O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA FAKULTETI
MATEMATIK MODELLASHTIRISH KAFEDRASI

Ro’yxatga olindi:	“Tasdiqlayman”
№__________	O’quv ishlari bo’yicha prorektor
2019 yil «___» _________	_______ prof. A.S. Soleev
	“___” _________2019 yil

TANLOV FAN:
«TUTASH MUHIT MEXANIKASI» FANIDAN

O’QUV – USLUBIY MAJMUA

(Moodle tizimi asosida)

Bilim sohasi: 100 000 – Gumanitar soha

Ta’lim sohasi: 130 000 –Matematika

Ta’lim yo’nalishi: 5130200 – Amaliy matematika va informatika

Tuzuvchilar:	SamDU Matematik modellashtirish kafedrasi dotsenti **Fayziyev B.** SamDU Matematik modellashtirish kafedrasi katta o’qituvchisi **Djiyanov T.**
Kafedra mudiri:	**Prof. Xo‘jayorov B.**
Fakultet dekani:	**dots. A.I. Babayarov**

Samarqand - 2019

Fayziyev B., Djiyanov T. Tanlov fan: "Tutash muhit mexanikasi" fanidan o'quv-uslubiy majmua. – Samarqand: SamDU nashri – 2019. 250 bet.

Tanlov fan: "Tutash muhit mexanikasi" fanidan ushbu o'quv-uslubiy majmua oliy o'quv yurtlari 5130200 – Amaliy matematika va informatika bakalavriat ta'lim yo'nalishlari 4-kurs talabalariga mo'ljallangan.

Taqrizchi:

Akilov J. -fizika-matematika fanlari doktori, professor;

SamDU o'quv – uslubiy kengashining 2019 yil _________ dagi ____ -qarori bilan o'quv-uslubiy majmua sifatida nashrga tavsiya etilgan.

Tuzuvchilar:

SamDU Matematik modellashtirish kafedrasi dotsenti **Fayziyev B.**

SamDU Matematik modellashtirish kafedrasi kata o'qituvchisi **Djiyanov T.**

Mazkur o’quv-uslubiy majmua Samarqand davlat universiteti 5130200 –”Amaliy matematika va informatika” bakalavriat ta’lim yo’nalishlari o’quv rejasidagi Tanlov fan “Tutash muhit mexanikasi” fani bo’yicha Samarqand davlat universiteti tomonidan tasdiqlangan namunaviy va dasturi asosida ishlab chiqilgan.

“Matematik modellashtirish” kafedrasining 2019 yil ______________dagi __–son majlisida muhokama etilgan va fakultet kengashida muhokama qilish uchun tavsiya etilgan.

Kafedra mudiri: __________ prof. B.X.Xo’jayorov

“Amaliy matematika va informatika” fakulteti o’quv-uslubiy kengashining 2019 yil “___” _____________dagi “___”–son qarori bilan tasdiqlangan.

O’quv-uslubiy kengashi raisi: _________ dots. Sh. Mamatov

“Amaliy matematika va informatika” fakulteti ilmiy kengashining 2019 yil “___” _____________dagi “___”–son qarori bilan chop qilishga tavsiya etilgan.

Fakultet kengashi raisi: ________ dots. A.B. Babayarov

Kelishildi:
O’quv uslubiy boshqarma boshlig’i

_________________ **dots. B.S. Aliqulov**

ANNOTATSIYA

Tutash muhitlar mexanikasi fani zamonaviy texnikaning turli murakkab texnik jarayonlarini, mexanik harakatlarini o’rganish, ularni matematik nuqtai nazardan tasavvur qilish, tutash muhit modellarini tuzish va unga oid masalalarni yechish uchun nazariy asos bo’ladi hamda nazariy va amaliy ahamiyatga ega.

Fanni o’qitishning maqsadi va vazifalari: Tutash muhitlar mexanikasi (TMM) kursini o’qishdan maqsad amaliy matematika va informatika yo’nalishi bo’yicha ta’lim olayotgan talabalarga ushbu yo’nalishning negizini tashkil qiluvchi fanlardan biri-TMMning fundamental asoslarini berish.

Tutash muhitlar mexanikasi fani vazifasi quyida keltirilgan dastur doirasida talabalarga chuqur nazariy bilim berish va muayyan ko’nikmalar hosil qilish hamda maxsus fanlar bloki tarkibida o’qitiladigan kurslarni o’zlashtirishlari uchun yetarli bilim berish hisoblanadi.

Fan bo’yicha talabalarning bilimiga, ko’nikma va malakasiga qo’yiladigan talablar:

TMM predmetni tinglagan talabalar deformasiyalar va kuchlanishlar nazariyalarini puxta o’zlashtirgan bo’lishlari, tutash muhitning klassik modellari to’g’risida kurs dasturi doirasida bilimga ega bo’lishlari, TMMning asosiy tenglamalarini va termodinamikaning asoslarini *bilishi kerak*.

Tutash muhit klassik modellari harakati uchun to’la tenglamalar sistemasi mavjud bo’lgan hollarni bilishlari va ularga misol tariqasida qaralgan masalalarni matematik yechish usullarini o’zlashtirgan bo’lishlari hamda mazkur yechimlarni tahlil qila olish *ko’nikmalariga ega bo’lishi kerak*.

Tutash muhitning murakkab (noklassik) modellarini tuzish zaruriyatini tushunishlari va muayyan modellar haqida ma’lum tushunchaga ega bo’lishlari kerak. Tutash muhit kinematikasi, deformasiyalar va kuchlanishlar nazariyasi va TMM kursining boshqa barcha qismlariga oid misol va masalalar yecha olish *malakalariga ega bo’lishi kerak*.

Ushbu o’quv-uslubiy majmua oliy o’quv yurtlari Amaliy matematika va informatika yo’nalishi 3-kurs talabari uchun mo’ljallangan.

MUNDARIJA

TANLOV FAN: TUTASH MUHITLAR MEXANIKASI
fanining 2019-2020 o‘quv yili uchun mo’ljallangan
SILLABUSI

Fanning qisqacha tavsifi			
OTMning nomi va joylashgan manzili:	Samarqand davlat universiteti		Universitet xiyoboni, 15
Kafedra:	Matematik modellashtirish		Amaliy matematika va informatika fakulteti binosida
Ta’lim sohasi va yo‘nalishi:	Ta’lim sohasi: 130 000 – Matematika	Ta’lim yo’nalishi: 5130200 – Amaliy matematika va informatika	
Fanni (kursni) olib boradigan o‘qituvchi to‘g‘risida ma’lumot:	O'qituvchi: Djiyanov Tursunpulot	e-mail:	t.djiyanov@mail.ru
Dars mashg‘ulotini o‘tkazishning vaqti va joyi:	O'quv-uslubiy bo'lim tomonidan ishlab chiqilgan jadval asosida universitetning o'quv binolarida	**Kursning boshlanish va davom etish muddati:**	Bakalavriat ta'lim yo'nalishi o'quv rejasiga muvofiq, beshinchi va oltinchi semestrda
Individual grafik asosida professor-o‘qituvchining talabalar bilan ishlash vaqti:	Haftaning seshanba va juma kunlari 15.00 dan 17.00 gacha		
Fanga ajratilgan o‘quv soatlarining o‘quv turlari bo‘yicha taqsimoti	Auditoriya soatlari Ma'ruza: 108 Amaliy:108	Mustaqil ta’lim:	120
Fanning boshqa fanlar bilan uzviy aloqasi (prerekvizitlari):	«Chiziqli algebra», «Differensial tenglmalar», «Matematik fizika tenglamalari», «Fizika», «Dasturlash asoslari», «Matematik modellashtirish», «Hisoblash usullari»,		

Fanning maqsadi	Tutash muhitlar mexanikasi (TMM) kursini o'qishdan maqsad amaliy matematika va informatika yo'nalishi bo'yicha ta'lim olayotgan talabalarga ushbu yo'nalishning negizini tashkil qiluvchi fanlardan biri-TMMning fundamental asoslarini berish.
Fanning asosiy masalasi	Tutash muhitlar mexanikasi fani vazifasi quyida keltirilgan dastur doirasida talabalarga chuqur nazariy bilim berish va muayyan ko'nikmalar hosil qilish hamda maxsus fanlar bloki tarkibida o'qitiladigan kurslarni o'zlashtirishlari uchun yetarli bilim berish hisoblanadi.
Fan bo'yicha talabalarning bilimiga, ko'nikma va malakasiga qo'yiladigan talablar.	TMM predmetni tinglagan talabalar deformasiyalar va kuchlanishlar nazariyalarini puxta o'zlashtirgan bo'lishlari, tutash muhitning klassik modellari to'g'risida kurs dasturi doirasida bilimga ega bo'lishlari, TMMning asosiy tenglamalarini va termodinamikaning asoslarini *bilishi kerak*. Tutash muhit klassik modellari harakati uchun to'la tenglamalar sistemasi mavjud bo'lgan hollarni bilishlari va ularga misol tariqasida qaralgan masalalarni matematik yechish usullarini o'zlashtirgan bo'lishlari hamda mazkur yechimlarni tahlil qila olish *ko'nikmalariga ega bo'lishi kerak*. Tutash muhitning murakkab (noklassik) modellarini tuzish zaruriyatini tushunishlari va muayyan modellar haqida ma'lum tushunchaga ega bo'lishlari kerak. Tutash muhit kinematikasi, deformasiyalar va kuchlanishlar nazariyasi va TMM kursining boshqa barcha qismlariga oid misol va masalalar yecha olish *malakalariga ega bo'lishi kerak*.

Talabalar uchun talablar	Universitetning odob-ahloq kodeksi talablarigi qat'iy rioya qilish, shuningdek: -professor-o'qituvchi auditoriga kirganida o'tirgan joydan turib "Assalomu alaykum" deb kutib olish; - uyali aloqa vositalarini o'chirib qo'yish; - professor-o'qituvchidan so'ng dars mashg'ulotiga kech kelgan talaba auditoriyaga kiritilmaydi; - professor-o'qituvchi va guruhdoshlarga qo'pollik qilmaslik, so'z talashmaslik, hurmat bilan munosabatda bo'lish; - universitet ichki tartib - intizom qoidalariga rioya qilish; -kiyinish talablari (madaniyati) ga rioya qilish; -mashg'ulotlar vaqtida o'qituvchining ruxsatisiz auditoriyadan chiqmaslik; - uy vazifasi va mustaqil ish topshiriqlarini o'z vaqtida va sifatli bajarish; -ko'chirmachilik (plagiat) qilmaslik; - darslarga qatnashish majburiy, sababsiz 2 (ikki) va undan ortiq dars qoldirgan talaba keyingi mashg'ulotlarga tegishli sabablarni aniqlaganidan keyin fakultet dekanining ruxsati bilan dars mashg'ulotlariga kiritiladi; - sababli dars qoldirilgan taqdirda, professor-o'qituvchiga ma'lumotnoma taqdim etish; - har qanday holatlarda ham qoldirilgan darslar qayta o'zlashtirilishi shart; - ma'ruza va amaliy darslariga oldindan tayyorlanib kelish va faol ishtirok etish; - qo'shimcha ravishda bajarilgan taqdimot, mustaqil ish, referat, turli xil tadbirlar va ilmiy- amaliy anjumanlarda ma'ruzalar bilan ishtirok etganligi uchun qo'shimcha ballar beriladi; - talabaga o'z vaqtida bajarilmagan mustaqil ish, uy vazifasi, tartib - intizomi bo'yicha jarima ballari belgilanadi; - talaba reyting ballidan norozi bo'lsa fan bo'yicha nazorat turlari e'lon qilingan vaqtdan boshlab 1 kun mobaynida fakultet dekaniga ariza bilan murojaat qiladi va apellyatsiya komissiyasi shu kunning o'zida talabaning arizasini ko'rib chiqib xulosa chiqaradi.
Elektron pochta orqali munosabatlar tartibi	Professor-o'qituvchi va talaba o'rtasidagi aloqa elektron pochta orqali ham amalga oshirilishi mumkin, telefon orqali baho masalasi muhokama qilimnaydi, lekin oraliq, joriy va yakuniy baholash faqatgina universitet hududida, ajratilgan xonalarda va dars davomida amalga oshiriladi. Elektron pochtani ochish vaqti soat 15.00 dan 20.00 gacha.

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ТАСДИҚЛАЙМАН
Самарқанд давлат университети
ректори
______________ 2019 й.

ИШЧИ ЎҚУВ РЕЖА

Таълим йўналиши:
5130200 – Амалий математика ва информатика

Академик даража - БАКАЛАВР
Ўқиш муддати - 4 йил
Таълим шакли - кундузги

I. ЎҚУВ ЖАРАЁНИ ЖАДВАЛИ

Курс	Сентябрь					Октябрь				Ноябрь					Декабрь				Январь					Февраль				Март					Апрель				Май				Июнь				Июль				Август				ЖАМИ	Назарий таълим	Аттестациялар	Малака амалиёти	Битирув малакавий иши	Таътил	Ҳаммаси
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52							
I																		Т	Т		А	А																			А	А	М	М	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	42	36	4	2		10	52
II																		Т	Т		А	А																			А	А	М	М	М	М	Т	Т	Т	Т	Т	Т	44	36	4	4		8	52
III																		Т	Т		А	А																			А	А	М	М	М	М	Т	Т	Т	Т	Т	Т	44	36	4	4		8	52
IV	М	М	М	М	М	М	М	М										Т	Т		А	А												А	А	Д	Д	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Д	Т	Т	Т	Т					42	21	7	8	6	6	48
																																																				Жами	172	129	19	18	6	32	204

	Назарий таълим	А	Аттестация	М	Малака амалиёти	Д	Давлат аттестацияси	Б	Битирув малакавий иши	Т	Таътил

II. ЎҚУВ РЕЖАСИ

Т/р	Ўқув блоклари, фанлар ва фаолият турларининг номлари	Талабанинг ўқув юкламаси (соатларда)									Соатларнинг курс, семестр ва хафталар бўйича тақсимоти							
		Умумий юкламанинг ҳажми		Аудитория машғулотлари (соатларда)						Мустақил таълим	1-курс		2-курс		3-курс		4-курс	
				Жами	Маъруза	Амалий	Лаборатория	Семинар	Курс лойиҳаси (иши)		Курслардаги хафталар сони							
											42		44		44		42	
											Семестрлар							
											1	2	3	4	5	6	7	8
											Семестрдаги аудитория машғулотлари хафталарининг сони							
		соат	%								18	18	18	18	18	18	10	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1.00	**Гуманитар ва ижтимоий-иқтисодий фанлар**	**1594**	**23**	**998**	**274**	**452**		**272**		**596**	**198**	**180**	**162**	**162**	**72**	**108**	**84**	**32**
1.01	Ўзбекистон тарихи	116		72	36			36		44	72							
1.02	Ҳуқуқшунослик. Ўзбекистон Республикаси Конституцияси	116		54	26			28		62		54						
1.03	Фалсафа	148		90	44			46		58			46	44				
1.04	Маънавият асослари. Диншунослик	92		54	26			28		38			54					
1.05	Маданиятшунослик	56		36	18			18		20				36				
1.06	Иқтисодиёт назарияси	116		72	36			36		44						72		
1.07	Социология	56		36	18			18		20					36			
1.08	Миллий ғоя: асосий тушунча ва тамойиллар	60		40	18			22		20								40
1.09	Фуқаролик жамияти Ўзбекистонда демократик жамият қуриш назарияси ва амалиёти	122		76	36			40		46							76	
1.10	Ўзбек (рус) тили	116		72		72				44	36	36						
1.11	Чет тили	360		252		252				108	54	54	36	36	36	36		
1.12	Жисмоний маданият ва спорт *	236		144	16	128				92	36	36	36	36				
2.00	**Математик ва табиий-илмий фанлар**	**948**	**14**	**558**	**260**	**262**		**36**		**390**	**90**	**72**	**72**	**72**	**144**	**108**		
2.01	Механика	124		72	36	36				52				72				
2.02	Назарий физика асослари	124		72	36	36				52					72			
2.03	Эхтимоллар назарияси ва математик статистика	182		108	44	64				74					72	36		
2.04	Чизиқли алгебра ва аналитик геометрия	274		162	72	90				112	90	72						
2.05	Комбинаторика ва графлар назарияси	122		72	36	36				50			72					
2.06	Математика ва информатика ўқитиш методикаси	122		72	36			36		50						72		
3.00	**Умумкасбий фанлар**	**3315**	**47**	**1968**	**872**	**1040**		**56**	**кп**	**1347**	**180**	**252**	**342**	**270**	**252**	**288**	**100**	**169**
3.01	Дастурлаш асослари	556		324	144	180				232	144	108	72					
3.02	Математик анализ	633		378	180	198				255	144	108	62	64				
3.03	Дискрет математика ва математик мантик	182		108	54	54				74			72	36				

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3.04	Берилганлар структураси ва алгоритмлар	182		108	42	66			ки	74		108						
3.05	Оддий дифференциал тенгламалар	182		108	54	54				74			72	36				
3.06	Функционал анализ	122		72	36	36				50				72				
3.07	Хусусий хосилали дифференциал тенгламалар	182		108	54	54				74					36	72		
3.08	Математик моделлаштириш	189		112	44	68			ки	77						72	40	
3.09	WEB дастурлаш технологиялари	182		108	26	82			ки	74					54	54		
3.10	Тизимли дастурлаш	122		72	36	36				50					72			
3.11	Сонли усуллар	210		126	60	66				84			54	72				
3.12	Ахборотни химоялаш	93		56	30	26				37								56
3.13	Умумий психология	90		54	26			28		36						54		
3.14	Умумий педагогика	90		54	26			28		36					54			
	Танлов фанлари	**300**		**180**	**60**	**120**				**120**							**56**	**124**
	1)Туташ мухитлар механикаси 2)АИЎ яратишнинг тех. ва дастур. таъминоти 3)Дискрет динамик тизимлар	300		180	60	120				120							56	124
4.00	**Ихтисослик фанлари**	**659**	**9**	**388**	**180**	**208**				**278**				**72**		**36**	**140**	**140**
4.01	Оптималлаштириш усуллари	101		60	30	30				41							60	
4.02	Операциялар тадкикоти	94		56	28	28				38						36	20	
4.03	Компьютер графикаси	138		82	40	42				56							60	22
4.04	Берилганлар базасини бошкариш тизимлари	122		72	30	42				50				72				
4.05	**Танлов фанлари**	**204**		**118**	**52**	**66**				**86**								**118**
4.05.1 4.05.2 4.05.3	Матем пакетларни амал.тадбикл. Автоматл. ишчи урин.яратиш Бошкарув масал. матем.дастур.усул	204		118	52	66				86								118
5.00	**Қўшимча тайёргарлик**	**450**	**7**	**216**	**108**	**108**				**234**					**144**	**72**		
5.1	Чекли элементлар усули	150		72	36	36				78						72		
5.2	Интернет мухитида илов. яратиш	150		72	36	36				78					72			
5.3	Чекли улчовли экстремал масалалар ва уларни ечишнинг сонли усуллари	150		72	36	36				78					72			
	ЖАМИ	**6966**	**100**	**4128**	**1694**	**2070**		**364**	**3ки**	**2838**	**576**	**576**	**576**	**576**	**576**	**576**	**320**	**352**
	Малака амалиёт	**972**										108		216		216	432	
	Битирув малакавий иши	**324**																324
	Аттестациялар	**1026**									**108**	**108**	108	108	180	108	108	270
	ХАММАСИ	**9288**																

Ўкув режа Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 26.03.2016 йилдаги 2 ракамли буйруги билан тасдикланган ўкув режа асосида тузилди.

Ўкув жараёнининг таркибий кисмлари	Хафталар сони	Семестр	Давлат аттестацияси
Назарий таълим	129	1-8	1. Гуманитар ва ижтимоий-иктисодий фанлардан
Малака амалиёти	18	2, 4, 6, 7	2. Чет тили
Аттестациялар	16+3 (Д)	1-8	3. Битирув малакавий ишини химоя килиш
Битирув малакавий иши	6	8	
Таътил	32	1-8	
Жами	**204**		

Самарканд давлат университети
Ўкув-услубий кенгаш томонидан маъкулланди.
2019 йил «___» __________ ___ сонли баённома.

Самарканд давлат университети
Илмий кенгаш томонидан маъкулланди.
2019 йил «___» __________ ___ сонли баённома.

Амалий математика ва информатика факультети декани **А.И.Бабаяров**

Ахборотлаштириш технологиялари кафедраси мудири **И.И.Жуманов**

Математик моделлаштириш ва комплекс дастурлаш кафедраси мудири **Б.Х.Хужаеров**

Оптимал бошкарув усуллари кафедраси мудири **И.Н.Бозоров**

Амалий математика ва информатика факультети **Б.Б.Аминов**

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA FAKULTETI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Ro'yxatga olindi:
№ 1264
2019 yil «___»________

"TASDIQLAYMAN"
O'quv ishlari bo'yicha prorektori:
________ prof.A.S.Soliyev
________ 2019 yil

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
O'QUV USLUBIY BOSHQARMA

TUTASH MUHITLAR MEXANIKASI ASOSLARI FANINING ISHCHI O'QUV DASTURI

(3-kurs)

Bilim sohasi: 100 000 - Gumanitar soha
Ta'lim sohasi: 140 000 - Tabiiy fanlar
Ta'lim yo'nalishi: 5130200-Amaliy matematika va informatika

№	Mashg'ulot turi	Ajratilgan soatlar (3-kurs)		Jami
		5-semestr	6-semestr	
1.	Nazariy mashg'ulot	36	72	108
2.	Amaliy mashg'ulot	36	72	108
3.	Mustaqil ta'lim			
	Jami			

Samarqand - 2019

Fanning ishchi o'quv dasturi o'quv, ishchi o'quv reja va o'quv dasturiga muvofiq ishlab chiqildi.

Tuzuvchi: Djiyanov T.O. –(PhD), SamDU katta o'qituvchisi.

Taqrizchilar: Akilov J. –fizika-matematika fanlari doktori,professor;
Xudaynazarov X. – SamDU "Nazariy va amaliy mexanika" kafedrasi mudiri, prof., t.f.d.

Fanning ishchi o'quv dasturi Matematik modellashtirish va kompleks dasturlash kafedrasining 2019 yil "__" ________dagi "____"-son majlisida muhokama etilgan va ma'qullangan.

Kafedra mudiri: prof.Xo'jayorov B.X.

Fanning ishchi o'quv dasturi Amaliy matematika va informatika fakulteti o'quv-uslubiy kengashining 2019 yil "__" ________dagi "____"-son qarori bilan tasdiqlangan.

O'quv-uslubiy kengash raisi: dots.Mamatov Sh.S.

Fanning ishchi o'quv dasturi Amaliy matematika va informatika fakulteti ilmiy kengashining 2019 yil "__" ________dagi "____"-son qarori bilan tasdiqlangan.

Fakultet kengashi raisi: dots.Babayarov A.I.

Kelishildi:
O'quv-uslubiy
boshqarma boshlig'i
________________dots. Aliqulov B.S.

KIRISH

Tutash muhitlar mexanikasi fani zamonaviy texnikaning turli murakkab texnik jarayonlarini, mexanik harakatlarini o'rganish, ularni matematik nuqtai nazardan tasavvur qilish, tutash muhit modellarini tuzish va unga oid masalalarni yechish uchun nazariy asos bo'ladi hamda nazariy va amaliy ahamiyatga ega.

Fanni o'qitishning maqsadi va vazifalari

Tutash muhitlar mexanikasi (TMM) kursini o'qishdan maqsad mexanika yo'nalishi bo'yicha ta'lim olayotgan talabalarga ushbu yo'nalishning negizini tashkil qiluvchi fanlardan biri-TMMning fundamental asoslarini berish.

Tutash muhitlar mexanikasi fani vazifasi quyida keltirilgan dastur doirasida talabalarga chuqur nazariy bilim berish va muayyan ko'nikmalar hosil qilish hamda maxsus fanlar bloki tarkibida o'qitiladigan kurslarni o'zlashtirishlari uchun yetarli bilim berish hisoblanadi.

Fan bo'yicha talabalarning bilimiga, ko'nikma va malakasiga qo'yiladigan talablar

TMM predmetni tinglagan talabalar deformasiyalar va kuchlanishlar nazariyalarini puxta o'zlashtirgan bo'lishlari, tutash muhitning klassik modellari to'g'risida kurs dasturi doirasida bilimga ega bo'lishlari, TMMning asosiy tenglamalarini va termodinamikaning asoslarini *bilishi kerak*.

Tutash muhit klassik modellari harakati uchun to'la tenglamalar sistemasi mavjud bo'lgan hollarni bilishlari va ularga misol tariqasida qaralgan masalalarni matematik yechish usullarini o'zlashtirgan bo'lishlari hamda mazkur yechimlarni tahlil qila olish *ko'nikmalariga ega bo'lishi kerak*.

Tutash muhitning murakkab (noklassik) modellarini tuzish zaruriyatini tushunishlari va muayyan modellar haqida ma'lum tushunchaga ega bo'lishlari kerak. Tutash muhit kinematikasi, deformasiyalar va kuchlanishlar nazariyasi va TMM kursining boshqa barcha qismlariga oid misol va masalalar yecha olish *malakalariga ega bo'lishi kerak*.

Fanning o'quv rejadagi boshqa fanlar bilan o'zaro bog'liqligi va uslubiy jixatdan uzviy ketma-ketligi

Tutash muhitlar mexanikasi fani 5 va 6 semestrlarda o'qitiladi; Tutash muhitlar mexanikasi fani mexanika yo'nalishining o'quv rejasidagi fanlar: matematik analiz, chiziqli algebra va geometriya, differensial geometriya, differensial tenglamalar, variasion hisob va optimallash, hisoblash usullari bilan uzviy bog'liq. Ularni mustahkamlash omili amaliy va seminar mashg'ulotlari hamda talabalarni mustaqil ishlashga o'rgatish hisoblanadi. O'quv rejada TMM fanini o'qitish uchun zarur bo'lgan matematik fanlar ketma-ketligi hisobga olingan, fanlarning uzviy ketma-ketligi ta'minlangan.

Fanning ishlab chiqarishdagi o'rni

Amaliy matematika va informatika hamda mexanika yunalishining bakalavr bosqichida o'qiladigan barcha ixtisoslik fanlari tutash muhitlar mexanikasi fanidagi modellar va ularning xususiyatlariga asoslanadi. Bakalavr o'quv rejasida qayd etilgan materiallar qarshiligi, gidravlika va maxsus fanlar qismida o'qitiladigan kurslarning aksariyati TMM negizida o’qiladi.

Fanni o’qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

Tutash muhitlar mexanikasi fanini o’qitish ma’ruza, amaliy, seminar mashg’ulotlar va mustaqil ish ko’rinishda bilim olish bilan birga o’qitishning ilg’or va zamonaviy usullarni, yangi informasion texnologiyalarni tatbiq qilish ta’lim sifatini oshiradi, xususan o’qitish jarayonida yangi matematik dasturlar Maple, Mathcad, Matlab va mavjud elektron darsliklar, veb-saytlardan foydalaniladi.

Tutash muhitlar mexanikasi kursini loyihalashtirishda quyidagi asosiy konseptual yondoshuvlardan foydalaniladi:

Shaxsga yo’naltirilgan ta’lim. Bu ta’lim o’z mohiyatiga ko’ra ta’lim jarayonining barcha ishtirokchilarini to’laqonli rivojlanishlarini ko’zda tutadi. Bu esa ta’limni loyihalashtirayotganda, albatta, ma’lum bir ta’lim oluvchining shaxsini emas, avvalo, kelgusidagi mutaxassislik faoliyati bilan bog’liq o’qish maqsadlaridan kelib chiqqan holda yondoshilishni nazarda tutadi.

Tizimli yondoshuv. Ta’lim texnologiyasi tizimning barcha belgilarini o’zida mujassam etmog’i lozim: jarayonning mantiqiyligi, undagi barcha bo’g’inlarning o’zaro bog’langanligi, yaxlitligi.

Faoliyatga yo’naltirilgan yondoshuv. Shaxsning jarayonli sifatlarini shakllantirishga, ta’lim oluvchining faoliyatni aktivlashtirish va intensivlashtirish, o’quv jarayonida uning barcha qobiliyati va imkoniyatlari, tashabbuskorligini ochishga yo’naltirilgan ta’limni ifodalaydi.

Dialogik yondoshuv. Bu yondoshuv o’quv munosabatlarini yaratish zaruriyatini bildiradi. Uning natijasida shaxsning o’z-o’zini faollashtirishi va o’z-o’zini ko’rsata olishi kabi ijodiy faoliyati kuchayadi.

Hamkorlikdagi ta’limni tashkil etish. Demokratik, tenglik, ta’lim beruvchi va ta’lim oluvchi faoliyat mazmunini shakllantirishda va erishilgan natijalarni baholashda birgalikda ishlashni joriy etishga e’tiborni qaratish zarurligini bildiradi.

Muammoli ta’lim. Ta’lim mazmunini muammoli tarzda taqdim qilish orqali ta’lim oluvchi faoliyatini aktivlashtirish usullaridan biri. Bunda ilmiy bilimni obyektiv qarama-qarshiligi va uni hal etish usullarini, dialektik mushohadani shakllantirish va rivojlantirishni, amaliy faoliyatga ularni ijodiy tarzda qo’llashni mustaqil ijodiy faoliyati ta’minlanadi.

Axborotni taqdim qilishning zamonaviy vositalari va usullarini qo’llash – yangi kompyuter va axborot texnologiyalarini o’quv jarayoniga qo’llash.

O’qitishning usullari va texnikasi. Ma’ruza (kirish, mavzuga oid, vizuallash), muammoli ta’lim, keys-stadi, pinbord, paradoks va loyihalash usullari, amaliy ishlar.

O’qitishni tashkil etish shakllari: dialog, polilog, muloqot hamkorlik va o’zaro o’rganishga asoslangan frontal, kollektiv va guruh.

O’qitish vositalari: o’qitishning an’anaviy shakllari (darslik, ma’ruza matni) bilan bir qatorda – kompyuter va axborot texnologiyalari.

Kommunikasiya usullari: tinglovchilar bilan operativ teskari aloqaga asoslangan bevosita o’zaro munosabatlar.

Teskari aloqa usullari va vositalari: kuzatish, blis-so'rov, oraliq va joriy va yakunlovchi nazorat natijalarini tahlili asosida o'qitish diagnostikasi.

Boshqarish usullari va vositalari: o'quv mashg'uloti bosqichlarini belgilab beruvchi texnologik karta ko'rinishidagi o'quv mashg'ulotlarini rejalashtirish, qo'yilgan maqsadga erishishda o'qituvchi va tinglovchining birgalikdagi harakati, nafaqat auditoriya mashg'ulotlari, balki auditoriyadan tashqari mustaqil ishlarning nazorati.

Monitoring va baholash: o'quv mashg'ulotida ham butun kurs davomida ham o'qitishning natijalarini rejali tarzda kuzatib borish. Kurs oxirida test topshiriqlari yoki yozma ish variantlari yordamida tinglovchilarning bilimlari baholanadi.

"Tutash muhit mexanikasi" fanini o'qitish jarayonida kompyuter texnologiyasidan, "Exce1" elektron jadvallar dasturlaridan foydalaniladi. Ayrim mavzular bo'yicha talabalar bilimini baholash test asosida va kompyuter yordamida bajariladi. "Internet" tarmog'idagi rasmiy iqtisodiy ko'rsatkichlaridan foydalaniladi, tarqatma materiallar tayyorlanadi, test tizimi hamda tayanch so'z va iboralar asosida oraliq va yakuniy nazoratlar o'tkaziladi.

ASOSIY QISM:

Fanning uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

Asosiy qismda (ma'ruza) fanni mavzulari mantiqiy ketma-ketlikda keltiriladi. Har bir mavzuning mohiyati asosiy tushunchalar va tezislar orqali ochib beriladi. Bunda mavzu bo'yicha talabalarga DTS asosida yetkazilishi zarur bo'lgan bilim va ko'nikmalar to'la qamrab olinishi kerak.

Asosiy qism sifatiga qo'yiladigan talab mavzularning dolzarbligi, ularning ish beruvchilar talablari va ishlab chiqarish ehtiyojlariga mosligi, mamlakatimizda bo'layotgan ijtimoiy-siyosiy va demokratik o'zgarishlar, iqtisodiyotni erkinlashtirish, iqtisodiy-huquqiy va boshqa sohalardagi islohatlarning ustuvor masalalarini qamrab olishi hamda fan va texnologiyalarning so'nggi yutuqlari e'tiborga olinishi tavsiya etiladi.

Fanning nazariy mashg'ulotlar mazmuni

Kirish. Tutash muhit mexanikasi (TMM)ning umumiy tavsifi; TMM asosiy muammolari; qattiq, suyuq va gaz holatidagi jismlarning xossalarini statistik, mikroskopik va fenomenologik makroskopik nuktai-nazarda o'rganish usullari; TMMning asosiy gipotezalari.

Tenzor hisob elementlari va deformatsiyalanuvchi muhitlar kinematikasi: Indeksli belgilash; to'g'ri burchakli va egri chiziqli koordinata sistemalari; kovariant va kontravariant bazis vektorlar; koordinatalarni almashtirish; egri chiziqli ortogonal koordinatalar sistemasi; silindrik va sferik koordinatalar sistemalari.

Skalyar va vektorlar; tenzor va tenzorlar bilan amallar; metrik va diskriminant tenzorlar; ikkinchi rang tenzorlarning bosh yo'nalishlari; asosiy invariantlar; Kristofell simvollari va ularning xossalari; skalyar va vektorlarni koordinata bo'yicha differensiallash; tenzorlarni koordinata bo'yicha differensiallash.

Muhitning harakat tenglamalari. Hisob sistemalari.

TMMni o’rganishda Lagranj va Eyler usullari; Lagranj va Eyler koordinatalarida o’zaro o’tish; tezlik, tezlanish. Lokal va individual hosila; tok chizig’i va uyurma chiziqlar, ularning kinematik xossalari; tutash muhit deformatsiyasi: cho’zilish va siljish, nisbiy uzayish. Deformatsiya tenzori, cheksiz kichik deformatsiya tenzori komponentlarining mexanik ma’nosi. Deformasiya tenzorining bosh o’qlari va bosh komponentlari; deformatsiya tenzori sirti; invariantlar; hajmiy nisbiy kengayish; deformatsiya tenzori elementlarini ko’chish vektori komponentlari orqali ifodalash va harakat qonuni berilganda hisoblash.

Deformatsiyaning birgalikda bo’lish sharti; cheksiz kichik deformatsiya nazariyasi.

Deformatsiya tezligi tenzori; tutash muhit cheksiz kichik zarrachasi atrofida tezliklarning taqsimlanishi. Koshi-Gelmgols teoremasi. Tezlik divergensiyasi; tezlik vektori sirkulyatsiyasi; potensialli tezlik maydoni; Stoks va Gauss-Ostrogradskiy teoremalari; O’zgaruvchan hajm bo’yicha olingan integraldan vaqt bo’yicha hosila formulasi.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog‘ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z-o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2;Q5; Q6;Q11;Q12.

Dinamik tushunchalar va tenglamalar*:* massa va zichlik; Eyler va Lagranj koordinatalarida massaning saqlanish qonunining yozilishi; massaviy va sirt kuchlar tushunchalari; tashqi va ichki kuchlar, kuchlanishlar; tutash muhit harakat miqdori va harakat miqdori momenti; chekli hajmdagi tutash muhit uchun harakat miqdorining o’zgarishi tenglamasi; kuchlanish uchun asosiy munosabat; kuchlanish tenzori, uning bosh qiymatlari va bosh kuchlanishlari, kuchlanish tenzori komponentalarining mexanik ma’nosi.

Tutash muhit harakat differensial tenglamalari (ixtiyoriy va dekart koordinatalar sistemalarida). Harakat miqdori momenti haqida teorema, klassik hol.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z-o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2;Q5;Q11; Q6.

Ideal suyuqlik(gaz) modeli: Eyler tenglamalari. Ideal suyuqlik harakatini tavsiflovchi to’la tenglamalar sistemasi.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pogona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z-o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2;Q5;Q11; Q6.

Elastik jism va qovushoq suyuqlik modellari*:* chiziqli elastik jism va chiziqli qovushoq suyuqlik – Guk va Navye-Stoks qonunlari. Izotrop muhitlar uchun Guk va

Navye-Stoks qonunlari. Navye-Stoks va Lame tenglamalari. Dinamik va kinematik yopishqoqlik koeffitsiyentlari, Yung moduli va Puasson koeffitsiyenti.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Pog'ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2;Q5; Q6;Q8.

Gidromexanika: Gidrostatika tenglamalari va eng sodda masalalar; Arximed qonuni; Bernulli integrali va uning tadbiqiga oid ayrim masalalar; mukammal gazning adiabatik oqimi uchun Bernulli integrali; tovush tezligi. Max soni; Laval naychasining elementar nazariyasi haqida tushuncha.

Potensialli harakat: Koshi-Lagranj integrali; to'lqin tarqalish tenglamasi; Laplas tenglamasi, uning xususiy yechimlari; ideal siqilmas suyuqlikda sferaning harakati va sferani suyuqlik oqib o'tishi masalasi; Dalamber paradoksi; kichik qo'zg'alishli harakatlar; chekli amplitudali qo'zg'alishlar, Riman to'lqinlari.

Elastiklik nazariyasi: elastiklik nazariyasi masalalarining qo'yilishi; Beltrami-Mitchell tenglamalari; Sen-Venan prinsipi; sterjenning cho'zilishi, buralishi va egilishi masalalari; Lame masalasi; Klayperon tenglamasi va elastiklik nazariyasi masalasi yechimining yagonaligi.

Qovushoq siqilmas suyuqlikning harakati: qovushoq siqilmas suyuqlik harakati to'la tenglamalar sistemasi va uning aniq yechimlari: silindrik quvurdagi harakat, Gagen-Puazeyl qonuni. Π-teorema. Mexanikada hodisalarni modellashtirish va o'xshashlik; o'xshashlik kriteriylari. Frud, Struxap, Eyler va Reynolds sonlari. Reynolds soni kichik bo'lgan hol. Yopishkok siqilmas suyuqlik ichida sharning sekin harakati. Stoks formulasi. Reynolds soni katta bo'lgan hol. Laminar chegaraviy qatlam tenglamalari. Blazius masalasi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Pog'ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2;Q5;Q6;Q10;Q11.

Termodinamikaning asosiy tushunchalari va tenglamalari: Tirik kuch teoremasi va ichki sirt kuchlarining ishi. Termodinamikaning birinchi qonuni. Termodinamik sistemaning to'la va ichki energiyasi. Issiqlikniig oqishi tenglamasi. O'z holatiga qaytuvch]i va qaytmaydigan jarayonlar. Harorat (temperatura) tushunchasi. Ikki parametrli muhitlar. Mukammal gaz. Mayer formulasi. Izotermik va adiabatik jarayonlar. Puasson adiabatasi. Karno sikli. Termodinamikaning ikkinchi qonuni. Entropiya. Mukammal gaz uchun entropiya ifodasi. Qoplanmagan issiqlik. Ikki parametrli muhitlar uchun termodinamik potensiallar (ichki energiya, erkin energiya, entalpiya, Gibbs potensiali).

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Pog'ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2;A3;Q5;Q6;Q10;Q11.

Tutash muhit harakati universal tenglamalar sistemasi va ayrim muhitlarning modellari (ideal va yopishqoq suyuqliklar, elastik jism). Siqiluvchan va siqilmas termoideal suyuqlik modeli. To’la tenglamalar sistemasi (izotermik va adiabatik jarayonlar, mukammal gaz). Termoyopishqoq suyuqlik modeli. Gibbs formulasi. Issiqlik oqimi vektori va Furye qonuni. Issiqlik o’tkazuvchan yopishqoq suyuqlik uchun issiqlik oqishi tenglamasi. Termoyopishqoq suyuqlik harakati to’la tenglamalar sistemasi. Termoelastik jism modeli. Asosiy va holat tenglamalari. To’la tenglamalar sistemasi. Umumlashgan Guk qonuni.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z-o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2;A3.

Uzilish sirtlari nazariyasi: kuchli va kuchsiz uzilish sirtlari; tutash muhit mexanikasi asosiy qonunlarining uzilish sirtlarida yozilishi; bir o’lchovli hollarda ayrim asosiy munosabatlar; Gyugoniyu adiabatasi.

Murakkab xossali muhitlar haqida dastlabki tushuncha.

Qo’llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta’lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z-o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2;Q5;Q6;Q11.

Ma’ruza mashg’ulotlarining kalendar tematik rejasi

5-semestr (36 soat)

№	MAVZUNING NOMI	Soat
I.	**Deformatsiyalanuvchi muhit kinematikasi**	**36**
1.	Kirish, Tutash muhitlar mexanikasining predmeti va usullari.	2
2.	Tutash muhit mexanikasining asosiy gipotezalari	2
3.	Skalyar va vektor maydonlar. Bazis vektorlar.	2
4.	Vektor maydon elementlari ustida amallar	2
5.	Egri chiziqli koordinatalarni almashtirish.	2
6.	Kontravariant va ko’variant bazis vektorlari	2
7.	Fundamental metrik tenzor. Tenzorlar ustida amallar.	2
8.	Tenzorning skalyar invariantlari. Kovariant hosila.	2
9.	Tutash muhit harakatini o’rganishda Lagranj nuqtai nazarlari	2
10.	Tutash muhit harakatini o’rganishda Eyler nuqtai nazarlari	2
11.	Kovariant hosilaning xossalari. Kristoffel simvollarini hisoblash. Riman-Kristofel simvollarini hisoblash	2
12.	Deformatsiya tenzori. Deformatsiya tenzorining bosh o’qlari va bosh komponentalari.	2

13.	Deformatsiya tenzori komponentalarini ko'chish vektori komponentalari orqali ifodalash. Deformatsiyaning birgalik tenglamalari.	2
14.	Deformatsiya tezliklari tenzori. Tutash muhitdagi cheksiz kichik zarracha tezligining taqsimlanishi.	2
15.	Vektor rotori va divergensiyasi.	2
16.	Vektor sirkulyasiyasi. Stoks teoremasi. Potensialli va uyurmasiz harakat.	2
17.	Gauss-Ostrogradskiy teoremasi.	2
18.	O'zgaruvchan hajm bo'yicha olingan integralni vaqt bo'yicha differensiallash	2
	Jami	**36**

6-semestr (72 soat)

№	MAVZUNING NOMI	Soat
II.	**Dinamik tushunchalar va tutash muhitlar mexanikasining dinamik tenglamalari**	**14**
1.	Eyler o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamasi	2
2.	Lagranj o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamalari.	2
3.	Kuchlarning klassisfikatsiyasi. Harakat miqdori tenglamasi	2
4.	Dekart koordinatalar sistemasida va ixtiyoriy koordinatalar sistemasida tutash muhitning harakat tenglamalari	2
5.	Harakat miqdori momenti tenglamalari	2
6.	Taqsimlangan massaviy va sirt juftlari	2
7.	Simmetrik kuchlanish tenzorining bosh o'qlari va bosh komponentalari	2
III.	**Tutash muhit ba'zi sodda modellarining yopiq tenglamalari sistemasi**	**10**
8.	Ideal suyuqlik va gaz	2
9.	Chiziqli elastik jism va chiziqli qovushoq – elastik suyuqlik	2
10.	Navye-Stoks tenglamasi.	2
11.	Lame tenglamasi	2
12.	Egri chiziqli koordinatalar sistemasida tenglamalarga misollar	2
IV.	**Gidromexanika**	**10**
13.	Gidrostatika tenglamalari va eng sodda masalalar	2
14.	Gidrostatika tenglamalari va eng sodda masalalar	2
15.	Arximed qonuni	2
16.	Bernulli integrali va uning tadbiqiga oid ayrim masalalar	2
17.	Potensialli harakat	2
V	**Elastiklik nazariyasi**	**6**
18.	Elastiklik nazariyasi masalalarining qo'yilishi; Beltrami-Mitchell tenglamalari.	2
19.	Sen-Venan prinsipi; sterjenning cho'zilishi, buralishi va egilishi masalalari;	2
20.	Lame masalasi; Klayperon tenglamasi va elastiklik nazariyasi	2

	masalasi yechimining yagonaligi.	
VI	**Qovushoq siqilmas suyuqlikning harakati**	**8**
21.	Qovushoq siqilmas suyuqlik harakati to'la tenglamalar sistemasi va uning aniq yechimlari: silindrik quvurdagi harakat,	2
22.	Gagen-Puazeyl qonuni. П-teorema. Mexanikada hodisalarni modellashtirish va o'xshashlik; o'xshashlik kriteriylari. Frud, Struxap, Eyler va Reynolds sonlari. Reynolds soni kichik bo'lgan hol.	2
23.	Yopishkok siqilmas suyuqlik ichida sharning sekin harakati. Stoks formulasi. Reynolds soni katta bo'lgan hol.	2
24.	Laminar chegaraviy qatlam tenglamalari. Blazius masalasi.	2
VII	**Termodinamikaning asosiy tushunchalari va tenglamalari**	**14**
25.	Tirik kuch haqidagi teorema va ichki sirt kuchlarining ishi	2
26.	Termodinamikaning birinchi boshlanishi (energiyaning saqlanish qonuni) va issiqlik oqimi tenglamasi	2
27.	Termodinamik muvozanat, qaytar va qaytmas jarayonlar	2
28.	Ikki parmetrli muhitlar. Mukammal gaz. Karno sikli	2
29.	Termodinamikaning ikkinchi boshlanishi va entropiya tushunchasi	2
30.	Ikki parametrli muhitlarda termodinamik potensiallar	2
31.	Ideal va yopishqoq muhitlarga misollar, ularning termodinamik xususiyatlari. Issiqlik o'tkazuvchanlik	2
VIII.	**Tutash muhit harakati universal tenglamalar sistemasi va ayrim muhitlarning modellari**	**6**
32.	Aniq masalalar qo'yilishining umumiy asoslari	2
33.	Erkli noma'lumlar sonini kamaytirish.	2
34.	Ba'zi masalalarning qo'yilishida tipik soddalashtirishlar.	2
IX.	**Uzilish sirtlari nazariyasi**	**4**
35.	Kuchli va kuchsiz uzilish sirtlari; tutash muhit mexanikasi asosiy qonunlarining uzilish sirtlarida yozilishi;	2
36.	Bir o'lchovli hollarda ayrim asosiy munosabatlar; Gyugoniyu adiabatas	2
	Jami	**72**

Amaliy mashg'ulotlarni tashkil etish bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg'ulotlardan maqsad deformatsiyalanuvchan qattiq jism, suyuqlik va gazlar harakatining tabiat va texnikada uchraydigan sodda masalalarini yechish ko'nikmalarini hosil qilish. Bunda talabalar amaliy mashg'ulotlarda misol va masalalarni yechishda, yechimlarni tahlil qilishda olgan nazariy bilimlarini qo'llay olishlari nazarda tutiladi.

Amaliy mashg'ulotlarning taxminiy mavzulari ro'yxati

Indeksli belgilash. Koordinata bazislari. Koordinatalarni almashtirish. Lame koeffisiyentlarini hisoblash.

Tenzorlar ustida amallar. Tenzorning bosh qiymatlari va bosh yo'nalishlarini topish. Bosh invariantlar.

Ortogonal koordinata sistemasida Kristofell belgilarini hisoblash. Skalyar vektor va tenzorning gradiyentini hisoblash. TMMda ishlatiladigan ayrim operatorlar.

Harakat tenglamalari. Lagranj va Eyler o'zgaruvchilari. Skalyar va vektor maydonlar.

Deformatsiya nazariyasi: nisbiy uzayish, cho'zilish va siljish. Lagranj va Eylerning chekli deformatsiya tenzorlari. Cheksiz kichik deformatsiya.

Kuchlanish. Kuchlanish tenzori, uning bosh qiymatlari va bosh yo'nalishlari.

Silindrik va sferik koordinata sistemalarida Eyler tenglamalari.

Gidrostatikaga oid masalalar.

Ideal suyuqlik (gaz) harakatiga oid masalalar.

Tormozlanish parametrlarini aniqlashga masalalar yechish.

To'lqinlar tarqalishiga oid masalalar.

Ideal suyuqlikning uyurmali harakati.

Yopishqoq suyuqlik harakati. Navye-Stoks tenglamalarining silindrik va sferik koordinata sistemalaridagi ko'rinishi.

Stoks formulasini keltirib chiqarish. Stoks formulasini qo'llashga misollar.

Termodinamika masalalari.

Elastiklik nazariyasi masalalarining ko'chishlar orqali qo'yilishi (dekart koordinata sistemasida).

To'g'ri brusning cho'zilishi.

To'g'ri brusning buralishi.

Amaliyot mashg'ulotlarining kalendar tematik rejasi
5-semestr (36 soat)

№	MAVZUNING NOMI	Soat
I.	**Tenzor hisobi elementlari**	**16**
1	Koordinatalarni almashtirish	4
2	Vektor maydonini differensiallash	4
3	Tenzorlar ustida amallar	4
4	Ortogonal egri chiziqli koordinatalar sistemalari	4
II.	**Deformatsiyalanuvchi muhit kinematikasi**	**20**
5	Harakatning Lagranj va Eyler ko'rinishidagi ifodalari, ularning biridan ikkinchisiga o'tish	4
6	Ko'chish va deformatsiya. Deformasiya tenzori.	4
7	Nisbiy ko'chish. Chiziqli burilish tenzori. Burilish vektori	4
8	Bosh deformasiyalar. Deformatsiya invariantlari.	2
9	Chiziqli deformasiya uchun birgalik tenglamalari	2
10	Tezlik. Tezlanish. Trayektoriya. Oqim chiziqlari	2
11	Deformasiya tezliklari. Uyurma. Deformatsiya orttirmasi	2
	Jami	**36**

6-semestr (72 soat)

№	MAVZUNING NOMI	Soat
III.	**TMMning dinamik tenglamalari.**	**16**
1	Siqiluvchan va siqilmas suyuqlik uchun uzviylik tenglamalari	2
2	Ortogonal egri chiziqli koordinatalarda uzviylik tenglamasi	2
3	Kuchlanish vektori va tenzori. Normal va urinma kuchlanish	2
4	Kuchlanish tenzorini almashtirish. Kuchlanish tenzori sirti. Kuchlanish tenzorining sharsimon va deviatr qismlari	4
5	Kuchlanish tenzorining invariantlari, bosh qiymatlari va bosh yo’nalishlari	2
6	Maksimal va minimal urinma kuchlanishlar. Mor doirasi	2
7	Harakat miqdori o’zgarishi haqidagi teorema.	2
IV.	**Tutash muhit ba’zi sodda modellarining yopiq tenglamalari sistemasi**	**14**
8.	Ideal suyuqlik va gaz	2
9.	Chiziqli elastik jism va chiziqli qovushoq – elastik suyuqlik	2
10.	Navye-Stoks tenglamasi.	4
11.	Lame tenglamasi	2
12.	Egri chiziqli koordinatalar sistemasida tenglamalarga misollar	4
V.	**Gidromexanika**	**10**
13.	Gidrostatika tenglamalari va eng sodda masalalar	2
14.	Arximed qonuni	4
15.	Bernulli integrali va uning tadbiqiga oid ayrim masalalar	2
16.	Potensialli harakat	2
VI.	**Elastiklik nazariyasi**	**4**
17.	To’g’ri brusning cho’zilishi.	2
18.	To’g’ri brusning buralishi.	2
VII.	**Qovushoq siqilmas suyuqlikning harakati**	**4**
19.	Qovushoq siqilmas suyuqlik harakatiga doir misollar	2
20.	Stoks formulasini qo’llashga misollar	2
VIII	**Termodinamikaning asosiy tushunchalari va tenglamalari**	**18**
21.	Chiziqli va hajmiy kengayish	2
22.	Erish, bug’lanish, yonishda issiqlik miqdorlari	2
23.	Issiqlikning balans tenglamasi	2
24.	Termodinamikaning birinchi qonuni	2
25.	Mendeleyev-Klapeyron tenglamasining masalalar yechishga tadbiqi	2
26.	Van-der-Vaals tenglamasiga doir masalalar	2
27.	Izotermik va adiabatik jarayonlar	2
28.	Issiqlikning oqimi tenglamasi	2
29.	Karno sikli	2
IX.	**Tutash muhit harakati universal tenglamalar sistemasi va ayrim**	**4**

	muhitlarning modellari	
30.	Aniq masalalar qo'yilishining umumiy asoslari.	2
31.	Erkli noma'lumlar sonini kamaytirish. Ba'zi masalalarning qo'yilishida tipik soddalashtirishlar	2
X.	**Uzilish sirtlari nazariyasi**	**2**
32.	Kuchli va kuchsiz uzilish sirtlari; tutash muhit mexanikasi asosiy qonunlarining uzilish sirtlarida yozilishi; bir o'lchovli hollarda ayrim asosiy munosabatlar; Gyugoniyu adiabatas	2
	Jami	**72**

Kurs ishini tashkil etish bo'yicha uslubiy ko'rsatmalar

Kurs ishining maqsadi talabalarni mustaqil ishlash qobiliyatini rivojlantirish, olgan nazariy bilimlarinn mustahkamlash, amaliy ishlarga qo'llash ko'nikmalarini hosil qilish. Kurs ishini bajarishda nazariy bilimlarni mustaqil tahlil qilish, tanlangan mavzuga oid adabiyotlardan foydalanish ko'nikmasini hosil qilish.

Mustaqil ta'limni tashkil etish shakli va mazmuni

Talaba mustaqil ta'limining asosiy maqsadi – o'qituvchining rahbarligida va nazoratida muayyan o'quv ishlarini mustaqil ravishda bajarish uchun bilim va ko'nikmalarini shakllantirish va rivojlantirish.

Talabalar nazariy va amaliy mashg'ulotlarda olingan bilimlarga tayangan holda qo'yilgan masalalarni mustaqil hal qila olishlari kerak. Mazkur fandan mustaqil ishlar quyidagicha tashkil qilinadi: nazariy bilimlarni o'zlashtirish, amaliy mashg'ulotlarga tayyorgarlik, mustaqil ta'lim uchun mo'ljallangan nazariy va amaliy bilim mavzularini o'zlashtirish.

