график функции $y_3 = -\frac{2}{x}$.

Построив ряд таких точек нашего графика, соединив их плавной кривой и учтывая поведение функции при $x \to 0$ (при $x \to 0$ справа $y_1 \to +\infty$, а $y_2 \to 1$ и, следователь-

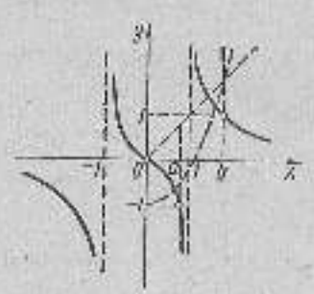


Рис. 143

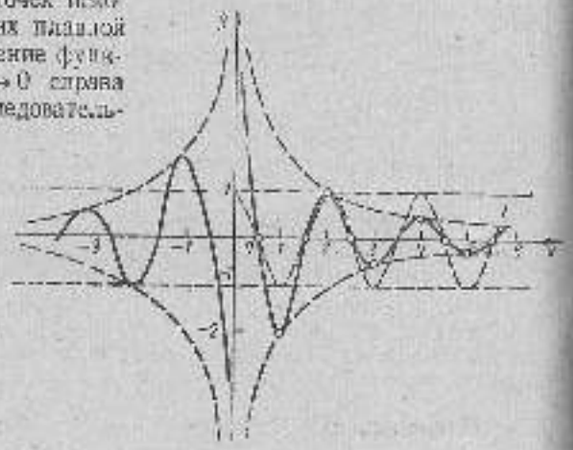


Рис. 144

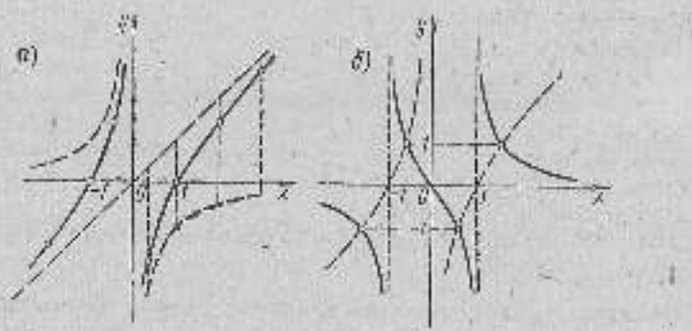


Рис. 145

но, $y \to +\infty$, оставаясь меньше y_1, т. е. ось Oy является асимптотой графика), получим искомый график для $x > 0$. Для $x < 0$ график получается симметричным отображением относительно начала координат (рис. 144).

Иногда проще сначала построить график функции $y_1 = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, а затем уж построить график заданной функции $y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ как график функции $y = \frac{1}{y_1}$. Так, в примере 1 график функции $y_1 = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$ легко строится как график суммы двух функций (рис. 145, *а* — сплошная линия), а затем уже просто получается график заданной функции $y = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{y_1}$ (рис. 145, *б* — сплошная линия).

§ 7. ГРАФИК «ФУНКЦИИ ОТ ФУНКЦИИ»

Если в функцию $y = f(u)$ вместо аргумента u мы подставим функцию $u = \varphi(x)$ нового аргумента x*, то в результате получим, так называемую, «функцию от функции», или «суперпозицию» двух функций $y = f[\varphi(x)]$, или сложную функцию.

Исходную функцию $y = f(u)$ называют внешней, а промежуточную функцию $u = \varphi(x)$ — внутренней функцией.

Например, взяв функцию $y = \lg_2 u$ и положив $u = x^2 - 1$, получим сложную функцию $y = \lg_2 (x^2 - 1)$. Термин «сложная» функция надо понимать относительно. Он указывает способ получения такой функции, а не степень сложности зависимости функции от аргумента.

Например, взяв функцию $y = u^2$ и положив $u = \frac{1}{x}$, получим сложную функцию $y = \frac{1}{x^2}$, которая на самом деле выражает довольно простую зависимость y от x.

По существу мы уже встречались с простейшими случаями сложных функций, например $y = f(x + a)$, $y = f(|x|)$ и т. д.

В этом параграфе мы рассмотрим способ построения графиков сложных функций в общем случае.

При построении графиков «функции от функции» надо в первую очередь попытаться заменить данную функциональную зависимость более простой, ей эквивалентной.

Примеры. Построить графики следующих функций:

1. $y = 2^{\lg_2 x}$.

Согласно основному логарифмическому тождеству данная функция равносильна функции $y = x$ при условии $x > 0$ ($\lg_2 x$ для отрицательных x не определен). Следовательно, искомым графиком является биссектриса первого координатного угла (рис. 146).

* Очевидно, что хотя бы одно значение функции $u = \varphi(x)$ должно входить в область задания функции $y = f(u)$, иначе о такой подстановке говорить бессмысленно.

Стрелкой на рисунке указывается, что точка O — начало координат — исключается.

2. $y=\operatorname{arctg}\operatorname{tg} x$.

