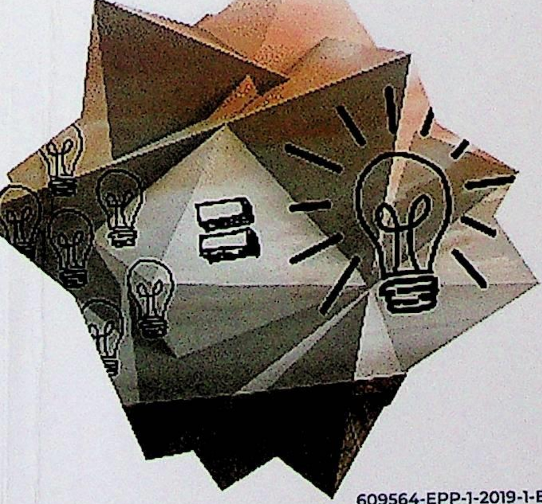
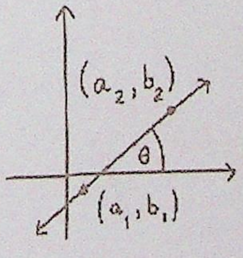
Co-funded by the
Erasmus+Programme
of the European Union

U.TAKABAYEV , O.ATABAYEV , X.ASRANOV

TEXNOLOGIK JARAYONLARNI MODELLASHTIRISH VA OPTIMALLASHTIRISH ASOSLARI





$y = mx$

$A_x = B_y + C = ($

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\hat{p}_n^2}{2m_n} + V(x_1, x_2, \dots x_N)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{m_n} \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + V(x_1, x_2, \dots x_N)$$

609564-EPP-1-2019-1-EL-EPPKA2-CBHE-JP
www.mechauz.uz

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM,
FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

U.TAKABAYEV, O.ATABAYEV, X.ASRANOV

TEXNOLOGIK JARAYONLARNI MODELLASHTIRISH VA OPTIMALLASHTIRISH ASOSLARI

Andijon mashinasozlik instituti Ilmiy kengashi
tomonidan o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan

Andijon-2023

Texnologik jarayonlarni modellashtirish va optimallashtirish asoslari. O‘quv qo‘llanma / U.Takabayev, O.Atabayev, X.Asranov – Andijon, 2023. 120 bet.

O‘quv qo‘llanma Yevropa Ittifoqining Erasmus+ dasturi doirasida moliyalashtirilgan “O‘zbekistonda mexatronika va robototexnika bakalavriat ta’lim yo‘nalishini innovatsion g‘oyalar va raqamli texnologiyalar asosida modernizatsiya qilish” loyihasi doirasida tayyorlangan bo‘lib, “Muhandislik ishi” sohasidagi bakalavriat ta’lim yo‘nalishi talabalari uchun o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya qilinadi.

KIRISH

Mamlakatimizda yuqori texnologiyalarga asoslangan yangi ishlab chiqarishni tashkil etish, iqtisodiyotning barcha jabxasiga zamonaviy axborot texnologiyalarini joriy qilishga alohida e'tibor qaratilmoqda. Negaki, mamlakatimizning iqtisodiyoti va madaniyatini rivojlantirish, shuningdek, axolining turmush farovonligini oshirish uchun ishlab chiqarish samaradorligini, sifatini muntazam oshirib, raqobatbardosh maxsulotlar ishlab chiqarish darkor. Har qanday davrda raqobatbardosh maxsulot ishlab chiqarish yangi texnika yoki texnologiyalarni qo'llashni talab etgan. Bugungi kunda bunyodkorlik, ijodkorlik uchun har bir sohada zamonaviy kompyuter texnologiyalarini qo'llay oladigan mutaxasisslar bo'lishi zarur. Xususan, xodimlar loyihalash ishlarini avtomatlashtirilgan xolda bajaradigan bo'lishi, ularning tadqiqot ishlarida muvoffaqiyatlar keltiradi. Texnologik jarayonlarni loyihalash ishlarida ularning matematik modelini qurish va u orqali nazariy tadqiqotlar o'tkazish muxim masalalardan hisoblanadi. Ushbu qo'llanma texnologik jarayonlarni matematik modelini qurish va ularni zamonaviy dasturiy vositalarda xal etish masalalariga bag'ishlanadi.

Matematik modellashtirish masalasi, ham matematika, ham texnika va texnologiya sohasida chuqur bilim talab etib kelgan. Hozirgi kunda matematika masalalarini yechish uchun tayyor dasturiy maxsulotlar yaratilgani bois, matematika soxasida chuqur bilimli bo'lmagan izlanuvchi ham modellashtirish masalasini hal eta olishi mumkin, faqat buning uchun shunga oid kompyuterning imkoniyatlarini o'rganishi zarur bo'ladi. Kompyuterdagi bu imkoniyatni o'rganish murakkab matematik hisoblashlarni o'rganishga nisbatan oson. Ular tez va katta aniqlikda natija beradi.

Yildan – yilga kompyuter imkoniyatlari ortib, u orqali murakkab masalalarni yechish yengillashib bormoqda. Xususan, matematik modellashtirish masalasini yechish algoritmi murakkab, unga dastur tuzib kompyuterda yechish uchun moxir dasturchi bo'lish kerak. Hozirgi kompyuter dasturlarida esa hech qanday dastur tuzmasdan ham turli jarayonlar modelini qurish mumkin. Eng muhimi bunda juda tez va katta aniqlikda masalani yechish mumkun bo'ladi. Shuning uchun ushbu oquv qo'llanmada ko'zda tutilgan maqsad, asosan, modellashtirish masalasini kompyuter orqali yechishni o'rgatishdan iborat.

I BOB. TEXNOLOGIK JARAYONLARNI MODELLASHTIRISH ASOSLARI

1.1. Model va modellashtirish tushunchalari.

Matematik modellar ko`p davrlardan buyon ishlatilmoqda. Matematik model deganda bu masalaning asosiy shartlari va maqsadining matematik formulalar yordamidagi tasviriga aytiladi.

Insoniyat tarixida modellashtirish bilish usuli sifatida ongli yoki intuitiv ravishdaa qo'llanilb kelingan. Modellashtirish xaqida o'rgatish o'rta asrlarda paydo bo'lgan. Bunda Leonardo da Vinchining (1452-1519) xizmatlari katta bo'lgan.

Matematik modellashni pisand etmagan o'ziga ishongan Britan Admiralligi lordlari muxandis Rid tomonidan kema muvozanatini tadqiq qilish uchin tuzilgan matematik model natijaalariga etibor bermasdan, o'sha davrda eng qudratli bo'ladi deb "Kepten" nomli xarbiy kema qurdiradi. Rid modeliga ko'ra ozgina shamol yoki to'lqin kemani to'ntarib qo'yishi mumkin edi. Xaqiqatdan ham kema qurilib, suvga tushirilganda birinchi sinovdayoq shidatli bo'ron uni ag'darib qo'ygan va 523 ta dengizcini xalok bo'lishiga olib kelgan.

Boshqarish tizimlarini matematik modellashtirishda Moiseevni ishlari taniqli bo'lgan.

Boshqarish nazariyasi usullari qo'llaniladigan ko'p fan sohalariga xarakterli bo'lgan evalyutsion jarayon "almashish" modellashtirishda ham o'z aksini topadi. Shunga ko'ra matematik modellarning "avlodlar almashinishi" jarayoni haqida ham fikrlar yuritilmoqda. Hozirda matematik modellashtirishni 3- avlodi qo'llanila boshladi.

1-avlodi. Real ob'ekt ustida fenomenologik kuzatishlarni matematik yozilishi. Bularni xarakterli tomoni: sodda tavsif, chiziqli ifodalar, kichik o'lcham (bir yoki ikki o'zgaruvchi). Tahlil usuli analitik yechim olish yoki grafik usul.

2-avlodi. Ob'ektga tizimli yondashuv, tizimli model qurish. Bularni xarakterli tomoni: murakkab tavsif, chiziqsiz ifodalar, katta o'lcham (bir necha o'nlab o'zgaruvchilar). Tahlil usulida analitik yechim olish yoki grafik usul ojizlik qiladi, bunda xisoblash tadqiqotlari o'tkaziladi. Sof matematik apparat mantiqiy-semantik elementlar bilan to'ldiriladi.

3-avlodi. Kompyuterli modellashtirish. Ular virtual dunyo modellaridir. Virtual modellashtirish uch o'lchamli dunyoni kompyuter vositalari yordamida ko'rsatish. Bunda qayta ishlanadigan va aks ettiradigan axborot xajmi keskin oshadi(masalan, ko'rsatiladigan "detallar" bir necha mingga etadi).

Model so'zi lotincha **modulus** so'zidan olingan bo'lib, o'lchov, me'yor degan ma'noni anglatadi.

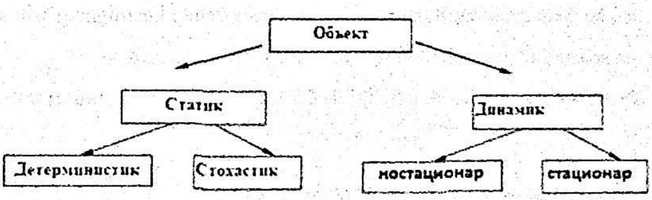
Keng ma'noda model biror ob'ektni yoki ob'ektlar sistemasini namunasidir. Modellashtirish nazariyasi nuqtai nazaridan qaralganda modellashtirishning ikki uslubi (turi) mavjud:

- fizik modellashtirish;
- matematik modellashtirish.

Fizik modellashtirish paytida o'rganilayotgan jarayonning tabiatini ochib beruvchi tajribalar sanoat qurilmalaridan (orginaldan) o'lchamlari va ish unumdorligi bilan farqlanuvchi fizik modellarda o'tkaziladi. Fizik model tabiati orginal tabiati bilan bog'liq bo'lib, uning xususiyatlarini kaytaradi. Fizik modelda o'tkazilgan tajribalar mobaynida to'plangan natijalar matematik uslublar yordamida qayta ishlanadi va orginalda amalga oshiriladigan jarayonni hisoblash hamda tashkil etish uchun qo'llaniladi.

Matematik modellashtirishning asosiy maqsadi jarayonni fizik-kimyoviy, gidrodinamik va konstruktiv kattaliklarining o'zgarishlarini uni kechish tabiatiga va olinajak yakuniy natijalarga ta'sirini aniqlashga qaratilgan. Matematik modellashtirish tufayligina jarayonni amalga oshirishning optimal sharoitlarini aniqlash mumkin bo'ladi. Modellashtirishning bu uslubidan foydalanilganda jarayon yoki qurilmaning fizik (real) modellarini yaratishga ko'p xollarda zaruriyat qolmaydi.

Matematik modellashtirish uslublari yordamida, EXM qo'llash tufayli, qisqa vaqt ichida nisbatan kam chiqimlar bilan, maxsulot ishlab chiqarish jarayonlarining optimal texnologik tizimlarini sintez qilish va loyixalash mumkin bo'ladi



Statik modellarda texnologik jarayonlar va ko'rsatkichlarning ma'lum bir vaqtdagi holati o'rganiladi.

Dinamik modellarda esa ko'rsatkchilarning vaqt davomida qanday o'zgarishi kuzatiladi va ularga qaysi omillar ta'sir etishi o'rganiladi. har bir oldingi bosqichning echimi keyingi bosqichlar uchun boshlang'ich ma'lumotlar sifatida foydalaniladi

Modellashtirish jarayonida quyidagilar bo'lishi kerak

- Tadqiqot ob'ekti
- Aniq masala olgan tadqiqotchi
- Ob'ekt xaqida ma'lumot olish uchun yaratilgan model.

Bu yeda tadqiqotchi ekspremetator hisoblanadi.

Tizimlarni modellashtirishda muxim jixatlaridan biri bu – maqsadni aniqlashtirish hisoblanadi. Har qanday model tadqiqotchi qo'ygan biror masalaga bog'liq holda tuziladi. Agar maqsad aniq bo'lsa, keyingi qadam modellashtirish turini tanlashdan iborat bo'ladi. Shundan so'ng tanlangan modelni real jarayonga yoki obektga nisbatan qo'llash talab etiladi.

Butun bir model maqsadni ifodalamaydi, u modelni to'g'ri ishlashi va to'g'ri tuzilishi uchun shart, mezon sifatida foydalaniladi. Model tadqiq qilinayotgan o'bekt parametrlari, strukturalari, algoritmlari haqidagi axborotlar mavjud bo'lsa quriladi. To'g'ri qurilgan modelning xarakterli tomoni shundaki u faqat tadqiqotchni qiziqtiradigan qonuniyatlarni aks ettiradi xolos, butun orginal tizimni masalaga taalluqli bo'lmagan xossalarini aks ettirmaydi.

Matematik madel tuzish haqidagi tasavvurni uyg'otish uchun biz kundalik hayotimizda uchraydigon jarayonlar uchun eng soda misollarni ko'rib chiqamiz.

1.1-misol. Ob'ekt: uzunligi $L = 6m$, balandligi $H = 3m$ va qalinligi $C = 40$ sm bo'ldan devor berilgan bo'lsin, shu devor uchun ketadigan g'isht sonini aniqlash masalasini matematik modelini tuzishni ko'rib chiqamiz.

Bunda, g'isht o'lchami: uzinligi l=2,5 sm, eni c=12sm, qalinligi h=6,5sm

Model: $n = \frac{LC}{lhc}$

Natija: $n = \frac{6 \cdot 3 \cdot 0.4}{0,245 \cdot 0,12 \cdot 0,065} = 3767,66$

Modelni aniqlashtirish: 6 × 3 o'lchamli devor faqat g'ishtdan iborat emas, u g'isht, qorishma, bo'shliqdan iborat. Qorishma qalinligi q=1cm, bo'shliq b=1cm

n=L*H*C/((l+b)*(h+q)*(c+b))

Natija: n=6*3*0,4/(0.255*0.13*0.075)=2895,9276

Real xayotda bunday devor 1,5 g'isht qalinligida uriladi, u holda

N=L*H/((l+b)*(h+q))*1.5=1411,765

(izoh: Matematik modelni fizika, ximiya va boshqa qonunlardan farqini yuqoridagi misol yaqqol ko'rsatadi.)

1.2-misol. Ob'ekt: uzunligi L=6m. balandligi H=3m. va qalinligi C=40 sm. bo'ldan devor shu devorni qurish uchun ketadigan mablagni aniqlash.

1.3-misol. Ob'ekt: uzunligi L=6m. balandligi H=3m. va qalinligi C=40 sm. bo'ldan devor.

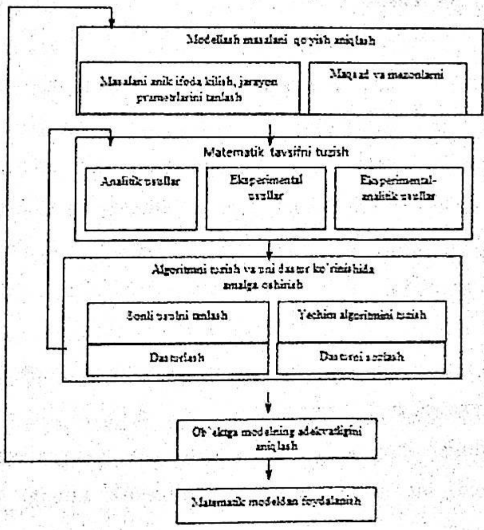
Maqsad: Shu devorni pardozlash uchun ketadigan mablagni aniqlash.

1-3 misollarda ob'ekt bitta maqsad har xil. Yagona bitta model yo'qki bu ob'ekt xaqida barcha savollaga javob beradigan. Lekin, mumkin bo'lgan barcha maqsadlarni ko'zlab tuzilgan modellarni o'z ichiga olgan bitta kompyuter dasturi yaratish mumkin, bu kompyuterli model bo'ladi, undan bitta ob'ekt haqida turli ma'lumotni olish mumkin bo'ladi. Bu modeldan foydalanishda har bir maqsad uchun kerakli ma'lumotlar kiritishni talab qiladi.

Matematik va axborotli modellashtirish

Matematik modellashtirish matematikaning bir soxasi emas, u matematik nazariyaning tadbiqi masalasidir o'rganilayotgan ob'ekt o'rniga ob'ektning matematik modeli quriladi va keyin aynan u tadqiq etiladi.

Matematik modelni ishlab chiqish bosqichlari.



Matematik model quyidagi elementlar kombinatsiyasidan iborat:

- O'zgaruvchlar (ma'lum va noma'lum) – har doim aniqlanish sohasiga ega (kirish o'zgaruvchilari va chiqish o'zgaruvchilari)
- Parametrlar – sonli qiymatlar qabul qiladi
- Funksional bog'lanishlar
- Cheklashlar (tabiiy yoki suniy)
- Maqsad funksiya (optimallash masalalarida)

Axborotli modellashtirish

Tadqiqot ob'ekti (lotincha objectum – predmet) inson faoliyati qaratilgan barcha narsa.

Ob'ekt modeli quyidagilarga bo'g'liq

1. Tadqiqot ob'ekti (kimni yoki nimani tadqiq qilamiz)

2. Tadqiqot muammosi va masalasi (ob'ekt haqida nimani bilishni istaymiz)
3. Ob'ekt haqida aprior axborot (o'bekt haqida o'zi nimani bilamiz)
4. Tadqiqot sub'ekti (kim tadqiq etadi)
5. Ob'ektni tavsiflash tili (ob'ektni qanday tavsiflaymiz va tadqiq qilamiz)

Ob'ekt modelini qurish uchun uni tashqi muxitdan ajratib olish kerak. Tadqiqot ob'ektiga tashqi ob'ektlar ta'sirini va bunga ob'ekt reaksiyasini aniqlashtirish kerak. Tashqi ta'sirlarni kirish omillari (ma'lum o'zgaruvchilar), ob'ekt reaksiyasini chiqish omili (noma'lum o'zgaruvchilar) deb yuritiladi.

Ob'ektga tashqi tasirlar 2 xil bo'ladi: boshqaruvchi va qo'zg'atuvchi.

Maqsadga muvofiq ta'sir –boshqaruvchi deb ataladi

Tasodifiy, o'zgartirishga moil bo'lmagan ta'sir esa – qozg'atuvchi deb ataladi. Ob'ekt xarakteristikalari murakkabligiga qarab bir necha turlarga bo'linadi bular sodda, murakkab va katta tizimlardir.

Boshqariluvchanlik esa natijalarni muofiqlik darajasiga qarab aniqlanadi (har xil vaqtda bir xil holatli ob'ektni o'rganish aniqligi ko'rsanilgan qiymatdan oshmasligi)

Modellashtirish:

- tadqiq qilinayotgan ob'ekt, korxona yoxud tarmoqning deterministik va stoxastik modellarini tuzishga imkon berib, ushbu jarayonlarni sifat va son jihatidan tizimli boshqara oladigan va bashorat qila oladigan modellarini yaratadi;
- tadqiq qilinayotgan ob'ektni samarali boshqarish uchun o'tkazilgan tadqiqotlar asosida maslahat beruvchi takliflar yoki boshqaruv qarorlarini ishlab chiqishga imkon beradi.

Modellashtirishning afzalliklari:

-Avvalo, modellashtirish katta va murakkab sistemani oddiy model yordamida ifodalashga imkoniyat beradi.

-Model tuzilishi bilan kuzatuvchiga eksperimentlar qilish uchun keng maydon tug'iladi. Modelning parametrlarini bir necha marta o'zgartirib, ob'ektni faoliyatini eng optimal holatini aniqlab, undan keyin hayotda qo'llash mumkin. Real ob'ektlar ustida eksperiment qilish ko'plab xatolarga va katta xarajatlarga olib kelishi mumkin.

-Model, noshakl sistemani, matematik formulalar yordamida shakllantirishga imkoniyat beradi va EHMlar yordamida sistemani boshqarishga yordam beradi.

- Modellashtirish o'rganish va bilish jarayonini kengaytiradi. Model hosil qilish uchun ob'ekt har tomonlama o'rganiladi, tahlil qilinadi. Model tuzilganidan so'ng, uning yordamida ob'ekt to'g'risida yangi ma'lumotlar olish mumkin.

Modellashtirish jarayonida quyidagi asosiy shart-sharoitlarni bajarilishi talab etiladi:

– modelda o'tkaziladigan tajribalar originaldagiga nisbatan qisqa vaqtda amalga oshirilishi, oddiy, kulay, arzon va xavfsiz bo'lishi lozim;
– modeldagi tadqiqotlar muayyan algoritmlar yordamida o'tkazilishi kerak;
– modelning tarkibi, tuzilishi va vazifasi modellashtirishdan ko'zlangan asosiy maksadlarga uygun bo'lishi lozim, chunki hech bir model originalni aynan qaytarmaydi.

1.2. Matematik modellarni qurish metodlari.

Har qanday ob'ektning matematik modeli tuzilayotganda eng avval bu ob'ekt xossalari mutaxassislar tomonidan chuqur o'rganib chiqiladi. Ob'ekt xossalarini ifodalovchi o'zgaruvchi parametrlar o'rtasidagi bog'lanishlar aniqlanadi. Shundan keyin ayrim cheklanishlar qilinadi va qaysi faktorlar masalaning echimiga etarlicha ta'sir etish aniqlanadi va bu faktorlar matematik modellashtirishda e'tiborga olinadi. Ob'ektlarni matematik modellashtirish davomida turli xil farazlarga asoslanganligi sababli har xil matematik modellar hosil bo'ladi. Ob'ektni matematik modellashtirish natijasida asosan uch xil model hosil bo'ladi:

- statik modellar;
- dinamik modellar
- tarmoq modellar.

Statik modellarda tekshirilayotgan ob'ekt xususiyatlari vaqtga bog'liq bo'lmagan holda qaraladi, ya'ni masalaning echimi vaqtga umuman bog'liq emas yoki vaqt o'zgarishi masalaning echimiga etarlicha kam ta'sir etadi. Bu holda ob'ekt fazoviy koordinatalarga bog'liq ravishda o'rganiladi.

Dinamik modelda esa aksincha, ob'ekt xossalari faqat vaqtga bog'liq ravishda modellashtiriladi. Bu masalalarning echimi fazoviy koordinatalarning o'zgarishiga bog'liq bo'lmaydi. Agar biz bu masalalarda vaqtni hisobga olmasak, tuzilgan matematik model noto'g'ri bo'ladi va tekshirishlar natijasida biz boshqa masalaning echimiga ega bo'lib qolamiz.

Bir vaqtning o'zida ham fazoviy koordinatalar hamda vaqt o'zgarishiga bog'liq bo'lgan ob'ektlar tarqoq model ko'rinishida modellashtiriladi. Bu holda o'rganilayotgan ob'ekt xossa va xususiyatlariga vaqt o'zgarishi hamda bu ob'ektning fazoda joylashishi katta ta'sir qiladi.

Ob'ektning xossa va xususiyatlariga bog'liq ravishda modellashtirish turli xil usullarda olib boriladi. Keyingi paytlarda ob'ektlarni modellashtirishda asosan ikki xil analitik va eksperiment usullaridan keng foydalanilmoqda.

Ob'ekt analitik usulda modellashtirilganda, shu ob'ektning asosiy xossa va xususiyatlari matematik munosabatlar (tenglama, tengsizlik, integral, differentsial, integrodifferentsial tenglamalar yoki ularning sistemalari) yordamida yoziladi, ya'ni ob'ekt xususiyatlari matematik formulalarga ko'chiriladi. Bu usulda matematik munosabatlar shu ob'ektning barcha asosiy birlamchi xossalarini o'z ichiga olgan hamda sodda ko'rinishda bo'lish talab qilinadi. Modellashtirishning analitik usuli mutaxassisdan o'z sohasini chuqur bilish bilan birga hisoblash matematikasi va algoritmik tilda dasturlash fanlarini ham etarli darajada egallashni talab etadi.

Odatda injenerlik masalalarining matematik modeli algebraik tenglamalar, oddiy yoki xususiy hosilali differentsial tenglamalar, integrallar yoki ularning sistemalari ko'rinishida bo'lsa, optimallashtirish masalalarining matematik modeli esa asosan tengsizlik, mantiqiy ifoda yoki ularning sistemalari ko'rinishida ifodalanadi.

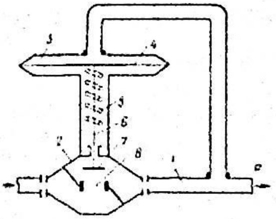
Masalan, elastik to'sin egilishi haqidagi masalaning matematik modeli to'rtinchi tartibli oddiy differentsial tenglama va unga quyilgan chegaraviy shartlardan tashkil topgan bo'lsa, optimallashtirish masalasi bo'lgan transport masalasining matematik modeli esa oddiy chiziqli algebraik tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi va maqsad funktsiyaga eng katta yoki eng kichik qiymat beruvchi o'zgaruvchilarni topish masalasiga keltiriladi.

Eksperiment usulda qurilgan model ob'ektlar ustida o'tkazilgan tajribalar natijalari yordamida, ya'ni kuzatishlar orqali olingan natijalar asosida qurilgan modeldir. Ob'ektning eksperiment modelini qurish juda murakkab jarayon hisoblanadi. Chunki ayrim ob'ektlarning eksperiment modelini qurish uchun uzoq vaqt oralig'ida, har xil sharoitlarda bir qancha kuzatishlar o'tkazishga to'g'ri keladi. Ayrim hollarda kuzatish natijalariga bir qator ob'ektiv va sub'ektiv sharoitlar ham katta ta'sir etadi. Shu sababli keyingi paytlarda matematik modellashtirishda ko'proq analitik usullardan keng foydalanib kelinmoqda.

Ma'lumki, biror ob'ektni matematik modellashtirish deganda shu ob'ekt xossa va xususiyatlarini matematik munosabatlar yoki mantiqiy ifodalar orqali ifodalash tushuniladi. Odatda modellashtirishning bu usuli analitik usul deb ataladi. Matematik munosabatlar o'z ichiga tenglama, integral, tengsizlik, oddiy va xususiy hosilali differentsial tenglama yoki ularning sistemalarini o'z ichiga oladi. Ob'ektning matematik modelida matematik munosabatlarning qaysi biri qatnashishi modellashtirilayotgan ob'ekt xossalariga bog'liq bo'ladi. Masalan, mayatnik tebranishi masalasini qarasak, uning matematik modeli oddiy differentsial tenglama va unga qo'yilgan boshlang'ich shart orqali ifodalansa, o'zgaruvchan kesimli elastik sterjen tebranishi masalasining matematik modeli esa o'zgaruvchan koeffitsientli, xususiy hosilali, to'rtinchi tartibli differentsial tenglama va unga qo'yilgan boshlang'ich hamda chegaraviy shartlar yordamida ifodalanadi. Optimallashtirish masalalarining matematik modeli esa, asosan tengsizlik yoki ularning sistemalari orqali ifoda qilinadi.

Misollar

1) 1-rasmda ko'rsatilgan gaz bosimini stabillashtiruvchi rostlagich uchun matematik bog'lanishni ko'raylik. Oldin bu yerda yuz beradigan jarayonni o'rganamiz.



1-gaz quvuri
2- rostlovchi organ,
3-membrana qutisi,
4-membrana,
5-prujina,
6-шток, surilgich
7-затвор, qopqoq
8- tirqish

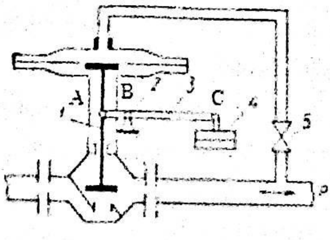
1.1-rasm. Gaz bosimini stabillashtiruvchi P rostlagich.

Quvirdagi gaz bosimi prujina bikirlik kuchidan ko'p bo'lsa, 4-membrana bosim bilan pujinani siqadi va 6-surilgich pastga L birlik suriladi, ma'lum bir bosim P_0 da surilgich eng katta qiymatga erishadi $L=L_{max}$ va 8-tirqishni 7-qopqoq yopib qo'yadi, bu bosim stabil holda degani, bosim pasayib ketsa prujina bikirlik kuchi membranani yuqoriga ko'taradi va surgich 7 tepaga surilib qopqoqni yuqoriga ko'taradi, tirqish ochilb gaz tirqishdan o'ta boshlaydi. Bu qurilmada quvurdagi bosim P va surilgich ko'chishi L orasidagi bog'lanish, prujina massasi va ishqalanish kuchini juda kam deb faraz qilganda, quyidagicha:

$$L = \frac{F}{C} P,$$

Bu yerda F-membrana yuzasi, C-prujina bikirlik koeffitsenti.

2) 2-rasmda ko'rsatilgan gaz bosimini stabillashtiruvchi rostlagich uchun matematik bog'lanishni ko'raylik



1- шток. surilgich
2- tayanch nuqta,
3- richag
4- yuk
5- ventil

1.2-rasm. Gaz bosimini stabillashtiruvchi I rostlagich.

Bu qurilmada membranaga beriladigan gaz bosimi P ga qarshi kuch 4-yukning G og'irlik kuchidir. Yuk 2- tayanch nuqtaga qo'yilgan richakning C uchiga osilgan. 5-ventil orqali o'tgan gaz mebranaga ta'sir etadi, yuzasi F bo'lgan membrana R=FP kuch bilan 1-surilgichga ta'sir qiladi, surilgichning A nuqtasiga maxkamlangan richagning AB elkasida soat strelkasiga qarshi R|AB| kuch momentini hosil bo'ladi, unga qarshi BC elkada 4-yuk soat strelkasi bo'yicha G|BC| kuch momentini hosil qiladi. Surilgich L_{max} ga surilganda gaz o'tadigan tirqish yopiladi. Bunga har ikkala elka kuch momentlari o'zaro teng bo'ladi:

$$R|AB| = G|BC|.$$

Bu muvozanat munosabatidan yukning og'irligi va qoyilgan nuqtasiga qarab quvurdagi gaz bosimini turli qiymatda rostlash mumkin.

R=FP ni inobatga olsak (*) muvozanat munosabatidan

$$P = \frac{G}{F}\frac{|BC|}{|AB|}$$

ifodani olamiz, lekin bu munosabat rostlash qonunu emas, rostlash qonuni vaqt bo'yicha o'zgarishlarni o'zida ifoda etadi, bu yeda o'ng tomonda konstruksiya bo'yicha o'zgarmas sonlardir. Ularni fiksirlangan qiymatida quvurdagi bosimni faqat bir xil ushlab turiladi.

Ko'rilayotgan rostlagichning dinamikasi ya'ni vaqt bilan bog'liqlik ifodasi surilgichning ko'chishi L va ventildan o'tayotgan gaz bosimi P bilan talab etilayotgan gaz bosimi P_0 farqi $\Delta P=P-P_0$ orasidagi bog'lanishda namoyon bo'ladi. Bu yerda surilgichni ko'chishi va bosim farqi o'rtasida quyidagicha bog'lanish mavjud:

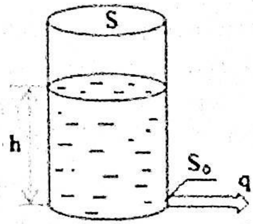
$$\frac{F}{c_2 f}\frac{dL}{dt} = \Delta P,$$

bu yerda F-membrana yuzasi, f - 5-ventil o'tkazish kesimi yuzasi, c_2 – ventildan o'tayotgan gaz hajmiy sarfi bilan ΔP o'rtasidagi proporsionallik koeffitsenti. Bu bog'lanishni integrallash orqali quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$u(t) = \frac{1}{K_i}\int_0^t e(\tau)d\tau$$

Bu yeda $u(t) = \frac{L(t)}{L_{max}}$, $K_i = \frac{F\,L_{max}}{c_2 f P_0}$, $e(\tau) = \frac{\Delta P}{P_0}$

1.4. masala. Faraz qilaylik bir idish ichida suv bor. Idish aylana kesimi yuzasi S, suv idishning h balandligigacha quyilgan, idishning pastki tomonida ko'ndalang kesiminig yuzasi S_0 bolgan jo'mragi bor. Jo'mrak ochilganda suv oqib chiqadi va suv balandligi h pasayadi. Oqib chiqayotgan suv miqdori q bilan h balandligi orasidagi matematik bog'lanish tuzilsin. *(q- m.kub/sek. da, h-metrda).*



1.3-rasm. Jo'mrakli idish

Bu masalani hal etishda Bernulli qonunidan foydalanamiz, u bizning holda quyidagi ko'rinihga ega

$$\rho g h = \frac{\rho v^2}{2}.$$

Bu yerda ρ –suyuqlik zichligi(kg/m^3), $g \approx 9{,}81 m/s^2$ –erkin tushish tezlanishi, v –oqib chiqayotgan suv tezligi(m/s).