Talaba mustaqil ishni tashkil etishda quyidagi shakllardan foydalaniladi:

- Ayrim nazariy mavzularni o'quv adabiyotlari yordamida mustaqil o'zlashtirish;
- Berilgan mavzular bo'yicha axborot (referat) tayyorlash;
- Nazariy bilimlarii amaliyotda kullash va h.k.

Tavsiya etilayotgan mustaqil ishlarning mavzulari

1. Issiqlik va ish tushunchalari (bunda energiya tarqalishi usullari va uning miqdori o'rganiladi).
2. Deformatsiyalanuvchi qattiq jism termodinamik potensiallari (bunda erkin energiya, ichki energiya va Gibbs potensiallari tahlillari beriladi).
3. Materiallar charchashi, oqishi. Relaksatsiya jarayoni.
4. Deformatsion plastiklik nazariyasini ishlatilishi (bunda eng sodda masalalar uchun nazariyani ishlatilishi kuriladi).
5. Muvozanatdagi suyuqlikni egri chiziqli devorga ta'siri. Bosimni bosh vektori va bosh momenti.
6. Ideal suyuqlikni statsionar harakati uchun integral munosabatlarni qo'llash. Oddiy masalalarni yechish,
7. Ideal siqilmaydigan suyuqliklarning potensial oqimlariga oid masalalar.

8. Fizik mikdorlar o'lchamlari. *П*-teorema, aniqlovchi parametrlar; ularni gidrodinamika va elastiklik nazariyasida qo'llanilishi.
9. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqlik harakatini aniq yechimlari.
10. Uyurmalar maydoniga sodda misollar.
11. Gidrodinamik va gazodinamik mashinalar (konfuzor va soplo, kompressor, turbina, ejektorlar).
12. Ikki parallel plastinkalar orasidagi harakat; erkin sirt hosil bo'lgan hol;
13. Oseening taqribiy yechimi.
14. Deformatsiya tenzori komponentalarini silindrik va sferik koordinatalarda yozilishi.
15. Kuchlanish tenzori komponentalarini silindrik va sferik koordinatalarda yozilishi.
16. Yepishqoq suyuqlik, gazlarni harakat va uzluksizlik tenglamalarini silindrik va sferik koordinatalarda yozilishi.

Talabalar mustaqil ta'limining mazmuni va hajmi

№	Mustaqil ta'lim Mavzulari	Berilgan topshiriqlar	Bajar. muddat.	Hajmi (soatda)
V semestr				
1	Koordinatalarni almashtirish	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	1,2,3 -haftalar	5
2	Tenzorlar va ular ustida amallar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	4,5,6–haftalar	5
3	Tutash muhit kinematikasiga doir masalalar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	7,8,9,10,11,12-haftalar	12
4	Kuchlanish tenzori va kuchlanish vektori	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	13,14,15,16,17, 18,19 –haftalar	14
Jami				**36**
VI semestr				
5	Dekart va ortogonal koordinatalar sistemasida elastik jism uchun asosiy munosabatlar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	1,2,3,4,5 -haftalar	12
6	Dekart va ortogonal koordinatalar sistemasida suyuqliklar uchun asosiy munosabatlar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	6,7,8,9, 10 -haftalar	12
7	Asosiy termodinamik tushunchalar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	11,12,13,14,15 -haftalar	13
8	Holat tenglamalari	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	16,17,18,19-haftalar	11
9	Elektrodinamika tenglamalarining tahlili va ularga doir masalalar yechish	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	1,2,3,4,5, 6,7,8,9, 10 –haftalar	9
10	TMM tenglamalarini	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	11,12,13,14,15, 16,17,18,19-	15

	masalalar qo'yilishiga ko'ra sodda holga keltirish va ularni yechish		haftalar	
Jami				**72**
Hammasi				**108**

Dasturning informatsion – uslubiy ta'minoti

EHM yordamida mexanikaning ba'zi masalarini analitik va sonli yechish, mexanika masalalarini o'rganishda dasturlar to'plam (Maple, MathCad, Mathlab va h.k.) laridan foydalanish. Mavjud darsliklar, o'quv qo'llanmalar, elektron adabiyotlar bilan metodik ta'minlanadilar.

Talabalar bilimini nazorat qilish va baxolash uchun mezonlar hamda nazoratlar natijalarini gurux jurnallariga qayd etish bo'yicha tavsiyalar

Ushbu tavsiyalar fakultet jamoasining ishlab chiqarish yig'ilishida muhokoma etilgan va fakultet ilmiy kengashi tomonidan ma'qullangan. Tavsiyalar O'zbekiston respublikasi oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirining 2010 yil 26 avgust, 1981-1 sonli buyrug'i bilan tasdiklangan "Reyting tizimi to'g'risidagi nizom" hamda SamDU kengashi tomonidan tasdiqlangan ko'rsatmalar asosida ishchi guruh tomonidan ishlab chiqildi.

Talabalarning bilim, ko'nikma va malaka darajalari 100 ballik shkala bilan o'lchanadi.

Miqdoriy ko'rsatkich	Sifat ko'rsatkich
86 -100 ball	«a'lo»
71-85 ball	«yaxshi»
55- 70 ball	«qoniqarli»
47 – 54 ball	«qoniqarsiz»
0 – 46 ball	«yomon»

Nazoratlar turlari, soni va shakli

№	Nazorat turi	Soni	Nazorat shakli	Maksimal ball	Saralash ball	O'tkazish vaqti
	J.N. O.N. Ya.N.	2 2 1	Og'zaki, yozma, test. Og'zaki, yozma, test. yozma, og'zaki, test.	35 35 30	JN+ON=39	Jadval bo'yicha

Og'zaki va yozma nazorat natijalarini baholash mezonlari

«A'lo» baho (86, 100) ball qo'yiladi:

1. Tushuncha va ta'riflar to'liq va aniq keltirilsa.

2. Tasdiqlar (xossa, lemma, teorema, formulalar) to’g’ri va aniq bayon qilinib, to’liq isboti keltirilsa.
3. Tasdiqlar (xossa, lemma, teorema) ning aniqligi unga mos misollar orqali asoslansa va ularning isbotlash usullarini boshqa masalalarga qo’llay olish ko’nikmasiga ega bo’lsa.
4. Amaliy topshiriqlar (misol yoki masala) algoritm bo’yicha asoslanib, to’liq va to’g’ri yechilgan bo’lsa.
5. Tushuncha va tasdiqlarning geometrik talqini to’g’ri va to’liq keltirilgan bo’lsa.
6. Barcha javoblarda (bayonlar) mustaqil fikrlab bajarilgan bo’lsa.

«Yaxshi» baho (71, 85) ball qo’yiladi:

1.Tushuncha va ta’riflar to’liq va aniq keltirilsa, ammo bayonda javobning asosiy mazmunini buzmaydigan ba’zi yetishmovchiliklarga yo’l qo’yilgan bo’lsa.

2. Masalaning asosiy mazmunini yoritishda bitta-ikkita kamchilikka yo’l qo’yilgan bo’lib, imtihon oluvchi ko’rsatgan bu xato-kamchiliklarni osongina tuzatish mumkin bo’lsa,

3. Tasdiqlar (xossa, lemma, teorema, formulalar) to’g’ri keltirilib lekin isbotida ayrim kamchiliklar bo’lsa,

4. Tasdiqlar (xossa, lemma, teorema, formulalar) ning muhim shartlarini asoslovchi misollarni mustaqil keltira olmasa,

5. Tasdiqlar (xossa, lemma, teorema)ning isbotlash usullarini boshqa misollarga qo’llay olish ko’nikmasiga yetarli darajada ega bo’lmasa.

«Qoniqarli» baho (55, 70) ball qo’yiladi:

Kafedra tomonidan davlat ta’lim standartlariga mos fan bo’yicha modullar uchun ishlab chiqilgan minimal talablarni bajarsa.

1. Tushuncha va ta’riflar keltirilsa.
2. Tasdiqlarning bayoni to’g’ri keltirilsa (isbotsiz)
3. Amaliy topshiriqlar kamchiliklar bilan bajarilgan bo’lsa.
4. Standart formulalar, jadvallar, qoidalar, algoritmlar o’zlashtirilgan bo’lsa

«Qoniqarsiz» baho (47, 54) ball qo’yiladi:

Kafedra tomonidan ishlab chiqilgan «minimal talablar»ni bajara olmasa.

«Yomon» baho, (0, 46) ball qo’yiladi:

Boshlang’ich nazorat (elementar matematikadan) natijasi 100 ballik shkalada 55 balldan past bo’lsa.

Bilim, ko’nikma va malaka darajalarini o’lchash bo’yicha umumiy tavsiyalar

1. Nazorat uchun ajratilgan maksimal ballni topshiriqlar soniga bo’lib, har bir topshiriq uchun maksimal ballni aniqlash.
2. Eng yaxshi bajarilgan ishni namuna (etalon) sifatida tanlab olish.
3. O’lchov birligini shartli ravishda aniqlab olish.
4. Ko’chirmachilik va o’zaro yordam kabi subyektiv holatlarni e’tiborga olish.
5. Baholash jarayonida nisbiylik prinsipiga amal qilish.
6. Baholash jarayonida obyektivlik prinsipiga amal qilish.
7. Tushunchalarni ta’rifi bo’yicha aniqlay olish darajasini tekshirish.
8. Tasdiqlar shartlarining bajarilishini tekshira olish darajasini aniqlash.

9. Tasdiqlarni inkorlovchi (rad etuvchi) misollar keltira olishini tekshirish.
10. O’zlashtirilgan BKMlarni takroriy baholashlarga yo’l qo’ymaslik.
11. Miqdoriy ko’rsatgichlarning chegaraviy ballarini (38, 40, 54, 56, 70, 71, 85, 86) aniqroq o’lchashga harakat qilish.

ON lar uchun yozma ishlarga ajratilgan maksimal ballning taqsimlanishi: (maks20)

№	Oraliq yozma ishi	Yozma ishlarga (20)	1-yozma (10)	2-yozma (10)
1	Nazariy savol -1	4	2	2
2	Nazariy savol-2	4	2	2
3	Misol	4	2	2
4	Misol	4	2	2
5	Mustaqil ishdan	4	2	2

YaN uchun ajratilgan maksimal ballning taqsimlanishi: (maks 30)

№	Yakuniyyozmaishyokiog’zakiso’rov	30
1	Nazariy savol- 1	5
2	Nazariy savol -2	5
3	3-misol	5
4	4-misol	5
5	Mustaqil ishdan	5

Joriy nazorat maksimal bali(35)ning ko’rsatkichlarga taqsimlanishi

	Ko’rsatkichlar	1- JN(17)	2 -JN(18)
I	Faolligi (dars jarayonidagi ishtiroki, uy vazifasi, amaliyot daftarining yuritilishi)	(0-7)	(0-7)
II	Mustaqil ish	(0–3)	(0-4)
III	Yozma ish(test),og’zaki so’rov,	(0-7)	(0 – 7)

Oraliq nazorat maksimal bali(35)ning ko’rsatkichlarga taqsimlanishi

	Ko’rsatkichlar	1- ON(max17)	2-ON(max18)
I	Faolligi (dars jarayoniga ishtiroki, maruza daftarining yuritilishi)	(0-4)	(0-4)
II	Mustaqil ish	(0-3)	(0-4)

III	Yozma ish(test,suhbat)	(0-10)	(0-10)

Izoh**:** mustaqil ijodiy ishlarga esa 2-ko'rsatkich hisobidan ball ajratiladi.
Birinchi ko'rsatkichlar buyicha**:** 1-juftlik darsga ajratilgan maksimal ball quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi:
ON uchun ***8 : (juftliklar soni),*** JN uchun ***14 : (juftliklar soni).***
Uchinchi ko'rsatkichlar buyicha**:** Yozma ishlar(test)va suhbat bir necha marta o'tkazilishi mumkin, lekin natijalarning o'rtachasi gurux jurnaligaqayd etiladi. Bu ko'rsatkichlar asosiy va hal qiluvchidir.
Faqat birinchi va ikkinchi ko'rsatkichlari buyicha talaba JN va ON dan maksimal **36** ball to'plashi mumkin, ammo YaN ga qo'yilmaydi.
Mustaqil ta'lim topshiriqlari JN va ON lar uchun umumiy bo'lib,natijalari amaliy va nazariy jihatdan alohida-alohida belgilangan sanalarga qayd etiladi.
Qayta topshirishlar navbatdagi nazorat turini topshirish muddatigacha amalga oshirilishi mumkin, natijalari **qayta** ustuniga qayd etiladi.

Barcha nazoratlarning natijalari kafedraga yozma(elektron shaklda) taqdim etilishi va kafedra yig'ilishida taxlil etilishi shart. Yuqori va past o'zlashtirish ko'rsatgan talabalar kafedra mudiri va dekan tomonidan alohida nazoratga olinadi.

GURUX J U R N A L I G A rasmiylashtirish tartibi

Jurnalda *amaliyot darslari* uchun ***bitta sanani bir nechta ustunlarga ketma-ket yozib,*** ustunlarni *faolligi*, *yozma ish(test)*, *og'zaki*, *mustaqil ish*va *qayta* deb nomlab, natijalarni qayd etish mumkin. Faqat *faollik* ustuni hamma talaba uchunh***ar darsda yoki har uch darsda bir marta*** to'ldiriladi, *yozma ish*ustuniga yozma ish(kam topshiriqli) yoki test natijalari rejalashtirilgan sanaga qayd etiladi,*ogzaki* va uy vazifasi ustuniga navbat buyicha 5-6 ta talaba bilan shu sanada utkazilgan og'zaki so'rov natijalari qayd etiladi. M*ustaqil ish* ustuniga *joriy*(oraliq) *nazorat davrida* bajarilishi kerak bo'lgan mustaqil ishni topshirganlargagina tegishli ballar qayd etiladi. Qayta topshirish natijalari q*ayta* ustunga qayd etiladi. Har bir dars uchun 5 tadan ustunlar ajratish shart emas. Chunki har darsda yozma ish yoki mustaqil ishlarni baholamasligimiz mumkin.O'qituvchi joriy va oraliq nazoratlar muddatlarini albatta e'lon qilishi kerak. Bitta sana 2 ta ustunga yoki yozma ish , mustaqil ish natijalari ham qayd etilishi rejalashtirilgan kunlargagina 3 ta ustunga yozilishi mumkin. Bunday sanalar birinchi joriy nazorat davrida ikkita yoki uchta bo'ladi.

Tavsiya etiladigan adabiyotlar ro'yxati

Asosiy adabiyotlar

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1983, Т. 1, 2.
2. Ильюшин А.А. Механика сплошных сред. М.: Наука, 1971.
3. Механика сплошных сред в задачах. Т. I. Теория и задачи. М.: Московский лицей, 1996, 396 с. Под ред. М.Э. Эглит.
4. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: 1974.

Qo'shimcha adabiyotlar

5. Маматқулов Ш. Тутуш муҳит механикаси, 2002 й. (1 қисм), ўқув қўлланма.
6. Кочин Н.Е,, Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.1, 2 М., Физмат изд. 1963.
7. Акивис М.А. Тензорное исчисление. М.: Наука, 1983.
8. Тимошенко с.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1961.
9. Бегматов А. Тензор ҳисоб элементлари. ТошДУ, 2002. 88 стр.
10. Хамидов А.А., Исанов Ш.Р. Туташ муҳит механикасидан маърузалар. Т.: ТошДУ, 1994.
11. Прокопьев В.П., Нустров В.С., Гасилов Г.Л. Механика сплошной среды в примерах и задачах. Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г. Под ред.
12. Xudoynazarov X., Amirqulova F. Deformasiyalanuvchi muhit kinematikasi. Ma'ruzalar matni. – Samarqand: SamDU nashri, 2005.
13. Mase G.T., Smelser R.E, Mase G.E. Continuum mechanics for engineers. Third edition. CRC press LLC. 1999.

Internet saytlari

1. http://www.edu.uz – ta'lim sayti.
2. http://www.edu.ru – ta'lim sayti.
3. http://www.intuit.ru – masofaviy ta'lim sayti.
4. http://www.exponenta.ru– ta'lim sayti.
5. http://www.eqworld.ru – adabiyotlarning elektron varianti.
6. http://ru.wikipedia.org – erkin ensiklopediya «Vikipediya».
7. http://www.twirpx.com – adabiyotlarning elektron varianti.
8. http://www.ziyonet.uz - adabiyotlarning elektron variantlari

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA FAKULTETI

«MATEMATIK MODELLASHTIRISH» KAFEDRASI

TANLOV FAN: «TUTASH MUHIT MEXANIKASI» FANINING O'QUV MATERIALLARI

«5130200 – Amaliy matematika va informatika» ta'lim yo'nalishi 3 kurs talabalari uchun

Samarqand – 2019

1.MA'RUZALAR MATNI

I. DEFORMATSIYALANUVCHI MUHIT KINEMATIKASI

1-Ma'ruza. Tutash muhitlar mexanikasining predmeti, asosiy gipotezalari va tekshirish usullari

Reja

1. TUTASH MUHIT TUSHUNCHASI

2. TMM ning tadqiqot ob'ektlari va predmeti;
3. TMM usullari. Statistik va fenomenologik usullar;
4. Asosiy gipotezalar;
5. Asosiy tushunchalar.

Tayanch iboralar: muhit, zarracha, fazo, vaqt, metrika, kontinuum, uzluksizlik, muammolar.

Tabiatdagi hamma jismlar o'zlarining gaz, suyuq yoki qattiq holatlaridan qat'iy nazar alohida-alohida mayda bo'lakchalar – zarrachalardan tashkil topgan. Molekulyar fizika kursidan ma'lumki 1 sm^3 hajmdagi u yoki bu gazning molekulalari soni, yulduzlararo muhitdagi molekulalar soni, biror qattiq jism, masalan temirning kichik bir bo'lakchasidagi zarrachalar soni va hokazolarni hisoblab topish qiyin emas. Hisoblashlar odatda bu sonlar biz qaraydigan hajmlar uchun juda katta ekanligini ko'rsatadi, shunung uchun har qanday jismni biz taqribiy ravishda fazoning ma'lum bo'lagini tutash (uzluksiz) to'ldirgan deb qaraymiz (asosiy gipoteza). Biz yaxshi biladigan odatdagi jismlar – suv, tuproq, havo, tosh, temir va hokazolarni fazoning biror bo'lagini butunlay to'ldirgan jism sifatida qaraymiz. Nafaqat oddiy moddiy jismlarni, balki har xil maydonlarni ham, masalan elektromagnit maydoni, gravitasion maydon va boshqalarni ham uzluksiz kontinuum sifatida qarash yoki hisoblash mumkin. Bundan keyin biz yuqorida eslatilgan jismlar va maydonlarni bitta umumiy nom bilan – *Tutash muhitlar* deb ataymiz. Ushbu muhitlarning mexanik xarakteristikalarini o'rganuvchi ularning o'zaro ta'siri, ulardagi boshqa jismlar harakatlari va muvozanatlari bilan bog'liq masalalarni o'rganuvchi fanni *Tutash muhitlar mexanikasi* deb ataydilar.

Tabiatdagi u yoki bu jismni tutash muhit deb qarash uni ideallashtirishdan iboratdir. Bunday ideallashtirish biz deformatsiyalanuvchi jismlar harakatlarini tekshirishda uzluksiz funksiyalar apparatini, differensial va integral hisobini qo'llaganimiz bois zarurdir.

Yuqorida aytilganlardan quyidagicha xulosa qilish mumkin: tutash muhit deganda *deformatsiyalanuvchi (tashqi ta'sir natijasida shakli o'zgaruvchi)*, qattiq, suyuq, gaz va plazma holatidagi jismlarni hamda ba'zi maydonlarni tushunamiz.

Nazariy mexanika kursida qattiq jism ideallashtirilib, ya'ni uni absolyut qattiq jism deb qarab, uning muvozanati va harakati o'rganiladi. *Tumash muhitlar mexanikasi* esa *deformatsiyalanuvchi qattiq, suyuq va gazsimon jismlarning muvozanati, harakati va o'zaro ta'siri masalalarini o'rganadi*. Bu yerdan ko'rinib turibdiki tutash muhitlar mexanikasi fan va texnikaning juda ko'p sohalariga tegishli masalalarni hal qilish bilan shuq'ullanishi kerak. Bunday masalalarning ichidan quyidagilarni alohida ajratib ko'rsatish mumkin:

- gaz va suyuqliklarning ularda harakat qilayotgan jismga ta'sirini o'rganish;
- gaz va suyuqliklarning quvurlardagi harakati;
- suyuqliklarning tuproq qatlami yoki jismlardan o'tish harakati – filtrasiya masalalari;
- gidrostatika masalalari;
- to'lqin harakati masalalari, bu yerda to'lqin harakati jismning har uch fazaviy holatida ham sodir bo'ladi;

- suyuqlik va gazlarning turbulent harakati masalalari;
- qattiq jismlar atmosferaning qalin qatlamlariga yorib kirganda ularni yonishdan va erishdan saqlash;
- magnit gidrodinamikasi masalalari;
- qovushoq elastiklik nazariyasi masalalari;
- elastiklik nazariyasi masalalari;
- plastiklik nazariyasi masalalari;
- astrofizika va kosmogoniya masalalari;
- qurilmalarning mustahkamligi va yemirilishi masalalari;
- biomexanika masalalari;
- metereologiya masalalari;
- yer fizikasi va seysmologiya masalalari;
- harakatlanuvchi jismlarning elektromagnit maydonlar bilan o'zaro ta'siri masalalari;
- va hokazo.

Moddiy jismlar harakatini o'rganishda tutash muhitlar mexanikasi asosan ikki ***usuldan*** foydalanadi – *statistik* hamda *fenomenologik – makroskopuk* usullar:

1) biror muhitning harakati tekshirilayotganda uning zarrachalari bir biriga nisbatan harakatda deb qaraladi, lekin uning har bir zarrasining traektoriyasi, tezligi, tezlanishi va boshqa xarakteristikalari o'rganilmasdan, shu jism zarrachalari uchun umumiy bo'lgan o'rtacha xarakteristikalar o'rganiladi. Bu esa o'z navbatida fizika fanida qo'llaniladigan statistik usulga olib keladi va o'rganilayotgan hodisalarga ehtimollar nazariyasi nuqtai – nazaridan qaraladi.

Statistik usullar har doim zarralarning xususiyatlari, o'zaro ta'siri va hokazolar bilan bog'liq bo'lgan qo'shimcha gipotezalarga asoslanadi. Shuning uchun ham statistik usullarni qat'iy va aniq usullar deb bo'lmaydi. Bundan tashqari statistik usullar asosida chiqarilgan harakat tenglamalari juda murakkab bo'lganligi sababli bu usullar o'z effektivligini yo'qotadilar;

2) moddiy jismlar harakatini o'rganishdagi ikkinchi yo'l – tajribadan olingan umumiy qonuniyatlar va gipotezalar asosida fenomenologik – makroskopik nazariyani yaratishdir. Amaliy jihatdan muhim ko'pgina masalalarni yechishda makroskopik nazariya juda effektiv apparat hisoblanadi va uning yordamida topilgan ma'lumotlar tajriba natijalari bilan mos tushadi. Shuning uchun ham biz tutash mumitlar mexanikasi kursini o'rganishni moddiy muhitning fenomenologik – makroskopik nazariyasi asosida olib boramiz.

Tutash muhitlar mexanikasida ham, moddiy jismlar harakatini o'rganadigan boshqa fanlarda bo'lgani kabi, ***fazo*** va ***vaqt*** tushunchalari asosiy tushunchalar bo'lib hisoblanadilar. Chunki har qanday harakat biror fazoda qandaydir vaqt davomida sodir bo'ladi. Tutash muhitlar mexanikasi doirasida har qanday harakatni biz ***metrik*** (ixtiyoriy nuqtalari orasidagi masofalar aniqlangan) fazolarda tekshiramiz. Bunday metrik fazoga misol sifatida oddiy uch o'lchovli YYevklid fazosini keltirish mumkin. Bu fazoning har bir nuqtasi, butun fazo uchun yaroqli bo'lgan, yagona (x,y,z) Dekart koordinatalari sistemasi bilan aniqlanadi va ixtiyoriy x_1, y_1, z_1 hamda x_2, y_2, z_2 koordinatali nuqtalari orasidagi masofa quyidaqi $r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ formula bilan aniqlanadi. Bundan keyin biz faqat hamma nuqtalari uchun yaroqli bo'lgan yagona Dekart koordinatalari sistemasini kiritish mumkin bo'lgan fazolarni qaraymiz. Bunday fazo *YYevklid fazosi deyiladi* va shu asosda rivojlantiriladigan mexanika *Nyuton mexanikasi deyiladi.*

Tutash muhitlar mexanikasida ***absolyut vaqtdan*** foydalaniladi. Vaqtning absolyutligini uning hamma uchun bir xilligida deb tushunish kerak, ya'ni vaqt poezddagi, samolyotdagi, auditoriyadagi va h.k. kuzatuvchilar uchun bir xil o’tadi. Lekin shuni ta’kidlash lozimki, bu narsa faqat Eynshteynning nisbilik nazariyasini hisobga olmaslik mumkin bo’lgan holdagina o’rinlidir.

Har bir fanning o’ziga xos tekshirish uslublari bo’ladi. Xuddi shunday, tutash muhitlar mexanikasining ham o’ziga xos ***uslublari*** mavjud. Bu uslublar matematik analiz, differensial geometriya, funksional analiz va boshqa matematik fanlar qonunlariga tayanadi. Tutash muhitlar mexanikasining hamma uslublari asosida quyidagi konsepsiya yotadi: tutash muhitning harakatini bir qiymatli aniqlovchi va tavsif etuvchi (xarakterlovchi) qator tushunchalar kiritiladi va ular sonlar yoki boshqa matermatik tushunchalar yordamida aniqlanadi. Bunday tushunchalarga misol sifatida tezliklar maydoni, bosimlar maydoni, harakat, muvozanat, zichlik, harorat va boshqalar ko’rsatilishi mumkin.

Tutash muhitlar mexanikasida mexanik masalalarni matematik masalalarga keltiruvchi uslublar ishlab chiqiladi. Bu uslublar yordamida mexanik masala qandaydir sonlarni yoki sonlar funksiyalarini har xil matematik amallar yordamida topishga keltiriladi. Lekin shuni ta’kidlash lozimki, ko’p hollarda matematik masalaga keltirilgan mexanik masala shunday qiyinlashadiki uni echish amri-mahol bo’ladi. Shuning uchun ham matematik ko’rinishga keltirilgan mexanik masalani echish matematikaning yoki matematiklarning ishi emas, balki mexanikaning, xususan mexaniklarning ishi hisoblanadi. Chunki ana shunday masalalar mexanik gipoteza va mulohazalar asosida soddalashtirilib, keyin echilishi mumkin. *Shunday qilib, tutash muhitlar mexanikasining uslublari mexanik masalani matematik masalaga keltirish va uni echish uslublaridan iboratdir*.

Shunday qilib quyidagi *asosiy gipotezalarga* ega bo’ldik.

1) jism zarrachalari jism joylashgan fazo bo’lagini (qismini) tutash, (bo’shliqlarsiz) to’ldiradi. Bu zarrachalar cheksiz kichik hajmga ega bo’lib mexanik parametrlarga egadir (zichlik, harorat va h.k.);
2) Jism harakat qiladigan fazo YYevklid fazosi bo’lib, bu shunday fazoki unda hamma nuqtalar uchun umumiy bo’gan Dekart koordinatalari sistemasini kiritish va ixtiyoriy nuqtalar orasidagi masofani aniqlash uchun yagona formula beriladi. *Masofaning o’lchov birligi sifatida* Parij meridianining milliondan bir bo’lagi – *metr* qabul qilingan.
3) Vaqt absolyutdir. Ya’ni u har qanday koordinatalar sistemasida bir xil va bir tekis o’tadi, boshqacha aytganda koordinatalar sistemasining nisbiy harakati bilan uzviy ravishda bog’langan. *Vaqt birligi sifatida* o’rtacha quyosh sutkasining 86400 dan bir qismi – *sekund* qabul qilingan.

Adabiyotlar

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
2. «Механика сплошной среды в примерах и задачах». Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
4. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во МГУ, 1990. - 310 с.
5. Механика сплошных сред в задачах. В двух томах. М.: «Московский лицей», 1996. Под ред. М.Э. Эглит.

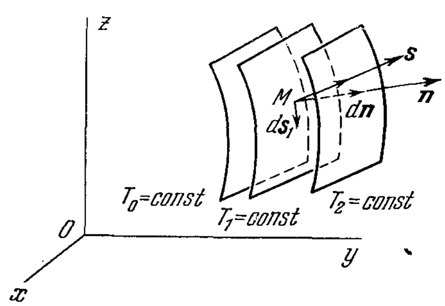
2-Ma'ruza.
SKALYAR VA VEKTOR MAYDONLAR. ULARNING XARAKTERISTIKALARI
Reja:

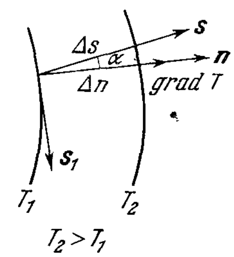
1. Skalyar va vektor maydonning ta'riflari;
2. Yo'nalish bo'yicha hosila va vektor gradiyent;
3. Oqim chiziqlari va traektoriya
4. Vaqt bo'yicha individual va mahalliy hosila. Konvektiv hosila;
5. Statsionar va nostatsionar harakati;
6. Vektor chiziqlari va oqim chiziqlari;
7. Potensialli maydonlar va potensialli oqim;
8. Manbaa va stok.

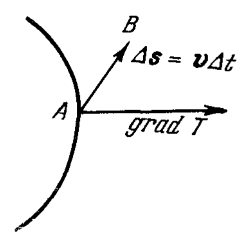
Tayanchiboralar: skalyar, vektor, hosila, gradiyent, oqimchizig'i, oqimnaychasi.

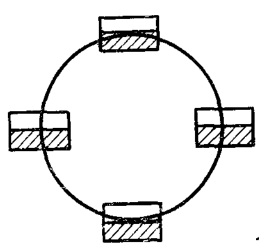
1. Skalyar va vektor maydonning ta'riflari

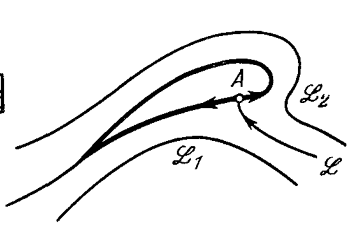
Har bir nuqtasida to'la aniqlangan biror miqdorlar maydoni *fazo* deb ataladi. Agar bu miqdor skalyar bo'lsa, ya'ni u bitta son bilan xarakterlansa, u holda bu maydon *skalyar maydon* (masalan, zichliklar maydoni, temperaturalar maydoni va hokazo) deb ataladi. Fazoning har bir nuqtasida miqdori va yo'nalishi bilan xarakterlanadigan maydon *vektorli maydon* deb ataladi.

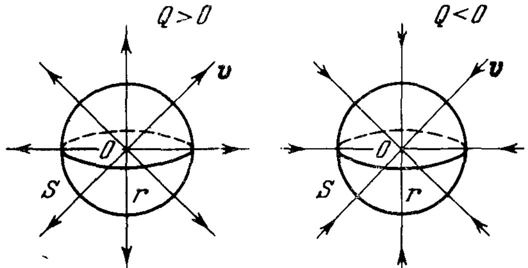












$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r}$$

Tutash muhit zarrachasi tezlik va tezlanishining biror koordinata o'qidagi, masalan, *Ox* o'qidagi mos u_x va a_x proyeksiyasini topish uchun uning *x*, *y*, *z* koordinatalar funksiyasi, va o'z navbatida, umumiy holda *t* vaqtga ham bog'liq bo'lishini hisobga olishimiz zarur.

Radius-vektorga nisbatan esa

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}\ , \quad \vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,.$$

Tutash muhit butun massasining harakati ma'lum bo'ladi, agar quyidagi sistema ma'lum bo'lsa:

$$x = \varphi_1(a,b,c,t),\ y = \varphi_2(a,b,c,t),\ z = \varphi_3(a,b,c,t), \tag{3.1'}$$

bunda a , b , c - zarrachalarning *t*=0 boshlang'ich vaqt momentidagi koordinatalari va ular zarrachalarni belgilash uchun xizmat qiladi. Bu tenglamalardan *t* vaqtni yo'qotib zarrachaning *traektoriyasi tenglamasini* hosil qilamiz. Bunda a , b , c va t miqdorlar *Lagranj o'zgaruvchilari* deyiladi. Lagranj usuliga ko'ra suyuqlik yakka zarrachasining traektoriyasi bo'ylab harakati tekshiriladi. Ma'lumki, zarrachalar cheksiz ko'p, bunday holda traektoriyani berish uchun faqat traektoriyasi qarashli bo'lgan zarrachani tekshirish lozim. Buning uchun esa zarrachaning xarakteristikasi sifatida a , b , c koordinatalar $t = t_0$ boshlang'ich vaqt momentida tanlab olinadi. Shunday qilib, suyuqlik zarrachasining *x, y, z* koordinatalari a , b , c miqdorlar va *t* vaqtdga bog'liq bo'ladi.

Berilgan funksiyalar uchun zarrachalar $\vec{v}$ tezlik vektori va $\vec{a}$ tezlanish vektorining koordinat o'qlaridagi proeksiyalari quyidagilarga teng:

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t},\ v_y = \frac{\partial y}{\partial t},\ v_z = \frac{\partial z}{\partial t},$$

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},\ a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\ a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,. \tag{3.2'}$$

Radius-vektorga nisbatan esa

$$\vec{v} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t},\ \vec{a} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial t^2}\,.$$

Harakatning har ikkala koordinat usullari uchun to'la tezlik, to'la tezlanish va yo'naltiruvchi kosinuslar mos ravishda quyidagicha hisoblanadi:

$$u = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ , \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ ,$$

$$\cos\alpha = \frac{u_x}{u},\ \cos\beta = \frac{u_y}{u},\ \cos\gamma = \frac{u_z}{u}\,.$$

$(x\ ,\ y\ ,\ z)$ koordinatalardan va *t* vaqtga bog'liq funksiya uchun zarracha traektoriyasi bo'ylab vaqt bo'yicha differensiallash operatorini (hosilani) kiritamiz:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\cdot grad). \tag{3.3}$$

Bu erda $(\cdot)$ belgi qavs ichidagi miqdorlarning skalyar ko'payt-masini anglatadi. Bu kiritilgan (3.3) operator *to'la* yoki *individual (*ba'zida *substansional) hosila* deb ataladi. $\frac{dA(\vec{r},t)}{dt}$ to'la hosila zarrachadagi *A* miqdorning vaqt o'zgarishi bo'yi-cha tezligidir. Shunga ko'ra, to'la yoki substansional hosila lokal ((3.3) ning o'ng tarafidagi birinchi qo'shiluvchi) va kon-vektiv (undagi ikkinchi qo'shiluvchi) hosilalar yig'indisiga teng ekan.

Yuqoridagi (3.3) to'la differensial formulasiga ko'ra suyuqlik zarrachasining $\vec{a}$ tezlanish vektorining to'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasi o'qlaridagi proeksiyalari quyidagilarga teng:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \ ,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \ ,$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

yoki

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot grad\, v_x),$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + (\vec{v} \cdot grad\, v_y),$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v} \cdot grad\, v_z). \qquad (3.4)$$

Bu ifodalardan ko'rinadiki, suyuqlik zarrachasining $\vec{a}$ tezlanishi ikkita tezlanishlar yig'indisiga teng ekan:

$$\vec{a} = \vec{a}_{lok} + \vec{a}_{konv},$$

bu erda

$$\vec{a}_{lok} = \frac{\partial v_x}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial t}\vec{k}$$

-tezliklar maydonining vaqt bo'yicha o'zgarishiga asoslangan lokal tezlanish. Lokal tezlanish nostatsionar jarayonni bildiradi. Bundan kelib chiqadiki, agar harakat statsionar (barqaror) bo'lsa, u holda lokal tezlanish bo'lmaydi, ya'ni

$$\vec{a}_{lok} = 0 \ \text{(yoki} \ \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \ , \ \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0 \ , \ \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0);$$

$$\vec{a}_{konv} = \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)\vec{j} + + \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)\vec{k}$$

- tezliklar maydonining bir jinslimasligiga asoslangan konvektiv tezlanish. Bu tezlanish tezliklar maydonining tekis emasligidan, ya'ni tezliklarning tekis taqsimlanmaganligidan kelib chiqadi.

Eyler o'zgaruvchilaridan Lagranj o'zgaruvchilariga, va aksincha, o'tish uchun (3.1) va (3.1') tenglamalar sistemalarini yechamiz, mos ravishda o'rniga qo'yishlarni bajaramiz. Qolgan kinematik parametrlar yuqoridagi formulalardan topiladi.

3.2. Tutashmuhitningstatsionarvanostatsionarharakati

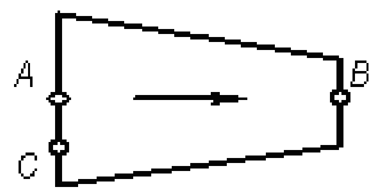
Tutash muhitning harakati *barqaror (statsionar) harakat* deb ataladi, agar berilgan nuqtada vaqt o'tishi bilan oqimning asosiy parametrlari (tezlik, bosim, zichlik) o'zgarmasa, ya'ni

$$\vec{v} = f_u(x,y,z); \ p = f_p(x,y,z); \ \rho = f_\rho(x,y,z). \qquad (3.5)$$

Agar bu shart bajarilmasa va nuqtadagi parametrlar vaqt o'tishi bilan o'zgarib borsa, bunday harakat *nobarqaror (nostatsionar) harakat* deb ataladi, ya'ni

$$\vec{v} = f_u(x,y,z,t);\ p = f_p(x,y,z,t);\ \rho = f_\rho(x,y,z,t). \tag{3.6}$$

Bu tuchunchalarda gap nuqtadagi parametrlar to'g'risida borayotganligiga e'tibor beriskerak. Buni tushuntirish uchun 3.1-chizmada tasvirlangan kanalni qaraylik. Gidromexanikada oqim harakati bo'ylab kesim yuzasi kamayib boradigan kanallar *konfuzorlar* deb ataladi. Bunday kanal yo'li bo'ylab oqim oshib boradi va unda suyuqlik harakati barqaror bo'ladimi, degan savol tug'iladi. Tabiiyki, bunday bo'lishi uchun *A* va *B* nuqtalardagi parametrlar vaqt otishi bilan o'zgarmasligi kerak. Harakat ko'rinishining ta'rifi *A*, *B* va *C* nuqtalardagi parametrlarning bir xil bo'lishini talab qilolmaydi.



3.1-chizma. Konfuzordagi oqimning sxematik tasviri.

3.3. Oqim chiziqlari va traektoriya

Oqim chizig'i deb kuzatilayotgan vaqt momentida ixtiyoriy nuqtasiga o'tkazilgan urinmasining yo'nalishi uning tezlik vektori yo'nalishi bilan mos tushadigan egri chiziqqa aytiladi.

Bu shartni vektor shaklida $\vec{v} \times d\vec{S} = 0$ kabi yozish mumkin, ya'ni vektor ko'paytma nolga teng bo'lishi lozim. Buni (1.3) formulaga asosan quyidagicha determinant shaklida yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \tag{3.7}$$

Bu determinantni ochib chiqib, oqim chizig'ining ushbu

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \tag{3.8}$$

differensial tenglamasiga ega bo'lamiz. Bu yerdan

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = ds,$$

bunda *s* - yordamchi o'zgaruvchi, yoki

$$\frac{dx}{ds} = v_x,\ \ \frac{dy}{ds} = v_y,\ \ \frac{dz}{ds} = v_z$$

tenglamalar sistemasini yechib, oqim chizig'ini topamiz. (x_0, y_0, z_0) nuqtadan o'tuvchi oqim chizig'ini topish uchun Koshi masalasini oxirgi tenglamalar sistemasi bilan ushbu

$$x\big|_{s=s_0} = x_0,\ \ y\big|_{s=s_0} = y_0,\ \ z\big|_{s=s_0} = z_0$$

boshlang'ich shartlarda yechish zarur bo'ladi.

Fazodagi harakatlanayotgan zarrachaning qoldirgan izi *trayektoriya* deb tushuniladi. Trayektoriyaning Eyler o'zgaruvchilaridagi differensial tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = dt. \tag{3.9}$$

Bu yerdan ushbu

$$\frac{dx}{dt}=v_x\ ,\ \ \frac{dy}{dt}=v_y\ ,\ \ \frac{dz}{dt}=v_z$$

tenglamalar sistemasini yechib, trayektoriya tenglamasini topamiz. Tutash muhit zarrachasining trayektoriyasini topish uchun esa $t=t_0$ da Koshi masalasini oxirgi tenglamalar sistemasi bilan ushbu

$$x\big|_{t=t_0}=x_0\ ,\ \ y\big|_{t=t_0}=y_0\ ,\ \ z\big|_{t=t_0}=z_0$$

boshlang'ich shartlarda yechish zarur bo'ladi.

(3.8) va (3.9) tenglamalarni taggoslaganda, umumiy holda, ya'ni nobarqaror harakatda oqim chizig'i va trayektoriya mos tushmaydi. Tutash muhitning barqaror harakatida esa oqim chiziqlari vaqt bo'yicha o'zgarmas bo'lib, suyuqlik zarrachasining traektoriyasi bilan ustma-ust tushadi.

Tutash muhitning harakati potensial yoki *uyurmasiz* deyiladi, agar vaqtning har bir momentida suyuqlikning to'la hajmida $\mathrm{rot}\vec{u}=0$ tenglik bajarilsa. Tutash muhitning statsionar harakatida $\mathrm{rot}\vec{u}=0$ tenglik uning oqim chiziqlari bo'ylab o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, agar oqim chiziqlarining biror nuqtasida uyurma sodir bo'lmasa, u holda bu uyurma butun shu chiziq bo'ylab sodir bo'lmaydi. Agar suyuqlikning harakati nostatsionar bo'lsa, u holda bu natija shunday farq bilan o'z kuchida qoladiki, bunda oqim chiziqlari haqida emas, balki vaqt o'tishi bilan suyuqlikning zarrachasi orqali aniqlangan traektoriya haqida gapirish lozim bo'ladi. Shuni eslatamizki, nostatsionar harakatda bu traektoriyalar, umuman olganda, oqim chiziqlari bilan mos tushmaydi.

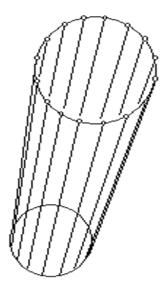
Agar harakatlanayotgan suyuqlikda tezliklar taqsimoti faqat ikkita, masalan, *x* va *y* koordinatalarga bog'liq va barcha nuqtalarda tezlik *Oxy* tekislikka parallel bo'lsa u holda bunday oqim *ikki o'lchovli* yoki *tekis oqim* deyiladi. Ikki o'lchovli oqimda suyuqlikning statsionar harakati uchun oqim chiziqlari uchbu

$$\frac{dx}{v_x(x,y,t)}=\frac{dy}{v_y(x,y,t)}=dt \quad \text{yoki} \quad v_y\,dx-v_x\,dy=0 \qquad (3.10)$$

differensial tenglamadan topiladi. Bu tenglama *tekis holatdagi oqim chiziqlari tenglamasi* deb atalib, u har bir nuqtada oqim chizig'iga o'tkazilgan urinma yo'nalishidagi tezlik yo'nalishi bilan mos tushishini bildiradi.

3.4. Oqim naychasi (oqim sirti)

Harakatlanayotgan suyuqlikda cheksiz kichik yopiq kontur belgilaymiz va uning barcha nuqtalari orqali oqim chiziqlari o'tkazamiz (3.2-chizma). Hosil qilingan sirt *oqim naychasi (trubkasi)* yoki *oqim sirti* deb ataladi. Tanlangan kontur suyuqlik harakati bilan band bo'lgan fazoda belgilandi, demakki, harakatdagi suyuqlikning qaysidir bir qismi shu oqim sirtining ichida yotadi. Oqim naychasi bilan chegaralangan suyuqlik bo'lagi *sharracha* yoki *tizillab oqayotgan suyuqlik* deb ataladi.



3.2-chizma. Oqim naychasini tashkil etuvchi oqim chiziqlari dastasining sxematik tasviri.

Tutash muhitning barqaror harakatida oqim naychasi vaqt bo'yicha o'zgarmaydi va suyuqlik zarrachalari shunday harakat qiladiki, ularning har biri biror belgilangan sharracha ichida qoladi.

Agar oqim chiziqlari yetarlicha kichik tanlansa, u holda oqim naychasining ixtiyoriy ko'ndalang kesimida tezlikni bir jinsli deb hisoblash mumkin. Bunday holda, oqim naychasi bo'ylab $\rho Su=const$ tenglik o'rinli bo'lishini massaning saqlanish qonuni talab qiladi. Ammo tahlil uchun massaning saqlanish qonunini umumiyroq ifodalovchi tenglama – uzviylik differensial tenglamasi talab qilinadi.

3- Ma’ruza.

EGRI CHIZIQLI KOORDINATALARNI AMASHTIRISH

Reja

1. Dekart koordinatalari sistemasida bazis vektorlari;
2. Egri chiziqli koordinatalarni almashtirish;
3. Vektorning va tenzorning ta’riflari. Diad va poliad ko’paytmalar.

Tayanch iboralar: Ortogonal, ortonormal, bazis, Kroneker simvoli, «gung»indeks,vektor, tenzor, tenzorning rangi, diadalar, matrisa, ob’ekt, invariantlar.

Oliy matematikaning maxsus bo’limlaridan biri hisoblangan tenzor hisobi keyingi vaqtlarda fanning juda ko’p sohalarida qo’llaniladi. Bu sohalarga tutash muhitlar mexanikasi, nazariy fizika, kristallografiya, yarim o’tkazgichlar fizikasi va boshqalar kiradi.

Tenzor hisobiga bag’ishlangan adabiyot juda ko’p bo’lishiga qaramasdan talabalar, muhandis va aspirantlar tenzor hisobi bo’yicha biror qo’llanmani tanlashda ancha qiynalishadi. Chunki u yoki bu adabiyot uni yozgan muallifning qiziqish va ishlash sohasi bilan bevosita bog’liq bo’lib, ko’proq shu sohaga tegishli bo’lgan tushunchalarni o’z ichiga oladi. Bundan tashqari eng muhimi bu adabiyotlarning barchasi rus tilida ekanligidir.

Har qanday tutash muhitning holatini xarakterlovchi kattaliklar, xususan fizik va geometrik kattaliklar, koordinatalar sistemasining tanlanishiga bog’liq emas, ya’ni ular invariant kattaliklar yoki ob’ektlardir. Ammo bu kattaliklarni tenzor hisobi elementlaridan foydalanib o’rganish, ya’ni ularni biror koordinatalar sistemasiga bog’lab o’rganish ancha qulay.

Bunda yuqoridagi invariant ob’ektning o’zi koordinatalar sistemasiga bog’liq bo’lmagan holda, koordinat sistemasiga bevosita bog’liq bo’lgan bir qancha kattaliklarning majmuasi bilan aniqlanadiki, kattaliklar invariant ob’ektning tuzuvchilari yoki komponentalari deb ataladi. Ana shunday ko’p komponentali invariant ob’ektlarni tenzorlar deb ataydilar. Bundan tashqari tutash muhitlar mexanikasining bayoni «tenzor tili» da bo’lishi kerakligi munosabati bilan quyida tenzor hisobidan ba’zi zaruriy boshlang’ich ma’lumotlar keltirishni lozim topdik.

1. Dekart koordinatalari sistemasida bazis vektorlari. Vektorning komponentalarini almashtirish.

Koordinat chiziqlari o’zaro perpendikulyar bo’lgan koordinatalar sistemasi *ortogonal koordinatalar sistemasi* deyiladi. Umuman *vektorning ortogonal sistemasi* deb shunday $\{\vec{x}_\alpha\}$ vektorlar to’plamiga aytiladiki, bu to’plamning ixtiyoriy vektorlari orasidagi skalyar ko’paytma nolga teng bo’lishi kerak, ya’ni

$$\left(\vec{x}_\alpha \cdot \vec{x}_\beta\right) = 0, \quad (\alpha \neq \beta).$$

Agar bu to’plamga kiruvchi har bir vektorning normasi birga teng bo’lsa, bunday sistema *ortonormal sistema* deyiladi.

Agar vektorlarning ortogonal sistemasida unga kiruvchi vektorning hammasiga ortogonal bo’lgan vektor topilmasa, bunday sistema *to’liq ortogonal sistema* deyiladi.

Uch o’lchovli YYevklid fazosidagi Dekart koordinatalari sistemasi o’qlarini x_1, x_2, x_3 lar bilan, ularning ortonormal bazisini esa $\vec{\ni}_i$ (i =1, 2, 3) lar bilan belgilaymiz. U holda ta’rifga ko’ra

$$\vec{э}_i \cdot \vec{э}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & agar\ \ i = j\ \ bo'lsa; \\ 0, & agar\ \ i \neq j\ \ bo'lsa, \end{cases} \tag{4.1}$$

bu yerda δ_{ij} - Kroneker simvoli.

Ma’lumki, ixtiyoriy $\vec{\alpha}$ vektori $\vec{э}_i$ (i =1, 2, 3) bazis vektori orqali quyidagi

$$\vec{\alpha} = \alpha_1\vec{э}_1 + \alpha_2\vec{э}_2 + \alpha_3\vec{э}_3 = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\vec{э}_i$$

yiq’indi ko’rinishda ifodalanadi, bu yerda α_i (i =1, 2, 3) vektorning tuzuvchilari (komponentalari). Yozuvning qulayligi uchun oxirgi tenglikning o’ng tomonidagi yig’indi belgisi (Σ) ni tashlab yuborib, tenglik quyidagicha yoziladi

$$\vec{a} = a_i\vec{э}_i, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4.2}$$

Ushbu ifodadagi yig’indi hisoblanuvchi va ikki marta takrorlanuvchi i-indeksi «gung» *indeks* deb ataladi («gapirmasa ham yig’ndi olish kerakligini aytadi»). Fazo uch o’lchovli bo’lganda gung indeks 1, 2, 3 qiymatlarning har uchalasini ham qabul qiladi. Gung indeksni har qanday i, j, k, ….. harflari bilan belgilash mumkin, masalan

$$\vec{\alpha} = \alpha_i\vec{э}_i = \alpha_j\vec{э}_j = \alpha_k\vec{э}_k = \alpha_1\vec{э}_1 + \alpha_2\vec{э}_2 + \alpha_3\vec{э}_3.$$

Indeksning gung yoki gung emasligini aniqlash uchun uning takrorlanishiga etiborni qaratish kerak. Agar indeks takrorlanmasa u *«erkin» indeks* deb yuritiladi. Misol uchun

$$\beta_{ij}\vec{э}_j = \vec{b}_i$$

yozuvida i-erkin, j-esa gung indeksdir.

Ortonormal bazisi $\vec{э}_i$ (i =1, 2, 3) bo’lgan eski x_1 x_2 x_3 Dekart koordinatalari sistemasi o’qlariga nisbatan biror burchakka burilgan va ortonormal bazisi $\vec{э}_i^{\,'}$ (i =1, 2, 3) bo’lgan yangi $x_1^{'}$ $x_2^{'}$ $x_3^{'}$ Dekart koordinatalari sistemasini qaraymiz. Yangi $x_i^{'}$ va eski x_j o’qlari orasidagi burchak kosinusini α_{ij} deb belgilaymiz. U holda α_{ij} yangi $\vec{э}_i^{\,'}$ va eski $\vec{э}_j$ bazis vektorlarning skalyar ko’paytmasiga teng bo’ladi, ya’ni

$$\vec{э}_i^{\,'} \cdot \vec{э}_j = \alpha_{ij} \tag{4.3}$$

Kiritilgan α_{ij} kattalik $\vec{э}_i^{\,'}$ birlik vektorining $\vec{э}_j$ birlik vektori yo’nalishiga tushirilgan proyeksiyasiga teng, va aksincha, α_{ji} kattalik $\vec{э}_j$ birlik vektorining $\vec{э}_i^{\,'}$ birlik vektori yo’nalishiga tushirilgan proyeksiyasiga teng, hamda $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ bo’lganligi uchun $\vec{э}_i^{\,'}$ birlik vektorining $\vec{э}_j$ bazisdagi yoyilmasi

$$\vec{э}_i^{\,'} = \alpha_{i1}\vec{э}_1 + \alpha_{i2}\vec{э}_2 + \alpha_{i3}\vec{э}_3 = \alpha_{ij}\vec{э}_j \tag{4.4}$$

kabi va $\vec{э}_j$ birlik vektorining yangi $\vec{э}_i^{\,'}$ bazisdagi yoyilmasi

$$\vec{э}_j = \alpha_{j1}\vec{э}_1^{\,'} + \alpha_{j2}\vec{э}_2^{\,'} + \alpha_{j3}\vec{э}_3^{\,'} = \alpha_{ij}\vec{э}_i^{\,'} \tag{4.5}$$

kabi bo'ladi. Ushbu ifodada j indeks erkin, i indeks esa gungdir, (4.4) ifodada teskarisi, yani i -erkin, j-gung indeksdir.

Eski bazisdan yangi bazisga o'tish formulasi (4.4) dagi α_{ij} koeffisiyentlar o'tish matrisasini tashkil qiladilar. O'tish matrisasi ortogonal matrisadir, chunki

$$1)\left[\alpha_{ij}\right]^T\cdot\left[\alpha_{ij}\right]=E;\quad 2)\left[\alpha_{ij}\right]\cdot\left[\alpha_{ij}\right]^T=E;\quad 3)\left[\alpha_{ij}\right]^T=\left[\alpha_{ij}\right]^{-1},$$

bu yerda $\left[\alpha_{ij}\right]^T$ -transponirlangan, $[\alpha_{ij}]^{-1}$ –teskari va E-matrisaning elementlari

$$\alpha_{ik}\cdot\alpha_{jk}=\delta_{ij} \text{ va } \alpha_{ki}\cdot\alpha_{kj}=\delta_{ij}$$

shartlarni qanoatlantiradi, hamda uning determinanti ±1 ga teng, ya'ni

$$\left|\alpha_{ij}\right|=\pm1,$$

bu yerdagi musbat ishora agar $\vec{\textit{э}}_i^{\,'}$ va $\vec{\textit{э}}_j$ bazislar bir xil o'ng yoki chap bazislar bo'lsalar qo'yiladi, aks holda manfiy ishora olinadi.