Эта функция периодическая с основным периодом $T=\pi$, так как $\operatorname{arctg}\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{arctg}\operatorname{tg} x$.

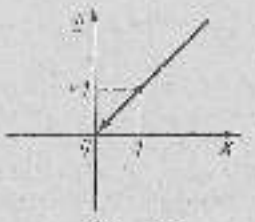


Рис. 146

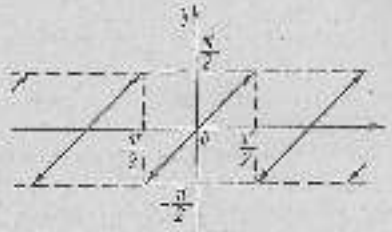


Рис. 147

Уравнение $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x$ равносильно уравнению $\operatorname{tg} y=\operatorname{tg} x$ при условии, что $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. Поэтому для $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ получаем $y=x$. Следовательно, искомым графиком на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ служит отрезок $y=x$ с исключенными концевыми точками. Вне промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ график получается периодическим продолжением (рис. 147).

3. $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

Эта функция нечетная $\left(f(-x)=\arcsin\frac{-2x}{1+x^2}=-\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=-f(x)\right)$ и поэтому достаточно построить график для $x\geqslant 0$.

Из данного равенства имеем $\sin y=\frac{2x}{1+x^2}$. Это равенство напоминает формулу $\sin y=\frac{2\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}}$. Поэтому вычисляем

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{1-\cos y}{\sin y}=\frac{1-\sqrt{1-\sin^2 y}}{\sin y}=\frac{1-\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}{\frac{2x}{1+x^2}}=$$

$$=\frac{1+x^2-|1-x^2|}{2x}.$$

Таким образом, получаем

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\begin{cases} x, & \text{если } 0<x\leqslant 1,\\ \frac{1}{x}, & \text{если } x\geqslant 1 \end{cases}$$

или

$$y=\begin{cases} 2\operatorname{arctg} x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=2\operatorname{arcctg} x, & \text{если } x\geqslant 1 \end{cases}$$

Теперь легко строим искомый график для $x\geqslant 0$ и затем симметрическим отображением относительно начала координат получаем график и для $x<0$ (рис. 148 — сплошная линия).

Если упрощение «функции от функции» $y=f[\varphi(x)]$ не достигается, то можно строить график такой функции следующим образом.

Построим на отдельных чертежах вспомогательные графики внешней и внутренней функций $y_1=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ (рис. 149, *а*, *б*).

Очевидно, для всякой точки $A(u_0, y_0)$ графика функции $y=f(u)$ (рис. 149, *а*) (но, конечно, такой, для которой значение u_0 принадлежит области изменения функции $u=\varphi(x)$) можно построить соответствующую точку $B(x_0, u_0)$ графика функции $u=\varphi(x)$ (отложив на оси u значение u_0, находим точку x_0, рис. 149, *б*) и затем соответствующую точку $C(x_0, y_0)$ искомого графика (рис. 149, *в*). Построив ряд таких точек и соединив их плавной кривой, получим изображение графика заданной функции, который всегда можно уточнить вычислением отдельных контрольных точек.

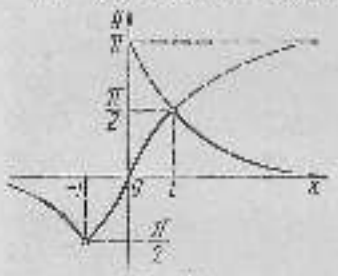


Рис. 148

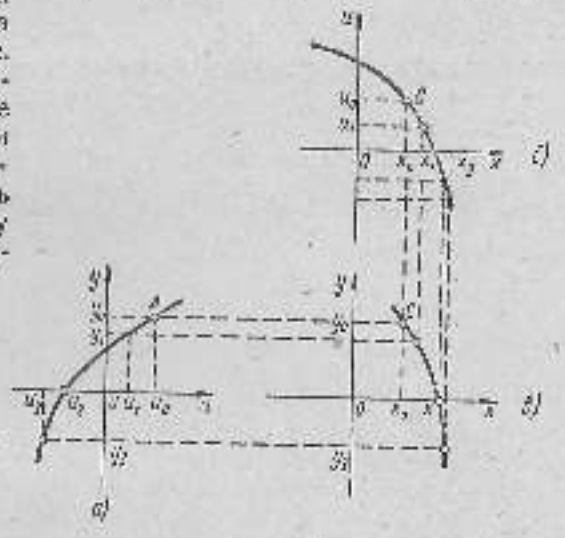


Рис. 149

Обычно строят лишь некоторые характерные точки искомого графика, а затем путем анализа специфических свойств внутрен-

ней и внешней функции получают весь график. В простых случаях можно легко обойтись без построения графика внешней функции $y=f(u)$.

4. $y=\lg_3(x^2-1)$.