Tenglikning har ikkala tomonini ρ ga qisqartirib v ga nisbatan yechsak

$$v = \sqrt{2gh}$$

hosil bo'ladi. Jo'mrakdan oqib chiqayotgan suv tezligini ko'ndalang kesimi yuzasiga ko'paytirsak vaqt birlgi ichida oqib chiqayotgan suv miqdorini aniqlaymiz: $q = S_0 v$.

Bu ifodaga Bernulli qonunidan topgan tezlik v ifodasini qo'ysak $q = S_0\sqrt{2gh}$ ga ega bo'lamiz. Uni quyidagicha yozish mumkin

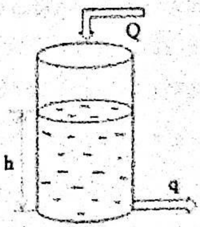
$$q = S_0\sqrt{2g}\,\sqrt{h} \qquad (1.1)$$

$\alpha = S_0\sqrt{2g}$ deb belgilash kiritsak

$$q = \alpha\sqrt{h} \qquad (1.2)$$

Shu bilan, oqib chiqayotgan suv miqdori q bilan h balandligi orasidagi matematik bog'lanish ya'ni matematik modeli tuzildi.

1.5-masala. Qishloq aholisini suv bilan ta'minlash uchun yer ostidan suvni nasos orqali katta hajmdagi idishga tortib olinadi. (2.12-rasm). So'ng aholiga uzatiladi. Aholini suvga bo'lgan talabi vaqt bo'yicha o'zgaruvchan, xonadonlar soni shunchalik ko'pki, suv oqimi hech to'xtab qolmaydi, doim kimdir suvni ochadi. Shu holda ham idishdagi suv sathini bir ko'rsatkichda ushlab turish talab etiladi.



1.4-rasm. Sathni boshqarish masalasi

Bu masalada, holatga qarab suv tortishni tezlatib yoki sekinlatib turish kerak. Manashu suv sathini boshqarish masalasi hisoblanadi. Uni hal etish uchun jarayonning matematik modelini qurish zarurdir. Shu modelni qurishni ko'raylik.

Model qurish uchun oldin kerakli belgilashlar kiritaylik:

h – suv sathini o'zgarishi(metrda),

h_0 – talab etilayotgan suv sathi (metrda),

Q – quyiladigan suv hajmi (m^3/s),

q – oqib ketadigan suv hajmi (m^3/s),

S – idish ko'ndalang kesimi yuzasi(m^2).

Suv sathining o'zgarishi Δh, quyilayotgan va oqib ketayotgan suv hajmlari farqi $Q - q$ bilan idish ko'ndalang kesimi yuzasi S ga bog'liq. Agar suv oqimlari vaqtning Δt oraligida o'zgarmas bo'lsa, u holda

$$\Delta h(t) = \frac{Q(t)-q(t)}{S}\Delta t. \qquad (1.3)$$

Umumiy holda bu integral orqali aniqlanadi:

$$\Delta h(t) = \frac{1}{S}\int_0^t (Q(t) - q(t))\,dt. \qquad (1.4)$$

Boshlangich vaqtda suv sathi talab darajasida va kelayotgan, ketayotgan suv oqimi teng bo'lsin, ya'ni $t = 0$ da $h = h_0$ va $Q(0) = q(0) = q_0$ bo'lsin. Bunday holatni ya'ni $h = h_0$ va $Q(t) = q(t) = q_0$ bo'lgan holni nominal holat (ishchi nuqta) deb nomlaymiz. (*quyilayotgan va chiqib ketayotgan suv miqdori teng bo'lsa suv sathi o'zgarmas bo'ladi, shu holat nominal holat yoki h ning ishchi nuqtasi deyiladi*).

Suv oqimlarini nominal nuqtadan og'ish orqali yozadigan bo'lsak

$Q(t) = q_0 + \Delta Q(t), \quad q(t) = q_0 + \Delta q(t).$

Yuqorida olingan (1.3) formulaga bularni qo'yamiz

$$\Delta h(t) = \frac{1}{S}\int_0^t (q_0 + \Delta Q(t) - q_0 - \Delta q(t))dt = \frac{1}{S}\int_0^t (\Delta Q(t) - \Delta q(t))\,dt$$

Demak, nominal nuqtadan og'ish orqali yozildan model quyidagicha

$$\Delta h(t) = \frac{1}{S}\int_0^t (\Delta Q(t) - \Delta q(t))\,dt$$

Agar $h(t), Q(t)$ va $q(t)$ larni nominal nuqtadan og'ish deb qabul qilsak, ya'ni ularga nominal nuqtadan og'ish ma'nosini bersak ortirma belgisi Δ ni yozmasligimiz mumkin:

$$h(t) = \frac{1}{S}\int_0^t (Q(t) - q(t))\,dt. \qquad (1.5)$$

Bu yuqoridagi suv bilan ta'minlash ob'ektining matematik modelidir. Ushbu model oraqli suv bilan taminlash obektini ishlash jarayonini tahlil qilish mumkun bo'ladi.

1.3. Tabiatning fundamental qonunlari asosida matematik modellarni qurish va tahlil qilish.

Tabiatning fundamental qonunlari asosida matematik modellar qurishda o'rganilayotgan jarayonga mos qonun olinadi va matematik o'zgartirishlar orqali zaruriy bo'g'lanish aniqlanadi. Bunda bog'lanish algebraik, differensial yoki integral korinishlarda bolishi mumkin.

1.4-masala. *To'gri chiziqli harakat.* Agar moddiy nuqtning harakat tezligi kuch ta'sir etadigan chiziq yo'nalishida bo'lsa, u holda moddiy nuqta harakati to'g'ri chiziqli bo'ladi. Harakat chzig'ini Ox o'q uchun qabul qilamiz. Nyutinning 2-qonunidan nuqta harakatining differensial tenglamasini hosil qilamiz:

$$m\frac{dv}{dt} = X,$$

Bu yerda $\frac{dv}{dt}$ –tezlanish, m-harakatlanayotgan nuqta massasi, X – kuch kattaligi.

1.5-masala. *Harakat miqdorining o'zgarishi.* X kuch t vaqtning funksiyasi sifatida berilgan bo'lsin: X=X(t), harakatning $t=t_0$ dagi boshlang'ich tezligi $v=v_0$. moddiy nuqta harakati tenglamasini integrallab quyidagini hosil qilamiz:

$$v = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} X(\tau)d\tau + C$$

Ixtiyoriy o'zgarmasni $t=t_0$ da $v=v_0$ boshlang'ich shartdan aniqlaymiz: $v_0=C$, demak,

$$v = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} X(\tau)d\tau + v_0$$

Bu yechimni quyidagicha yozish mumkin:

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^{t} X(\tau)d\tau$$

Bu tenglik quyidagini ifodalaydi: *nuqtaning biror chekli vaqt oraligidagi haarakat miqdorining o'zgarishi ta'sir etuvchi kuchning shu vaqt oraligidagi impulsiga teng.*

1.6-masala. Yorug'likni suv orqali o'tishi. Yorug'lik oqimining yupqa suv qatlami tomonidan yutilishi qatlaam qalinligiga va qatlam sirtiga tushayotgan o'qimga proporsionaldir. 2 m li qatlamdan o'tishda dastlabki yorug'lik oqimining 1/3 qismi yutilishini bilgan holda uning h metrli chuqurlikdagi miqdori bilan dastlabki miqdori orasidagi bog'lanishni aniqlang.

h chuqurlikdagi sirtga tushayotgan yorug'lik oqimini Q orqali belgilaymiz. Qalinligi dh bo'lgan suv qatlamidan o'tishda yutilgan yorug'lik oqimi Dq ushbuga teng:

$$dQ = -kQdh$$

bu yerda k –proporsionallik koeffitsienti.

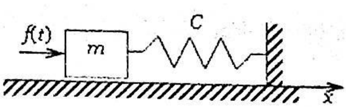
Bu differensial tenglamaning yechimi: $Q=Ce^{-kh}$. Dastlabki yoruglik oqimi Q_0 ga teng bo'lsin. U holda h=0 da $Q=Q_0$ ligidan $C= Q_0$ ni topamiz, shunga ko'ra $Q=Q_0e^{-kh}$

Proporsionallik koeffitsienti k ni berilgan shartga ko'ra aniqlaymiz: h=2da $Q=2/3Q_0$ dan $2/3Q_0=Q_0e^{-2k}$. Demak, $e^{-k}=(2/3)^{1/2}$ shunday qilib,

$$Q = Q_0\left(\frac{2}{3}\right)^{h/2}$$

1.4. Matematik modellarni chiziqli differentsial tenglamalar orqali ifodalash

1.7-Masala. Massasi m ga teng bo'lgan jism, bikirligi C bo'lgan prujina bilan devorga maxkamlangan, u qovushqoqligi v bo'lgan muxitda, *f(t)* tashqi ta'sir tufayli tebranma xarakat qiladi. Ushbu tizim xarakati modeli



Tashqi $f(t)$ kuchdan tashqari jismga quyidagi kuchlar ta'sir qiladi: inersiya kuchi $m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$, ishqalanish kuchi $\nu\frac{dx(t)}{dt}$, prujina elastiklik kuchi $\frac{1}{C}x(t)$. Bu kuchlar xarakatga qarshi kuchlardir. Dalamber prinsipiga ko'ra jismga ta'sir etuvchi barcha kuchlar yig'indisi nolga teng

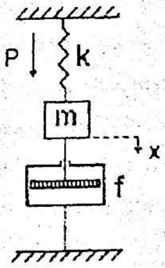
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\nu\frac{dx(t)}{dt}+\frac{1}{C}x(t)-f(t)=0.$$

Boshlang'ich shart jismni boshlang'ish xolati va boshlang'ich tezligini xarakterlaydi: $x(0)=x_0$; $x'(0)=0$

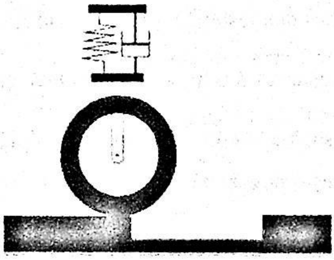
1.6-masala. Bikirligi k bo'lgan prujinaga osilgan, massasi m ga teng bo'lgan jism va dempferlash koeffitsiyenti f bo'lgan dempferdan iborat tizimning tashqi kuch P(t) ta'siridagi xarakati tenglamasini aniqlaymiz. Tizimdagi o'zaro ta'sir kuchlari: $F_1(t)=kx(t)$ - prujina ta'sir kuchi, $F_2(t)=m\ddot{x}$ - jism ta'sir kuchi, $F_3(t)=f\dot{x}$ - dempfer ta'sir kuchi.

Malumki, $F_1(t)+F_2(t)+F_3(t)=P(t)$ bundan quyidagi kelib chiqadi:

$$m\ddot{x}(t)+f\dot{x}(t)+kx(t)=P(t)$$



1.7-masala. Soddalashtirilgan prujina – amortizator sistemasini modellashtirish orqali avtomobilning kotarib turuvchi sistemasi holatini tahlil qilish (1.5 – rasm). Har xil turdagi yo'l sharoitlarini modellashtiradigan, kirish funksiyasiga kotarib turuvchi sistemaning reaksiyasini tavsiflovchi differentsial tenglama yozing. Vertikal siljishga bog'liqlikni o'rganish y, avtomobil kuzovining tebranishi c va risorning bikirligi k.



1.5 – rasm. Avtomobilning ko'tarib turuvchi tizimi

Avtomobilning kotarib turuvchi sistemasi S – modelini qurish. Blokli parametrlarini o'rnatish uchun MATLAB o'zgaruvchilaridan foydalaniladi. Modellashtirish natijasini Figure grafik oynasida chiqariladi. O'zgaruvchilarni tanlash, S – modelini chaqirish va natijalarni Figure grafik oynasiga chiqarish m – fayl orqali bajariladi.

Kirish parametrlari

- avtomobil barcha qisimlarining faqat vertikal ko'chishi qaralsin;
- amortizator va prujinanig massasi hisobga olinmasin;
- shinaning amortizatsiyalash xususiyati va ogirligi hisobga olinmasin;
- avtomobil g'ildiragi ko'chishi kirish signallarini ikki bosqichli signallar yigindisi (**Sources | Step**) sifatida modellashtirilsin. Birinchi funksiya yo'ldagi chuqurga tushushini, ikkinchi funksiya esa chuqurdan chiqishini tahlil qiladi;

Kirish funksiyasi – avtomobil g'ildiragi y_l ning vertikal ko'chishi - ikki bosqichli signal orqali amalga oshiriladi: dastlab vertikal joy o'zgartirish 0 m ga to'g'ri keladi va g'ildirak chuqurgacha 100 m harakatlanadi; so'ngra g'ildirak 0.15 m li chuqurga tushadi va 1 m harakatlanadi, songra chuqurdan chiqib dastlabki 0 m holatiga kelib model tugagunga qadar harakatni davom ettiradi.

v=20 m/s – avtomobil harakatining tezligi;

m=1000 kg – avtomobil ogirligi;

hole_depth=0.15m – yamaning chuqurligi;

hole_lenght=1m – yamaning uzunligi;

hole_start=100m yamagacha bolgan masofa:

y_1 m – vertikal harakatlanuvchi g'ildirakning kirish funksiyasi;

$$y_1 = \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ -0.15, & t_1 \le t < t_2, \\ 0, & t \ge t_2. \end{cases}$$

Bu yerda t_1 va t_2 shinanig chuqurga tushish va chuqurdan chiqish vaqtlariga togri keladi;

k=1000 kg/s^2 – risorning bikirligi (stiffness);

c=100 kg/s – demferlash koeffisienti (damping coefficient);

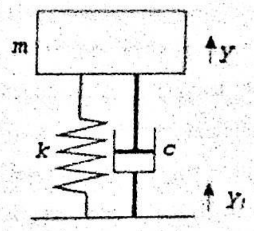
Matematik model

Modelda transport vositasining faqat vertikal holatdagi kochishi qaraladi. Tortishish kuchi hisobga olinmasin, chunki u risorning dastlabki deformatsiyasi bilan toldiriladi.

Matematik model quyidagi diferensial tenlama orqali ifodalanadi

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k(y - y_1) = 0. \tag{1.5}$$

Modellashtirilgan transport sistemasining sxemasi 2 – rasmda korsatilgan.



1.6 – rasm. Avtomobilning kotarib turuvchi sistemasining sxemasi

Y ozgaruvchisi avtomobil kuzovining vertikal kochishini tasvirlaydi. (1) tenglamani quyidagicha yozish mumkun

$$\ddot{y} = -\frac{c\dot{y} + k(y - y_1)}{m}. \tag{1.6}$$

Avvalo ikkinchi darajali differensial tenlama (2) ni birinchi darajali tenglamalar sistemasiga aylantiramiz, bu esa avtomobilning vertikal harakatini tezligini aniqlaydi $v = \dot{y}$

$$\begin{cases} \dot{y} = v, \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{v} = -\dfrac{cv + k(y - y_1)}{m}, \\ v(0) = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Simulink – model

Ishchi katalogni joriy katalog **Current Directory** sifatida o'rnatamiz. m – fayl ochamiz va uni tanlangan katalokga saqlaymiz va ozgaruvchilarni kiritamiz **m, v, hole_depth, hole_length, hole_start, c, k** va vaqt **t1** chuqurga tushish va **t2** chuqurdan chiqishni hisoblaymiz.

Clear all;

m=1000; % Avtomobil ogirligi (kg)

v=20; % Avtomobil harakatining tezligi (m/s)

k=1000; % Prujinaning bikirligi (kg/s^2)

c=100; % Amortizatsiya koeffitsienti (kg/s)

hole_start=100; % Yamagacha bolgan masofa (m)

hole_lenght=1; % Yamaning uzunligi (m)

hole_depth=0.15; % Yamaning chuqurlig (m)

t1=hole_start/v; % Yamaga kirish vaqti (s)

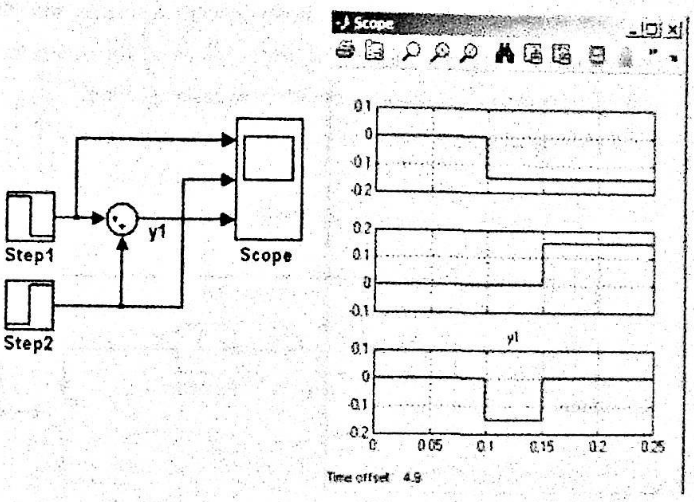
t2= (hole_start+hole_lenght)/v; % G'ildirakning yamadan chiqish vaqti (s)

Simulink – model faylini **L0501.mdl** ko'rinishida saqalaymiz.

S – model konfiguratsiya parametrlarini kiritamiz **start time = 0, stop time = 100, Solver Options Type = Fixed step, Solver = ode5 Dormand Prince, Fixed Step Size = 0.001.**

Gildirakning harakatini **y1** ni ikkita **sources | step** bloklari orqali kiritamiz. Buning uchun:

- Modelga **step1** va **step2** bloklarini kiritamiz;
- **Step1** blogiga quyidagi parametrlarni kiritamiz: **Step time = t1; Initial value = 0; Final value = - hole_depth; Sample time = 0.001;**
- **Step2** ga quyidagi parametrlarni ornatamiz: **Step time = t2; Initial value = 0; Final value = hole_depth; Sample time = 0.001;**

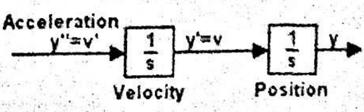


1.7 – rasm. Avtomobilning gildiragi harakatini modellashtirish

- Signallarni **Math operetions | Sum** blogi orqali qoshamiz (1.7 - rasm).

Natijani **Scope** blogiga ulab organamiz va tegishli vaqt oralig'ini tanlab, modeldagi konfiguratsiya parametrlarini boshlash vaqti va to'xtash vaqtini modellashtirishni tekshiramiz.

Continuous | Integrator bloglari orqali biz 1.8 – rasmda korsatilganidek, harakat tezligi va tezlanishini ozgarishini aniqlaymiz.



1.8– rasm. Integrator blogidan foydalanish

Prujinanig siqish kuchini hisobga olamiz **(Spring Force).**

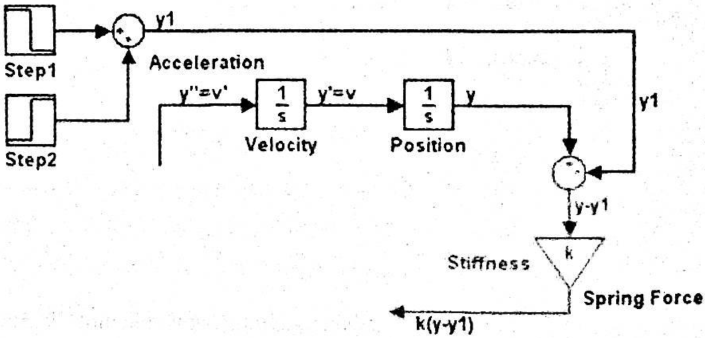
Buning uchun:

- S – modelga **Gain** signal kuchaytirgichni kiritamiz uni Stiffness deb nomlaymiz va parametrini **Gain** = **k** deb belgilaymiz. Bu parameter prujinaning bikirligini beradi qiymati **Workspase** ishchi oynasiga yoziladi;

- S – modelga **Sum** yigindi blogini kiritamiz va parametriga

List of signs = | + - ;

- Bloglarni 1.9 – rasmda korsatilgandek ulaymiz.



1.9 – rasm. Prujinanig bikirligi hisobga olingan modeli

Porshanning qarshiligi va amortizatorning oz'aro tasiri kuchini hisobga olamiz **(Damping Forse):**

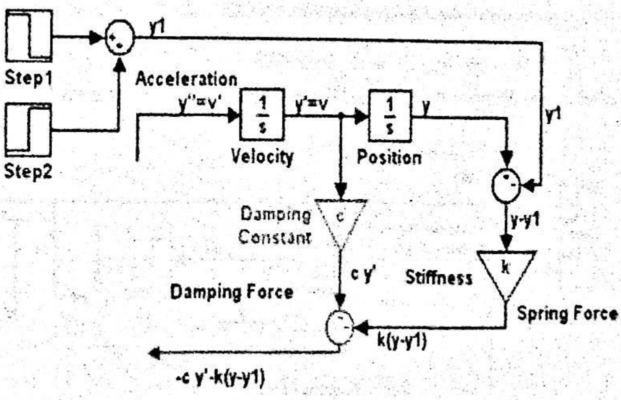
- Modelga **Gain** signal kuchaytiruvchi blogini kiritamiz uni **Damping Constant** deb nomlaymiz va **Gain = c** deb belgilaymiz. Qiymatini **Workspace** ishchi oynasiga kiritamiz;

- S – modelga **Sum** yigindi blogini kiritamiz va parametriga

List of signs = | - - ;

- **Stiffness** va **Damping Constant** bloglarini **Sum** blogi orqali ulaymiz. Blog har ikkala kuchni qoshadi va avtomobilga ta'sir qiluvchi kuch hosil qiladi.

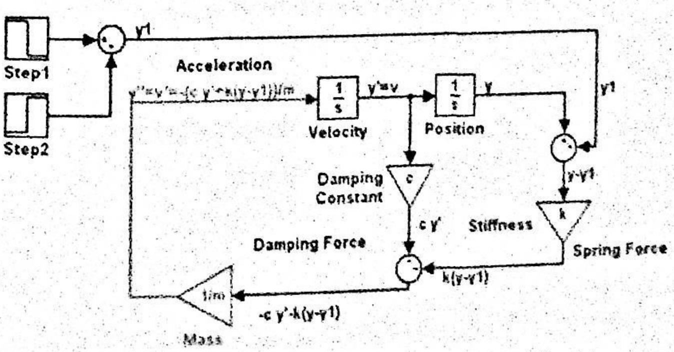
- Bloglarni 1.10 – rasmda korsatilgandek ulaymiz.



1.10 – rasm. Dempferlash va amortizatsiyalash kuchining yigindisi

Tezlanishni hisoblaymiz. Buning uchun:

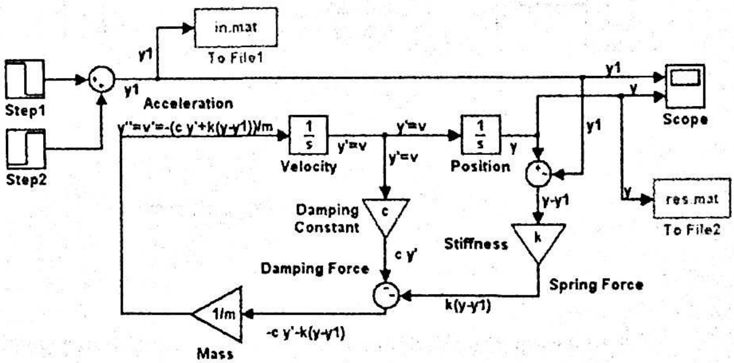
- S – modelga signal kuchaytirgich **Gain** blogini kiritamiz uni **Mass** deb nomlaymiz va **Gain = 1/m** deb nomlaymiz. Qiymatni **Workspace** oynasiga kiritamiz;
- **Mass** blogini avtomobilda ta'sir qiluvchi kuch summatorga ulab, Mass blogining chiqishida tezlanishga ega bolamiz.;
- **Mass** blogini **Velocity** blogi bilan 1.11 – rasmdagidek ulang.



1.11 – rasm. Avtomobil harakatini hisoblash uchun toliq sistema

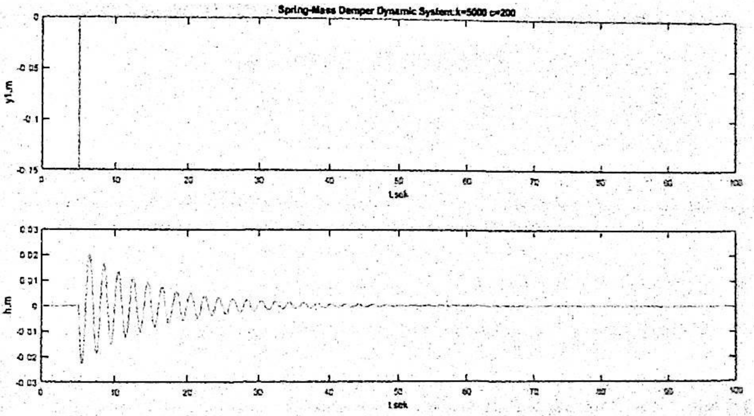
Natijani vizualizatsiya qilish.

- **Sinks | Scope**, blogini modelga kiritamiz va parametrlarini quyidagicha o'rnatamiz **Parameters\Data History\Limit Data Points = off;**



1.12 – rasm. Avtomobilning ko'tarib turuvchi tzizmining matematik modeli

Hosil bo'lgan Simulink modelni vizualizatsiya qilish orqali jarayonning dinamikasini kuzatishimiz va tahlil qilishimiz mumkun. Biz modelni vizualizatsiya qilish uchun shartli ravishta olingan bikirligi k=5000 kg/c^2 va porshenning qarshiligi c=200 kg/s bolgan holi uchun modeldan olingan natijadan shuni aniqlashimiz mumkunki, tanlangan qiymatlar jarayonning optimal yechimi sifatida tanlab olib bo'lmaydi. Demak, optimallashtirishning turli me'zonlari orqali yangi yechım qidirishimiz mumkun bo'ladi



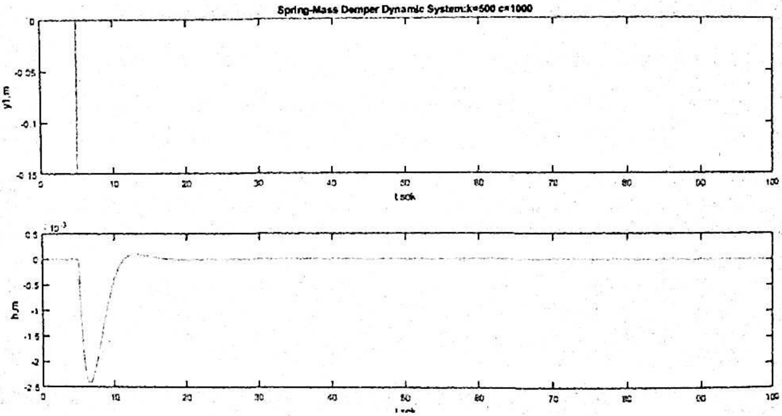
1.13-rasm. Modelning ishlash natijasi

Optimal yechimni tanlash.

Prujinaning amortizatsiyalash koeffitsientini *k* ni ozgartirmasdan, porshenning qarshilik koeffitsientini *c* ni o'zgartirish orqali avtomobining ko'tarib turuvchi sistemasini tadqiq qilamiz. k: k=500, c=10, c=100, c=1000

Porshenning qarshilik koeffitsientini *c* ni ozgartirmasdan, Prujinaning amortizatsiyalash koeffitsientini *k* ni o'zgartirish orqali avtomobining ko'tarib turuvchi sistemasini tadqiq qilamiz. c: c=100, k=10, k=100, k=1000

Modelni bir necha marotaba vizualizatsiya qilish orqali quyidagi yechimga ega bo'ldik. Bikirligi k=500 va porshanning qarshilik koeffitsienti c=1000 qiymatlarini optimal yechim deb tanlab olamiz. Biz keying boblarda texnologik jarayonlar uchun passiv tajriba ma'lumotlari asosida matematik modellar tuzish va ularni tahlil qilishni ko'rib chiqamiz.



1.14-rasm. Modelning optimal natijasi grafigi

Nazorat savollari

1. Texnologik jarayonlarni modellashtirish nima?
2. Matematik modellashtirish qanday amalga oshiriladi.
3. Fizik modellashtirish qachon qollaniladi.
4. Tizimli modellashtirish deganda nimani tushunasiz?
5. Statik modellashtirish nechta turga bo'linadi?
6. Dinamik matematik model nima?
7. Matematik modellarni ishlab chiqish bosqichlarini sanab bering.
8. Matematik modellarni qurish metodlari.
9. Modellarni chiziqli matematik modellar orqali ifodalash qachon qollaniladi?
10. Matematik modellarni tahlil qilishda MatLab matematik paketining o'rni.

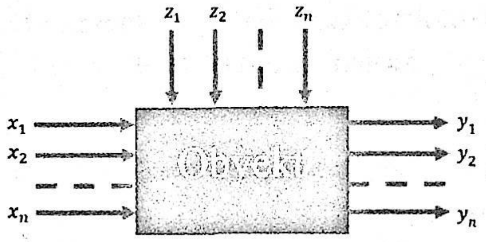
II BOB. TEXNOLOGIK JARAYONLARNI EMPIRIK-STATISTIK MODELLARINI QURISH

2.1. Empirik-statistik model haqida tushuncha

Texnologik jarayonlarni modellashtirishda modellarning monandligini tekshirish uchun ularning fizik qonunlarini va tajriba ma'lumotlarini bilish zarur. Biroq, texnologik jarayonlarning mexanizmi va fizik mohiyatini batafsil o'rganish har doim ham mumkin bo'lavermaydi. Shu bilan birga, bunday jarayonlarni modellashtirish va optimallashtirish talab etiladi.

Kuzatuv va uning natijalariga asoslanib modellashtirish ***empirik*** modellashtirish deb ataladi. Yuqorida tavsiflangan hollarda empirik modellar eksperimental-statistik usullardan foydalangan holda quriladi: obyektda sodir bo'layotgan jarayonlarning noma'lum mexanizmi bilan tizim parametrlarining bir-biriga bog'liqligi o'rganiladi. Empirik modellar fizik-kimyoviy modellardan farqli o'laroq, real jarayonning qonuniyatlarini hisobga olmaydilar va ularning tuzilishi eksperimental ma'lumotlarga asoslanadi. Obyektning matematik tavsifi obyektni statistik tadqiq qilish natijasida olingan empirik bog'liqliklar tizimi bo'ladi. Ushbu modellar obyektning kirish va chiqish parametrlari orasidagi bog'liqlikni aniqlaydi va ularning bog'lanish hususiyatiga qarab unga mos matematik modelini tanlash imkoniyatini ham beradi. Tabiiyki, statistik modellar obyektning fizik xususiyatlarini aks ettirmaydi.