Endi ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorining komponentalarini almashtirish formulalarini topamiz. Buning uchun $\vec{\textit{э}}_i^{\,'}$ va $\vec{\textit{э}}_j^{\,'}$ bazislardagi yoyilmalaridan foydalanamiz:

$$\vec{a}=a_j\,\vec{\textit{э}}_j \quad \text{va} \quad \vec{a}=a_i^{'}\cdot\vec{\textit{э}}_i^{\,'} \quad \text{demak} \quad a_j\,\vec{\textit{э}}_j=a_i^{'}\cdot\vec{\textit{э}}_i^{\,'}$$

Oxirgi tenglikda $\vec{\textit{э}}_j$ o'rniga uning (4.5) ifodasini qo'yamiz

$$\alpha_j\cdot\vec{\textit{э}}_j=\alpha_j\cdot\alpha_{ij}\vec{\textit{э}}_i^{\,'}=_i^{'}\alpha\vec{\textit{э}}_i^{\,'}$$

bundan

$$a_i^{'}=\alpha_{ij}\cdot a_j \quad (chunki\,\alpha_{ij}=\alpha_{ji}) \tag{4.6}$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Aksincha, agar $\vec{\textit{э}}_i^{\,'}$ ning o'rniga uning (4.4) ifodasini qo'ysak

$$a_j=\alpha_{ij}a_i^{'} \tag{4.7}$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Olingan (4.6) formula eski koordinat sistemasidan yangisiga o'tishda vektor komponentalarini almashtirish qonunidir. Aksincha (4.7) formula yangi o'qlardan eskilariga o'tishda vektor komponentalarini almashtirish qonunidir.

Koordinat o'qlarini burishdan bog'liq bo'lmagan ob'ekt sifatida vektorning ta'rifini uning komponentalarini almashtirish qonunidan kelib chiqqan holda berish mumkin: *Dekart koordinatalari sisitemasida koordinat o'qlarini burganda (4.6) qonun bo'yicha almashtiriluvchi a_j sonlar uchligi bilan tavsiflanuvchi invariant ob'ekt vektor yoki birinchi rang tenzor deyiladi, sonlar uchligi esa uning komponentalari deyiladi..*

2. Egri chiziqli koordinatalarni almashtirish.

Yuqorida biz Dekart koordinatalar sistemasida koordinatalarni almashtirish bilan tanishdik. Endi ixtiyoriy ikkita $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ va η^1, η^2, η^3 koordinat sistemalari (egri chiziqli) koordinatalarini almashtirish masalasini qaraymiz. Faraz qilaylik bu ikki sistema o'rasida uzluksiz, o'zaro bir qiymatli moslik

$$\zeta^i=\zeta^i(\eta^1, \eta^2, \eta^3), \quad (i=1, 2, 3) \tag{4.8}$$

mavjud bo'lsin. Bu funksiya (moslik)ni η^1, η^2, η^3 lar boyicha defferensiallaymiz

$$d\zeta^i = \frac{\partial\zeta^i}{\partial\eta^1}d\eta^1 + \frac{\partial\zeta^i}{\partial\eta^2}d\eta^2 + \frac{\partial\zeta^i}{\partial\eta^3}d\eta^3. \quad (4.9)$$

yuqorida indekslarga doir keltirilgan mulohazalarga asosan (4.9) ni

$$d\zeta^i = \frac{\partial\zeta^i}{\partial\eta^j}d\eta^j, \quad (i, j = 1,2,3) \quad (4.10)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda j-gung indeks. Agar

$$a^i_j = \frac{\partial\zeta^i}{\partial\eta^j}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.11)$$

deb belgilab olsak (4.9) ifodaga ko'ra a^i_j miqdorlar uchinchi tartibli matrisani tashkil etishlarini ko'ramiz

$$A = \left\| a^i_j \right\| = \begin{Vmatrix} a^1_1 & a^1_3 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial\zeta^1}{\partial\eta^1} & \frac{\partial\zeta^1}{\partial\eta^2} & \frac{\partial\zeta^1}{\partial\eta^3} \\ \frac{\partial\zeta^2}{\partial\eta^1} & \frac{\partial\zeta^2}{\partial\eta^2} & \frac{\partial\zeta^2}{\partial\eta^3} \\ \frac{\partial\zeta^3}{\partial\eta^1} & \frac{\partial\zeta^3}{\partial\eta^2} & \frac{\partial\zeta^3}{\partial\eta^3} \end{Vmatrix}.$$

O'zaro bir qiymatlilik shartidan bu matrisaning determinanti noldan farqli ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$\Delta = \left| a^i_j \right| \neq 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

u holda (4.9) sistemani $d\eta^i$ larga nisbatan yechsak quyidagi munosabatni olamiz

$$d\eta^i = \frac{\partial\eta^i}{\partial\zeta^j}d\zeta^j, \quad (i, j = 1,2,3) \quad (4.12)$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz

$$b^i_j = \frac{\partial\eta^i}{\partial\zeta^j} \quad (4.13)$$

U holda (4.12) ifodaning koeffisiyentlaridan tuzilgan B=$\left\| b^i_j \right\|$ matrisaga ega bo'lamiz. A va B matrisalar *to'g'ri va teskari almashtirishlarning o'tish matrisalari* deyiladi. Bu matrisalar o'zaro teskari matrisalardir. Haqiqatan, (4.11) va (4.13) ifodalarga asosan

$$A \cdot B = \left\| a^i_j \right\| \left\| b^j_k \right\| = \left\| a^i_j \cdot b^i_j \right\| = \left\| \frac{\partial\zeta^i}{\partial\zeta^k} \right\| = \begin{cases} 1, & agar\, i = k\ bo'lsa \\ 0, & agar\ i \neq k\ bo'lsa. \end{cases}$$

chunki ζ^1, ζ^2, ζ^3 lar o'zaro bog'lanmagan koordinatalardir. Demak,

$$A \cdot B = \left\| \delta^i_k \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = E \quad (4.14)$$

bu yerda

$$\delta^i_k = \begin{cases} 1, & agar\, i = k\ bo'lsa; \\ 0, & agar\, i \neq k\ bo'lsa, \end{cases}$$

ya’ni yuqorida ko’rilgan Kroneker simvoli. Oxirgi (4.14) tenglik A va B matrisalarning o’zaro teskari matrisalar ekanligini ko’rsatadi. U holda B matrisaning determinanti

$$\left|b_j^i\right| = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\left|a_j^i\right|}$$

formula bilan topiladi.

Endi egri chiziqli koordinatalar sistemasida bazis vektorlarini kiritish zaruriyati paydo bo’ladi. Buning uchun boshi biror M nuqtada bo’lgan ζ^1, ζ^2, ζ^3 koordinatalar sistemasini olamiz va uning M (0, 0 ,0) hamda M'($d\zeta^1$, $d\zeta^2$, $d\zeta^3$) nuqtalarini bog’lovchi $d\vec{r} = \vec{MM}$ ob’yektni (4.1.- chizmada strelka bilan ko’rsatilgan) qaraymiz.

Shundan keyin M nuqtadan koordinat chiziqlarni o’tkazamiz va ularda faqat $d\zeta^1$, $d\zeta^2$, $d\zeta^3$ koordinat orttirmalaridan biri bilangina aniqlanadigan N_1, N_2 va N_3 nuqtalarni belgilaymiz.

Quyidagi *geometrik*

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta^i} = \vec{э}_i, (i = 1,2,3) \tag{4.15}$$

ob’yektlarni bazis vektorlari deb ataymiz.

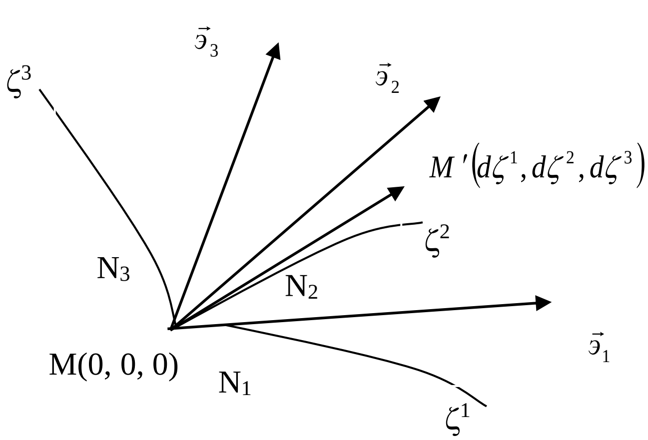
Ko’rinib turibdiki bunday bazis vektorlari koordinat chiziqlarining urinmalari bo’ylab yo’naladilar (4.1-chizma) . Umuman olganda $d\vec{r}$ ixtiyoriy yo’nalgandir, lekin har qanday holda ham (4.15) ga ko’ra $d\vec{r}$ ni

$$d\bar{r} = d\zeta^1\vec{э}_1 + d\zeta^2\vec{э}_2 + d\zeta^3\vec{э}_3 \tag{4.16}$$

yoki

$$d\bar{r} = d\zeta^i\vec{э}_i$$

ko’rinishda yozish mumkinkin. (Ushbuni Dekart koordinatalari sisitemasidagi ifodasi (4.2) bilan solishtiring). *Bu yerdagi $d\zeta^i$ lar $d\vec{r}$ ning komponentalari deyiladi.*



Bazis vektorilari $\vec{э}_i$ larning ζ^1, ζ^2, ζ^3 koordinat sistemasidagi koordinatalari mos ravishda (1,0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) lardan iborat. Shu bazis vektorlarning ζ^1, ζ^2, ζ^3 koordinat sistemasidan farqli, boshqa koordinatalar sistemasidagi koordinatalari albatta boshqacha bo’ladi. Biror η^1, η^2, η^3 koordinat sistemasidagi bazis vektorlarini $\vec{э}_i'$ lar bilan belgilaymiz. U holda qaralayotgan ob’yekt uchun

$$d\bar{r} = d\eta^i \cdot \vec{э}_i' \tag{4.17}$$

formulaga ega bo’lamiz. Ta’rifga ko’ra bu yerda

$$\vec{э}_i' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta^i} \tag{4.18}$$

Oxirgi formulani quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\vec{э}_i^{\,'} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta^j} \cdot \frac{\partial \zeta^j}{\partial \eta^i} = \vec{э}_i \cdot a_i^j$$

yoki

$$\vec{э}_i^{\,'} = a_i^j \cdot \vec{э}_j \tag{4.19}$$

Endi $d\eta^i$ komponentalar uchun (4.12) va (4.13) ifodalarga ko'ra

$$d\eta^i = b_j^i d\zeta^j \tag{4.20}$$

Oxirgi (4.19) va (4.20) formulalardan foydalanib $d\vec{r}$ ning koordinatalar sistemasini almashtirishga nisbatan invariantligini isbotlash qiyin emas. Haqiqatan (4.17) dan

$$d\vec{r} = d\eta^i \vec{э}_i^{\,'} = b_j^i d\zeta^i \cdot a_i^s \vec{э}_s^{\,'} = a_i^s b_j^i d\zeta^j \vec{э}_s^{\,'} = d\zeta^j \vec{э}_j$$

chunki (4.11) va (4.13) larga ko'ra $a_i^s \cdot b_j^i = \delta_j^s = \begin{cases} 1, & j = s \\ 0, & j \neq s \end{cases}$

Koordinatalar sistemalari almashtirilganda xuddi $\vec{э}_i^{\,'}$ bazislariga o'xshash (4.19) formula bilan almashtiriluvchi kattaliklar *kovariant kattaliklar, (4.20)* formulalar bilan almashtiriluvchi kattaliklar *kontravariant kattaliklar* deyiladi.

3. Vektor va tenzorning ta'riflari

TA'RIF 1. Xuddi $d\vec{r}$ ga o'xshash bazis vektorlari orqali $A=A^i\,\vec{э}_i$ kabi tasvirlanuvchi va A^i komponentalari (4.20) formulalar bilan almashtiriluvchi

$$A^{'j} = b_i^j A^i$$

hamda koordinatalarni almashtirishga nisbatan invariant

$$\vec{A} = A^i \vec{э}_i = A^{'j} \vec{э}_j^{\,'} \tag{4.21}$$

ob'yekt *vektor* deyiladi. Bu yerda A^i kattaliklar koordinat sistemasiga bog'liq bo'ladilar, $\vec{э}_i$ bazis vektorlari esa A_i kattaliklar yordamida yangi ob'yekt- $\vec{A}$ vektorni bunyod qiladilar.

Chiziqli koordinatalar sistemasida tenzorning ta'rifini berish uchun bundan keyin bizga vektorlarining *diad* ko'paytmalari tushunchasi bilan tanishish zarur bo'ladi (*diad* – ikki vektor ko'paytmasi, *poliad* ko'p vektorlar ko'paytmasi demakdir). Bazis vektorlarining quyidagi diad ko'paytmalarini kiritamiz

$$E_1 = \vec{э}_1\vec{э}_1, E_2 = \vec{э}_1\vec{э}_2, E_3 = \vec{э}_1\vec{э}_3, E_4 = \vec{э}_2\vec{э}_1, E_5 = \vec{э}_2\vec{э}_2, E_6 = \vec{э}_2\vec{э}_3,$$
$$E_7 = \vec{э}_3\vec{э}_1, E_8 = \vec{э}_3\vec{э}_2, E_9 = \vec{э}_3\vec{э}_3.$$

va

$$T = T^i E_i, \quad (i = \overline{1,9}) \tag{4.22}$$

ob'yektni qaraymiz. Bu yerdagi T^i sonlar T ning E_i bazisdasi komponentalari deyiladi. Bazis vektorlarining diad ko'paytmalari chiziqli bog'lanmaganlar. U holda $T=0$ tenglik faqat $T^i = 0\ (i = \overline{1,9})$ munosabat i ning hamma qiymatlari uchun bir varakayiga bajarilsa o'rinli bo'ladi. Odatda $E_i$lar o'rniga $\vec{э}_i\,\vec{э}_j$ belgilashlarni ishlatish va (4.22) ni

$$T = T^{ij}\,\vec{Э}_i\,\vec{Э}_j$$

ko'rinishda yozish ancha qulayroq. Diad $\vec{Э}_i\,\vec{Э}_j$ ko'paytmalar ham xuddi $\vec{Э}_i$ bazis vektorlarining o'zlari kabi koordinatalar sistemasini tanlashga, boshqacha aytganda koordinatalar sistemasiga bog'liq bo'ladi. Bu esa o'z navbatida koordinatalarni almashtirganda diadlarni almashtirish formulasini chiqarishni taqozo qiladi. Yuqorida keltirilgan (4.19) formula asosida $\vec{Э}'_i\,\vec{Э}'_j$ diad ko'paytma uchun

$$\vec{Э}'_i\,\vec{Э}'_j = a_j^p a_j^q\,\vec{Э}_p\,\vec{Э}_q \tag{4.23}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Demak,

$$T = T^{ij}\,\vec{Э}_i\,\vec{Э}_j$$

ob'yekt invariant bo'lishligi uchun va (4.23) formulaga asosan T^{ij} kattaliklar kontravariant yo'l bilan almashtirilishlari zarurligi kelib chiqadi, ya'ni

$$T'^{ij} = b_p^i b_q^j T^{pq} \tag{4.24}$$

TA'RIF 2. $T = T^{ij}\,\vec{Э}_i\,\vec{Э}_j$ - invariant ob'yekt *ikkinchi rang tenzor deyiladi. Tenzorning rangi deb uning komponentalarining indekslari soniga aytiladi.*

Yuqorida ta'kidlanganidek vektor birinchi rang tenzordir. Ikkinchi rang tenzorga o'xshash ixtiyoriy rangli tenzor tushunchasini kiritsh mumkin. Masalan

$$T = T^{ijkl}\,\vec{Э}_i\,\vec{Э}_j\,\vec{Э}_k\,\vec{Э}_l$$

ob'yekt to'rtinchi rang tenzordir. Bu yerdagi T^{ijkl} larni $\vec{Э}_i\,\vec{Э}_j\,\vec{Э}_k\,\vec{Э}_l$ poliad ko'paytmalar boshqaradi; T^{ijkl} komponentalar xuddi (4.24) kabi almashtiriladilar.

Adabiyotlar

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
2. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.

4- Ma’ruza.
FUNDAMENTAL METRIK TENZOR. KONTRAVARIANT VA KO’VARIANT BAZIS VEKTORLARI

Reja

1. Vektorning uzunligi tushunchasi.
2. Kontravariant va kovariant bazis vektorlari.
3. Fundamental metrik tenzor.
4. Yevklid fazosining umumiy ta’rifi.
5. Diad ko’paytmalarning xususiyatlari
6. Vektorning kontravariant va kovariant komponentalari.
7. Tenzorning kontravariant, kovariant va aralash komponentalari haqida tushunchalar.

Tayanch iboralar: Fiksirlangan nuqta, metrika, vektor, tenzor, vektorning uzunligi, kontravariant va kovariant bazis vektorlari, fundamental metrik tenzor, , indeksni tushirish va ko’tarish, tenzorning aralash komponentalari

Bundan oldingi ma’ruzada keltirilgan mulohazalar fazoning bitta ixtiyoriy, ammo fiksirlangan nuqtasiga oid edi. Bunday mulohazalarni butun fazoga yoyish uchun nuqtaning ixtiyoriyligidan tashqari qaralayotgan fazo uchun metrika (o’lchov) tushunchasini ham kiritish zarur bo’ladi. Ma’lumki fazoning metrikasi deganda odatda shu fazoda uzunlikni aniqlash usuli tushuniladi. Biror vektorning uzunligini aniqlash uchun uning o’zini-o’ziga skalyar ko’paytirish yetarli, ya’ni

$$|d\,\vec{r}|^2 = ds^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = d\zeta^i \vec{\mathit{э}}_i d\zeta^j \cdot \vec{\mathit{э}}_j = d\zeta^i d\zeta^j \vec{\mathit{э}}_i \vec{\mathit{э}}_j$$

Bu yerdagi $\vec{\mathit{э}}_i$ bazis vektorlarining skalyar ko’paytmasini g_{ij} lar orqali belgilaymiz, yani

$$g_{ij} = \vec{\mathit{э}}_i\,\vec{\mathit{э}}_j$$

U holda $d\vec{r}$ vektorning uzunligi uchun

$$|d\vec{r}|^2 = d\zeta^i d\zeta^j g_{ij} \tag{5.1}$$

formulaga ega bo’lamiz. Kiritilgan yangi g_{ij} kattaliklar yordamida ixtiyoriy $\vec{A}$ vektorning uzunligini quyidagicha yozish mumkin:

$$|\vec{A}|^2 = A^i A^j g_{ij}$$

Ushbu ifoda istalgan vektorning uzunligini uning komponentalari va bazis vektorlarining skalyar ko’paytmasi orqali ifodalashga imkon beradi.

Vektorning $|d\vec{r}|$ uzunligi koordinat sistemasini tanlashga nisbatan invariantdir. Ushbu faktni o’tgan ma’ruzada ham ta’kidlagan edik va bunday invariantlik ifodasi (2.21) dan iborat edi. Ana shu ifodaga asosan vektorning uzunligi

$$|d\vec{r}|^2 = g_{ij} d\zeta^i d\zeta^j = g'_{pq} d\eta^p d\eta^q = \vec{\mathit{э}}'_p \vec{\mathit{э}}'_q \cdot d\eta^p d\eta^q = a^i_p a^j_q \vec{\mathit{э}}_i\,\vec{\mathit{э}}_j d\eta^p d\eta^q = g_{ij} a^i_p a^j_q d\eta^p d\eta^q$$

ko’rinishni oladi. Bundan

$$g'_{pq} = g_{ij} a^i_p a^j_q \tag{5.2}$$

ya’ni kiritilgan g_{pq} - kattaliklar kovariant yo’l bilan almashtiriladilar. Ko’rinib turibdiki g_{ij} kattaliklar uchinchi tartibli matrisani tashkil qiladilar. Bu matrisaning determinanti noldan farqli bo’lishini talab qilamiz, ya’ni

$$\Delta = Det\left\| g_{ij} \right\| \neq 0$$

bo’lsin. U holda $\left\| g_{ij} \right\|$ ga teskari $\left\| g^{ij} \right\|$ matrisa mavjud bo’ladi va algebra kursidan malumki uning elementlari

$$g^{ij} = k^{ij} / \Delta \tag{5.3}$$

formuladan topiladi, bu yerda k^{ij} - $\left\| g_{ij} \right\|$ matrisaning to’ldiruvchi minorlari, g_{ij} kattaliklar (5.2) formulaga asosan kovariant yo’l bilan almashtiriladilar. U holda g^{ij} kattaliklar xuddi ikkinchi rang tenzorning T^{ij}komponentalari singari (2.24) formulaga ko’ra kontravariant yo’l bilan almashtiriladilar, ya’ni

$$g'^{ij} = b^i_p b^j_q g^{pq} \tag{5.4}$$

Hosil qilingan g^{ij} kattaliklari va $\vec{э}_i$ bazis vektorlari yordamida

$$g = g^{ij}\, \vec{э}_i\, \vec{э}_j$$

ikkinchi rang tenzorga ega bo’lamiz, hamda birorζ^ikoordinatalari sistemasida

$$\vec{э}^{\,i} = g^{ij} \vec{э}_j \tag{5.5}$$

obyektlarni kiritamiz. Bu yerda masalan ixtiyoriy $g^{1i}\vec{э}_i$ vektor quyidagiga teng

$$g^{1j}\vec{э}_j = g^{11}\vec{э}_1 + g^{12}\vec{э}_2 + g^{13}\vec{э}_3 = \vec{э}^{\,1}$$

ya’ni g^{1j}larga ko’paytirilgan uchta $\vec{э}_1, \vec{э}_2$ va $\vec{э}_3$ bazis vektorlarining yig’indisidan iborat.

Shunga o’xshash boshqa η^1, η^2, η^3 koordinatalari sistemasida ham

$$\vec{э}'^{p} = g'^{pq}\vec{э}'_k$$

kabi ifodani qabul qilish mumkin. Oxirgi (5.4), (5.5) va (2.19) formulalarga asosan $\vec{э}_i$ bazis vektorlarini almashtirish formulalarini keltirib chiqaramiz

$$\vec{э}'^{p} = g'^{pq}\vec{э}'_q = b^p_i b^q_j g^{ij} \cdot a^x_q \cdot \vec{э}_k = b^p_i \left(b^q_j \cdot a^k_q\right) g^{ij} \cdot \vec{э}_k =$$
$$= b^p_i \cdot g^{ij}\, \vec{э}_j = b^p_i \vec{э}^{\,i}$$

chunki

$$b^q_j \cdot a^k_q = \delta^k_j,$$

demak

$$\vec{э}'^{p} = b^p_i \vec{э}^{\,i} \tag{5.6}$$

Ko’rinib turibdiki $\vec{э}^{\,i}$ bazis vektorlari kontravariant yo’l bilan almashtiriladilar va shuning uchun ham *kontravariant bazis vektorlari* deb ataladilar. Mos ravishda $\vec{э}_i$ bazis vektorlari *kovariant bazis vektorlari* deb yuritiladi.

Yuqorida aytilganlardan ma’lumki $\left\| g^{ij} \right\|$ matrisa $\left\| g_{ij} \right\|$ matrisaga teskari matrisadir. Shuni hisobga olgan holda (5.5) ifodani $\vec{э}_i$ larga nisbatan yechib

$$\vec{э}_j = g_{ij}\vec{э}^{\,i} \qquad (5.7)$$

ifodaga ega bo’lamiz. Xuddi shunga o’xshash, ixtiyoriy boshqa η^1, η^2, η^3 koordinatalari sisietmasida ham

$$\vec{э}^{\,'}_j = g^{'}_{ij}\vec{э}^{\,'i}$$

formula o’rinli bo’ladi va bu yerdagi $g^{'}_{ij}$ kattaliklar (5.2) formula yordamida almashtiriladilar.

Ko’rinib turibdiki $g_{ij}\vec{э}^{\,i}\,\vec{э}^{\,j}$ ifoda koordinat sistemasiga bog’liq bo’lmagan invariant obyekt bo’ladi, chunki bu yerdagi $\vec{э}^{\,i}\,\vec{э}^{\,j}$ ko’paytma $\vec{э}^{\,i}$ kontravariant bazis vektorlarining diad ko’paytmalari va shuning uchun ham (5.6) formulaga asosan

$$\vec{э}^{\,'i}\vec{э}^{\,'j} = b^i_k b^j_l \cdot \vec{э}^{\,k}\vec{э}^{\,l} \qquad (5.8)$$

kontravariant yo’l bilan almashtiriladilar. Bundan tashqari

$$g = g^{ij}\vec{э}_i\vec{э}_j = g^{ij}g_{ip}\vec{э}^{\,p}g_{jq}\vec{э}^{\,q} = g_{ip}g_{jq}g^{ij}\vec{э}^{\,p}\vec{э}^{\,q} = g_{pq}\vec{э}^{\,p}\vec{э}^{\,q}$$

bo’ladi, ya’ni qaralayotgan obyekt ikkinchi rang tenzorni tashkil etadi.

$$g = g_{pq}\vec{э}^{\,p}\vec{э}^{\,q}$$

Shunday qilib,

$$g = g_{ij}\vec{э}^{\,i}\vec{э}^{\,j} = g^{pq}\vec{э}_p\vec{э}_q \qquad (5.9)$$

Hosil qilingan g- tenzor fundamental metrik tenzor deb ataladi, g_{ij} kattaliklar- fundamental metrik tenzorning $\vec{э}^{\,i}$ kontravariant bazisdagi kovariant komponentalari, g^{ij} kattaliklar esa fundamental metrik tenzorning $\vec{э}_i$ kovariant bazisdagi kontravariant komponentalari deyiladi.

Joyi kelganda biz o’quvchini Yevklid fazosining chuqurroq ta’rifi bilan tanishtirib o’tishni lozim deb hisoblaymiz. Yuqoridagi mulohazalarni fazoning fiksirlangan nuqtasi uchun olib bordik. *Bu holda (5.1) kvadratik shaklning koeffisiyentlari o’zgarmas bo’ladi.* Algebra kursidan ma’lumki, *har qanday o’zgarmas koeffisiyentli kvadratik shaklni kanonik ko’rinishga keltirish mumkin, ya’ni fazoning har bir tanlangan nuqtasi uchun* shunday ζ^1, ζ^2, ζ^3 koordinatalarni topish mumkinki, bunda (5.1) kvadratik shakl

$$ds^2 = \left(d\zeta^1\right)^2 + \left(d\zeta^2\right)^2 + \left(d\zeta^3\right)^2 \qquad (5.10)$$

ko’rinishga, fundamental metrik tenzorning matrisasi esa quyidagi ko’rinishga keltiriladi

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Umuman olganda bunday ishni fazoning har bir nuqtasi uchun bajarib bo’lmaydi, ya’ni (5.10) ko’rinishga keltiradigan ζ^1, ζ^2, ζ^3lar topilmasligi mumkin. Lekin agar, *biror fazoning hamma nuqtalari uchun shunday koordinat sistemasi mavjud bo’lsa bu fazo Yevklid fazosi, aks holda Yevklidmas fazo* deyiladi.

Demak, YYevklid fazosi uchun fundamental metrik tenzorning matrisasi elementlari 1 lardan iborat bo’lgan diagonal matrisadir. Bundan tashqari $\|g_{ij}\|$ *ва* $\|g^{kp}\|$ matrisalar o’zaro teskari matrisalardir.

Aytilganlarni hisobga olgan holda $\vec{э}^{\,i}\vec{э}_p$ aralash diad ko’paytmalarning ba’zi xususiyatlari bilan tanishamiz. Yuqorida keltirilgan (5.5) formulaga asosan

$$\vec{\mathfrak{Э}}^{j}\vec{\mathfrak{Э}}_{p}=g^{ij}\vec{\mathfrak{Э}}_{i}\vec{\mathfrak{Э}}_{p}=g^{ij}g_{ip}=\delta_{p}^{j}=\begin{cases}1, & p=j;\\ 0, & p\neq j.\end{cases} \qquad (5.11)$$

bu yerdan

$$\vec{\mathfrak{Э}}^{1}\cdot\vec{\mathfrak{Э}}_{1}=1,\ \vec{\mathfrak{Э}}^{1}\cdot\vec{\mathfrak{Э}}_{2}=0,\ \vec{\mathfrak{Э}}^{1}\cdot\vec{\mathfrak{Э}}_{3}=0,\ \vec{\mathfrak{Э}}^{2}\cdot\vec{\mathfrak{Э}}_{1}=0,\ \vec{\mathfrak{Э}}^{2}\cdot\vec{\mathfrak{Э}}_{2}=1,\quad va\quad h.k.$$

Bu tengliklar $\vec{\mathfrak{Э}}^{1}$ vektorining $\vec{\mathfrak{Э}}_{2}$ va $\vec{\mathfrak{Э}}_{3}$ vektorlari tekisligiga, $\vec{\mathfrak{Э}}_{2}$ vektorning $\vec{\mathfrak{Э}}^{1}$ va $\vec{\mathfrak{Э}}^{3}$ vektorlari tekisligiga va h.k. ortogonalligini ko'rsatadi. Ana shu faktlar asosida quyidagi munosabatlarni isbot qilish qiyin emas:

a) kontravariant bazis vektorlari uchun

$$\vec{\mathfrak{Э}}^{1}=\frac{\vec{\mathfrak{Э}}_{2}\times\vec{\mathfrak{Э}}_{3}}{\vec{\mathfrak{Э}}_{1}\left(\vec{\mathfrak{Э}}_{2}\times\vec{\mathfrak{Э}}_{3}\right)};\ \vec{\mathfrak{Э}}^{2}=\frac{\vec{\mathfrak{Э}}_{3}\times\vec{\mathfrak{Э}}_{1}}{\vec{\mathfrak{Э}}_{1}\left(\vec{\mathfrak{Э}}_{2}\times\vec{\mathfrak{Э}}_{3}\right)};\ \vec{\mathfrak{Э}}^{3}=\frac{\vec{\mathfrak{Э}}_{1}\times\vec{\mathfrak{Э}}_{2}}{\vec{\mathfrak{Э}}_{1}\left(\vec{\mathfrak{Э}}_{2}\times\vec{\mathfrak{Э}}_{3}\right)};$$

b) kovariant bazis vektorlari uchun

$$\vec{\mathfrak{Э}}_{1}=\frac{\vec{\mathfrak{Э}}^{2}\times\vec{\mathfrak{Э}}^{3}}{\vec{\mathfrak{Э}}^{1}\left(\vec{\mathfrak{Э}}^{2}\times\vec{\mathfrak{Э}}^{3}\right)};\ \vec{\mathfrak{Э}}_{2}=\frac{\vec{\mathfrak{Э}}^{3}\times\vec{\mathfrak{Э}}^{1}}{\vec{\mathfrak{Э}}^{1}\left(\vec{\mathfrak{Э}}^{2}\times\vec{\mathfrak{Э}}^{3}\right)};\ \vec{\mathfrak{Э}}_{3}=\frac{\vec{\mathfrak{Э}}^{1}\times\vec{\mathfrak{Э}}^{2}}{\vec{\mathfrak{Э}}^{1}\left(\vec{\mathfrak{Э}}^{2}\times\vec{\mathfrak{Э}}^{3}\right)};$$

bu yerda "×" belgisi bilan oddiy vektor ko'paytma belgilangan.

Fundamental metrik tenzordagi kabi bundan oldingi bo'limlarda kiritilgan vektor va tenzorning ta'riflarida ishlatilgan A^i *va* T^{ij} *komponentalar vektorning va tenzorning kovariant bazisdagi kontravariant komponentalari deyiladi.*

Endi vektor va tenzorning kovariant komponentalarini kiritish masalasi bilan tanishamiz. Buning uchun (5.7) formuladan foydalanamiz. Ushbu formulaga asosan ixtiyoriy vektorni

$$\vec{A}=A^{i}\vec{\mathfrak{Э}}_{i}=A^{i}g_{ij}\vec{\mathfrak{Э}}^{j}=A_{j}\vec{\mathfrak{Э}}^{j}$$

kabi yozish mumkin. Bu yerda

$$A_{j}=A^{i}g_{ij} \qquad (5.12)$$

kattaliklar $\vec{A}$ *vektorining* $\vec{\mathfrak{Э}}^{j}$ *kontravariant bazisdagi kovariant komponentalari deyiladi*. Demak, bu kattaliklar kovariant yo'l bilan almashtiriladilar.

Umumiy holda $A^i\neq A_i$ .Oxirgi (5.12) formuladan ko'rinadiki metrik tenzorning g_{ij}komponentalari yordamida vektorning A^ikontravariant komponentalarining *indeksini pastga tushirish* mumkin. Xuddi shunday g^{ij}komponentalar yordamida $A_j$larning *indeksini yuqoriga ko'tarish* mumkin ekan. Vektor uchun qilingan mulohazalarni tenzor uchun ham qo'llash mumkin, ya'ni

$$T=T^{ijkl}\vec{\mathfrak{Э}}_{i}\vec{\mathfrak{Э}}_{j}\vec{\mathfrak{Э}}_{k}\vec{\mathfrak{Э}}_{l}=T^{ijkl}g_{ip}\vec{\mathfrak{Э}}^{p}g_{jq}\vec{\mathfrak{Э}}^{q}g_{km}\vec{\mathfrak{Э}}^{m}g_{\ln}\vec{\mathfrak{Э}}^{n}=T_{pqmn}g_{ip}\vec{\mathfrak{Э}}^{p}\vec{\mathfrak{Э}}^{q}\vec{\mathfrak{Э}}^{m}\vec{\mathfrak{Э}}^{n}$$

bu yerda

$$T_{pqmn}=T^{ijkl}g_{ip}g_{jq}g_{km}g_{\ln} \qquad (5.13)$$

kattaliklar to'rtinchi rang T tenzorning $\vec{\mathfrak{Э}}^{i}$ kontravariant bazisdagi kovariant komponentalari deyiladi. Qaralayotgan T tenzor uchun (5.7) formulani qisman qo'llab

$$T=T^{ijkl}\vec{\mathfrak{Э}}_{i}\vec{\mathfrak{Э}}_{j}\vec{\mathfrak{Э}}_{k}\vec{\mathfrak{Э}}_{l}=T^{ijkl}\vec{\mathfrak{Э}}_{i}\vec{\mathfrak{Э}}_{j}g_{kp}\vec{\mathfrak{Э}}^{p}\cdot g_{lq}\vec{\mathfrak{Э}}^{q}=T_{pq}^{ij}\vec{\mathfrak{Э}}_{i}\vec{\mathfrak{Э}}_{j}\vec{\mathfrak{Э}}^{p}\vec{\mathfrak{Э}}^{q}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu yerda

$$T_{pq}^{ij}=T^{ij\cdot\cdot}_{\cdot\cdot pq}=T^{ijkl}g_{kp}g_{lq} \qquad (5.14)$$

kattaliklar tenzorining aralash komponetalari deyiladi. Yuqoridagi (5.11) formulalardan fundamental metrik tenzorning aralash komponentalari g_i^j lar ixtiyoriy koordinat sistemasida birlik matrisani tashkil qilishini ko'rish qiyin emas

$$\left\| g_i^j \right\| = \begin{Vmatrix} g_1^1 & g_2^1 & g_3^1 \\ g_1^2 & g_2^2 & g_3^2 \\ g_1^2 & g_2^3 & g_3^3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \left\| \delta_i^j \right\|. \qquad (5.15)$$

Adabiyotlar

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
2. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
3. Механика сплошных сред в задачах. В двух томах. М.: «Московский лицей», 1996. Под ред. М.Э. Эглит.

5-Ma'ruza.

TUTASH MUHIT HARAKATINI O'RGANISHDA LAGRANJ VA EYLER NUQTAI NAZARLARI

Reja

1. Tutash muhit harakatini Langranj nuqtai nazarida o'rganish;
2. Tutash muhit harakatini o'rganishda Eyler nuqtai nazari;
3. Lagranj o'zgaruvchilaridan Eyler o'zgaruvchilariga o'tish va aksincha Eyler o'zgaruvchilaridan Lagranj o'zgaruvchilariga o'tish masalasi.

Tayanch iboralar: uzliksiz harakat, Lagranj o'zgaruvchilari, Eyler o'zgaruvchilari, inersial kordinatalar sistemasi, harakat qonuni, kontinium nuqta, tezlik, tezlanish, harakat.

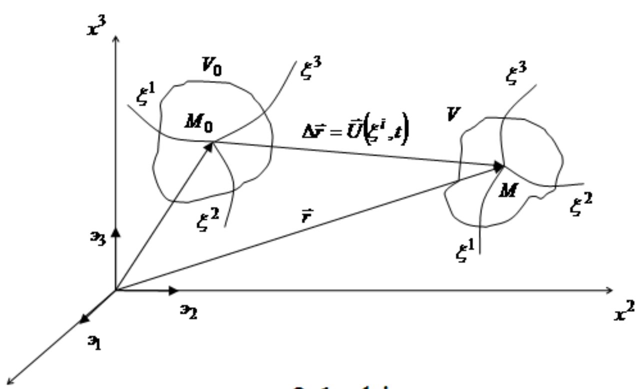
1. Tutash muhit harakatini Langranj nuqtai nazarida o'rganish

Har qanday harakat singari tutash muhitning harakati ham biror x^1, x^2, x^3koordinat sistemasiga nisbatan o'rganiladi. Odatda, kuzatuvchi uchun bu koordinat sistemasi sanoq sistemasi bo'ladi; sanoq sistemasi kuzatuvchi uchun ixtiyoriy ravishda, likin imkoni boricha qulay qilib tanlanadi.

Amalda bunday sistema yer, quyosh, yulduzlar, samolyot va hokazolar bilan bog'liq bo'ladi.

Nyuton mexanikasida (Yevklid fazosida o'rinli bo'lgan mexanika) bir-biriga nisbatan o'zgarmas (vaqt bo'yicha) tezlik bilan ilgarilanma harakat qiluvchi inersial koordinat sistemalari fizik nuqtai nazardan muhim. Odatda Nyuton fizikasining hamma fizik qonunlari inersial sanoq sistemalarida keltiriladi va ular inersial koordinat sistemasining tanlanishiga bog'liq emas. Xuddi ana shu narsa mashhur Galiley- Nyuton prinsipining mohiyatini tashkil qiladi. Amaliyotda inersial koordinat sistemasi Dekart koordinatalar sistemasini tanlash mumkin.

Faraz qilaylik, biror hajmga ega bo'lgan tutash muhit bazis vektorlari $\vec{э}_i$ bo'lgan x^i koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin (2.1.-chizma). Agar x^i sifatida Dekart koordinatalari sistemasi tanlansa $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ va $\vec{э}_1 = \vec{i}$, $\vec{э}_2 = \vec{j}$, $\vec{э}_3 = \vec{k}$ bo'ladi. Hajmi V_0bo'lgan muhitning biror M_0 nuqtasining dastlabki $t = t_0$ paytdagi koordinatalari ξ^i lar bo'lsin. U holda, bu nuqtaning x^i sanoq sistemasiga nisbatan radius- vektori $\vec{r}_0$ dastlabki ξ^i koordinatalarning funksiyasi bo'ladi. Muhitning harakati natijasida biror $t > t_0$ paytda M nuqta variantni oladi. Bunda uning radius- vektori $\bar{r}$ boshlang'ich ξ^i koordinatalarning va t vaqtning funksiyasi bo'ladi



2.1-chizma

$$\vec{r} = \vec{r}(\xi^i, t). \tag{2.1}$$

Agar bu ifoda koordinatalar orqali yozilsa,

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) \tag{2.2}$$

ko'rinishni oladi va M nuqtaning harakat qonunidan iborat bo'ladi. Bu yerdagi $x^i(\xi^i, t)$ funksiya uzluksiz va ξ^1 hamda t lar bo'yicha keragicha differensiallanuvchi deb hisoblanadi.

Muhitning harakati natijasida uning hajmi biror V qiymatga erishadi. Bunda ξ^i koordinatalar ham o'zgaradi. Agar muhitni u bilan bog'langan, uning harakatini kuzatib boruvchi yoki unga yuldosh ξ^i koordinatalar sistemasiga nisbatan qaralsa bu sistema ham o'zgaruvchi bo'ladi. Bu sistema muhit bilan birgalikda cho'ziladi, siqiladi, egiladi va h.k.

Ma'lumki

$$Det\left\|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right\| = 0,$$

ya'ni (2.2) tengliklarni ξ^i larga nisbatan yechib, ularni bir qiymatli uzluksiz funksiyalar ko'rinishida tasvirlash mumkin

$$\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t) \tag{2.3}$$

Harakati qaralayotgan alohida nuqtaning $(t - t_0)$ vaqt davomidagi ko'chishini $\Delta\vec{r} = \vec{u}\left(\xi^i, t\right)$ bilan belgilaymiz. U holda fiksirlangan ξ^i koordinatalar uchun alohida nuqtaning tezligi $\vec{r}$ – radius-vektordan vaqt bo'yicha olingan hususiy hosilaga teng bo'ladi, ya'ni:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}. \tag{2.4}$$

Bu yerdan ko'rinadiki, tezlik sanoq sistemasiga nisbatan hisoblanadi. Yo'ldosh koordinat sistemaga nisbatan esa muhit tinch holatda bo'ladi va shuning uchun alohida nuqtaning yo'ldosh sistemasiga nisbatan tezligi 0 ga teng boladi.

Ma'lumki $\vec{r} = x^i \vec{\mathit{э}}_i$, u holda

$$\vec{v} = \frac{\partial x^i}{\partial t}\vec{\mathit{э}}_i = v^i \vec{\mathit{э}}_i \tag{2.5}$$

bu yerdan

$$v^1 = \left(\frac{\partial x^1}{\partial t}\right)_{\xi^i},\ v^2 = \left(\frac{\partial x^2}{\partial t}\right)_{\xi^i}, \qquad v^3 = \left(\frac{\partial x^3}{\partial t}\right)_{\xi^i} \tag{2.5^1}$$

Yuqoridagi (2.5) tenglikni vaqt bo'yicha differensiallab tezlanishning ifodasini topamiz

$$\vec{w} = \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)_{\xi^i} = w^i \vec{\mathit{э}}_i\,. \tag{2.6}$$

Agar sanoq sistemasi sifatida Dekart koordinatalari sistemasini qabul qilsak

$$w^1 = \frac{\partial v^i}{\partial t} \Rightarrow \ w^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} \tag{2.7}$$

Kontinuum nuqtasini alohidalashtiruvchi ξ^1, ξ^2, ξ^3 koordinatalar va t vaqt Lagranj o'zgaruvchilari deyiladi. Uzluksiz muhit nuqtalarining harakatini alohida – alohida o'zgarish va zaruriy parametrlarni (tezlik, tezlanish, zichlik, temperatura, energiya, kuchlanish, deformatisiya va h.k.) ξ^iva t larning uzluksiz funksiyalari deb qarash tutash muhitning harakatini o'rganishga Lagranj nuqtai nazarini tashkil etadi.

2. Tutash muhit harakatini o'rganishda Eyler nuqtai nazari

Faraz qilaylik bizni muhit har bir zarrachasining harakati emas balki vaqtning har hil daqiqalarida fazoning muhit zarrachasi o'tayotgan geometrik nuqtasida nimalar sodir bo'layotganligi qiziqtirsin. Vaqt o'tishi bilan ana shu geometrik nuqtaga muhitning har xil zarrachalari kelib ketadilar. Boshqacha aytganda muhit qaralayotgan nuqtadan "oqadi". Endi tutash muhitning har bir zarrachasi harakatini o'rganish o'rniga (Lagranj nuqtai nazari) bu zarrachalar fazoning ma'lum nuqtasidan qanday parametrlarga (tezlik, tezlanish, energiya va h.k.) ega holda o’tishini o’rganish mumkin. Bu esa tutash muhit harakatini o’rganishga Eyler nuqtai nazarini tashkil qiladi.

Fazoning geometrik koordinatalari x^i va t vaqt Eyler koordinatalari deyiladi. Eyler nuqtai nazari buyicha tezlik, tezlanish, temperatura va boshqa parametrlar x^i koordinatalar va t vaqtning funksiyalari sifatida berilgan bo’lsalar harakat aniq deb hisoblanadi. Vaqt t ning har hil va x^i koordinatalarning fiksirlangan qiymatlarida

$$\vec{v} = \vec{v}(x^i, t), \quad \vec{w} = \vec{w}(x^i, t), \quad T = T(x^i, t) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Funksiyalar vaqt o’tishi bilan fazoning qaralayotgan nuqtasidan o’tayotgan zarrachalarning tezligi, tezlanishi, harorati va h.k. o’zgarishini aniqlaydilar.

Agar t vaqt fiksirlangan bo’lib x^i koordinatalar o’zgarsalar yuqoridagi funksiyalar vaqtning berilgan t daqiqasi uchun harakat parametrining fazodagi taqsimlanishini aniqlaydilar.

Nihoyat, agar x^i koordinatalar ham t vaqt ham o’zgarsalar bu funksiyalar vaqtning har hil daqiqasi uchun harakat parametrlarining fazoda taqsimlanishini, ya’ni tutash muhitning harakat parametrlarini ifodalaydi.

3. Langranj o’zgaruvchilaridan Eyler o’zgaruvchilariga o’tish va aksincha Eyler o’zgaruvchilaridan Lagranj o’zgaruvchilariga o’tish masalasi

Endi Lagranj o’zgaruvchilaridan Eyler o’zgaruvchilarga va aksincha, Eyler o’zgaruvchilaridan Lagranj o’zgaruvchilarga o’tish masalasini qaraymiz. Faraz qilaylik muhitning harakati Lagranj o’zgaruvchilarida berilgan bo’lsin, ya’ni harakat qonuni (2.2) ko’rinishda berilgan bo’lsin. Bu sistemani ξ^i larga nisbatan yechib (2.3) ko’rinishdagi harakat qonuniga ega bo’lamiz. Bu esa Eyler o’zgaruvchilaridir. Demak, Lagranj koordinatalaridan Eyler koordinatalariga o’tish uchun (2.2) sistemani ξ^i larga nisbatan yechish kifoya.

Agar tezlik, tezlanish harorat va boshqa parametrlar Lagranj koordinatalarida berilgan bo’lsalar, ya’ni

$$\vec{v} = v(\xi^i, t), \quad \vec{w} = \vec{w}\xi^i, t), \quad T = T(\xi^i, t)$$

ko’rinishda bo’lsa, u holda ξ^i larning o’rniga (2.3) ifodalarni qo’yib bu parametrlarni Eyler koordinatalariga o’tkazish qiyin emas

$$\vec{v} = \vec{v}(\xi^i, (x^j, t)t) = \vec{v}(x^j, t);$$
$$\vec{w} = \vec{w}(x^j, t); \qquad T = T(x^j, t).$$

Aksincha, faraz qilaylik fazoda tezliklar taqsimlanishi Eyler koordinatalarida berilgan bo’lsin, soddalik uchun bu parametrlarni Dekart koordinatalari sistemasida qaraymiz

$$V_x = V_x(x, y, z, t), \quad V_y = V_y(x, y, z, t), \quad V_z = V_z(x, y, z, t).$$

Tezlikning V_x, V_y, V_z komponentalari (1.5) formulalarga ko’ra, alohida nuqtaning ξ^1, ξ^2 , ξ^3koordinatalarning o’zgarmas qiymatlari uchun mos ravishda x,y,z koordinatalardan vaqt bo’yicha olingan hosilalaridir. U holda

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \qquad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \qquad \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t)$$

ifodalarni x, y va z larga nisbatan yechib, ularni vaqtning funksiyasi sifatida aniqlaymiz. Lekin, bu yerda uchta c_1, c_2, c_3 integrallash o’zgarmaslari paydo bo’ladiki ular vaqtning biror t_0 payti uchun x, y, z larning konkret qiymatlari bilan aniqlanadilar, ya'ni biror nuqtani alohidalashtiradilar. Bu esa Lagranj koordinatalari degan so'zdir.

Demak, tezliklar maydoni berilganda Eyler koordinatalaridan Lagranj koordinatalarga o'tish oddiy differensial tenglamalar sistemasini integrallash bilan bog'liq.

Yuqorida bayon qilinganlardan ko'rinib to'ribdiki tutash muhitning harakatini o'rganishda Lagranj va Eyler nuqtai nazarlari mexanik ma'noda bir-biriga ekvivalentdir.

Mavzuga oid namunaviy masalalar

1-masala. Tutash muhitning harakati Lagranj ko'rinishida quyidagicha berilgan:

(a) $x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2 + A\xi_3, \quad x_3 = \xi_3 + A\xi_2.$

(b) $x_1 = \xi_1 + \xi_3(e^2 - 1), \quad x_2 = \xi_2 + \xi_3(e^2 - e^{-2}), \quad x_3 = e^2\xi_3$

Harakatni Eyler o'zgaruvchilari orqali ifodalang.

Yechish: Ma'lumki Lagranj va Eyler o'zgaruvchilari orasida bir qiymatli moslik bajarilishi uchun

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \neq 0$$

shart bajarilishi zarur va etarli,

(a) J o'tish yakobianini hisoblaymiz

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & A & 1 \end{vmatrix} = 1 - A^2 \neq 0,$$

bundan $A \neq \pm 1$ bo'lganda o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Eyler o'zgaruvchilarida harakat quyidagicha aniqlanadi

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1, \\ x_2 = \xi_2 + A\xi_3, \\ x_3 = \xi_3 + A\xi_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = x_1, \\ x_2 = \xi_2 + A\xi_3, \\ \xi_3 = x_3 - A\xi_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = x_1, \\ x_2 = \xi_2 + A\xi_3 - A^2\xi_2, \\ \xi_3 = x_3 - A\xi_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = x_1, \\ \xi_2 = \dfrac{1}{A^2 - 1}(Ax_3 - x_2), \\ \xi_3 = x_3 - \dfrac{A}{A^2 - 1}(Ax_3 - x_2) \end{cases}$$

(b) Bu holda ham $J \neq 0$ o'tish yakobiani noldan farqli bo'ladi. Eyler o'zgaruvchilarida harakat quyidagicha aniqlanadi

6- Ma’ruza.

KOVARIANT HOSILA. RIMAN-KRISTOFFEL SIMVOLLARI

Reja

1. Tenzorlarni qo’shish va skalyarga ko’paytirish.
2. Simmetriklash va antisimmetriklash.
3. Tenzor indekslarini ko’tarish va tushirish, rangini pasaytirish.
4. Tenzorning skalyar invariantlari. Bosh o’qlari va bosh komponentalari.
5. Vektorning kovariant hosilasi.
6. Kovariant hosilalarning xossalari.
7. Kristoffel simvollarini hisoblash.
8. Riman – Kristoffel tenzori va uning xossalari

Tayanch iboralar: tenzor, tenzorning rangi, skalyar, vektor, simmetriklash, antisimmetriklash, invariant, bosh o’q, bosh komponenta, kontravariant komponentadan kovariant hosila.

1. Tenzorlarni qo’shish va skalyarga ko’paytirish.

Tenzorlarni qo’shish amali faqat bir xil tuzilishga ega hamda ranglari teng bo’lgan tenzorlar ustidagina o’rinlidir. Masalan,

$$A = A^{ijk}\vec{э}_i\vec{э}_j\vec{э}_k \quad va \quad B = B^{ijk}\vec{э}_i\vec{э}_j\vec{э}_k$$

uchinchi rang tenzorlarni qo’shsak

$$C = A + B = \left(A^{ijk} + B^{ijk}\right)\vec{э}_i\vec{э}_j\vec{э}_k$$

yana uchinchi rang tenzor hosil qilamiz. Ayirsak ham huddi shunday.

Quyidagi beshta tenzorni qaraylik

$$T_1 = T_j^{\,i}\vec{э}_i\vec{э}^{\,j}, \quad T_2 = T_{pq}\vec{э}^{\,p}\vec{э}^{\,q}, \quad T_3 = T_{mn}\vec{э}^{\,m}\vec{э}^{\,n},$$

$$T_4 = T_l^{\,k}\vec{э}_k\vec{э}^{\,l}, \quad T_5 = T_{l\cdot}^{\cdot k}\vec{э}_k\vec{э}^{\,l}.$$

Bu tenzorlardan faqat T_1+T_4 va T_2+T_3 yig’indilarnigina tuzish mumkin T_1 va T_2; T_3 va T_4 larning yig’indilarini tuzib bo’lmaydi, chunki ushbu tenzorlarning tuzilishlari har xil. Xuddi shu sababga ko’ra T_5 tenzorini qolgan tenzorlarning hech biri bilan qo’shib bo’lmaydi.

Tenzorlarni qo’shish amalini ketma-ket qo’llash natijasida tenzorni songa (skalyarga) ko’paytirish amalini asoslash mumkin. Demak, agar A-tenzor bo’lsa, ixtiyoriy $k \geq 0$ soni uchun

$$\boldsymbol{C = k\,A}$$

ob’yekt ham tenzordir.

2. Tenzorlarni simmetriklash va antisimmetriklash

<u>*Ta’rif 1*</u>. $T = T^{ijkl}\vec{э}_i\vec{э}_j\vec{э}_k\vec{э}_l$ tenzor *i* va *j* indekslari bo’yicha *simmetrik* deyiladi, agar

$$T^{ijkl} = T^{jikl}$$

bo’lsa.

<u>*Ta’rif 2*</u>.$T = T^{ijkl}\vec{э}_i\vec{э}_j\vec{э}_k\vec{э}_l$ tenzor *i* va *j* indekslari bo’yicha *antisimmetrik* deyiladi, agar

$$T^{ijkl} = -T^{jikl}$$

bo’lsa.

Yuqorida keltirilgan qo'shish qoidasidan foydalanib ixtiyoriy $T = T^{ij}\vec{\text{э}}_i\vec{\text{э}}_j$ ikkinchi rang tenzorga doimo simmetrik

$$T_0 = \frac{1}{2}\left(T^{ij} + T^{ji}\right)\vec{\text{э}}_i\vec{\text{э}}_j \tag{6.1}$$

va antisimmetrik

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(T^{ij} - T^{ji}\right)\vec{\text{э}}_i\vec{\text{э}}_j \tag{6.2}$$

tenzorlarni mos qo'yish mumkin. Ushbu (6.1) va (6.2) amallarga mos ravishda tenzorni *simmetriklash* va *antisimmetriklash* deyiladi.