Полагая $u=x^2-1$, получаем $y=\lg_3 u$. Строим системы координат xOu, xOy, располагая их как показано на рис. 150, и график функции $u=x^2-1$ (рис. 150, *а*).

Заметим, что

1) из симметрии относительно оси ординат графика функции $u=x^2-1$ следует симметрия относительно оси ординат графика функции $y=\lg_3(x^2-1)$;

2) так как для $-1\leqslant x\leqslant 1$ значения $u\leqslant 0$, то поэтому на этом промежутке заданная функция не определена;

3) так как, очевидно, для $u=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4 соответствующие значения $y=\lg_3 u$ будут равны -2, -1, 0, 1, 2, то беря эти значения и на рис. 150, *а* и находя соответствующие значения x, перенесем их на рис. 150, *б*, отмечая для них соответствующие значения y. Тем самым мы получим ряд точек искомого графика (рис. 150, *б*);

4) так как при $u\to 0$ ($u>0$) значения $y=\lg_3 u\to-\infty$, то поэтому при $x\to 1$, когда $u\to 0$, оставаясь положительным, $y=\lg_3(x^2-1)\to-\infty$;

5) при $x\to+\infty$, очевидно, $u\to+\infty$ и, следовательно, $y\to+\infty$.

Учитывая эти замечания, получаем, что искомый график имеет вид кривой, изображенной на рис. 150, *б*.

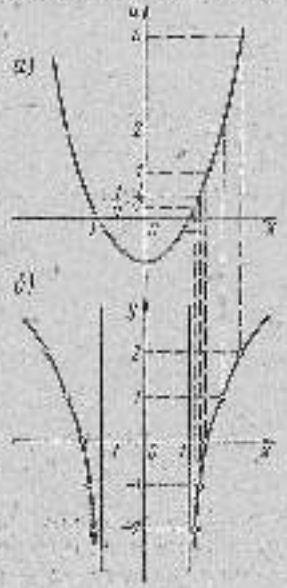


Рис. 150

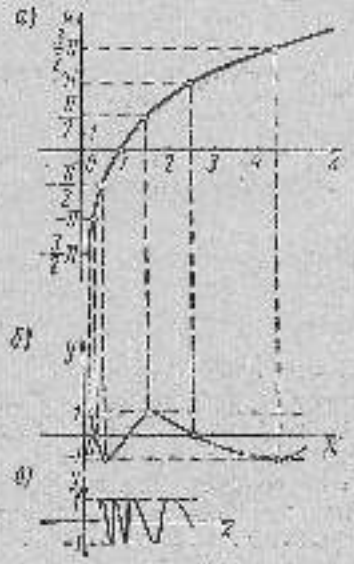


Рис. 151

5. $y=\sin 2\lg_2 x$.

Полагая $u=2\lg_2 x$, получаем $y=\sin u$. Строим график функции $u=2\lg_2 x$ (рис. 151, *а*). Характерными точками заданной функции являются точки, где значения y равно 0, ± 1, т. е. когда $u=0$, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi$, $\pm\frac{3}{2}\pi$, π, ...

На рис. 151, *а* отмечаем эти значения u, находим соответствующие значения x и строим соответствующие значения y (рис. 151, *б*). Соединив найденные точки плавной кривой, получаем искомый график. Очевидно, график будет описывать колебательный процесс, причем с увеличением x частота колебаний уменьшается, а при стремлении x к 0 — неограниченно возрастает. Часть графика вблизи оси Oy при увеличенном горизонтальном масштабе показана на рис. 151, *в*.

В отдельных случаях для построения графика сложной функции достаточно найти область ее определения (особенно при задании функциональной зависимости громоздкими формулами).

6. $y=\sqrt{\lg\sin\pi x}$

Функция определена лишь для x, при которых справедливо неравенство

$$\lg\sin\pi x\geqslant 0 \text{ или } \sin\pi x\geqslant 1,$$

что возможно, когда $\sin\pi x=1$, т. е. $x=k=0$, ± 1, ± 2. Для этих значений x значение $y=0$. Таким образом, график состоит из отдельных точек оси x.

§ 8. ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИКОВ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ, СИСТЕМ И НЕРАВЕНСТВ

Графики широко применяются для определения числа действительных решений уравнения

$$f(x)=0 \tag{1}$$

или системы

$$\begin{cases} F_1(x, y)=0, \\ F_2(x, y)=0 \end{cases} \tag{2}$$

и их приближенных значений.

Действительно, если мы построим график функции $y=f(x)$, то точки, где график пересекает ось x, и будут действительными корнями уравнения (1) (рис. 152, *а*).

Когда построение графика функции $y=f(x)$ вызывает затруднения, нужно постараться представить уравнение в виде $f_1(x)=f_2(x)$ таким образом, чтобы было легко построить графики функций

$$y=f_1(x) \quad \text{и} \quad y=f_2(x), \qquad \text{(рис. 152, } б\text{)}$$

Очевидно, что абсциссы точек пересечения графиков этих функций и будут действительными корнями уравнения.