Statistik modelni yaratish uchun asosiy va zarur ma'lumot manbai eksperiment bo'lib, eksperimental ma'lumotlarni tahlil qilish ehtimollar nazariyasi va matematik statistika usullari bilan amalga oshiriladi. Texnologik jarayonning obyekti bu holda "qora quti" sifatida ifodalanadi (2.1-rasm). Bunda (x_i) kirish va (y_i) chiqish parametrlari bo'lib, har bir tajribadan olingan mos o'lchov qiymatlaridir. Agar kirish va chiqish parametrlarini o'lchab bo'lmasa bu jarayon uchun empirik model qurib bo'lmaydi.



2.1-rasm. Texnologik jarayonning obyekti

Bu yerda:

x_i – boshqarish ta'sii

y_i – chiqish qiymatlari

z_i – tashqi g'alayon ta'sirlar

Bitta chiqish ya'ni $n = 1$ bo'lgan holda obyektning matematik modeli esa quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, b_1, \dots, b_n) \quad (2.1)$$

bu yerda y – chiqish qiymati, $x_1, \dots, x_n$ – erkin o'zgaruvchilar, $b_1, \dots, b_n$ – empirik modelning koeffitsientlari.

Bu funksiyalarning taqribiy analitik ko'rinishlarini topishda ko'p o'zgaruvchili parametrik funksiyalar qo'llaniladi. Ulardan eng ko'p foydalaniladigan funksiyalar quyidagilardir:

Agar x_i larning har biri bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda y ning qiymatini o'zgartirish mumkun bo'lsa:

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

$$y = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2$$

$$y = a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \dots + a_nf(x_n)$$

$$y = a_1f_1(x_1) + a_2f_2(x_2) + \dots + a_nf_n(x_n)$$

$$y = a_0a_1^{x_1}a_2^{x_2} \dots a_n^{x_n}$$

Agar x_i larning barchasi birgalikda qo'llangandagina y ning qiymatini o'zgartirish mumkun bo'lsa:

$$y = a_1/x_1 + a_2/x_2 + \dots + a_n/x_n$$

$$y = a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

bu yerda $f(x)$ va $f_i(x)$ – ko'rilayotgan sohadagi uzluksiz funksiyalar, a_i -lar noma'lum parametrlar. Shu noma'lum parametrlarni tanlash orqali bu funksiyalar muayyan texnologik jarayonga taqriban mos qo'yiladi. Bu funksiyalarning oxirgi ikktasidan boshqalari noma'lum parametrlarga nisbatan chiziqlidir, oxirgi ikkitasini ham logarifmlash orqali parametrlarga nisbatan chiziqli holga keltirish mumkin. Bundan, kompyuterda ularning barchasiga bir xil texnologiyani qo'llash mumkin ekaligini anglashimiz mumkin. Faqat berilgan qiymatlarni funksiyaga mos ravishda o'zgartirish kerak bo'ladi xolos. Logarifmlash bilan o'zgartirilgan oxirgi funksiyada noma'lum parametr logarifmi aniqlanadi, so'ng teskari operatsiya orqali qayta o'z holiga keltiriladi.

2.2. Korrelyatsion tahlil usullari

Korrelyatsiya va regressiya tahlil usullari eksperimental ma'lumotlar va tasodifiy o'zgaruvchilar o'rtasidagi munosabatlarni aniqlash va tavsiflash uchun keng qo'llaniladi va ehtimollar nazariyasi va matematik statistika metodlari asosida yaratiladi.

Korrelyatsion tahlilda y (chiqish qiymati) va x_i (kirish) o'zgaruvchilari orasida korrelyatsion munosabatlar bor deb qaraladi, bunda ikkinchisining taqsimoti birinchisining miqdori o'zgarganda o'zgaradi. $x\ va\ y$ lar orasidagi bog'liqlik darajasini baholash uchun korrelyatsiya koeffitsientidan foydalaniladi.

Korrelyatsiya koeffitsientini aniqlashning bir necha xil usullari mavjud:

Oddiy korrelyatsiya koeffitsienti yoki juftlik korrelyatsiya koeffitsienti ikki o'zgaruvchi (x va y) orasidagi bog'liqlikning qiymatini (zichligini) quyidagi formula bilan aniqlanadi aniqlaydi

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(N-1)\cdot S_x \cdot S_y} = \frac{cov(x,y)}{S_x \cdot S_y} \qquad (2.2)$$

yoki $$r_{xy} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum(y_i-\bar{y})^2}}$$

bu erda $\bar{x}$ va $\bar{y}$ - x, y o'zgaruvchilarning o'rta arifmetik qiymatlari; N - tajribalar soni; $cov(x,y) - x\ va\ y$ ning kovaryatsiyasi S_x, S_y – mos ravishda $x\ va\ y$ miqdorlarning o'rtacha kvadratik chetlanishi:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}; \quad S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}{N-1}} \tag{2.3}$$

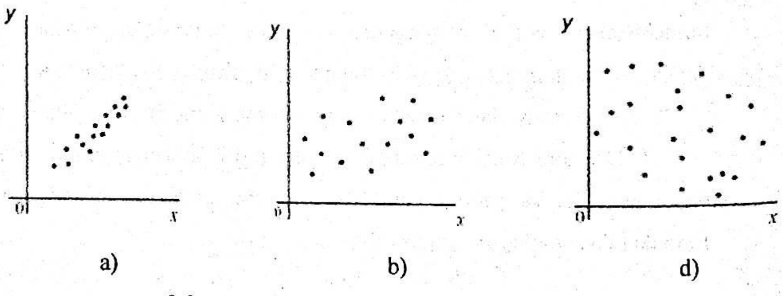
Korrelyatsiya koeffitsienti chiziqli munosabatlarning bog'liqlik darajasini tavsiflaydi. Agar x va y tasodifiy o'zgaruvchilar aniq chiziqli funksional bog'liqlik $\bar{y} = b_0 + b_1 x$ bilan berilgan bo'lsa, u holda $r_{xy} = \pm 1$.

Agar x va y miqdorlari stoxastik bog'langan bo'lsa, korrelyatsiya koeffitsienti -1 va 1 orasidagi qiymatni qabul qilishi mumkin

$$-1 \leq r_{xy} \leq 1. \tag{2.4}$$

Agar $r_{xy} = 0$ bo'lsa, berilgan parametrlar orasida korrelyatsiya mavjud emas. Agar $r_{xy} > 0$ bo'lsa, x va y o'rtasida musbat korrelyatsiya mavjud (x ortib borganda, y ortadi), agar $r_{xy} < 0$ bo'lsa, korrelyatsiya manfiy bo'ladi (x ortganda, y kamayadi).

Ikki o'zgaruvchi o'rtasidagi korrelyatsiyaning mavjudligi yoki yo'qligi korrelyatsiya maydoni shakli bo'yicha baholanishi mumkin (2.2-rasm).



2.2-rasm. *O'zgaruvchining korrelyatsion maydonlari:*

a) x va y orasidagi kuchli musbat bog'langan korrelyatsiya; b) sust korrelyatsiya; d) korrelyatsiya mavjud emas

Berilgan ikki turdagi miqdorlarning bog'liqlik darajasini korrelyatsiya koeffitsienti bilan baholash ***korrelyatsion tahlil*** deyiladi.

Quyidagi masalani qaraylik.

2.1-masala. Bizda laboratoriya sharoitida olingan passiv tajriba ma'lumotlari x va y berilgan bo'lsa, r_{xy} korrelyatsiya koeffitsientini aniqlaymiz

(2.1-jadval). Korrelyatsiya koeffitsientini aniqlashning bir necha usullari mavjud. Masalani dastlab sonli usulda yechishni ko'rib chiqaylik. Korrelyatsiya koeffitsientini 2.2 formulaga asosan aniqlaymiz.

2.1. Jadval

Tajribalar soni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1.4	1.6	1.2	1.7	1.6	1.1	1.9	2.2	1.8	2.4
y_i	10	15	35	45	22	36	41	56	55	70

r_{xy} korrelyatsiya koeffitsientini (2.2) formulaga asosan hisoblaymiz. Buning uchun quyidagi jadvalni tuzib olamiz.

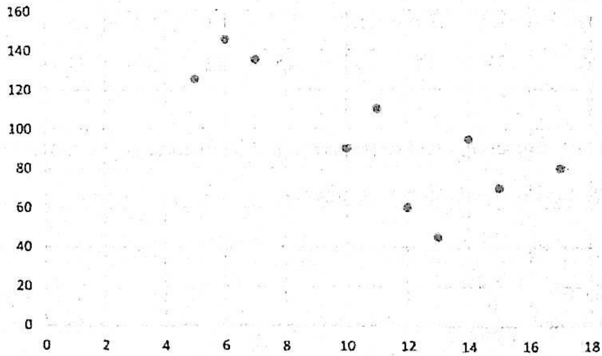
2.2. Jadval

Tajribalar soni	Kirish qiymati	Chiqish qiymati					
	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	1,2	14,0	-0,3	-6,9	2,04	0,09	47,61
2	1,4	35,0	-0,2	14,1	-2,19	0,02	198,81
3	1,7	22,0	0,1	1,1	0,16	0,02	1,21
4	1,1	23,0	-0,4	2,1	-0,77	0,13	4,41
5	1	35,0	-0,6	14,1	-7,83	0,31	198,81
6	0,8	25,0	-0,7	4,1	-2,89	0,50	16,81
7	1,5	16,0	0,0	-4,9	0,02	0,00	24,01
8	2,2	15,0	0,7	-5,9	-4,10	0,48	34,81
9	2,5	17,0	1,0	-3,9	-3,88	0,99	15,21
10	1,8	7,0	0,2	-13,9	-3,41	0,06	193,21
O'rtacha qiymat	1,505	20,9			-22,83	2,60345	734,9

Jadvalni tuzib bo'lgandan so'ng 2.2 formula yordamida korrelyatsiya koeffitsientini hisoblaymiz:

$$r_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{-22.83}{\sqrt{2.603 \cdot 734,9}} = -0.52$$

Endi topilgan koeffitsientni tahlil qilsak bo'ladi. $r_{xy} = -0.52$ o'zgaruvchilar teskari proporsional va sust bog'langan, x ning qiymati ortganda y ning qiymati kamayib boradi. Demak, quyidagi ma'lumotlar asosida regression tahlil o'tkazish mumkin. Quyida tajriba ma'lumotlarining joylashish grafigi keltirilgan, yuqoridagi xossalardan foydalangan holda bog'liqlik quyidagicha ko'rinishga ega bo'ladi.



2.3-rasm. Nuqtalarning joylashuv grafigi.

Ko'p miqdorli korrelyatsiya koeffitsienti bitta o'zgaruvchining bir nechta parametrlarga bog'liqligini aniqlaydi.

Korrelyatsiya koeffitsienti x va y orasida bog'liqlik kuchini ko'rsatadi. x va y bog'liqlik shaklini tavsiflash uchun taxminiy regressiya tenglamasidan foydalaniladi.

Korrelyatsiya koeffitsienti x va y orasida bog'liqlik kuchini ko'rsatadi. Ushbu bog'liqlikning matematik modeli, x va y ozgaruvchilarni bog'laydigan tenglamalar ifodalanadi. Bu tenglamalar ichidan aniqligi yuqori bo'lgan birini tanlash regression tahlilda amalga oshiriladi.

2.3. Regression tahlil usullari

Regression tahlil erkin o'zgaruvchilar $x_1, \dots, x_n$ va y o'rtasidagi bog'liqlikni nazariy jihatdan o'rganadi (ko'rib chiqadi). Ushbu bog'liqlikning matematik modeli, x va y ozgaruvchilarni bog'laydigan tenglamalar yordamida ifodalanadi. Bu tenglamalar ichidan aniqligi yuqori bo'lgan birini tanlash regression tahlilda amalga oshiriladi.

Regression tahlil quyidagi shartlarga asosan aniqlanadi:

1. Kuzatish natijalari $y_1,\ldots,y_n$ mustaqil, normal taqsimlangan tasodifiy o'zgaruvchilardir.

2. Kirish kattaliklari x_i o'lchov xatosi y ga nisbatan kichik xatolik bilan o'lchanadi.

3. Bir xil miqdordagi parallel tajribalar bilan olingan y chiqish parametrining dispersiyasi $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_n^2$ bir jinsli bo'lishi kerak.

Korrelyatsiya va regressiya tahlili yordamida eksperimental ma'lumotlarga asosan statistik-matematik modelni regressiya tenglamalari orqali tuzish mumkin.

Korrelyatsiya va regressiya tahlillari usullari bir-biri bilan chambarchas bog'liqdir, biri bog'lanish kuchini ikkinchisi bog'lanish shaklini aniqlashga imkon beradi.

Biz yuqorida korrelyatsiya koeffitsienti bizga ikki miqdor o'rtasidagi bog'liqlik darajasini topishni ko'rib chiqqan edik, lekin munosabat turini (shaklini) topishni ko'rib chiqmadik.

Endi biz bog'lanish shaklini tavsiflash uchun regressiya tenglamasidan foydalanamiz.

Yuqorida ko'rilgan masalada berilgan tajriba uchun regressiya tenglamasini tuzish va bunda yo'l qo'yilgan xatolikni baholashda regressiya tahlillari usulidan foydalanishimiz mumkun.

Buning uchun biz $y = f(x)$ funksiyani tanlashimiz kerak bo'ladi.

Biz tajaribadan olingan nuqtalarning joylashuviga qarab regressiya tenlamasining parametrik shaklini aniqlashimiz mumkin. Agar nuqtalar bir biridan o'ta uzoqda va o'ta tartibsiz joylashgan bo'lsa bu holda regressiya tenglamasi mavjud emas deyishimiz ham mumkun. Bu holda $r_{xy} \approx 0$ ga teng bo'ladi.

Odatda regressiya tenglamsini tuzishda kichik kvadratlar usulidan foydalanamiz va u quyidagi formula orqali aniqlanadi.

$$F = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - f(x_i)\right)^2 = \min, \tag{2.5}$$

yoki

$$F = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \min, \tag{2.6}$$

bu erda y_i, $\hat{y}_i$ mos ravishda chiqish miqdorining eksperimental va hisoblangan qiymatlari.

Passiv tajribalar natijalarini qayta ishlashda eksperimental ma'lumotlarning butun to'plamini aniq tavsiflashi kerak bo'lgan chiziqli hamda chiziqli bo'lmagan empirik modellar olinadi. Bunday vaziyatdagi model turini to'g'ri tanlash va model parametrlarini (tenglama koeffitsientlari) to'g'ri aniqlash talab etiladi.

2.4. Bir o'zgaruvchili regressiya modeli

Regression usullarning tub mohiyati quyidagidan iborat: bir qancha parametrik funksiyalar olinadi, ularning parametrlari tajribada olingan qiymatlar asosida aniqlanadi, har birining monandlik ko'rsatkichi hisoblanadi va qaysi birining monandlik ko'rsatkichi birga yaqin bo'lsa o'shani model sifatida qabul qilinadi. Bu model regression model deyiladi, parametrlari regressiya koeffitsiyntlari deyiladi. Regression usullar ikki xil bo'ladi:

- ketma-ket bo'lmagan regressiya usuli,
- ketma-ket regressiya usuli.

Har ikkala usulda ham regressiya koeffitsientlarini aniqlashda kichik kvadratlar usuli qo'llaniladi. Bunga ko'ra bog'liq o'zgaruvchining xaqiqiy qiymatlari bilan parametrik funksiya qiymatlari o'rtasidagi farqning kvadratlari yig'indisini minimumlashtirish orqali regressiya koeffitsientlari aniqlanadi. Demak:

$$F = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \min$$

masalan, chiziqli funksiya $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ uchun

$$F = \sum_{i=1}^{N} (y_i - b_0 - b_1 x_1)^2 \tag{2.7}$$

Bu erda, F - farqlar kvadratlari summasi, x_i, y_i berilgan qiymatlar.

Shunday qilib, regressiya koeffitsientlarini topish jarayoni funksiya minimumini aniqlash masalasi orqali amalga oshiriladi. Funksiya ekstremumining zaruriy sharti, kerakli miqdorlarga (koeffitsientlarga) nisbatan funksiyaning hosilasi nolga tenglanadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial b_0} = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - b_0 - b_1x_i)\cdot 1 = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial b_1} = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - b_0 - b_1x_i)\cdot x_i = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum(y_i - b_0 - b_1x_i) = 0; \\ \sum(y_i - b_0 - b_1x_i)\cdot x_i = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} nb_0 + b_1\sum x_i = \sum y_i\,; /n \\ b_0\sum x_i + b_1\sum x_i^2 = \sum x_iy_i\ /n. \end{cases}$$

Hosil bo'lgan tenglamar sistemasini n ga bo'lamiz va quyigi tenglamal sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} b_0 + b_1\bar{x} = \bar{y} \\ b_0\bar{x} + b_1\overline{x^2} = \overline{xy}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Tenglamalar sistemasini kichik kvadratlar usuli yordamida yechamiz.

Bu tizimni yechish uchun quyidagi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{x^2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \bar{y} & \bar{x} \\ \overline{xy} & \overline{x^2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \bar{y} \\ \bar{x} & \overline{xy} \end{vmatrix}$$

Natijada b_0 va b_1 koeffitsientlarini hisoblash uchun formulalarni topamiz:

$$b_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \tag{2.9}$$

$$b_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \tag{2.10}$$

Hosil bo'lgan $\hat{y} = b_0 + b_1x$ tenglamaning koeffitsientlarini hisoblab chiqqandan so'ng, olingan matematik modelni tahlil qilish mumkin. Bunday tadqiqot statistik (regressiya) tahlili deb ataladi.

Ushbu tahlilning bosqichlarini quyidagi masala bilan ko'rib chiqaylik.

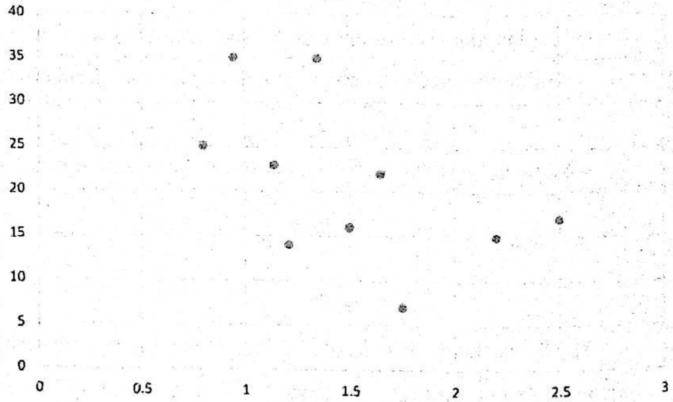
2.2-masala. Laboratoriya sharoitida olingan passiv tajriba ma'lumotlari x va y berilgan bo'lsa, r_{xy} korrelyatsiya koeffitsienti va $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ chiziqli regressiya tenglamasini aniqlaymiz (2.3-jadval). Biz oldingi misolimizda korrelyatsiya koeffitsientini aniqlash usulini ko'rib chiqqan edik shu xossalardan foydalanib berilgan tajriba ma'lumotlari uchun chiziqli regressiya tenglamasini aniqlaymiz. Regressiya tenglamasini kichik kvadratlar usulidan foydalangan holda (2.8), (2.9) va (2.10) formulalar bilan topamiz.

2.3. Jadval

Tajribalar soni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	15	12	13	17	14	10	6	5	7	11
y_i	70	60	45	80	95	90	145	125	135	110

1.1-masaladagi kabi korrelyatsiya koeffitsientini hisoblaymiz va olingan natijaga qarab chiziqli regressiya tenglamasi (2.9) va (2.10) formulasi yordamida b_0 va b_1 (1.4-jadvaldan foydalanib) koeffitsientlarini hisoblaymiz.

$$r_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(N-1)S_x \cdot S_y} = -0.76$$



2.4-rasm. Tajriba ma'lumotlarining joylashuv grafigi.

Regressiya koeffitsientining ishorasiga qarab shuni aytish mumkin: x *va* y tajriba ma'lumotlari o'zaro teskari va ishonchli bog'langan, bog'liqlik xossasiga binoan tajriba ma'lumotlari uchun regressiya tenlamasini tuzish mumkin.

2.4. Jadval

Tajribalar soni	Kirish parametri	Chiqish parametri			
	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	xy
1	15	70	225	4900	1050
2	12	60	144	3600	720
3	13	45	169	2025	585
4	17	80	289	6400	1360
5	14	95	196	9025	1330
6	10	90	100	8100	900
7	6	145	36	21025	870
8	5	125	25	15625	625
9	7	135	49	18225	945
10	11	110	121	12100	1210
Ortacha qiymatlar	11	95,5	135,4	10102,5	959,5

Quyidagi jadvalga asosan qiymatlarni hisoblaymiz va chiziqli tenglamar sistemasini hosil qilamiz:

$$\bar{x} = 11, \bar{y} = 95{,}5, \overline{xy} = 959{,}5, \overline{x^2} = 135{,}4, \overline{y^2} = 10102{,}5$$

$$\begin{cases} b_0 + 11b_1 = 95{,}5 \\ 11b_0 + 134{,}5b_1 = 959{,}5 \end{cases}$$

Shundan so'ng b_0 va b_1 regressiya tenglamasining koeffitsientlarini hisoblaymiz buning uchun detereminantlarni topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{x^2} \end{vmatrix} = 134{,}5 - 121 = 13{,}5$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \bar{y} & \bar{x} \\ \overline{xy} & \overline{x^2} \end{vmatrix} = 95{,}5 \cdot 135{,}4 - 11 \cdot 959{,}5 = 12930{,}7 - 10554{,}5 = 2376{,}2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \bar{y} \\ \bar{x} & \overline{xy} \end{vmatrix} = 959{,}5 - 11 \cdot 95{,}5 = -91$$

Demak,

$$b_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2376{,}2}{13.5} = 176{,}01$$

$$b_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{91}{13,5} = 6,74$$

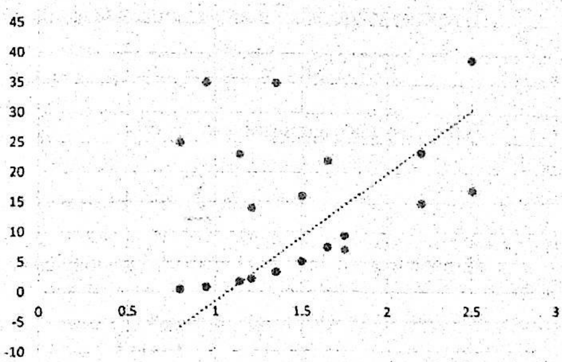
Chiziqli regressiya tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ldi $\hat{y} = 176,01 - 6,74 \cdot x$ tenlamani monandlikka tekshirish uchun quyidagi jadvaldan foydalanib funksiyaning approksimatsiyasini hisoblaymiz (2.5-jadval).

$$R^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2 - \sum(y_i - \hat{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = \frac{9822,5 - 4465,9}{9822,5} = 54,53$$

2.5. Jadval

Tajribalar soni	Kirish parametri	Chiqish parametri	Regressiya tenglamasining hisoblanishi		
	x_i	y_i	$\hat{y} = 176,01 - 6,74x$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \hat{y})^2$
1	15	70	74,46	650,25	19,9
2	12	60	94,77	1260,25	1209,0
3	13	45	88	2550,25	1849,0
4	17	80	60,92	240,25	364,0
5	14	95	81,23	0,25	189,6
6	10	90	108,31	30,25	335,3
7	6	145	135,39	2450,25	92,4
8	5	125	142,16	870,25	294,5
9	7	135	128,62	1560,25	40,7
10	11	110	101,54	210,25	71,6
			Summa	9822,5	4465,9

Regressiya tenglamasining $\hat{y} = 165.1 - 6.31 \cdot x$ hisoblangan natijalari tajribadagi y ning qiymatlariga $R^2 = 54,53$ ya'ni 54% ga yaqin kelganligi uchun chiziqli regressiya tenglamasi tajriba natijalari uchun matematik model sifatida olishimiz mumkin (2.3-rasm).



2.5-rasm. Chiziqli regressiya tenglamasining grafigi

Hosil bo'lgan regressiya tenglamasining monandligini oshirish uchun yuqorida berilgan funksiyalardan foydalanamiz va $R^2 \approx 1$ ga eng yaqin bo'lganini tanlab olamiz. Buning uchun tajriba ma'lumotlariga asosan har bir funksiyani qurish uchun qaytadan regressiya koeffitsientlarini topish talab etiladi.

Natijalarning statistik tahlili

Faktorlar orasidagi chiziqli munosabatlarning zichligini baholash uchun r_{xy} juftlik korrelyatsiya koeffitsientlari (3.5) formula yordamida hisoblanadi.

Korrelyatsiya koeffitsienti r_{xy} ning qiymati 1 ga qanchalik yaqin bo'lsa, chiziqli munosabatlar shunchalik katta bo'ladi.

Shuning uchun, ma'lum bir oraliqdagi x va y orasidagi bog'liqlik quyidagicha bo'ladi

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x.$$

2. Dispersiyalarni bir jinslikka tekshirish.

1) agar parallel tajribalar mavjud bo'lsa, y ning o'rta qiymati parallel tajribalar natijalari asosida aniqlanadi

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{u=1}^{m} y_{iu}}{m}; \quad (2.11)$$

Bu yerda m - parallel urinishlar soni; N- tajribalar soni.

2) dipersiyani quyidagi formula yordamida aniqlaymiz

$$S_i^2 = \frac{\sum_{u=1}^{m}(y_{iu} - \bar{y}_i)^2}{m-1}; \quad i = \overline{1, N} \tag{2.12}$$

3) dispersiyalar yigindisini hisoblaymiz

$$\sum_{i=1}^{N} S_i^2;$$

4) dispersiyaning maksimal qiymatini quyidagicha aniqlaymiz

$$G = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^{N} S_i^2}, \tag{2.13}$$

bu yerda $S_{\max}^2$ – dispersiyaning maksimal qiymati.

Dispersiyani bir jinslikka tekshirish (G) Koxren mezoniga asosan aniqlanadi (faqat paralal urunishlarda)

Agar $G < G_{tabl}(q, f)$ bo'lsa bunada dispersiya bir jinsli hisoblanadi, bunda q - bogliqlik darajasi; f - erkinlik darajasi.

Erkinlik darajasi $f_1 = m - 1; f_2 = N$

5) dispersiyaning ortib borishini aniqlash

$$S_{ort}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} S_i^2}{N(m-1)} \tag{2.14}$$

Erkinlik darajalarining soni $f = N(m-1)$ - bir xil miqdordagi tajribalar uchun m.

1. Polinomning koeffitsientlarini tasodifiy emasligini, Styudent me'zoni quyidagi formula orqali aniqlaymiz (qiymatlar orasida korrelyatsion bog'liqlik mavjud bo'lsa)

$$t_{b_i} = \frac{|b_i|}{S_{b_i}}, \tag{2.15}$$

bu yerda b_i – regressiya tenlamasining koeffitsienti; S_{b_i} – i elementning o'rta kvadratik chetlanishi.

S_{b_0} va S_{b_i} chiziqli polinomni hisoblash uchun quyidagi formulalardan foydalanamiz

$$S_{b_0} = \sqrt{\frac{S_{ort}^2 \sum_{i=1}^{N} x_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}}; \tag{2.16}$$

$$S_{b_1} = \sqrt{\frac{S_{ort}^2 N}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}}; \quad (2.17)$$

4. Hosil bo'lgan modelni (hosil bo'lgan tenglama) monandligini aniqlash uchun Fisher me'zonidan foydalanamiz.

Agar tajriba ma'lumotlariga nisbatan regressiya tenglamasi tomonidan hisoblanganda Y qiymatining qoldiq dispersiyasi eksperimental xatodan oshmasa, regressiya tenglamasi o'rganilayotgan jarayonni etarli darajada tavsiflaydi, deb olishimiz mumkin.

Agar quyidagi shart bajarilsa

$$F = \frac{S_{ost}^2}{S_{ort}^2} < F_T(q, f_1, f_2), \quad (2.18)$$

texnologik jarayonning modeliga monand deb hisoblanadi

Bir xil miqdordagi parallel tajribalar $m_1 = m_2 = \cdots m_n$ uchun qoldiq dispersiya ifodasi quyidagi shaklga ega

$$S_{qoldiq}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{N-1}, \quad (2.19)$$

bu erda $\bar{y}_i$- parallel tajribalar natijalariga asoslangan chiqish parametrining o'rtacha qiymati (2.11); $\hat{y}_i$- chiqish parametrining hisoblangan qiymati.

Agar tajriba davomida tajribalar takrorlanmagan bo'lsa, unda ifoda quyidagicha hisobalnadi.

$$S_{qoldiq}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2}{N-1}, \quad (2.20)$$

bu erda $f_1 = N - l$ va $f_2 = N(m-1)$ – surat va maxrajdagi ifodalarning erkinlik darajasi; $l = n + 1$ – approksimatsialangan polinom hadlari soni (regressiya koeffitsientlari soni); N – tajribalar soni; n - omillar soni; y - chiqish parametrining eksperimental qiymati.

Agar tajriba davomida parallel tajribalar o'tkazish imkoni bo'lmagan bo'lsa, unda modelni monandligini tekshirish o'rniga, tenglamaning approksimatsiyalash mumkin bo'ladi. Bunga S_{qol}^2 qoldiq dispersiyasini o'rtacha S_y^2 ga nisbatan dispersiya bilan solishtirish orqali erishiladi:

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}{N-1}, \tag{2.21}$$

Bu erda y_i - chiqish parametrining eksperimental qiymati. $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$ – chiqish parametrlarining o'rtacha qiymatlari.

Fisher me'zoniga asosan quyidagicha aniqlanadi

$$F = \frac{S_y^2}{S_{qol}^2}. \tag{2.22}$$

2.5. Parabolik regressiya modeli

Texnologik jarayonlarning statistik matematik modellarini tuzishda ko'pincha chiziqli bo'lmagan ikkinchi, uchinchi va undan yuqori darajadagi parabolik turdagi tenglamalardan foydalanish kerak bo'ladi. Bunday hollarda, ikkinchi (yoki undan yuqori) darajadagi polinom shaklida statistik modelni tuzish uchun regression tahlil qilish usulidan foydalanamiz.

$$\hat{y} = b_0 + \sum b_i x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} b_{ij} x_i x_j + \sum b_{ij} x_i^2 + \cdots + \cdots$$

Xususiy holda bir omilli regression model uchun kichik kvadratlar usulidan foydalanaib berilgan $\hat{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ tenglamaning b_0, b_1, b_2 regressiya koeffitsientlarini aniqlaymiz.

$$F = \sum (y - \hat{y})^2 \rightarrow \min;$$

$$F = \sum \left(y_i - b_0 - b_1 \cdot x_i - b_2 \cdot x_i^2\right)^2 \rightarrow \min;$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_0} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - b_0 - b_1 \cdot x_i - b_2 \cdot x_i^2\right) \cdot 1 = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_1} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{N} (y_i - b_0 - b_1 \cdot x_i - b_2 \cdot x_i^2) \cdot x_i = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_2} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{N} (y_i - b_0 - b_1 \cdot x_i - b_2 \cdot x_i^2) \cdot x_i^2 = 0;$$

$$\begin{cases} b_0 \cdot N + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i + b_2 \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i \quad /N \\ b_0 \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b_2 \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^3 = \sum_{i=1}^{N} (x_i \cdot y_i) \ /N \\ b_0 \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^3 + b_2 \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^4 = \sum_{i=1}^{N} (x_i^2 \cdot y_i) \ /N \end{cases} \quad (2.23)$$

Chiziqli tenglamalr sitemasini N ga bo'lish or

qali ifodani soddalashtiramiz.