Ko'rinib turibdiki, agar T simmetrik tenzor bo'lsa $T_0 = T$ va $T_1 = 0$, va aksincha agar T antisimmetrik tenzor bo'lsa, $T_0 = 0$ va $T_1 = T$ bo'ladi. Yuqoridagi (6.1) va (6.2) formulalardan

$$T^{ij} = \frac{1}{2}\left(T^{ij} + T^{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(T^{ij} - T^{ji}\right) \tag{6.3}$$

ya'ni

$$T = T_0 + T_1.$$

Demak, (6.3) formuladan ko'rinadiki tenzorning T^{ij}matrisasini simmetrik va antisimmetrik matrisalar yig'indisi kabi tasvirlash mumkin.

Eslatma. Ranglari va tuzilishlaridan qat'iy nazar ixtiyoriy tenzorlarni ularning berilish tartibida ko'paytirish mumkin. Masalan, $A = A^i\vec{\text{э}}_i$ vektor va $T = T^{k\cdot}_{\cdot j}\vec{\text{э}}_k\vec{\text{э}}^j$ tenzorlarni quyidagicha ko'paytirish mumkin

$$B = A^i T^{k\cdot}_{\cdot j}\vec{\text{э}}_i\vec{\text{э}}_k\vec{\text{э}}^j; \quad C = T^{k\cdot}_{\cdot j}A^i\vec{\text{э}}_k\vec{\text{э}}^j\vec{\text{э}}_i,$$

lekin hosil qilingan B va C ob'yektlar uchinchi rang tenzorlari bo'lmaydilar. Shuning uchun bunday ko'paytalarga *tenzorlarning noaniq ko'paytmalari* deyiladi.

3. Tenzorning indekslarini ko'tarish va tushirish. Tenzorning rangini pasaytirish

O'tgan 3-ma'ruzadagi (3.14) formulaga asosan g fundamental metrik tenzor yordamida tenzor komponentalarining yuqori indekslarini tushirish mumkin degan xulosaga kelamiz. Xuddi shunday tenzor komponentalarining pastki indekslarini ko'tarish ham mumkin. Masalan,

$$T = T_{ijk}\vec{\text{э}}^i\vec{\text{э}}^j\vec{\text{э}}^k = T_{ijk}g^{im}\vec{\text{э}}_m g^{jn}\vec{\text{э}}_n g^{kp}\vec{\text{э}}_p = T_{ijk}g^{im}g^{jn}g^{kp}\vec{\text{э}}_m\vec{\text{э}}_n\vec{\text{э}}_p =$$

$$= T^{mnp}\vec{\text{э}}_m\vec{\text{э}}_n\vec{\text{э}}_p = T^{mnp}\vec{\text{э}}_m\vec{\text{э}}_n\vec{\text{э}}^q g_{pq} = T^{mnp}g_{pq}\cdot\vec{\text{э}}_m\vec{\text{э}}_n\vec{\text{э}}^q = T^{mn\cdot}_{\cdot\cdot q}\vec{\text{э}}_m\vec{\text{э}}_n\vec{\text{э}}^q$$

Bu yerda T tenzor komponentalarining indekslari ko'tarildi va yana qisman tushirildi. Fundamental metrik tenzor yordamida bajarilgan yuqoridagi amal *indekslarni ko'tarish va tushirish* amali deyiladi.

Tenzorlarning ranglarini pasaytirish ham mumkin. Lekin bu amal faqat aralash komponentali tenzorlar uchungina o'rinlidir. Ushbu amal bilan xususiy misolda tanishamiz. Faraz qilaylik aralash komponentali uchinchi rang tenzor $T^{\cdot jk}_{i\cdot\cdot}\vec{\text{э}}^i\vec{\text{э}}_j\vec{\text{э}}_k$ berilgan bo'lsin. Bu tenzorning hamma komponentalari ichidan faqat $i = j$ bo'lganlarini tanlab olib, ularning yig'indisini qaraymiz:

$$T^{\cdot ik}_{i\cdot\cdot} = T^{\cdot 1k}_{1\cdot\cdot} + T^{\cdot 2k}_{2\cdot\cdot} + T^{\cdot 3k}_{3\cdot\cdot}$$

Ko'rinib turibdiki bu yig'indi faqat k indeksgagina bog'liq, chunki i -«gung» indeksdir. $T_{i\,\cdot\,\cdot}^{\,\cdot\,i\,k}$ yig'indi $T_{i\,\cdot\,\cdot}^{\,\cdot\,i\,k}$ komponentalar ustida *i* va *j* indekslar bo'yicha tenzorning rangini pasaytirish amali natijasidir. Bunday amalni bajarish natijasida tenzorning rangi birlikka kamayadi. Demak,

$$T_i = T_{i\,\cdot\cdot}^{\,\cdot ik} \vec{э}_k$$

tenzorining rangi birga teng. Agar tenzor o'zining faqat konrtavariant yoki faqat kovariant komponentalari bilan berilgan bo'lsa uning rangini pasaytirish g fundamemtal metrik tenzor yordamida bajariladi:

$$T = T^{ij} \vec{э}_i \cdot \vec{э}_j = T^{ij} g_{ik} \vec{э}^k \cdot \vec{э}_j = T_{k\cdot}^{\cdot j} \vec{э}^k \cdot \vec{э}_j$$

demak,

$$T^{ij} g_{ik} = T_{k\cdot}^{\cdot j}$$

ya'ni bundan keyin tenzorning rangini pasaytirish uchun uning komponentasini avvalo fundamental metrik tenzor yordamida aralash holga keltirish va shundan keyin rangini pasaytirish mumkin.

4. Tenzorning skalyar invariantlari. Bosh o'qlari va bosh komponentalari

Tutash muhit mexanikasi qoidalarining matematik ifodalari koordinat sistemasining tanlanishiga bog'liq bo'lmasligi kerak. Ushbu talab matematik ifodalar faqat invariant ob'ektlar orqali yozilishi kerakligini taqozo qiladi. Bu esa o'z navbatida vektor va tenzorlarning invariantlarini hosil qilish zaruriyatini keltirib chiqaradi.

Faraz qilaylik

$$\vec{A} = A^i \vec{э}_i = A_j \vec{э}^j = A^i g_{ij} \vec{э}^j$$

vektori berilgan bo'lsin. Bu vektorning uzunligini qaraymiz

$$\left|\vec{A}\right|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = A^i A^j \vec{э}_i \vec{э}_j = A^i A^j g_{ik} \vec{э}^k \vec{э}_j = A^i A^j g_{ij} = A^i A_i ,$$

bu yerdan $A^i A_i$ ifoda invariant ekanligi kelib chiqadi, chunki vektorning kontravariant va kovariant komponentalari o'zaro teskaridirlar. Demak, vektorning faqat bitta mustaqil invarianti mavjud bo'lib, u ham bo'lsa uning uzunligidir. Endi $T^{ij} \vec{э}_i \vec{э}_j = T$ tenzorning rangini g_{ij} lar yordamida pasaytiraylik

$$T^{ij} g_{ij} = T_{\cdot i}^{i\cdot} = T_{\cdot 1}^{1\cdot} + T_{\cdot 2}^{2\cdot} + T_{\cdot 3}^{3\cdot}$$

ko'rinib turibdiki bunday amal natijasida songa (skalyarga) ega bo'ldik. Ma'lumki skalyar miqdorlar koordinat sistemasining tanlanishga bog'liq emas. Demak, $T_{\cdot i}^{i\cdot}$ miqdor tenzorning invariantidan iboratdir va uni *ikkinchi rang tenzorning birinchi invariant deb* ataymiz. Quyidagi ifodalar

$$T_{\cdot j}^{i\cdot} T_{\cdot i}^{j\cdot}, \quad T_{\cdot j}^{i\cdot} \cdot T_{\cdot p}^{j\cdot} T_{\cdot i}^{p\cdot}$$

invariantlarni tashkil qilishini tekshirish qiyin emas. Shunday qilib ikkinchi rang tenzorning uchta invarianti mavjud

$$T_{\cdot i}^{i\cdot}; \quad T_{\cdot j}^{i\cdot} T_{\cdot i}^{j\cdot}; \quad T_{\cdot j}^{i\cdot} T_{\cdot p}^{j\cdot} T_{\cdot i}^{p\cdot} \qquad (6.4)$$

Tenzorning bosh o'qlari va komponentalari tushunchalarini tenzor sirti tushunchasi bilan bog'liq holda kiritamiz. Buning uchun ζ^1, ζ^2, ζ^3 koordinatalar sistemasining boshiga juda yaqin tyurgan nuqtani olamiz va $\overrightarrow{OM} = d\vec{r} = d\zeta^i \vec{э}_i$ vektori hamda $T = T_{ij}\vec{э}^i \vec{э}^j$ tenzorning komponetalaridan tuzilgan $T_{ij} d\zeta^i d\zeta^j$ ifodani qaraymiz. Ushbu ifoda invariant bo’lganligidan

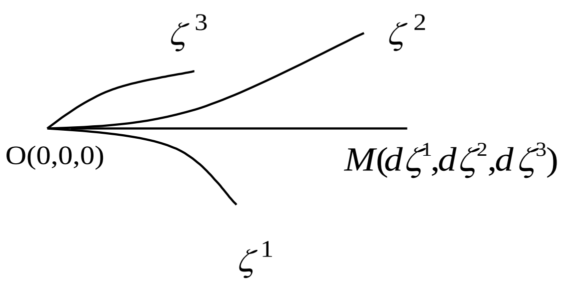
$$T_{ij} d\zeta^i d\zeta^j = T'_{ij} d\eta^i d\eta^j = C, \tag{6.5}$$

bu yerda *C*- biror skalyar miqdor. Belgilangan *O* nuqtaning cheksiz kichik atrofida C ning ma’lum qiymati va T_{ij} larning *O* nuqtada olingan qiymatlarida (6.5) ikkinchi tartibli sirt tenglamasidir. Bu sirt *tenzor sirti* deyiladi.

Demak, har qanday ikkinchi rang tenzorga har bir nuqtada (6.5) ikkinchi taztibli sirtni mos qo’yish mumkin. Ma’lumki (6.5) tenglamani koordinat sistemasini almashtirish yo’li bilan quyidagi kanonik

$$T_{11}(dx')^2 + T_{22}(dx^2)^2 + T_{33}(dx^3)^2 = C$$

ko’rinishga keltirish mumkin. Bunda x^1, x^2, x^3 koordinatalar sistemasi ortogonal bo’ladi. Demak, fazoning har bir nuqtasi uchun shunday koordinatalar o’qlarini kiritish mumkinki, bunda *ikkinchi rang simmetrik tenzorning faqat uchta* T_{11}, T_{22}, T_{33} *kooponentalari noldan farqli* bo’ladi. Bunday *koordinat o’qlari tenzorning bosh o’qlari deyiladi.*



4.1-chizma

O’qlari bosh o’qlar bo’ylab yo’nalgan koordinatalar sistemasi esa tenzorning bosh koordinat sistemasi deyiladi. *Bosh koordinatalar sistemasidagi tenzorning har qanday noldan farqli har xil komponentalari bosh komponentalar deyiladi.*

5.Vektorning kovariant hosilasi

Oldingi ma’ruzalardan ma’lumki ixtiyoriy egri chiziqli ζ^1, ζ^2, ζ^3 koordinatalar sistemasida $\vec{э}_i$ bazis vektorlari o’zgaruvchi vektorlar bo’lib, ular ζ^i koordinatalarning funksiyalari bo’ladilar. Shuning uchun $\vec{A} = A^i \vec{э}_i$ vektorning hosilasini hisoblashda bu faktni hisobga olishga to’g’ri keladi.

Demak,

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial A^i}{\partial \zeta^j}\vec{э}_i + A^i \frac{\partial \vec{э}_i}{\partial \zeta^j} \tag{6.6}$$

va bu yerdagi $\frac{\partial \vec{э}_i}{\partial \zeta^j}$ kattalik yana vektordan iborat bo’ladi va uni $\vec{э}_k$ bazis vektorlari bo’yicha yoyish mumkin. Bu yoyilmaning komponentalarini Γ_{ij}^k deb belgilaymiz, ya’ni

$$\frac{\partial \vec{э}_i}{\partial \zeta^j} = \Gamma_{ij}^k \cdot \vec{э}_k \tag{6.7}$$

ifodaga ega bo’lamiz. Bu yerdagi Γ_{ij}^k lar koordinatalarning funksiyalari bo’ladilar va *Kristoffel simvollari* deb ataladilar. Oxirgi (6.7) ifodani (6.6) ga qo’yib

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \zeta^j} = \frac{\partial A^i}{\partial \zeta^j}\vec{\textit{э}}_i + A^i \Gamma_{ij}^k \vec{\textit{э}}_k \tag{6.8}$$

ga ega bo'lamiz. Bu ifodaning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchi i va k lar bo'yicha yigindidan iborat ya'ni i va k lar gung indekslar. Shuning uchun bu yerdagi i va k larning o'rinlarini almashtirib

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \zeta^j} = \left(\frac{\partial A^i}{\partial \zeta^j} + A^k \Gamma_{kj}^i\right)\vec{\textit{э}}_i \tag{6.9}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu ifodada $\vec{\textit{э}}_i$ bazis vektorlari oldilaridagi *koeffisieyentlar vektorning kontrovariant komponentalaridan olingan kovariant hosilalar deyiladi* va $\nabla_j A^i$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$\nabla_j A^i = \frac{\partial A^i}{\partial \zeta^j} + A^k T_{kj}^i \,. \tag{6.10}$$

Quyida $\nabla_j A^i$ hosilalarning xossalari bilan tanishamiz.

6. Kovariant hosilaning xossalari

1. Dekart koordinatalari sistemasida *(*$\xi^i = x^i$*)* kovariant hosila vektor komponentalaridan koordinata bo'yicha olingan oddiy hosila bilan bir xil bo'ladi. Haqiqatan,

$$\frac{\partial \vec{\textit{э}}_i}{\partial \xi^j} = \frac{\partial \vec{\textit{э}}_i}{\partial x^j} \qquad (\vec{\textit{э}}_1 = \vec{i}, \qquad \vec{\textit{э}}_2 = \vec{j}, \qquad \vec{\textit{э}}_3 = \vec{k})$$

bo'lganligidan $\Gamma_{kj}^i = 0,$ u holda (6.10) dan

$$\nabla_j A^i = \frac{\partial A^i}{\partial \xi^j}$$

bo'ladi.

2. Kovariant $\nabla_j A^i$ hosilalar ikkinchi rang tenzorning komponentalari bo'ladilar. Haqiqatan, faraz qilaylik, η^i– yangi, ξ^j– eski koordinatalar sistemalari bo'lsin, u holda

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi^j} \cdot \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^k}$$

va bu yerdan $\frac{\partial \vec{A}}{\partial \eta^k}$ lar vektorning kovariant komponentalari kabi almashtirilishi kelib chiqadi.

Shuning uchun $T = \frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi^j}\vec{\textit{э}}^j$ ob'ekt invariant ob'ektdir. U holda (6.9) va (6.10) formulalarga asosan,

$$T = \nabla_j A^i \vec{\textit{э}}_i \vec{\textit{э}}_j$$

ya'ni T – 2-rang tenzor va bu tenzorning komponentalari $\nabla_j A^i$ lardan iborat.

1. Ixtiyoriy φ skalyar miqdordan olingan kovariant hosila uning oddiy hosilasi bilan bir xil bo'ladi:

$$\nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i}\,.$$

Endi tenzorning kontravariant komponentalaridan olingan kovariant hosilalar bilan tanishamiz. Ushbu $P = P^{ij}\vec{э}_i\vec{э}_j$ tenzor berilgan bo'lsin:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi^k} = \frac{\partial P^{ij}}{\partial \xi^k}\vec{э}_i\vec{э}_j + P^{ij}\frac{\partial \vec{э}_i}{\partial \xi^k}\vec{э}_j + P^{ij}\vec{э}_i\frac{\partial \vec{э}_j}{\partial \xi^k} =$$

$$= \frac{\partial P^{ij}}{\partial \xi^k}\vec{э}_i\vec{э}_j + P^{ij}\Gamma^l_{ik}\vec{э}_l\vec{э}_j + P^{ij}\vec{э}_i\Gamma^l_{jk}\vec{э}_l. \quad (6.11)$$

Yig'indining ikkinchi hadida *i* va *l* larning, 3 – hadida esa *j* va *l* larning o'rinlarini almashtiramiz (shunday qilishga haqqimiz bor, chunki bu indekslar bo'yicha yig'indilar hisoblanadi)

$$\frac{\partial P}{\partial \xi^k} = \left(\frac{\partial P^{ij}}{\partial \xi^k} + P^{lj}\Gamma^i_{\ell k} + P^{il}\Gamma^j_{\ell k}\right)\vec{э}_i\vec{э}_j = \nabla_k P^{ij}\vec{э}_i\vec{э}_j,$$

bu yerda

$$\nabla_k P^{ij} = \frac{\partial P^{ij}}{\partial \xi^k} + P^{lj}\Gamma^i_{lk} + P^{il}\Gamma^j_{lk}$$

ifoda ikkinchi rang tenzor P^{ij} kontravariant komponentalarining *kovariant hosilasi* deyiladi. Olingan $\nabla_k P^{ij}$ hosilalar ikkinchi rang tenzorining komponentalari bo'ladilar, ya'ni

$$G_1 = \frac{\partial P}{\partial \xi^k}\vec{э}^k = \nabla_k P^{ij}\vec{э}_i\vec{э}_j\vec{э}^k,$$

yoki

$$G_2 = \nabla_k P^{ij}\vec{э}_i\vec{э}^k\vec{э}_j, \quad G_3 = \nabla_k P^{ij}\vec{э}^k\vec{э}_i\vec{э}_j$$

Kovariant hosila uchun quyidagi formulalar o'rinli

$$a)\nabla_k(P^{ij} + q^{mn}) = \nabla_k P^{ij} + \nabla_k q^{mn},$$

$$b)\nabla_k(P^{ij}\cdot q^{mn}) = (\nabla_k P^{ij})q^{mn} + P^{ij}(\nabla_k q^{mn}).$$

Ma'lumki, $\vec{э}_j\vec{э}^k = \delta^k_j$, bu ifodani koordinata bo'yicha diffirensiallasak,

$$\frac{\partial \vec{э}_j}{\partial \xi^i}\vec{э}^k + \vec{э}_j\frac{\partial \vec{э}_k}{\partial \xi^i} = \vec{э}^k(\Gamma^l_{ji}\vec{э}_l) + \frac{\partial \vec{э}^k}{\partial \xi^i}\vec{э}_j = 0.$$

Oxirgi yig'indi faqat $k = l$ bo'lgan holdagina 0 dan farqli. U holda

$$\frac{\partial \vec{э}^k}{\partial \xi^k}\vec{э}_j = -\Gamma^k_{ji}$$

ga ega bo'lamiz, bu yerdan

$$\frac{\partial \vec{э}^k}{\partial \xi^i} = -\Gamma^k_{ji}\vec{э}_j.$$

Endi (6.11) tenglikdan foydalanib, $\vec{A} = A_i\vec{э}^i$ vektorning A_i kovariant komponentalaridan olingan kovariant hosilalarini topamiz

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial A_j}{\partial \xi^i}\vec{э}^j + A_j\frac{\partial э^j}{\partial \xi^i} = \frac{\partial A_j}{\partial \xi^i}\vec{э}^j - A_j\Gamma^j_{ki}\vec{э}^k.$$

Oxirgi yig'indida j va k larning o'rinlarini almashtirib,

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi^{i}} = \left(\frac{\partial A_{j}}{\partial \xi^{i}} - \varGamma^{\,k}_{j\,i} A_{k} \right) \vec{э}^{\,j} \tag{6.12}$$

ifodaga ega, bu erda

$$\nabla_{i} A_{j} = \frac{\partial A_{j}}{\partial \zeta^{i}} - \varGamma^{k}_{ji} A_{k}$$

formula vektorning kovariant komponentalaridan olingan kovariant hosilalarini beradi. Xuddi shunga o'xshash istalgan tenzorning kovariant komponentalaridan olingan kovariant hosilalar tushunchasini kiritish mumkin. Oddiy hisoblashlar yordamida

$$\nabla_{i} g^{\,j\,k} = \nabla_{i} g_{\,j\,k} = 0$$

ekanligini isbotlash qiyin emas. Bu esa g_{jk} larning ∇_{i} belgisidan tashqariga chiqarish mumkinligini, ya'ni

$$\nabla_{i}\,(g^{\,jk} A_{k}) = g^{\,jk} \nabla_{i} A_{k} \qquad va \qquad \nabla_{i}\,(g_{\,jk} A^{k}) = g_{\,jk} \nabla_{i} A^{k}$$

ekanligini ko'rsatadi.

7.Kristoffel simvollarini hisoblash

Quyida Kristoffel simvollarini hisoblash masalasi bilan shug'ullanamiz. Oldindan aytish kerakki, simvollar har qanday tenzorning komponentalari bo'la olmaydilar. Ma'lumki, Evklid fazosida $\vec{э}_{i} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \eta^{i}}$ bazis vektorlari kabi aniqlangan edi, bundan

$$\frac{\partial \vec{э}_{i}}{\partial \eta^{j}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta^{i} \partial \eta^{j}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta^{j}} = \frac{\partial \vec{э}_{j}}{\partial \eta^{j}}\,. \tag{6.13}$$

Agar (6.8) ifodani hisobga olsak, (6.13) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\varGamma^{k}_{ij} \vec{э}_{k} = \varGamma^{k}_{ij} \vec{э}_{k}$$

Bu tenglik Kristoffel simvollarining pastki indekslar bo'yicha simmetrikligini, ya'ni $\varGamma^{k}_{ij} = \varGamma^{k}_{ij}$ ekanligini ko'rsatadi. Kristoffel simvollarini fundamental metrik tenzor komponentalari orqali ifodalash mumkin. Buning uchun quyidagi munosabatlar qaraladi:

$$\frac{\partial g_{\,js}}{\partial \eta^{k}} = \frac{\partial \left(\vec{э}_{j} \vec{э}_{s} \right)}{\partial \eta^{k}} = \frac{\partial \vec{э}_{j}}{\partial \eta^{k}} \vec{э}_{s} + \frac{\partial \vec{э}_{s}}{\partial \eta^{k}} \vec{э}_{j}\,, \quad \frac{\partial g_{\,ks}}{\partial \eta^{j}} = \frac{\partial \vec{э}_{k}}{\partial \eta^{j}} \vec{э}_{s} + \frac{\partial \vec{э}_{s}}{\partial \eta^{j}} \vec{э}_{k}\,,$$

bu tengliklarni

$$\frac{\partial g_{\,js}}{\partial \eta^{k}} - \frac{\partial \vec{э}_{s}}{\partial \eta^{k}} \vec{э}_{j} = \frac{\partial \vec{э}_{j}}{\partial \eta^{k}} \vec{э}_{s} = \varGamma^{l}_{jk} \vec{э}_{l} \vec{э}_{s} = \varGamma^{l}_{jk} g_{ls}\,; \quad \frac{\partial g_{\,ks}}{\partial \eta^{j}} - \frac{\partial \vec{э}_{s}}{\partial \eta^{j}} \vec{э}_{k} = \frac{\partial \vec{э}_{k}}{\partial \eta^{j}} \vec{э}_{s} = \varGamma^{l}_{kj} \vec{э}_{l} \vec{э}_{s} = \varGamma^{l}_{kj} g_{ls}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Endi bu ifodalarni hadma-had qo'shib, Kristoffel simvollarining pastki indekslar bo'yicha simmetrikligini hisobga olsak,

$$\frac{\partial g_{\,js}}{\partial \eta^{k}} - \frac{\partial g_{\,ks}}{\partial \eta^{j}} - \left(\frac{\partial \vec{э}_{s}}{\partial \eta^{k}} \vec{э}_{j} + \frac{\partial \vec{э}_{s}}{\partial \eta^{j}} \vec{э}_{k} \right) = 2 \varGamma^{l}_{jk} g_{ls} \tag{6.14}$$

ifodaga ega bo'lamiz va (6.13) tenglikdan foydalanib, qavslar ichidagi ifodani quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\frac{\partial \vec{э}_{s}}{\partial \eta^{k}} \vec{э}_{j} + \frac{\partial \vec{э}_{s}}{\partial \eta^{j}} \vec{э}_{k} = \frac{\partial \vec{э}_{k}}{\partial \eta^{s}} \vec{э}_{j} + \frac{\partial \vec{э}_{j}}{\partial \eta^{s}} \vec{э}_{k} = \frac{\partial g_{\,j\,k}}{\partial \eta^{s}} \quad .$$

Bu tengliklarni hisobga olgan holda (6.14) ning ikkala tomonini $\frac{1}{2}g^{si}$ ga ko'paytirsak,

$$\frac{1}{2}g^{si}\left(\frac{\partial g_{js}}{\partial\eta^k}+\frac{\partial g_{ks}}{\partial\eta^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial\eta^s}\right)=\Gamma^l_{jk}g_{ls}g^{si}=\Gamma^l_{jk}\delta^i_l$$

ifodaga ega bo'lamiz, bu yerdan izlanayotgan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{2}g^{si}\left(\frac{\partial g_{js}}{\partial\eta^k}+\frac{\partial g_{ks}}{\partial\eta^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial\eta^s}\right). \tag{6.15}$$

Quyidagi koordinatalar sistemasini almashtirganda Kristoffel simvollarini almashtirish formulasini isbotsiz keltiramiz:

$$\Gamma'^{\gamma}_{ij}=\left(\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^i}\cdot\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\eta^j}+\frac{\partial^2\xi^\omega}{\partial\eta^j\partial\eta^j}\right)\frac{\partial\eta^\gamma}{\partial\xi^\omega},$$

bu yerda $\Gamma'^k_{ij}-\eta^i$ koordinatalar sistemasidagi Γ^k_{ij} lar esa ξ^i koordinatalar sistemasidagi Kristoffel simvollaridir.

8. Riman – Kristoffel tenzori va uning xossalari

Evklid fazosi uchun yaroqli bo'lgan Dekart koordinatalari sistemasini kiritish mumkinki, bunday sistemada fundamental metrik tenzorning komponentalari o'zgarmas bo'ladi, ya'ni $g_{ik}=const$. U holda bu fazoning har bir nuqtasi uchun $\Gamma'^{\gamma}_{ij}=0$. Agar fazo Riman fazosi bo'lsa, o'tish matrisasining determenanti 0 dan farqli, ya'ni

$$Det\left\|\frac{\partial\eta^k}{\partial\xi^\omega}\right\|\neq 0$$

bo'lganligi uchun (5.5) formulaga asosan,

$$\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^i}\cdot\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\eta^j}+\frac{\partial^2\xi^\omega}{\partial\eta^i\partial\eta^j}=0 \tag{6.16}$$

tenglik bajarilishi kerak bo'ladi. Demak, (6.16) tenglamalar tenglik bajariladigan koordinatalar sistemasini aniqlovchi tenglamalar sifatida qaralishi mumkin. Agar fazoning Evklid fazosi bo'lishligini talab qilinsa, (6.16) tenglamalar sistemasi bilan ξ^α koordinatalar sistemasini η^i Dekart koordinatalar sistemasi bilan almashtirish diffirensial tenglamalar sistemasi bo'ladilar. Umumiy holda bu sistemani integrallab bo'lmaydi. Shunday bo'lsada fazoning Evklid fazosi bo'lishligi sharti (5.6) tenglamalar sistemasining integrallanish sharti bilan bir xil bo'ladi. Bu shartlarni esa topish mumkin. Buning uchun (6.16) tenglamalarni η^k koordinatalar boyicha differensiallaymiz

$$\frac{\partial\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}}{\partial\eta^k}\cdot\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^i}\cdot\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\eta^j}+\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial\eta^i\partial\eta^k}\cdot\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\eta^j}+\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^i}\cdot\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial\eta^j\partial\eta^k}+\frac{\partial^3\xi^\omega}{\partial\eta^i\partial\eta^j\partial\eta^k}=0$$

va (6.16) ga asosan ikkinchi tartibli hosilalarni quyidagicha almashtiramiz

$$\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial\eta^i\partial\eta^k}=-\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\cdot\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial\eta^i}\cdot\frac{\partial\xi^\mu}{\partial\eta^k};\qquad\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial\eta^i\partial\eta^k}=-\Gamma^{\beta}_{\lambda\mu}\cdot\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial\eta^i}\cdot\frac{\partial\xi^\mu}{\partial\eta^k}; \tag{6.17}$$

va

$$\frac{\partial\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}}{\partial\eta^k}=\frac{\partial\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}}{\partial\eta^\mu}\cdot\frac{\partial\xi^\mu}{\partial\eta^k}$$

ekanligidan foydalanamiz. U holda (6.17) ifodalarning birinchisida α va λ larning, 2-sida esa μ va λ larning orinlarini almashtirib,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\ \ \omega}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial\eta^i\partial\eta^k}=-\Gamma_{\alpha\beta}^{\ \ \omega}\cdot\Gamma_{\alpha\mu}^{\ \ \lambda}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^i}\cdot\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\eta^j}\cdot\frac{\partial\xi^\mu}{\partial\eta^k},$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\ \ \omega}\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial\eta^j\partial\eta^k}=-\Gamma_{\alpha\lambda}^{\ \ \omega}\cdot\Gamma_{\beta\mu}^{\ \ \lambda}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^i}\cdot\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\eta^j}\cdot\frac{\partial\xi^\mu}{\partial\eta^k},$$

ifodalarga ega bolamiz. Bu ifodalarni orniga qo'ysak,

$$\left(\frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\ \ \omega}}{\partial\xi^\mu}-\Gamma_{\lambda\beta}^{\ \ \omega}\cdot\Gamma_{\alpha\mu}^{\ \ \lambda}-\Gamma_{\alpha\lambda}^{\ \ \omega}\cdot\Gamma_{\beta\mu}^{\ \ \lambda}\right)\cdot\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^i}\cdot\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\eta^j}\cdot\frac{\partial\xi^\mu}{\partial\eta^k}+\frac{\partial^3\xi^\omega}{\partial\eta^i\partial\eta^j\partial\eta^k}=0, \quad (6.18)$$

bu yerda μ va β hamma k va j indekslarning orinlarini almashtirib va $\Gamma_{ij}^{\ \ k}=\Gamma_{ji}^{\ \ k}$ ekanligidan foydalanib (6.18) ga oxshash munosabatni olamiz

$$\left(\frac{\partial\Gamma_{\alpha\mu}^{\ \ \omega}}{\partial\xi^\beta}-\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \omega}\Gamma_{\alpha\beta}^{\ \ \lambda}-\Gamma_{\alpha\lambda}^{\ \ \omega}\Gamma_{\beta\mu}^{\ \ \lambda}\right)\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^i}\cdot\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\eta^j}\cdot\frac{\partial\xi^\mu}{\partial\eta^k}+\frac{\partial^3\xi^\omega}{\partial\eta^i\partial\eta^j\partial\eta^k}=0. \quad (6.19)$$

Keyingi (6.18) va (6.19) tengliklarning birini ikkinchisidan ayirib, hamda o'tish determenatli 0 dan farqi bo'lishi kerakligidan foydalansak, fazoning Evklid fazosi bo'lishi shartini keltirib chiqaramiz

$$R_{\beta\mu\alpha.}^{\ \ \ \ \ \omega}=\frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\ \ \omega}}{\partial\xi^\mu}-\frac{\partial\Gamma_{\alpha\mu}^{\ \ \omega}}{\partial\xi^\beta}+\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \omega}\cdot\Gamma_{\alpha\beta}^{\ \ \lambda}-\Gamma_{\lambda\beta}^{\ \ \omega}\cdot\Gamma_{\alpha\mu}^{\ \ \lambda}=0. \quad (6.20)$$

Agar fazo Evklid fazosi bo'lsa, bu shartlar istalgan koordinatalar sistemasida bajarilishi kerak.

Hosil qilingan $R_{\beta\mu\alpha}^{\ \ \ \ \omega}$ lar - 4-rang Riman-Kristoffel tenzorining komponentalaridan iborat. Riman-Kristoffel tenzorining sof kovariant komponentalarining ko'rinishi

$$R_{ij\mu\nu}=g_{\alpha\nu}R_{ij\mu.}^{\ \ \ \ \ \alpha}=\frac{\partial\Gamma_{\nu\mu j}}{\partial\xi^j}-\frac{\partial\Gamma_{\nu\mu j}}{\partial\xi^i}+g^{\alpha\omega}\left(\Gamma_{\omega\mu j}\cdot\Gamma_{\alpha\nu i}-\Gamma_{\omega\mu i}\cdot\Gamma_{\alpha\nu j}\right) \quad (6.21)$$

dan iborat, bu yerda

$$\Gamma_{\nu\alpha j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial\xi_j}+\frac{\partial g_{j\nu}}{\partial\xi^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial\xi^\nu}\right).$$

Ko'pincha (6.21)

$$R_{ij\mu\nu}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\nu i}}{\partial x^j\partial x^\mu}+\frac{\partial^2 g_{\mu j}}{\partial x^i\partial x^\nu}-\frac{\partial^2 g_{\mu i}}{\partial x^j\partial x^\nu}-\frac{\partial^2 g_{\nu i}}{\partial x^i\partial x^\mu}\right].$$

ko'rinishda ishlatiladi. Bu formuladan quyidagi xossalar kelib chiqadi:

$$R_{ij\mu\nu}=-R_{ji\mu\nu};\quad R_{ij\mu\nu}=-R_{ij\nu\mu};\quad R_{ij\mu\nu}=-R_{\mu\nu ij};$$

$$R_{ij\mu\nu}+R_{\mu ij\nu}+R_{ij\mu\upsilon}=0;\quad R_{ii\mu\nu}=0;\quad R_{ij\nu\nu}=0$$

3-o'lchovli fazoda Riman-Kristoffel tenzori faqat oltita noldan farqli komponentalarda ega, ular R_{1212}, R_{1313}, R_{2323}, R_{1213}, R_{2123}, R_{3132} lardan iborat.

7- Ma’ruza.
DEFORMATSIYA TENZORI. DEFORMATSIYA TENZORINING BOSH O’QLARI VA BOSH KOMPONENTALARI

Reja

1. Fazo metrikasini fundamental metrik tenzor orqali kiritish;
2. Nisbiy uzayish koeffisiyenti. Cheksiz kichik deformatsiya. Chekli deformatsiya;
3. Deformatsiya tenzori komponentalaring geometrik ma’nosi: a) $\varepsilon_{ii}(i=j)$; $b)\varepsilon_{ij}(i\neq j)$ bo’lgan hollar;
4. Kvadratik shaklni kanonik ko’rinishga keltirish;
5. Asriy tenglama va uning ildizlari;
6. Deformatsiya tenzori invariantlari.

Tayanch iboralar: nisbiy uzayish, deformatsiya, chekli va cheksiz kichik deformatsiyalar, burchak

1. Fazo metrikasini fundamental metrik tenzor orqali kiritish

Agar absolyut qattiq jism biror x^i sanoq sistemasiga nisbatan harakatlanayotgan bo’lsa, bu jismga mahkamlangan koordinatalar sistemasi- ξ^i jism bilan birgalikda harakat qiladi. Shuning uchun yo’ldosh ξ^i koordinatalar sistemasining bazis vektorlari vaqtning har xil daqiqalarida turli xil bo’ladilar. Vaqtning t_0 payti uchun ularni $\vec{э}_i^{\,0}$ kabi, ixtiyoriy t payti uchun esa odatdagidek $\vec{э}_i$ kabi belgilaymiz. Bu holda $\vec{э}_i$ bazis vektorlarini ilgarilanma va aylanma harakatlar yordamida (natijasida) $\vec{э}_i^{\,0}$ bazis vektorlari orqali ifodalash mumkinligi bizga ma’lum, ya’ni

$$\left|\vec{э}_i^{\,o}\right|=\left|\vec{э}_i\right| \quad va \quad \vec{э}_i^{\,o}\vec{э}_j^{\,o}=\vec{э}_i\cdot\vec{э}_j\,.$$

Agar qattiq jism deformatsiyalanuvchi bo’lsa, bunday ishni bajarib bo’lmaydi. Chunki, bu holda, nuqtalar orasidagi masofalar o’zgaradi; bu esa o’z navbatida yo’ldosh sistemaning deformatsiyalanishiga olib keladi. Bazis vektorlarining kattaliklari ham, ular orasidagi burchaklar ham vaqt davomida o’zgaradi. Jism absolyut qattiq bo’lganda esa bazis vektorlarining kattaliklari ham, ular orasidagi burchaklar ham o’zgarmaydi. Bu holda bazis vektorlari sanoq sistemasiga nisbatan biror burchakka buriladilar.

2. Nisbiy uzayish koeffisiyenti. Cheksiz kichik deformatsiya. Chekli deformatsiya

Deformatsiyalanuvchi qattiq jismning ikkita ixtiyoriy t va t' paytlarida jismning ikkita ixtiyoriy $M \;\; va \;\; M'$ nuqtalarining vaziyatlarini tekshiramiz. Jismning M nuqtasidagi bazis vektorlarini vaqtning t va t' paytlari uchun mos ravishda $\vec{э}_i \;\; va \;\; \vec{э}_i'$ kabi belgilaymiz. U holda yo’ldosh koordinatalar sistemasida

$$d\vec{r}=d\xi^i\vec{э}_i \quad va \quad d\vec{r}\,'=d\xi^i\cdot\vec{э}_i'$$

ifodalarga ega bo’lamiz. Bularni hisobga olgan holda vaqtning t va t' paytlari uchun fazoning metrikalari quyidagicha aniqlanadi:

a) t payt uchun

$$|d\vec{r}|=ds, \quad ds^2=g_{ij}d\xi^i d\xi^j\,, \;\; g_{ij}=\vec{э}_i\vec{э}_j \tag{7.1}$$

b) t' payt uchun

$$\left|d\vec{r}\,'\right| = ds', \; ds'^2 = g'_{ij}\, d\xi^i d\xi^j, \; g'_{ij} = \vec{э}'_i \, \vec{э}'_j \tag{7.2}$$

Bu yerdan ko’rinadiki, vaqtning t va t' paytlari uchun g_{ij} *va* g'_{ij} komponentalar ham har xil, lekin M *va* M' nuqtalarning yo’ldosh sistemasidagi koordinatalari o’zgarmasdan qolganlar, ya’ni masalan M nuqtaning ξ^i yo’ldosh koordinatalar sistemasidagi koordinatalar vaqtning t va t' paytlari uchun bir xildir.

Quyidagi nisbatni

$$\ell = \frac{ds - ds'}{ds'} = \frac{ds}{ds'} - 1 \tag{7.3}$$

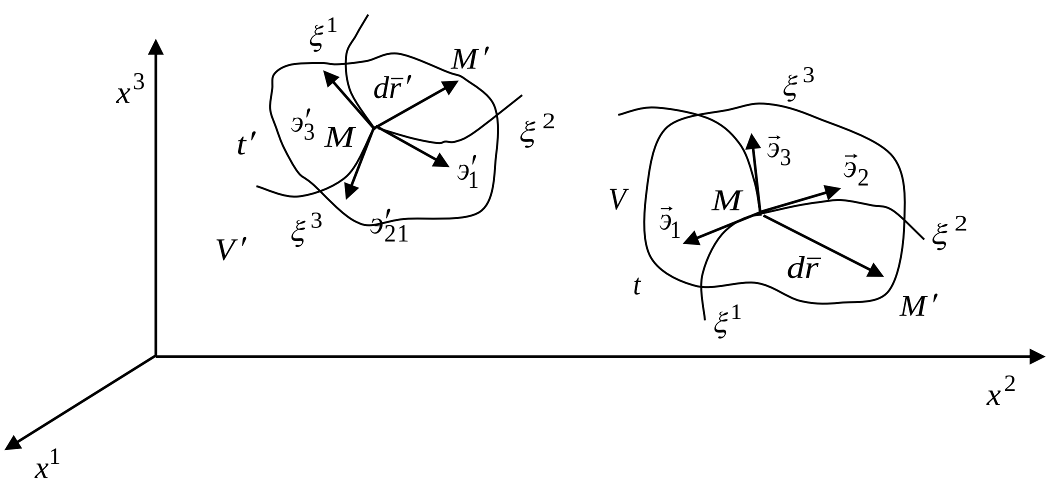
nisbiy uzayish koeffisiyenti deb ataymiz. *Agar muhitning har bir nuqtasida va har qanday yo’nalishda* ℓ *- cheksiz kichik miqdor bo’lsa, deformatsiya cheksiz kichik deformatsiya deyiladi.*

Agar, ℓ *chekli qiymatga ega bo’lsa, deformatsiya ham chekli deformatsiya deyiladi.*
Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(g_{ij} - g'_{ij}\right) \tag{7.4}$$

u holda yuqoridagi (2.1) va (2.2) formulalarga asosan

$$ds^2 - ds'^2 = 2\varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j \tag{7.5}$$



7.1- chizma

ko’rinib turibdiki, ε_{ij} larni ikkinchi rang tenzorning kovariant komponentalari sifatida qarash mumkin. Bu tenzorning kontravariant komponentalarini fundamental metrik tenzor yordamida hosil qilish mumkin. Lekin bu ishni ikki xil amalga oshirsa bo’ladi, ya’ni buning uchun g_{ij} larni ishlatib ε^{ij} larni, g'_{ij} larni hosil qilish mumkin. Shular mos ravishda ikkita bir xil (7.4) kovariant komponentalarga ega, lekin kontravariant komponentalari har xil bo’lgan deformatsiya tenzorlarini hosil qilish mumkin:

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij} \vec{э}^{\,i} \vec{э}^{\,j} \quad va \quad \varepsilon' = \varepsilon'_{ij} \vec{э}'^{\,i} \vec{э}'^{\,j}. \tag{7.6}$$

Bu tenzorlarning kontrovariant va aralash komponentalarini mos ravishda $\varepsilon^{ij}, \varepsilon^{i}_{j}$ va $\varepsilon'^{ij}, \varepsilon'^{i}_{j}$ kabi belgilaymiz.

Aralash ε'^{i}_{j} va ε^{i}_{j} komponentalar bir-birlariga teng emas. Ya'ni $\varepsilon'^{i}_{j} \neq \varepsilon^{i}_{j}$, chunki

$$\varepsilon'^{i}_{j} = \varepsilon_{pj} g'^{pi}, \quad \varepsilon^{i}_{j} = \varepsilon_{pj} g^{pi} \quad va \quad g'^{pi} \neq g^{pi}.$$

3. Deformatsiya tenzori komponentalaring geometrik ma'nosi:
a)** $\varepsilon_{ii}(i=j)$ $b)\varepsilon_{ij}(i\neq j)$ **bo'lgan hollar

Odatda jismning t paytdagi deformatsiya holati boshqa biror t_0 paytdagi boshlangich holatiga nisbatan olib tekshiriladi. Ana shu paytda jism deformatsiyalangan yoki deformatsiyalanmagan holatda bo'lishi mumkin. Har ikkala holda ham boshlangich holat fikran kiritiladi. Ana shu fikran kiritilgan boshlangich holatdagi jism yo'ldosh koordinat sistemasining bazis vektorlarini $\vec{\mathfrak{z}}^{o}_{i}$ lar orqali, fazoning shu paytdagi metrikasini esa $\overset{\circ}{g}_{ij}$ lar orqali belgilaymiz.

Xuddi yuqoridagidek $\overset{\circ}{g}_{ij}$ metrika yordamida ε° tenzorini hosil qilish mumkinki, bu tenzorning kovariant komponentalari $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$ lardan, kontravariant komponentalari esa $\overset{\circ}{g}_{ij}$ lar yordamida hosil qilingan $\varepsilon^{\circ ij}$ lardan, aralash komponentalari esa $\varepsilon^{\circ i}_{j}$ lardan iborat bo'ladi. Ma'lumki fundamental metrik tenzorning kovariant komponentalari uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$g_{ij} = \vec{\mathfrak{z}}_i \vec{\mathfrak{z}}_j = |\vec{\mathfrak{z}}_i| \cdot |\vec{\mathfrak{z}}_j| \cos\psi_{ij}, \quad \cos\psi_{ij} = \cos(\vec{\mathfrak{z}}_i \wedge \vec{\mathfrak{z}}_j), \tag{7.7}$$

$$g^{o}_{ij} = \vec{\mathfrak{z}}^{o}_i \cdot \vec{\mathfrak{z}}^{o}_j = |\vec{\mathfrak{z}}^{o}_i| \cdot |\vec{\mathfrak{z}}^{o}_j| \cos\psi^{o}_{ij}, \quad \cos\psi^{o}_{ij} = \cos(\vec{\mathfrak{z}}^{o}_i \wedge \vec{\mathfrak{z}}^{o}_j), \tag{7.8}$$

Lekin

$$\frac{|\vec{\mathfrak{z}}_i|}{|\vec{\mathfrak{z}}^{o}_i|} = \frac{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i}\right|}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}_o}{\partial \xi^i}\right|} = \frac{|d\vec{r}_i|}{|dr_{0i}|} = \frac{ds_i}{ds_{0i}} = \ell_i + 1 \tag{7.9}$$

bo'lganligi uchun

$$g_{ij} = |\vec{\mathfrak{z}}_i| |\vec{\mathfrak{z}}_j| \cdot \cos\psi_{ij} = |\vec{\mathfrak{z}}^{o}_i| \cdot |\vec{\mathfrak{z}}^{o}_j| (1+\ell_i)(1+\ell_j) \cos\psi_{ij} \tag{7.10}$$

Yuqoridagi (7.4) formuladan muhitning t′paytdagi holati sifatida uning boshlang'ich holatini qabul qilib, (7.10) va (7.8) larni hisobga olgan holda ε_{ij} lar uchun

$$2\varepsilon_{ij} = \left[(1+\ell_i)(1+\ell_j)\cos\psi_{ij} - \cos\psi^{o}_{ij}\right] |\vec{\mathfrak{z}}^{o}_i| |\vec{\mathfrak{z}}^{o}_j| \tag{7.11}$$

formulani olamiz. Bu yerda quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin:

1) $i = j$ bo'lsin, u holda

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[(1+\ell_i)^2 - 1\right] g^{o}_{ij}$$

bu yerdan

$$\ell_i = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{ii}}{g^{o}_{ii}}} - 1 \tag{7.12}$$

Agar deformatsiya kichik bo'lsa, (7.12) ning o'ng tomonidagi ildizni qatorga yoyib dastlabki ikkita hadi bilan chegaralanilsa ℓ_i lar uchun

$$\ell_i \approx \frac{1}{\overset{o}{g}_{ii}} \varepsilon_{ii} \tag{7.13}$$

formula chiqadi. Bu yerdan yo'ldosh sistema Dekart koordinatalari sistemasidan iborat bo'lgan $\left(\overset{o}{g}_{ij} = 1\right)$ hol uchun

$$\ell_i \approx \varepsilon_{ii} \tag{7.14}$$

tenglikka ega bo'lamiz. *Bu tengliklardan ko'rinadiki, cheksiz kichik deformatsiyalar holida deformatsiya tenzorining bir xil indeksli kovariant komponentalari Dekart o'qlari bo'yicha nisbiy uzayish koeffisiyetlariga tengdirlar;*

2) $i \neq j$ bo'lsin. Soddalik uchun $\vec{\overset{o}{э}}_i$ bazis vektorlari ortogonal bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda,

$\overset{o}{\psi}_{ij} = \frac{\pi}{2}$ bo'ladi, $\psi_{ij} = \frac{\pi}{2} - \chi_{ij}$ deb qabul qilsak (7.11) formuladan

$$2\varepsilon_{ij} = (1+\ell_i)(1+\ell_j)\left|\vec{\overset{o}{э}}_i\right|\left|\vec{\overset{o}{э}}_j\right| \sin\chi_{ij} = \left|\vec{э}_i\right|\left|\vec{э}_j\right| \sin\chi_{ij}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu yerdan

$$\sin\chi_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}. \tag{7.15}$$

Chunki $g_{ii} = \vec{э}_i \vec{э}_i = \left|\vec{э}_i\right|^2, \quad g_{jj} = \left|\vec{э}_j\right|^2.$

Oxirgi (7.15) formuladan ko'rinadiki, boshda to'g'ri bo'lgan burchaklar deformatsiya natijasida o'zgarib, kattarib yoki kichrayib qoladilar va ε_{ij} komponentalar esa ana shu o'zgarishlarni xarakterlaydilar.

Agar deformatsiya cheksiz kichik bo'lsa va boshlang'ich holatdagi koordinat sistemasi Dekart koordinatalari sistemasidan iborat bo'lsa, $\overset{o}{g}_{ii} = 1 \quad va \quad g_{ii} = 1 + 0(\varepsilon)$ deyish mumkin. U holda, (7.15) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sin\chi_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad yoki \quad \chi_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \tag{7.16}$$

4. Kvadratik shaklni kanonik ko'rinishga keltirish

Ma'lumki har qanday simmetrik tenzor bilan, shu jumladan ε_{ij} deformatsiya tenzori bilan ham

$$\varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j$$

kvadratik shaklni bog'lash mumkin. Ilgari ko'rganimizdek fazoning har bir nuqtasi uchun shunday η^1, η^2, η^3 ortogonal koordinat sistemasini topish mumkinki, bu sistemada yuqoridagi kvadratik shakl quyidagi kanonik ko'rinishga keltiriladi

$$\varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j = \varepsilon'_{11}(d\eta^1)^2 + \varepsilon'_{22}(d\eta^2)^2 + \varepsilon'_{33}(d\eta^3)^2 \tag{7.17}$$

Dastlabki ξ^i koordinat sistemasini η^i koordinat sistemasi bilan almashtirish ε_{ij} komponentalarga bog'liq bo'ladi. Shuning uchun η^i koordinat sistemasi tutash muhit harakatining har xil paytlari uchun har xil bo'ladi.

5. Asriy tenglama va uning ildizlari

Boshlang'ich g^0_{ij} fazosida η^1, η^2, η^3 ortogonal koordinatalar sistemasi tanlangan bo'lsin. U holda bu koordinat sistemasida ε_{ij} komponentalar $i \neq j$ bo'lganda nolga teng bo'lganlari uchun

$$\sin \chi_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g^0_{ij}}\sqrt{g_{ij}}}$$

formulaga ko'ra $\chi_{ij} = 0 \ (i \neq j)$ bo'ladi. Demak, tutash muhitning harakati davomida η^1, η^2, η^3 koordinatalar ortogonalligicha qoladilar, hamda g^0_{ij} va g_{ij} fazolarida ε^o va ε deformatsiyalar tenzorlarining bosh o'qlari ustma-ust tushadilar, va shuning uchun ham ularni *deformatsiya tenzorlarining bosh o'qlari deb ataydilar.*

Deformatsiya tenzorining bosh o'qlardagi komponentalari deformatsiya tenzorining bosh komponentalari deyiladi va $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ lar orqali belgilanadi.

Deformatsiya tenzorining bosh komponentalarini topish uchun quyidagi

$$C = \left\| C^i_j \right\| = \left\| \lambda\delta^i_j - \varepsilon^i_j \right\| \tag{7.18}$$

matrisa qaraladi, bu yerda λ -sonli parametr. Keltirilgan (7.18) matrisa

$$\left\| \lambda\delta^i_j - \varepsilon^{oi}_j \right\| \quad yoki \quad \left\| \lambda\delta^i_j - \varepsilon^i_j \right\|$$

matrisalarning har ikkalasini anglatadi. Bosh o'qlarda C matrisa

$$C^* = \begin{Vmatrix} \lambda - \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \varepsilon_3 \end{Vmatrix}$$

ko'rinishni oladi. Bu matrisaning determinantini nolga tenglashtirib λ ga nisbatan kubik

$$(\lambda - \varepsilon_1)(\lambda - \varepsilon_2)(\lambda - \varepsilon_3) = 0 \tag{7.19}$$

yoki yoyilma ko'rinishida quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda + I_3 = 0$$

Agar (7.19) tenglama η^1, η^2, η^3 bosh sistemasida tuzilgan bo'lsa, uning $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ildizlari mos deformatsiya tenzorining $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ bosh komponentalari bo'ladilar. Juda ko'p hollarda (7.19) tenglama *asriy tenglama* deb ham yuritiladi.

6. Deformatsiya tenzori invariantlari.

Ushbu tenglamaning koeffisiyetlari koordinat sistemasini almashtirishga bog'liq emas, chunki ular ildizlar yordamida, ya'ni deformatsiya tenzorining bosh komponentalari yordamida to'liq aniqlanadilar. Boshqacha aytganda bu koeffisientlar invariant kattaliklardir hamda quyidagicha belgilanadilar

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon^i_j, \quad I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\varepsilon^i_j\right)^2 - \varepsilon^\alpha_\beta\varepsilon^\beta_\alpha\right], \tag{7.20}$$

$$I_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = Det\left\|\varepsilon^i_j\right\|.$$

Shunday qilib, deformatsiya tenzorining bosh komponentalarini aniqlash uchun berilgan ξ^1, ξ^2, ξ^3 koordinatalar sistemasida koeffisiyetlari (8.4) ifodalardan iborat kubik tenglama tuzib uning ildizlarini topish kerak ekan.

8- Ma’ruza.

DEFORMATSIYA TENZORI KOMPONENTALARINING KO’CHISH VEKTORI KOMPONENTALARI ORQALI IFODASI. DEFORMATSIYANING BIRGALIK TENGLAMALARI

Reja

1.Ko’chish vektori;
2.Deformatsiya tenzorini ko’chish vektori komponentalari orqali ifodalash;
3.Deformatsiyalarning birgalik tenglamalari mavjudligini taqozo qiluvchi mulohazalar;
4.Deformatsiyalarning birgalik tenglamalari;
5.Cheksiz kichik deformatsiya holidagi birgalik tenglamalari.

Tayanch iboralar: Kvadratik shakl, kanonik shakl, tenglama, deformatsiya, bosho’qlar, bosh komponentalar, invariant, ko’chish vektori, birgalik tushunchasi.

Endi harakat qonuni ma’lum bo’lganda deformatsiya tenzorining ε_{ij} kovariant komponentalarini aniqlash bilan shug’illanamiz. Harakat qonuni

$$x^i = x^i\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right)$$

Lagranj yoki

$$\xi^i = \xi^i\left(x^1, x^2, x^3, t\right)$$

Eyler ko’rinishlarida berilgan bo’lsin. Ma’lumki, deformatsiya tenzorining kovariant komponentalari

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(g_{ij} - \overset{o}{g}_{ij}\right) \tag{8.1}$$

formula yordamida beriladi.