Если эти графики не имеют общих точек, то уравнение не имеет действительных корней.

Чем точнее построены графики, тем меньшие можно указать интервалы, которые содержат корни.

Все сказанное относится и к решениям системы (2) (координаты точек пересечения графиков уравнений $F_1(x, y)=0$ и $F_2(x, y)=0$ будут действительными решениями системы (2)).

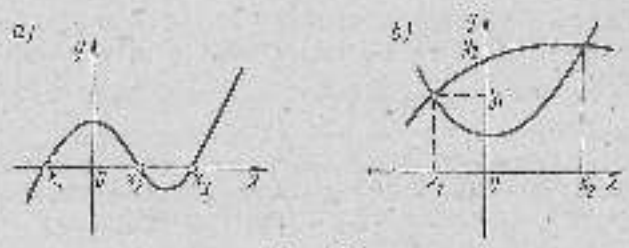


Рис. 152

Пример 1. Найти графически корни следующих уравнений:

1) $x^3+x-1=0$;

2) $2-x^3=\lg_2(-x)$.

Решение.

1. Запишем уравнение в виде $x^3=1-x$. Построив графики функций $y=x^3$ и $y=1-x$ (рис. 153), видим, что уравнение имеет лишь один действительный корень x_0.

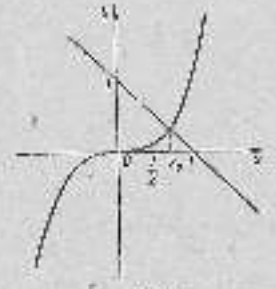


Рис. 153

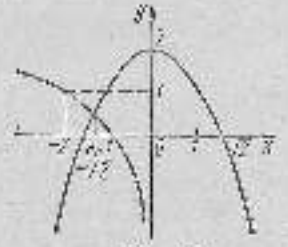


Рис. 154

2. Строим графики функций $y=2-x^2$ и $y=\lg_2(-x)$ (рис. 154). Находим, что уравнение имеет один действительный корень x_0.

Пример 2. Указать число действительных корней уравнения $100\sin\pi x=x$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sin\pi x=\frac{x}{100}$ и рассмотрим функции $y=\sin\pi x$ и $y=\frac{x}{100}$.

Построим схематично графики этих функций (рис. 155). Графики обеих функций симметричны относительно начала координат, поэтому достаточно проанализировать решение уравнения для $x\geqslant 0$. Очевидно, как только значение функции $y=\frac{x}{100}$ станет больше 1 ($x>100$), то уже графики наших функций пересечься не смогут ($\sin\pi x\leqslant 1$).

Функция $y=\sin\pi x$ имеет период $T=2$, а на отрезке длиной периода прямая пересекает синусоиду лишь в двух точках. Следовательно, на отрезке $[0, 100]$ таких точек пересечения будет $2\cdot\frac{100}{2}=100$. Аналогично на отрезке $[-100, 0]$ также будет 100 точек пересечения, но так как начало координат мы просчитываем два раза, то, следовательно, искомое уравнение имеет 199 корней, один из которых 0, а остальные можно указать лишь приближенно.

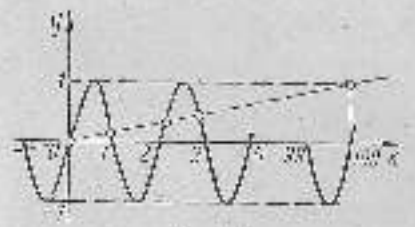


Рис. 155

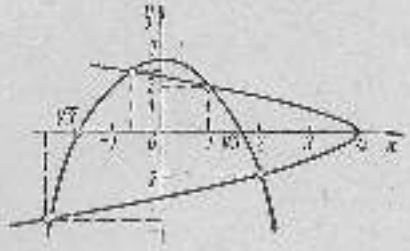


Рис. 156

Пример 3. Определить число действительных решений системы

$$\begin{cases} x^2+y=3, \\ x+y^2=4. \end{cases}$$

Решение. Каждое из уравнений системы определяет параболу ($y=3-x^2$ и $x=4-y^2$). Построив эти параболы (рис. 156), видим, что система имеет четыре действительных решения.

Иногда отдельные действительные решения легко находятся подбором. Тогда встает вопрос: не имеет ли уравнение или система других действительных решений? Часто ответ на этот вопрос можно получить прибегнув к графикам.

Пример 4. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^x=2^x.$$

Р е ш е н и е. Легко заметить, что уравнение имеет корень $x=2$. Представив уравнение в виде

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^x=1,$$

построим графики функций

$$y=1 \text{ и } y=\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^x \quad \text{(рис. 157)}.$$

График второй функции строим графическим сложением графиков показательных функций $y_1=\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^x$ и $y_2=\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^x$ с основаниями меньше 1 (на рис. 157 — пунктирные линии). В силу монотонности второй функции он пересекается с прямой $y=1$ лишь в одной точке. Следовательно, $x=2$ — единственный корень.