Shundan so'ng quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} b_0 + b_1\bar{x} + b_2\overline{x^2} = \bar{y} \\ b_0\bar{x} + b_1\overline{x^2} + b_2\overline{x^3} = \overline{yx} \\ b_0\overline{x^2} + b_1\overline{x^3} + b_2\overline{x^4} = \overline{yx^2} \end{cases}$$

Bu tizimni yechish uchun quyidagi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \bar{x} & \overline{x^2} \\ \bar{x} & \overline{x^2} & \overline{x^3} \\ \overline{x^2} & \overline{x^3} & \overline{x^4} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \bar{y} & \bar{x} & \overline{x^2} \\ \overline{yx} & \overline{x^2} & \overline{x^3} \\ \overline{yx^2} & \overline{x^3} & \overline{x^4} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \bar{y} & \overline{x^2} \\ \bar{x} & \overline{yx} & \overline{x^3} \\ \overline{x^2} & \overline{yx^2} & \overline{x^4} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \bar{x} & \bar{y} \\ \bar{x} & \overline{x^2} & \overline{yx} \\ \overline{x^2} & \overline{x^3} & \overline{yx^2} \end{vmatrix}$$

Natijada b_0 va b_1 koeffitsientlarini hisoblash uchun formulalarni topamiz:

$$b_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (2.24)$$

$$b_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (2.25)$$

$$b_2 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad (2.26)$$

Biz hozir ikkinchi tartibli polinom uchun regressiya tenlamasini koeffitsientini hisoblashni ko'rib chiqdik, huddi shu usullardan foydalangan holda $n - chi$ tartibli polinom uchun regressiya tenglamasini qurishni ko'rishimiz mumkun (2.27).

$$\hat{y} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n \tag{2.27}$$

Yuqoridagi hossalardan foydalanib n – ta noma'lum uchun chiziqli teglamalr sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} b_0 + b_1\bar{x} + b_2\overline{x^2} + \cdots + b_n\overline{x^n} = \bar{y} \\ b_0\bar{x} + b_1\overline{x^2} + b_2\overline{x^3} + \cdots + b_n\overline{x^{n+1}} = \overline{yx} \\ b_0\overline{x^2} + b_1\overline{x^3} + b_2\overline{x^4} + \cdots + b_n\overline{x^{2n}} = \overline{yx^2}. \end{cases} \tag{2.28}$$

Har qanday tartibdagi parabolaning koeffitsientlari kichik kvadratlar usulidan foydalangan holda xuddi shu tarzda aniqlanadi. Tenglamani tahlil qilish chiziqli regressiya singari statistik mezonlarga muvofiq amalga oshiriladi.

3-masala. Laboratoriya sharoitida olingan passiv tajriba ma'lumotlariga asosan (3.28) va (3.29) formulaga asosan parabolik $\hat{y} = b_0 + b_1x + b_2x^2$ regressiya modelini tuzing va uni monandlikka tekshiring 2.6 -jadval.

2.6. Jadval

Tajribalar soni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1,21	1,35	1,65	1,14	0,95	0,8	1,5	2,2	1,75	1,21
y_i	14	35	22	23	35	25	16	15	7	14

Grafikdan ko'rinib turibdiki nuqtalarning tarqoq holatda joylashuvi uchun chiziqli regressiya tenglamasini tuzish maqsadga muafiq emas shuning uchun biz ushbi jarayon uchun parabolik regressiya tenglamasi tuzamiz va uni monandlikka tekshiramiz 2.7-jadval.

2.6. Jadval

Tajribalar soni	Kirish parametri	Chiqish parametri					
	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 \cdot y_i$
1	1,21	14	16,9	1,5	1,8	2,1	20,5
2	1,35	35	47,3	1,8	2,5	3,3	63,8
3	1,65	22	36,3	2,7	4,5	7,4	59.9
4	1,14	23	26,2	1,3	1,5	1,7	29.9
5	0,95	35	33,3	0,9	0,9	0,8	31,6
6	0,8	25	20,0	0,6	0,5	0,4	16,0
7	1,5	16	24,0	2,3	3.4	5.1	36.0
8	2,2	15	33,0	4,8	10,6	23,4	72,6
9	2,5	17	42,5	6,3	15,6	39,1	106,3
10	1,75	7	12,3	3,1	5,4	9,4	21,4
O'rtacha qiymat	1,505	20,9	29,17	2,53	4,66	9,27	45,79

$$\begin{cases} b_0 + b_1\bar{x} + b_2\overline{x^2} = \bar{y} \\ b_0\bar{x} + b_1\overline{x^2} + b_2\overline{x^3} = \overline{yx} \\ b_0\overline{x^2} + b_1\overline{x^3} + b_2\overline{x^4} = \overline{yx^2} \end{cases}$$

Quyidagi jadvaldan foydalanib chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} b_0 + b_1 1{,}505 + b_2 2{,}53 = 20{,}9 \\ b_0 1{,}505 + b_1 2{,}53 + b_2 4{,}66 = 29{,}17 \\ b_0 2{,}53 + b_1 4{,}66 + b_2 9{,}27 = 45{,}79 \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasi hosil qilingandan so'ng, regressiya tenlamasini koeffitsientlarini (2.24), (2.25) va (2.26) formulalardan foydalanib aniqlaymiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \bar{x} & \overline{x^2} \\ \bar{x} & \overline{x^2} & \overline{x^3} \\ \overline{x^2} & \overline{x^3} & \overline{x^4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1{,}505 & 2{,}23 \\ 1{,}505 & 2{,}53 & 4{,}66 \\ 2{,}53 & 4{,}66 & 9{,}27 \end{vmatrix} = 0.033$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \bar{y} & \bar{x} & \overline{x^2} \\ \overline{yx} & \overline{x^2} & \overline{x^3} \\ \overline{yx^2} & \overline{x^3} & \overline{x^4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20{,}9 & 1{,}505 & 2{,}23 \\ 29{,}17 & 2{,}53 & 4{,}66 \\ 45{,}79 & 4{,}66 & 9{,}27 \end{vmatrix} = -4.72$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \bar{y} & \overline{x^2} \\ \bar{x} & \overline{yx} & \overline{x^3} \\ \overline{x^2} & \overline{yx^2} & \overline{x^4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 20{,}9 & 2{,}23 \\ 1{,}505 & 29{,}17 & 4{,}66 \\ 2{,}53 & 45{,}79 & 9{,}27 \end{vmatrix} = 78.02$$

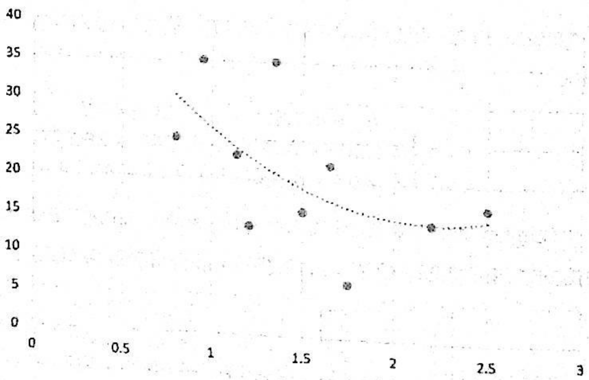
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \bar{x} & \bar{y} \\ \bar{x} & \overline{x^2} & \overline{yx} \\ \overline{x^2} & \overline{x^3} & \overline{yx^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1,505 & 20,9 \\ 1,505 & 2,53 & 29,17 \\ 2,53 & 4,66 & 45,79 \end{vmatrix} = 0.069$$

$$b_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -14,3 \quad b_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 236,42 \quad b_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2,09.$$

$$R^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2 - \sum(y_i - \hat{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = 0,32$$

Regressiya koeffitsientlari aniqlangandan so‘ng ikkinchi tartibli polinom funksiyasi aniqlanadi $\hat{y} = -14.3 + 236,42x + 2.09x^2$ va uni monandlikka tekshiramiz $R^2 = 0,32$.

Quyidagi usullar orqali polinomning istalgan darajasi uchun regressiya tenlamasinining koeffitsientlarini aniqlash mumkin. Regressiya tenglamasining monandligini polinomning darajasini oshirish orqali orttirish mumkin. Ammo bu holda, barcha koeffitsientlarni qayta hisoblash talab etiladi (chunki koeffitsientlar o‘rtasida o‘zaro bog‘liqlik mavjud).



2.6-rasm. Ikkinchi tartibli polinom funksiyasining grafigi.

2.6. Office dasturlarida empirik modellar qurish.

Hozirda empirik statistik modellar qurishda MS Office dasturlarida qulay imkoniyatlar mavjud. Ularda diagramma yaratib unga trend chizig‘i(линия тренда) ni qo'yish va tenglamani ko'rsatish yozuvini tanlash yetarli, faqat yaqqol ko'rinishda hosil qilish uchun nuqtali (точечная) grafik qurgan ma'qul.

Excel jadvaliga tajriba natijalari kiritiladi, ularni ajratib **Вставка→ Диаграммы →Точечная** buyrug'i orqali nuqtaviy grafik qo'yamiz, grafikni aktiv holiga menyuning **Макет** lentasining **Анализ** bo'limida **Линия тренда** ro'yxatini ochamiz, ro'yxatdan kerakli funksiyani tanlasak unga mos grafik qo'yiladi. Grafik ustida kontekst menyuni ochib **Формат линии тренда** yozuvi tanlasa va ochiladidigan oynadagi **Показывать уравнение на диаграмме** maydonchasiga bayroqcha o'rnatilsa qo'yilgan grafik funksiyasi, **Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (К^2)** maydonchasiga bayroqcha o'rnatilsa bu taqribiy funksiyaning haqiqatga monandlik darajasi ham aks etadi. **Формат линии тренда** oynasi grafik ustida kontekst menyuni ochib unda **Добавить линию тренда** yozuvini tanlash orqali hamda **Макет→ Анализ→ Линия тренда** ro'yhatidagi oxirgi yozuv – **Дополнительные параметры линии тренда...**ni tanlash orqali ham ochiladi.

Excel dasuridan boshqa MS Office dasturlarida yuqoridagi kabi amallarni bajarib, ularda ham empirik-statistik model qurish masalasini hal etish mumkin. Faqat diagramma o'rnatish tartibida farq mavjud.

Quyida Excel jadvali misolida ish tartibini keltiramiz:

1- Excel jadvaliga ma'lumotlar kiritiladi

2- Kiritilgan ma'lumotlar ajratiladi

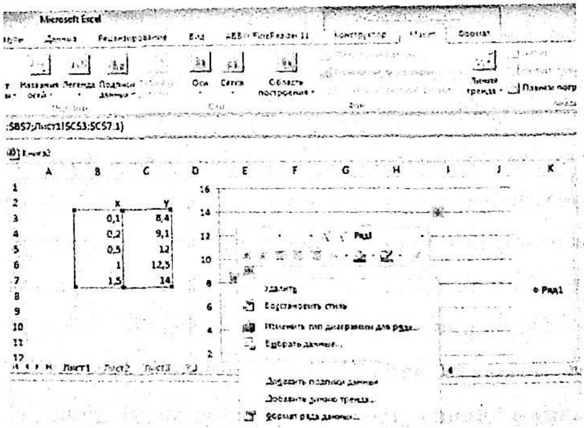
3- **Вставка→ Диаграммы →Точечная** orqali nuqtaviy grafik quriladi

4- Grafik ustida kontekst menyu ochiladi

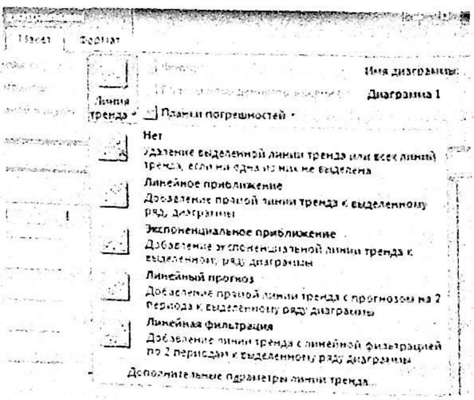
Bu kontekst menyudagi **Добавить линию тренда** buyrug'i berilsa **Формат линии тренда** oynasi ochiladi.

Bu yerdagi 4-ish o'rniga diagrammani aktivlashtirib, so'ng Maket lentasi ochildandagi ko'rinishi ham 1-rasmda ko'rsatilgan. Bu lentada **Линия тренда** buyrug'ini ko'rish mumkin. U tanlansa o'rnatish mumkin bo'lgan funksiyalar ro'yhati ochiladi (2-rasm), bu ro'yhat oxirida **Дополнительные параметры**

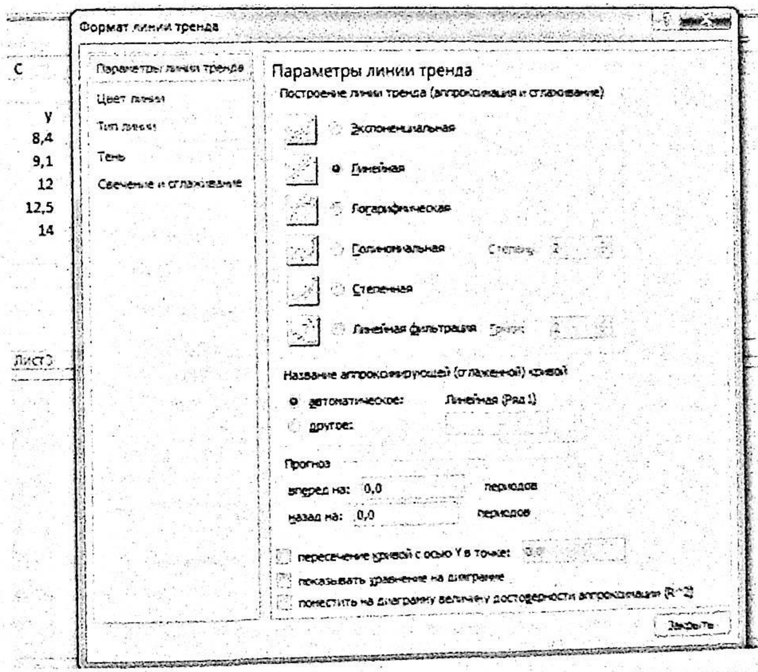
линии тренда yozuvini ko'rish mumkin. Shu oxirgi yozuv orqali ham **Формат линии тренда oynasini** ochish mumkin. Agar 2-rasmdagi funksiyalardan birortasi tanlansa nuqtaviy grafikni taqriban akslantiruvch grafikni o'zi o'rnatiladi, funksiya ifodasi qo'yilmaydi, uni qo'yish uchun kontekst menyudan foydalanish mumkin.



1-Rasm

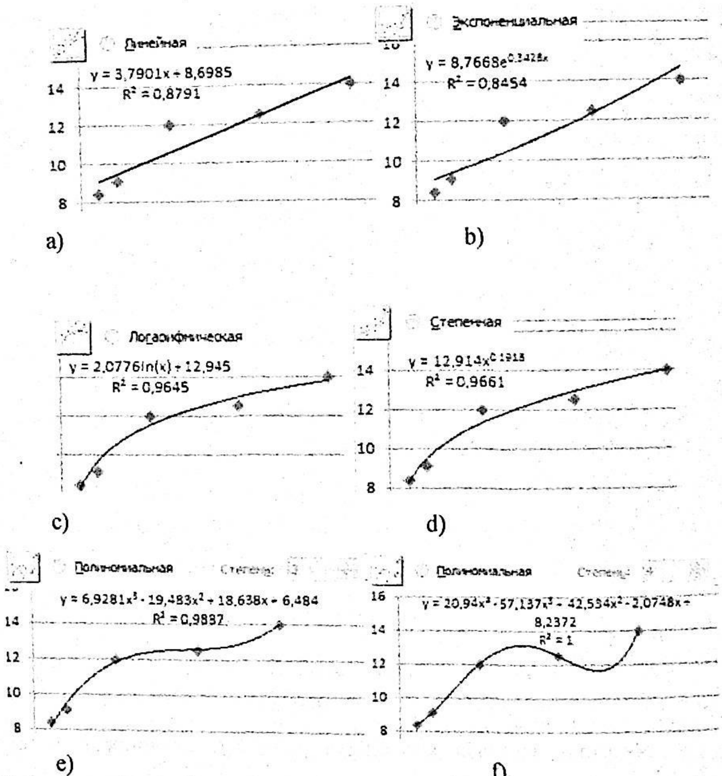


2-Rasm



3-Rasm

4-rasmda yuqorida ko'rsatilgan jadvaldagi ma'lumotlar uchun mumkin bo'lgan barcha approksimatsiyalovchi chiziqlar, ularning funksiyasi ifodasi va monandlik ko'rsatkichi keltirilgan. Faqat **Полиномиальная** chizig'i uchun 3- va 4- tartibli ko'phadlar(4-rasm e va f)) keltirilgan. Bunda eng kichik daraja 2, eng yuqori daraja 6, agar biror daraja uchun $R^2 = 1$ bo'lsa undan yuqori darajadagi ko'pxad qurilmaydi. 4-rasmda 4- tartibli ko'phad uchun $R^2 = 1$ ekanligi ko'rinib turibdi, demak ushbu berilganlar uchun 5- va 6- darajali ko'phadlar qurilmaydi, agar **Степень** maydoniga 5 yoki 6 deb yozilsa ham 4-darajali ko'phad chiqariladi.



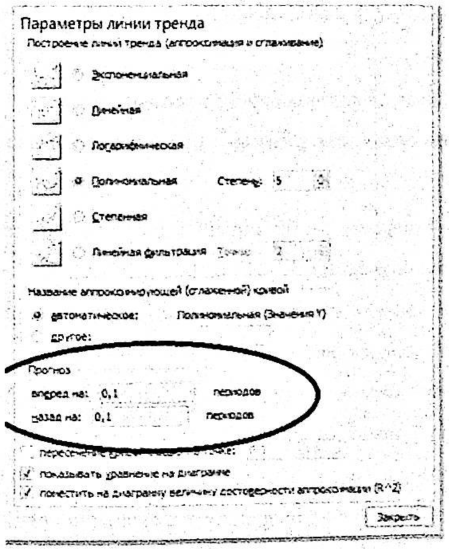
4-Rasm

Tajriba natijalari yordamida biror jarayonni identifikatsiyasini qurishda monandlik ko'rsatkichi muhim ahamiyatga ega. Bir qancha funksiyalardan monandlik ko'rsatkichi eng yuqori bo'lgani yani birga yaqin bo'lgani tanlab olinadi. Demak, yuqoridagi ma'lumoti keltirilgan jarayonning identifikatsiyasi uchun (4-rasm, f)

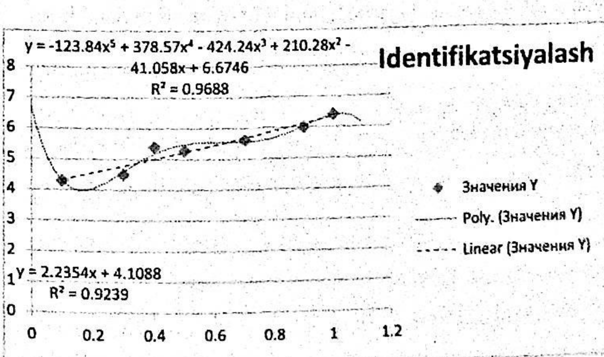
$$y = 20{,}94x^4 - 57{,}137x^3 + 42{,}534x^2 - 2{,}0748x + 8{,}2372$$

ifodani olish mumkin

Формат линии тренда muloqot oynasida **Прогноз** bo'limi bor, undagi **вперед на** maydonchasiga h_2, **назад на** maydonchasiga h_1 sonlarini yozsak ko'rsatilgan $x \in [a,b]$ sohadagi grafik $x \in [a-h_1, b+h_2]$ sohagacha davom ettiriladi. (5-va 6-rasmlari solishtiring). U model orqali olingan prognoz ma'lumot hisoblanadi. Prognoz ma'lumot faqat grafik ko'rinishda beriladi, son qiymati chiqarilmaydi.



5-rasm



6-rasm

WORD matn muharirida ham yuqorida keltirilgan imkoniyatlarning barchasi mavjud. Faqat diagramma qurish tartibida farq bor. Word 2010da quyidagi tartibda ishlar bajariladi:

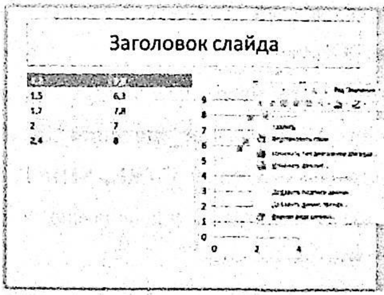
1. Jadval qo'yilib, unga ma'lumotlar kiritiladi
2. Jadvalni ajratmasdan, kursorni diagramma o'rnatish kerak bo'lgan joyga keltiriladi
3. **Вставка** lentasidan diagramma buyrug'i beriladi
4. Ochilgan **Вставка диаграммы** oynasidan **Точечная** yozuvini faollashtiramiz
5. O'ng tomondagi nuqtaviy grafik qurish  tugmasini bosamiz. Bunda agar Excel 2010 o'rnatildan bo'lsa, Excel shabloni ochiladi.
6. Excel shabloni ichidagi sonlarni o'chirib ajratilgan ko'k chiziqli maydon o'lchamini kiritiladigan ma'lumot o'lchamiga mos qilib o'zgartiramiz (burchagidan tutib tortamiz) va ma'lumotni kiritamiz. Uni Word jadvaliga kiritgan joydan nusxasini olib qo'yishimiz ham mumkin.
7. Ma'lumotlar kiritilgandan so'ng Excel dasurini yopib qo'yish kerak.

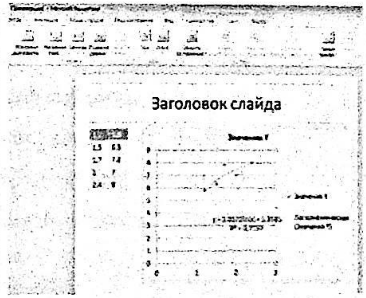
Shu bilan nuqtaviy grafik quriladi. Uni approksimatsiyalovchi chiziqlarni qurish va ularning funksiyalari, monandlik ko'rsatgichni o'rnatish yuqoridagi Excel jadvalida keltirilgan amallar bilan bir xilda bajariladi, muloqot oynalari aynan bir xil.

PowerPointda Линия тренда orqali model tuzish

1. Ikki obyektli maketni qo'yamiz va birinchisiga jadvalni kiritamiz.
2. Ikkinchi obyektda diagrammani tanlab nuqtaviy grafik qo'yamiz.

3. Grafikni aktiv holiga menyuning **Макет** lentasining **Анализ** bo'limida **Линия тренда** ro'yxatini ochamiz. Qolgan ishlar yuqoridagilar bilan bir xil.



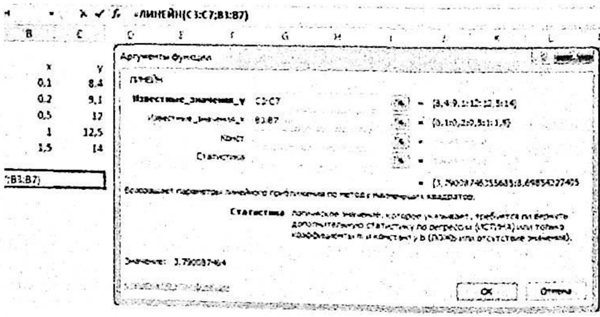


Yuqorida ko'rilgan MS Office dasturlaridagi diagramma qurish bilan hal etiladigan modellashtirish masalasi faqat bir kirish va bir chiqishli jarayonlarni grafik ko'rinishda hal etadi. Unda yechimning grafik ko'rinishi, formulasi, monandlik ko'rsatkichi va grafik ko'rinishda prognoz ma'lumot aks etadi. Grafikda jadvalda berilganlardan boshqa kirish signaliga mos kelgan chiqish signalining taqribiy sonli qiymati aks etmaydi, ularni foydalanuvchi qo'shimcha hisoblashlar bajarib o'zi aniqlashi mumkin. Demak, **Линия тренда** orqali modellashtirish masalasi qisman hal etilar ekan.

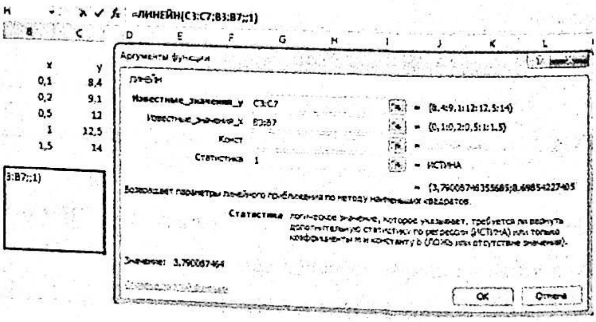
Excel statistik funksiyalaridan **ЛИНЕЙН, ТЕНДЕНЦИЯ, ЛГРФПРИБЛ, РОСТ** funksiyalari orqali empirik-statistik model qurish masalasini sonli ko'rinishda hal etish mumkin. Ular chiziqli va nochiziqli jarayonlar identifikatsiyasini qurish imkoniyatini beradi. **ЛИНЕЙН** funksiyasi bilan bir yoki ko'p kirish va chiqish signaliga ega bo'lgan chiziqli statik va dinamik jarayonlar modellarini qurish, **ТЕНДЕНЦИЯ** funksiyasi orqali esa bu modellar bo'yicha hisoblashlarni bajarish imkoniyati mavjud. Chiziqli ko'rinishda keltirish mumkin bo'lgan masalalarni ham ular orqali hal etish mumkin. **ЛГРФПРИБЛ** funksiyasi orqali ko'rsatkichli funksiya ko'rinishda model qurish, **РОСТ** funksiyasi orqali esa bu model bo'yicha hisoblashlar bajarish imkoniyatiga egamiz. Biz quyida shu imkonoyatlardan foydalanish tartibini keltiramiz.

1. Tajriba natijalari jadvalga yoziladi;

2. Noma'lum parametrlar m va b uchun joy ajratiladi;
3. f_x tugmasi bosiladi, ochilgan oynaning категория maydonidagi ro'yxatdan **статические** funksiyalar bo'limi tanlanadi;
4. **ЛИНЕЙН** funksiyasi tanlanadi, OK tugmasi bosiladi;
5. Ochilgan **Аргументы функции** oynasiga berilganlar yozilgan joylar manzili kiritiladi (**Известные_значения_y**, **Известные_значения_x**), **Конст** va **Статистика** maydonlariga hech narsa yozmay **CTRL, SHIFT, ENTER** tugmalari baravar bosilsa natijada m va b qiymatlari hosil bo'ladi.



8-rasm



9-rasm

Agar yuqoridagi 2- ish o'rniga 2x5 o'lchamdagi bo'sh katakchalarni ajratsak, 5-ishda **Статистика** maydoniga 1 raqamini kiritib (9-rasm) so'ng CTRL, SHIFT, ENTER tugmalari baravar bosilsa qo'shimcha xatoliklar haqidagi ma'lumotlar ham natijaga chiqariladi(10-rasm, a). 10-rasm b da qaysi o'rinda qanday xatolik haqida ma'lumot ekanligi shartli belgilari ko'rsatilgan, bu yerda r_2 monandlik ko'rsatkichi. Monandlik ko'rsatkichi birga qanchalik yaqin bo'lsa aniqlangan parametlar bilan tuzilgan model shunchalik berilganlarni to'g'ri akslantiradi. Bizning misolda $y = 3{,}790087x + 8{,}698542$, monandlik ko'rsatkichi $r_2 = 0{,}879057$.

Agar **Аргументы функции** oynasidagi **Конст** maydoniga 0 (nol) yozilsa $y = mx$ ko'rinishda model parametri chiqariladi, ya'ni kirish signali $x = 0$ da chiqish signali $y = 0$ bo'ladigan hol uchun model tuzishda ishlatiladi.

B	C	D
x	y	
0,1	8,4	
0,2	9,1	
0,5	12	
1	12,5	
1,5	14	
3,790087	8,698542	

a)

B	C
x	y
0,1	8,4
0,2	9,1
0,5	12
1	12,5
1,5	14
3,790087	8,698542
0,811654	0,683912
0,879057	0,950709
21,80504	3
19,70845	2,711545

b)

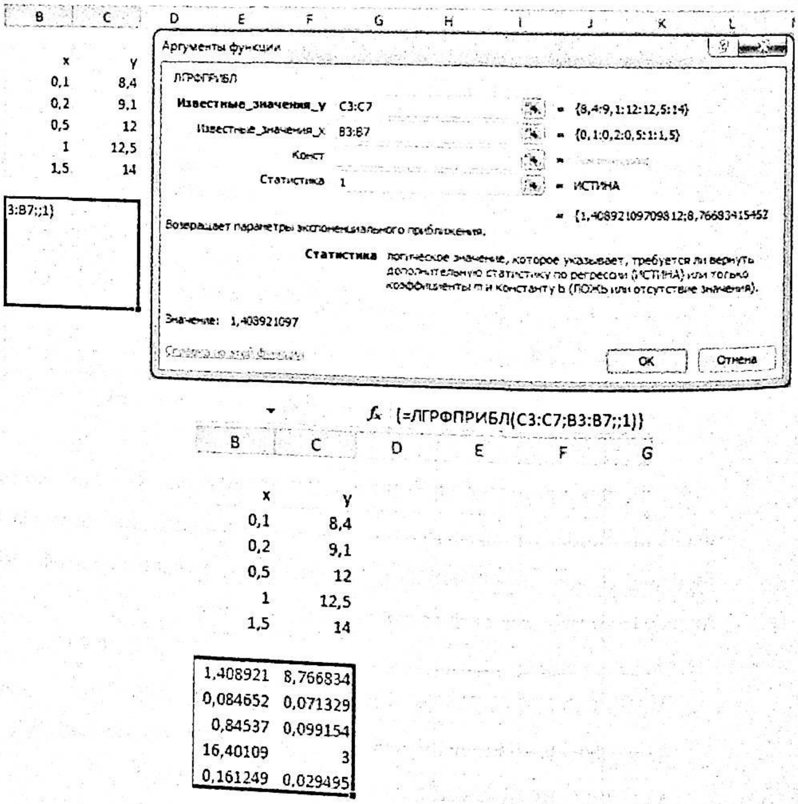
m	b
se_n	se_{n-1}
r_2	se_y
F	d_f
$ss_{per.}$	$ss_{ост.}$

10-rasm

Bir kirishli va bir chiqishli statik jarayon uchun $y = bm^x$ ko'rinishdagi nochiziqli model parametrlari m va b ni tajriba natijalari asosida aniqlash uchun foydalaniladigan **ЛГРФПРИБЛ** funksiyasining qo'llanilish tartibi **ЛИНЕЙН** funksiyasi qo'llanilish tartibi bilan bir xil:

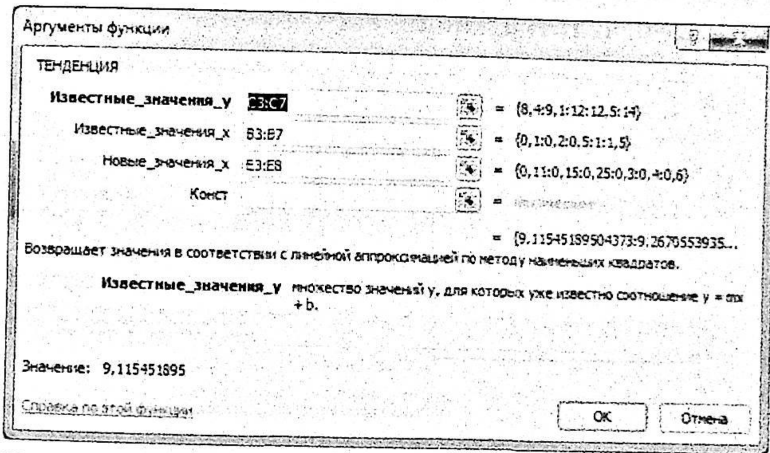
1. Tajriba natijalari jadvalga yoziladi (11-rasm B3:B7 va C3:C7);
2. Noma'lum parametrlar m va b uchun joy ajratiladi (B9, C9);
3. f_x tugmasi bosiladi, ochilgan oynaning **категория** maydonidagi ro'yxatdan **статические** funksiyalar bo'limi tanlanadi;
4. **ЛГРФПРИБЛ** funksiyasi tanlanadi, **OK** tugmasi bosiladi;
5. Ochilgan **Аргументы функции** oynasiga berilganlar yozilgan joylar manzili kiritiladi (**Известные_значения_у**, **Известные_значения_х**), **Конст** va **Статистика** maydonlariga hech narsa yozmay **CTRL, SHIFT, ENTER** tugmalari baravar bosilsa natijada m va b qiymatlari hosil bo'ladi.