Bu yerda g_{ij}- qaralayotgan fazoning yo’ldosh sistemasi metrikasi

$$g_{ij} d\xi^i d\xi^j = g_{pq} dx^p dx^q$$

bo’lganligidan

$$g_{ij} = g_{pq} \frac{dx^p}{d\xi^i} \frac{dx^q}{d\xi^j}$$

va demak yo’ldosh koordinat sistemasida

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(g_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial \xi^j} - \overset{o}{g}_{ij}\right). \tag{8.2}$$

Xuddi shunday boshlang’ich holatlar fazosi uchun

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(g_{ij} - g_{pq} \frac{\partial x_o^p}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x_o^q}{\partial \xi^j}\right) \tag{8.3}$$

formulani chiqarish mumkin, bu yerdagi $\dfrac{dx_o^m}{d\xi^n}$ ifodalar

$$x_o^i = x^i\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_o\right) \; va \;\; \xi^i = \xi^i\left(x_o^1, x_o^2, x_o^3, t_o\right)$$

harakat qonunlaridan topiladi.

1. Ko’chish vektori

Endi ko'chish vektori va uning komponentalari orqali deformatsiya tenzorini ifodalash masalasi bilan tanishamiz. Faraz qilaylik Evklid fazosidagi x^1, x^2, x^3 sanoq sistemasiga nisbatan tutash muhitning biror M nuqtasi boshlang'ich va ayni paytdagi radius vektorlari $\vec{r}_o \; va \; \vec{r}$ bo'lsinlar. Harakat qaralayotgan fazoning boshlang'ich paytdagi metrikasi $\overset{o}{g}_{ij}$, ayni paytdagi esa g_{ij} bo'lsinlar. Bu holda $\vec{w}$ ko'chish vektorini

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{w} \tag{8.4}$$

kabi kiritish mumkin. Ushbu (8.8) formula yordamida $\vec{э}_i^{\,o} \; va \; \vec{э}_i$ bazis vektorlari orasidagi munosabatlarni o'rnatish oson. Haqiqatan (8.4)ni ξ^i lar bo'yicha differensiallab

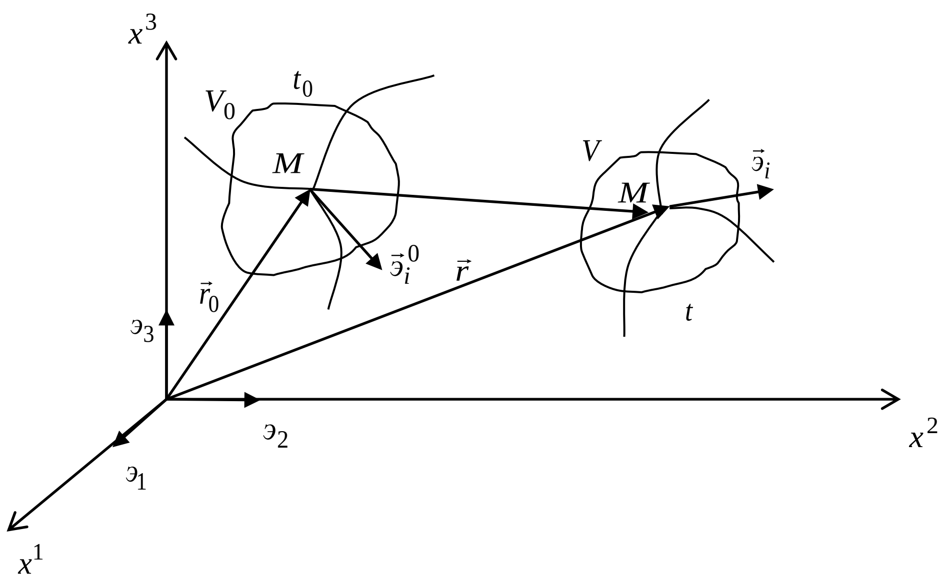
$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \xi^i} = \vec{э}_i - \vec{э}_i^{\,o}$$

ga, bundan esa

$$\vec{э}_i = \vec{э}_i^{\,o} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \tag{8.5}$$

hamda

$$\vec{э}_i^{\,o} = \vec{э}_i - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \tag{8.5*}$$



8.1-chizma

ifodalarga ega bo'lamiz. U holda

$$g_{ij} = \vec{э}_i \cdot \vec{э}_j = \left(\vec{э}_i^{\,o} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}\right)\left(\vec{э}_j^{\,o} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}\right) = \vec{э}_i^{\,o}\vec{э}_j^{\,o} +$$

$$+ \vec{э}_i^{\,o} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{э}_j^{\,o} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}, \tag{8.6}$$

hamda

$$g_{ij}^{o}=\vec{э}_i^{\,o}\cdot\vec{э}_j^{\,o}=\left(\vec{э}_i-\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^i}\right)\left(\vec{э}_j-\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^j}\right)=\vec{э}_i\,\vec{э}_j-$$
$$-\vec{э}_i\cdot\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^j}-\vec{э}_j\cdot\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^i}+\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^i}\cdot\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^j}, \tag{8.7}$$

Demak,

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(g_{ij}-g_{ij}^{o}\right)=\frac{1}{2}\left[\vec{э}_i^{\,o}\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^j}+\vec{э}_j^{\,o}\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^i}+\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^i}\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^j}\right]=\frac{1}{2}\left[\vec{э}_i\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^j}+\vec{э}_j\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^i}-\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^i}\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^j}\right]. \tag{8.8}$$

Bu formulalar ixtiyoriy egri chiziqli $\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3$ Lagranj koordinatalari sistemasida o'rinlidir. Ko'rinib turibdiki ε_{ij} komponentalarning ifodalari tarkibida tutash muhit nuqtalarining nisbiy ko'chishlarini xarakterlovchi $\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^i}$ birinchi tartibli hosilalargina qatnashadilar.

2. Deformatsiya tenzorini ko'chish vektori komponentalari orqali ifodalash

Endi $\vec{w}$ ko'chish vektorini $\vec{э}_i^{\,o}$ *va* $\vec{э}_i$ bazis vektorlari orqali yozamiz

$\vec{w}=w_o^k\vec{э}_k^{\,o},\quad \vec{w}=w^k\vec{э}_k,$

ushbuga mos ravishda kovariant hosilalar quyidagicha yoziladi

$$\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^i}=\nabla_i^o w_o^k\vec{э}_k^{\,o}\quad va\quad \frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^i}=\nabla_i w^k\vec{э}_k \tag{8.9}$$

bu yerda

$$\nabla_i w^k=\frac{\partial w^k}{\partial\xi^i}+w^j\Gamma_{ji}^k.$$

Olingan (8.9) ifodalarning birinchisini (8.8) ifodaning birinchi qismiga qo'yamiz

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left[\vec{э}_i^{\,o}\nabla_j^o w_o^k\vec{э}_k^{\,o}+\vec{э}_j^{\,o}\nabla_i^o w_o^k\vec{э}_k^{\,o}+\left(\nabla_i^o w_o^k\nabla_j^o w_o^l\right)\vec{э}_k^{\,o}\vec{э}_l^{\,o}\right]=\frac{1}{2}\left[\left(\nabla_j^o w_o^k\right)g_{ki}^o+\left(\nabla_i^o w_o^k\right)g_{kj}^o+\left(\nabla_i^o w_o^k\cdot\nabla_j^o w_o^l\right)g_{kl}^o\right].$$

Ma'lumki metrik tenzorning komponentalarini kovariant hosila belgisi ostiga kiritish mumkin. Bundan foydalansak yuqoridagi tenglikni quyidagicha yozish mumkin

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\nabla_i^o w_{oj}+\nabla_j^o w_{oi}+\nabla_j^o w_{ok}\cdot\nabla_j^o w_o^k\right) \tag{8.10}$$

Xuddi shunday (8.12) va (8.13) larning ikkinchi qismlaridan

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\nabla_i w_j+\nabla_j w_i+\nabla_i w_k\cdot\nabla_j w^k\right) \tag{8.11}$$

Agar nisbiy ko'chishlarni cheksiz kichik deb hisoblasak $\vec{w}$ ko'chish vektori hosilalarining ko'paytmalari va kvadratik hadlarni hisobga olmaslik mumkin. U holda (8.10) va (8.11) lardan

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\nabla_i^o w_{oj}+\nabla_j^o w_{oi}\right)=\frac{1}{2}\left(\nabla_i w_j+\nabla_j w_i\right) \tag{8.12}$$

Ko'rinib turibdiki bu holda ε_{ij} lar simmetriklashtirilgan $\nabla_i w_j\vec{э}^{\,i}\vec{э}_j$ tenzorining komponentalari bilan ustma-ust tushadi.

Dekart koordinatalari sistemasida esa

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial w_j}{\partial x^i}\right) \tag{8.13}$$

3. Deformatsiyalarning birgalik tenglamalari mavjudligini taqozo qiluvchi mulohazalar

Deformatsiya tenzori komponentalari uchun chiqarilgan (8.8) va (8.10) yoki (8.11) formulalar faqatgina tutash muhitning hamma nuqtalari uchun $\vec{w}$ ko'chish vektorini kiritish mumkin bo'lgan holdagina o'rinlidir. Umuman olganda esa deformatsiya tenzori komponentalari ds^1 va ds^2 metrikalar bo'yicha (7.4) va (8.2) formulalarga ko'ra ko'chish vektorining mavjud yoki mavjud emasligidan bog'liq bo'lmagan holda aniqlanadi.

Deformatsiya tenzori ham rangi ikkiga teng bo'lganligi uchun to'qqizta komponentaga ega. *Lekin ε_{ij} larning simmetrikligi tufayli bu komponentalarning har xillari faqat oltita bo'ladi.* Ko'chish vektori mavjud bo'lganda ushbu oltita ε_{ij}lar (8.10) yoki (8.11) formulalarga asosan $\frac{\partial w_i}{\partial \xi^j}$ to'qqista hosilalar orqali ifodalanadi va demak, fazoning berilgan nuqtasida ixtiyoriy qiymatlarga ega bo'lishlari mumkin. Ammo, o'sha (8.10) *formulaga ko'ra ε_{ij} oltita funksiya faqat uchta w_i funksiyalarning ξ^1, ξ^2, ξ^3 koordinatalar bo'yicha hosilalari orqali ifodalanadi va shuning uchun ular ixtiyoriy bo'lishlari mumkin emas.*

Ana shu sababga ko'ra ε_{ij} lar birgalik tenglamalari deb ataluvchi tenglamalarni qanoatlantirishlari kerak.

Deformatsiyalarning birgalik tenglamalari faqat $\vec{w}$ ko'chish vektori mavjud bo'lgan holdagina mavjud bo'ladilar. Birgalik tenglamalari tutash muhit mexanikasining har qanday amaliy masalasining yechimi to'g'ri yoki noto'g'riligini tekshirishga imkon beradi. Kelgusi ma'ruzada biz ana shu birgalik tenglamalarini qaraymiz.

4. Deformatsiyalarning birgalik tenglamalari

Ma'limki, deformatsiya tenzorining komponentalari

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(g_{ij} - \dot{g}_{ij}\right) \tag{8.14}$$

tengliklar bilan aniqlanadilar. Ko'chish vektori mavjud bo'lganda metrikalari quyidagi

a) t – payt uchun

$$\left|d\vec{r}\right| = ds,\ \ ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j,\ \ \vec{g}_{ij} = \vec{\mathrm{э}}_i \vec{\mathrm{э}}_j \tag{8.15}$$

b) t $_o$- payt uchun

$$\left|d\vec{r}^{\,o}\right| = ds_o,\ ds_o^2 = \dot{g}'_{ij}\, d\xi^i d\xi^j,\ \dot{g}_{ij} = \vec{\mathrm{э}}_i^{\,o} \mathrm{э}_j^o \tag{8.16}$$

formula bilan aniqlovchi

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad va \quad ds_o^2 = \dot{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j$$

kvadratik shakllarning har ikkalasi ham Evklid fazosidagi biror element uzunligining kvadratini ifodalaydilar. Shuning uchun, fazoning evklidligi shartidan kelib chiqib, har ikkala g_{ij} va $\overset{o}{g}_{ij}$ fundamental metrik tenzorlar nolga teng bo'lishlari kerak degan xulosaga kelamiz. Bu esa o'z navbatida keltirilgan

$$\left(\frac{\partial\Gamma^{\omega}_{\alpha\mu}}{\partial\xi^{\beta}}-\Gamma^{\omega}_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}-\Gamma^{\omega}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}\right)\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial\eta^{i}}\cdot\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial\eta^{j}}\cdot\frac{\partial\xi^{\mu}}{\partial\eta^{k}}+\frac{\partial^3\xi^{\omega}}{\partial\eta^{i}\partial\eta^{j}\partial\eta^{k}}=0 \qquad (8.17)$$

Va $$R^{\cdots\omega}_{\beta\mu\alpha.}=\frac{\partial\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}}{\partial\xi^{\mu}}-\frac{\partial\Gamma^{\omega}_{\alpha\mu}}{\partial\xi^{\beta}}+\Gamma^{\omega}_{\lambda\mu}\cdot\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\omega}_{\lambda\beta}\cdot\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}=0 \qquad (8.18)$$

formulalarga asosan $$\overset{o}{R}_{ij\mu\nu}=0 \quad va \quad R_{ij\mu\nu}=0 \qquad (8.19)$$

tenglamalarga olib keladi.

O’tgan paragrafdagi $\vec{\text{Э}}_i$ *yoki* $\vec{\text{Э}}_i^0$ bazis vektorlaridan birlari ixtiyoriy ravishda tanlansa ikkinchilari

$$\vec{\text{Э}}_i=\vec{\text{Э}}_i^{o}+\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^{i}}, \quad va \quad \vec{\text{Э}}_i^{o}=\vec{\text{Э}}_i-\frac{\partial\vec{w}}{\partial\xi^{i}} \qquad (8.20)$$

va $$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\vec{g}_{ij}-\dot{\vec{g}}_{ij}\right)=\frac{1}{2}\left(\dot{\vec{\text{Э}}}_i\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\xi^{j}}+\dot{\vec{\text{Э}}}_j\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\xi^{i}}+\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\xi^{i}}\cdot\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\xi^{i}}\right)= \qquad (8.21)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\vec{\text{Э}}_i\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\xi^{j}}+\vec{\text{Э}}_j\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\xi^{i}}-\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\xi^{i}}\cdot\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\xi^{j}}\right)$$

formulalarga ko’ra deformatsiya yordamida to’liq aniqlanadi. Demak, (8.23) tenglamalardan biri Evklid fazosida bazis vektorlarini tanlash vositasida avtomatik qanoatlantiriladi, ikkinchisi esa bu holda deformatsiya tenzori komponentalari uchun tenglama deb qaralishi mumkin va bu holda ular deformatsiyalarning birgalik tenglamalari deb yuritiladi. Bu tenglamalarni (8.4) formulalar yordamida aniq ko’rinishda yozish mumkin. Hususiy holda ayni deformatsiya holati uchun dekart koordinatalari sistemasi tanlangan bo’lsa, $\partial g_{ij}/\partial\xi^{\mu}=0$ bo’ladi, shuning uchun

$$\dot{R}_{ij\mu\nu}=0$$

birgalik tenglamalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$\dot{R}_{ij\mu\nu}=\frac{\partial^2\varepsilon_{\nu i}}{\partial\xi^{j}\partial\xi^{\mu}}+\frac{\partial^2\varepsilon_{\mu j}}{\partial\xi^{i}\partial\xi^{\nu}}-\frac{\partial^2\varepsilon_{\mu i}}{\partial\xi^{j}\partial\xi^{\nu}}-\frac{\partial^2\varepsilon_{\nu j}}{\partial\xi^{i}\partial\xi^{\mu}}+\dot{g}^{\alpha\omega}\left[G_{\omega\mu j}\cdot G_{\alpha\nu i}-G_{\omega\mu i}\cdot G_{\alpha\nu j}\right]=0, \qquad (8.22)$$

bu erda $$G_{\nu\alpha j}=\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\nu}}{\partial\xi^{j}}+\frac{\partial\varepsilon_{j\nu}}{\partial\xi^{\alpha}}-\frac{\partial\varepsilon_{\alpha j}}{\partial\xi^{\nu}}.$$

Oxirgi (8.5) formulalardagi $\overset{o}{g}^{\alpha\omega}$ komponentalar quyidagi

$$\left\|\overset{o}{g}^{\alpha\omega}\right\|=\left\|g_{\alpha\omega}-2\varepsilon_{\alpha\omega}\right\|^{-1}$$

matrisaning elementlari kabi aniqlanadi. Bu erda $\left\|g_{\alpha\omega}-2\varepsilon_{\alpha\omega}\right\|^{-1}$ matrisa elementlari

$$\left(g_{\alpha\omega}-2\varepsilon_{\alpha\omega}\right)$$

bo’lgan matrisaga teskari matrisadir.

5. Cheksiz kichik deformatsiya holidagi birgalik tenglamalari

Xususiy holda, agar deformatsiya cheksiz kichik deformatsiyadan iborat bo'lsa (8.5) tenglamalar quyidagi ko'rinishni oladilar

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} = 0. \qquad (8.23)$$

Indekslarning har xil qiymatlarida (8.23) sistemalar faqat o'zaro bog'lanmagan tenglamalar sistemasidan iborat. *Ko'pincha (8.23) tenglamalar sistemasi Sen-Venan shartlari deb yuritiladi.*Sen-Venan shartlari i, j, μ, ν indekslarning faqat (1212), (2323), (3131) , (1213), (2321), (3132) kombinasiyalari uchungina aynan nolga teng bo'lmaydi. Ana shu tenglamalar deformatsiya tenzori komponentalari orasidagi differensial bo'g'lanishlarning ikkita guruhini tashkil qiladi.

Birinchi quruh bog'lanishlaridan birini $i=\nu=1,\ \mu=j=2$ bo'lgan holda olamiz:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \xi^{2^2}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial \xi^{1^2}} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} = 0,\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial \xi^{3^2}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial \xi^{2^2}} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} = 0,\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial \xi^{1^2}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \xi^{3^2}} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} = 0.
\end{aligned} \qquad (8.24)$$

Bu sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalari indekslarini doiraviy almashtirish yordamida yozildi.

Ikkinchi guruh tenglamalaridan birini $\nu=i=1,\ j=2,\ \mu=3$ bo'lgan holda, qolgan ikkitasini esa indekslarni doiraviy almashtirishlar yordamida yozamiz:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} + \frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi^3}\right) = 0,\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial \xi^3 \partial \xi^1} + \frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial \xi^1}\right) = 0,\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi^3}\left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial \xi^2}\right) = 0.
\end{aligned} \qquad (8.25)$$

Shunday qilib, *tutash muhitning boshlangich va ayni holatlari uchun ko'chish vektorini kiritish mumkin bo'lsa, deformatsiyalarning birgalik tenglamalari bajarilishi kerak.*

9- Ma’ruza.
DEFORMATSIYA TEZLIKLARI TENZORI. TUTASH MUHITDAGI CHEKSIZ KICHIK ZARRACHA TEZLIGINING TAQSIMLANISHI

Reja

1. Deformatsiya tezliklari tenzorini aniqlash
2. Deformatsiya tenzori va deformatsiya tezligi tenzori orasidagi bo’g’lanish
3. Deformasiya tezliklarining birgalik tenglamalari
4. Tutash muhit zarrachalarining tezliklari
5. Deformatsiyalanuvchi tutash muhit cheksiz kichik zarrachasidatezliklar taqsimoti
6. Koshi-Gelmgols teoremasi
7. Tezlik divergensiyasi

Tayanch iboralar: deformatsiya, tezlik, vektor, cheksiz kichik zarracha, tenzor, oniy aylanish tezligi, sof deformatsiya, vaqt, radius-vektor, deformatsiya tezliklari tenzori

1. Deformatsiya tezliklari tenzorini aniqlash

Ilgari ko’rganimizdek ε_{ij} deformatsiya tenzori tutash muhitning ikki boshlang’ich va “ayni” holatlari bilan bog’liq holda kiritiladi

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(g_{ij} - \dot{g}_{ij}\right)$$

Agar boshlang’ich holat haqiqatan ham bor bo’lsa, uzluksiz muhit nuqtalarining hammasi uchun vaqtning t_o paytida erishiladigan boshlang’ich holatdan, vaqtning t paytida erishilgan ayni holatiga ko’chish vektori $\vec{w}$ mavjud bo’ladi. Tutash muhitning bu ikki holatidan tashqari uchinchi bir, vaqtning $t+\Delta t$ paytiga to’g’ri keladigan va qaralayotgan ayni g_{ij} holatga yaqin g'_{ij} holatini ham qarash mumkin. U holda t va $t+\Delta t$ paytlardagi holatlar uchun deformatsiya tenzori

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(g'_{ij} - g_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i + \nabla_i w_k \nabla_j w_k\right) \tag{9.1}$$

kabi aniqlanadi. Bu erda g_{ij} – boshlang’ich $\left(g'_{ij} - ayni\right)$ hol uchun

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i^o w_{oj} + \nabla_j^o w_{oi} + \nabla_i^o w_{ok} \nabla_j^o w_{ok}\right) \tag{9.2}$$

formuladan foydalandik; $\vec{w} = w_i \vec{\mathit{э}}^i; \nabla_i w_j -$hosilalar (kovariant) ham g_{ij} boshlang’ich holat uchun hisoblanadilar.

Ma’lumki

$$\vec{w} = \vec{\vartheta} \cdot \Delta t = \vartheta_i \vec{\mathit{э}}^i \Delta t, \tag{9.3}$$

ya’ni agar Δt - kichik bo’lsa, w_1 lar Δt tartibiga ega cheksiz kichik ko’chishlar ekanligi ma’lum bo’ladi. Shuning uchun

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right) = e_{ij}, \tag{9.4}$$

bu erda e_{ij} kattaliklar simmetrik va *bu tenzor deformatsiya tezliklari tenzori deyiladi*.
Ko’rinib turibdiki

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right) \tag{9.5}$$

formula ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida ham o’z ko’rinishini saqlaydi.

2. Deformatsiya tenzori va deformatsiya tenzligi tenzori orasidagi bo'g'lanish. Deformasiya tezliklarining birgalik tenglamalari.

Yuqoridagi (9.1) formulani, agar faqat yo'ldosh sistema uchun qaraydigan bo'lsak

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dg_{ij}}{dt} \tag{9.6}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu erda, agar $g_{ij}^{o} = const$ bo'lsa,

$$e_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}, \tag{9.7}$$

bundan

$$e_{ij}\,\Delta t = \varepsilon_{ij}\,, \tag{9.8}$$

ya'ni e_{ij} Δt lar Δt vaqtdagi ko'chishga mos keluvchi cheksiz kichik deformatsiyalar tenzorining komponentalaridir. Tushunarliki, deformatsiya tenzorining (9.8) komponentalari ham birgalik tenglamalarini qanoatlantirishlari kerak. Oxirgi (9.8) formulani (8.27) ga qo'yib $\Delta t \to 0$ bo'lganda limitga o'tsak, deformatsiya tezliklari tenzori komponentalari uchun quyidagi birgalik tenglamalari sistemasini olamiz

$$\frac{\partial^2 e_{\nu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 e_{\mu i}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 e_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 e_{\nu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} = 0 \tag{9.9}$$

3. Tutash muhit zarrachalarining tezliklari

Endi tutash muhit zarrachasi nuqtalarining tezliklarini o'rganamiz. Biror berilgan ξ^1, ξ^2, ξ^3 koordinatali o markazga nisbatan cheksiz kichik masofada yotuvchi, koordinatalari $\xi^i + d\xi^i = \xi^i + \rho^i$ bo'lgan nuqtalar majmuasini cheksiz kichik zarracha deb tushunamiz. Tezliklar maydoni $\vec{v}$ ni uzluksiz va hech bo'lmaganda birinchi tartibli hosilalarga ega deb qabul qilamiz.

Faraz qilaylik, o nuqtaning tezligi $\vec{v}_0$ $o_1$nuqtaning esa $\vec{v}_1$ bo'lsin. Cheksiz kichik Δt vaqt davomida $\vec{\rho} = \overrightarrow{00_1}$ vektor biror $\vec{\rho}\,' = \overrightarrow{0'0'_1}$ vektorga o'tadi va rasmdan ko'rinadiki

$$\vec{\rho}\,' = \vec{\rho} + (\vec{v}_1 - \vec{v}_0)\Delta t \tag{9.10}$$

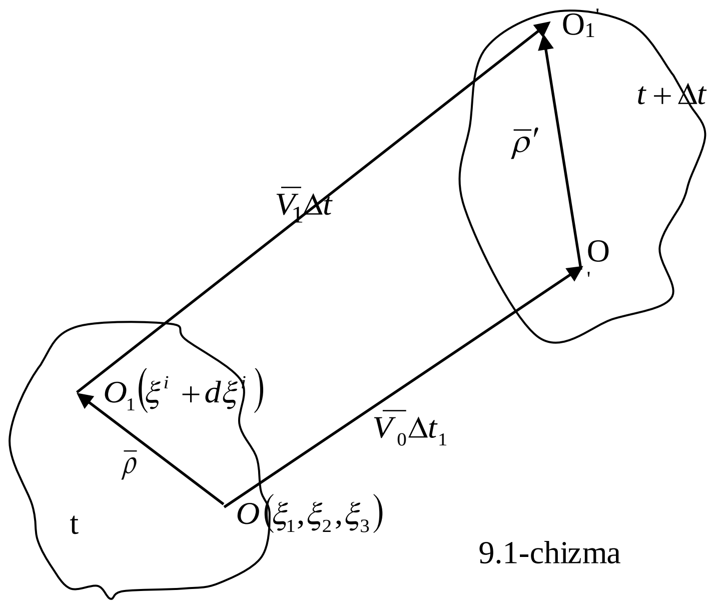
Tezlik vektori $\vec{v}$ ni o nuqta atrofida ρ bo'yicha birinchi tartibli miqdor aniqligida qatorga yoyamiz

$$\vec{v} = \vec{v}_0 = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^i}\right)_0 \rho^i + \rho \vec{0}(\vec{\rho}) \cdot \tag{9.11}$$

Oxirgi (9.11) ni (9.10) ga qo'ysak

$$\vec{v}_1 = \rho + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi}\right)\rho^i \Delta t + O(\rho)\Delta t \tag{9.12}$$

ga ega bo'lamiz. Bu yerdan tutash muhitning cheksiz kichik zarrachasi cheksiz kichik Δt vaqt davomida $\rho O(\rho)\Delta t$ gacha aniqlik bilan cheksiz kichik affin almashtirishda qatnashishi ko'rinadi.



9.1-chizma

4. Deformatsiyalanuvchi tutash muhit cheksiz kichik zarrachasida tezliklar taqsimoti

Tutash muhit cheksiz kichik zarrachasining ixtiyoriy $o_1$nuqtasining $\vec{v}_1$ tezligi (9.12) formula yordamida, bu zarrachaning *o* – markazining $\vec{v}_0$ tezligi. $\vec{v}_1$ ning markazdagi (*O* – nuqtadagi) hosilalari va qaralayotgan nuqtaning koordinatalati ($\bar{\rho}$ - vektor orqali ifodalanishini ko'rdik. Bu formuladagi $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^i}$ ifoda $\vec{v}$ - tezlik vektorining kovariant hosilasidir. U holda

$$\left(\partial \vec{v} / \partial \xi^i\right) = \nabla_i v_k \dot{\vec{\mathfrak{э}}}^k$$

ekanligini hisobga olsak, (9.12) formulani quyidagicha yozish mumkin

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_0 + \nabla_i \vec{v}_k \rho^i \vec{\mathfrak{э}}^k + \rho \overline{O}(\rho) = \vec{v}_0 + \frac{1}{2}(\nabla_i v_k + \nabla_k v_i)\rho^i \vec{\mathfrak{э}}^k + \\ &+ \frac{1}{2}(\nabla_i v_k + \nabla_k v_i)\rho^i \vec{\mathfrak{э}}^k + \rho \overline{O}(\rho) = \vec{v}_0 + e_{ki}\rho^i \vec{\mathfrak{э}}^k + \omega_{ki}\rho^i \vec{\mathfrak{э}}^k + \rho \overline{O}(\rho), \end{aligned} \tag{9.13}$$

bu erda simmetrik

$$e_{ki} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_k + \nabla_k v_i), \tag{9.14}$$

va antisimmetrik

$$\omega_{ki} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_k - \nabla_k v_i) \tag{9.15}$$

tenzorlar ajratib yozildi.

Bundan oldingi (9.13) ifodani Dekart koordinatalarida yozish uchin

$$\vec{\rho} = x^1 \bar{i} + x^2 \bar{j} + x^3 \bar{k} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

ekanligidan foydalanamiz va (9.13) tenglikni koordinat o'qlariga proeksiyalab

$$u_1 = u_0 + e_{1i}x_0^i + \omega_{1i}x^i,$$
$$v_1 = v_0 + e_{2i}x^i + \omega_{2i}x^i, \qquad (9.16)$$
$$w_1 = w_0 + e_{3i}x^i + \omega_{3i}x^i$$

ifodalarga ega bo'lamiz. Bu ifodalardagi $e_{j\,i}$ va $\omega_{j\,i}$ komponentalar x^i larga bog'liq emas va x^i bo'yicha yuqori tartibli $\rho\bar{0}(\rho)$ hadlar esa tashlab yuborilgan.

Quyidagi kvadratik shaklni kiritamiz

$$\Phi = \frac{1}{2}e_{11}x^1x^1 + e_{12}x^1x^2 + e_{31}x^3x' + e_{23}x^2x^3 +$$
$$+\frac{1}{2}e_{22}x^2x^2 + \frac{1}{2}e_{33}x^3x^3; \qquad (9.17)$$

yoki

$$\Phi = \frac{1}{2}e_{pq}x^px^q.$$

Ko'rinib turibdiki

$$e_{ki}x^i = \frac{\partial\Phi}{\partial x^k} \qquad (9.18)$$

Oxirgi (9.18) formulani (9.16) formulalarga qo'ysak

$$u_1 = u_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial x^1} + \omega_{1i}x^i,$$
$$v_1 = v_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial x^2} + \omega_{2i}x^i, \qquad (9.19)$$
$$w_1 = w_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial x^3} + \omega_{3i}x^i.$$

Shunday qilib, tutash muhit cheksiz kichik zarrachasi nuqtasining tezligi uchta tuzuvchilarga ajratiladi: birinchisi $\vec{v}_0(u_0, v_0, w_0) - x^1x^2x^3 -$ koordinatalardan bo'q'liq emas va demak, butun zarrachaning ilgarilanma harakatini xarakterlaydi; ikkinchisi $\left(\partial\Phi/\partial x^1, \partial\Phi/\partial x^2, \partial\Phi/\partial x^3\right)$ esa Φ potensialga ega, uchunchisini ($\omega_{1i}\,x^i$, $\omega_{2i}x^i$, $\omega_{3i}\,x^i$) mufassal tekshirish uchun Dekart koordinatalar sistemasida quyidagi antisimmetrik matrisani kiritamiz

$$\left\|\omega_{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix},$$

bu erda quyidagicha belgilashlar kiritildi

$$\omega_1 = \omega_{32}; \quad \omega_2 = \omega_{13}; \quad \omega_3 = \omega_{21}. \qquad (9.20)$$

5. Koshi-Gelmgolts teoremasi

(9.20)ga asosan (9.15) dan

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right); \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right); \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \qquad (9.21)$$

Bu ifodalarni quyidagi simvolik tasvirlashdan chiqarish mumkin

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k} = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{Vmatrix} . \tag{9.22}$$

Agar

$$\omega_{1i} x^i = \omega_{11} x^1 + \omega_{12} x^2 + \omega_{13} x^3$$

ekanligini hisobga olsak, (9.20) belgilashlarga asosan

$$v_{1i} x^i = \omega_2 z - \omega_3 y$$

tenglikka ega bo’lamiz. Xuddi shunday

$$\omega_{2i} x^i = \omega_3 x - \omega_1 z , \quad \omega_{3i} x_i = \omega_1 y - \omega_2 x ,$$

u holda (9.19) formulani quyidagicha yozish mumkin

$$u_1 = u_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \omega_2 z - \omega_3 y , v_1 = v_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \omega_3 x - \omega_1 z , w_1 = w_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \omega_1 y - \omega_2 x \tag{9.23}$$

yoki (9.22) belgilashlarga asosan

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = \begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{Vmatrix} = (\omega_2 z - \omega_3 y) \vec{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z) \vec{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x) \vec{k} \tag{9.23^1}$$

bo’lganligidan

$$(\omega \times \rho)_x = \omega_2 z - \omega_3 y , (\omega \times \rho)_y = \omega_2 x - \omega_1 z , (\omega \times \rho)_z = \omega_1 y - \omega_2 x . \tag{9.24}$$

Bu ifodalarni (9.23) ga qa’ysak

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (\vec{\omega} \times \vec{\rho})_x ; \\ v_1 &= v_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (\vec{\omega} \times \vec{\rho})_y ; \\ w_1 &= w_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} + (\vec{\omega} \times \vec{\rho})_z . \end{aligned} \tag{9.25}$$

formulaga ega bo’lamiz. Agar (9.25)ni vektor ko’rinishida yozsak

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + grad \Phi + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \rho \vec{0}(\rho) , \tag{9.26}$$

bu formula (9.13) va (9.25) formulalarni to’liq almashtira oladi.

Nazariy mexanika kursidan ma’lumki *tezliklarning absolyut qattiq jisimdagi taqsimoti uchun quyidagi Eyler formulasi o’rinli*

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{\Omega} \times \rho , \tag{9.27}$$

bu erda $\vec{v}_0$ - absolyut qattiq jismning ma’lum (qutb deb ataluvchi) nuqtasining ilgarilanma harakat tazligi; Ω - absolyut qattiq jisimning oniy burchak tezligi vektori; $\bar{\rho}$ - absolyut qattiq jism qaralayotgan nuqtasining ma’lum (qutb) nuqtaga nisbatan radius – vektori.

Agar (9.27) va (9.26) formulalarni solishtirib qarasak, oxirgisida *drad Φ* va $\rho\vec{0}(\rho)$ hadlar oldingiga nisbatan ortiq ekanligini ko’ramiz. Bu erda biz $\rho\vec{0}(\rho)$ had ρga nisbatan cheksiz kichik miqdor bo’lganligi uchun birinchi yaqinlashishda uni e’tiborga olmaslik mumkin ekanligini hisobga olsak, (9.26) formulani qyuidagi ko’rinishda yozish mumkin

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + grad\Phi \,. \qquad (9.28)$$

Bu formula esa Koshu-Gelmgols teoremasini ifodalaydi. Tutash muhit cheksiz kichik zarrasining ixtiyoriy o_1 nuqtasining $\vec{v}_1$ tezligi, xuddi absolyut qattiq jisimdagi kabi, ilgarilanma $\vec{v}_0$ va aylanma $\vec{\omega} \times \vec{\rho}$ harakat tezliklari hamda $\vec{v} = grad\ \Phi$ sof deformatsiya tezliklari yigindisiga teng:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{v}_{ayl} + \vec{v}_{s.d} \,. \qquad (9.29)$$

Yuqorida biz $\vec{\omega}$ vektor bilan $\vec{\Omega}$ vektorlarining o’xshashligini ko’rdik. Agar $\vec{\Omega}$ vektor absolyut qattiq jism oniy aylanish burchak tezligi bo’lsa, $\vec{\omega}$ - vektori uzluksiz muhit cheksiz kichik zarrachasi bilan bog’langan va *dt* cheksiz kichik vaqt davomida qattiq bo’lib turadigan jismning *oniy aylanish burchak tezligi deb qaralishi mumkin. Boshqacha aytganda* $\vec{\omega}$ *deformatsiya tezliklari tenzori bosh o’qlarining oniy aylanish burchak tezligidir va u uyurma (вихрь) vektori deb ataladi.*

6. Tezlik divergensiyasi

Tezlik divergensiyasi tushunchasini kiritish uchun deformatsiya tezliklari tenzoridan foydalanamiz. Buning uchun biror *t* paytdagi tutash muhit nuqtalaridan tashkil topgan cheksiz kichik

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

sferani qaraymiz. Vaqt *Δt* ga o’zgarganda deformatsiya natijasida, bu sfera ellipsoidga o’tadi va uning tenglamasi bosh o’qlarga nisbatan

$$\frac{x^{*2}}{(1+e_1\Delta t)^2} + \frac{y^{*2}}{(1+e_2\Delta t)^2} + \frac{z^{*2}}{(1+e_3\Delta t)^2} = R^2$$

ko’rinishda bo’ladi. Vaqtning *dt* oralig’ida bu sferaning hajmi qanday o’zgarishini qaraymiz. Ixtiyoriy *t* vaqtda uning hajmi

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

t+Δt paytda esa ellipsoidning hajmi

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 (1+e_1\Delta t)(1+e_2\Delta t)\cdot(1+e_3\Delta t)$$

bo’ladi. U holda muhit cheksiz kichik hajmining nisbiy o’zgarishi v_o va t nolga intilganlarida

$$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ V_0\to 0}} \frac{V - V_o}{V_o \Delta t} = e_1 + e_2 + e_3 \qquad (9.30)$$

ga teng bo’ladi.

Ko’rinib turibdiki, $e_1 + e_2 + e_3$ yig’indi invariantdan iboratdir. U ham bo’lsa deformatsiya tezliklari tenzorining birinchi invariantidir. Ma’lumki bu invarantni ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida

$$e_1 + e_2 + e_3 = e^{\alpha}_{\alpha} = g^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Ikkinchi tomondan e_{ij} larning ta'rifiga ko'ra

$$e_\alpha^\alpha = \nabla_\alpha v^\alpha \quad \left(e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right) \right).$$

Oxirgi $\nabla_\alpha v^\alpha$ *invariant miqdor tezlik vektori divergensiyasi deyiladi va div* $\overline{\vartheta}$ *kabi belgilanadi*

$$div\,\vec{v} = \nabla_\alpha v^\alpha\,. \tag{9.31}$$

Dekart koordinatalari sistemasida

$$div\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{9.32}$$

Keltirilgan (9.32) formuladan ko'rinadiki, mexanik nuqtai nazardan $div\vec{v}$ uzluksiz muhitning cheksiz kichik alohida hajmining nisbiy kengayishidan iboratdir

$$div\vec{v} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ V_o \to 0}} \frac{V - V_0}{V_0 \Delta t} \tag{9.33}$$

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Tutash muhit cheksiz kichik zarrachasi nuqtasining tezligi nechta tuzuvchilarga ajratiladi?
2. Qanday matrisaga antisimmetrik deyiladi?
3. AQJ dagi tezliklarning taqsimoti uchun Eyler formulasini yozing.
4. Koshi-Gelmgols teoremasini yozing.
5. Uyurma vektori deb nimaga aytiladi.
6. Jismning oniy aylanish tezligi tushunchasini bering.

10- Ma'ruza.
VEKTOR ROTORI VA DIVERGENSIYASI. VEKTOR SIRKULYASIYASI. STOKS TEOREMASI. POTENSIALLI VA UYURMASIZ HARAKAT

Reja

1. Vektor rotori va divergensiyasi;
2. Vektor sirkulyasiyasi;
3. Stoks teoremasi;
4. Potensialli va uyurmasiz harakat.

Tayanch iboralar: tezlik, vektor, kovariant hosila, cheksiz kichik zarracha, tenzor, kvadratik shakl, oniy aylanish tezligi, sof deformatsiya, vaqt, radius-vektor, deformatsiya tezliklari tenzori, divergensiya

1. Vektor maydonining rotori va divergensiyasi

Endi vektorning rotasiyasi tushunchasini kiritamiz. Faraz qilaylik biror uzluksiz $\vec{A}$ vektorli maydon berilgan bo'lib, $\vec{A}$ vektori koordinatalar bo'yicha birinchi tartibli hosilalarga ega bo'lsin. Qaralayotgan $\vec{A}$ vektorini tezlik vektori $\vec{v}$ ning o'rniga qo'yib $\vec{A}$ maydon uchun (9.26) formulani quyidagicha yozish mumkin

$$\vec{A}_1 = \vec{A} + grad\psi + \frac{1}{2}\cdot\vec{\Omega}\times\vec{\rho} + \rho\vec{0}(\rho), \tag{10.1}$$

bu erda

$$\psi = \frac{1}{2}a_{ij}x^i x^j; \quad a_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i A_j + \nabla_j A_i\right);$$

$$\vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}; \quad \vec{A} = \vec{A}(A_1, A_2, A_3). \tag{10.2}$$

Oxirgi (10.2) formula Dekart koordinatalari sistemasida yozilgan. *Ushbu (10.2) formula yordamida kiritilgan* $\vec{\Omega}$ *vektori* $\vec{A}$ *vektorining rotori deyiladi va*

$$\vec{\Omega} = rot\vec{A} \tag{10.3}$$

kabi belgilanadi.

Xuddi (9.31) ga o'xshash $\vec{A}$ *vektorining divergensiyasini ham kiritish mumkin*

$$div\vec{A} = \nabla_\alpha A^\alpha$$

yoki Dekart koordinatalari sistemasida

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}.$$

Bundan oldingi (9.21) va (9.22) formulalardan ko'rinadiki, *uyurma vektori*

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}rot\vec{v}$$

tezlik vektori rotorining yarmiga teng.

2. *Vektorning sirkulyasiyasi*

Vektorning sirkulyasiyasi tushunchasini kiritish uchun $\vec{A}$ vektorli maydonning aniqlanish sohasida biror L ochiq yoki C yopiq konturni olamiz va $\vec{A}\cdot d\vec{s}$ - skalyar ko'paytmani tuzamiz. Bu erda $d\vec{s}$ L yoki C ning yo'nalishga ega biror elementi. Ma'lumki, vektorlarning skalyar ko'paytmasi invariant miqdordir, chunki ko'paytirish natijasida skalyar miqdor hosil qilinadi. $\vec{A}$ *vektorning* L *kontur bo'yicha sirkulyasiyasi deb quyidagi integral ko'rinishdagi skalyar miqdorga aytiladi*

$$\Gamma = \int\limits_{AB} (\overline{A}\cdot d\overline{s}).$$

Kiritilgan Γ miqdor $d\vec{s}$ ning yo'nalishidan bog'liq bo'lganligi uchun

$$\Gamma_{AB} = -\Gamma_{BA}.$$

Agar $\vec{A}$ vektor sifatida tutash muhit nuqtalarining $\bar{v}$ - tezligi qaralsa

$$\Gamma = \int\limits_{AB}\left(\bar{v}\cdot d\vec{s}\right) = \int\limits_{AB} udx + vdy + \omega dz$$

miqdor, tezlik sirkulyasiyasi deyiladi.

Faraz qilaylik, $\vec{v}$ tezlik vektori potensialga ega bo'lsin, ya'ni

$$\vec{v} = grad\varphi,$$

u holda

$$\Gamma = \int\limits_{AB}\left(\vec{v}d\vec{s}\right) = \int\limits_{AB}\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \varphi_B - \varphi_A .$$

Bu erdan ko'rinadiki, harakat potensialli bo'lganida tezlik sirkulyasi A va B nuqtalarning kordinatalariga bog'liq, ya'ni agar φ - potensial koordinatalarning bir qiymatli funksiyasi bo'lsa, Γ ning qiymati L konturning ko'rinishiga bog'liq emas. Masalan,

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi r}, \qquad Q = const$$

bo'lganda $\Gamma_L = \Gamma_C = 0$ tengliklar o'rinlidir. Lekin agar

$$\varphi = k\cdot\theta = k\cdot arctg\frac{y}{x}$$

bo'lsa,

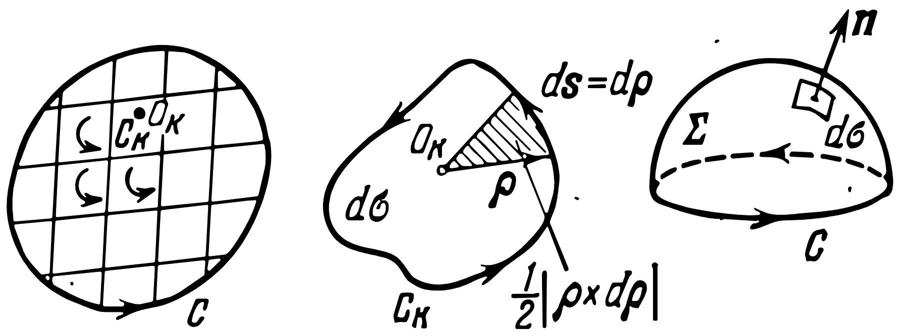
$$\varphi_B - \varphi_A = k\left(Q_B - Q_A\right),$$

yani shunday koordinat boshini o'z ichiga olgan, yopiq C konturlar mavjudki, bu konturlar bo'yicha hisoblangan sirkulyasiya noldan farqli bo'ladi.

3. Stoks teoremasi

Endi $\bar{v}$ tezlik vektor potensialli bo'lmagan holni qaraymiz. Yopiq C – konturni olamiz va unga Σ silliq sirtni tortish (yopish) mumkin deb hisoblaymiz (doiraning qasnog'iga teri tortgan kabi). Silliq Σ sirtida $\bar{v}$ tezlik uzluksiz va differensiallanuvchi, ya'ni C konturni $\bar{v}$ ning uzliksizligi va differensiallanuvchiligini saqlagan holda nuqtagacha toraytirish mumkin deb hisoblaymiz.

Silliq Σ sirtni C_k konturlar yordamida 11.1-chizmada ko'rsatilganidek qisimlarga bo'lamiz. U holda



10.1- chizma

$$\Gamma=\int_C(\vec{v}d\vec{s})=\sum_k\int_{C_k}(\vec{v}\cdot d\vec{s})$$

Bunda C_k konturlarning umumiy tomonlari bo'ylab olingan integrallar o'zaro qisqarib ketganliklari uchun tenglik o'rinlidir.

Endi C_k konturlarni juda kichik deb qarasak, tenglikning o'ng tomonidagi integralni hisoblashda $\vec{v}$ tezlik Koshi Gelmgols teoremasiga ko'ra aniqlanadi deb hisoblash mumkin

$$\vec{v}_{C_k}=\vec{v}_{C_k}+\overline{\omega}\times\overline{\rho}+grad\Phi+\rho\overline{G}(\rho), \qquad (10.4)$$

u holda Γ_{C_k} uchun

$$\Gamma_{C_k}=\int_{C_k}(\vec{v}_{C_k}\cdot d\vec{s})=\int_{C_k}(\vec{v}_{C_k}\cdot d\vec{s})+\int_{C_k}[(\vec{\omega}\times\vec{\rho})\cdot d\vec{s}]+\int_{C_k}[grad\,\Phi\cdot d\vec{s}]+\int_{C_k}[\rho\vec{O}(\rho)\cdot d\vec{s}]$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu erda $\int_{C_k}[\rho\vec{O}(\rho)d\vec{s}]$ had $\int_{C_k}[grad\,\Phi\, d\vec{s}]$ hadga nisbatan yuqori darajali cheksiz kichik miqdor va uni hisobga olmaslik mumkin. Bundan tashqari

$$\int_{C_k}(\vec{v}_{ok}\cdot d\vec{s})=\int_{C_k}[grad\Phi d\vec{s}]=0$$

bo'lganligidan

$$\Gamma_{C_k}=\int_{C_k}[(\vec{\omega}\times\vec{\rho})d\vec{s}]$$

Ikkinchi tomondan $ds = d\rho$ (10.1-chizmaga qarang), demak

$$\int_{C_k}[(\vec{\omega}\times\vec{\rho})d\vec{s}]=\int_{C_k}[(\vec{\omega}\times\vec{\rho})d\vec{\rho}]=\int_{C_k}[\vec{\omega}\cdot(\vec{\rho}\times d\vec{\rho})]=\vec{\omega}\int_{C_k}(\vec{\rho}\times d\vec{\rho})=2\vec{\omega}\cdot\vec{n}d\sigma=2\omega_n d\sigma.$$

Bu erda $\overline{\omega}$ vektorning C_k konturi bo'yicha o'zgarmasligidan foydalanildi ($\overline{\omega}$ faqat O_k ning vaziyatidangina bog'liq). Undan tashqari

$$\int_{C_k}(\vec{\rho}\times d\vec{\rho})=2\vec{n}d\sigma,$$

bu erda $\overline{n}$ - $d\sigma$ ning birlik normali va Σ ning C_k ni tortib turuvchi sirtini tekis deb hisoblash mumkin (shaklga qarang).

Shunday qilib,

$$\int_{C_k}(\vec{v}_{ck}d\vec{s})=\int_{C_k}[(\vec{\omega}\times\vec{\rho})d\vec{s}]=2\omega_n d\sigma,$$

bu erdan $k \to \infty$da va C_k – nuqtagacha kichzaytirilganda quyidagi ifodaga ega bo’lamiz

$$\int_C \vec{v}_s d\bar{s} = 2\int_\Sigma \omega_n d\sigma\,. \tag{10.5}$$

Olingan (10.5) natijaStoksteoremasidebataladi, ungako’ratezlikningCyopiqkonturbo’yichasirkulyasi, shukonturgatortilganΣsirtorqalio’tuvchiuyurmavektoriningikkilanganoqimigateng.

Uynrma vektorining $\sum$ sirt orqali o'tuvchi oqimi

$$\int_\Sigma \omega_n d\sigma$$

dir. Yuqoridagi (10.5) formulani chiqarishda $\vec{\rho}\times \vec{d\rho}$ vektor ko’paytmadan foydalanildi va u Σ sirtning $\vec{n}$ normali bo’ylab yo’nalgan deb hisoblanildi (Σ sirt tekis sirt deb qaraldi). Vektorlarning vektor ko’paytmasi xossalarini esga oladigan bo’lsak, $\vec{n}$ yo’nalishi uchidan qaraganda C konturni soat strelkasi yo’nalishiga teskari yo’nalishda aylanadigan bo’lib ko’ringan tomonga qarab yo’nalganligi ma’lum bo’ladi. Demak, $\vec{n}$ vektorining uchidan qaraganda C konturni aylanishi soat strelkasi yo’nalishiga teskeri yo’nalishda bo’lishi kerak.

Agar $\vec{v}$ - tezlik vektorining o’rniga boshqa $\vec{A} = A_i э^i$ - uzliksiz va differensiallanuvchi vektor qaralsa ham *Stoks teoremasi* o’rinli

$$\int_C \bar{A}s d\bar{s} = \int_C A_i dx^i = \int_\Sigma \left(rot\bar{A}\right)_n d\sigma \tag{10.6}$$

Lekin

$$\left(rot\vec{A}\right)_n = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)cos(n,x) + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\cdot cos(n,y) + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\cdot cos(n,z)$$

bo’lganligidan ixtiyoriy $\vec{A}$ vektorning sirkulyasiyasi uchun

$$\int_C \vec{A}_s ds = \int_C A_i dx^i = \int_\Sigma \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)cos(n,x) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)cos(n,y) + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)cos(n,z)\right]d\sigma$$

formulaga ega bo’lamiz.

4. Potensialli va uyurmasiz harakat

Biz yuqoridagi $\vec{\omega}$ - *vektorini uyurma vektor deb atadik. Agar tutash muhitning biror sohadagi harakati davomida bu sohaning har bir nuqtasida* $\vec{\omega} = 0$ *bo’lsa, bunday harakat uyurmasiz, agar* $\vec{\omega} \neq 0$ *bo’lsa uyurmali harakat deyiladi.* Agar $\vec{v}$ $=grad\,\varphi$ bo’lsa, $\vec{\omega} = 0$ bo’lishini tekshirib ko’rish qiyin emas. Demak, bu holda Stoks teoremasiga ko’ra bu teorema shartini qanoatlantiruvchi har qanday yopiq kontur bo’yicha olingan sirkulyasiya nolga teng bo’ladi. Demak, har qanday harakat potensialli bo’lsa, u uyurmasiz bo’ladi. Aksincha, ya’ni harakat uyurmasiz bolsa, u potensialli bo’lishini isbotlash qiyin emas.

11- Ma'ruza.
STOKS VA GAUSS-OSTROGRADSKIY TEOREMALARI, HAMDA VEKTOR MASYDONLARNING ULARDAN BOG'LIQ BA'ZI XUSUSIYATLARI
Reja

1. Solenoidal maydonlar;
2. Gauss-Ostrogadskiy teoremasi;
3. O'zgaruvchan hajmbo'yicha integralni vaqt bo'yichadifferensiallash.

Tayanch iboralar: vektor maydon,solenoidal maydon, sirt, differensial, o'zgaruvchan hajm.

1. Solenoidal maydonlar

Agar $\vec{B}$ vektorli maydon uchun

$$div\vec{B} = \Delta_\alpha B^\alpha = 0$$

tenglama o'rinli bo'lsa, $\vec{B}$ vektorli maydon solenoidal maydon deyiladi. Vektor maydonining rotasiya va divergensiyasi ta'rifidan, agar $\vec{B} = rot\vec{A}$ bo'lsa, div$\vec{B} = 0$ bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni *ixtiyoriy $\overline{A}$ vektor maydonining rotasiya maydoni solenoidaldir.* Xususiy holda uyurma vektori

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{v} \tag{11.1}$$

bo'lganligidan $div\,\vec{\omega} = 0$ ga ega bo'lamiz. Demak, *uyurma vektori maydoni (uyurmalar maydoni) solenoidal maydondir.*

Ma'lumki,

$$e_1 + e_2 + e_3 = \Delta_\alpha v^\alpha$$

ya'ni

$$div\,\vec{v} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ V_o \to 0}} \frac{V - V_0}{V_0 \Delta t}, \tag{11.2}$$

shuning uchun ham, agar muhit siqilmaydigan (hajmi o'zgarmas) bo'lsa,

$$div\,\vec{V} = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglik *siqilmaydigan muhitning tezlik vektorlari maydoni solenoidal* ekanligini ko'rsatadi.

Yuqorida istalgan vektorning rotasiya maydoni solinoidal ekanligini ko'rdik. Teskarisini, ya'ni istalgan solenoidal maydon vektorini

$$\vec{B} = rot\,\vec{A}$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin ekanligini isbotlash qiyin emas.