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} xy=2-y, \\ y=\lg_2(x+1). \end{cases}$$

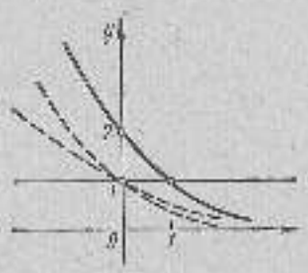


Рис. 157

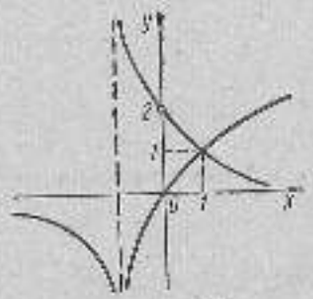


Рис. 158

Р е ш е н и е. Можно заметить, что система имеет решение (1,1). Построив по известным правилам графики этих уравнений (для чего надо первое уравнение записать в виде $y=\frac{2}{x+1}$), убеждаемся, что найденное решение единственное (рис. 158).

В заключение покажем, как применяются графики к решению неравенств и систем неравенств с двумя неизвестными.

Решить неравенство

$$F(x,\ y)\vee 0 \qquad (3)$$

— это значит найти все точки плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют неравенству (3).

Пример 6. Решить графически неравенство

$$x+2y-1\geqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Построим прямую $x+2y-1=0$ (рис. 159). Очевидно, сами точки прямой удовлетворяют поставленной задаче. Эта прямая делит плоскость на две части. Взяв произвольную точку $M(x_0,\ y_0)$ этой прямой и передвинув ее параллельно оси Oy вверх в положение точки $N_1(x_0,\ y_1)$, получим в силу равенства $x_0+2y_0-1=0$ и неравенства $y_1>y_0$, что будет справедливо неравенство $x_0+2y_1-1>0$.

Аналогично, если взять точку $N_2(x_0,\ y_2)$, где $y_2<y_0$, то получим, что координаты этой точки будут удовлетворять неравенству $x_0+2y_2-1<0$. Следовательно, данному неравенству удовлетворяют все точки прямой и расположенные над ней (рис. 159).

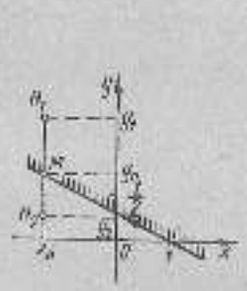


Рис. 159

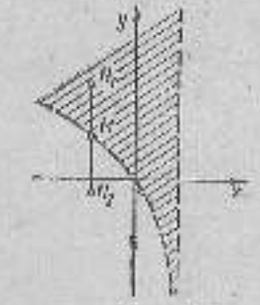


Рис. 160

Пример 7. Решить графически неравенство

$$y>\lg_2(1-x).$$

Р е ш е н и е. Строим график функции $y=\lg_2(1-x)$ (пунктирная линия рис. 160). График нарисован пунктирной линией для того, чтобы подчеркнуть тот факт, что сами точки этого графика не удовлетворяют неравенству.

Очевидно, координаты точек решения неравенства должны удовлетворять условию $1-x>0$, т. е. $x\leq 1$, так как иначе $\lg_2(1-x)$ не определен.

Взяв произвольную точку M этого графика и, рассуждая аналогично предыдущему, получим, что решением неравенства будут все точки, расположенные выше логарифмической кривой и левее прямой $x=1$ (на рис. 160 эта область заштрихована).

Под решением системы неравенств

$$\begin{cases} F_1(x,\ y)\vee 0, \\ F_2(x,\ y)\vee 0 \\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

понимают все точки плоскости, координаты которых одновременно удовлетворяют всем неравенствам, входящим в систему.

Пример 8. Решить графически систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y \leqslant 1, \\ y - x \geqslant -1. \end{cases}$$

Решение. Сначала решаем отдельно неравенство $y \leqslant 1 - x^2$ (рис. 161, *а*) и неравенство $y \geqslant x - 1$ (рис. 161, *б*).

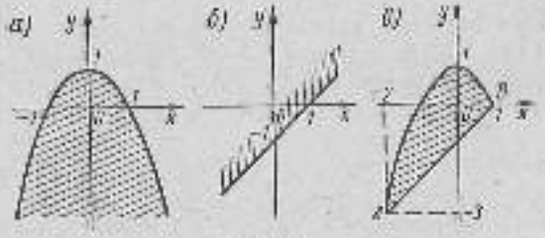


Рис. 161

Теперь, объединив эти результаты, получаем, что искомой системе удовлетворяют все точки заштрихованной области на рис. 161, *в*. Координаты точек A и B находятся путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y = 1, \\ y - x = -1. \end{cases}$$

§ 9. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Приведем примеры разных задач, связанных с функциями.