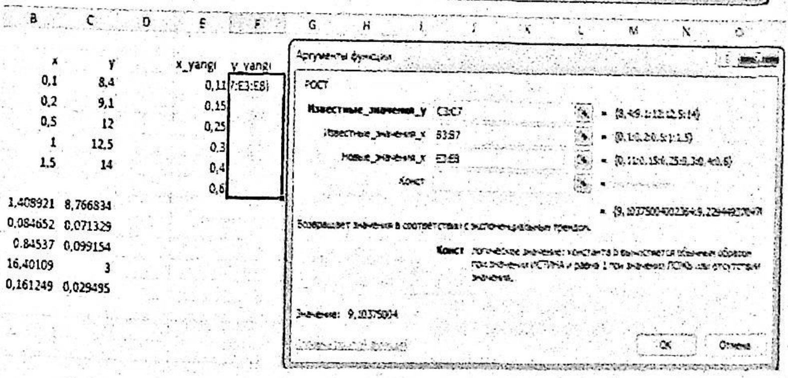
Agar yuqoridagi 2- ish o‘rniga 2x5 o‘lchamdagi bo‘sh katakchalarni ajratsak, 5-ishda **Статистика** maydoniga 1 raqamini kiritib (5-rasm) so‘ng **CTRL, SHIFT, ENTER** tugmalari baravar bosilsa qo‘shimcha xatoliklar haqidagi ma’lumotlar ham natijaga chiqariladi (11-rasm). Bizning misolda $y = 8{,}766834 \cdot 1{,}408921^x$, monandlik ko‘rsatkichi $r_2 = 0{,}84537$.



11-rasm

Agar tuzilgan modellar orqali turli kirish signallari uchun chiqish signalining qiymatini aniqlash lozim bo‘lsa chiziqli hol uchun **ТЕНДНЦИЯ**, ko‘rsatkichli hol uchun **РОСТ** funksiyalari ishlatiladi. Buning uchun avval x ga yangi qiymatlar jadvalga kiritiladi.





{=ТЕНДЕНЦИЯ(C3:C7;B3:B7;E3:E8)}

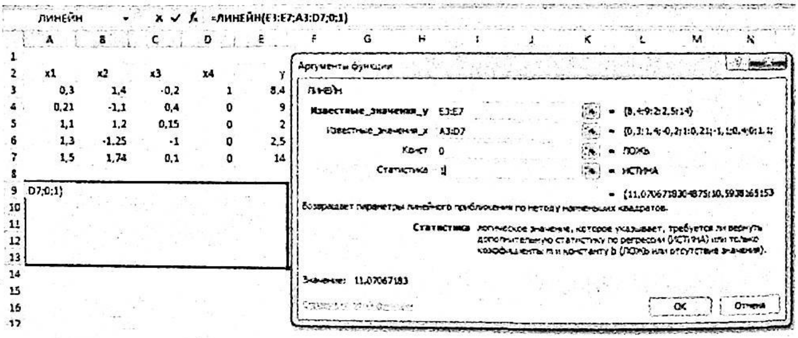
x_yangi	y_yangi
0,11	9,115452
0,15	9,267055
0,25	9,646064
0,3	9,835569
0,4	10,21458
0,6	10,97259

{=РОСТ(C3:C7;B3:B7;E3:E8)}

x_yangi	y_yangi
0,11	9,10375
0,15	9,229449
0,25	9,551343
0,3	9,716476
0,4	10,05536
0,6	10,76899

Ko‘p kirish signaliga ega tizimlar uchun empirik modellar qurish va ular asosida taqribiy eksperiment o‘tkazish ham bir kirishli tizimlar kabi **ЛИНЕЙН**,

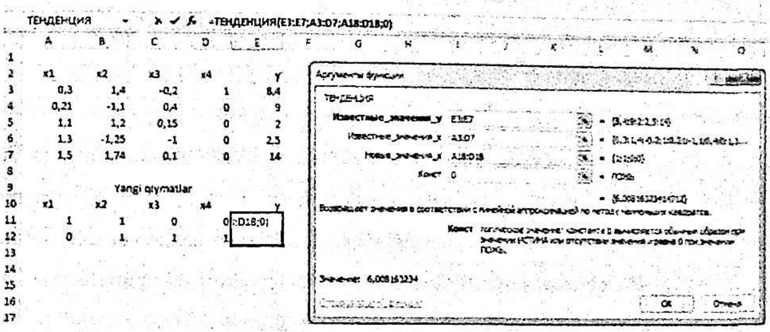
ЛГРФПРИБЛ, **ТЕНДЕНЦИЯ**, **РОСТ** funksiyalari bilan hal etiladi, faqat **Известные_значения_x** maydoniga barcha x lar manzili ko‘rsatiladi.



C11 f_x {=ЛИНЕЙН(E3:E7;A3:D7;0;1+H25)}

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	x1	x2	x3	x4	y		
3	0,3	1,4	-0,2	1	8,4		
4	0,21	-1,1	0,4	0	9		
5	1,1	1,2	0,15	0	2		
6	1,3	-1,25	-1	0	2,5		
7	1,5	1,74	0,1	0	14		
8							
9	11,07067	10,59382	-2,14032	8,148488	0		
10	9,400033	9,119138	3,665911	4,263213	#Н/Д		
11	0,843334	7,48709	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д		
12	1,345755	1	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д		
13	301,7535	56,05652	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д		

	A	B	C	D	E	F
1	m_n	m_{n-1}	...	m_2	m_1	b
2	se_n	se_{n-1}	...	se_2	se_1	se_b
3	r_2	se_y				
4	F	d_f				
5	$ss_{per.}$	$ss_{ост}$				



12-rasm

Kichik kvadratlar usuliga ko‘ra $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ koeffitsiyentlar vektori berilganlar matritsasi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ va y vektor orqali quyidagi formula bilan topishga keltiriladi:

$$a = (x^T x)^{-1} x^T y$$

Bu formula bo‘yicha ham Excelda hisoblash bajarish murakkab emas, faqat matritsani transponirlashda **ТРАНСП**, matritsani matritsaga ko‘paytirishda **МУМНОЖ**, teskari matritsani topishda **МОБР** funksiyalaridan to‘g‘ri foydalnish kifoya.

2.7. MatLabda basic fitting orqali empirik-statistik modellar qurish

Ko‘pgina muhandislik va ilmiy muammolar tajriba malumotlari o‘rtasidagi bog‘liqlikni aniqlashni o‘z ichiga oladi. Masalan, kimyoviy va texnologik jarayonlarda biz jarayonning rentabelligi, uning paydo bo‘lishi, harorati va ishlatilgan katalizator miqdori o‘rtasidagi bog‘liqlikni kuzatishimiz mumkin. Ushbu nisbatni bilish har xil harorat va katalizator miqdori uchun texnologik jarayonlarni modelini tuzish imkon beradi.

Ko‘p hollarda, bitta o‘zgaruvchan Y mavjud, bu kirish ma’lumotlari to‘plamining qiymatiga bog‘liq bo‘lib, erkli o‘zgaruvchilar $x_1, \dots, x_r$ deb ham ataladi. Y va $x_1, \dots, x_r$ kirish o‘zgaruvchilari orasidagi bog‘lanishning eng oddiy turi bu chiziqli bog'lanishdir. Ya'ni, ba'zi bir doimiylar uchun $b_0, b_1, \dots, b_r$ quyidagi tenglama o'rinli

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_r x_r \tag{1.26}$$

Agar Y va x_i, $i = 1, \dots, r$ orasida bog'liqlik bo'lsa, unda har qanday kirish qiymatlari to'plamiga javobni aniq bashorat qilish mumkin edi (β_i o'rganilgandan so'ng). Ammo, amalda, bunday aniqlikka deyarli hech qachon erishib bo'lmaydigan va (1.26) tenglama tasodifiy xatoga yo'l qo'yilgan bo'lishi mumkin.

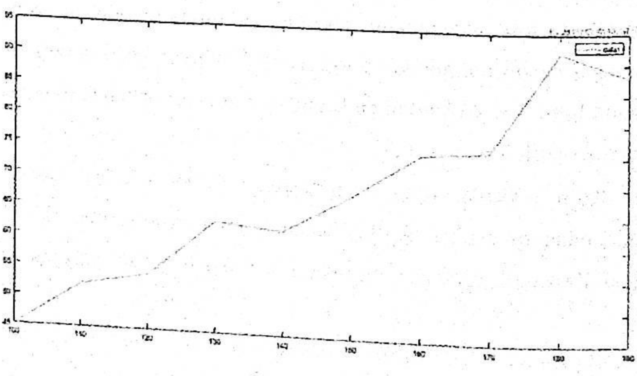
$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_r x_r + e \tag{1.27}$$

Asosiy qism: 1-masala. Shartli ravishda olingan tajriba ma'lumotlari orqali X va Y o'rtasidagi bog'liqlikni aniqlang va Matlab dasturiy paketi yordamida regressiya tenglamasini tuzing.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
Y_i	45	52	54	63	62	68	75	76	92	88

1-qadam. Matlabga x va y ni kiritish quyidagicha amalga oshiriladi

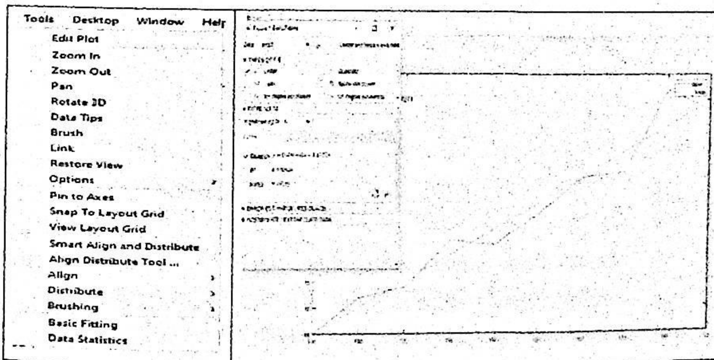
```
>> close all
>> clear all
>> clc
>> x=[100 110 120 130 140 150 160 170 180 190];
>> y=[45 52 54 63 62 68 75 76 92 88];
>> plot(x,y);
```



1-rasm. Xi va Yi o'rtasidagi bog'liqlik grafigi

1-rasmda X_i va Y_i o'rtasidagi bog'liqlik grafigi keltirilgan. Ushbu nuqtalarning grafigi hosil bo'lgan tasodifiy hatolarni hisobga olib, Y va Y o'rtasidagi chiziqli bog'liqlikni oddiy chiziqli regressiya modeliga mos kelishini ko'rsatadi.

2-qadam. Matlab tizimida tajriba natijalarini qayta ishlash uchun oldin `plot(x,y)` funksiyasi orqali grafik qurib olinadi. Keyin **Tools** menyusining **Basic Fitting** buyrug'i orqali empirik funksiyalar tanlash oynasi ochiladi. Bu oynada taklif etilayotgan funksiyalardan birini tanlab, **Show equations** maydonchasiga ☑ belgini o'rnatsak tajriba natijalari o'rtasidagi bog'liqlik modeli hosil bo'ladi.



2-rasm. Basic fitting buyurug'i orqali olingan tajriba ma'lumotlariga chiziqli empirik model quramiz va natijani olishimiz mumkin va u quyidagicha korinishga ega boladi.

Chiziqli teglama quyidagicha ko'rinishga ega

$$Y = 0{,}496364 * X - 4{,}47273$$

Chiziqli yaqinlik darajasi

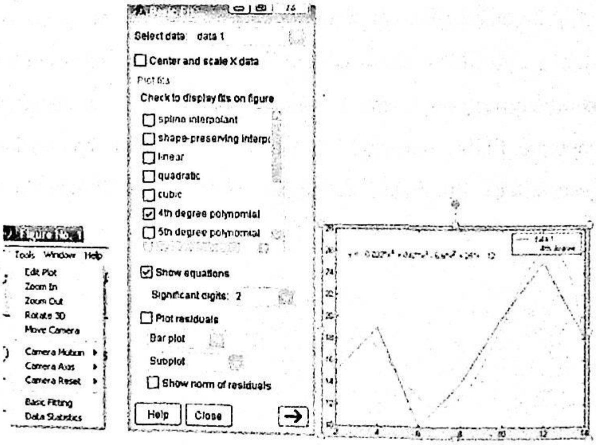
$$R^2 = 0.954949$$

Matlab tizimida tajriba natijalarini qayta ishlash uchun oldin `plot(x,y)` funksiyasi orqali grafik qurib olinadi. Keyin **Tools** menyusining **Basic Fitting** buyrug'i orqali empirik funksiyalar tanlash oynasi ochiladi. Bu oynada taklif etilayotgan funksiyalardan birini tanlab, **Show equations** maydonchasiga ☑ belgini o'rnatsak tajriba natijalari o'rtasidagi bog'liqlik modeli hosil bo'ladi.

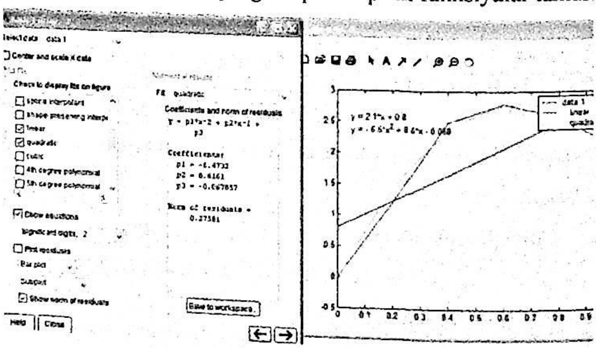
5-masala.

1	20
3	26
5	15
10	32
15	36
30	18

```
>> x=[2 4 6 8 10 12 14];
>> y=[15 19 10 14 20 25 18];
>> plot(x,y)
```

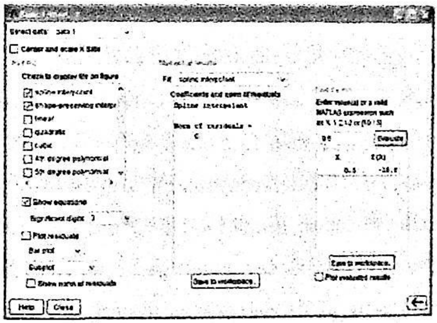


1-rasm. Basic Fitting buyrugi orqali empirik funksiyalar tanlash

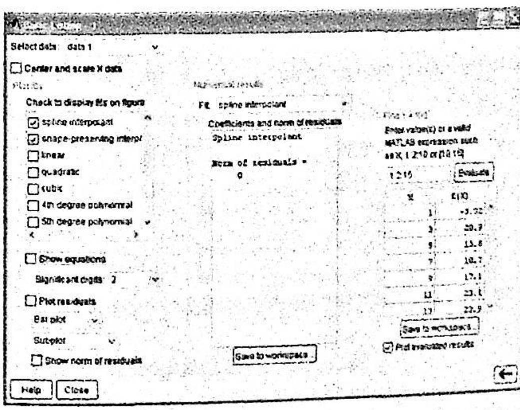


2-rasm. Basic Fitting oynasi kengaytirilgan holi

Basic Fitting oynasida kubik splayn orqali interpolyatsiyalash va **Ermit** interpolyatsiyalash grafiklarini olish mumkin. Funksiyaning biror nuqtasidagi taqribiy qiymati kengaytirilgan **Basic Fitting** oynasining Find $Y = f(x)$ maydoniga argumentni kiritish bilan aniqlanadi (3-rasm). Argumentni uch xil ko'rinishda kiritish mumkin: son, ketma-ket tartiblangan sonlar va interval ko‘rinishda. Agar natijani grafikda ham ko‘rishni xohlasak, buning uchun ajratilgan maydonni tanlash kerak: ☑ Plot evaluated results (3,4-rasmlar).



3-rasm. Funksiyaning $x = 0{,}5$ dagi taqribiy qiymatini hisoblash.



4-rasm. Argumentni ketma-ket tartiblangan sonlar ko‘rinishda kiritish

1.8. Kichik kvadratlar usuli yordamida regressiya tenglamasini aniqlash

1. Quyidagi o‘lchash natijalari bo‘yicha chiziqli regressiya

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

Koeffitsiyentlari a_1, a_2, a_3 larni aniqlang:

x1 0.62 0.40 0.42 0.82 0.66 0.72 0.38 0.52 0.45 0.69 0.55 0.36

x2 12. 0 14. 2 14. 6 12. 1 10. 8 8.2 13.0 10.5 8.8 17.0 14.4 12.8

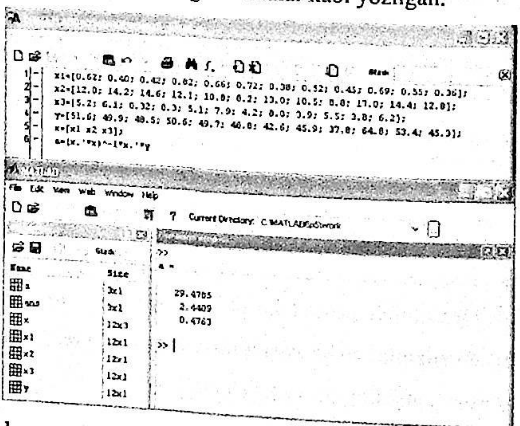
x3   5.2 6.1 0.32 8.3 5.1 7.9 4.2 8.0 3.9 5.5 3.8 6.2

y   51.6 49.9 48.5 50.6 49.7 48.8 42.6 45.9 37.8 64.8 53.4 45.3

Bu masalani hal etishda kichik kvadratlar usuli qo‘llaniladi. Bu usulga ko‘ra $a = (a_1, a_2, a_3)$ koeffitsiyentlar vektori $x = (x_1, x_2, x_3)$ matritsa va y vektor orqali quyidagi formula bilan topishga keltiriladi:

$$a = (x^T x)^{-1} x^T y$$

Matlabda ozgina dasturlash imkoniyatlaridan xabardor bo‘ldan mutaxassis ham $a = (x^T x)^{-1} x^T y$ kabi formulalar bo‘yicha hech qiyinchiliksiz hisoblashlar bajarishi mumkin. Bunda matritsalarni ko‘paytirish formulasini bilishi hamda teskari matritsani topish usullarini bilishi talab etilmaydi. Faqat hisoblanadigan ifodani Matlab dasturlash tili qoidasiga ko‘ra yozishni bilishi yetarli. Quyidagi rasmda masalaning Matlabda tuzilgan dasturi va natijasi berilgan. Unda birinchi qatordan to‘rtinchi qatorgacha berilganlar kiritilgan. Beshinch qatorda x matritsasi tuzilgan. Oltinchi qatorda esa $a = (x^T x)^{-1} x^T y$ formula dasturlash tilida yozilgan. Ko‘rinib turibdiki, dastur juda sodda, u matritsa yoki vektorlar emas oddiy o‘zgaruvchilar orqali berilgan ifodalar kabi yozilgan.



1-rasm. Kichik kvadratlar usulini qo‘llash dasturi

Bunday dasturni bilim darajasi o'rtacha bo'lgan talaba ham tuzishi mumkin. Turli sohadagi ilmiy izlanishlarda va loyihalashda bunday masalalar ko'plab uchraydi. Ularni tez hal etish yo'llaridan biri MatLab tizimidan foydalanishdir.

Shunday qilib, eksperimental ma'lumot to'plashning passiv usullari ma'lum afzalliklarga ega, bu ma'lumot obyektning normal ishlashi paytida to'planishidan iborat. Ushbu afzallik kimyoviy texnologiya obyektlarini o'rganish uchun regressiya tahlilini keng joriy etishga yordam beradi. Biroq, passiv eksperiment asosida olingan modellar ko'p hollarda samarasiz bo'lib chiqadi. Sababi bu usulning o'zi emas, balki regressiya tahlilining asosiy shartlari bajarilmasligi. Ba'zan kirish parametrlarini o'lchashdagi xato, hatto omillarning o'zlarining o'zgarishi oralig'idan ham oshib ketadi. Shuning uchun biz keyingi boblarda faol tajriba ma'lumotlari asosida empirik statistik modellar qurishni ko'rib chiqamiz.

Mustaqil yechish uchun misollar:

Jadvaldagi ma'lumotlarga asoslanib korrelyatsiya koeffisientini aniqlang va uni monandlikka tekshiring.

Tajribalar soni	Kirish parametri	Chiqish parametri	Kirish parametri	Chiqish parametri	Kirish parametri	Chiqish parametri
	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	1,21	14	19	889	41	322
2	1,35	35	83	391	94	575
3	1,65	22	67	776	10	802
4	1,14	23	65	958	80	633
5	0,95	35	89	995	57	393
6	0,8	25	14	119	16	283
7	1,5	16	37	788	18	856
8	2,2	15	62	327	68	885
9	2,5	17	75	783	23	472
10	1,75	7	45	914	22	816

Tajribalar soni	Kirish parametri	Chiqish parametri	Kirish parametri	Chiqish parametri	Kirish parametri	Chiqish parametri
	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	16	159	92	747	13	444
2	81	608	30	223	49	814

3	78	535	18	594	19	921
4	82	233	18	360	42	469
5	70	803	86	396	84	662
6	24	133	16	545	84	750
7	11	809	47	701	18	925
8	41	875	22	489	39	836
9	10	413	68	720	40	337
10	74	554	17	718	16	930

Nazorat savollari

1. Empirik-statistik modellar deganda nimani tushinamiz?
2. Korellatsion tahlil nima?
3. Regression tahlil usullariniga misollar keltiring?
4. Empirik-statistik modellar tuzishda qanday funksiyalar qo'llaniladi?
5. Kichik kvadratlar usulida minimumlashtiriluvchi funksionalning matritsa ko'rinishi qanday?
6. Office dasturlarida empirik modellar qurish qanday amalga oshiriladi?
7. MatLab dasturida empirik modellar qurish qanday amalga oshiriladi?

Kichik kvadratlar usulida minimumlashtiriluvchi funksionalning matritsa ko'rinishi qanday?

III BOB. FAOL TAJRIBA MA'LUMOTLARI ASOSIDA EMPIRIK – STATISTIK MODELLARNI QURISH

3.1. Faol tajribalarga asoslangan statistik modellar qurish

So'nggi paytlarda turli xil jarayonlarni modellashtirish va optimallashtirish uchun faol eksperimental rejalashtirish usullari keng qo'llanilmoqda. Ularning yordami bilan tadqiqotchi o'rganilayotgan obyekt va uni optimallashtirish to'g'risida zarur ma'lumotlarni olish uchun minimal xarajat bilan oldindan belgilangan reja asosida tajriba o'tkazadi. Faol eksperimentga o'zaro bog'liq bo'lgan bir necha bosqichlardan iborat tadqiqotlar kiradi, oldingi bosqichda o'tkazilgan eksperimentni qayta ishlash natijalari keyingi bosqich tajribalari strategiyasini ishlab chiqishda qo'llaniladi. Eksperimentni rejalashtirish usuli bizga turli jarayonlar uchun matematik masalalarni yechish imkonini beradi.

"Qora quti" (obyekt) ichida sodir bo'ladigan jarayonlarning mexanizmlari to'g'risida ma'lumotlarning yetishmasligiga qaramay, ehtimollik xususiyatiga ega bo'lgan kirish va chiqish o'zgaruvchilarining qiymatlari asosida matematik model tuziladi. Modelning konstruktsiyasi iyerarxik prinsipga bo'ysunadi: oddiy modeldan murakkabigacha va to'liq faktorli eksperimentdan kompozitsion rejasigacha. Ushbu yondashuv jarayon uchun maqbul sharoitlarni izlashga imkon beradi. Ushbu masala matematik modelining ekstremumi mavjud bo'lganda ham, yo'q bo'lganda ham yechish mumkin bo'ladi. Shuni ta'kidlash kerakki, matematik model faqat tajriba o'tkazilgan maydonni tavsiflaydi.

Modellashtirishning an'anaviy to'rt bosqichidan tashqari (tajriba o'tkazish, model turini tanlash, model parametrlarini aniqlash, monandlikka tekshirish) yana bir optimallashtirish bosqichi qo'shilishi mumkin. Faol tajribada modellashtirishning dastlabki ikki bosqichi o'zaro bog'liqdir, shuning uchun model tanlash tajriba natijasiga bog'liq bo'ladi.

Bunday holda, omillarni tanlash optimallashtirish talablariga bog'liq. Odatda ko'p faktorli masalalarda obyektning matematik modeli ma'lum darajadagi polinom shaklida yoziladi (kerakli aniqlikka qarab). Bir qarashda, regressiya koeffitsientlarini aniqlash uchun zarur bo'lgan tenglamalar soni ushbu koeffitsientlar soniga teng bo'lishi kerak. Biroq, natijada olingan model x_1, x_2, ..., x_k omillarining boshqa qiymatlariga mos kelishini tekshirish kerak. Shuning uchun tajribalar soni har doim aniqlanadigan koeffitsientlar sonidan katta bo'ladi. Qo'shimcha eksperimentlar adekvatlik gipotezasini tekshirish uchun ma'lum darajadagi erkinlik darajasini, ya'ni olingan tenglamaning haqiqiy qonunlarga muvofiqligini ta'minlaydi. Tajribalar soni qancha ko'p bo'lsa, model adekvatligi shuncha yuqori bo'ladi.

Tajriba rejasini tanlashda rejalashtirishning optimalligi prinsipiga rioya qilinadi: tajriba rejasi ba'zi optimal xususiyatlarga ega bo'lishi kerak, qaysidir ma'noda mumkin bo'lgan eng yaxshi tajriba rejasi bo'lishi kerak.

Eksperimental loyihalash uchun optimallik mezonini tanlash birinchi navbatda yechilayotgan masalaga bog'liq. Regressiya eksperimenti loyihalari uchun optimallik mezonlari odatda ikki guruhga bo'linadi:

- regressiya koeffitsientlarini baholashning aniqligi bilan bog'liq mezonlarni;
- empirik modelning monandlikka tekshirish (regressiya tenglamasi yordamida javob qiymatlarini qanchalik aniq ekanligini tahmin qilish mumkin).

Hozirgi vaqtda regressiya tahlillari rejalarining maqbulligi uchun bir necha o'nlab mezonlar ma'lum. Keling, eng keng tarqalganlaridan birini ko'rib chiqamiz.

Agar funksiya matritsasi diagonal bo'lsa, regression tajriba rejasi ortogonal deb nomlanadi. Nomlanish bu holda matritsaning ustunlari ortogonal ekanligi bilan izohlanadi, shuning uchun har qanday ikki ustun uchun ularning juft elementlarining yig'indisi nolga teng bo'ladi.

Odatda ortogonal rejalashtirish tez-tez qo'llanadi, chunki bunday rejalashtirish bilan regressiya koeffitsientlari mustaqil ravishda olinadi, bu ularni tahlil qilishni ancha osonlashtiradi. Bundan tashqari, regressiya koeffitsientlarini hisoblash ancha soddalashtirilgan (normal tenglamalar tizimini tuzish va yechishga hojat yo'q). Ushbu rejaga to'liq faktorli eksperiment 2^n, kasr faktorli tajribasi 2^{n-p}, markaziy kompozitsion ortogonal reja kiradi.

Eng muhim va tez-tez ishlatiladigan usullardan biri bu D-optimallik mezonidir, unga ko'ra regressiya koeffitsientlari baholarining umumlashtirilgan dispersiyasi minimallashtiriladi. D-optimal to'liq faktorli eksperiment 2^n, kasr faktorli tajribasi 2^{n-p}, 2-tartibli D-rejasi D-optimalga yaqin.

Agar regressiya tenglamasiga muvofiq javob qiymatlarini aniqligi reja markazidan teng masofada joylashgan barcha nuqtalarda bir xil bo'lsa, eksperimental loyiha aylanuvchi deb nomlanadi.

Rejalarning yana bir xususiyati eksperiment o'tkazish xarajatlarini minimallashtirish nuqtai nazaridan juda maqbuldir. Agar tajribalar soni regressiya tenglamasining aniqlangan koeffitsientlari soniga teng bo'lsa, reja mustahkam deb nomlanadi. Bu, ayniqsa, dastlabki tadqiqotlar bosqichida, eksperimentning minimal narxida obyekt haqida taxminiy tasavvurga ega bo'lish zarur bo'lganda juda muhimdir.

Jarayonning matematik modelini ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni o'rnatmasdan belgilaydigan asosiy, eng muhim omillarni tanlash uchun saralash eksperimenti o'tkaziladi.

3.2. Birinchi darajali rejalashtirish

Birinchi tartibli rejalarga simpleks rejalar, to'liq va kasr ratsional tajribalar va boshqalar kiradi.

Simpleks rejalashtirish $n+1$ o'lchovli koordinatalar sistemasida yuqori va quyidagi raqamlarni, ya'ni tajriba nuqtalarining koordinatalarini aniqlash uchun foydalanadi. Barcha tomonlari teng bo'lgan oddiy simpleks reja muntazam deb nomlanadi. Agar tajribalar simpleks chegarasida o'tkazilsa, u holda chegarasidagi nuqtalar soni birinchi tartibli model koeffitsientlari soniga teng bo'ladi. Bunday reja eksperimentlarni cheklangan sharoitlarda o'tkazishga imkon beradi. Simpleksni yo'naltirish orqali faktorli eksperimentning o'rganilayotgan hududida uning qulay joylashishiga erishish mumkin. To'liq va kasr faktorial tajribalarni batafsil ko'rib chiqamiz.

3.3. To'liq faktorli eksperiment

Agar chiziqli funktsiya quyidagi korinishda belgilanishini aniqlasak ya'ni, $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$ deb olsak b_0, b_1, b_2, b_3 koeffitsientlarni kichik kvadratlar usuli bilan aniqlashda quyidagi tenglamalar sistemasini echish zarur bo'ladi

$$\begin{cases} b_0 + b_1\overline{x_1} + b_2\overline{x_2} + b_3\overline{x_3} = \overline{y} \\ b_0x_1 + b_1\overline{x_1^2} + b_2\overline{x_2x_1} + b_3\overline{x_3x_1} = \overline{yx_1} \\ b_0x_2 + b_1\overline{x_1x_2} + b_2\overline{x_2^2} + b_3\overline{x_3x_1} = \overline{yx_2} \\ b_0x_3 + b_1\overline{x_1x_3} + b_2\overline{x_2x_3} + b_3\overline{x_3^2} = \overline{yx_3} \end{cases} \tag{3.1}$$

Yuqori tartibli tenglamalar sistemasini yechish kompyuterlar yoq paytda juda ko'plab qiyinchiliklar keltirib chiqargan. Shuning uchun x_{ij} larni mahsus tanlash bilan sistema yechimini quyidagi shartlar asosida ((3.3)-(3.5)) eksperiment o'tkazish orqali quiydagi sistemaga olib kelamiz (3.2).

$$\begin{cases} b_0 = \overline{y} \\ b_1 = \overline{yx_1} \\ b_2 = \overline{yx_2} \\ b_3 = \overline{yx_3} \end{cases} \tag{3.2}$$

Tajribani rejalashtirishda x_{ij}larni o'zimiz tanlaymiz. Ya'ni quyidagi jadvaldagi qiymatlarni biz oldindan rejalashtiramiz va shu sonlarga mos tajriba o'tkazamiz (3.1-jadval).