2. Gauss-Ostrogadskiy teoremasi

Endi Gauss- Ostrogradskiy teorimasi bilan tanishamiz. Vaqtning t paytida tutash muhitning S sirt bilan chegaralangan V hajmini qaraymiz. Qaralayotgan S- sirtning har bir nuqtasida hajmning tashqi tomoniga yo'nalgan normalni tanlaymiz. Deformatsiya natijasida vaqtning $t + \Delta t$ paytida ajratilgan V hajm V' hajmga, S esa S' sirtda o'tadilar. Bu erda hajmning o'zgarishi uning o'zgarish tezligi $\vec{v}$ ga bog'liq bo'ladi, ya'ni

$$V' - V = \int_S v_n \Delta t d\sigma \tag{11.3}$$

Agar harakat davomida hajm kengaymasdan toraysa, bu holat $\vec{n}$ normalning yo'nalishi V ga nisbatan tashqi tomonda yo'nalganligidan, avtomatik ravishda hisobga olinadi. Oxirgi (11.3) formuladan hajmning o'zgarish tezligini topamiz

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V^{'}-V}{\Delta t}=\int_S v_n d\sigma$$

va bu munosabatni S sirt bilan chegaralangan cheksiz kichik hajmga nisbatan qo'llaymiz:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V^{*'}-V^{*}}{\Delta t}=\int_{S^*} v_n d\sigma \qquad (11.4)$$

Tutash muhit hajmining o'zgarish tezligi uchun (11.3) ifodani, tezlik divergensiyasi uchun (11.2) formulalar asosida (11.4) formulaning o'ng tomonini quyidagicha o'zgartiramiz

$$\int_{S^*} v_n d\sigma=\int_{S^*}[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]d\sigma=$$
$$=V^{*}div\,\vec{v}+\varepsilon V^{*}=(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z})V^{*}+\varepsilon V^{*}, \qquad (11.5)$$

bu erda ε -cheksiz kichik miqdor. Bu tenglik quyidagi munosabatdan kelib chiqadi:

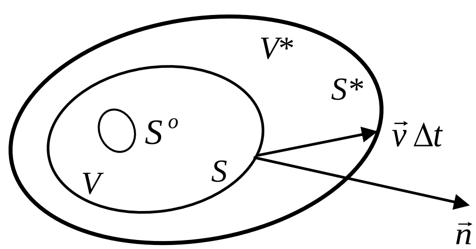
$$\frac{V^{*'}-V^{*}}{V^{*}\Delta t}=div\,\vec{v}+\varepsilon \qquad yoki \qquad \frac{V^{*'}-V^{*}}{\Delta t}=V^{*}div\,\vec{v}+V^{*}\varepsilon \quad ,$$

bunda $t\to 0$ bo'lganda, $\varepsilon\to 0$ bo'ladi.

Yuqoridagi chekli hajmni har doim cheksiz kichik V^* hajmlarga bo'lish mumkin va ularning har biri uchun (12.5) tenglikni yozish mumkin. U holda (11.5) tenglikni hamma V^* lar bo'yicha yig'ib $V^*\to 0$ bilan bir vaqtda cheksizlikka intiluvchi bo'linihlar soni bo'yicha limitga o'tib quyidagiga ega bo'lamiz

$$\int_S[u\cos(n.x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]d\sigma=\int_V(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z})d\tau, \qquad (11.6)$$

chunki tenglikning chap tomonidagi qo'shni $S_k$sirtlar bo'yicha olingan integrallar, bu sirtlar normallarining yo'nalishlari qarama – qarshi bo'lganligidan qisqarib ketadilar va natijada faqat tashqi S sirt bo'yicha olingan integralgina qoladi.*Bu tenglik Gauss-*



12.1- chizma

Ostrogradskiy teoremasini ifodalaydi. Uni ixtiyoriy koordinatalar sistemasida

$$\int_S \vec{v}\,\vec{n}d\sigma=\int_V div\,\vec{v}d\tau \qquad (11.7)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agar $\vec{v}$ - tezlik o'rniga ixtiyoriy $\vec{A}$ -vektorini olsak (11.7) formula quyidagicha bo'ladi

$$\int_S \vec{A}\,\vec{n}d\sigma = \int_V div\vec{A}\,d\tau \tag{11.8}$$

Biror η_1, η_2, η_3 koordinatalar sistemasida

$$\vec{A} = A^k \cdot \vec{\text{Э}}_k, \quad \vec{n} = n_i \cdot \vec{\text{Э}}^{\,i}$$

bo’lsin, u holda

$$\vec{A}\vec{n} = A^k \cdot n_i \cdot \vec{\text{Э}}_k \cdot \vec{\text{Э}}^i = A^k n_k,$$

ikkinchi tomondan

$$div\vec{A} = \Delta_k A^k = \frac{\partial A^k}{\partial \eta^k} + A^i \Gamma^k_{ki},$$

bu yerda Γ^k_{ki} Kristoffel simvolining η_1, η_2, η_3 fazodagi g_{ij} fundamental metrik tenzor komponentalari orqali ma’lum formulalar bo’yicha aniqlanadi. Demak, ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida Gauss-Ostrogradskiy teoremasini quyidagicha yozish mumkin

$$\int_S A^k n_k d\sigma = \int_V \Delta_k A^k d\tau. \tag{11.9}$$

3. *O’zgaruvchan hajm bo’yicha integralni vaqt bo’yicha differensiallash*

Endi kelgusida zarur bo’ladigan o’zgaruvchan hajm bo’yicha olingan integralni vaqt bo’yicha differinsiallash qoidasini chiqaramiz. O’zgaruvchan hajm bo’yicha olingan ushbu

$$\int_V f(x,y,z,t)d\tau$$

integralning vaqt boyicha olingan hosilalarini hisoblaymiz. Bunda V hajm t vaqtga bog’liq ravishda o’zgaradi. Hosilaning ta’rifiga ko’ra

$$\frac{d}{dt}\int_V f(x,y,z,t)d\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{V'} f(x,y,z,t+\Delta t)d\tau - \int_V f(x,y,z,t)d\tau}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_V [f(x,y,z,t+\Delta t) - f(x,y,z,t+\Delta t)d\tau + \int_{V'-V} f(x,y,z,t+\Delta t)d\tau}{\Delta t} =$$

$$= \int_V \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t} d\tau + \lim_{\Delta t \to 0} \int_{V'-V} f(x,y,z,t+\Delta t)\frac{v_n \cdot d\sigma \Delta t}{\Delta t} = \int_V \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t} d\tau + \int_S f(x,y,z,t)v_n d\sigma. \tag{11.10}$$

Oxirgi integralga Gauss-Ostrogradskiy teoremasini qo’llasak

$$\frac{d}{dt}\int_V f(x,y,z,t)d\tau = \int_V \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i\left(f v^i\right)\right] d\tau \tag{11.11}$$

tenglikka ega bo’lamiz, lekin

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \Delta_i(fv^i) = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \Delta_i f + f\,\Delta_i v^i = \frac{\partial f}{\partial t} + \Delta_i v^i f \tag{11.12}$$

chunki

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \nabla_i f$$

f funksiyaning to'liq hosilasi. Oxirgi (11.11) ifodani (11.10) ga qo'ysak izlanayotgan

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V f(x,y,z,t)d\tau = \int_V [\frac{\partial f}{\partial t} + f\nabla_i v^i]d\tau \tag{11.13}$$

formulda ega bo'lamiz. Hususiy holda

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{V} = f(t)$$

bo'lsin, u holda (11.10) ga ko'ra

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{V}d\tau = \int_V [\frac{\partial(1/V)}{dt} + \nabla_i \left(\frac{1}{\nabla_i}\cdot v^i\right)]d\tau,$$

lekin

$$\int_V \frac{d\tau}{V(t)} = \frac{1}{V(t)}\int_V d\tau = 1$$

va

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{d\tau}{V(t)} = 0.$$

Demak,

$$\int_V [\frac{d(\frac{1}{V})}{dt} + \frac{1}{V}\nabla_i v^i] = d\tau = 0 \tag{11.14}$$

Bu ifoda butun V hajm uchun, yoki uning biror qismi uchun yozilishi mumkin. Shuning uchun (11.11) ni cheksiz kichik ΔV hajm uchun qo'llab

$$\frac{\partial(1/\Delta V)}{dt} + \frac{1}{\Delta V} div\,\bar{v} = 0 \tag{11.15}$$

ga ega bo'lamiz. Bu erda $\vec{v}$ tezlik vektorining divergensiyasi ΔV ni toraytirish mumkin bo'lgan nuqtada hisoblanadi. Bu tenglik muhitining xususiyatlariga bog'liq emas, shuning uchun u istalgan muhitlar uchun, hususiy holda fazo uchun ham o'rinlidir.

II. DINAMIK TUSHUNCHALAR VA TUTASH MUHITLAR MEXANIKASINING DINAMIK TENGLAMALARI

1-Ma’ruza. UZVIYLIK TENGLAMALARI

Reja

1. Massaning saqlanish qonuni;
2. Eyler o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamasi;
3. Individual hajimda o'z qiyimatlarini saqlab qoluvchi miqdorlar uchun shartlar;
4. Ko'p komponentali aralashmalar uchun uzviylik tenglamalari;
5. Diffuziyali jarayonlar uchun uzviylik tenglamalari;
6. Lagranj o’zgaruvchilarida uzviylik tenglamalari.

Tayanch iboralar: Lagranj o'zgaruvchilari, diffuziya, Eyler o’zgaruvchilari, massa, zichlik, aralashmalar, massa.

1. Massaning saqlanish qonuni

Fizik ob'ektlar, ya’ni moddiy jismlar va maydonlar harakatini o'ranish bilan shug'ullanamiz. *Inersiya xossasiga ega bo'lgan jismlar moddiy jismlar* deyiladi. Inersiya xossasi massa bilan xarakterlanadi. Massani butun jism uchun m orqali yoki ixtiyoriy bo'lagi uchun m_i orqali kiritish mumkin. Ta’rifga ko'ra N'yuton mexanikasida butun jism massasi m – jism tashkil qiluvchi barcha bo'laklari m_i larning yig'indisiga teng.

Ma'lumki ixtiyoriy individual hajm ya'ni muhitning bir xil zarrachalaridan iborat bo'lgan hajmning m massasining saqlanish qonuni N'yuton mexanikasining fundamental qonunlaridan biri hisoblanadi. Tutash muhit mexanikasining asosiy tenglamalariga ko'ra, ixtiyoriy individual hajm uchun

$$m = const.$$

Bu tenglamalarni quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin

$$\frac{dm}{dt} = 0. \tag{1.1}$$

O'rtacha zichlik $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ ni kiritamiz, bu yerga ΔV massasi Δm da teng bo'lgan hajm, haqiqiy zichlikni quyidagi limit orqali ifodalaymiz

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Tutash muhitlar mexanikasida deyarli hamma vaqt m massa o'rniga ρ - zichlik qaraladi. Kichik hajm uchun

$$\Delta m \approx \rho \Delta V$$

tenglik o'rinli, chekli hajm uchun $m = \int_V \rho d\tau$ bo'ladi, bu yerda integral harakatlanuvchi individual hajm bo'yicha olingan. Shunday qilib, agarda ρ - ma'lum bo'lsa, m ni topish mumkin. Hajm zarrachalari harakat mobaynida o'zgarishi mumkinligi uchun individual zarracha zichligi o'zgarishi mumkin.

Endi tutash muhit individual hajmi uchun massaning saqlanish qonunini

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau = 0 \tag{1.2}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Massaning saqlanish qonuni TMM da nima uchun kerak?

Ms

Massaning saqlanish qonunini yana qanday ko’rinishlarda yozish mumkin?

Mv

2. *Eyler o’zgaruvchilarda uzviylik tenglamalari*

Massaning saqlanish qonunini hisobga olgan holda harakatlanuvchi hajm bo'yicha olingan integralni differensiallash qoidasini qo'llab

$$0=\frac{dm}{dt}=\int_V\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\rho\vec{v}\right)d\tau=\int_V\left(\frac{dp}{dt}+\rho div\vec{v}\right)d\tau$$

ga ega bo’lamiz, yoki bu tenglik ixtiyoriy individual hajm uchun o'rinli bo'lganligidan Eyler o'zgaruvchilaridagi *uzviylik tenglamasi deb ataluvchi tutash muhit mexanikasining birinchi asosiy tenglamasini* hosil qilamiz:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\, div\vec{v}=0. \tag{1.3}$$

Uzviylik tenglamasi faqat massa uchun o’rinli bo’ladimi?

Ms

3. Individual hajmda o’z qiymatlarini saqlab qoluvchi miqdorlar uchun shartlar

Xuddi shu tenglamani ixtiyoriy individual hajm uchun massa o'zgarmas bo'lganligidan $\frac{d\left(\frac{1}{\Delta V}\right)}{dt}+\frac{1}{\Delta V}div\,\vec{v}=0$ formula yordamida hosil qilish mumkin. m massadan tashqari harakat davomida turash muhitning ixtiyoriy individual hajmida o'zgarmaydigan boshqa fizik xarateristkalar ham mavjud.

Masalan, faraz qilaylik N – ixtiyoriy individual hajmdagi molekulalar yoki atomlar soni bo’lsin. Individual hajmda N – o’zgarmas. Hajm birligida molekula yoki atom sonlari $n=\lim\limits_{v\to 0}\frac{N}{V}$ ni kiritib, ixtiyoriy individual hajmda N ni o'zgarmasligini hisobga olib (*) formula yordamida n uchun

$$\frac{dn}{dt}+n\,div\,\vec{v}=0 \tag{1.4}$$

tenglamani hosil qilamiz. Agarda tutash muhitda ximik reaksiyalar bo'lsa, (1.3) tenglamalar bajariladi, (1.4) tenglamalar esa bajarilmaydi. Bundan tashqari ixtiyoriy individual hajmda o'z qiymatini o'zgartirmaydigan skalyar, vektor yoki tenzor miqdorlar mavjud. Bunday o'zgarmas miqdorlarni ϕ orqali belgilaymiz va bu miqdor zichligi

$$f=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta V}$$

ni kiritamiz. ϕ va f lar uchun quyudagi shartlar o'rinli:

$$\frac{d\phi}{dt}=0,\quad \phi=\int_V f d\tau,\quad \frac{df}{dt}+f\,div\,\vec{v}=0.$$

4. Ko’p komponentali aralashmalar uchun uzviylik tenglamalari

Faraz qilaylik, biz N ta komponentadan iborat aralashmaga ega bo'laylik, masalan vodorod, kislorod va suv bug'idan iborat aralashma *(N=3)*. Mis va alyuminiy eritmasi, suvning tuzdagi eritmasi va hokazo. Bunday ko'p komponentali aralashmani, aralashma egallagan bir xil hajmga era bo'lgan N ta kontiumlar yig’indisi sifatida tasvirlash mumkin. Bu kontiniumlarning har biri uchun zichlik va tezlikni kiritish mumkin. Ularni $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ va $v_1, v_2, ..., v_n$ orqali belgilaymiz. Shunday qilib, aralashma mexanikasi bir xil hajmni to'ldiruvchi kontiniumlar yig'ish mexanikasidan iborat. Avval aralashmada ximik reaksiya yoki ionizatsiya sodir bo'lmagan holni qaraymiz. Bu holda aralashma N ta komponentasining har biri uchun massaning saqlanish qonuni bajarilishi kerak va biz quyudagi N ta tenglamaga ega bo'lamiz.

$$\frac{dm_i}{dt} = 0$$

yoki

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + div\, \rho_i v_i = 0. \tag{1.5}$$

Agarda aralashmada ximik reaksiyalar yoki ionizatsiya sodir bo’lsa, u holda m_i komponenta massalari o’zgarishi mumkin. Aralashma i - komponentasi massasi m_i ning birlik vaqtda birlik hajmga o'zgarishi χ_i ni kiritamiz. χ_i - miqdorlar ximiyada aniqlanadi. U holda aralashma komponentalari uchun uzviylik tenglamalarini

$$\frac{dm_i}{dt} = \int_V \chi_i d\tau$$

yoki

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + div\ \rho_i v_i = \chi_i \tag{1.6}$$

ko’rinishda yozish mumkin.

Ximik reaksiya asosiy qonuni shundan iboratki, aralashma umumiy massasi o'zgarmas va shuning uchun

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_i = 0\,. \tag{1.7}$$

Ta'rifga ko'ra, qaralayotgan hajmdagi aralashma massasi shu hajmdagi komponentalari massasi yig'indasiga teng, yoki

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i\ ,$$

qorishma zichligi ρ esa

$$\rho = \lim_{V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

ko'rinishga ega. Aralashma komponentalari zichligi

$$\rho_i = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V}$$

va shuning uchun

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} \rho_i\ .$$

(1.5) iboralarni yig'ib, (1.7) ni hisobga olib

$$\frac{d\rho}{dt} + div\sum_{i=1}^{N} \rho_i V_i = 0$$

tenglama hosil qilinadi. Bu tenglama uzviylik tenglamasining (1.3) oddiy ko'rinishidan iborat bo'ladi agarda qorishma tezligi $\vec{v}$

$$\rho v = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \vec{v}_i, \quad mv = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i;$$

ya'ni

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i v_i;}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \rho_i v_i;}{\rho} \tag{1.8}$$

ko'rinishda aniqlangan bo'lsa.

3. Diffuziyali jarayonlar uchun uzviylik tenglamalari

Shunday holat bo'lishi mumkinki, bunda aralashma barcha komponentalari bir xil tezliklar bilan harakat qilishi mumkin va bu holda harakat tezligi bilan umumiy holda bir xil bo'lishi mumkin, ya'ni $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = ... = \vec{v}_n = \vec{v}$

Bunday hodisalar diffuziyasiz hodisalar deyiladi. Agarda V_i komponentalar har xil bo'lsa, u holda diffuziya sodir bo'ladi va bu holatdagi aralashmaning bir komponentasi ikkinchisiga nisbatan harakat qiladi. Umumiy holda ximik munosabat va diffuzaga mavjud bo'lganda (1.6) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + div\rho_i \vec{v} = \chi_i - divI_i, \tag{1.9}$$

bu erda $I_i = \rho_i(\vec{v}_i - \vec{v})$. $\vec{v}_i - \vec{v}_i -$ ayirma, i - komponentaning butun muhitga nisbatan tezligidan iborat.

Mv *Uzviylik tenglamalari Lagranj o'zgaruvchilarida qanday ifodalanadi?*

Ms *Massani zichlik va hajm orqali qanday ifodalash mumkin?*

6. Lagranj o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamalari

Lagranj o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamalarini keltirib chiqaramiz. Buning uchun vaqtning ayni holati t da tutash muhitning ixtiyoriy M nuqtasida yo'ldosh ξ^1, ξ^2, ξ^3 koordinatalar sistemasi bo'ylab yo'nalgan $\vec{э}_1 d\xi^1$, $\vec{э}_2 d\xi^2$, $\vec{э}_3 d\xi^3$ kichik vektorlarda kichik burchakli parallelopipedni quramiz, uning hajmi

$$V = \left| \vec{э}_1 (\vec{э}_2 \times \vec{э}_3) d\xi^1 \, d\xi^2 \, d\xi^3 \right|$$

lar bo'ladi. Ixtiyoriy t_0 paytda bu parallelopipedga o'sha individual M nuqtada olingan $\vec{э}_1 d\xi^1$, $\vec{э}_2 d\xi^2$, $\vec{э}_3 d\xi^3$ vektorlarda qurilgan elementlar qiyshiq burchakli parallelopiped mos keladi, uning hajmi

$$V_0 = \left| \vec{э}_1^{\,0} (\vec{э}_2^{\,0} \times \vec{э}_3^{\,0}) d\xi^1 \, d\xi^2 \, d\xi^3 \right|$$

ko'rinishda bo'ladi. Muhitning t va t_0 paytdagi zichliklarini mos ravishda ρ va ρ_0 orqali belgilaymiz, massaning saqlanish qonuniga ko'ra

$$\rho_0 V_0 = \rho V$$

yoki

$$\rho = \rho_0 \frac{V_0}{V} = \rho_0 \left| \frac{\vec{э}_1^0 \cdot (\vec{э}_2^0 \times \vec{э}_3^0)}{\vec{э}_1 \cdot (\vec{э}_2 \times \vec{э}_3)} \right| \tag{1.10}$$

bo'ladi.

Baris vektorlarining aralash ko'paytmasini hisoblash uchun yana $\vec{э}_1 = \vec{i}, \vec{э}_2 = \vec{j}, \vec{э}_3 = \vec{k}$ baris vektorli x^1, x^2, x^3 Dekart koordinatalar sistemasini kiritamiz. Muhit nuqtasining bu sistemaga nisbatan koordinatalarini t paytda x^1, x^2, x^3 orqali, t_0 paytda x_0^1, x_0^2, x_0^3 orqali belgilaymiz, u holda

$$x_0^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0),$$
$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t),$$

ya'ni x_0^i va x^i lar erkin o'zgaruvchi t - ning har xil qiymatlarida olingan harakat qonunini ifodalovchi funksiyalar qiymatlaridan iborat M nuqtaning hisob sistemasiga nisbatan radius vektori

$$\vec{r} = x^k \vec{э}_k, \qquad \vec{э}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i}$$

bo'lganligi uchun $\vec{э}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \vec{э}_k$ va $\vec{э}_1(\vec{э}_2 \times \vec{э}_3)$ aralash ko'paytmani quyidagi diterminant orqali belgilash mumkin:

$$\vec{э}_1 \cdot (\vec{э}_2 \times \vec{э}_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} = \Delta,$$

bu erda $\Delta - \xi^1\ \xi^2\ \xi^3$ o’zgaruvchilaridan x^1, x^2, x^3 o'zgaruvchilarga o'tish yakobianidan iborat.

Xuddi shuningdek

$$\vec{э}_1^0(\vec{э}_2^0 \times \vec{э}_3^0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x_0^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x_0^3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial x_0^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x_0^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x_0^3}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial x_0^1}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x_0^2}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x_0^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} = \Delta_0,$$

bu erda $\Delta_0 - \xi^1, \xi^2, \xi^3$ o'zgaruvchilaridan x_0^1, x_0^2, x_0^3 o'zgaruvchilariga o'tish yakobiani. Endi (1.10) tenglamani yakobianlar xossalarini hisobga olib quyidagicha yozish mumkin:

$$\rho = \rho_0 \frac{\Delta_0}{\Delta} = \rho_0 \det \left\| \frac{\partial x_0^i}{\partial x^k} \right\|. \tag{1.11}$$

(1.11) ni quyidagicha o'zgartiramiz, x, y, z koordinatalari sistemasida $\vec{э}_j$ vektorlarning $\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}$ komponentalarini $\vec{э}_{jx}, \vec{э}_{jy}, \vec{э}_{jz}$ orqali belgilaymiz. U holda

$$[\vec{э}_1\cdot(\vec{э}_2\times\vec{э}_3)]^2=\Delta^2=\begin{vmatrix} э_{1x} & э_{1y} & э_{1z}\\ э_{2x} & э_{2y} & э_{2z}\\ э_{3x} & э_{3y} & э_{3z}\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} э_{1x} & э_{1y} & э_{1z}\\ э_{2x} & э_{2y} & э_{2z}\\ э_{3x} & э_{3y} & э_{3z}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} э_{1x} & э_{1y} & э_{1z}\\ э_{2x} & э_{2y} & э_{2z}\\ э_{3x} & э_{3y} & э_{3z}\end{vmatrix}=\det\|g_{ik}\|=g,$$

chunki $g_{ik}=\vec{э}_i\cdot\vec{э}_k$. Xuddi shuningdek

$$[\vec{э}_1(\vec{э}_2\times\vec{э}_3)]^2=\det\|gik^0\|=g^0$$

va demak (1.10) ni quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin

$$\rho=\rho_0\sqrt{\frac{g^0}{g}}. \qquad (1.12)$$

(1.10), (1.11) va (1.12) lar Lagranj o'zgaruvchilaridagi uzviylik tenglamalarining har xil ko'rinishlari, umumiy holda tutash muhitlar individual hajmida o'z qiymatini saqlovchi ixtiyoriy Φ miqdorning f zichligi uchun

$$f=f_0\sqrt{\frac{g^0}{g}}=f_0\Delta \qquad (1.13)$$

tenglama bajariladi, bu yerda $\Delta-x^i$ o'zgaruvchilardan x_0^i o'zgaruvchilariga o'tish matritsasi determinanti.

Uzviylik tenglamasi universal xarakterga ega va ixtiyoriy muhit harakatida bajariladi, uning ko'rinishi muhit xossalariga bog'liq emas, u barcha muhitlar uchun bir xil (suv, havo, metal va h.k.).

XULOSA

O’tgan semestrda o’tilgan tutash muhit kinematikasiga doir asosiy tushuncha va munosabatlar takrorlandi.

Asosiy integral munosabatlar tahlil qilindi.

Tutash muhit uchun Lagranj va Eyler o’zgaruvchilarida uzviylik tenglamalari massaning saqlanish qonunidan keltirib chiqarildi.

2-Ma’ruza.
KUCHLARNING KLASSIFIKATSIYASI. TUTASH MUHITNING HARAKAT MIQDORI TENGLAMALARI

Reja:

1. Taqsimlangan va jamlangan kuchlar;
2. Hajmiy yoki massaviy kuchlar;
3. Sirt kuchlari;
4. Tashqi va ichki kuchlar;
5. Ichki kuchlanish kuchlari;
6. Moddiy nuqta va nuqtalar sistemasi uchun harakat miqdori tenglamalari.
7. Chekli hajmdagi tutash muhit uchun harakat miqdori tenglamalari.
8. Ichki kuchlanishlarning asosiy xossalari.

Tayanch iboralar*: harakat, hajm, material nuqta, harakat miqdori, massa, kuch, tezlik, hajm, sirt, massalar markazi.*

1. Taqsimlangan va jamlangan kuchlar

Nazariy mexanikada asosan jamlangan yoki konsentirlangan kuchlar qaraladi, ya'ni nuqtada ta'sir qiluvchi chekli kuchlar. Tutash muhit mexanikasida asosan taqsimlangan kuchlar qaraladi, ya'ni hajmning ixtiyoriy qismida yoki tutash muhitlarning har bir $\sum$ sirtida ta'sir qiluvchi kuchlar. Jamlangan kuchlar N'yutonning ikkinchi qonuni $\vec{F} = \Delta m\vec{a}$ dan (bu yerda Δm - tutash muhit kichik elementining massasi, $\vec{a}$ - uning tezlanishi) jamlangan kuch faqat $\vec{a}$ (yoki ρ) cheksizlikka erishayotgan nuqtada paydo bo'lishi mumkin.

2. Hajmiy yoki massaviy kuchlar

Butun N hajm bo'yicha taqsimlangan kuchlar hajmiy yoki massaviy kuchlar deyiladi. $\vec{F}$ orqali m massaga ta'sir qiluvchi massaviy kuchlarning bosh vektorini belgilaymiz. U holda berilgan nuqtada massaviy kuchlar zichligi $\vec{\tilde{F}}$

$$\vec{\tilde{F}} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\vec{F}}{\Delta m}$$

bo'ladi. Kichik zarracha uchun $\vec{F} \approx \vec{\tilde{F}}\Delta m$. Ayrim hollarda $\vec{\Phi}$ kuchni massa birligiga nisbatan emas, hajm birligiga nisbatan qaraladi. U holda

$$\vec{\Phi} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{F}{\Delta V}, \qquad \text{ya'ni} \qquad \vec{\Phi} = \rho\vec{\tilde{F}}.$$

$\vec{\Phi}dV$ va $\vec{\tilde{F}}dm$ - kuch o'lchamiga ega, $\vec{\tilde{F}}$ - tezlanish o'lchamiga, $\vec{\Phi}$ - esa tezlanish o'lchamining zichlik o'lchamiga ko'paytmasiga teng. Massaviy kuchlarning turlari unchalik ham ko'p emas. Bular og'irlik kuchi $\vec{\tilde{F}} = \vec{g}$, $\vec{\Phi} = \rho\vec{g}$ va tortishish qonuniga bo'ysinuvchi gravitatsiya kuchlari, elektromagnit kuchlar.

Ayrim hollarda tutash muhitning konkret harakatlari qaralayotganda massaviy kuchlar sun'iy ho'l bilan kiritiladi. Masalan, qanot profili harakatini qaraganda qanot profili egallagan soha suyuqlik bilan to'ldirilgan ammo, sun'iy kiritilgan suyuqlik qanot profili kabi harakatlanishi uchun taqsimlangan massaviy kuchlar qo'yilishi kerak.

3. Sirt kuchlari

Tutash muhit mexanikasida asosiy rolni massaviy kuchlar emas, balkim *tutash muhit sirti bo'ylab taqsimlangan sirt kuchlari* egallaydi. Masalan, agar idishga solingan suvni olsak, u holda suvning idish devoriga tegib turgan *S* sirtida kuch ta'siri kuzatiladi. *S* sirtlar $d\sigma$ elementini olib $d\vec{P} = \vec{p}d\sigma$ elementar sirt kuchini kiritish mumkin. Bu yerda

$\vec{p} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta\sigma}$ yuzachaga ta'sir qiluvchi sirt kuchlari zichligi $\vec{p}$ ni *S* sirtning ixtiyoriy nuqtasida kiritish mumkin.

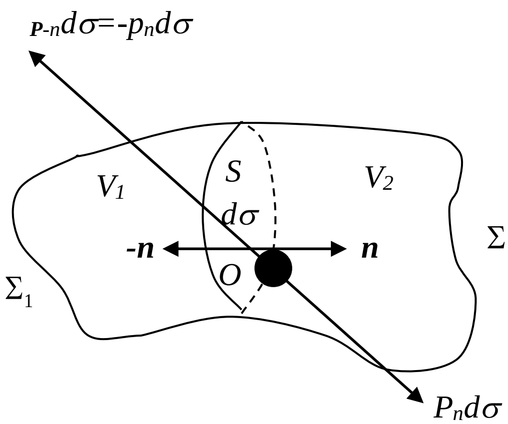
4. Tashqi va ichki kuchlar

Kuchlarni ichki va tashqi kuchlarga bo'lish mumkin. *Kuchlar ichki deyiladi, agarda uning harakati qaralayotgan sistemaga taaluqli ob'ektlar ta'sirida paydo bo'lsa va tashqi deyiladi, agarda ular qaralayotgan sistemaga nisbatan tashqi bo'lgan ob'ektlar ta'sirida paydo bo'lsa.*

Tashqi va ichki kuchlar tushunchasi nisbiydir. Masalan, agarda biz havo harakatini yer atmosferasida va yer bilan birga qarasak, u holda havoning og'irlik kuchi - ichki kuch bo'ladi. Agarda faqat havoning harakatini qarasak, u holda og'irlik kuchi - tashqi kuch bo'ladi. Agarda material jism va elektomagnit maydon harakati qaralsa, u holda elektromaynit kuchlar - ichki, agarda faqat material jism harakati qaralsa, u holda maydon unga nisbatan tashqi agent hisoblanadi va elektromagnit kuchlar tashqi kuchlardan iborat bo'ladi.

5. Ichki kuchlanish kuchi

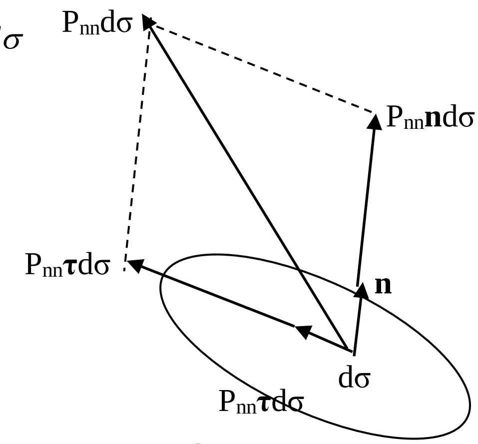
Tutash muhitda ixtiyoriy V hajmni olamiz va uni S kesim bilan 2 ta V_1 va V_2 qismlarga ajratamiz.Agarda biz V ning bir qismining harakatini qarasak, masalan V_1 ning harakatini qarasak, u holda uning qolgan qismi V_2 ning V_1 ga ta'sirini V_1 bo'yicha taqsimlangan sirt kuchlari bilan almashtirish kerak. Shu yo'sinda kiritilgan kuchlar V_1 uchun tashqi bo'ladi. Agarda biz butun V hajm harakatini qarasak bu kuchlar ichki bo'ladi.



2.1-chizma

S - kesimni har xil qilib o'tkazish mumkin va shuning uchun S - sirt bo'yicha taqsimlangan sirt kuchlari har xil S - larda har xil bo'ladi.

Jism ichida biror bir M nuqta olamiz va bu nuqtaga har xil $d\sigma$ yuzachalarini qaraymiz. Bu yuzachalarning orientasiyasini uning $\vec{n}$ normali $d\sigma$ yuzachaga V_2 hajmdagi muhit bo'lagiga ta'sir qiluvchi butun kuchni $d\vec{p}$ orqali belgilaymiz va $d\vec{P} = \vec{p}_n d\sigma$ deb olamiz, bu yerda $\vec{p}_n$ - chekli vektor. $\vec{p}_n$ vektorni $d\sigma$ yuzaga bo'lib taqsimlangan qismlarning o'zaro ta'sir kuchining sirt zichliklari kabi qarash mumkin. Umumiy holda $\vec{P}_n d\sigma$ yuzachalar orientasiyasiga va uning boshqa geometrik xossalariga bog'liq. $\vec{n}$ - normal yo'nalishini shunday tanlaymizki, ko'rilgan $\vec{P}_n d\sigma$ kuch ta'sir qiluvchi muhitning qismiga nisbatan tashqi bo'lsin. Masalan V_2 hajmning V_1 ga ta'sirini $\vec{p}_n d\sigma$ taqsimlangan kuchlar bilan almashtiramiz. V_1 hajmning V_2 ga ta'sirini $\vec{P}_{-n} d\sigma$ taqsimlangan kuchlar orqali almashtiramiz. Bu turdagi sirt kuchlarini tutash muhitning ixtiyoriy nuqtasida kiritish mumkin va ular *ichki kuchlanish kuchlari deyiladi. (2.1 - chizma).*



2.2-chizma

Ichki kuchlanish kuchi $\vec{p}_n d\sigma$ ni tutash muhitning har bir nuqtasida $d\sigma$ elementar yuzaga nisbatan ikkita tuzuvchilari - n - normal va τ urinma bo'ylab yoyish mumkin. (2.2 - chizma)

$$\vec{p}_n d\sigma = p_{nn}\vec{n} d\sigma + p_{n\tau}\vec{\tau}\, d\sigma,$$

bu yerda $p_{nn}d\sigma$ ichki kuchlanish kuchining normal kompnentasi. $P_{n\tau}\tau\, d\sigma$ - urinma komponentasi, shu bilan birga uni *tangensalkuch yoki suyuqlik uchun ichki ishqalanish kuchi deyiladi.* $p_n\, d\sigma$ sirt kuchlari tashqi kuchlar ham bo'lishi mumkin, ya'ni tutash muhitni chegaralovchi tashqi sirtda ta'sir qiluvchi kuchlar. Tutash muhitning har bir M nuqtasida bu nuqtadan o'tuvchi cheksiz ko'p $\vec{p}_n$ vektorlar mavjud.

Ammo ular orasida harakatlanuvchi muhitning xususiy xossalariga bog'liq bo'lmagan universal bog'lanish bo'ladi.

6.Moddiy nuqta va nuqtalar sistemasi uchun harakat miqdori tenglamalari

Moddiy nuqta harakatining asosiy dinamik tenglamasi Nyutonning 2-qonunidan iborat:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}\ .$$

Quyida biz Nyutonning 2-qonunidan kelib chiqadigan material tutash muhit harakatini ifodalovchi murakkabroq munosabatlarni keltirib chiqaramiz.

m massali moddiy nuqtaning *x,y,z* - inersial koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatini qaraymiz. *M* - massa o'zgarmas bo'lganligi uchun

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \vec{F} \qquad (2.1)$$

bo'ladi.

Massaning tezlikka ko'paytmasi $m\vec{v}$ - nuqta harakat miqdori deyiladi. *Moddiy nuqta harakat miqdoridan olingan vaqt bo'yicha hosila, bu nuqtaga ta'sir etuvchi barcha kuchlar yig'indisiga teng.*

Agarda biz m_i massali *n* ta moddiy nuqtadan iborat sistemaga ega bo'lsak, bu sistema unga ta'sir qiluvchi yig'indi kuch $\vec{F}_i$ ta'sirida $\vec{v}_i$ tezlik bilan harakatlanadi, bu nuqtalarning har biri uchun (3.1) harakat miqdori tenglamasini yozish mumkin:

$$\frac{dm_i\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i\,,$$

bu yerda F_i ga *i* - chi nuqtaga ta'sir qiluvchi barcha tashqi va ichki kuchlar kiradi. *n* ta nuqta uchun harakat miqdori tenglamalarini qo'shib

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{dm_i\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}$$

ga ega bo'lamiz, bu erda o'ng tomonda sistemaga nisbatan faqat tashqi kuchlar yiqindisi turibdi, chunki ichki kuchlanish o'zaro ta'sir kuchlari N'yutonning 3-qonuniga ko'ra juft-jufti bilan mavjud va yig'ganda qisqarib ketadi.

Ushbu $\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = m\vec{v}^*$ - yig'indi *sistema harakat miqdori* deyiladi, bu yerda $m = \sum_{i=1}^{n} m_i -$ butun sistema massasi, $\vec{v}* = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i}{m}$ - *n* ta nuqtadan iborat sistema massa markazining tezligi va biz *n* ta Moddiy nuqtadan iborat sistema uchun harakat miqdori tenglamalariga kelamiz:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}^{(e)} \quad \text{yoki} \quad m\frac{d\vec{v}*}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}\ ,$$

ya'ni Moddiy nuqtalar sistemasi harakat miqdoridan vaqt boyicha olingan hosila sistemaga ta'sir qiluvchi barcha tashqi kuchlar yig'indisiga teng, yoki massaning sistema massa markazi tezligiga ko'paytmasi bu sistemaga ta'sir qiluvchi barcha tashqi kuchlar yig'indisiga teng.

Moddiy nuqtaning harakat miqdori tenglamasi universial ahamiyatga ega, uni har xil mexanink sistemalar uchun qo'llash mumkin: galaktikalarga, yulduzlarga, planetalarga, uchar apparatlarga, odamlarga, qushlarga va h.k. qo'llash mumkin.

7. Chekli hajmdagi tutash muhit uchun harakat miqdori tenglamalari

Endi harakat miqdori tenglamalarini Σsirt bilan chegaralangan tutash muhitning chekli individual V hajmi uchun
umumlashtiramiz. Ushbu

$$\int_V \frac{d}{dt}(\vec{v}\rho d\tau) = \int_M \frac{d\vec{v}}{dt}dm = \frac{d}{dt}\int_M \vec{v}dm = \frac{d}{dt}\int_V \vec{v}\rho d\tau$$

munosabat o’rinli bo'lganligi uchun quyidagi ifoda

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \vec{F}\rho dr + \int_\Sigma \vec{p}_n \rho d\tau, \text{ bu yerda } \left(\vec{Q} = \int_V \vec{v}\rho d\tau\right)$$

ta'rifga ko'ra V hajmni egallagan tutash muhitning harakat miqdorini ifodalaydi.

$$\int_V \vec{F}\rho d\tau \quad va \qquad \int_\Sigma \vec{P}_n d\tau$$

lar esa mos ravishda *Vhajmdagi muhitga ta'sir qiluvchi tashqi massaviy va sirt kuchlari yig'indilari.*

Shunday qilib *tutash muhitning ixtiyoriy hajm uchun inersial koordinatalar sistemasiga nisbatan harakat miqdori tenglamalarini* yozish mumkin

$$\frac{d}{dt}\int_V \vec{v}\rho dr = \int_V \vec{F}\rho d\tau + \int_\Sigma \vec{p}_n d\sigma, \tag{2.2}$$

ya'niVhajmdagi tutash muhitining harakat miqdoridan vaqt boyicha olingan hosila unga tasir qiluvchi barcha tashqi massaviy va sirt kuchlari yig’indisiga teng.

Qyidagi

$$m\vec{v}^* = \int_V \vec{v}\rho d\tau$$

formula orqali V hajmdagi tutash muhitning massalar markazi tezligi $\vec{v}^*$ ni kiritish mumkin va (3.2) harakat miqdori tenglamasini individual V hajmdagi tutash muhitning individual hajmining massalar markazi tenglamalari deb ta'riflash mumkin:

$$m\frac{d\vec{v}^*}{dt} = \int_V \vec{F}\rho d\tau + \int_\Sigma \vec{p}_n d\sigma \cdot$$

Aytib o'tish lozimki, (2.2) munosabatlarni *ko'pincha impulslar tenglamalari* deyishadi, chunki uni quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$d\int_V \vec{v}\rho d\tau = \int_V \vec{F}\rho d\tau dr + \int_\Sigma \vec{p}_n \vec{v} d\sigma dt \cdot$$

(2.2) munosabatlarni kuchlarni aniqlovchi tenglik sifatida qarash mumkin.

8. Ichki kuchlanishning asosiy xossalari

Endi (3.2) harakat miqdori tenglamalarning tutash muhitning uzluksiz harakatida berilgan nuqtada olingan $\vec{p}_n$ kuchlanishlarning mos yuzalariga bog'liqligiga chegaralanishlar kiritamiz.

Buning uchun V hajm olamiz va uni ixtiyoriy S kesim bilan ikkita V_1 va V_2 qismlarga bo'lamiz (2.1-chizma). V_1 va V_2 larning biriga va butun V hajmga (3.2) harakat miqdori tenglamalarini qo'llab va bo'lingan qisimlarning o'zaro ta'siri, massaviy taqsimlangan kuchlari va S kesim bo'ylab taqsimlangan sirt kuchlari orqali sodir bo'lishini hisobga olib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_{V_1} \frac{dv}{dt}\rho d\tau = \int_{V_1} \vec{F}'\rho d\tau + \int_{\sum_1} \vec{p}_n d\sigma + \int_S \vec{p}_n d\sigma,$$

$$\int_{V_{12}} \frac{dv}{dt}\rho d\tau = \int_{V_{12}} \vec{F}''\rho d\tau + \int_{\sum_2} \vec{p}_n d\sigma + \int_S p_{-n} d\tau,$$

$$\int_V \frac{dv}{dt}\rho d\tau = \int_V \vec{F}\rho d\tau + \int_{\sum} \vec{p}_n d\sigma,$$

bu erda $\vec{F}'$ va $\vec{F}''$ lar orqali taqsimlangan massaviy zichliklar belgilangan.

Ichki masalaviy kuchlar uchun hamma vaqt ta'sir va aks – ta'sir tengligi qonuni bo'lganda yuqoridagi birinchi ikkita tenglikni qo'shib, yig'indidan uchunchi tenglikni ayirganda, ya'ni

$$\int_{V_1} \vec{F}'\rho d\tau + \int_{V_{12}} \vec{F}''\rho d\tau = \int_V \vec{F}\rho d\tau$$

tenglik o'rinli bo'lganda, yig'indidan yuqoridagi uchinchi tenglikni ayirganda

$$\int_V \left(\vec{P}_n + \vec{P}_{-n}\right) d\tau = 0$$

bo'ladi. Bu yerdan *V, V₁, V₂*hajmlarning va S kesimning ixtiyoriy tanlanganligidan

$$p_n = -p_{-n} \tag{2.3}$$

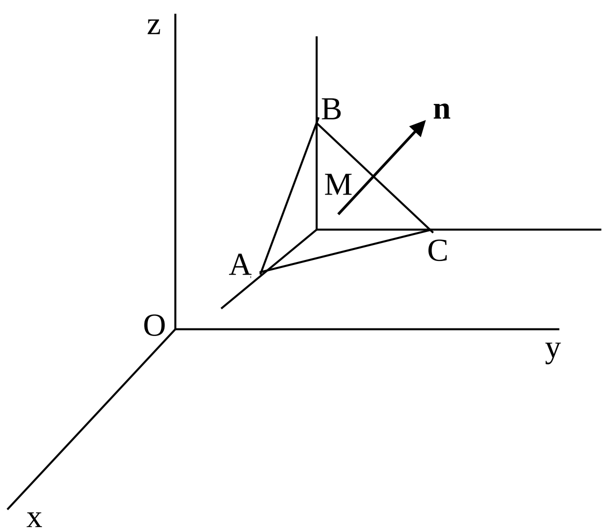
ekanligi kelib chiqadi. (2.2) harakat miqdori tenglamalarni ixtiyoriy cheksiz kichik V Moddiy hajm uchun ham qo'llash mumkin. Buning uchun harakat xarakteristikalarini uzluksiz va chekli deb faraz qilib, ixtiyoriy V individual hajm uchun 0 ga teng bo'lgan quyidagi ifodani tuzamiz:

$$\Omega = \int_v F\rho d\tau + \int_{\sum} p_n \rho d\tau - \int_v \frac{d\vec{v}}{dt}\rho d\tau .$$

U holda V hajmni nuqtagacha toraytirsak integral ostidagi funksiyalarga bog'liq bo'lmagan holda quyidagi limit o'runli:

$$\lim_{V\to 0} \Omega = 0 .$$

U Ω ning intergral osti ifodalariga kiruvchi ixtiyoriy chekli funksiyalarda bajariladi.



2.3-rasm

Vaqtning ayni paytida tutash muhitning ixtiyoriy M nuqtasini olamiz va undan dekart koordinatalar sistemasiga parallel yo'nalishlar o'tkazamiz (2.3-chizma). Bu yo'nalishlarda ixtiyoriy cheksiz kichik $dx = MA,$ $dy = MC$ va $dz = MB$ kesmalar o'tkazamiz. Uning MBC, MAB, MAC yon yoqlari koordinat o'qlariga mos ravishda perpendikulayar, ABC yoq esa ixtiyoriy ravishda joylashgan. Uning orientasiyasi birlik vektor normali orqali aniqlanadi:

$$\vec{n} = \cos(\vec{n}, x)\vec{i} + \cos(\vec{n}, y)\vec{j} + \cos(\vec{n}, z)\vec{k} = n_i \Im^i .$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{n}$ normali yuzachalarda kuchlanishlarni mos ravishda p^1, p^2, p^3 va p_n orqali, ABC yon yoq yuzasini S bilan belgilaymiz. *MBC, MAB, MAC* yon yoqlarning yuzalari

$$S\cos(\vec{n},y),\quad S\cos(\vec{n},y),\quad S\cos(\vec{n},z)$$

larga teng, tetraedrning hajmi esa

$$V=\frac{1}{3}hs,$$

bu yerda h - M nuqtadan ABC yon yoqqa tushgan balandlik. Agarda tetraedrni t nuqtagacha toraytirib borsa, h birinchi - tartibli cheksiz kichik miqdor, S esa 2-tartibli cheksiz kuchlik miqdor bo'ladi. Vaqtning ayni paytida bu tetraedrning hajmida joylashgan tutash muhit hajmi uchun Ω ni hisoblaymiz. Buning uchun (2.3) ichki kuchlanishlar xossasidan foydalanamiz, u holda

$$\Omega=-\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\rho\right)_M\frac{1}{3}S\cdot h+\left(\vec{F}\rho\right)_M\frac{1}{3}Sh+\vec{p}_nS-\vec{p}^1S\cos(n,x)-\vec{p}^2S\cos(\vec{n},y)-\vec{p}^3S\cos(\vec{n},z)+0(h^{2+\lambda}),$$

bu yerda $\lambda>0$.

Faraz qilaylik, tetraedr o'z-o'ziga o'xshash bo'lgan holda nuqtagacha torayib borsin. U holda $\Omega=0$ bo'lganligi uchun (2.2) ga ko'ra quyidagi limit tengliklar o'rinli

$$\lim_{V\to 0}\frac{\Omega}{h}=0,\qquad \lim_{V\to 0}\frac{\Omega}{h^2}=0,\qquad \lim_{V\to 0}\frac{\Omega}{h^3}=0.$$

Birinchi limit uzluksiz va chekli xarakteristikali harakatlarda doim nolga teng, ya'ni Ω ning integral osti funksiyalariga hech qanday chegaralanishlar qo'yilmaydi. Ushbu

$$\lim_{v\to 0}\frac{\Omega}{S}=0$$

shartdan quyida shart doumo bajarilishi kelib chiqadi:

$$\vec{p}_n=\vec{p}^1\cos(\vec{n},x)+\vec{p}^2\cos(\vec{n},y)+\vec{p}^3\cos(\vec{n},z)\,. \tag{2.4}$$

Bunga ko'ra tutash muhitning M nuqtasida olingan ixtiyoriy $d\tau$ yuzachada $\vec{p}_n$ kuchlanish (2.4) formula bo'yicha o'sha M nuqtadagi fiksirlangan yuzachalarda olingan $\vec{p}^1,\vec{p}^2,\vec{p}^3$ kuchlanishlar orqali chiziqli ifodalanadi. (2.4) munosabatga ko'ra $\sum_i$ sirt bo'yicha chegaralangan V hajmli tutash muhitga ta'sir qiluvchi $\int_{\Sigma}\vec{p}_n d\tau$ tashqi sirt kuchlari yig'indisini Gauss-Ostragradskiy formulasiga ko'ra hajm bo'yicha olingan integralga almashtirish mumkin:

$$\int_{\Sigma}\vec{p}_n d\tau=\int_v\left(\frac{\partial\vec{p}^1}{\partial x}+\frac{\partial\vec{p}^2}{\partial y}+\frac{\partial\vec{p}^3}{\partial z}\right)d\tau. \tag{2.5}$$

Xulosa

Shunday qilib, nazariy mexanika fanida o'rganilgan moddiy nuqta va nuqtalar sistemasi uchun harakat miqdori tenglamasi TM uchun umumlashtirirldi. Ichki kuchlarning xossalari o'rganildi.

3-Ma'ruza.
DEKART KOORDINATALARIDA VA IXTIYORIY KOORDINATALAR SISTEMASIDA TUTASH MUHITNING HARAKAT TENGLAMALARI
REJA

1. Dekart koordinatalar sistemasida tutash muhitning harakat tenglamalari.
2. Kuchlanish tenzori.
3. Kuchlanish vektorining fizik komponentalari.
4. Ixtiyoriy koordinatalar sistemasida tutash muhitning harakat tenglamalari.

Tayanch iboralar: kuchlanish, kuchlanish vektori komponentalari, uzluksiz harakat, hajm, bazis vektori, zichlik, kovariant komponentalar, hajmiy kuchlar, massa.

1. Dekart koordinatalar sistemasida tutash muhitning harakat tenglamalari

Quyidagi

$$\lim_{V\to 0}\frac{\Omega}{V}=0 \tag{3.1}$$

shartni qaraymiz. Yuqoridagi

$$\int_{\Sigma}\vec{p}_n d\sigma=\int_V\left(\frac{\partial\vec{p}^1}{\partial x}+\frac{\partial\vec{p}^2}{\partial y}+\frac{\partial\vec{p}^3}{\partial z}\right)d\tau \tag{2.5}$$

(2.5) munosabatga ko'ra Ω ni quyidagi ko'rinishda tasvirlaymiz.

$$\Omega=\int_V\vec{F}\rho d\tau+\int_V\left(\frac{\partial\vec{p}^1}{\partial x}+\frac{\partial\vec{p}^2}{\partial y}+\frac{\partial\vec{p}^3}{\partial z}\right)d\tau-\int_V\frac{d\vec{v}}{dt}\rho d\tau$$

va (2.1) shartdan

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\rho\vec{F}+\frac{\partial\vec{p}^1}{\partial x}+\frac{\partial\vec{p}^2}{\partial y}+\frac{\partial\vec{p}^3}{\partial z} \tag{3.2}$$

ni hosil qilamiz.

Bu vektorli tenglama tutash muhit harakatining asosiy differensial tenglamasidir. U ixtiyoriy muhitlarning ixtiyoriy harakatlari uchun bajariladi va uzluksiz harakat holida

$$\frac{d}{dt}\int_V\vec{v}\rho d\tau=\int_V\vec{F}\rho d\tau+\int_{\Sigma}\vec{p}_n\rho d\sigma \tag{3.2}$$

(3.2) harakat miqdori tenglamalariga ekvivalent bo'ladi, chunki (3.2) ga ko'ra ixtiyoriy V hajm uchun $\Omega=0$. Aytib o'tish kerakki, (3.5) va (4.2) tengliklar $\vec{p}^i$ vektorlar uzluksiz va differensiallanuvchi degan farazda chiqarilgan. (3.2) tenglama umumiy hollar uchun o'rinli

$\vec{p}^1,\vec{p}^2,\vec{p}^3$ vektorlarni dekart koordinatalar sistemasining $э_1=\vec{i},\ \ э_2=\vec{j},\ \ э_3=\vec{k}$ bazis vektorlari orqali yoyamiz

$$\left.\begin{aligned}\vec{p}^1&=p^{k1}\vec{э}_k,\\ \vec{p}^2&=p^{k2}\vec{э}_k,\\ \vec{p}^3&=p^{k3}\vec{э}_k,\end{aligned}\right\}\qquad yoki\qquad \vec{p}^i=p^{ki}\vec{э}_k \tag{4.3}$$

hamda 9 ta sondan iborat bo'lgan quyidagi matrisani kiritamiz

$$\begin{Vmatrix} p^{11} & p^{12} & p^{13} \\ p^{21} & p^{22} & p^{23} \\ p^{31} & p^{32} & p^{33} \end{Vmatrix} = \left\| p^{ik} \right\| = p.$$

(3.4) kuchlanishlarning hossasiga ko'ra

$$\vec{p}_n = p_n^1 \vec{\mathit{э}}_1 + p_n^2 \vec{\mathit{э}}_2 + p_n^3 \vec{\mathit{э}}_3 = p_n^i \vec{\mathit{э}}_i$$

kuchlanishning tutash muhitning berilgan nuqtasida olingan ixtiyoriy orientirlangan yuzachasidagi p_n^i komponentasi quyidagi formulalar orqali ifodalanadi.

$$\begin{aligned} p_n^1 &= p^{11}\cos(\bar{n},x) + p^{12}\cos(\bar{n},y) + p^{13}\cos(\bar{n},z) = p^{1i} n_i, \\ p_n^2 &= p^{21}\cos(\bar{n},x) + p^{22}\cos(\bar{n},y) + p^{23}\cos(\bar{n},z) = p^{2i} n_i, \\ p_n^3 &= p^{31}\cos(\bar{n},x) + p^{32}\cos(\bar{n},y) + p^{33}\cos(\bar{n},z) = p^{3i} n_i. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Shunday qilib, P matrisa $\vec{n} = n_i \vec{\mathit{э}}^i$ vektorning n_i komponentasini $\vec{p}_n$ vektorning p_n^i komponentasiga almashishini aniqlaydi.