Пример 1. Найти область определения функций:

$$1)\ y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};\quad 2) y = \lg \cos \lg_2 x;$$

$$3)\ y = \arcsin \frac{2}{1-x} + \lg \frac{x^2 - 3x - 10}{-x}.$$

Решение 1. Данная функция будет определена лишь для x, удовлетворяющих неравенству $\frac{1+x}{1-x} \geqslant 0$. Решив это неравенство, получим $-1 \leqslant x < 1$.

2. Функция определена, лишь когда $\cos \lg_2 x > 0$. Очевидно, это неравенство справедливо, если

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} < \lg_2 x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Отсюда получаем, что область существования искомой функции состоит из бесконечного числа отдельных промежутков

$$2^{2k\pi - \frac{\pi}{2}} < x < 2^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

3. Функция будет определена лишь в том случае, когда оба слагаемых одновременно определены. Следовательно, x должен удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} \left| \frac{2}{1-x} \right| \leqslant 1, \\ \frac{x^2 - 3x - 10}{-x} \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |x - 1| \geqslant 2, \\ \frac{(x+2)(x-5)}{x} \leqslant 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем, что область определения состоит из двух промежутков: $[-2, 1]$ и $[3, 5]$.

Пример 2. Определить, является ли функция четной или нечетной:

$$1)\ f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1};\quad 2)\ f(x) = \lg(x + \sqrt{1 + x^2});$$

$$3)\ f(x) = \cos(x + 2) - \cos(x - 2).$$

Решение 1. Имеем

$$f(-x) = \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{2^x} - 1}{\frac{1}{2^x} + 1} = \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x} = -\frac{2^x - 1}{2^x + 1} = -f(x).$$

Следовательно, эта функция нечетная.

2) Имеем

$$f(-x) = \lg(-x + \sqrt{1 + x^2}).$$

На первый взгляд кажется, что $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, т. е. что функция не является ни четной, ни нечетной. Но на самом деле не так. Действительно, полученное выражение можно тождественно преобразовать следующим образом:

$$\lg(\sqrt{1 + x^2} - x) = \lg \frac{(\sqrt{1 + x^2} - x)(\sqrt{1 + x^2} + x)}{\sqrt{1 + x^2} + x} =$$

$$= \lg \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x} = \lg 1 - \lg(\sqrt{1 + x^2} + x) =$$

$$= -\lg(x + \sqrt{1 + x^2}) = -f(x).$$

Следовательно, функция нечетная.

3. Имеем

$$f(-x) = \cos(-x+2) + \cos(-x-2) =$$
$$= \cos[-(x-2)] + \cos[-(x+2)] =$$
$$= \cos(x-2) + \cos(x+2) = f(x).$$

Следовательно, функция четная.

Пример 3. Указать геометрическое место точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим уравнениям:

1) $x^2 - x - 2 = 0$; 2) $x^2 - xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$;

3) $y|= y\cos \pi x$; 4) $\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0$;

5) $y + |y| = x + |x|$.

Решение. 1. Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений $x = 2$ и $x = -1$ и, следовательно, искомым геометрическим местом служат две прямые, параллельные оси Oy (рис. 162).

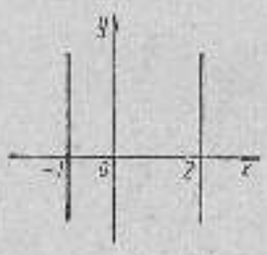


Рис. 162

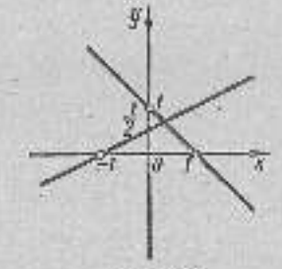


Рис. 163

2. Решая это уравнение как квадратное относительно x, найдем, что оно равносильно совокупности двух уравнений $x + y - 1 = 0$ и $x - 2y + 1 = 0$. Следовательно, искомое геометрическое место состоит из двух прямых (рис. 163).

3. Имеем

при $y = 0$ уравнению удовлетворяют любые x;

при $y > 0$ уравнению удовлетворяют все x, для которых $\cos \pi x = 1$, т. е. $x = 2k$, где $k = 0, \pm 1, +2, \ldots$;

при $y < 0$ уравнение равносильно уравнению $\cos \pi x = -1$ или $x = 2n + 1$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2$.

Следовательно, искомым геометрическим местом является ось Ox ($y = 0$) и семейства прямых: $x = 2k$ при условии, что $y > 0$ и $x = 2n + 1$, при условии, что $y < 0$ (см. рис. 164).

4. Сумма квадратов двух действительных чисел может равняться нулю лишь тогда, когда одновременно эти числа равны нулю. Следовательно, искомым геометрическим местом служат все точки, для которых одновременно $\sin \pi x = 0$ и $\sin \pi y = 0$, т. е. точки с координатами $x = k$ и $y = n$, где k и n — любые целые числа (рис. 165).

5. Для x и y из первого квадранта ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) уравнение равносильно уравнению $y + y = x + x$ или $y = x$. Это — биссектриса первого координатного угла.