3.1-jadval

Tajriba raqami	X_1	X_2	...	X_n
1	x_{11}	x_{21}	...	x_{n1}
2	x_{12}	x_{22}	...	x_{n2}
3	x_{13}	x_{23}	...	x_{n3}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
K	x_{1n}	x_{2n}	...	x_{nk}

Agar ularni quyidagi shartlarni bajaradigan ko'rinishga keltirsak regressiya tenglamsini koeffitsientlarini aniqlash uchun chiziqli teglamalar sistemasini yechish talab etilmaydi.

Demak, Regressiya koeffitsientlarini aniqlash uchun quyidagi shartlar bajarilishi lozim: ortogonallik (matritsaning istalgan ikki ustunining skaler ko'paytmasi nolga teng) (3.3), simmetriya (matritsaning har bir ustuni elementlarining yig'indisi nolga teng) (3.4), normallashtirish (har bir ustun elementlari kvadratlarining yig'indisi o'tkazilgan tajribalar soniga teng teng) (3.5).

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji}x_{mi} = 0; \quad (j, m = 1, \dots, n, \qquad j \neq m), \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} = 0; \quad (j = 1, \dots, n), \tag{3.4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 = N; \quad (j = 1, \dots, n), \tag{3.5}$$

Yuqoridagi shartlar bo'yicha olingan x_{ij} lar ustida eksperiment o'tkazish ***to'liq faktorli eksperiment*** deb ataladi, uning davomida tadqiqot uchun tanlangan darajalarda omillarning barcha mumkin bo'lgan kombinatsiyalari amalga oshiriladi. Chiziqli rejalashtirish uchun har bir omillarning ikki darajada o'zgarishi, ya'ni tajriba davomida ikki xil qiymatni olishi kifoya.

Faktorli eksperimentning mohiyati:

- ma'lum bir reja asosida eksperiment o'tkazishda barcha omillarning bir vaqtning o'zida o'zgarishi;
- matematik modelni chiziqli polinom shaklda aks ettirish;
- olingan polinomni matematik statistika usullari bilan o'rganish.

To'liq faktorli eksperiment uchun zarur bo'lgan tajribalar soni:

$$N = l^n \tag{3.6}$$

bu yerda n – faktorlar soni; l – darajalar soni.

Faktor darajalari – bu ma'lum bir texnologik parametr uchun o'rganish maydonining chegaralari. Har bir omil uchun eksperimental maydonni tanlash dastlabki va yuqori omillarni tajribada amalga oshirish uchun aniqlik bilan tahlil qilish bilan bog'liq.

Odatda ikkinchi darajali rejalashtirish $l = 2$ ga teng bo'ladi faktorlar soni esa, jarayonga qarab o'zgarib turadi. Masalan ikkita faktor qaralayotgan bo'lsa $n = 2$ tajribalar soni $N = 2^2 = 4$ ga teng bo'ladi.

3.1-misol. Jarayonning ikkita faktori qaralayotgan bo'lsin: Harorat (x_1) va moddaning konsentratsiyasi (x_2). Agar bizga haroratning o'zgarish oralig'i $150 - 200\ °C$ va konsemtratsitasi $6 - 10\%$ berilgan bo'lsa, ushbu jarayon uchun regressiya tenglamasini aniqlang (3.1-jadval).

Yechish. Ikkala omil uchun, ularning o'zaro ta'sirini hisobga olmasdan, tegishli model quyidagicha yozilishi mumkin

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2.$$

Tajriba shartlari:

3.1 – jadval

	$x_1, °C$	$x_2, \%$
Yuqori darajasi x_i^{max}:	200	10
Quyi darajasi x_i^{min}:	150	6
Asosiy darajasi x_i^0:	175	8
Variatsiya oralig'i Δx_i:	25	2

Asosiy daraja quyidagicha hisoblanadi:

$$x_1^0 = \frac{x_1^{\max} + x_1^{\min}}{2} = \frac{200 + 150}{2} = 175;$$

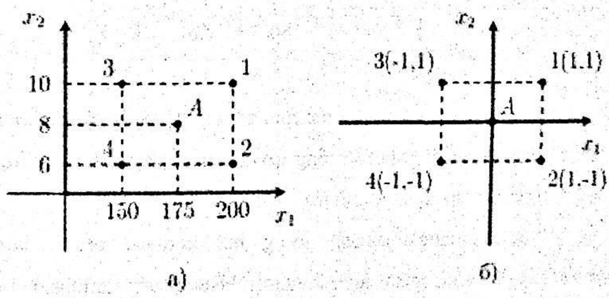
$$x_2^0 = \frac{x_2^{\max} + x_2^{\min}}{2} = \frac{10 + 6}{2} = 8.$$

Variatsiya oralig'i:

$$\Delta_{x_1} = \frac{x_1^{\max} - x_1^{\min}}{2} = \frac{200 - 150}{2} = 25;$$

$$\Delta_{x_2} = \frac{x_2^{max} - x_2^{min}}{2} = \frac{10-6}{2} = 2.$$

Koordinata tekisligida qiymatlar quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:



3.1-rasm. 2^2 to‘liq faktorli eksperimentning eksperimental nuqtalarining joylashuvi

Eksperimental reja mustaqil o‘zgaruvchilarning eksperimental nuqtalarining n-o‘lchovli fazosidagi joylashishini, ya’ni bajarilishi zarur bo‘lgan barcha tajribalarning shartlarini bildiradi. (3.1 a-rasm, 1, 2, 3, 4-nuqtalar; A nuqta rejalashtirish maydonining markazi).

Ko‘pgina hollarda, tajribani rejalashtirish ***matritsa shaklida*** beriladi – bu reja (jadval), uning har bir satri tajriba shartlarini aks ettiradi va turli tajribalarda matritsaning har bir ustuni o‘zgaruvchilar qiymatlariga mos keladi.

Tajriba davomida tadqiqot obyektidagi o‘zgarishlar sababli, unda qaytarib bo‘lmaydigan o‘zgarishlar yuz beradi, shuning uchun tajriba natijasi tajribaning seriya raqamiga bog‘liq. Tajribalarni o‘tkazish tartibiga tasodifiylik elementini qo‘shish uchun tasodifiy sonlar jadvallaridan (Student jadvali, Koxren jadvali) foydalaniladi. Agar bir rejimdan ikkinchisiga qayta qurish uchun katta vaqt yo‘qotilishi tufayli to‘liq tasodifiylashtirish imkonsiz bo‘lsa, butun tajriba bloklarga bo‘linadi va bloklar ichida randomizatsiya amalga oshiriladi.

Oldingi misol uchun matritsa tuzamiz, unga ko‘ra tajribalar soni (3.6) $N = 2^2 = 4$.

N	x_1	x_2	Y
1	200	10	Y_1
2	200	6	Y_2
3	150	10	Y_3
4	150	6	Y_4

Rejalashtirish matritsasi ma'lum bir reja asosida eksperiment o'tkazish, har bir tajribada chiqish parametrining qiymatlarini aniqlash va olingan ma'lumotlar asosida statistik modelni tuzish maqsadida tuziladi.

Nuqtalar aniqlangandan so'ng biz kodlash orqali tajriba nuqtalarini koordinatalar tekisligiga joylashtiramiz. Nuqtalarni aniqlash formulasi quyida keltirilgan.

$$X_i = \frac{x_i - x_i^0}{\Delta x_i}, \tag{3.7}$$

Bu yerda x_i - natural o'zgaruvchining qiymati (yuqori yoki pastki daraja); x_i^0 – natural o'zgaruvchilarning asosiy darajasi; Δx_i – natural sonlarning variatsiya oralig'i; X_i – i-faktorlarning kodlangan qiymati (yuqori yoki pastki daraja)

Natural qiymatlardan kodlangan qiymatlarga o'tamiz.

Harorat uchun

$$X_1^{max} = \frac{200 - 175}{25} = 1, \qquad X_1^{min} = \frac{150 - 175}{25} = -1;$$

Modda miqdori uchun

$$X_2^{max} = \frac{10 - 8}{2} = 1, \qquad X_2^{min} = \frac{6 - 8}{2} = -1;$$

Shunday qilib, yuqori darajadagi omillar $(200, 10)$ $+1$, pastki darajadagisi esa $(150, 6)$ -1 ni bildiradi.

Rejalashtirish matritsasini tuzishda quyidagi texnikadan foydalaniladi. Birinchi ustunda "-1" va "$+1$" qiymatlari o'zgarib turadi (odatda 1 raqami tashlab yuboriladi va faqat belgilar qoladi) va belgilarninig almashib borishining o'zini maxsus texnikasi mavjud. Odatda polinomning koeffitsentlarni hisoblash uchun X_0 qoshimcha ustun hosil qilinadi va uning qiymatlari $+1$ ga teng bo'ladi.

Rejalashtirishdan hosil bo'lgan matritsasida o'tkazilgan tajriba natijasida biz y_i maqsad funksiyasining mos qiymatlarini tanlab olamiz ($i = 1,\dots,N$).

N	X_0	X_1	X_2	y
1	+	+	+	100
2	+	–	+	120
3	+	+	–	150
4	+	–	–	170

Eksperimental nuqtalarning dekart koordinatalar sistemasida joylashishi 3.1b rasmda ko'rsatilgan.

O'lchamsiz birliklarda rejalashtirish matritsasi kerakli optimal xususiyatlarga ega: ortogonallik (3.1), simmetrik (3.2), normallashgan (3.3). Bunday matritsaning o'ziga xos xususiyati uning aylanuvchanligidir (rejalashtirish matritsasidagi barcha nuqtalar eksperiment markazidan baravar uzoqlikda yotadi).

Ushbu xossalarga asoslanib, regressiya koeffitsientlarini hisoblash ancha soddalashtirilgan.

Reja (rejalashtirish matritsasi) amalga oshirilgandan so'ng tajribalar o'tkaziladi (etarli miqdordagi parallel o'lchovlar bilan) va natijalar asosida regressiya tenglamasidagi koeffitsientlar quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \overline{X_{0_i}}, \qquad b_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \overline{X_{1_i}}, \qquad b_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \overline{X_{2_i}}.$$

Yoki umumiy ko'rinishi quyidagicha

$$b_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i \cdot \overline{X_{k_i}} \tag{3.8}$$

Yuqoridagi formulalar rejalashtirish matritsasi ((3.1) - (3.3)) xossalarini hisobga olgan holda kichik kvadratlar usuli asosida regresiiya tenglamasini aniqlaymiz.

Ya'ni

$$b_0 = \bar{y} = \frac{100 + 120 + 150 + 170}{4} = 135$$

$$b_1 = \overline{yx_1} = \frac{100 - 120 + 150 - 170}{4} = -10$$

$$b_2 = \overline{yx_2} = \frac{100 + 120 - 150 - 170}{4} = -25$$

Topilgan koeffitsientlar quyidagi regressiya tenglamsini hosil qiladi

$y = 135 - 10x_1 - 25x_2$

Tajribaning natural qiymatlari uchun esa quyidagicha korinishga ega bo'ladi

$y = 135 + 10 \cdot (X_1 \cdot \Delta x_1 + x_1^0) - 25(X_2 \cdot \Delta x_2 + x_2^0)$.

Regressiya tenglamasini monandlikka tekshirish keyingi mavzularda to'liq yoritiladi.

3.4. To'liq faktorli eksperiment yordamida regressiya tenglamasini aniqlash

2^n-turdagi to'liq faktorli eksperimentda turli xil tajribalar soni chiziqli model koeffitsientlari sonidan sezilarli darajada ortib ketadi, shuning uchun ushbu tajriba natijalariga ko'ra omillar o'rtasidagi o'zaro ta'sirni hisobga oladigan yanada murakkab modelni olish mumkin. (juft, uch faktorli va boshqalar). O'zaro ta'sirlarni hisobga olgan holda matritsaning ustunlari chiziqli ravishda mustaqil bo'ladi. Bundan tashqari, matritsa to'liq faktorli eksperimentli rejalashtirish matritsasining barcha xususiyatlarini saqlab qoladi: simmetrik, normallashtirish, ortogonallik, lekin chiziqli modeldan farqli o'laroq, aylanma xususiyatiga ega bo'lmaydi. 2^n turdagi to'liq faktorli eksperiment o'tkazilganda, kodlangan o'zgaruvchilardagi o'zaro ta'sirga ega bo'lgan tenglamaning barcha koeffitsientlari quyidagi formulalar (3.8) yordamida hisoblanadi.

3.2-misol. Quyidagi reja asosida olingan eksperimental ma'lumotlarga asoslanib, o'zaro ta'sirlarni hisobga olgan holda chiziqli regressiya koeffitsientlarini hisoblang (3.2-jadval).

3.2 – jadval

N	X_0	X_1	X_2	X_1X_2	y
1	+	+	+	+	58.2
2	+	–	+	–	46.8
3	+	+	–	–	52.5
4	+	–	–	+	40.7

Yechish. (3.8) formuladan foydalanib koeffitsientlarni hisoblaymiz. Matritsaning ikkinchi va uchinchi ustunlaridagi elementlarning yig'indisi nolga teng bo'lganligi sababli, y_i larni qo'shish orqali b_0 koeffitsientni topish mumkin

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \overline{X_{0_i}}, \qquad b_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \overline{X_{1_i}}, \qquad b_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \overline{X_{2_i}}.$$

$$b_0 = \frac{58{,}2 + 46{,}8 + 52{,}5 + 40{,}7}{4} = 49{,}6.$$

Qolgan koeffitsientlarni ham shu tartibda hisoblab chiqamiz.

$$b_1 = \frac{58{,}2 - 46{,}8 + 52{,}5 - 40{,}7}{4} = 5{,}8;$$

$$b_2 = \frac{58{,}2 + 46{,}8 - 52{,}5 - 40{,}7}{4} = 2{,}95;$$

$$b_{12} = \frac{58{,}2 - 46{,}8 - 52{,}5 + 40{,}7}{4} = -0{,}1.$$

Koeffitsientlar aniqlangandan so'ng regressiya tenlamasini aniqlash mumkin va u quyidagicha bo'ladi

$$\hat{y} = 49{,}6 + 5{,}8X_1 + 2{,}95X_2 - 0{,}1X_1X_2$$

Tajribaning natural qiymatlari uchun esa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$y = 49{,}6 + 5{,}8 \cdot (X_1 \cdot \Delta x_1 + x_1^0) + 2{,}95 \cdot (X_2 \cdot \Delta x_2 + x_2^0) - 0{,}1 \cdot (X_1 \cdot \Delta x_1 + x_1^0) \cdot (X_2 \cdot \Delta x_2 + x_2^0).$$

3.5. To'liq faktorli eksperiment asosida tuzilgan regressiya tenglamasini tahlil qilish

Biz bugungi mashg'ulotimizda to'liq faktorli eksperimentni rejalashtirish orqali regressiya tenglamasini tuzish va ayrim mezonlar yordamida monandlikka tekshirishni ko'rib chiqamiz.

Masalaning qo'yilishi: Jarayon uchun 3 ta faktor qaralayotgan bo'lsin va matritsani to'liq faktorli rejalashtirish $N = 2^3 = 8$ orqali amalga oshirilsin.

1-masala: Poyabzalning pastki qismini yelim bilan yopishtirish kuchiga ba'zi texnologik omillarning ta'sirini o'rganish uchun tajribalar 2^3 to'liq faktorli tajriba rejasi bo'yicha o'tkazildi va har bir tajriba uch marta takrorlandi (3.3 – jadvalga qarang). Y zichligiga ta'sir qiluvchi faktorlar sifatida $(kg\ /2.5\ sm^2)$ quyidagilar tanlandi:

x_1 – ishlatiladigan elim miqdori (g /sm^2), $x_{1\ quyi} = 0.02$, $x_{1\ yuqori} = 0.06$

x_2– kleyni yopishtirish vaqti (sek), $x_{2\ quyi} = 60$, $x_{2\ yuqori} = 300$

x_3 – kleylashdagi bosim miqdori (kgs/sm^2), $x_{3\ quyi} = 2$, $x_{3\ yuqori} = 8$.

Faktorlarning barcha o'zaro ta'sirlarini hisobga olgan holda regressiya tenglamasini tuzish, natijada olingan modelni adekvatligini aniqlash talab etiladi.

To'liq faktorli eksperimentnini 2^3 matritsali rejalashtirish jadvali

3.3 – jadval

Tajriba №	O'rganilayotgan faktorlar			Tajriba natijalari		
	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1	+	+	+	7,4	8,4	6,4
2	–	+	+	8,6	7	7,8
3	+	–	+	12,3	9	9,3
4	–	–	+	5,8	5,8	5,7
5	+	+	–	18,8	17	15,2
6	–	+	–	8,4	8,4	6

7	+	–	–	11,8	7	9,4
8	–	–	–	10,5	7,8	8,1

Ishni bajarish tartibi:

1) o'zgaruvchilarni kodlash;

2) o'zaro ta'sirlarni hisobga olgan holda kodlangan o'zgaruvchilarda rejalashtirish matritsasini to'ldiramiz va o'rtacha javob qiymatlari ustuni bilan to'ldiramiz;

3) regressiya tenglamasining koeffitsientlarini hisoblash;

4) takrorlanuvchanlik dispersiyasini oldindan aniqlagan holda hisoblangan koeffitsientlarni ahamiyatliligi uchun tekshiramiz va kodlangan o'zgaruvchilarda regressiya tenglamasini olamiz;

5) hosil bo'lgan tenglamani adekvatlikka tekshiring;

6) hosil bo'lgan modelni tahlil qilish;

1. Har bir faktor uchun tajriba markazini aniqlash, variatsiya oralig'ini aniqlash va berilgan z_i natural qimatlarni x_i qiymatlarga formula yordamida almashtirish va 2-jadvalga yozish.

3.4 – jadval

Faktorlar	Yuqori daraja x_i^+	Quyi daraja x_i^-	Markaz x_i^0	O'zgarish oralig'i Δx_i	Kodlangan o'zgaruvchining natural o'zgaruvchiga bog'liqligi
x_1	0,06	0,02	0,04	0,02	$X_1 = \frac{x_1 - 0{,}04}{0{,}02} = 50z_1 - 2$
x_2	300	60	180	120	$X_2 = \frac{x_2 - 180}{120}$
x_3	8	2	5	3	$X_3 = \frac{x_3 - 5}{3}$

Formulaga asosan, har bir tajriba uchun o'rtacha qiymatlarni hisoblaymiz:

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{3}(7{,}4 + 8{,}4 + 6{,}4) = \frac{22{,}2}{3} = 7{,}4;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{3}(8{,}6 + 7 + 7{,}8) = \frac{23{,}4}{3} = 7{,}8;$$

$$\bar{y}_3 = \frac{1}{3}(12{,}3 + 9 + 9{,}3) = \frac{30{,}6}{3} = 10{,}2;$$

$$\bar{y}_4 = \frac{1}{3}(5{,}8 + 5{,}8 + 5{,}7) = \frac{17{,}3}{3} \approx 5{,}766 \approx 5{,}77;$$

$$\bar{y}_5 = \frac{1}{3}(18{,}8 + 17 + 15{,}2) = \frac{51}{3} = 17;$$

$$\bar{y}_6 = \frac{1}{3} = (8{,}4 + 8{,}4 + 6) = \frac{22{,}8}{3} = 7{,}6;$$

$$\bar{y}_7 = \frac{1}{3}(11{,}8 + 7 + 9{,}4) = \frac{28{,}2}{3} = 9{,}4;$$

$$\bar{y}_8 = \frac{1}{3}(10{,}5 + 7{,}8 + 8{,}1) = \frac{26{,}4}{3} = 8{,}8$$

2. Biz barcha o'zaro ta'sirlarni va y ning o'rtacha qiymatlarini hisobga olgan holda rejalashtirish matritsasini tuzamiz (3.5 – jadval).

3.5 – jadval. Natijalarni qayta ishlash uchun rejalashtirish matritsasi

Tajriba №	Faktorlar			O'zaro ta'sir				Tajriba natijalari			Natijalar–ning o'rtachasi
	z_1	z_2	z_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y_1	y_2	y_3	$\bar{y}_j$
1	+	+	+	+	+	+	+	7,4	8,4	6,4	7,4
2	–	+	+	–	–	+	–	8,6	7	7,8	7,8
3	+	–	+	–	+	–	–	12,3	9	9,3	10,2
4	–	–	+	+	–	–	+	5,8	5,8	5,7	5,77
5	+	+	–	+	–	–	–	18,8	17	15,2	17
6	–	+	–	–	+	–	+	8,4	8,4	6	7,6
7	+	–	–	–	–	+	+	11,8	7	9,4	9,4
8	–	–	–	+	+	+	–	10,5	7,8	8,1	8,8

3. Regressiya koeffitsientlarini berilgan formulalar yordamida hisoblaymiz.

$$b_0 = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} \bar{y}_j = \frac{1}{8}(7{,}4 + 7{,}8 + 10{,}2 + 5{,}77 + 17 + 7{,}6 + 9{,}4 + 8{,}8) = \frac{73{,}97}{8}$$

$$= 9{,}24625 \approx 9{,}25;$$

$$b_1 = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} x_{j1}\bar{y}_j = \frac{1}{8}(7{,}4 - 7{,}8 + 10{,}2 - 5{,}77 + 17 - 7{,}6 + 9{,}4 - 8{,}8) = \frac{14{,}03}{8}$$

$$\approx 1{,}75;$$

$$b_2 = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} x_{j2}\bar{y}_j = \frac{1}{8}(7{,}4 + 7{,}8 - 10{,}2 - 5{,}77 + 17 + 7{,}6 - 9{,}4 - 8{,}8) = \frac{5{,}63}{8}$$

$$= 0{,}70375 \approx 0{,}7;$$

$$b_3 = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} x_{j3}\bar{y}_j = \frac{1}{8}(7{,}4 + 7{,}8 + 10{,}2 + 5{,}77 - 17 - 7{,}6 - 9{,}4 - 8{,}8)$$

$$= \frac{-11{,}63}{8} = -1{,}45375 \approx -1{,}45;$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} x_{j1}x_{j2}\bar{y}_j = \frac{1}{8}(7{,}4 - 7{,}8 - 10{,}2 + 5{,}77 + 17 - 7{,}6 - 9{,}4 + 8{,}8)$$

$$= \frac{3{,}97}{8} = 0{,}49625 \approx 0{,}5;$$

$$b_{1,3} = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} x_{j1}x_{j3}\bar{y}_j = \frac{1}{8}(7{,}4 - 7{,}8 + 10{,}2 - 5{,}77 - 17 + 7{,}6 - 9{,}4 + 8{,}8)$$

$$= \frac{-5{,}97}{8} = -0{,}74625 \approx -{,}075;$$

$$b_{2,3} = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} x_{j2}x_{j3}\bar{y}_j = \frac{1}{8}(7{,}4 + 7{,}8 - 10{,}2 - 5{,}77 - 17 - 7{,}6 + 9{,}4 + 8{,}8)$$

$$= \frac{-7{,}17}{8} = -0{,}89625 \approx -0{,}9;$$

$$b_{1,2,3} = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} x_{j1}x_{j2}x_{j3}\bar{y}_j = \frac{1}{8}(7{,}4 - 7{,}8 - 10{,}2 + 5{,}77 - 17 + 7{,}6 + 9{,}4 - 8{,}8)$$

$$= \frac{-13{,}63}{8} = -1{,}70375 \approx -1{,}7.$$

3.6 – jadvalga aniqlangan regressiya koeffitsientlarini kiritamiz

3.6 – jadval. Regressiya koeffitsientlari

b_0	b_1	b_2	b_3	$b_{1,2}$	$b_{1,3}$	$b_{2,3}$	$b_{1,2,3}$
9,25	1,75	0,7	-1,45	0,5	-0,75	-0,9	-1,7

4. Takrorlanuvchi $S_{\bar{y}}^2$ dispersiyani quyidagi formula yordamida hisoblaymiz.

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{1}{n\cdot(m-1)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(y_{ji} - \bar{y}_j)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(y_{ji} - \bar{y}_j)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_j^2 \qquad (3{,}9)$$

S_j^2 – ni hisoblashni amalga oshirish uchun quyidagi jadvaldan foydalanamiz.

j	y_1	y_2	y_3	$\bar{y}_j$	$(y_{j1} - \bar{y}_j)^2$	$(y_{j2} - \bar{y}_j)^2$	$(y_{j3} - \bar{y}_j)^2$	S_j^2
1	7,4	8,4	6,4	7,4	0	1	1	1
2	8,6	7	7,8	7,8	0,64	0,64	0	0,64
3	12,3	9	9,3	10,2	1,21	1,44	0,81	1,73
4	5,8	5,8	5,7	5,77	0,0009	0,0009	0,0049	0,00335
5	18,8	17	15,2	17	3,24	0	3,24	3,24
6	8,4	8,4	6	7,6	0,64	0,64	2,56	1,92
7	11,8	7	9,4	9,4	5,76	5,76	0	5,76
8	10,5	7,8	8,1	8,8	2,89	1	0,49	2,19

Barcha S_j^2 ni hisoblaymiz

$$\sum_{j=1}^{8} S_j^2 = 16{,}48335.$$

Bu yerdan S_y^2 ni hioblaymiz

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} S_j^2 = \frac{1}{8} \cdot 16{,}48335 \approx 2{,}06042 \approx 2{,}06.$$

Quyidagi formula orqali dispersiyaning o'rta kvadratik chetlanishini hisoblaymiz

$$S_{koef} = \sqrt{\frac{S_{\{y\}}^2}{n \cdot m}} \approx \sqrt{\frac{2{,}06}{8 \cdot 3}} \approx 0{,}292973 \approx 0{,}293 \qquad (3{,}10)$$

bu yerda n – eksperimentlar soni; m – xar bir eksperimentdagi tajribalar soni.

Styudent jadvaliga muofiq $n(m-1) = 8 \cdot 2 = 16$ $\alpha = 0{,}05$ aniqlikdagi qiymatini topamiz, $t_{kr} = 2{,}12$. Shundan so'ng $S_{koef} \cdot t_{kr} = 0{,}293 \cdot 2{,}12 = 0{,}52$ Topilgan qiymatni regressiya tenglamasining koeffitsientlari bilan solishtiramiz 3.6 – jadvaldagi ma'lumotlardan ko'rinib turibdiki faqat $b_{1,2} = 0{,}5$ qiymati 0,52 dan kichik. Demak, $b_{1,2}$ dan boshqa barcha qiymatlar muhum. Faraz qilaylik $b_{1,2} = 0$ ga teng bo'lsa, regressiya tenlamasi quyidagi korinishga ega bo'ladi:

$$y = 9{,}25 + 1{,}75x_1 + 0{,}7x_2 - 1{,}45x_3 - 0{,}75x_1x_3 - 0{,}9x_2x_3 - 1{,}7x_1x_2x_3$$

5. Hosil bo'lgan tenglamani monandlikka tekshiramiz.

Topilgan regressiya tenglamasini Fisher mezoni bo'yicha monandlikka tekshiramiz. Yuqorida takrorlanuvchi dispersiyani hisoblashni korgan edik lekin F_{xisob} ni toppish uchun S_{qol}^2 qoldiq dispersiyani topish talab etiladi.

Buning uchun topilgan regressiya tenglamasiga muofiq $\hat{y}$ $(j = 1, \dots, 8)$ izlanayotgan parametrni x_i larning o'rniga +1 yoki -1 ni qoyib qiymatini quyidagicha topamiz.

$\tilde{y}_1 = 9{,}25 + 1{,}75 + 0{,}7 - 1{,}45 - 0{,}75 - 0{,}9 - 1{,}7 = 6{,}9;$

$\tilde{y}_2 = 9{,}25 + 1{,}75(-1) + 0{,}7 - 1{,}45 - 0{,}75(-1) - 0{,}9 - 1{,}7(-1) = 8{,}3$

$\tilde{y}_3 = 9{,}25 + 1{,}75 + 0{,}7(-1) - 1{,}45 - 0{,}75 - 0{,}9(-1) - 1{,}7(-1) = 10{,}7$

$\tilde{y}_4 = 9{,}25 + 1{,}75(-1) + 0{,}7(-1) - 1{,}45 + 0{,}75 - 0{,}9(-1) - 1{,}7 = 5{,}3$

$\tilde{y}_5 = 9{,}25 + 1{,}75(-1) + 0{,}7 - 1{,}45(-1) + 0{,}75 - 0{,}9(-1) + 1{,}7 = 16{,}5$

$\tilde{y}_6 = 9{,}25 + 1{,}75(-1) + 0{,}7 - 1{,}45(-1) - 0{,}75 - 0{,}9(-1) - 1{,}7 = 8{,}1$

$\tilde{y}_7 = 9{,}25 + 1{,}75 + 0{,}7(-1) - 1{,}45(-1) - 0{,}75(-1) - 0{,}9 - 1{,}7 = 9{,}85$

$\tilde{y}_8 = 9{,}25 + 1{,}75(-1) + 0{,}7(-1) - 1{,}45(-1) - 0{,}75 - 0{,}9 + 1{,}7 = 8{,}3$

S^2_{qol} – qoldiq dispersiyasini quyidagi formula yordamida hisoblaymiz

$$S^2_{qol} = \frac{m}{n-r}\sum_{j=1}^{n}(\tilde{y}_j - \bar{y}_j)^2 \qquad (3{,}11)$$

bu yerda n – eksperimentlar soni;

m – xar bir eksperimentdagi tajribalar soni;

r – regressiya tenglamasidagi bog'liq koeffitsientlar soni;

$\tilde{y}_i$ – j-inchi eksperiment uchun bo'liq koeffitsientlarga ega bo'lgan regressiya tenglamasi bilan hisoblangan izlanayotgan parametrning miqdori;

$\bar{y}_i$ – j-inchi eksperiment uchun kuzatuvlarning o'rtacha tanlangan qiymati.

$S^2_{qol} = \frac{3}{8-7}\sum_{j=1}^{8}(\tilde{y}_j - \bar{y}_j)^2 = 3[(6{,}9 - 7{,}4)^2 + (8{,}3 - 7{,}8)^2 + (10{,}7 - 10{,}2)^2 + (5{,}3 - 5{,}77)^2 + (16{,}5 - 17)^2 + (8{,}1 - 7{,}6)^2 + (9{,}85 - 9{,}4)^2 + (8{,}3 - 8{,}8)^2] = 3 \cdot 1{,}9234 = 5{,}7702$

Fisher mezoni bo'yicha F_{xisob} quyidagi formula yordamida aniqlanadi

$$F_{xisob} = \frac{S^2_{qol}}{S^2_{\{y\}}} = \frac{5{,}7702}{2{,}06} = 2{,}8 \qquad (3{,}12)$$

F_{tabl} kriteriyasining jadval qiymati tegishli $k_1 = n - r = 8 - 7 = 1\ va\ k_2 = n(m-1) = 8(3-1) = 16$ erkinlik darajalariga muvofiq $\alpha = 0{,}05$ aniqlikda Fisher taqsimotining kritik nuqtalari jadvallaridan topiladi.

$$F_{tabl} = 4{,}49$$

Demak, $F_{xisob} = 2{,}8 < F_{tabl} = 4{,}49$ shartga ko'ra aniqlangan regressiya tenglamasi monand.

6. Hosil bo'lgan matematik modelni tahlil qilamiz.

$y = 9{,}25 + 1{,}75x_1 + 0{,}7x_2 - 1{,}45x_3 - 0{,}75x_1x_3 - 0{,}9x_2x_3 - 1{,}7x_1x_2x_3$

Tenglamadan ko'rinib turibdiki, x_i – faktor ($x_i - ning\ oldidagi\ koeffitsient\ qolgan\ koeffitsientlardan\ katta$) surtiladigan kley miqdori jarayonga eng katta ta'sir ko'rsatayotgan faktor, chunki u keffitsientning absolyut qiymatida eng yuqori ko'rsatkichga ega.