Tutash muhit harakatining vektor tenglamalari (3.2) ga 9 ta p^{ik} funksiyalar kiradi, ularni dekart koordinatalar sistemasining o'qlariga nisbatan proeksiyalarda quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= \rho F_x + \frac{\partial p^{11}}{\partial x} + \frac{\partial p^{12}}{\partial y} + \frac{\partial p^{13}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dv}{dt} &= \rho F_y + \frac{\partial p^{21}}{\partial x} + \frac{\partial p^{22}}{\partial y} + \frac{\partial p^{23}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dw}{dt} &= \rho F_z + \frac{\partial p^{31}}{\partial x} + \frac{\partial p^{32}}{\partial y} + \frac{\partial p^{33}}{\partial z}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

bu yerda F_x, F_y, F_z orqali $\vec{F}$ hajmiy (massaviy) kuch zichliklarining koordinata o'qlariga proeksiyalari belgilangan.

Agarda bu tenglamalarga (1.3) uzviylik tenglamalarini qo'shsak, u holda biz berilgan tashqi massaviy kuchlarda, umuman olganda, 13 ta noma'lum funksiya: zichlik - ρ, tezlik komponentalari *u, v, w*, va ichki sirt kuchlanishlarining to’rta komponentasi p^{ik} larga bog'liq 4 ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

2. Kuchlanish tenzori

Orientirlangan yuzachadagi $\vec{p}_n$ kuchlanish vektorining koordinata yuzachalardagi $\vec{p}^1, \vec{p}^2, \vec{p}^3$ kuchlanish vektorlari orasidagi munosabatlar (3.4) orqali ifodalanadi. Bu munosabatlarni (3.4) formulalar yordamida quyidagicha yozish mumkin

$$\vec{p}_n = \vec{p}^i n_i = p^{ki} \vec{\mathit{э}}_k n_i = \vec{p}^i (\vec{\mathit{э}}_i \vec{n}) = p^{ki} \vec{\mathit{э}}_k (\vec{\mathit{э}}_i \vec{n}). \tag{3.6}$$

Bu tenglik $\vec{n}$ vektor komponentalarini $\vec{p}_n$ vektorning komponentalariga p^{ki} koeffisientlar bo'yicha chiziqli almashtiradi. Bu tenglik ortogonal dekart koordinatalar sistemasi yordamida hosil qilingan va demak, p^{ki} lar ixtiyoriy ortogonal dekart koordinatalar sistemasida aniqlangan. (3.6) munosabat $\vec{p}_n$ va $\vec{n}$ vektorlar orasidagi bog'lanishni ifodalaydi va shuning uchun uni ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida yozish mumkin. Bundan kelb chiqadiki,

$$P = P^{ki} \vec{\mathit{э}}_k \vec{\mathit{э}}_i \tag{3.7}$$

tenzorning kontravariant komponentalari sifatida qarash mumkin bo'lgan p^{ki} miqdorlarni (3.6) tenglik yordamida nafaqat ortogonal dekart o'qlarda balkim ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida ham kiritish mumkin. (3.7) ko'rinishdagi tenzor *ichki kuchlanish tenzori deyiladi*. Shu bilan birga ixtiyoriy koordinatalar sistemasida

$$\vec{p}_n = P \cdot \vec{n} = \vec{p}^{\,i} n_i$$

tenglik o'rinli, bu yerda $\vec{p}_n - \vec{n}$ normalli ixtiyoriy yuzachadagi kuchlanish, $n_i - \vec{n}$ normalning kovariant komponentalari.

3. Kuchlanish vektorining fizik komponentalari

Aytish kerakki, $\vec{p}^{\,i} = \vec{p}_n$ tenglik mos keluvchi koordinat yuzachalarda faqatgina ortogonal dekatr koordinatalar sistemasida bajariladi, ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida mos keluvchi koordinat yuzachalarda $\vec{P}^{i} \neq \vec{P}_n$ ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Haqiqatan ham berilgan egri chiziqli koordinatalar sistemasida $\vec{Э}_{i+1}$ *va* $\vec{Э}_{i+2}$ bazis vektorlari orqali aniqlanadigan yuzachani qaraymiz, bu yuzachaga nisbatan normalning yo'nalishini

$$\vec{Э}^{\,i} = \frac{\vec{Э}_{i+1} \times \vec{Э}_{i+2}}{\sqrt{g}}$$

kontravariant bazis vektorni yo'nalishlari kabi aniqlaymiz. Bu yo'nalishning bazis vektor

$$\vec{n}^{\,i} = \frac{\vec{Э}_i}{\sqrt{g^{ii}}}$$

formula orqali aniqlanadi, bu yerda $g^{ii} > 0$, kvadrat ildiz esa bu yerda va bundan keyin musbat ishora bilan olinadi. (3.6) ga ko'ra bunday yuzachalar kuchlanish vektori $\vec{p}^{\,n}$ orqali belgilaymiz va u

$$\vec{p}_i^{\,*} = \frac{p^{\alpha k}\vec{Э}_\alpha\left(\vec{Э}_k \cdot \vec{Э}^{\,i}\right)}{\sqrt{g^{ii}}} = \frac{p^{\alpha i}\vec{Э}_\alpha}{\sqrt{g^{ii}}}$$

ko'rinishda tasvirlanadi va demak, umuman olganda

$$\vec{p}^{\,i} = p^{\alpha i}\vec{Э}_\alpha$$

kuchlanish vektorini qaralayotgan nuqtada olingan $\vec{Э}_\alpha / \sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ bazisning birlik vektorlari bo'yicha yoyish mumkin, ya'ni

$$\vec{P}_i^{\,*} = X^{\alpha i}\frac{\vec{Э}_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}.$$

$X^{\alpha i}$ *miqdorlar* $\vec{p}_i^{\,*}$ *kuchlanish vektorining fizik komponentalari* deyiladi. Keyingi ikkita tengliklar asosida

$$P^{\alpha i} = X^{\alpha i}\frac{\sqrt{g^{ii}}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}$$

deb yozishimiz mumkin (bu formulada α bo'yicha yig'indi yo'q). Bu yerdan ko'rinadiki $X^{\alpha i}$ fizik komponentalar hech qanday tenzorning komponentasi bo'la olmaydi.

Ortogonal Dekart koordinatalar sistemasida

$$p^{\alpha i} = X^{\alpha i}$$

bo'ladi.

4. Ixtiyoriy koordinatalar sistemasida tutash muhitning harakat tenglamalari

(3.2) harakat miqdorining vektor tenglamalaridan

$$\int_V \rho \frac{d\bar{v}}{dt} d\tau = \int_V \vec{F} \rho d\tau + \int_\Sigma \vec{p}_n d\tau$$

hamda Gauss-Ostrogradskiy teoremasi

$$\int_\Sigma \vec{p}_n d\sigma = \int_\Sigma \vec{p}^i n_i d\sigma = \int_V \vec{p}^i d\tau$$

ga ko'ra uzluksiz harakatlar holida ixtiyoriy chiziqli koordinatalar sistemasida bajariladigan quyidagi harakat tenglamalarini hosil qilamiz.

$$\rho\vec{a} = \rho\vec{F} + \Delta_i \vec{p}^i \text{ yoki } \rho a^k = \rho F^k + \Delta_i \vec{p}^{ki} \qquad (3.8)$$

(3.8) harakat tenglamalarida

$$a^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^i \Delta_i v^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^i \left(\frac{\partial v^k}{\partial^i} + v^s \Gamma^k \right)$$

va

$$\Delta_i \vec{p}^i = \frac{\partial \vec{p}^i}{\partial \eta^i} + \vec{p}^s \Gamma^i_s = \left(\Delta_i p^{ki}\right) \vec{\partial}_k .$$

(3.8) vektorli tenglama ham harakatlanuvchi, ham qo'zg'almas koordinatalar sistemasida o'rinli, xususiy holda hisob sistemasida ham, yo'ldosh sistemada ham o'rinli. Ammo shuni hisobga olish kerakki $\vec{a}$ vektor tutash muhit individual nuqtalarining biror bir inersial koordinatalar sistemasiga nisbatan tezlanishidan iborat, $\vec{F}$ esa berilgan massaviy kuchlarning zichliklaridan iborat. Agarda harakat va tezlanishni noinersial koordinatalar sistemasiga nisbatan qarasak, u holda $\vec{F}$ ning ifodasiga inersiya kuchlarini ham qo'shish kerak.

Tutash muhitda ρdi massali cheksiz kichik zarrachasi qaraymiz, unga $\rho \vec{F} d\tau$ - massaviy kuchlar hamda yo'ldosh koordinatalar sistemasida inersiya kuchlaridan iborat bo'lgan $\rho \vec{a} d\tau$ kuchlar, zarracha chegarasida sirt kuchlari tasirida paydo bo'layotgan massaviy kuchlar deb qarash mumkin bo'lgan $\Delta_i \vec{p}^i d\tau = \left(\Delta_i P^{ki}\right) \vec{\partial}_k d\tau$ kuchlar ta’sir qiladi. (3.8) tenglamani yo'ldosh koordinatalar sistemasiga nisbatan muvozanat sharti deb qarash mumkin; (3.8) ga ko'ra zarrachaga ta'sir qiluvchi barcha kuchlar yig'indisi 0 ga teng. Agarda $P = p^{ki} \vec{\partial}_k \vec{\partial}_i$ tenzor tutash muhitning barcha nuqtalarida o'zgarmas bo'lsa, u holda $\Delta_i \vec{p}^i = 0$ bo'ladi. Dekart koordinatalar sistemasida p^{ki} kuchlanish tenzori komponentalari harakat tenglamalariga faqatgina ular *x, y, z* koordinatalardan bog'liq bo'lganda qatnashadilar. Shu bilan birga

$$\Delta_i \vec{P}^i = 0 \text{ yoki } \Delta_i \vec{p}^{ki} = 0$$

tenglik hamda $P = p^{ki} \vec{\partial}_k \vec{\partial}_i = \cos t$ tenglik ekvivalent emas. Masalan, agar massaviy kuchlar ta'sir qilmayotgan muhit muvozanatda bo'lsa, u holda

$$\Delta_i \vec{p}^{ki} = 0 .$$

Bu tenglama faqat tashqi sirt kuchlari bilan yuklangan har xil ob'ektlarning muvozanati haqidagi masalalar qaralayotganda elastiklik nazariyaning asosiy tenglamasi hisoblanadi.

Xulosa

Shunday qilib, muhitga ta’sir etuvchi sirt, massaviy va inersiya kuchlari muvozanati shartidan Dekart va ixtiyoriy koordinatalarda tutash muhitning harakat tenglamalari keltirib chiqarildi

Mustaqil ishlar uchun savollar.

1. Tutash muhit harakatining asosiy differensial tenglamasini yozing (vektorli ko'rinishi).
2. *P* matrisa nimani aniqlaydi.
3. Dekart koordinatalar sistemasida tutash muhitning harakat tenglamalari qanday ko'rinishda bo'ladi?
4. Kuchlanish tenzori deb nimaga aytiladi?
5. Kuchlanish tenzorining fizik komponentalarini keltiring.
6. Ixtiyoriy koordinatalar sistemasida tutash muhit harakat tenglamalarini keltiring.
7. Gauss – Ostrogradsiy formulasini yozing.
8. Vektorning kovariant va kontravariant komponentasini yozing.

4-Ma'ruza:
HARAKAT MIQDORI MOMENTLARITENGLAMALARI
Reja:

1. Moddiy nuqta va nuqtalar sistemasi uchun harakat miqdori momentlari tenglamasi.
2. Chekli hajmdagi tutash muhit harakati miqdori momenti.
3. Harakat miqdorining momentlari.
4. Taqsimlangan massaviy va sirt juftlari.
5. Chekli hajmdagi tutash muhit uchun harakat miqdori momentlari tenglamasi.
6. Klassik holatda harakat miqdori momentlari tenglamalari.
7. Giromagnit effekt va harakat momentlari tenglamalari.

Tayanch iboralar: harakat miqdori, harakat miqdori momenti, hajm, juftlar, kuchlanish tenzori, radius - vektor, massa, ichki kuchlar, nuqtalar sistemasi, og'irlik markazi tezligi

1. Moddiy nuqta va nuqtalar sistemasi uchun harakat miqdori momentlari tenglamasi

Yuqorida takidlaganimizdek, hosil qilingan tutash muhit harakatining universal tenglamalari sistemasi to'liq emas. Harakatlanuvchi muhitning hususiy xossalariga bog'liq bo'lmagan boshqa universal tenglamalarni ham hosil qilish mumkin. Shu maqsadda mexanikaning umumiy tenglamalaridan biri bo'lgan harakat miqdori momentlari tenglamalarini ko'rib chiqamiz.

Ushbu

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

tenglamani chap tomondan qaralayotgan *m* massali Moddiy nuqtaning biror bir inersial koordinatalar sistemasining boshi *0* nuqtaga nisbatan *r* - radius vektorga vektorli ko'paytirib, nuqta uchun harakat miqdori momenti tenglamalarini hosil qilamiz:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = M, \tag{5.1}$$

bu erda

$$\vec{K} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad \text{va} \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

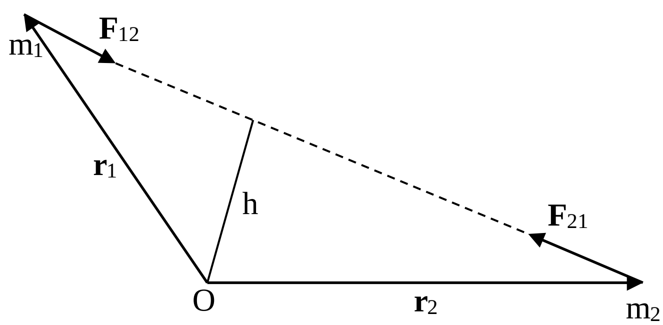
lar mos ravishda moddiy nuqta harakati miqdori momenti va *0* nuqtaga nisbatan unga ta'sir qiluvchi $\vec{F}$ - yig'indi kuchning momenti. Shunday qilib, bitta moddiy nuqta uchun harakat miqdori momentlari tenglamalari N'yuton 2- qonunning trivial natijasidir.

Agarda biz $\vec{v}_i$ tezlik bilan harakatlanuvchi m_i massali n ta moddiy nuqtalar sistemasiga ega bo'lsak, u holda ularning har biri uchun (4.1) harakat miqdori momentlari tenglamalarini yozishimiz mumkin:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i,$$

bu erda $\vec{F}_i - m_i$ massali qaralayotgan nuqtaga ta'sir qiluvchi barcha (shu bilan birga butun sistemaga nisbatan ichki bo'lgan) kuchlarning bosh vektori. Bu tengliklarni sistemaning barcha *n* ta nuqtasi uchun qo'shib va sistema harakat miqdori momentini

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)$$



4.1-chizma

ko'rinishda aniqlab, sistema nuqtalari uchun harakat miqdori momentlari tenglamalarini hosil qilamiz

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}\right),$$

bu yerda o'ng tomonda N'yutonning 3 - qonuniga ko'ra kuchlar ning butun sistemasiga nisbatan faqat tashqi momentlar yig'indisi turadi (4.1-chizma). Biror bir *0* nuqtaga nisbatan nuqtalar sistemasining harakat miqdori momentidan vaqt bo'yicha olingan hosilasi, o'sha *0* nuqtaga nisbatan sistemaga ta'sir qiluvchi barcha tashqi kuch momentlarining yig'indisiga teng.

Moddiy nuqtalar sistemasi harakat miqdori momentini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$\vec{K} = \vec{r}\,^* m\vec{v}\,^* + \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_{i\ nisb} \times m_i \vec{v}_{i\ nisb}\right),$$

bu yerda $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$, $\vec{r}\,^* -$ sistema massalar markazi radius vektori, $\vec{v}\,^* -$ massalar markazi tezligi, r_i - massalar markaziga nisbatan *i* - nuqtaning radius - vektori, $\vec{v}_i$ - massalar markazi bilan ilgarilanma harakat qilayotgan koordinatalar sistemasiga nisbatan *i* - nuqtaning tezligi.

2. Chekli hajmdagi tutash muhit harakati miqdori momenti

V hajmdagi tutash muhitning harakat miqdori momenti deb odatda quyidagi vektorni aytishadi

$$\vec{K} = \int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau, \tag{4.2}$$

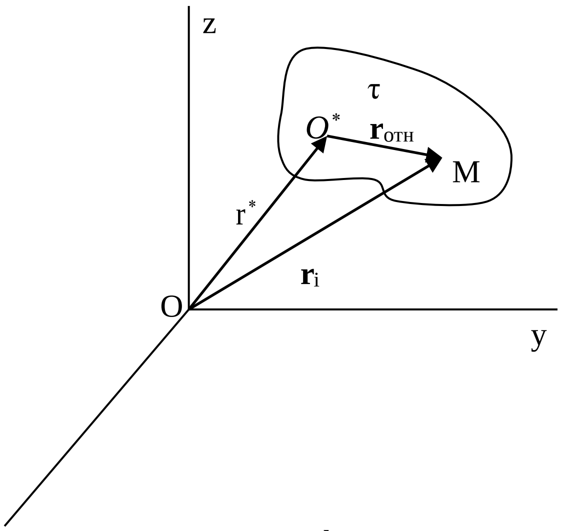
bu yerda $\vec{r}$ - biror bir qo'zg'almas *0* nuqtaga nisbatan tutash muhit nuqtalarining radius - vektorlari, $\vec{v}$ esa ularning tezliklari.

Faraz qilaylik biz tutash muhitning m massali biror bir τ hajmiga ega bo'laylik. Bu hajmning ixtiyoriy M nuqtasining $\vec{v}$ - tezligini (4.2 - chizma)

$$\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{v}_{nisb}$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin, bu yerda $\vec{v}^* - \tau$ hajm massalar markazi *0** ning tezligi, $\vec{v}_{nisb}$ - qaralaiayotgan nuqtaning massalar markaziga nisbatan tezligi. U holda biror bir *0* nuqtaga nisbatan τ hajm harakat miqdori momenti hajm massalar markazi bilan mos tushuvchi m – massali moddiy nuqtaning 0 nuqtaga nisbatan harakat miqdori momentiga hamda *0**massalar markaziga nisbatan τ hajmdagi barcha *M* nuqtalar harakat miqdori momentlari yig'indisiga teng, ya'ni

$$\vec{K} = \vec{r}^* \times \overline{Q} + \int_\tau \vec{r}_{nisb} \times \vec{v}_{nisb} \rho d\tau,$$



1.2-chizma

bu yerda

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v}^*$$

massalar markazi bilan mos tushuvchi m -massali Moddiy nuqta harakat miqdori. Yuqoridagi munosabatni quyidagicha yozib olamiz

$$\vec{K} = \vec{r}^* \times \overline{Q} + \overline{K}^*, \qquad \overline{K}^* = \int_V \vec{r}_{nisb} \times \vec{v}_{nisb} \rho d\tau .$$

Endi cheksiz kichik $d\tau$ hajmni qaraymiz. Ko'p hollarda cheksiz kichik hajm uchun $\vec{r}^* \times \vec{Q}$ miqdorga nisbatan $\vec{K}^*$ - harakat miqdori momentini hisobga olmaslik mumkin. Masalan, $d\tau$ ni *0** markazdan o'tuvchi o'z o'qi atrofida $\vec{\omega}$ - burchak tezligi bilan aylanuvchi R - radiusli bir jinsli sfera sifatida olsak, u holda

$$\vec{K}^* = \vec{I}\omega = m\ell^2\omega,$$

bu yerda I - inersiya momenti, ℓ - bu sferaning o'z aylanish o'qiga nisbatan inersiya radiusi. Ko'rinib turubdiki, $m\,\ell$ miqdor R^5 tartibga ega, $r^* \times Q$ esa R^3 tartibga ega hamda agarda ω- chekli bo'lsa, v^* miqdor $r^* \times Q$ ga nisbatan kichik, *V* hajmdagi tutash muhit harakat miqdori momenti $\vec{K}$ ning limitik holati esa

$$\int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau$$

ko'rinishda bo'ladi.

Lekin, agarda ω - burchak tezligi shunchalik katta bo'lsaki, $\omega\,\ell^2$ miqdor chekli bo'lsa, u holda $\vec{K}^*$ va $\vec{r}^* \times \vec{Q}$ miqdorlar bir xil R^3 tartibga ega va V hajmdagi tutash muhit harakat miqdori momenti quyidagiga teng bo'ladi

$$\vec{K} = \int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau + \int_V \vec{k} \rho d\tau, \tag{4.3}$$

bu yerda *k* orqali *harakat miqdorining ichki (yoki xos) momentlarining zichligi* belgilangan.

3. Harakat miqdorining momentlari

O'rganilayotgan masalani fisik mikroskopik nuqtai nazardan qaraymiz. Yadro va uning atrofida aylanuvchi elektrondan iborat sistemani, ya'ni atomni qaraymiz. Elektron o'z orbitasi bo'ylab yorug'lik tezligi tartibidagi tezlik bilan aylanadi, shuning uchun atomning kichik o'lchamiga qaramasdan, yadro-elektron sistemasi anchagina harakat miqdorining xos momentiga ega. Elektronning orbita bo'ylab aylanish hisobiga hosil bo'layotgan harakat miqdori momenti, *harakat miqdorining orbital momenti* deyiladi.

Shunday qilib, barcha atomlar *k* ga teng harakat miqdori xos momentiga ega. Lekin bu harakat miqdori momentlari yig'indisi barcha atomlar uchun ko'p hollarda ularning xaotik harakati tufayli nolga teng. Ammo elementar zarrachalar harakatini, masalan maqnit maydonini qo'yib tartiblash mumkin va bu holda barcha atomlar ichki momentlar yiq'indisi noldan farqli bo'ladi. Tutash muhit makroskopik zarracha harakat miqdori momenti ifodasiga, umuman,

$$\vec{K}' = \int_V \vec{k}\rho d\tau$$

harakat miqdori xos momentlari yig'indisi kiradi.

Shunday qilib, agar masalan biz tutash muhit mexanikasida real muhitlarning elektromagnit maydonda harakatini ifodalamoqchi bo'lsak, u holda biz $\vec{k}$ xos momentlarni kiritishimiz kerak va bu larni hisobga olib, *V* hajmdagi tutash muhit harakati momentlarini (4.3) bo'yicha aniq qlashimiz kerak.

Tutash muhit mexanikasida harakat miqdori xos momentlari faqat oxirgi vaqtlarda qaralmoqda, sababi hozirgi zamon texnikasining rivojlanib borishi bilan tutash muhit mexanikasi masalalari ancha kengaygan. Tutash muhitning klassik masalalarida $\vec{k}$ - ichki momentlar hisobga olinmaydilar va *V* hajmdagi tutash muhitning harakat miqdori momenti

$$\int_V \vec{r} \times \vec{v} d\tau$$

ko'rinishda aniqlanadi.

4. Taqsimlangan massaviy va sirt juftlari

Ichki moment $\vec{K}$ larni qaraganda biz taqsimlangan massaviy va sirt juftlari mavjud deb faraz qilishimiz kerak.

Tutash muhitning har bir zarrachasiga taqsimlangan massaviy va sirt kuchlari ta'sir qiladi. Ammo shunday bo'lishi mumkinki, tashqi Moddiy ob'ektlarning tutash muhit zarrachasiga ta'sirini faqat bu kuchlar bilan almashtirib bo'lmaydi, bundan tashqari massaviy va sirt juftlari kiritish kerak bo'ladi.

$\vec{Q}_n$ va $\vec{h}$ orqali sirt va massa birligiga nisbatan mos ravishda sirt va massaviy juftlar momentini belgilaymiz. Taqsimlangan massaviy juftlarga misol bo'lib, yer magnit maydonida joylashgan kompas strelkasining har bir elementiga ta'sir qiluvchi juftlarni qarash mumkin.

5. Chekli hajmdagi tutash muhit uchun harakat miqdori momentlari tenglamasi

Bitta Moddiy nuqta va nuqtalar sistemasi uchun harakat miqdori momentlari tenglamalarini chekli individual *V* hajmdagi, $\sum$ sirt bilan chegalangan tutash muhit harakati miqdori tenglamalari uchun umumlashtiramiz

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau + \int_V \vec{k}\rho d\tau\right) = \int_V \vec{r} \times \vec{F}\rho d\tau + \int_\Sigma \overline{r} \times \overline{p}_n d\sigma + \int_V \vec{h}\rho d\tau + \int_\Sigma \overline{Q}_n d\sigma. \tag{4.4}$$

Ixtiyoriy *V* individual hajmdagi tutash muhitning harakat miqdori momentidan vaqt bo'yicha hosilasi bu hajmga ta'sir qiluvchi tashqi massaviy va sirt kuchlari momentlari yig'indisiga va hajmga nisbatan tashqi ob'ektlar ta'sirida paydo bo'lgan taqsimlangan massaviy va sirt juftlar momentlarining yig'indisiga teng.

Harakat miqdorining momentlari tenglamalari, harakat miqdori tenglamalari kabi V hajmdagi tutash muhit uchun huddi bitta Moddiy nuqta uchun N'yutonning $\vec{F}=m\vec{a}$ qonuni bajarilgani kabi bajariladi. Shuni aytishimiz kerakki, ixtiyoriy individual V hajmdagi tutash muhitning harakat miqdori momentlari tenglamalari Moddiy nuqtalar sistemasi mexanikasining harakat miqdori momentlari tenglamalaridan kelib chiqmaydi. Bu tenglama alohida tenglama hisoblanadi. Bu tenglama ixtiyoriy tutash muhitlar uchun ham uzliksiz, ham xarakteristikali, vaqt va fazo nuqtalari koordinatalari bo'yicha uzilishga ega bo'lgan ixtiyoriy harakatlarda qo'llash mumkin.

6. Klassik holda harakat miqdori momentlari tenglamalari

Klassik holda ichki harakat miqdori momentlari qatnashmaganda hamda taqsimlangan massaviy va sirt juftlari qatnashmaganda harakat miqdori momentlari tenglamalari quyidagi ko'rinishga keladi

$$\frac{d}{dt}\int_V \vec{r}\times\vec{v}\rho d\tau=\int_V \vec{r}\times\vec{F}\rho d\tau+\int_\Sigma \vec{r}\times\vec{p}_n\rho d\sigma. \qquad (4.5)$$

Inersial koordinatalar sistemasiga bog'liq biror bir 0 nuqtaga nisbatan tutash muhitning individual V hajmi harakat miqdori momentidan vaqt bo'yicha olingan o'sha nuqtaga nisbatan bu hajmga ta'sir qiluvchi tashqi massaviy va sirt kuchlari momentlarining yig'indisiga teng.

Agarda bu jismga tashqi kuchlar ta'sir qilmasa, u holda

$$\frac{d\vec{k}}{dt}=0$$

bo'ladi va harakat miqdori momenti $\vec{k}$ o'zgarmas bo'ladi.

7. Giromagnit effekt va harakat momentlari tenglamalari

Endi biz harakat miqdorining ichki momentlari va taqsimlandan massaviy juftlarni hisobga olish kerakligini ko'rsatayot tajriba o'tkazamiz. Agarda magnit maydonda temir sterjenni joylashtirsak, u holda u magnitlanadi va ko'rsatish mumkinki, $\vec{k}$ ichki momentlar yig'indisi noldan farqli bo'ladi.

Haqiqatan, faraz qilaylik bu sterjen bo'shliqda maqnit maydon ta'sirida erkin holatda joylashgan bo'lsin. Magnit maydonni olib tashlaymiz. U holda xaotik harakat tufayli sterjenda biror vaqt o'tgach $\vec{k}$ - ichki momentlarning taqsimlanishi tartibsiz bo'lib qoladi va shuning uchun harakat miqdori ichki momentlar yig'indisi nolga teng bo'ladi.

Shu bilan birga sterjenga hech qanday tashqi obektlar ta'sir qilmagani uchun harakat miqdorining to'liq momenti saqlanib qolishi kerak. Shuning uchun sterjenning to'laligicha aylanishi hisobiga harakat miqdori momenti paydo bo'lishi kerak va sterjen aylanishi kerak.

Tajriba shuni ko'rsatadiki, magnit maydonini olib tashlagandan keyin sterjen haqiqatan aylanib boshlaydi. Bunday hodisani *giromagnit effekt* deb ataymiz. Bu hodisani harakat miqdori ichki momenti va taqsimlangan massaviy juftlarni hisobga olmasdan tushintirib bo'lmaydi.

8. Differensial formada harakat miqdori momentlari tenglamalari

Tutash muhitning uzluksiz harakatida (3.4) tenglik va Gauss-Ostrogradsikiy teoremasidan foydalanib, tashqi sirt kuchlari momentlari yig'indisi uchun V hajm bo'yicha olingan integral ko'rinishidagi ifodani hosil qilish mumkin:

$$\int_\Sigma \vec{r}\times\vec{p}_n d\tau=\int_\Sigma (\vec{r}\times\vec{p}^{\,i})n_i d\sigma=\int_V \Delta_i(\vec{r}\times\vec{p}^{\,i})d\tau$$

Xuddi $\vec{p}_n$ ichki kuchlanishlar kabi taqsimlangan sirt juftlari momentlari $\vec{Q}_n$ ni quyidagi ko'rinishda tasvirlash mumkin

$$\vec{Q}_n=\vec{Q}^i n_i\,.$$

U holda Gauss - Ostrogradskiy teoremasiga ko'ra

$$\int\limits_{\Sigma} \vec{Q}_n d\sigma = \int\limits_{\Sigma} \vec{Q}^i n_i d\sigma = \int\limits_{V} \Delta_i \vec{Q}^i d\tau$$

quyidagi almashtirishdan foydalanamiz

$$\int\limits_{V} \Delta_i (\vec{r} \times \vec{p}^i) d\tau = \int\limits_{V} \vec{r} \times \Delta_i \vec{p}^i d\tau + \int\limits_{V} \Delta_i \vec{r} \times \vec{p}^i d\tau =$$
$$= \int\limits_{V} \vec{r} \times \Delta_i \vec{p}^i d\tau + \int\limits_{V} \Delta_i (\vec{\ni}_i \times \vec{\ni}_k) \vec{p}^{ki} d\tau,$$

chunki $\Delta_i \vec{r} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = \vec{\ni}_i$.

Endi $dm = \rho d\tau$ massani o'zgarmas deb (4.4) harakat miqdori momenti haqidagi teoremani

$$\int\limits_{V} \left[\vec{r} \times \left(\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{F} - \frac{1}{\rho} \Delta_i \vec{p}^i \right) \right] \rho d\tau + \int\limits_{V} \frac{d\vec{k}}{dt} \rho d\tau =$$
$$= \int\limits_{V} \vec{h} \rho d\tau + \int\limits_{V} \Delta_i \vec{Q}^i d\tau + \int\limits_{V} (\vec{\ni}_i \times \vec{\ni}_n) p^{ki} d\tau$$

ko'rinishda yozish mumkin, yoki (3.6) harakat miqdori tenglamalariga ko'ra quyidagi ko'rinishda

$$\int\limits_{V} \frac{d\vec{k}}{dt} \rho d\tau = \int\limits_{V} \vec{h} \rho d\tau + \int\limits_{V} \Delta_i \vec{Q}^i d\tau + \int\limits_{V} (\vec{\ni}_i \times \vec{\ni}_n) p^{ki} d\tau$$

yozish mumkin. Bu yerdan tutash muhit hajmi V - ixtiyoriyligidan tutash muhitning uzluksiz harakatida differensial shaklda harakat miqdori momentlari tenglamalarini hosil qilamiz:

$$\rho \frac{d\vec{k}}{dt} = \rho \vec{h} + \Delta_i \vec{Q}^i + (\vec{\ni}_i \times \vec{\ni}_k) p^{ki}. \qquad (4.6)$$

Klassik hol uchun (4.6) tenglamalar (ichki momentlar hamda taqsimlangan sirt va massaviy taqsimlangan juftlar mavjud bo'lmagan holda) quyudagi

$$(\vec{\ni}_i \times \vec{\ni}_k) p^{ki} = 0 \qquad (4.7)$$

ko'rinishga ega.

9. Klassik holda kuchlanish tenzorining simmetriyaligi

(4.7) momentlar tenglamalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$\underset{k<i}{(\vec{\ni}_i \times \vec{\ni}_k)} p^{ki} + \underset{k>i}{(\vec{\ni}_i \times \vec{\ni}_k)} \cdot p^{ki} = 0$$

Oxirgi yig'indida yig'indi indekslari k ni i ga, i ni k ga almashtiramiz va

$$\underset{k<i}{(\vec{\ni}_i \times \vec{\ni}_k)} p^{ki} + \underset{k<i}{(\vec{\ni}_i \times \vec{\ni}_k)} \cdot p^{ik} = 0$$

bo'ladi yoki vektorli ko'paytma xossasiga ko'ra

$$\underset{k<i}{(\vec{\ni}_i \times \vec{\ni}_k)} (p^{ki} - p^{ik}) = 0.$$

Bu yerdan $p^{ki} = p^{ik} (k \neq i)$, ya'ni

$$p^{13} = p^{31}, \quad p^{22} = p^{21}, \quad p^{12} = p^{23} = p^{32}.$$

Shunday qilib, klassik holatda momentlar tenglamalari kuchlanish tenzori simmetrik degan natijaga olib kelar ekan. Agarda kuchlanish tenzori simmetrik bo'lsa, (4.7) harakat miqdori tenglamalari aynan bajariladi.

Xulosa

Shunday qilib, muhitga ta’sir etuvchi sirt, massaviy va inersiya kuchlari muvozanati shartidan Dekart va ixtiyoriy koordinatalarda tutash muhitning harakat tenglamalari keltirib chiqarildi

Mustaqil ishlar uchun savollar:

1. Moddiy nuqta harakat miqdori momenti nimaga teng.
2. Sistema nuqtalari harakat miqdori momentlari tenglamalarini hosil qilamiz.
3. Chekli hajmdagi tutash muhit harakat miqdori momentlari tenglamalarini yozing.
4. Klassik holdagi harakat miqdori momentlari tenglamalarida ichki harakat miqdori momentlari qatnashadimi?
5. Qanday holatda harakat miqdori momenti o’zgarmas bo’ladi.
   Harakat miqdori momentlari tenglamalarini differensial ko’rinishda yozing

5- Ma'ruza.
SIMMETRIK KUCHLANISH TENZORINING BOSH O'QI VA BOSH KOMPONENTALARI

Reja:

1. Kuchlanish tenzorining tenzor sirti.
2. Simmetrik kuchlanish tenzorining bosh o'qlari.

Tayanch iboralar: *tenzor, kuchlanish, bosh o'q va bosh komponenta, normal, sirt kuchlari, kvadratik shakl, sfera, yuzacha*

1. Kuchlanish tenzorining tenzor sirti

Kuchlanish tenzorining tenzor sirtini tuzamiz. Ixtiyoriy 0 nuqtani tanlaymiz va undan o'tuvchi $\vec{n}$ normal bilan xarakterlanuvchi $d\sigma$ yuzachalarni qaraymiz. Bu yuzachalarning har biriga kuchlanish (yoki kuchlanish vektori) deb ataluvchi p_n tashqi kuch zichligi ta'sir qiladi. $\vec{p}_n$ kuchlanishni mos keluvchi $\vec{n}$ normalga proeksiyalab, quyidagini hosil qilamiz

$$p_{nn} = \vec{p}_n \cdot \vec{n} = \left(\vec{p}^{\,i} \cdot \vec{n}\right) \cdot n_i = p^{ki} n_k n_i .$$

Osonlik uchun dekart koordinatalar sistemasidan foydalanamiz. 0 nuqtadan chiquvchi $\vec{n}$ normal bo'ylab yo’nalgan $\vec{r} = x_i \cdot \vec{э}^{\,i}$ vektorlarni kiritamiz, u holda, $\bar{r}$ vektorning uzunliklarini shunday tanlaymizki

$$p_{nn} r^2 = p^{ki} x_k x_i = 2\Phi(x, y, z) = const$$

bo'lsin, bu yerda $2\Phi(x, y, z) -$ simmetrik kuchlanish tenzori P ga mos keluvchi kvadratik shakl. Ushbu

$$p^{ki} x_k x_i = 2\Phi(x, y, z) = const$$

shart o'rinli bo'lgan barcha nuqtalarning geomatrik o'rni kuchlanish tenzorining tenzor sirtidir. Ichki kuchlanishning asosiy xossasini

$$\vec{p}_n = \vec{p}^{\,i} n_i = \vec{p}^{\,i} \frac{x_i}{r}$$

ko'rinishda yoki dekart koordinatalar sistemasining x_k o'qiga proeksiyalarda

$$r p_n^k = p^{ki} x_i$$

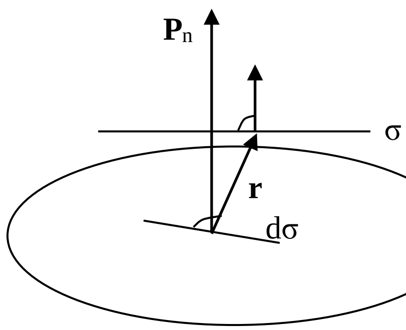
ko'rinishda yozish mumkin.

Bevosita tekshirish orqali

$$p^{ki} x_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$$

ekanligini ko'rsatish mumkin, va demak

$$r p_n^k = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \text{ ya'ni } \quad r\vec{p}_n = grad\, \Phi .$$



5.1-rasm

Shuning uchun $\Phi = const$ - tenzor sirtini $\vec{r}$ normalli $d\sigma$ yuzachaga ta'sir qiluvchi $\vec{p}_n$ kuchlanish yo'nalishini quyidagicha aniqlash mumkin. *0* nuqtadan berilgan yuzachaga $\vec{r}$ vektor o'tkaziladi (6.1-chizma). $\vec{v}$ vektorning $\Phi = const$ tekislik bilan keshishish nuqtasida tenzor sirtiga σ urinma tekislik o'tkazamiz. Ayonki $\vec{p}_n$ vektor σ urinma tekislikka perpendikulyardir.

2. Simmetrik kuchlanish tenzorining bosh o'qlari

Ma'lumki 2-tartibli sirt urinma tekisliklar $\sigma\vec{r}$ ga perpendikulyar bo'lgan hech bo'lmaganda uchta $\vec{r}$ yo'nalishga ega. Bunday yonalishlar *bosh yo'nalishlar* deyiladi va ular uchun $\vec{p}_n \perp d\sigma$. Umumiy holda bunday yo'nalishlar faqat uchta. Ular ortogonal tetraedrni tashkil etadi va *kuchlanish tenzorining bosh o'qlari* deyiladi. Agarda $\Phi = const -$ tenzor sirti aylanish sirtidan iborat bo'lsa, masalan sfera bo'lsa, u holda bunday yo'nalishlar cheksiz ko'p bo'ladi. Bosh yo'nalishlarga ortogonal bo'lgan yuzachalarda $\vec{p}_n$ va $\vec{r}$ kolleniardir, va demak quyidagi shartlar bajarishi kerak

$$\vec{p}_n = p^{ki} n_i \vec{\mathfrak{s}}_k = \lambda \vec{n} = \lambda n_i \vec{\mathfrak{s}}^i \qquad (5.1)$$

yoki

$$p_k^i n_i \vec{\mathfrak{s}}^k = \lambda \delta_k^i n_i \vec{\mathfrak{s}}^k ,$$

bu yyerda

$$\left(p_k^i - \lambda \delta_k^i\right) n_i \vec{\mathfrak{s}}^k = 0,$$

yoki

$$\left(p_k^i - \lambda \delta_k^i\right) n_i = 0 . \qquad (5.2)$$

Biz uchta n_i ning bosh yo'nalishlarining yo'naltiruvchi kosinuslarini aniqlash uchun uchta algebraik tenglamalarning bir jinsli sistemasini hosil qildik. Bu sistema faqat quyidagi shartlarda notrivial yechimga ega, ya'ni

$$\Delta = Det\left\| p_k^i - \lambda \delta_k^i \right\| = \left| p_k^i - \lambda \delta_k^i \right| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} p_1^1 - \lambda & p_1^2 & p_1^3 \\ p_1^2 & p_2^2 - \lambda & p_2^3 \\ p_3^1 & p_3^2 & p_3^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.3)$$

yoki, yoyib yozsak

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0, \qquad (5.4)$$

bu yyerda $p_\alpha^\alpha = I_1$,

$$\begin{vmatrix} p_2^2 & p_2^3 \\ p_3^2 & p_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_3^3 & p_3^1 \\ p_1^3 & p_1^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1^1 & p_1^2 \\ p_2^1 & p_2^2 \end{vmatrix} = I_2,$$

$$Det\left\| p_k^i \right\| = I_3 .$$

Shunday qilib, biz *asr tenglamasini* hosil qildik. Agarda p^{ij} tenzor simmetrik bo'lsa, u holda bu tenglama uchta haqiqiy ildizga ega. Bu tenglamaning λ_1, λ_2, λ_3 ildizlari (5.1) ga ko'ra bosh yo'nalishlarga (bosh yuzachalarga) ortogonal yuzachalardagi kuchlanishni aniqlaydi:

$$\lambda_1 = p_n = p_1; \qquad \lambda_2 = p_{n_2} = p_2; \qquad \lambda_3 = p_{n_3} = p_3,$$

va *kuchlanish tenzorining bosh komponentalari* deyiladi. Biz (5.4) ko’rinishdagi asr tenglamalarini hosil qildik.

Agar p_1, p_2, p_3 lar aniq bo'lsa, (5.2) tenglamalar sistemasidan bosh yo'nalishlarni aniqlovchi $\vec{n}$ vektorlarning n_i komponentalarini aniqlaymiz. (5.1) formula, (5.2) va (5.3) tenglamalar ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida o'rinli. $2\Phi = const$ tenzor sirti tenglamasi x, y, z - bosh o'qlarida kanonik ko’rinishga keltiriladi:

$$2\Phi = p_1x^2 + p_2y^2 + p_3z^2 = const.$$

Bosh oqlarda kuchlanish tenzorining komponentalari uchun

$$p^{ii} = p_i^i = p_{ii} = \lambda_i = p_i$$

va $k \neq i$ da

$$p^{ki} = p_k^i = p_{ki} = 0.$$

Kuchlanish tenzorining bosh o'qlariga perpendikular bo'lgan yuzachalarda kuchlanish vektorining faqat normal tuzuvchilari noldan farqli, urinma tuzuvchilari esa nolga teng.

Agarda $p_1 = p_2 = p_3$ bolsa, u holda kuchlanish tenzorining tenzor sirti sferadan iborat.

(5.4) asr tenglamasining koeffisientlari kuchlanish tenzorining invariantlaridir. Ular, asr tenglamasining ildizlari orqali quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$I_1 = p_1 + p_2 + p_3,\ I_2 = p_2p_3 + p_1p_2 + p_1p_3,\ I_3 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3.$$

Xulosa

Kuchlanish tenzori sirti tushunchasi kiritildi. muhitga ta’sir etuvchi sirt, massaviy va inersiya kuchlari muvozanati shartidan Dekart va ixtiyoriy koordinatalarda tutash muhitning harakat tenglamalari keltirib chiqarildi

III. TUTASH MUHIT BA'ZI SODDA MODELLARINING YOPIQ TENGLAMALARI SISTEMASI

1-Ma'ruza. IDEAL SUYUQLIK VA GAZ

Reja

1. Ideal suyuqlik va gaz ta'riflari.
2. Ideal suyuqlikda kuchlanish tenzori.
3. Ideal suyuqlik harakati tenglamalari.
4. Gromeki - Lemb shaklidagi ideal suyuqlikning harakat tenglamalari.
5. Ideal siqilmaydigan suyuqlik harakatining to'liq tenglamalar sistemasi.
6. Bartrop jarayonlarda ideal siqiluvchan suyuqlik (gaz) tenglamalarining yopiq sistemasi.

Tayanch iboralar: suyuqlik, gaz, kuchlanish tenzori, normal, yuzacha, kovariant va kontzavariant komponentalar, vektor, skalyar, barotrop hodisalar, massa

Harakat miqdori, harakat miqdori momenti va uzviylik differensial tenglamalari barcha tutash muhitlarning ixtiyoriy uzluksiz harakatlarida bajariladi. Ammo har xil real muhitlar bir xil tashqi shartlarda o'zlarini har xil tutishadi.

Demak, bu tenglamalarning o'zi, hatto mos chegaraviy shartlar qo'shilganda ham, konkret tutash muhit harakatini ifodalash uchun yetarli emas. Sababi tenglamalar soni ularga kiruvchi noma'lumlar soniga nisbatan kam, sistema to'liq emas (yopiq emas).

Toliq tenglamalar sistemasini tuzish - bu demak o'rganilayotgan muhitning matematik modelini tuzish demakdir.

Quyida biz tutash muhitning ba'zi bir sodda klassik modellarini qarab chiqamiz.

1. Ideal suyuqlik va gaz ta'riflari

Ideal suyuqlik va gaz modellarini o'rganishdan boshlaymiz. Ideal suyuqlik yoki ideal gaz deb shunday muhitga aytiladiki, unda $\vec{n}$ normalli ixtiyoriy yuzachada $\vec{p}_n$ kuchlanish vektori yuzachaga ortogonal, ya'ni $\vec{p}_n // \vec{n}$.

Eksperement natijalari va umumiy fizik xulosalar ko'rsatadiki, ixtiyoriy muhit juda katta bosim va temperaturalarda bunday xossaga ega.

2. Ideal suyuqlikda kuchlanish tenzori

Ideal suyuqlikda kuchlanish tenzorining tenzor sirti bu holda sferadan iborat va demak, $p_1 = p_2 = p_3$ ya'ni kuchlanish tenzorining bosh komponentalari bir xil. Ularni - p orqali belgilaymiz va p ni bosim deb olamiz. Ishorani tanlash bosimni musbat miqdor sifatida olish uchun qilindi, chunki tajribalar ko'rsatayapdiki ideal suyuqlik modeli o'rinli bo'lgan muhitlar asosan p > 0 bo'lganda siqilgan holatda bo'ladilar.

Bunday muhit uchun ixtiyoriy uchta o'zaro ortogonal yo'nalishlar bosh yo'nalishlar hisoblanadi va shuning uchun ixtiyoriy dekart koordinatalar sistemasida kuchlanish tenzori komponentalari matrisasi

$$\begin{Vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Vmatrix}$$

ko'rinishga ega.

Xususan, p_k^i aralash komponentalari uchun

$$p_k^i = -p\delta_k^i \tag{1.1}$$

bo'ladi. $\delta_k^i \bar{\vartheta}^k \bar{\vartheta}_i$ tenzorning δ_k^i komponentalar koordinatalarni almashtirganda o'zgarmaydilar, $\left(\delta_k^{'i} = \delta_k^i\right)$ va shuning uchun (1.1) formula ideal suyuqlikda kuchlanish tenzorining aralash komponentalari uchun nafaqat dekart balkim ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida o'rinli.

Bu tenzorning kontravariant komponentalari

$$p^{ki} = g^{ks} p_s^i = -pg^{ks}\delta_s^i = -pg^{ki} \tag{1.2}$$

ko'rinishga ega, kovariant komponentalari esa

$$p_{ki} = g_{ks} p_i^s = -pg_{ks}\delta_i^s = -pg_{ki}\,.$$

Demak, ideal suyuqlikda kuchlanish tenzori bitta p son bilan beriladi (umumiy holda 9 ta p^{ki} larga bog'liq).

Ideal suyuqlik uchun

$$P = -p \cdot G,$$

bu yerda G - metrik tenzor.

Tenzor sirti sferadan iborat bo'lgan ixtiyoriy T *tenzor sharsimon* deyiladi. Barcha sharsimon tenzorlar quyidagi ko'rinishga ega

$$T = k \cdot G, \qquad k \text{ - skalyar miqdor.}$$

3. Ideal suyuqlik harakati tenglamalari

Ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida tutash muhitning tenglamalari

$$\rho a^k = \rho F^k + \nabla_i p^{ki}$$

(1.2) ga ko'ra ideal suyuqlik uchun quyidagicha yoziladi

$$\rho a^k = \rho F^k - g^{ki}\nabla_i p\,. \tag{1.3}$$

(1.3) formulani yozishda g^{ki} tenzor komponentalari kovariant differensiallashda o'zgarmas miqdor sifatida tutishadi.

Bu tenglamalarni vektor ko'rinishda yozamiz. $\nabla_i p$ miqdorlar p - gradient-vektorning kovariant komponentalari, $g^{ki}\nabla_i p$ - uning kontravariant komponentasi. Shuning uchun (1.3) tenglama vektor ko'rinishda quyidagicha bo'ladi

$$\rho\vec{a} = \rho\vec{F} - grad\ p. \tag{1.4}$$

Bu tenglamalar dekart koordinatalar o'qlariga proeksiyalarda quyidagicha yoziladi:

$$\frac{du}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{dv}{dt} = F_y - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{dw}{dt} = F_z - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{1.5}$$

yoki

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial v}, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Bu tenglamalar *Eyler tenglamalari* deyiladi.

4. Gromeki – Lemb shaklidagi ideal suyuqlikning harakat tenglamalari

Yuqoridagi (1.6) tenglamalarni boshqacha ko'rinishda yozamiz. Tezlanishni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\partial\vec{v}}{dt}+grad\frac{\vec{v}^2}{2}+2\vec{\omega}\times\vec{v}, \qquad (1.7)$$

bu yerda $\vec{\omega}$ - uyurma vektori.

Haqiqatan, dekart koordinatalar sistemasida tezlanishning x o'qiga proeksiyasi uchun

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2+v^2+w^2\right)-$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)v+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)w=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x}+2\left(\omega_y w-\omega_z v\right)=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{v}^2}{\partial x}+2\left(\vec{w}\times\vec{v}\right)\Big|_x.$$

Xuddi shunday formulalar tezlanishning y va z o'qlariga proektsiyalar uchun hosil bo'ladi, shuning uchun $\frac{d\vec{v}}{dt}$ vektor korinishda (1.7) kabi yoziladi. Ideal suyuqlik harakat tenglamalari - vektor ko'rishda bo'ladi:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}gradv^2+2\overline{\omega}\times\overline{v}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\cdot gradp. \qquad (1.8)$$

Bu tenglamalar *Gromeki - Lemb shaklidagi Eyler harakat tenglamalari* deyiladi. Tezlanishning bunday almashtirishini ixtiyoriy tutash muhitlar uchun qo'llash mumkin va u, xususan, gidromexanikaning ko'pgina masalalarini o'rganishda juda qulay bo'ladi.

Ideal suyuqlik harakatining uchta tenglamalariga

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\rho\vec{v}=0$$

uzviylik tenglamalarini qo'shish kerak.

Biz ma'lum F_x, F_y, F_z massaviy kuchlar berilganda 5 ta noma'lum u, v, w, p, ρ funksiyalarga ega to’rta tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu sistema hali ham to'liq emas.

5.Ideal siqilmaydigan suyuqlik harakatiningto'liq tenglamalar sistemasi

Ko'p hollarda qo'shimcha qilib, qaralayotgan ideal suyuqlik siqilmaydigan deb qarash mumkin, ya'ni uning ixtiyoriy zarrachasining hajm miqdori o'zgarmas deb qarash mumkin. U holda to’rtta tenglamalar sistemasiga quyidagi shart qo'shiladi:

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{v}\cdot grad\rho=0$$

yoki dekart koordinatalar sistemasida

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}=0$$

bo'ladi. Bu shart ideal siqilmaydigan suyuqlik harakatini ifodalovchi tenglamalar sistemasini to'ldiradi. Bu sistemani to'laligicha keltiramiz:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}grad\ p,$$

$$div\,\vec{v} = 0,$$
$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{1.9}$$

Agarda zarracha massasi o'zgarsa oxirgi tenglama o'zgarishi mumkin.

Aytish lozimki, o'zgarmas massali bir jinsli siqilmaydigan suyuqlik holida uning har bir zarrachasi zichligi ρ zarrachada o'zgarmas bo'ladi va barcha zarrachalarda bir xil bo'ladi, shuning uchun u ahamiyatli izlanuvchi funksiya bo'lmay qoladi. Mexanik tenglamalarning to'liq sistemasi bu holda Eyler tenglamalari va uzviylik tenglamalaridan iborat bo'ladi.

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \nabla_j p,$$
$$\nabla_\alpha v^\alpha = 0. \tag{1.10}$$

6. Barotrop jarayonlarda ideal siqiluvchan suyuqlik tenglamalarining yopiq sistemasi

Siqiladigan suyuqlik harakatida ko'p hollarda

$$p = f(\rho),$$

ya'ni bosim faqat zichlikka bog'liq deb qarash mumkin. $p = f(\rho)$ bo'lgan proseslarga *baratrop prosesslar* deyiladi. Barotrop prosesslarga misol bo'lib

$$p = R\rho T \qquad \text{(bu yerda } R \text{ - gaz doimiysi)}$$

Klayperon tenglamasiga bo'ysinuvchi gazning izotermik harakatini qarash mumkin.

Ayonki baratropiya sharti (agarda $f\,(\rho)$ - ma'lum bo'lsa) ideal siqiluvchan suyuqlik harakatini ifodalovchi tenglamalar sistemasini to'ldirishga imkon beradi.

Bu holda to'g'riburchakli dekart koordinatalari sistemasida to'liq tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{1.11}$$
$$p = f(\rho).$$

Umumiy holda suyuqlik va gaz harakatida barotropiya sharti bajarilmaydi va bunday harakatni ifodalash uchun qo'shimcha termodinamik tenglamalar kiritish kerak.

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1. Ideal suyuqlik va gaz ta’riflarini bering.
2. Ideal suyuqlikda kuchlanish tenzorining tenzor sirti nimadan iborat.
3. Dekart koordinatalar sistemasida kuchlanish tenzori komponentalari yozing.
4. Sharavoy tenzor deb nimaga aytiladi?
5. Ideal suyuqlik harakat tenglamalarini yozing.
6. Eyler tenglamalarini vektor ko’rinishda va dekart koordinatalar o’qlariga proeksiyalarda yozing.
7. Gromeki – Lemb shaklidagi ideal suyuqlik harakat tenglamalarini yozing.