Если $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$ (второй квадрант), то получаем $y + y = x - x$, т. е. $y = 0$.

Если $x \leqslant 0$ и $y \leqslant 0$ (третий квадрант), то имеем тождество.

Наконец, если $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$ (четвертый квадрант), то уравнение принимает вид $y - y = x + x$ или $x = 0$. Следовательно, искомое геометрическое место состоит из биссектрисы первого координатного угла и всех точек плоскости третьего квадранта, включая его границы (рис. 166).

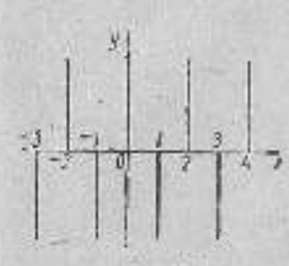


Рис. 164

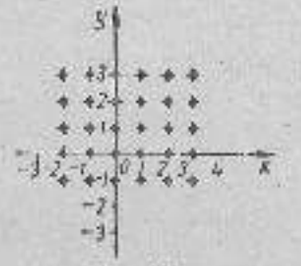


Рис. 165

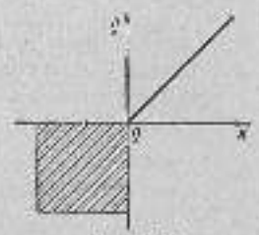


Рис. 166

Пример 4. Найти a, b, c, если функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает наибольшее значение $y = 2$ при $x = 1$, а при $x = -1$ значение функции $y = -2$.

Решение. Графиком искомой функции служит парабола, вершина которой находится в точке $B(1, 2)$ и, следовательно, функцию можно представить в виде

$$y = a(x-1)^2 + 2.$$

Подставив в это уравнение $x = -1$ и $y = -2$, найдем, что $a = -1$. Таким образом, $y = -(x-1)^2 + 2$ или $y = -x^2 + 2x + 1$ и, значит, $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$.

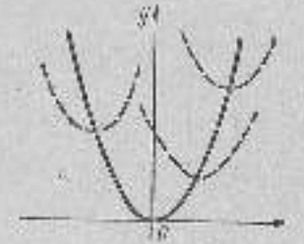


Рис. 167

Пример 5. Какую линию описывает вершина параболы $y = x^2 + 2tx + 2t^2$, когда параметр t принимает любые действительные значения.

Решение. Выделяя полный квадрат, получаем

$$y = (x+t)^2 + t^2.$$

Следовательно, координаты вершины параболы находятся в зависимости от t из условий $x = -t$, $y = t^2$. Исключая из этих равенств параметр t, получаем, что координаты вершины удовлетворяют уравнению $y = x^2$, графиком которого также служит парабола. На рис. 167 эта парабола изображена сплошной линией, а пунктиром изображено несколько положений параболы $y = x^2 + 2tx + 2t^2$ при различных значениях t.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3
Введение 4

Глава I. Действительные и комплексные числа

§ 1. Натуральные и целые числа 7
§ 2. Рациональные числа 11
§ 3. Иррациональные числа 19
§ 4. Действительные числа 22
§ 5. Решение задач 33
§ 6. Комплексные числа 35
§ 7. Решение задач 46

Глава II. Равенства. Преобразования алгебраических выражений. Неравенства

§ 1. Равенства алгебраических выражений 61
§ 2. Классификация алгебраических выражений 62
§ 3. Действия над многочленами. Теорема Безу 64
§ 4. Многочлены (решение задач) 80
§ 5. Алгебраические дроби. Пропорции. Иррациональные выражения 85
§ 6. Тождественные преобразования алгебраических выражений (решение задач) 92
§ 7. Неравенства и их основные свойства 71
§ 8. Задачи на доказательство неравенств 92

Глава III. Уравнения, системы уравнений. Решение неравенств

§ 1. Основные понятия и определения, связанные с уравнениями 90
§ 2. Основные свойства уравнений 93
§ 3. Основные понятия и определения, связанные с системами уравнений. Основные свойства систем уравнений 95
§ 4. Целые рациональные уравнения с одним неизвестным 100
§ 5. Решение линейных и квадратных уравнений 104
§ 6. Исследование решений квадратного уравнения с действительными коэффициентами 108
§ 7. Двучленные уравнения 107
§ 8. Биквадратное и трехчленное уравнения 109
§ 9. Возвратные уравнения четвертой степени 111
§ 10. Подбор рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами 114
§ 11. Решение систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными 115
§ 12. Система, состоящая из одного линейного уравнения и одного уравнения второй степени с двумя неизвестными 120
§ 13. Системы двух уравнений второй степени с двумя неизвестными . . 121
§ 14. Решение рациональных неравенств и систем неравенств с одним неизвестным 124

Глава IV. Решение задач на алгебраические уравнения, системы уравнений и неравенства