Sundan so'ng natijaga quyidagi ta'sir kuchlarini ko'rib chiqamiz (poyabzalning pastki qismini yopishtirish kuchi): $x_1x_2x_3$ faktorlarning uch karra o'zaro ta'siri; faktor x_3 - yopishtirish paytida bosimi; juft o'zaro ta'sir x_2x_3 - yopishtiruvchi plyonkaning faollashish vaqti va yopishtirish paytidagi bosim darajasi; juft o'zaro ta'sir x_1x_3 - qo'llaniladigan elim miqdori va yopishtirish paytidagi bosim darajasi; faktor x_2 - yopishtiruvchi plyonkaning faollashish.

x_1 va x_1 oldidagi koeffitsientlar musbat bo'lganligi sababli, ushbu faktorlarning ortishi bilan natija ortadi, ya'ni zichlik ortadi. x_3, x_1x_3, x_2x_3, $x_1x_2x_3$ oldidagi koeffitsientlari manfiy, bunda x_3 faktorlarning kamayishi va sanab o'tilgan o'zaro ta'sirlar bilan natija ortadi va ortishi bilan kamayadi degan ma'noni anglatadi.

Regressiya tenglamasining koeffitsientlarining doimiy qiymati bilan bitta birlikka o'zgarganda natija qancha birlik o'zgarishini ko'rsatadi. Kirish va chiqish parametrlarining o'lchov birliklari har xil bo'lsa, chiqish parametriga omillarning ta'sirini to'g'ridan-to'g'ri baholash uchun regressiya koeffitsientlaridan foydalanish tavsiya etilmaydi. Agar $x_i = 0$ tanlangan qiymatlarga yaqin bo'lsa b_0 koeffitsienti y ning taxmin qilingan darajasini ko'rsatadi. Aks holda, jarayonni tahlil qilish noto'g'ri natijalarga olib kelishi mumkin va hatto regressiya chizig'i kuzatilgan tajribaning qiymatlarini etarlicha aniq tavsiflasa ham, modelni adekvatligi kamayib ketishi mumkin. x ning qiymatlarini regressiya tenglamasiga qoyish orqali biz har bir tajriba uchun aniqlangan $y(x)$ qiymatlarini topishimiz mumkin. x va y ning bog'liqligini aniqlash uchun b_i koeffitsientlarni ishorasiga qarab aniqlash mumkin (agar koeffitsient 0 dan katta bo'lsa tog'ri bog'langan, 0 dan kichik bo'lsa teskari bog'langan).

x_i faktorlarga tasiri darajasini baholash uchun elastiklik va beta-koeffitsientlar hisoblanadi. Elastiklik koeffitsienti quyidagi formula bo'yicha topiladi:

$$E = b_i \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}}.$$

x_i faktorlar ko'rsatkichi 1% ga o'zgarganda natijaning ko'rsatkichi o'rtacha necha foiz o'zgarishini ko'rsatadi. Bunda omillarning o'zgaruvchanlik darajasi hisobga olinmaydi.

Beta koeffitsienti, faktorlarning qat'iy belgilangan o'rtacha chetlanish qiymatiga o'zgarganda, uning barqaror chetlashish qiymatining qaysi qismi o'zgarib turishini ko'rsatadi, bu holda esa erkli o'zgaruvchilar doimiy o'zgaruvchilar qiymati bilan o'zgaradi:

$$\beta = b_i \cdot \frac{S_x}{S_y}.$$

Regressiya koeffitsientlari aniqlangandan so'ng tenlamani statistik tahlil yordamida tekshiramiz

Buning uchun biz funksiyani approksimatsiyalash yordamida regressiya tenglamasining monandlikka tekshirishimiz mumkin

$$\bar{A} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{Y_i - y_i}{y_i}\right| \cdot 100\%.$$

Agar $\bar{A} < 10\%$ bo'lsa, model yuqori aniqlikda baholanadi, $10\% < \bar{A} < 20\%$ bo'lsa o'rtacha aniqlikda, $20\% < \bar{A} < 50\%$ bo'lsa, quyi aniqlikda baholanadi.

Olingan regressiya koeffitsientlari maqsad funksiyasi qiymatiga har bir faktor ta'sirining kattaligini baholash orqali monandligi tekshiriladi. Agar bu qiymat eksperimental xato bilan mutanosib bo'lsa, unda tegishli koeffitsient obyekt haqida qo'shimcha ma'lumotni o'z ichiga olmaydi va nolga tenglashtirilishi mumkin, natijada olingan model soddalashtiriladi. Koeffitsientlarning ahamiyati Student mezoni yordamida tekshiriladi. Eksperimental xatoni topish uchun - takrorlanuvchanlik dispersiyasi S_y^2 - qaysidir nuqtasida yoki rejalashtirish markazida bir qator parallel tajribalar o'tkazish orqali aniqlanadi.

Shundan so'ng dispersiyalarning bir xilligi har bir tajribada, xususan, bir nechta tajribalardan iborat eksperimentning takrorlanuvchanligini tekshirishda teng miqdordagi takrorlash bilan baholanadi. Buning uchun har bir tajribada topilgan funksiyasining eksperimental qiymatlari farqlari hisoblanadi.

Shuning uchun Koxren mezoni G eksperimentlar orasidagi o'zgaruvchanlikning maksimal qiymatining barcha tajribalardagi o'zgaruvchanlik yig'indisiga nisbati sifatida hisoblanadi.

Topilgan qiymat kritik Gkr bilan taqqoslanadi, bu G kriteriyasining mumkin bo'lgan maksimal qiymati, bunda dispersiyalarning bir xilligi gipotezasini haqiqiy deb hisoblash mumkin. Kritik qiymat taqqoslangan dispersiyalar soni N, parallel tajribalar m soni va berilgan ahamiyatlilik darajasi asosida aniqlanadi.

3.6. Har bir eksperimentda parallel tajribalar o'tkazish sharti bilan regressiya tahlilini o'tkazish.

1. Dispersiyaning takrorlanuvchanligini baholash

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{u=1}^{m_i} y_{iu}}{m_i}; \ i = 1, \dots, N, \tag{3.7}$$

bu yerda N - (3.4) tenglamaga muvofiq tajribalar soni; m_i – i-chi tajriba davomida o'tkazilgan parallel tajribalar soni.

Tanlangan dispersiya quyidagicha hisoblanadi

$$S_i^2 = \frac{\sum_{u=1}^{m_i} (y_{iu} - \bar{y}_i)^2}{m_i - 1}. \tag{3.8}$$

Bu holda dispersiyaning haqiqiy qiymati o'rta arifmetiginig yaxlitlanishiga bog'liq emas.

$(m_1 = m_2 = \cdots = m)$. tajribalarning bir xil takrorlanishi holati uchun Koxren mezoni.

$$G = \frac{S_{max}^2}{\sum_{i=1}^{N} S_i^2}. \tag{3.9}$$

Koxren mezoni orqali dispersiyaning bir jinslilikka tekshirish: agar $G < G_{jadv}(q, f_1, f_2)$ bo'lsa dispersiya bir jinsli hisoblanadi, agar teskari holatda bo'lsa dispersiya bir jinsli emas deb topiladi va qaytadan hisoblab chiqiladi.

2. Regressiya koeffitsientlarining ahamiyatini Student mezoni yordamida baholash

$$t_{b_i} = \left|\frac{b_i}{S_{b_i}}\right|, \tag{3.10}$$

bu yerda b_i – regressiya koeffitsientining qiymatlari, S_{b_i} i-chi koeffitsientning o'rta kvadratik uzoqlashishi qiymati

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_{takr}^2}{\sum m_i}. \tag{3.11}$$

Tenglamaning barcha koeffitsientlari bir xil aniqlikda aniqlanadi, shuning uchun S_{b_i} qiymatlari barcha koeffitsientlar uchun bir xil bo'ladi. Agar $t_{b_i} > t_{jadv}(q, f)$ bo'lsa koeffitsientlar bog'liq. Agar yuqoridagi shart bajarilmasa, unda koeffitsient ahamiyatsiz va nolga tenglashtirilishi mumkin. Binobarin, ushbu koeffitsient turgan faktor bu jarayonga unchalik ta'sir qilmaydi.

3.7. Kasr faktorli eksperiment

To'liq faktorli eksperiment - bu chiziqli va o'zaro ta'sirlarni hisobga olgan holda matematik modelni yaratishning samarali vositasidir, ammo uning kamchiliklaridan biri faktorlar sonining ko'payishi bilan eksperimentlar soni keskin ortib ketadi.

Misol uchun $2^7 = 128$ ta tajriba, $2^{15} = 32768$ tajriba va h.k.

Tajribalar sonini kamaytirish uchun to'liq faktorli eksperimenni kasr ko'rinishga keltiramiz (to'liq faktorli eksperimentning qismi $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^p}$) almashtirish amalga oshiriladi va bu ***kasr faktorli eksperiment*** deb ataladi.

Kasr faktorli eksperiment maqsadi to'liq faktorli eksperimentlari sonini kamaytirishdan iborat, ammo shu bilan birga rejalashtirish matritsasi o'zining xususiyatlarini (3.1) - (3.3) saqlab turishi kerak, bu esa regressiya tenglamasining koeffitsientlarini hisoblash imkonini beradi.

Kasr ko'rinishi ortogonal reja bo'lishi uchun eng yaqin to'liq faktorli eksperiment tanlab olinadi. Bunday holda, tajribalar soni regressiya tenglamasidagi noma'lum koeffitsientlar sonidan katta yoki teng bo'lishi kerak.

Natija bo'yicha uchta faktor ta'sirini o'rganish va uning matematik tavsifini chiziqli tenglama shaklida aniqlash zarur deb tahmin qilaylik.

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3.$$

To'liq faktorli eksperimentning matritsasi jadvali quyida keltirilgan $N = 2^3 = 8$.

N	X_0	X_1	X_2	X_3
1	+	+	+	+
2	+	–	+	+
3	+	+	–	+
4	+	–	–	+
5	+	+	+	–
6	+	–	+	–
7	+	+	–	–
8	+	–	–	–

Aytaylik, qandaydir sabablarga ko'ra tajribalar sonini kamaytirish kerak. Bunday holda, rejalashtirish matritsasining xususiyatlari saqlanib qolishi kerak va N tajribalari soni 4 dan kam bo'lmasligi kerak (uch faktor uchun chiziqli model koeffitsientlari soni).

Ushbu masalani yechish uchun biz eng yaqin to'liq faktorial eksperimentni olamiz x_1 va x_2 faktorlar o'rtasida o'zaro ta'sir yo'q deb taxmin qilamiz. Shuning so'ng yangi matritsaning x_3 faktori uchun x_1 va x_2 o'zaro ta'sirdan foydalanamiz. Matritsaning barcha hossalarini saqlagan holda to'liq faktorial eksperimentdan 2^3 ning kasr faktorli eksperimentga o'tkazamiz. (3.6) formuladan foydalanib tenglamaning regressiya koeffitsientlarini aniqlaymiz.

N	X_0	X_1	X_2	X_3
1	+	+	+	+
2	+	–	+	–
3	+	+	–	–

4	+	−	−	+

Kasr faktorli eksperimentning tajribalari soni quyidagi formula yordamida hisoblanadi.

$$N = 2^{n-p}, \tag{3.12}$$

bu erda n – faktorlarning umumiy soni; p – ikki faktorning ko'paytmasidan hosil bo'lgan faktorlar soni.

Agar $n = 3$ ga teng bo'lsa x_3 faktor x_1 va x_2 faktorlarning ko'paymasiga teng bo'ladi, shunda $x_3 = x_1 * x_2$, $N = 2^{n-1} = 2^{3-1} = 4$.

Agar $x_3 = -x_1 * x_2$ ni hosil qilsak unda 2^3 rejalashtirish matsritsasining ikkinchi qismi hosil bo'ladi.

Kasr faktorli eksperimentning qo'llanishi har doim aralash, ya'ni modelning bir necha nazariy koeffitsientlarini birgalikda baholash bilan bog'liq bo'ladi. Agar juftlik ko'paytmalar uchun regressiya koeffitsientlari 0 ga teng bo'lmasa, u holda topilgan koeffitsientlar umumiy koeffitsientlar uchun aralash baho hisoblanadi:

$$b_0 = \beta_0 + \beta_{1,2,3};\ b_1 = \beta_1 + \beta_{2,3};\ b_2 = \beta_2 + \beta_{1,3};\ b_3 = \beta_3 + \beta_{1,2},$$

bu yerda β_i – haqiqiy koeffitsientlari, b_i – tanlamalar orqali hisoblangan koeffitsientlar miqdori.

Kasr faktorli eksperiment quyidagi masalalarni yechishda tajribalar sonini kamaytirish uchun ishlatiladi: faktorlar lokal hududlarda o'zgarishida chiziqli regressiya tenglamasini qurish; hech bo'lmaganda juftlikdagi o'zaro ta'sirlarning amalga oshishi mumkin bo'lmagan jarayonlarning tavsiflash uchun keng qollaniladi. Ushbu usulni qo'llashni keyingi boblarimmizida toliq korib chiqamiz va tahlil qilamiz.

Nazorat savollari

1. Kasr faktorli eksperiment deb nimaga ataladi?
2. Styudent me'zoni nima va u qachon qollanadi?
3. Fisher mezoni asosida tahlil qanday amalga oshiriladi?

4. To'liq faktorli eksperiment asosida regressiya tenglamasi tuzish misol keltiring.
5. Passiv va aktiv tajriba ma'lumotlari asosida regressiya tenglamasini tuzishni farqini tushuntiring.

IV BOB. TEXNOLOGIK JARAYONLARNI OPTIMALLASHTIRISH USULLARI

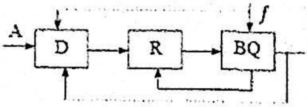
4.1. Optimal boshqarish tizimlari.

Optimal boshqarish tizimlari - tanlangan mezon bo'yicha boshqaruv ta'siriga va holat o'zgaruvchilariga qo'yilgan cheklashlar sharoitida eng yaxshi sifat ko'rsatkichni ta'minlovchi tizimdir.

Masalaning to'g'ri qoyilishi ya'ni sifat me'zonini va chegaralovchi shartlarni to'g'ri tanlash optimal boshqarish masalalarda juda muhim hisoblanadi. Masalaning qo'yilishida tizimning amaliy talablari e'tiborga olinishi va u optimallik me'zonida yaxshi shakllangan bo'lishi kerak. Yana chegaralovchi shartlar etarlicha to'liq sonda berilishi kerak. Optimallik me'zonlari masalan, quyidagi korsatkichlar bo'yicha bo'lishi mumkin: dinamik aniqlik, teminal aniqlik, energiya sarfi ko'rsatkichi, yoqilgi sarfi ko'rsatkichi, tezkorlik ko'rsatkichi(vaqt sarfi). Bularning har biri tizimning bir tomonlama sifat ko'rsatkichini baholaydi. Odatda amalda ular bittadan ishlatilmaydi, ularning bir nechasining kombinatsiyalari foydalaniladi.

Uchish apparati uchun quyidagi optillash masalalari ko'riladi: uchish apparatini fazoning belgilangan nuqtasiga minimal vaqtda etkazish, maksimal uzoqlikka uchirish, maksimal balandlikka uchirish, dvigatelni optimal boshqarish, minimal vaqtda berilgan burchakka burish, energiyani minimal sarflab T vaqt ichida burchakka burish, berilgan yoqilgi bilan ko'rsatilgan masofani bosib o'tish va h.k.

Boshqarish tizimlarining umumiy blok-sxemasi 1.23-rasmda ko'rsatilgan. (A-axborot, D-dasturlagich, R-rostlagich, BQ- boshqarish qurilmasi, f-tashqi ta'sir)



1-rasm. Optimal boshqarish tizimi umumiy blok-sxemasi.

Optimal boshqarish tizimi ham dasturlash vositasiga ega. Chunki, qo'yilgan optimallashtirish masalasi tizim ish faoliyati davrida avtomatik hal etilishi kerak, bu esa faqat dasturiy vositalar orqali hal etiladi.

Dasturiy boshqarish tizimlari bilan optimal boshqarish tizimlari o'rtasidagi farq, dasturiy boshqarish tizimlarida optimallashtirish masalasini yechish algoritmlari mavjud emas, ularda murakkab matematik operatsiyalar bajarilmaydi.

Adaptiv boshqarish tizimlari.

Adaptiv tizim - bu tashqi sharoitni oldingan kutilmagan o'zgarishida o'zining parametrlarini avtomatik tarzda o'zgartira oladigan tizimdir. Bu tizim o'z holati yoki xarakatini tahlil qilish asosida, ishlash sifatini saqlagan holda o'zgartirishlar qiladi. Masalan avtouchish tizimi, haydovchisiz boshqariladigan avtotizimlar shunday tizimlardir(1.21 rasm)

Lotincha adaptio- moslashuvchan ma'nosini anglatadi, shuning uchun adaptiv tizimlar *moshlashuvchan boshqarish tizimlari* deb yuritiladi. Yana tizim o'z parametrlarini o'zgartira olish xususiyatiga ko'ra *o'z-o'zini sozlovchi tizimlar* deb ham yuritiladi.

Kuzatuv tizimlari y(t) boshqariladigan o'zgaruvchini oldindan ma'lum bo'lmagan qonunga muvofiq o'zgartirish uchun mo'ljallangan. Bunday tizimlarda x_0 (t) vaqtning tasodifiy funktsiyasidir, tizim ishlash algoritmi oldindan ma'lum emas. Masalan, avtomatik boshqariladigan samolyotga qarshi qurol nishonga qarab burilib turishi kerak, bunda samolyot harakati tasodifiydir.

Chiqish (sozlanish) qiymatining fizik xususiyatiga qarab kuzatuv tizimlarining quyidagi turlari mavjud:

- burilish burchagi ,
- aylanish tezligi,
- momenti,
- elektr miqdorlari (tok, kuchlanish)

va boshqalar uchun ko'rsatma ishlab chiquvchi tizimlar.

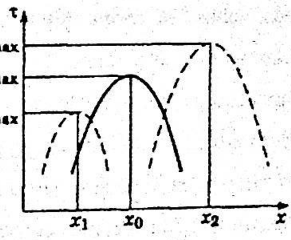
Bularning barchasida kirish qiymati har qanday bo'lishi mumkin, y'ani ham elektr, ham elektr bo'lmagan signallar bo'lishi mumkin. Ko'pincha kuzatuv tizimlarining kirishidagi ta'siri elektr kuchlanishi yoki burilish burchagi bo'ladi.

Faoliyat printsipiga ko'ra, kuzatuv tizimlari yuqorida ko'rib chiqilgan stabillash va dasturiy boshqarish tizimlaridan farq qilmaydi va og'ish bo'yicha boshqarish printsipini amalga oshiradigan berk tizimlardir. Farqi kuzatuv tizimlardagi topspiriq beruvchi element rolini biron bir boshqa qurilma (avtomatik yoki avtomatik bo'lmagan) yoki inson- operator o'ynashi mumkin, dasturiy tizimlardagi dasturiy qurilma o'rniga tashqi omil o'zgarishini kuzatuvchi qurilma tizimga joylashtiriladi. Yana asosiy farqi kuzatuv tizimidagi chiqish bu- burilish burchagi, moment, tok kabi tizim parametrlaridir. Ayni bir ob'ektni satxi, bosimi, temperaturasi kabi chiqish ko'rsatkichlari kuzatuv tizimida boshqarilmaydi. Kuzatuv tizimlari tashqi ob'ekt faoliyatiga mos holda o'zidagi parametrlarni izma-iz o'zgartiradi (kungaboqar –tabiy kuzatuv tizimidir).

Sunday tizimlardan biri IBM ilmiy tadqiqot bo'limi va Shvedsariya kompaniyasi Airlight Energi bilan birgalikda "Kungaboqar" (Project Sunflower) loyihasi asosida yaratilgan HCPVT (highly efficient concentrated photovoltaic/thermal) qurilmasidan elektr energiyasi ishlab chiqarish bilan birga yaqin atrofdagi binolarni issiq suv bilan taminlashda ham foydalanish mumkin

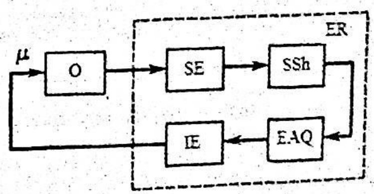
Ekstremal tizimlar.

Ekstremal tizim – bu biror sifat ko'rsatkichining ekstremum qiymatini aniqlab, shu asosda boshqariladigan tizimdir. Bir qator jarayonlarda sifat ko'rsatkichi vaqtning har onida tizim koordinatalarining funksiyasi bo'ladi. Bu ko'rsatkich har doim maksimum qiymatda tutib turiladigan bo'lsa, boshqarish optimal bo'ladi. Bunday boshqarishning o'ziga xos qiyinchiligi shundaki, turli tashqi ta'sirlar ekstremumni o'z qiymatdan og'ishiga olib keladi va yana qaysi tomonga og'ishi ham noma'lum. Bunda rostlagichni ham qaysi tomonga o'zgartirish noma'lum bo'ladi. Shuning uchun tizim ekstrimumni qidirish tashkil etiladi. Buning bir qancha usuli bor. Ulardan biri kichik sinov o'zgartirishlar kiritib, unga tizimdagi o'zgarishni tahlil qilish orqali ekstremumni aniqlash. Vaqtning har onida sifat ko'rsatkichi $\tau(x(t))$ ning tizim koordinatalari bo'yicha maksimumi(1-rasm) aniqlanadi va sunga mos boshqarish signali ishlab chiqariladi.



1-rasm. Ob'ektning ekstremal xarakteristikasi.

Ekstremal tizimlarning umumiy korinishdagi struktur sxemasi 2-rasmda berilgan.



O - ob'ekt, SE - sezgir element
SSh -sifat ko'rsatkichini shakillantiruvchi element
IE - ijrochi element
EAQ - ekstremumni avtomatik qidiruvchi element
ER ekstremal rostlagich

2. Ekstremal tizimlarning umumiy sxemasi

Ekstremal tizimlar ko'proq suv osti va usti transportlarida, uchish apparatlarida avtomatik boshqarish tizimini yaratishda qo`llaniladi. Masalan, kemalar yo'nalishini avtomatik boshqarishda ekstremal tizimlardan foydalaniladi.

Nazorat savollari:

1. Avtomatik boshqarishning qanday asosiy ko'rinishlari bor?
2. Kuzatuvchi tizimlarga qanday tizimlar kiradi?
3. Optimal boshqarish nima?
4. Adaptiv tizimlar nimadan iborat?

5. Rostlashning asosiy qonunlari qanday?

4.2. Klassik variatsion hisob usuli

Matematikada, tabiiy va texnik fanlarda, iqtisodiyotda va boshqa sohalarda uchraydigan ko`pgina amaliy masalalar cheksiz o`lchovli funksional fazolardagi ekstremal masalalarga olib keladi. Bunday masalalar bilan klassik variatsion hisob va optimal boshqaruv masalalari bo`limlarida tanishamiz. Ushbu va bundan keyingi bir necha ma'ruzalarimiz variatsion hisob masalalariga bag'ishlanadi. Variatsion hisobning klassik masalalari. Variatsion hisob predmeti. Dastlab variatsion hisob predmetini yaxshiroq anglab olishga imkon beruvchi hamda matematikada bu yo`nalishning paydo bo`lishi va rivojlanishida muhim ahamiyatga ega bo`lgan masalalardan quyidagilarni keltiramiz. Braxistoxrona haqidagi masala. 1696 yilda I.Bernulli tomonidan qo`yilgan bu masalada bir vertikal to`g`ri chiziqda yotmagan ikkita va nuqtalarni tutashtiruvchi shunday chiziqni topish talab qilinadiki, material nuqta o`z og`irlik kuchi ta'siri ostida shu chiziq bo`ylab harakat qilib, nuqtadan nuqtaga eng qisqa vaqtda yetib kelsin (1-chizma). Masalaning nomi grekcha "braxistos" –eng qisqa, "xronos" –vaqt so`zlaridan kelib chiqqan. Braxistoxrona haqidagi masalani hozirgi zamon matematikasi tilida ifodalash uchun to`g`ri burchakli kooordinatalar sistemasini 1- chizmada ko`rsatilganidek, ya'ni o`qni pastga yo`naltirib, qaraymiz. nuqtani koordinatalar boshiga joylashtiramiz. nuqtaning koordinatalari (,) 1 1 x y bo`lsin. va nuqtalarni ixtiyoriy silliq chiziq bilan tutashtiramiz. Shu chiziq bo`ylab og`irlik kuchi ta'sirida harakatlanuvchi material nuqtaning massasi ga, vaqt momentidagi tezligi ga teng bo`lsin. U holda, vaqtda harakatdagi nuqtaning kinetik energiyasi 2 2 mv K = , potensial energiyasi bo`ladi, bu yerda g≈9.8 m/c2 -erkin tushish tezlanishi o`zgarmasi. Fizikadan yaxshi ma'lum bo`lgan energiyaning saqlanish qonuniga ko`ra,

$$-mgy+\frac{mv^2}{2}=0$$

tenglikni olamiz. Bu yerdan v gy = 2 .

Endi

$$v = \frac{ds}{dt}, ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, dy = y'dx$$

ekanligini hisobga olsak,

$$dt = \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx$$

ga teng bo`ladi.

Demak, chiziq bo`ylab nuqtadan nuqtaga ko`chish uchun sarflangan T =T[y] vaqt uchun

$$T[y] = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx$$

ifodaga ega bo`lamiz. (1.1) ko`rinishdagi T =T[y] miqdor ( ), [0,]1 y = y x x∈ x uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar fazosida aniqlangan bo`lib, braxistoxrona haqidagi masala esa, T[y] funksionalning 1 1 y(0) = 0, y(x ) = y shartlarni qanoatlantiruvchi uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plamida minimumini topish masalasidan iboratdir. Bu masala I.Bernulli, I.Nyuton, G.Leybnislar tomonidan yechilgan bo`lib, eng tez o`tish (sirpanish) chizig`i sikloida deb ataluvchi chiziqdan iborat bo`lar ekan (bunga biz keyinroq ishonch hosil qilamiz).

Geodezik chiziqlar haqidagi masala. Masala quyidagicha qo`yiladi: Berilgan sirtda yotuvchi va sirtning A0 va A1 nuqtalarini tutashtiruvchi eng qisqa uzunlikka ega bo`lgan chiziq topilsin (2-chizma). Bunday eng qisqa uzunlikka ega chiziqlar geodezik chiziqlar deb ataladi. Masalaning matematik modelini tuzish uchun, sirt φ(, ,) 0 x y z = tenglama bilan berilgan, A0 va A1 nuqtalarning koordinatalari, mos ravishda, (x0,y0,z0) va (x1,y1,z1) bo`lsin, deb faraz qilamiz. Qaralayotgan nuqtalarni tutashtiruvchi ixtiyoriy , silliq chiziqni qaraymiz. Matematik analiz kursidan yaxshi ma'lumki, bu chiziqning uzunligi

$$L = L[y, z] = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

formula orqali topiladi. Masalaning qo`yilishiga ko`ra,

$$y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0, y(x_1) = y_1, z(x_1) = x_1, \varphi(x, y(x), z(x)) = 0$$

$$x_0 \leq x \leq x_1$$

munosabatlarga ega bo`lamiz. Shunday qilib, geodezik chiziqlar haqidagi masala (1.2) ko`rinishdagi o`zgaruvchi miqdorni (1.3) shartlarni qanoatlantiruvchi uzluksiz differensiallanuvchi, $y = y(x), z = z(x), x_0 \leq x \leq x_1$ funksiyalar to`plamida minimallashtirish masalasidan iborat. Bu masala, 1698 yilda Ya.Bernulli tomonidan yechilgan

Klassik izoperimetrik masala. Bu masalada berilgan l uzunlikka ega bo`lgan barcha yopiq chiziqlar ichida maksimal yuzani chegaralovchi chiziqni topish talab qilinadi. Bunday chiziqning aylanadan iborat ekanligi qadimgi Yunonistonda ma'lum edi. Izoperimetrik masala deb ataluvchi bu masalani hozirgi zamon matematikasi tilida ifodalash uchun, yopiq chiziq ( ), y y(t), t [t ,] 0 1 x = x t = ∈ t parametrik tenglamalar bilan berilgan, deb faraz qilamiz. U holda, shu yopiq chiziq bilan chegaralangan yuza,

$$S[x, y] = \int_{t_0}^{t_1} x y'_t dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = l \qquad (1.5)$$

izoperimetrik shartga va

$$x(t_0) = x(t_1), y(t_0) = y(t_1) \qquad (1.6)$$

chegaraviy shartlarga ega bo`lamiz. Shunday qilib, qaralayotgan masala (1.4) ko'rinishdagi o'zgaruvchi miqdorning, (1.5), (1.6) shartlarni qanoatlantiruvchi 0 1 x = x(t), y = y(t), t t t uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to`plamida, minimumini topishdan iboratdir. Yuqorida keltirilgan masalalarda (1.1), (1.2) va (1.4) ko`rinishdagi o`zgaruvchi miqdorlarga ega bo`ldik. Ular funksional tipidagi o`zgaruvchi miqdorlarga misol bo`la oladi. Funksionallar esa funksional analiz kursining asosiy tushunchalaridan biri bo`lib, berilgan W funksional fazo V to`plamining har bir u elementiga biror J (u) haqiqiy sonni mos qo'yuvchi akslantirishni bildiradi. Funksionallar odatda cheksiz o`lchovli funksional fazolarda berilgan bo`ladi. Ularning eng katta (maksimal) va eng kichik (minimal) qiymatlarini topish haqidagi masalalar cheksiz o`lchovli ekstremal masalalar bo`lib, bunday masalalarni o`rganish variatsion hisob predmetini tashkil etadi. XVII asrning oxiridan XX asr o`rtalarigacha bo`lgan davr klassik variatsion hisobning paydo bo`lishi va rivojlanishini o`z ichiga oladi. Bu davrda dastlabki fundamental tadqiqotlar L.Eyler va J.Lagranj tomonidan bajarildi. XVIII asrning oxirlarida Eyler, Lagranj va Lejandrlarning ilmiy tadqiqotlari natijasida variatsion hisob birinchi variatsiyani tekshirish qismi bo`yicha tugallangan shaklga ega bo`ldi. XIX asrda esa, avval ma'lum bo`lgan variatsion masalalarni umumlashtirish boshlandi va variatsion hisobning tadbiqlari bo`yicha natijalar olindi (M.I.Ostrogradskiy tomonidan 1834 yilda karrali integralli variatsion masalalar uchun zaruriy shartlar olindi, variatsion hisobning mexanikaga tadbig`i qaraldi). XIX asrning ikkinchi yarmida funksionallar ekstremumlarining yetarli shartlari olindi (K.Veyershtrass tomonidan, 1879 yilda). XX asrda variatsion hisobning to`g`ri usullari yuzaga keldi. Ular variatsion masalalarni taqribiy yechish uchun, hamda ularda yechimning mavjudligini isbotlash uchun juda muhimdir. XX asrning boshlarida matematikada yangi yo`nalish – funksional analiz yuzaga keldi va aniq tabiatshunoslikning turli sohalarida, jumladan, kvant mexanikasida keng qo`llanila boshladi. Variatsion hisob «chiziqli bo`lmagan» funksional analizning tarkibiy qismiga aylandi. XX asrnig ikkinchi yarmiga kelib optimal boshqaruvning matematik nazariyasiga asos solinishi va uning jadal rivojlanishi variatsion hisob taraqqiyotida yangi davrni boshlab berdi. Bu yangi yo'nalishda Sobiq Ittifoq akademiki L.S.Pontryaginning «maksimum prinsipi», amerikalik R.Bellmanning dinamik pogrammalashtirish usuli asosiy natijalar hisoblanadi. 2. Asosiy funksional fazolar. Bizga funksional analiz kursidan yaxshi

1-amaliy mashgulot. Klassik variatsion hisob usuli.

C[a,b] fazo. $f = f(x)$ elementining normasi

$$\|f\| = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$$

$C^1[a,b]$ fazodagi $f = f(x)$ elementning normasi

$$\|f\|_{C^{(1)}[a,b]} = \max_{a\le x\le b}|f(x)| + \max_{a\le x\le b}|f'(x)|$$

$C^n[a,b]$ fazodagi $f = f(x)$ elementning normasi

$$\|f\|_{C^{(n)}[a,b]} = \sum_{i=0}^{n} \max_{a\le x\le b}\left|f^{(i)}(x)\right|$$

Masalalar

1. Quyidagi $y_1(x) = x^2$ va $y_2(x) = x^3$ funksiyalar orasidagi masofani:

a) $C[0,1]$ fazo normasida

b) $C^1[0,1]$ fazo normasida hisoblang

c) $C^1[0,1]$ fazoda aniqlangan

$$J(y) = \int_0^1 (y - y^1)dx$$

funksionalning $C^1[0,1]$ fazo normasida $y_0(x) = x^3$ funksiyada uzluksizligini ko'rsating.

2. Ushbu

$$J(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Funksional $C^1[0,1]$ da aniqlangan bo'lsin. Uning $y_0(x) = 0$ funksiyada: $C[0,1]$ normasi bo'yicha uzluksizlikka tekshiring.

Nazorat savollari

1. Funksional deb nimaga aytiladi?
2. Funksional aniqlangan funksiyalarning yaqinlik tartiblari haqida bilganlarinigizni yozing.
3. Funksionalning uzluksizligi ta'rifini keltiring.
4. Funksionalning orttirmasi ta'rifini keltiring.
5. Fuksionalning variatsiyasi (Lagranj bo'yicha) ta'rifini bering.
6. Chiziqli funksionalning ta'rifini bering va misollar keltiring.
7. Kvadratik funksionalning ta'rifini bering va misollar keltiring.

8. Differensiallanuvchi funksional ta’rifini keltiring.

9. Funksionalning global maximumi (minimumi) ta’rifini bering.

10. Funksionalning lokal maximumi (minimumi) ta’rifini bering.

11. Funksionalning ekstremumini zaruriy sharti nimadan iborat (teoremani keltiring).

12. Variatsion masalaning qo`yilishini keltiring.

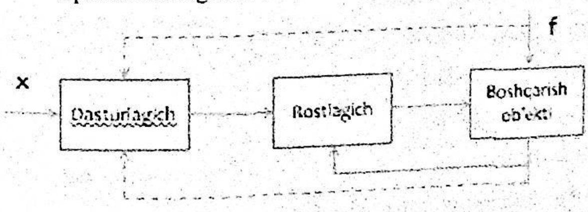
Optimal boshqarish sistemalari

Masalaning umumiy qo’yilishi.

Optimal bosqarish masalalarining sinflanishi

Optimal bosqarish masalalari

* Optimal dasturlagichni sintezlash
* Optimal rostlagichni sintezlash



* Optimal tizimlarni sintezlash masalasi- bu shunday dasturlagich va rostlagichlarni sitezlashki, qo`yilgan boshqarish masalasi ma`lum bir ma’noda eng yaxshi hal etilsin
* Optimal dasturlagichli tizim boshqarish rejimi bo’yicha optimal deyiladi
* Optimal rostlagichli tizim o’tish rejimi bo’yicha optimal deyiladi
* Avtomatik boshqarish tizimi optimal deyiladi, agar u optimal dasturlagichga va optimal rostlagichga ega bo’lsa.

Optimal bosqarish masalasining umumiy qo’yilishi

Optimal boshqarish masalasi variatsion masala kabi qo`yiladi, unda

* boshqarish ob'ekti tenglamasi,
* boshqarish bo'yicha cheklovlar,
* fazaviy vektor,
* chegaraviy shartlar,
* optimallik mezoni beriladi.

Ob'yekt tenglamasi:

$\dot{x} = f(x, u, t)$ – normal ko'rinishi

$x_i = f_i(x, u, t), i = 1,2, \dots, n$ – skalyar ko'rinishi

$x = (x_1, \dots, x_n)^T$ - fazaviy vektor

$u = (u_1, \dots, u_r)^T$ – boshqarish vektori

Boshqarish va faza vektorlariga cheklovlar

$u(t) \in U_t$ – boshqarishga cheklov

$x(t) \in X_t$ – fazaviy cheklov

Ularni birgalikdagi ifodasi

$(u(t), x(t)) \in V_t, V_t \in R^{n+r}$

Chegaraviy shartlar

$x(t_0) \in X_0$ - traektoriya chap chegarasi

$x(t_f) \in X_f$ - traektoriya o'ng chegarasi

Birgalikda yozilishi

$\left(x(t_0), x(t_f)\right) \in V_0 \qquad V_0 \subset R^{2n}$

Optimallik mezoni

$J = J(u(t), x(t))$ - tizimning sonli sifat ko'rsatkichi

Optimal bosqarish masalalarining sinflanishi

Cheklov bo'yicha:

* Klassik tip
* Noklassik tip

Chegaraviy shartlar bo'yicha:

* Fiksirlangan(mahkamlangan) chetlar
* O'ng cheti harakatlanuvchi, chap cheti harakatlanuvchi, har ikkala cheti harakatlanuvchi
* O'ng cheti erkin

Jarayon boshlanishi va tugash vaqti bo'yicha:

* Fiksirlangan vaqt bo'yicha
* Fiksirlanmagan vaqt bo'yicha

Optimallik mezoni bo'yicha:

Bolts masalasi

$$J = g_0\left[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)dt;$$

Lagranj masalasi

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)dt;$$

Mayer masalasi

$$J = g_0\left[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f\right]$$

Klassik variatsion hisob usuli

Lagranj ko'paytuvchilar usuli

Variatsion usul

- Variatsiya (lotincha variatio- o'zgarish, almashish) umuman olganda biror narsaning turli ko'rinishlari, kichik o'zgarish yoki kichik og'ish ma'nosini anglatadi.
- Bizning fanda kichik o'zgarishlarda mumkin bo'lgan, ruhsat etilgan ko'p sondagi variantlardir.
- Variatsion usul – bu ko'p variantlar ichidan biror me'zonga ko'ra birini tanlash usulidir

Fiksirlangan vaqtda chetlari mahkamlangan masala

$\dot{x}_i = f_i(x,u,t), \quad i = 1,2, \ \dots, n$

$\varphi_k(x,u,t) = 0, \quad k = 1,2, \ \dots, l$

$x(t_0) = x_i^0 \ , x(t_f) = x_i^f, i = 1,2, \ \dots, n$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)dt \to min$$

Eyler tenglamasi

$$J(y) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(y, \dot{y}, t)dt \to \text{extr} \qquad (1)$$

$y(t_0) = y^0, \qquad y(t_f) = y^f \qquad (2)$

$y^*(t)$ –ekstremum funksiya bo'lsa, u holda

$$f'_{0y}(y^*, \dot{y}^*, t) - \frac{d}{dt} f'_{0\dot{y}}(y^*, \dot{y}^*, t) = 0$$

Bu Eyler tenglamasini qanoatlantiruvchi y(t) funksiya (1),(2) masalaning ekstremal yoki statsionar nuqtasi deyiladi.

Eyler –Lagranj tenglamasi

$\Phi_i(z, \dot{z}, t) = 0, \quad i = 1,2, \ \dots, p$

$\varphi_k(x,u,t) = 0, \quad k = 1,2, \ \dots, l$

$z(t_0) = z^0 \ , \ z(t_f) = z^f,$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \Phi_0(z, \dot{z}, t)dt \to extr$$

Bu masala uchun Lagranj funksiyasi

$$L(z, \dot{z}, \psi, \lambda, t) = \sum_{i=1}^{p} \psi_i \Phi_i + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \varphi_k + \psi_0 \Phi_0$$

$\psi_i(i = \overline{1,p}), \quad \lambda_i(i = \overline{1,l})$ va ψ_0 lar Lagranj ko'paytuvchilar

Lagranj funksiyasi orqali yuqoridagi masala quyidagi oddiy variarsion masalaga keltiriladi:

$$J=\int_{t_0}^{t_f} L_0(z,\dot z,\psi,\lambda,t)dt\to extr;\qquad z(t_0)=z^0;\quad z(t_f)=z^f$$

bunga Eyler tenglamasini yozsak

$L'_{z_i}-\frac{d}{dt}L'_{\dot z_i}=0,$ -Eyler-Lagranj tenglamasi,

$i=1,2,\ \dots,s;$

$L'_{\psi_i}=0, i=1,2,\ \dots,p;$

$L'_{\lambda_k}=0,\ k=1,2,\ \dots,l$

Statsionarlik sharti

Dastlabki masalani ozgina o'zgartiramiz

$f_i(x,u,t)-\dot x_i=0\qquad i=1,2,\ \dots,n$

$\varphi_k(x,u,t)=0,\quad k=1,2,\ \dots,l$

$x_i(t_0)=x_i^0\ ,x_i(t_f)=x_i^f, i=1,2,\ \dots,n$

$$J=\int_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)dt\to min$$

- Lagranj funksiyasini yozamiz

$$L=\psi_0\Phi_0+\sum_{i=1}^{n}\psi_i\,(f_i-\dot x_i)+\sum_{i=1}^{l}\lambda_k\,\varphi_k$$

Buning uchun Eyler-Lagrang tenglamasi

$L'_{x_i}-\frac{d}{dt}L'_{\dot x_i}=0\qquad i=1,2,\ \dots,s;\qquad (*)$

$L'_{u_i}=0,\quad i=1,2,\ \dots,r$

Quyidagi Gamilton funksiyasi orqali ham Eyler-Lagrang tenglamasini yozish mumkin

$$H=\sum_{i=1}^{n}\psi_i f_i+\sum_{i=1}^{l}\lambda_k\varphi_k$$

Quyidagi Gamilton funksiyasi orqali ham Eyler-Lagrang tenglamasini yozish mumkin

$$H=\sum_{i=1}^{n}\psi_i f_i+\sum_{i=1}^{l}\lambda_k\varphi_k$$

$$L=H-\sum_{i=1}^{n}\psi_i\dot{x}_i$$

Eyler-Lagranj tenglamasidan $\dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\quad i=1,2,\ \dots,n;$

$\frac{\partial H}{\partial u_s}=0,\quad$ s$=1,2,\ \dots,r$ -statsionarlik sharti

Lagranj ko'paytuvchilar qoidasi

Agar (u(t), x(t)) juftlik optimal boshqarish masalasi (3)-(5) ning yechimi bo'lsa, bir vaqtda nolga teng bo'lmagan shunday Lagranj ko'paytuvchilari topiladiki, bu juftlik Eyler-Lagranj tenglamasini qanoatlantiradi.

4.3. Pontryagin maksimum prinsipi

Fiksirlangan vaqtda chetlari mahkamlangan masala

Pontryagin usuli haqida

* Klassik variatsion usulda holat parametrlariga cheklovlar tenglik ko'rinishda beriladi, amalda tengsizlik shaklda beriladigan shartlar ko'p uchraydi, bunday holda masala uzilish nuqtalarga , mahsus nuqtalarga ega bo'ladi. Lagranj kopaytuvchilar usuli bu holda optimal yechmni aniqlab bera olmaydi.
* Uzilishlarga, mahsus nuqtalarga ega bo'lgan optimallashtiruvchi masalalar maksimum prinsipi orqali hal etiladi;
* Maksimum prinsipi – optimal boshqaruv masalalarida optimallikning asosiy zaruriy sharti hisoblanadi. Bu natija 1953 yilda akademik L.S.Pontryagin boshchiligidagi sovet matematiklari tomonidan olingan.

Fazaviy cheklovlarsiz fiksirlangan vaqtda chetlari mahkamlangan masala

$\dot{x}_i = f_i(x, u, t), \quad i = 1,2, \dots, n$

$u \epsilon U$ – bo'lakli uzluksiz, x(t)- silliq bo'lakli

$x(t_0) = x_i^0 \ , x(t_f) = x_i^f, i = 1,2, \ \dots, n$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)dt \to min$$

Bu masala uchun Lagranj funksiyasi

$$L = \psi_0 f_0 + \sum_{i=1}^{n} \psi_i (f_i - \dot{x}_i) = H - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i$$

Bu yerda

H= $\sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i$ - Gamilton funksiyasi

Lagranj funksiyasi orqali yuqoridagi masala quyidagi oddiy variarsion masalaga keltiriladi:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, u, \psi, t)dt \to max; \ x(t_0) = x^0; \ x(t_f) = x^f$$

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, u^*, \psi, t)dt \to \max_{x,\psi};$$

$$J_2 = \int_{t_0}^{t_f} L(x^*, \dot{x}^*, u, \psi^*, t)dt \to \max_{u \in U};;$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[H(x, u, \psi, t) - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i \right] dt \to max$$

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_f} \left[H(x, u^*, \psi, t) - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i \right] dt \to \max_{x,\psi};$$

$$J_2 = \int_{t_0}^{t_f} \left[H(x^*, u, \psi^*, t) - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}^* \right] dt \to \max_{u \in U};;$$

Eyler-Lagranj $L'_{z_i} - \frac{d}{dt} L'_{\dot{z}_i} = 0$ tenglamasidan

$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1,2, \ \dots, n$

Bu tenglama qo'shma tenglama yoki qo'shma sistema deyiladi.

$u^*(t)$ boshqarish ta'siri bu masalaga uzilish nuqtalaridan tashqari barcha $[t_0, t_f]$ nuqtalarda

$\max_{u \in U} H(x^*, u, \psi^*, t) = H(x^*, u^*, \psi^*, t)$

shart bajarilgandagina maksimum qiymat beradi

Bu shart maksimum prinsipi yoki Pontryayin maksimum prinsipi deyiladi. U quyidagicha ifodalanadi:

Maksimum prinsipi

$\dot{x}_i = f_i(x, u, t), \ i = 1,2, \ \dots, n, \ x(t_0) = x_i^0 \ , x(t_f) = x_i^f, \ i = 1,2, \ \dots, n \quad J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)dt \to min$ masala uchun mumkin bo'lgan (u^*, x^*) juftlik yechim bo'lishi uchun bir vaqtda nolga teng bo'lmagan konstanta ψ_0^* va qo'sma sistema yechimi

$\psi^* = (\psi_1^*, \psi_2^*, \ \dots, \psi_n^*)$ mavjud bo'lishi zarur,

$x(t) = x^*(t)$ va $u(t) = u^*(t)$ bo'lganda $u^*(t)$ -uzilish nuqtalaridan tashqari barcha $t \in [t_0, t_f]$ larda $H(x^*, u, \psi^*, t)$ funksiya $u = u^*(t)$ da maksimumga erishadi ya'ni

$\max_{u \in U} H(x^*, u, \psi^*, t) = H(x^*, u^*, \psi^*, t)$ o'rinli bo'ladi.

Bolts masalasi

$\dot{x}_i = f_i(x, u, t), \ i = 1,2, \ \dots, n$

$g_j[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] = 0, \quad j = 1, \dots, q$

$$J = g_0[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)dt;$$

Bu quyidagi sodda variatsion masalaga keladi

$$J = G + \int_{t_0}^{t_f} \left[H - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i \right] dt \rightarrow max$$

Bu yerda

$$G = \sum_{i=1}^{n} \nu_j g_i, \qquad \nu_0 = \psi_0, \quad H = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i$$

Bolts masalasi uchun maksimum prinsipi

Bolts masalasi uchun mumkin bo'lgan (u^*, x^*) juftlik yechim bo'lishi uchun

1) bir vaqtda nolga teng bo'lmagan konstanta $\psi_0^* \leq 0$, $\nu_j (j = 1,2, \dots q)$ va qo'sma sistema yechimi

$\psi^* = (\psi_1^*, \psi_2^*, \dots, \psi_n^*)$ mavjud bo'lishi zarur,

$x(t) = x^*(t)$ va $u(t) = u^*(t)$ bo'lganda $u^*(t)$ -uzilish nuqtalaridan tashqari barcha $t \in [t_0, t_f]$ larda $H(x^*, u, \psi^*, t)$ funksiya $u = u^*(t)$ da maksimumga erishadi ya'ni

$\max\limits_{u \in U} H(x^*, u, \psi^*, t) = H(x^*, u^*, \psi^*, t)$ o'rinli bo'ladi.

2) Transversallik shart orinli bo'lishi zarur

Maksimal tezkor harakat masalasi

Ob'ekt chiziqli bo'lgan hol

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^{r} b_{ij} u_j \qquad i = 1,2, \dots, n$$

$\alpha_j \leq u_j \leq \beta_j$ $\alpha_j < 0$, $\beta_j > 0$ $j = 1,2, \dots, r$

$x_i(t_0) = x_i^0$, $x_i(t_j) = 0$, $i = 1,2, \dots, n$

$$J = t_f \rightarrow min$$

Bu maksimal tezkor harakat chiziqli masalasi deyiladi

Matritsaviy yozilishi

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Pontryagin funksiyasi

$H = \psi^T(Ax + Bu)$

4.4. Krotov optimallik prinsipi

Optimal boshqarish masalasining umumiy qo'yilishi

$$\dot{x} = f(x, u, t);$$

$$(u, x) \in V(t);$$

$$x(t_0) \in X_0, \quad x(t_f) \in X_f$$

Bu yerda V(t) har bir fiksirlangan t $\in [t_0, t_f]$ uchun R^{n+m} fazoda biror to'plam. Yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi $(u(t),\ x(t))$ juftlikdan iborat to'plamni ***D*** deb belgilaymiz. $u(t)$ bo'lakli uzluksiz, x(t)-bo'lakli silliq, $[t_0, t_f]$ da aniqlangan funksiylar. **D** to'plam mumkun bo'lgan to'plam, uning elementlari mumkin bo'lgan juftlik deyiladi.

D to'plamda quyidagi funksional berigan

$$J(u(t), x(t)) = g_0[x(t_0), x(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)dt; \ (2)$$

D to'plamda (2) funksionalni eng kichik qiymatiga yaqinlashtiruvchi mumkin bo'lgan juftliklar $(u^{(s)}(t), x^{(s)}(t))$ ketma-ketligini aniqlash talab etiladi:

$$\lim_{s\to\infty} J\left(u^{(s)}(t), x^{(s)}(t)\right) = \inf_{(u(t),x(t))\in D} J(u(t), x(t))$$

Bunday ketma-ketlik mimumlashtiruvchi ketma-ketlik deyiladi.

Masalaning bunday qo'yilishi asosiy jihati optimal boshqarish masalasining yechimi sifatida bitta $(u^*(t), x^*(t))$ juftlik emas minimumlashtiruvch ketma-ketlik $(u^{(s)}(t), x^{(s)}(t))$, s=1,2,... olinadi.

Hususiy holda mimimum qiymat beruvchi $(u^*(t), x^*(t))$ juftlik mavjud bo'lsa, ketma-ketlikning barcha qiymati shu juftlikka teng:

$$u^{(s)}(t) = u^*(t), \qquad x^{(s)}(t) = x^*(t))$$

t_0, t_f vaqtlar fiksirlangan bo'lsin, K(x,t) (Krotov funksiyasi) – ixtiyoriy skalyar, uzliksiz funksiya bo'lsin va u uzliksiz hususiy hosilalarga ega ham bo'lsin.

Vaqt bo'yicha hosilasi 1-tur uzilishga ega bo'lishi mumkin.

Quyidagi funksiyalarni tuzamiz

$$R(x,u,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial K}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial K}{\partial t} - f_0 = \frac{\partial K}{\partial x} f + \frac{\partial K}{\partial t} - f_0 \quad (3)$$

$$\mathrm{F}[x(t_0), x(t_f)] = g_0[x(t_0), x(t_f)] +$$

$$+K(x(t_f), t_f) - K(x(t_0), t_0)$$

Bu yerda f, f_0, g_0– (1) va (2) da berilgan funksiyalar,

Belgilash kiritamiz

$$\mu(\mathrm{t}) = \sup_{(u,x)\in V(t)} R(u,x,t)$$

$$m = \inf_{x(t_0)\in X_0 \ \ x(t_f)\in X_f} \mathrm{F}[x(t_0), x(t_f)]$$

Krotov optimallik mezoni

Mumkin bo'lgan $(u^{(s)}(t), x^{(s)}(t))$ ketma-ketlik (1) va (2) masalaning yechimi bo'lishi uchun quyidagi shartlarni bajaruvchi Krotov funksiyasi mavjud bo'lishi etarli:

1) Barcha $\mathrm{t} \in [t_0, t_f]$ va s da

$$R(x^{(s)}(t), u^{(s)}(t), t) \geq N > -\infty$$

2) Barcha $\mathrm{t} \in [t_0, t_f]$

$$R(x^{(s)}(t), u^{(s)}(t), t) \xrightarrow{M} \mu(t)$$

3) $F(x^{(s)}(t), x^{(s)}(t_f)) \to m > -\infty!$

$u^{(s)}(t) = u^{*}(t),$ $x^{(s)}(t) = x^{*}$ bo'lsa Krotov optimallaik prinsipi quyidagisha bo'ladi:

$(x^{*}(t), u^{*}(t))$ mumkin bo'lgan juftlik, (1),(2) masalaning yechimi bo'lishi uchun quyidagi shartni qanoatlantiruvchi K(x,t) funksiyasi mavjud bo'lishi yetarli:

$$R(x^{*}(t), u^{*}(t), t) = \mu(t).$$

$$F\left(x^{*}(t_0),x^{*}(t_f)\right)=m$$

4.5. Dinamik dasturlash masalasi

Dinamik dasturlash deb, matematik modellari ko'p bosqichli va dinamik jarayonli xarakterga ega bo'lgan chiziqli bo`lmagan programmalashtirishning maxsus masalalari va optimal boshqaruv masalalarini yechishning hisoblash usuliga aytiladi. Bu usul jarayonlarning ketma-ket tahliliga asoslangan bo'lib, ekstremal masalalarni yechishda amerikalik olim R. Bellman tomonidan XX asrning 50-yillaridan boshlab qo`llanilgan.

Dinamik dasturlash bosqichlari

Ekstremal masalani dinamik dasturlash usuli bilan yechishning **birinchi bosqichi** — berilgan masalani unga o`xshash masalalar oilasiga invariant turkumlashdan iboratdir. Bu bosqich ma'lum ma'noda san'at bo`lib, har bir muayyan holda tadqiqotchining tajribasi, sezgisi va mahoratiga bog`liqdir.

Masalan

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to max$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = c, \qquad x_i \geq 0, \quad i=\overline{1,n}$$

- masala quyidagiga almashtiriladi

$$B_k(y) = max\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = y, \qquad x_i \geq 0, \quad i=\overline{1,k}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 0 \leq y \leq c$$

Bu Bellman funksiyasi deyiladi

Masalani dinamik dasturlash usuli bilan yechishning **ikkinchi bosqichi** — Bellman funksiyasi bilan tenglama tuzishdan iboratdir.

$$B_k = f_k(z) + B_{k-1}(y-z)$$

$$f_k(x_k^0(y)) + B_{k-1}\left(y - x_k^0(y)\right) = \max_{0\le z\le y}[f_k(z) + B_{k-1}(y-z)]$$

Bellman tenglamasi(rekurrent formula):

$$B_k(y) = \max_{0\le z\le y}[f_k(z) + B_{k-1}(y-z)]$$

$$k = \overline{1,n}, \quad 0 \le y \le c$$

Masalani dinamik programmalash usuli bilan yechishning **uchinchi** (va oxirgi) **bosqichi** Bellman tenglamasining yechimini izlashdan va u bo`yicha (1) masalaning yechimini qurishdan iboratdir.

Usulning avzalliklari

boshlang`ich n ta o'zgaruvchi bo`yicha (1) maksimallashtirish masalasi bitta o`zgaruvchi bo'yicha n-1 ta maksimallashtirish masalasiga keltirildi, hamda natija - global optimal rejadan iborat bo`ldi;

Usulning kamchiliklari

Bellman tomonidan «o`lchovning qarg`ishi» deb atalgan bo`lib, u shundan iboratki, Bellman tenglamasini yechishda funksiyalarni esda saqlashga to`g`ri keladi

4.6. Bellmanning dinamik dasturlash usuli

Terminal boshqaruv masalasini dinamik programmalshtirish usuli bilan yechish

Eng sodda misolda ko'ramiz

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$u(t) \in U,\ t \in T = [t_0, t_1]$$

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \to min$$

Bu masalani skalar r va n vektor x parametrga bog`liq bo`lgan quyidagi masalalar oilasiga turkumlaymiz

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x(\tau) = x,$$

$$u(t) \in U,\ t \in T_\tau = [\tau, t_1]$$

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \to min$$

Oilaning umumiy masalasida sifat kriteriysi $I(u)$ ning minimal qiymatini $B(x,\tau)$ deb belgilaymiz (Bellman funksiyasi).

Bellman tenglamasi quyidagicha

$$\frac{\partial B(x,\tau)}{\partial \tau} = \min_{v \in U} \frac{\partial B'(x,\tau)}{\partial x} f(x,v,\tau)$$

Bu tenglama uchun, Bellman funksiyasining aniqlanishidan, quyidagi

$$B(x,t_1) = \varphi(x)$$

chegaraviy shartni olamiz.

Optimallikning yetarlilik sharti.

Teorema. Aytaylik, B(x,t) Bellman tenglamasining

$$B(x,t_1) = \varphi(x) + \lambda' g(x) \quad (\lambda \geq 0)$$

chegaraviy shartli silliq yechimi u(x,t) quyidagi

$$\frac{\partial B'(x,\tau)}{\partial x} f(x,y(x,t),t) = \min_{u \in U} \frac{\partial B'(x,t)}{\partial x} f(x,u,\tau)$$

shartni qanoatlantiruvchi boshqarish qonuni bo`lsin.

Agar $\dot{x} = f(x,u(x,t),t)$, $x(t_0) = x_0$tenglama shunday x(t), $t \in T$ yechimga ega bo`lsaki, u yechim bo'ylab $\mathrm{u(t) = u(x(t), t)}$bo'lakli – uzluksiz va

$g(x(t_1)) \leq 0$, $\lambda' g(x(t_1))$=0

bo'lsa, u(t), $t \in T$ *boshqarish*

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$u(t) \in U,\ t \in T = [t_0, t_1],\ g(x(t_1)) \leq 0$$

$I(u) = \varphi(x(t_1)) \to min$

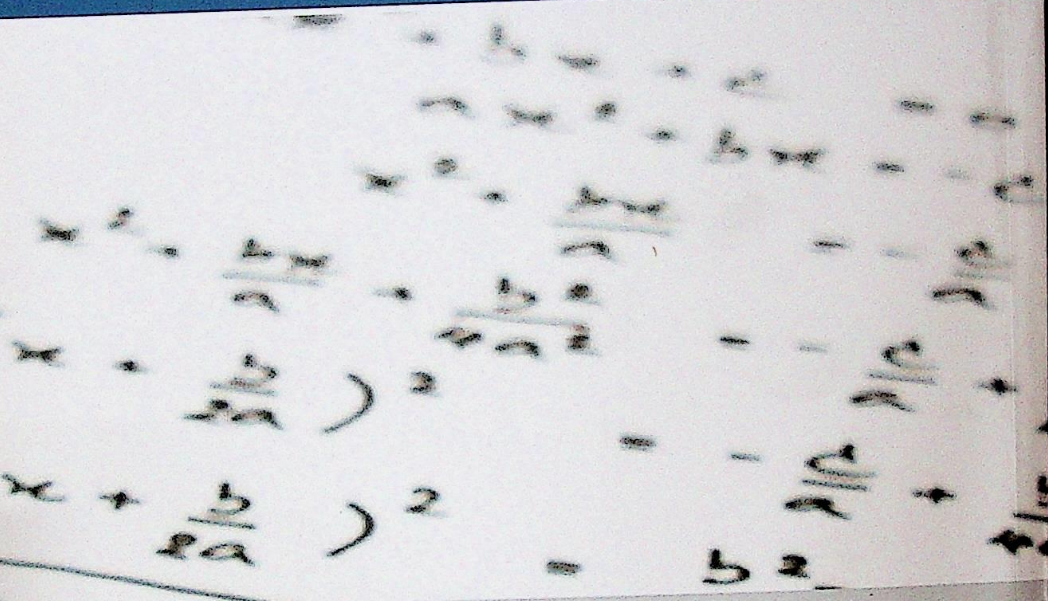
masalada optimal bo`ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati

1. Aliakbar Montazer Haghighi, Indika Wickramasinghe, Probability, Statistics, and Stochastic Processes for Engineers and Scientists (Mathematical Engineering, Manufacturing, and Management Sciences) - CRC Press; 1st edition (July 14, 2020), 634 p.
2. Bruce Ratner, Statistical and Machine-Learning Data Mining:: Techniques for Better Predictive Modeling and Analysis of Big Data - Chapman and Hall/CRC; 3rd edition (July 12, 2017), 690 p.
3. F. Carl Knopf, Modeling, Analysis and Optimization of Process and Energy Systems - Wiley; 1st edition (December 27, 2011), 488 p.
4. Guy L. Curry, Richard M. Feldman, Manufacturing Systems Modeling and Analysis - Springer; 2nd edition (November 10, 2010), 354 p.
5. James J. Solberg, Modeling Random Processes for Engineers and Managers - Wiley; 1st edition (December 22, 2008), 320 p.
6. Luigi Bocola Identifying Neutral Technology Shocks. University of Pennsylvania, 2014
7. R. Ventaco Rao., Advanced Modeling and Optimization of Manufacturing Processes: International Research and Development. – Springer; 2011th edition – 398 p.
8. Yusupbekov N.R., Muxitdinov D.P. Texnologik jarayonlarni modellashtirish va optimallashtirish asoslari. Oliy o'quv yurtlari uchun darslik. – T.: Fan va texnologiya, 2015.
9. Агаянц И.М., Орлов А.Л. Планирование эксперимента и анализ данных: метод. указания к лабораторным работам. – М: ИПЦ МИТХТ, 1998. – 144 с.
10. Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И. Графики функций: справочник. – Киев: Наукова думка, 1979. – 320 с.

11.Гартман Т.Н., Клушин Д.В. Основы компьютерного моделирования химико-технологических процессов: Учеб. пособие для вузов. – М.:ИКЦ “Академкнига”, 2006. 416с.
12.Гумеров А.Н., Валеев А.Н. и др. Математическое моделирование химико-технологических процессов: учеб. пособие. – М.: Колос, 2008. – 160 с.
13.Дворецкий С.И., Егоров А.Ф., Дворецкий Д.С. Компьютерное моделирование и оптимизация технологических процессов и оборудования: Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. 224 с.
14.Кафаров В.В. Математическое моделирование основных процессов химической технологии. - М.: Высшая школа. 1999.
15.Кафаров В.В., Глебов М.Б. Математическое моделирование основных процессов химических производств. – М.: Высшая школа, 1991. – 400 с.
16.Комиссаров М.А., Глебов М.Б., Гордеев Л.С. Химико-технологические процессы. Теория и эксперименты. – М.: Химия, 1999. – 358 с.
17.Костин В.Н., Паничев В.В. Теория эксперимента: учеб. пособие. – Оренбург: ОГУ, 2013. – 209 с.
18.Налимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. – М.-Л.: Наука, 1965. – 340 с.
19.Шеин Е. В. и др. Регрессионный анализ в почвоведении: учеб. пособие. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2016. –88 с.
20.Юсупбеков Н.Р. Математическое моделирование технологических процессов. Ўқув қўлланма. - ТошДУ.: 1989.

MUNDARIJA



Bringing your ideas
and innovations
to education

MECHAUZ

www.mechauz.uz