§ 1. Решение рациональных уравнений с одним неизвестным 132
§ 2. Решение рациональных систем 150
§ 3. Иррациональные уравнения 150
§ 4. Решение иррациональных неравенств 158
§ 5. Решение иррациональных систем 160
§ 6. Решение уравнений, неравенств и систем, содержащих абсолютную величину 164
§ 7. Разные задачи, связанные с уравнениями, неравенствами, системами 173

Глава V. Последовательность. Прогрессии

§ 1. Последовательность 185
§ 2. Арифметическая прогрессия 187
§ 3. Геометрическая прогрессия 189
§ 4. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия 192
§ 5. Задачи 193
§ 6. Суммирование последовательностей 202

Глава VI. Соединения и бином Ньютона

§ 1. Соединения. Виды соединений 206
§ 2. Бином Ньютона 210
§ 3. Задачи 213

Глава VII. Функция

§ 1. Постоянная и переменная величины 220
§ 2. Функция 220
§ 3. Способы задания функции 223
§ 4. Четные и нечетные функции 225
§ 5. Периодические функции 227
§ 6. Ограниченные и неограниченные функции. Монотонные функции . . 229
§ 7. Обратная функция 231
§ 8. Простейшие преобразования графиков 233
§ 9. Обзор свойств некоторых простейших элементарных функций. Построение их графиков 235

Глава VIII. Показательная и логарифмическая функции

§ 1. Показательная функция, ее свойства и график 245
§ 2. Логарифмическая функция 247
§ 3. Упражнения 250
§ 4. Решение показательных и логарифмических уравнений 250
§ 5. Решение неравенств, содержащих показательную и логарифмическую функции 255

Глава IX. Тригонометрические функции

§ 1. Угол в тригонометрии 260
§ 2. Тригонометрический круг. Определение тригонометрических функций 270
§ 3. Свойства тригонометрических функций 273
§ 4. Графики тригонометрических функций 276
§ 5. Тригонометрические функции острого угла 283
§ 6. Задачи 284

Глава X. Теоремы сложения и их следствия

§ 1. Формулы тригонометрических функций от алгебраической суммы аргументов (формулы сложения) 289
§ 2. Формулы приведения 291
§ 3. Тригонометрические функции кратных аргументов 294
§ 4. Формулы преобразования произведения синусов и косинусов в сумму. Формулы понижения степени 295
§ 5. Тригонометрические функции половинного аргумента. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента . . 297
§ 6. Числовые значения тригонометрических функций некоторых аргументов 299
§ 7. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение 303
§ 8. Соотношения между аргументами α, β, γ, вытекающие из равенства их одноименных тригонометрических функций 305

Глава XI. Задачи на тождественные преобразования в тригонометрии

§ 1. Упрощение тригонометрических выражений 307
§ 2. Вычисление без таблиц 310
§ 3. Вычисление значений тригонометрических выражений по известным значениям других тригонометрических выражений 313
§ 4. Преобразование тригонометрических выражений в произведение . . 319
§ 5. Доказательство тождеств 322
§ 6. Условные равенства 325
§ 7. Исключение аргументов из системы равенств 330
§ 8. Доказательство тригонометрических неравенств 333
§ 9. Суммирование последовательностей тригонометрических выражений 336

Глава XII. Обратные тригонометрические функции

§ 1. Арксинус 339
§ 2. Арккосинус 341
§ 3. Арктангенс и арккотангенс 343
§ 4. Основные тождества 345
§ 5. Задачи 346

Глава XIII. Тригонометрические уравнения

§ 1. Простейшие тригонометрические уравнения 350
§ 2. Сведение тригонометрических уравнений к простейшим с помощью тождественных преобразований 352
§ 3. Сведение тригонометрического уравнения к рациональному уравнению с одним неизвестным 373
§ 4. Системы тригонометрических уравнений 382
§ 5. Тригонометрические неравенства 385
§ 6. Решение трансцендентных уравнений 393

Глава XIV. Приложения тригонометрии к решению треугольников. Вычисление площадей прямолинейных фигур

§ 1. Соотношения между элементами прямоугольного треугольника. Основные случаи решений прямоугольных треугольников . . . 397
§ 2. Соотношения между элементами любого треугольника 401
§ 3. Основные случаи решения косоугольных треугольников 409
§ 4. Понятие об измерении площадей плоских фигур 420
§ 5. Площадь прямоугольника и треугольника 421
§ 6. Площадь четырехугольника и многоугольника 426
§ 7. Задачи 427

Глава XV. Графики

§ 1. Построение графиков с помощью геометрических преобразований . 428
§ 2. Графики функций, заданных разными формулами на различных промежутках области определения 438
§ 3. График суммы и разности двух функций 440
§ 4. График произведения двух функций 442
§ 5. График функции $y=\frac{1}{f(x)}$ 444
§ 6. График частного двух функций 446
§ 7. График «функции от функции» 449
§ 8. Применение графиков к решению уравнений, систем и неравенств . 453
§ 9. Разные задачи 456

76 коп.