8. Ideal suyuqlik harakatining to'liq tenglamalar sistemasini keltiring.
9. Baratrop jarayon deb nimaga aytiladi.
10. Barotrop jarayonda ideal siqiluvchan suyuqlik harakatining yopiq sistemasini yozing.

Xulosa

Ideal suyuqlik ta'rifi kiritildi. Ideal suyuqlikdagi kuchlanish tenzorining ko'rinishi aniqlandi. Harakat tenglamalari keltirib chiqarildi. Tenglamalarning yopiq sistemasi hosil qilindi.

2-Ma'ruza.
CHIZIQLI JISM VA CHIZIQLI QOVUSHOQ SUYUQLIK

Reja:

1. Elastik jisimlar va qovushoq suyuqlik.
2. Guk va Nav'e - Stoks qonunlari.
3. Muhitning anizotropiya, izotropiya va girotropiya xossalari.
4. Girotrop muhit uchun Guk va Nav'e-Stoks qonunlari.
5. Yung moduli, Puasson koeffisienti va qovushoqlik koeffisienti.
6. Nav'e-Stoks tenglamasi.
7. Siqilmaydigan qovushoq suyuqlik harakatining to'liq tenglamalar sistemasi.
8. Elastik jism uchun kuchishlarda harakat tenglamalari.

Tayanch iboralar: *elastik jism, qovushoq suyuqlik, kuchlanish, deformasiya, anizo-tropiya, izotropiya, qirotropiya, deformasiya tenzori, Puasson koeffisienti, Yung moduli, Lame koeffisientlari.*

Quyida biz tutash muhitning boshqa xususiy modellarini qarab chiqamiz, bular: chiziqli elastik jism va chiziqli qovushoq suyuqlik modeli. Bu modellarni parallel ravishda qaraymiz, sababi ularni kiritish usullari formal ravishda o'xshash. Aslida bu ikki model ikkita har hil turdagi real muhitlarni ifodalaydi.

Elastik jism deb shunday muhitga aytiladiki unda p^{ki} kuchlanish tenzori komponentasi har bir zarrachada ε_{ij} deformasiya tenzori komponentalari, g_{ij} metrik tenzor komponentalari, *I* temperatura va boshqa fizik-ximik parametrlarning funksiyasidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$p^{ij} = f^{ij}\left(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, X, .., X_n\right). \quad (2.1)$$

Qovushoq suyuqlik deb shunday muhitga aytiladiki unda kuchlanish tenzori komponentasi

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij} \quad (2.2)$$

ko'rinishda tasvirlanadi, shu bilan birga

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, T, \chi_1, ..., \chi_n), \\ \tau^{ij} &= \varphi^{ij}\left(e_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_1, ..., \chi_n\right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

bu yyerda $e_{\alpha\beta}$ - deformasiya tezliklari komponentalari. Bu paragrafda biz f^{ij} ning $\varepsilon_{\alpha\beta}$ va $g^{\alpha\beta}$ lardan va $\varphi^{\alpha\beta}$ ning $e_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ lardan bog'liqliklarini o'rganib chiqamiz va shuning uchun *T* va χ_i parametrlarni hisobga olmaymiz.

2. Guk va Nav'e - Stoks qonunlari

$f^{ij}\left(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_i\right)$ va $\varphi^{ij}\left(\ell_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_i\right)$ funsiyalarning konkret ko'rinishi elastik va qovushoq muhitning har xil konkret modellari uchun har xil bo'ladi. Tajribalar shuni ko'rsatadiki, kuchlanish va deformasiyalar qattiq jismlarda, masalan, metallarda, oddiy sharoitlarda (unchalik katta bo'lmagan temperatura va kuchlanishlarda) bir biri bilan *Guk qonuni* deb ataluvchi qonun bilan bog'langan. Qovushoq kuchlanish va deformasiya tezliklari ko'pgina suyiq muhitlarda, masalan suv va havoda *Nav'e-Stoks qonuni* bilan o'zaro bog'langan. Bu qonunlarni (Guk qonuni uchun quyida kirilgan) quyidagi farazlar yordamida kiritish mumkin.

Faraz qilaylik f^{ij} funksiyalar $\varepsilon_{\alpha\beta}$ lar bo'yicha Teylor qatoriga yoyilgan bo'lsin va kuchlanishlar bo'lmaganda $(p^{ij}=0)$, deformasiyalar ham bo'lmasin $(\varepsilon_{\alpha\beta}=0)$ hamda teskarisi o'rinli bo'lsin.

Bunday farazlarda

$$p^{ij} = f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}) = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + ...$$

bo'ladi, bu yerda $A^{ij\alpha\beta}$ koeffisientlar T va χ_i larga bog'liq bo'lishi mumkin. Agarda deformasiyalar kichik bo'lsa, u holda p^{ij} ni qatorga yoyganda faqat chiziqli hadlarni qoldirish mumkin va bu holda

$$p^{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{2.4}$$

bo'ladi.

Xuddi shunday farazlarni φ^{ij} funksiyalar uchun qilib quyidagi tenglikka kelamiz:

$$\tau^{ij} = B^{ij\alpha\beta}e_{\alpha\beta}. \tag{2.5}$$

(2.4) munosanatlar *Guk qonuni* deyiladi, (2.5) esa *Nav'e - Stoks qonuni yoki N'uton qayishqoqligining umumlashgan qonuni* deyiladi. (2.4) va (2.5) larni biz mos ravishda $\varepsilon_{\alpha\beta}$ va $e_{\alpha\beta}$ larni kichik deb hosil qildik. Ammo, takidlash kerakki, xususan, Nav'e-Stoks qonuni suv, havo va ba'zi bir boshqa suyuqliklar uchun deformasiya tezliklari tenzorlari kichik bo'lmagan holda ham qo'llanilishi mumkin. Umumiy termodinamik munosabatlardan kelib chiqadiki, Guk qonuni faqat kichik deformasiyalar uchun taqribiy qonun sifatida o'rinli.

Guk qonuniga yoki umumiyroq bo'lgan (2.1) qonunga bo'ysinuvchi tutash muhitlarni holatini o'rganadigan tutash muhit mexanikasining bo'limi *elastiklik nazariyasi* deyiladi. Nav'e-Stoks yoki umiyroq (2.2) - (2-3) qonunlarga bo'ysinuvchi tutash muhit harakati qaralayotgan bo'lim - qovushoq *suyuqlik harakati nazariyasi* deyiladi.

(2.4) va (2.5) tengliklardagi $A^{ij\alpha\beta}$ *va* $\beta^{ij\alpha\beta}$ lar turtinchi rang tenzor komponentalaridan iborat. Ular berilgan tutash muhitning fizik harakeristikalaridan iborat.

4-rang tenzor 3^4 = 81ta komponentiga ega, ammo kuchlanish tenzorining (klassik holda) simmetriyaligidan, hamda deformasiya va deformasiya tezligi tenzorlarining simmetriklaridan $A^{ij\alpha\beta}$ va $\beta^{ij\alpha\beta}$ larning 36 tasi qoladi.

3. Muhitning anizotropiya, izotropiya va girotropiya xossalari

Izotrop muhit deb barcha yo'nalishlar bo'yicha xususiyatlari bir xil bo'lgan muhitga aytiladi. Agarda muhit xususiyatlari har xil yo'nalishlar bo'yicha har xil yo'nalgan bo'lsa, u holda *muhit anizotrop* deyiladi. Anizotrop muhitlar har xil tipdagi simmetriyalarga ega.

Simmetriyalik xossasining aniqroq matematik ta'rifini beramiz, xususan, izotropiya uchun. Muhit fizik va mexanik xususiyalarini ba'zi bir tenzorlar va tenzor tenglamalar yordamida ifodalash mumkin.

Masalan, agarda Guk qonuni bajarilayotgan bo'lsa, elastik xususiyat va xossalar $A^{ij\alpha\beta}$ tenzor yordamida beriladi. *Muhit simmetriyaga ega* deyiladi, agarda shunday koordinatalarni almashtirish gruppasi mavjud bo'lsaki, muhitning xossalarini ifodalovchi tenzor komponentalari bu gruppaga taaluqli almashtirishlarda o'zgarmasa. Xususan *muhit izotrop deyiladi, agarda uning xususiyatlarini aniqlovchi tenzor komponentalari ixtiyoriy ortoqonal almashtirishlarda o'zgarmasa.* Ortogonal almashtirishlarni

$$g_{ij}^{t} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial y^{j}} = g_{ij}$$

metrik tenzor komponentalari o'zgarmasdan qoladigan almashtirish sifatida aniqlash mumkin.

To'liq ortogonal gruppa ayanma almashtirishlariga (almashtirish determinanti + 1 ga teng) va teskari akslantirish bilan birgalikdagi aylamma almashtirishga (determinanti - 1 ga teng) ega.

Agarda muhit xossalari faqat aylanish gruppasiga nisbatan invariant bo'lib, teskari akslantirishga nisbattan invariant bo'lmasa, *muhit girotop* deyiladi.

Endi biz Guk qonuniga bo'ysinuvchi elastik jismlar uchun izotropik (girotropik) xususiyatlari nimani anglatilishini chuqurroq o'rganib chiqamiz. Bunday tutash muhitning biror bir nuqtasida ayni paytda ikkita dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Bittasi x^1, x^2, x^3 va ikkinchisi birinchisiga nisbatan burilishdan hosil bo'lgan, uni $y^1, y^2 y^3$ deb olamiz. x^1, x^2, x^3 sistemada qaralayotgan tenzor komponentalarini shtrixsiz harflar bilan $y^1, y^2 y^3$ sistemada mos ravishda shtrixli harflar bilan belgilaymiz. Ayonki,

$$A'^{ij\alpha\beta} = \frac{\partial y^{i}}{\partial x^{p}}\cdot\frac{\partial y^{j}}{\partial x^{q}}\cdot\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}}\cdot\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\mu}}\cdot A^{pq\lambda\mu}\ . \tag{2.6}$$

Guk qonunini x^1, x^2, x^3 sistemada yozishda $A^{ij\alpha\beta}$ koeffisientlardan, $y^1, y^2 y^3$ sistemada $A'^{ij\alpha\beta}$ koeffisientlardan foydalanamiz. Har xil x^i va y^i sistemalarda bir xil ko'rinishga ega bo'lgan tutash muhitning ikkita deformasiyalangan holatini qaraymiz, ya'ni

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}\,.$$

Ayonki, izotrop muhitda bu holda kuchlanganlik holat ham x^i va y^i sistemalarda bir xil tartibga ega. Agarda $A'^{ij\alpha\beta} = A^{ij\alpha\beta}$, ya'ni Guk qonunida koeffisientlar bir xil bo'lsa, u holda $p^{ij} = p'^{ij}$. Tutash muhit bu holda izoprop yoki girotrop bo'ladi. Tajriba natijalariga ko'ra har xil yo'nalishlarda muhit xossalari har xil bo'lgan anizotrop muhitlarga misol qilib molekyla yoki atomlari to'g'ri tartibda joylashgan kristalik muhitni, tolali Moddiylarni qarash mumkin.

Izotrop muhitga masalan suv va amorf qurilishga ega boshqa muhitlar hamda xaotik ravishda joylashgan mayda elementar kristallardan iborat bo'lgan muhitlar kiradi.

4. Girotrop muhit uchun Guk va Nav'e-Stoks qonunlari

Endi izotrop va girotrop jismlar uchun umumiy 81 ta $A^{ij\alpha\beta}$ tenzor komponentalaridan (ularning hammasi noldan farqli bo'lishi mumkin) faqat ikkitasi erkli ekanligini ko'rsatamiz. ε_{ij} deformatsiya tenzori bosh yo'nalishi bo'ylab koordinata o'qlarini yo'naltiramiz. Ayonki, bu holda Guk qonuniga faqat $A^{ij\alpha\alpha}$ ko'rinishdagi koeffisientlar kiradi. $i \neq j$ da $A^{ij\alpha\alpha} = 0$ ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatan, tanlangan koordinatalar sistemasining i - chi o'qiga nisbatan 180^0 ga burish natijasida biz yangi koordinatalar sistemasini hosil qilamiz. Bu yangi sistemada i - chi o'q oldingi holatda qoladi, qolgan ikki o'q esa o'z yo'nalishlarini teskarisiga o'zgartiradi va tenzor komponentalarini (2.6) almashtirish qoidasiga ko'ra biz $i \neq j$ da hamda ixtiyoriy α larda

$$A^{'ij\alpha\alpha} = -A^{ij\alpha\alpha}$$

ga ega bo'lamiz, ammo agar muhit izotrop yoki girotrop bo'lsa, u holda $A^{'ij\alpha\alpha} = A^{ij\alpha\alpha}$ va, demak $i \neq j$ da $A^{'ij\alpha\alpha} = 0$. Bundan esa $i \neq j$ da bu koordinatalar sistemasida $p^{ij} = 0$ tengligidan deformasiya tenzori va kuchlanish tenzori bosh o'qlari Guk qonuniga bo'ysinuvchi izotrop hamda girotrop muhitlarda mos tushadi.

Guk qonunining formulalarida bosh o'qlarda 81 ta $A^{ij\alpha\beta}$ koeffisientlarda faqat 9 ta $A^{ij\alpha\alpha}$ koeffisientlar ahamiyatga ega.

Muhitning qirotropik xususiyatiga o'qlarning nomerlash tartibi ahamiyatli emas va shuning uchun

$$A^{1111} = A^{2222} = A^{3333} = 2\mu + \lambda,$$
$$A^{1122} = A^{1133} = A^{2233} = \lambda,$$
$$A^{ii\alpha\alpha} = A^{\alpha\alpha ii}$$

bu yerda $2\mu + \lambda$ va λ lar yuqoridagi A tenzorning ikkita har xil, noldan farqli komponentalari uchun yangi belgilashlar kiritilgan.

Barcha keltirilgan farazlarni Nav'e-Stoks qonuniga bo'ysinuvchi girotrop va izotrop muhitlar uchun ham keltirish mumkin va Nav'e-Stoks qonuniga bo'ysinuvchi qirotrop muhit uchun deformasiya tezligi tenzori bosh o'qlari kuchlanish tenzori bosh o'qlari bilan mos tushadi, $B^{ij\alpha\beta}$ koeffisientlar esa λ_1 va μ_1 orqali ifodalanadi.

Endi izotrop muhit uchun

$$p^{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{2.7}$$

Guk qonuni deformasiya tenzori va kuchlanish tenzorining bosh o'qlarida quyidagi ko'rinishga ega bo’ladi

$$\begin{aligned} p_1 &= \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_1, \\ p_2 &= \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_2, \\ p_3 &= \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_3, \end{aligned} \tag{2.8}$$

bu yerdagi λ va μ lar Lame koeffisientlari deyiladi.

Xuddi shunday izotrop muhit uchun Nav'e-Stoks qonuni deformasiya tezliklari tenzori va kuchlanish tenzorining bosh o'qlarida quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_1, \\ \tau_2 &= \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_2, \\ \tau_3 &= \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_3. \end{aligned} \tag{2.9}$$

(2.8) formulalar quyidagi invariant tenzor ko'rinishda yozilishlari mumkin:

$$p_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{2.10}$$

yoki

$$p^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \tag{2.11}$$

Bu shakllar ixtiyoriy koordinatalar sistemasida o'rinli va shuning uchun (2.10) formulalar ixtiyoriy egri chziqli koordinatalar sistemasida izotrop muhit uchun *Guk qonunini* ifodalaydi.

(2.11) dan osongina $A^{ij\alpha\beta}$ koeffisientlar uchun ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida ifodasini hosil qilish mumkin

$$A^{ij\alpha\beta} = \lambda g^{ij} g^{\alpha\beta} + \mu(g^{i\alpha} \cdot g^{j\beta} + g^{i\beta} \cdot g^{j\alpha}). \qquad (2.12)$$

Xuddi shunday farazlarni Nav'e-Stoks qonuniga qo'llab, izotrop muhit uchun ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida Nav'e-Stoks qonunining quyidagi ko’rinishini hosil qilamiz

$$\tau_{ij} = \lambda_1 I_1(e) g_{ij} + 2\mu_1 e_{ij} \qquad (2.13)$$

yoki

$$\tau^{ij} = \lambda_1 I_1(e) g^{ij} + 2\mu_1 g^{i\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}. \qquad (2.14)$$

(2.10) ga ko'ra ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida izotrop qovushoq suyuqlik uchun kuchlanish va deformasiya tezligi tenzori komponentalari orasidagi quyidagi munosabatlarni hosil qilamiz:

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \lambda_1 g^{ij} div\,\vec{v} + 2\mu_1 g^{i\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}. \qquad (2.15)$$

Dekart koordinatalar sistemasida izotrop muhit uchun Guk qonuni quyidagi ko'rinishga ega

$$p_{ii} = \lambda I_1(\varepsilon) + 2\mu\varepsilon_{ii} \qquad (2.16)$$

va $i \neq j$ da

$$p_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij},$$

Nav'e - Stoks qonuni esa

$$p_{ii} = -P + \lambda_1 div\vec{v} + \mu_1 \frac{\partial v_i}{\partial x^i}$$

va $i \neq j$ da

$$p_{ij} = 2\mu_1 e_{ij} = \mu_1 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right) \qquad (2.17)$$

ko'rinishga ega.

5.Yung moduli, Puasson koeffisienti va qovushoqlik koeffisienti

Lame kofisientlari λ va μ lar o'rniga elastiklik nazariyasida Moddiyning quyidagi xarakteristikalari kiritilgan:
Yung moduli

$$E = \mu \frac{(3\lambda + \mu)}{\lambda + \mu}$$

va Puasson koeffisienti

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Qovushoq suyuqlik harakati nazariyasida qovushoqlikning dinamik koeffisienti $\mu = \mu_1$ va kinimatik koeffisienti $\nu' = \mu / \rho$, hamda 2 - qovushoqlik koeffisienti

$$\xi = \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu$$

kiritilgan, keyinchalik λ_1 - Lame koeffisienti qovushoq suyuqlik harakatida λ orqali belgilaymiz.

Guk va Nav'e-Stoks qonunlari *T=const*, χ_i = *const* da izotrop elastik muhit va qovushoq siqiladigan suyuqliklar uchun harakat tenglamalari sistemasini to'ldirishga imkon beradi.

6.Nav'e-Stoks tenglamasi

Qovushoq siqilmaydigan suyuqlik holida tutash muhit harakatining to'liq tenglamalar sistemasini yozish uchun oldin

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \lambda g^{ij} div\vec{v} + 2\mu e^{ij} \qquad (2.18)$$

Nav'e - Stoks qonuni qanoatlantiruvchi qovushoq siqiladigan suyuqlik harakati tenglamalarini keltirib chiqaramiz. Bu tenglamalar *Nave – Staks tenglamalari* deyiladi.

Evklid fazoda

$$\nabla_i \nabla_j v^\alpha = \nabla_j \nabla_i v^\alpha .$$

Haqiqatan, $T_{ij}^\alpha = \nabla_i \nabla_j v^\alpha - \nabla_j \nabla_i v^\alpha$ - 3 - rang tenzor komponentalaridan iborat; dekart koordinatalar sistemasida

$$T_{ij}^\alpha = \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial x^j \partial x^i} = 0$$

va demak - ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida $T_{ij}^\alpha = 0$.

Endi p^{ij} (2.18) orqali aniglanganda, λ va μ lar esa o'zgarmas bo'lganda, $\nabla_i p^{ij}$ ni hisoblaymiz

$$\nabla_j p^{ij} = -g^{ij}\nabla_j p + \lambda g^{ij}\nabla_j div\,\vec{v} + 2\mu\nabla_j e^{ij} = -g^{ij}\nabla_j p + \lambda g^{ij}\nabla_j\nabla_\alpha v^\alpha + \mu\nabla_j g^{i\alpha} g^{i\beta}(\nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha) =$$
$$= -g^{ij}\nabla_j p + \lambda g^{ij}\nabla_j\nabla_\alpha v^\alpha + \mu g^{i\alpha}\nabla_j\nabla_\alpha v^j + \mu g^{j\beta}\nabla_j\nabla_\beta v^i = -g^{ij}\nabla_j p + (\lambda+\mu) g^{ij}\nabla_j\nabla_\alpha v^\alpha + \mu\nabla^\beta\nabla_\beta v^i =$$
$$= -\nabla^i p + (\lambda+\mu)\nabla^i div\,\vec{v}\,\vartheta + \mu\Delta v^i .$$

Bu yerda $\nabla^i = g^{ij}\nabla_j$ va $\Delta = \nabla^\beta\nabla_\beta = \nabla^2$ - Laplas operatori. Dekart koordinatalar sistemasida.

$$\Delta v^i = \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} .$$

Vektor ko'rinishda

$$\nabla_j p^j = -gradP + (\lambda+\mu) grad\, div\,\vec{v} + \mu\Delta\vec{v} . \qquad (2.19)$$

Shunday qilib, ixtiyoriy egrichziqli koordinatalar sistemasida Nav'e-Stoks tenglamalari (2.19) ga ko'ra quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$a_i = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij}\frac{\partial p}{\partial x^j} + \frac{\lambda+\mu}{\rho} g^{ij}\frac{\partial div\,\vec{v}}{\partial x^j} + \frac{\mu}{\rho}\Delta v^i .$$

Vektor ko'rinishda Nav'e-Stoks tenglamalarini

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad\ \ p + \frac{\lambda+\mu}{\rho} grad\ div\,\vec{v} + v'\Delta\vec{v} \qquad (2.20)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

7.Siqilmaydigan qovushoq suyuqlik harakatiningto'liq tenglamalar sistemasi

Qovushoq siqilmaydigan suyuqlik uchun Nav'e-Stoks tenglamalari soddalashadi

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} gradP + \frac{\mu}{\rho}\cdot\Delta v . \qquad (2.21)$$

Bu tenglamalar

$$div\,\vec{v} = 0$$

uzviylik tenglamalari bilan Nav'e-Stoks qonuniga bo'ysinuvchi qovushoq siqilmaydigan suyuqlik harakatining to'liq tenglamalar sistemasini hosil qiladi.

Dekart ortogonal koordinatalar sistemasida umuman bir jinslimas qovushoq siqilmaydigan suyuqlik harakatining to'liq tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+v'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+v'\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),\tag{2.22}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+v'\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).$$

8. Elastik jism uchun kuchishlarda harakat tenglamalari

Guk qonunini qanoatlantiruvchi elastik jism uchun ko'chishlarda harakat tenglamalari kichik deformasiyalar holida

$$P^{ij}=\lambda I_1(\varepsilon)g^{ij}+2\mu\varepsilon^{ij},\quad \varepsilon^{ij}=\frac{1}{2}(\nabla^j\omega^i+\nabla^i\omega^j)\tag{2.23}$$

(bu yerda ω^i - kochish vektorining komponentasi, $I_1(\varepsilon)=\nabla_i\omega^i$ - deformasiya tenzorining birinchi invarianti) *Lame tenglamalari* deyiladi. Keyinchalik λ va μ - Lame modullarini berilgan o'zgarmaslar deb hisoblash mumkin. Lame tenglamalarini keltirib chiqarish uchun (4.8) impuls tenglamalariga (2.23) ko'rinishdagi Guk qonunini qo'yamiz. Bu tenglamalarni xuddi Nave - Stoks tenglamalari kabi keltirib chiqaramiz.

Lame tenglamalari

$$(\lambda+\mu)\,grad\,div\,\vec{w}+\mu\Delta\vec{w}+\rho\vec{F}=\rho\vec{a}\tag{2.24}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Dekart koordinatalar sistemasida quyidagicha yoziladi

$$\rho\,a_x=(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\rho\,F_x,$$

$$\rho\,a_y=(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\rho\,F_y,$$

$$\rho\,a_z=(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\rho\,F_z.$$

bu yerda u,v,w lar orqali $\vec{w}-$ ko'chish vektorining komponentalari belgilangan.

Dinamik masalalar uchun Lame tenglamalari sistemasi to'liq bo'ladi, agarda ularga

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{x^i}+v^\alpha\frac{\partial v}{\partial x^\alpha},\quad \vec{v}=\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}$$

tezlanishni aniqlash formulalari kiritilsa.

(2.24) tenglamalar chekli deformasiyalar uchun o'rinli, shu bilan birgalikda ko'rish, tezlik va tezlanishlar chekli bo'lishi mumkin.

Mustaqil ishlar uchun savollar:

1. Elastik jism deb nimaga aytiladi?
2. Qovushoq suyuqlik ta'rifini bering.
3. Guk qonuniga bo'ysinuvchi muhitni o'rganuvchi fan qanday ataladi?
4. Nav'e – Stoks qonuni nimadan iborat va u suyuqlikning qanday parametrlari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi?
5. Nav'e – Stoks qonuniga bo'ysinuvchi suyuqliklar holatini o'rganuvchi fan nomini ayting.
6. Guk va Nav'e – Stoks qonunida qatnashuvchi tenzor nechanchi rangga ega va uning nechta komponentasi mavjud.
7. Izotrop muhit deb nimaga aytiladi?
8. Anizotrop muhit ta'rifini bering va misollar keltiring.
9. Qanday muhit simmetriyaga ega?
10. Qachon muhit girotrop deyiladi?
11. Izotrop muhitlarga misollar keltiring.
12. Izotrop va girotrop muhitlar uchun $A^{ij\alpha\beta}$ tenzor komponentalaridan nechtasi erkli bo'ladi? Izotrop muhit uchun ular qanday belgilanadi.
13. Izotrop muhit uchun Guk qonuni va Nav'e – Stoks qonunlari yozing?
14. Yung moduli, Puasson koeffisient va qovushoqlik koeffisienti Lame koeffisientlari orqali qanday ifodalangan.
15. Lame tenglamalarini yozing.
16. Nav'e – Stoks tenglamasini siqiladigan suyuqlik uchun yozing
17. Siqilmaydigan qovushoq suyuqlik harakatining to'liq tenglamalar sistemasi.

Xulosa

Muhit deformatsiyalanish xususiyatlariga ko'ra elastik jism va qovushoq suyuqliklarga ajratildi. Ular uchun harakat tenglamalari keltirib chiqarildi.

3-Ma'ruza.

EGRI CHIZIQLI KOORDINATALAR SISTEMASIDA TUTASH MUHIT UCHUN ASOSIY TENGLAMA VA MUNOSABATLARI

Reja:

1. Ortogonal koordinatalar sistemasida Kristoffel simvollari va ixtiyoriy koordinatalar sistemasida uzviylik tenglamalari.
2. Vektor va tenzorlarning fizik komponentalari.
3. Silindrik va sferik koordinatalar sistemasida uzviylik tenglamalari.
4. Ortogonal koordinatalar sistemasida tezlanish komponentalari.
5. Ortogonal koordinatalar sistemasida skalyar funksiyaning vektor-gradienti komponentalari.
6. Silindrik va sferik koordinatalar sistemasida Eyler tenglamalari.
7. Ortoganal koordinatalar sistemasida skalyar funksiyaning Laplas operatori.
8. Silindrik va sferik koordinatalar sistemasida deformasiya tezliklari komponentalari va Nav'e-Stoks tenglamalari.

Tayanch iboralar: Ortogonal va ixtiyoriy koordinatalar sistemasi, tenzor, Kristoffel simvollari, birgalik tenglamalari, tezlik, tezlanish, skalyar funksiya, silindrik va sferik koordinatalar, deformasiya tezliklar, aksial vektor, metrik tenzor, Evklid fazosi, gradient, divergensiya

1. Ortogonal koordinatalar sistemasida Kristoffel simvollari va ixtiyoriy koordinatalar sistemasida uzviylik tenglamalari

Ixtiyoriy orthogonal k0oordinatalar sistemasida $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ Kristoffel simvollarini g_{ij} metrik tenzor komponentalari orqali ifodalovchi formulalarni yozib olamiz. Evklid va Riman fazodarida Kristoffel simvollari quyidagicha aniqlanadi:

$$\Gamma^{j}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{js}\left(\frac{\partial g_{\alpha s}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta s}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{s}}\right). \tag{3.1}$$

Bu yerdan ortogonal koordinatalar sistemasida $(g_{ij} = 0, \quad i \neq j\ i)$ da

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \\ \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} &= -\frac{1}{2} g^{\alpha\alpha}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\alpha}}, \quad \alpha \neq \beta, \\ \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\alpha}}, \end{aligned}\right\} (\alpha \text{ bo'yicha yig'indi yo'q}) \tag{3.4}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0, \text{ agar } \alpha \neq \beta, \quad \beta \neq \gamma, \quad \gamma \neq \alpha \text{ bo'lsa.} \tag{3.5}$$

(3.2) ga ko’ra $\sum\limits_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}$ yig’indilar uchun ortogonal koordinatalar sistemasida quyidagi formulalarni hosil qilish mumkin:

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2g}\cdot\frac{\partial g}{\partial x^{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{\beta}}, \tag{3.6}$$

bu yerda $g - \left\|g_{ij}\right\|$ matrisaning determinanti.

Ixtiyoriy koordinatalar sistemasida (3.6) formulalarning isbotini keltiramiz. Quyidagiga egamiz:

$$g = \left|g_{ij}\right| = \left|\vec{э}_i \cdot \vec{э}_j\right| \text{ va } \frac{\partial \vec{э}_k}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\omega}_{k\beta}\vec{э}_{\omega}.$$

$\dfrac{\partial g}{\partial x^{\beta}}$ hosilani tuzish uchun g determinantning har bir elementida $\vec{э}_i$ va $\vec{э}_j$ vektorlarning skalyar ko’paytmasini differensiallash kerak.

Birinchi faktor $\vec{э}_i$ ni differensiallashda uchta determinat hosil qilamiz, bu determinatlarning har birida bitta *i* – chi nomerli satr $\Gamma^{\omega}_{i\beta} g_{\omega j}$ ko’rinishdagi had bilan almashtirilgan. Osongina ko’rish mumkinki, bu determinantlarning har biri $\Gamma^{i}_{i\beta g}$ ga teng, bu yerda *i* – mos satr nomeriga teng fiksirlangan indeks. (Fiksirlangan $\omega \neq i$ larda determinant 0 ga teng). Uchta determinant yig’indisi $\sum\limits_{i=1}^{3} \Gamma_{i\beta} g$ ga teng. g_{ij} ning simmetriyaligidan ayonki, ikkinchi faktor $\vec{э}_j$ larni differensiallashda ham xuddi shunday yig’indi hosil bo’ladi. Bu yerdan

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\beta}} = 2g\Gamma^{i}_{i\beta}$$

bo’ladi, bu formulalarda *i* – indeks bo’yicha yig’indi olinadi.

Ixtiyoriy koordinatalar sistemasida ixtiyoriy vektor divergensiyasi uchun ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$div\,\vec{v} = \Delta_\alpha v^\alpha = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} + v^\beta \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} + \\ + \frac{v^\beta}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial v^\alpha \sqrt{g}}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7}$$

Ixtiyoriy koordinatalar sistemasida uzviylik tenglamalari quyidagi ko’rinishni oladi:

$$\sqrt{g}\,\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho\, v^1 \sqrt{g}}{\partial x^1} + \frac{\partial \rho\, v^2 \sqrt{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho\, v^3 \sqrt{g}}{\partial x^3} = 0\,. \tag{3.8}$$

Eslatib o’tamiz, v^α lar $\vec{v}$ vektorning $\vec{э}_\alpha$ kovariant bazis vektorlari (ular, umuman olganda, birlik vektori emas) bo’ylab yoygandagi komponentalaridan iborat.

2. Vektor va tenzorning fizik komponentalari

Tezlik vektori $\vec{v}$ uchun quyidagi formulalarni yozish mumkin:

$$\vec{v} = v^i \vec{э}_i = u^1 \frac{\vec{э}_1}{\sqrt{g_{11}}} + u^2 \frac{\vec{э}_2}{\sqrt{g_{22}}} + u^3 \frac{\vec{э}_3}{\sqrt{g_{33}}}\,, \tag{3.9}$$

bu yerda

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{э}_i}{\sqrt{g_{ii}}}$$

lar birlik vektorlar. Agar koordinatalar sistemasi ortogonal bo’lsa, u holda

$$u^i = v^i \sqrt{g_{ii}}$$

(i bo’yicha yig’indi yo’q) komponentalar $\vec{v}$ tezlikning koordinata chiziqlarining urunmalariga proeksiyalariga teng va ular *tezlik vektorining fizik komponentalari* deyiladi.Ortogonal koordinatalar sistemasida

$$u_i = v_i \sqrt{g^{ii}} \quad (i \text{ bo'yicha yig'indi yo'q})$$

miqdorlar kiritilgan u^i fizik komponentalar bilan mos tushadi. Xuddi shunday ixtiyoriy vektorning fizik komponentalarini kiritish mumkin, masalan $\vec{a}$ tezlanish yoki *grad p* va umuman ixtiyoriy rangdagi tenzor uchun kiritish mumkin. Fizik komponentalar yordamida (3.8) uzviylik tenglamalari ixtiyoriy ortogonal koordinatalar sistemasida quyidagi ko’rinishni oladi:

$$\sqrt{g}\,\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \sqrt{g_{22} g_{33}}\, u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \rho \sqrt{g_{11} g_{33}}\, u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho \sqrt{g_{11} g_{22}}\, u^3}{\partial x^3} = 0\,. \tag{3.10}$$

3. Silindrik va sferik koordinatalar sistemasida uzviylik tenglamalari

Silindrik koordinatalar sistemasi holida

$$x^1 = r, \quad x^2 = \varphi, \quad x^3 = z, \qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

$$|\vec{э}_1| = 1, \quad |\vec{э}_2| = r, \quad |\vec{э}_3| = 1,$$

ya’ni $\quad g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1, \quad g_{ij} = 0$ agarda $i \neq j$.

Silindrik koordinatalar sistemasida uzviylik tenglamalari quyidagicha yoziladi:

$$r\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_r r}{\partial r} + \frac{\partial \rho u_\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial \rho u_z}{\partial z} = 0\,.$$

Sferik koordinatalar sistemasida $x^1 = r, \quad x^2 = \theta$ (qutb burchak), $x^3 = \lambda, \quad ds^2 = dr^2 + r^2 \cdot d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\lambda^2, g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^3 \sin^2\theta$ va uzviylik tenglamalari quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$r^2 \sin\theta \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sin\theta \frac{\partial\rho u_r r^2}{\partial r} + r\frac{\partial\rho u_\theta \sin\theta}{\partial\theta} + r\frac{\partial\rho u_\lambda}{\partial\lambda} = 0.$$

4. Ortogonal koordinatalar sistemasida tezlanish komponentalari

Inersial ortogonal egri chiziqli koordinatalar sistemasida Eyler harakat tenglamalarini yozish uchun a^j tezlanish komponentalarini g_{ij} va v_i orqali ifodalovchi formulalarni hosil qilamiz. $\frac{dv}{dt}$ tezlanish komponentasi uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$a^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \nabla_i v^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} + v^i v^\beta \Gamma^j_{i\beta}.$$

Bu formulaning oxirgi hadini (3.5) ni hisobga olib o'zgartiramiz

$$v^i v^\beta \Gamma^j_{i\beta} = 2v^j v^\beta \Gamma^j_{\beta j} + (v^\beta)^2 \Gamma^j_{\beta\beta} = 2v^j v^\beta \Gamma^j_{\beta j} + (v^j)^2 \Gamma^j_{jj} + (v^\beta)^2 \Gamma^j_{\beta\beta}.$$

$\beta \neq j$ $\qquad\qquad$ $\beta \neq j$

(*j* bo'yicha yig'indi yo'q) $\qquad$ (*j* bo'yicha yig'indi yo'q)

Ortogonal koordinatalar sistemasida $g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}$ va shuning uchun (3.2)- (3.4) formulalar yordamida

$$a^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} v^i + \frac{v^j v^\beta}{g_{jj}} \cdot \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^\beta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(v^j)^2}{g_{jj}} \cdot \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^j} - \frac{(v^\beta)^2}{2g_{jj}} \cdot \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^j} \tag{3.11}$$

ni hosil qilamiz. Bu yerdan silindrik koordinatalar sistemasida agarda (3.9) bo'yicha v^i o'rniga tezlikning fizik komponentalari u^i larni kiritsak tezlanishning fizik komponentalari quyidagi ko'rishga ega bo'ladi:

$$a_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r},$$

$$a_\varphi = \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r},$$

$$a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial\varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}; \tag{3.12}$$

sferik koordinatalar sistemasida tezlanishning fizik komponentalari quyidagicha yoziladi:

$$a_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{u_\lambda}{r \cdot \sin\theta} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial\lambda} - \frac{u_\theta^2 + u_\lambda^2}{r},$$

$$a_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_\lambda}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial\lambda} + \frac{u_r u_\theta - u_\lambda^2 ctg\,\theta}{r}, \tag{3.13}$$

$$a_\lambda = \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\lambda}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \cdot \frac{\partial u_\lambda}{\partial\theta} + \frac{u_\lambda}{r \cdot \sin\theta} \cdot \frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{u_r u_\lambda + ctg\,\theta u_\theta u_\lambda}{r}.$$

5. Ortogonal koordinatalar sistemasida skalyarfunksiyaning vektor-gradiyenti komponentalari

Ortogonal koordinatalar sistemasi o'qlarida *grad p* vektorning proeksiyasini aniqlaymiz. Quyidagiga egamiz

$$grad\ \ p = \frac{\partial p}{\partial x^i}\vec{\text{э}}^i = (\nabla_i p)\vec{\text{э}}^i = A_i\frac{\vec{\text{э}}^i}{\sqrt{g^{ii}}}.$$

Bu yerdan orthogonal koordinatalar sistemasida $grad\ \ p$ vektorning A_i fizik komponentalari

$$A_i = \frac{\partial p}{\partial x^i}\sqrt{g^{ii}} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\cdot\frac{\partial p}{\partial x^i}$$

(*i* bo'yicha yig'indi yo'q) bo'ladi.

Silindrik koordinatalar sistemasida *grad p* vektorning fizik komponentalari quyidagicha:

$$grad\ \ p\big|_r = \frac{\partial p}{\partial r},$$
$$grad\ \ p\big|_\varphi = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \tag{3.14}$$
$$grad\ \ p\big|_z = \frac{\partial p}{\partial z},$$

sferik koordinatalar sistemasida – quyidagicha:

$$grad\ \ p\big|_r = \frac{\partial p}{\partial r};\quad gradp\big|_\theta = \frac{1}{v}\cdot\frac{\partial p}{\partial \theta};\quad gradp\big|_\lambda = \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial p}{\partial \lambda}. \tag{3.15}$$

6. Silindrik va sferik koordinatalar yordamida Eyler tenglamalari

Yuqoridagi (3.12) va (3.14) formulalar yordamida silindrik (3.13) va (3.15) yordamida sferik koordinatalar sistemasida Eyler tenglamalarini osongina yozish mumkin.

Silindrik koordinatalar sistemasida Eyler tenglamalari quyidagi ko'rinishga ega:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}u_r + \frac{u_\varphi}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_r}{\partial z}u_z - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial t} = F_r - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r},$$
$$\frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}u_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\cdot u_\varphi + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\cdot u_z + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\cdot u_z + \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = F_\varphi - \frac{1}{r\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial \varphi},$$
$$\frac{\partial u_z}{\partial r}u_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\cdot u_\varphi + \frac{\partial u_z}{\partial z}\cdot u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z}\cdot u_z + \frac{\partial u_z}{\partial t} = F_z - \frac{1}{r\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{3.16}$$

sferik koordinatalarda esa

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial \lambda} - \frac{u_\theta^2 + u_\lambda^2}{r} = F_r - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r},$$
$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\cdot\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial u_\theta}{\partial \lambda} + \frac{u_r\cdot u_\theta}{r} - \frac{ctg\theta}{r}u_\lambda^2 = F_\theta - \frac{1}{r\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial \theta}, \tag{3.17}$$
$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\lambda}{\partial r} + \frac{u_\theta}{\partial r}\cdot\frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta} + \frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{u_r\cdot u_\lambda}{r} - \frac{ctg\theta u_\theta u_\lambda}{r} = F_\lambda - \frac{1}{\rho r\sin\theta}\cdot\frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

7. Ortogonal koordinatalar sistemasida skalyar funksiyaning Laplas operatori

Yuqoridagi (3.7) formula yordamida

$$\vec{v} = grad\Phi$$

deb faraz qilib, ixtiyoriy ortogonal koordinatalar sistemasida skalyar funksiyaning Laplas operatorini hosil qilamiz:

$$div\ grad\Phi = \nabla^2\Phi = \Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\right)}{\partial x^1} + \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{g_{33}g_{11}}{g_{22}}}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{g_{11}\cdot g_{22}}{g_{33}}}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right)}{\partial x^3}\right]. \quad (3.18)$$

Bundan silindrik koordinatalar sistemasida

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, \quad (3.19)$$

sferik koordinatalar sistemasida

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta\cdot}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda^2}\right] \quad (3.20)$$

bo’ladi.

8. Silindrik va sferik koordinatalar sistemasida deformatsiya tezliklari komponentalari va Nav’e – Stoks tenglamalari

To’lalik uchun deformatsiya tezliklari tenzorining fizik komponentalari uchun ifodalarni silindrik

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad 2e_{r\varphi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right), \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{u_r}{r}$$

$$2\,e_{\varphi z} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad 2e_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z},$$

va sferik koordinatalarda keltiramiz:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r}, \quad e_{\lambda\lambda} = \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta ctg\,\theta}{r},$$

$$2\,e_{r\theta} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}, \quad 2e_{\lambda r} = \frac{\partial u_\lambda}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{u_\lambda}{r},$$

$$2e_{\lambda\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial u_\theta}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_\lambda}{\partial\theta} - \frac{u_\lambda ctg\,\theta}{r},$$

hamda siqilmaydigan suyuqlik uchun Nav’e-Stoks tenglamalarini silindrik

$$a_r = F_r - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right),$$

$$a_\varphi = F_\varphi - \frac{1}{\rho r}\cdot\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \nu\left(\Delta u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right),$$

$$a_z = F_z - \frac{1}{\rho r}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta u_z \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

va sferik koordinatalar siqtemasida

$$a_r = F_r - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta u_\varphi - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2u_\theta}{r^2}\cdot ctg\theta - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda} - \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right),$$

$$a_\theta = F_\theta - \frac{1}{\rho\cdot r}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nu\left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right),$$

$$a_\lambda = F_\lambda - \frac{1}{r\theta\sin\theta}\cdot\frac{\partial p}{\partial\lambda} + \nu\left(\Delta u_\lambda - \frac{u_\lambda}{r^2\sin^2\theta} - + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial u_\theta}{\partial\lambda} + \frac{\partial u_r}{\partial\lambda}\right),$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{ctg\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right)$$

keltiramiz, bu yerda tezlanishning fizik komponentalari (3.12) va (3.13) formulalar bo'yicha aniqlangan.

Mustaqil ishlar uchun savollar:

1. Kristoffel simvoli nimaga teng?
2. Eyler va Lagranj o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamalarini yozing.
3. Ixtiyoriy koordinatalar sistemasida uzviylik tenglamalarini yozing.
4. Tezlik vektorining fizik komponentalari deb nimaga aytiladi?
5. Uzviylik tenglamalari sferik va silindrik koordinatalar sistemasida qanday ifodalanadi.
6. Tezlanish komponentalarini ortogonal koordinatalar sistemasida yozing.
7. Sferik va silindrik koordinatalar sistemasida tezlanishning fizik komponentalarini yozing.
8. Ortogonal koordinatalar sistemasida gradient vektor fizik komponentalari qanday aniqlangan?
9. Silindrik va sferik koordinatalardachi?
10. Ideal suyuqlik harakat tenglamalarini silindrik va sferik koordinatalarda yozing.
11. Ortogonal koordinatalar sistemasida Laplas operatori qanday ifodalanadi ? Dekart koordinatalaridachi?
12. Sferik va silindrik koordinatalar sistemasida Laplas operatorini yozing.
13. Silindrik koordinatalar tenzor komponentalari ifodasini keltiring.
14. Sferik koordinatalarda deformatsiya tezliklari tenzorining fizik komponentalarini yozing.

Xulosa

Ortogonal egri chiziqli koordinatalarda tutash muhitning asosiy tenglamalari harakat tenglamalari, kuchlanish va deformatsiyalar orasidagi bog'lanishlar, tezlanish komponentalari keltirildi.

4-ma'ruza.
BELTRAMI - MITCHELL TENGLAMALARI

Bundan oldingi paragraflarda elastik jismning muvozanat tenglamalarini Lame tenglamalariga keltirdik va ularning yechimini Papkovich-Neyber ko'rinishida tasvirladik, boshqacha aytganda ularning umumiy yechimlarini keltirdik. Bu tenglamalar uchun elastiklik nazariyasi asosiy masalalaridan ikkinchi turini yechish osonligini ta'kidladik. Chunki bu holda asosiy tenglamalar ham, chegaraviy shartlar ham faqat ko'chishlarga nisbatan yoziladi, ya'ni ikkinchi tur asosiy masalani yechishda asosiy izlanuvchi noma'lum funksiyalar sifatida ko'chishlarni qabul qilish va ularga nisbatan Lame tenglamalarini yechish qulay.

Elastiklik nazariyasining birinchi tur asosiy masalasini yechishda izlanuvchi noma'lum funksiyalar sifatida kuchlanish tenzorining komponentalarini olish, ya'ni masalani kuchlanishlarda yechish qulay.

Elastik muvozanatning uchta differensial tenglamalarilar tarkibida oltita $\sigma_{ij}(x_k)$ noma'lumlar qatnashadi va shuning uchun ularning yechimi bir qiymatli bo'lmaydi. Haqiqiy kuchlanganlik holatini aniqlovchi $\sigma_{ij}(x_k)$ funksiyalar Guk qonuni orqali ε_{ij} lar bilan bog'langan bo'lganliklari uchun, xuddi $\varepsilon_{ij}(x_k)$ lar kabi ularning uzviylik shartini ifodalovchi tenglamalarga bo'ysunishlari kerak. Bunday tenglamalar, yoki munosabatlarni Guk qonuni yordamida Sen-Venan differensial munosabatlaridan keltirib chiqarish mumkin. Lekin ushbu munosabatlarni Lame tenglamalaridan keltirib chiqarish bir muncha osonroq. Quyida biz shu ishni bajaramiz.

Lamening tenglamalarini x_j koordinata bo'yicha differensiallab,

$$\nabla^2 u_{i,j} + \frac{1}{1-2\nu}\theta_{,ij} = -\frac{\rho}{\mu} f_{i,j} \tag{10.21}$$

tenglamaga ega bo'lamiz va uni i va j indekslar bo'yicha svertkalab,

$$\nabla^2 u_{i,i} + \frac{1}{1-2\nu}\theta_{,ii} = -\frac{\rho}{\mu} f_{i,i},$$

hamda

$$u_{i,i} = \theta; \qquad \theta_{,ii} = \nabla^2\theta, \qquad f_{i,i} = f_{s,s} = f_{r,r}$$

ekanliklarini hisobga olib,

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\nabla^2\theta = -\frac{\rho}{\mu} f_{s,s} \tag{2.22}$$

tenglamani olamiz. Bu yerdan ma'lum bo'lgan

$$\theta = \frac{1}{3k}\cdot\sum, \quad k = \frac{E}{3(1-2\nu)}; \quad E = 2(1+\nu)\mu$$

tengliklarni hisobga olsak

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\cdot\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}\cdot\frac{1}{\mu}\nabla^2\sum = -\frac{\rho}{\mu} f_{s,s}$$

yoki

$$\nabla^2\sum = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\rho\, f_{s,s} \tag{2.23}$$

ifodani olamiz.

Lameningtenglamalarida i indeks erkin indeks bo'lgani uchun uni ixtiyoriy, masalan, j harfi bilan belgilash mumkin, ya'ni

$$\nabla^2 u_j + \frac{1}{1-2\nu}\theta_{,j} = -\frac{\rho}{\mu} f_j \tag{2.24}$$

Bu tenglamani x_i koordinata bo'yicha differensiallab,

$$\nabla^2 u_{j,i} + \frac{1}{1-2\nu}\theta_{,ji} = -\frac{\rho}{\mu} f_{j,i} \tag{2.25}$$

ni olamiz va uni (2.21) bilan qo‘shamiz:

$$\nabla^2 (u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{2}{1-2\nu}\theta_{,ij} = -\frac{\rho}{\mu}(f_{i,j} + f_{j,i}). \tag{2.26}$$

Lekin

$$u_{i,j} + u_{j,i} = 2\varepsilon_{ij} = \frac{2}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sum\ \right]$$

bo‘lganligi hamda $\theta = \frac{1}{3k}\sum = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)\mu}\sum$ ekanligidan (10.26) ni

$$\frac{1}{(1+\nu)\mu}\left[(1+\nu)\nabla^2\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\nabla^2\sum\ \right] + \frac{2}{1-2\nu}\cdot\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)\mu}\sum{}_{,ij} = -\frac{\rho}{\mu}(f_{i,j} + f_{j,i})$$

yoki

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\nabla^2\sum + \sum{}_{,ij} = -(1+\nu)\rho(f_{i,j} + f_{j,i}) \tag{2.27}$$

ko‘rinishga keltiramiz. Endi (10.17) ga (10.23) ni qo‘yamiz. U holda:

$$\nabla^2\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\sum{}_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\rho f_{s,s}\cdot\delta_{ij} - \rho(f_{i,j} + f_{j,i}). \tag{2.28}$$

Olingan (10.28) munosabatlar kuchlanish tenzorining $\sigma_{ij}(x_k)$ komponentalari orasidagi differensial bog‘lanishlarning har biri uchta tenglamadan iborat bo‘lgan ikkita quruhini ifodalaydi.

Birinchi guruh tenglamalaridan birinchisini $i = j = 1$ bo‘lgan holda olamiz:

$$\nabla^2\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sum}{\partial x_1^2} = -\frac{\nu}{1+\nu}\rho\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) - 2\rho\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \tag{2.29}$$

Ikkinchi guruh tenglamalaridan birinchisini $i = 1, j = 2$ bo‘lgan holda olamiz:

$$\nabla^2\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sum}{\partial x_1\partial x_2} = -\rho\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) \tag{2.30}$$

Guruhlarning qolgan munosabatlari (10.29) va (10.30) lardan indekslarni doiraviy almashtirish yo‘li bilan olinadi. Amalda uchraydigan masalalarning ko‘pchiligida f_i - massaviy kuchlar yo nolga teng, yoki o‘zgarmas bo‘ladi. U holda (10.28) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\nabla^2\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\sum{}_{,ij} = 0 \tag{2.31}$$

Bu tengliklar 1892-yilda Beltrani tomonidan o‘rnatilgan quyidagi oltita differensial bog‘lanishlarni ifodalaydi:

$$\nabla^2\sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sum}{\partial x_1^2} = 0; \quad \nabla^2\sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sum}{\partial x_1\partial x_2} = 0;$$

$$\nabla^2\sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sum}{\partial x_2^2} = 0; \quad \nabla^2\sigma_{23} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sum}{\partial x_2\partial x_3} = 0;$$

$$\nabla^2\sigma_{33} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sum}{\partial x_3^2} = 0; \quad \nabla^2\sigma_{31} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sum}{\partial x_3\partial x_1} = 0. \tag{2.32}$$

Yuqoridagi (10.29) ko‘rinishidagi uch tenglama va (10.36) ko‘rinishdagi yana uch tenglama birinchi marta 1900-yilda L.Mitchell tomonidan aniqlangan. Shuning uchun ham (10.28) differensial bog‘lanishlar Beltrani-Mitchell tenglamalari deb yuritiladi. Xuddi ana shu munosabatlar kuchlanishlarga nisbatan ifodalangan uzviylik tenglamalaridan iboratdir.

Endi (10.31) ni i va j indekslar bo‘yicha svertkalaymiz

$$\nabla^2\sigma_{ii} + \frac{1}{1+v}\sum_{,ii} = 0,$$

lekin,

$\sigma_{ii} = \sum$ va $\sum_{,ii} = \Delta^2\sum$ bo‘lganligi uchun

$$\frac{2+v}{1+v}\Delta^2\sum = 0 \quad \text{bundan,} \quad \Delta^2\sum = 0. \tag{2.33}$$

ya’ni massaviy kuchlar bo‘lmaganida kuchlanish tenzorining birinchi, yoki chiziqli, invariant $\sum = \sigma_{ii}$ - garmonik funksiyadan iboratdir.

Endi (10.33) Laplas operatorini qo‘llab $\nabla^2\sum = 0$ ligini hisobga olsak,

$$\nabla^2\nabla^2\sigma_{ij} = \nabla^4(\sigma_{ij}) = 0, \tag{2.34}$$

ya’ni massaviy kuchlar bo‘lmagani yoki o‘zgarmas bo‘lganlarida kuchlanish tenzorining σ_{ij} komponentalari bigarmonik funksiyalardan iboratdir.

5-ma’ruza. SEN-VENAN PRINSIPI

Uzun prizmatik bruslarning egilishi va buralishi haqidagi tadqiqotlarida Sen-Venan 1855-yilda o‘zining mashhur prinsipini e’lon qildi: *“Prizmaning uchlarida kuchlarning qo‘yilish va taqsimot usulining uning qolgan qismlarida vujudga keluvchi effektlarga ta’siri bo‘lmaydi, ya’ni qo‘yilgan kuchlarni har doim xuddi o‘zlaridek bosh moment va teng ta’sir etuvchisiga ega bo‘lgan statik ekvivalent kuchlar bilan almashtirish mumkin.”*

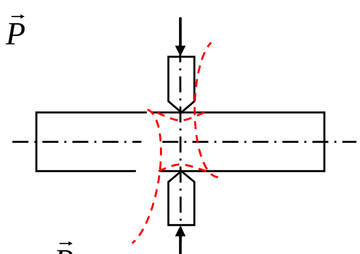
Bunday prinsipning paydo bo‘lishiga quyidagi muammo sabab o‘lgan. Elastiklik nazariyasining to‘g‘ri masalasini yechishda konkret chegaraviy shartlarni qanoatlantirish zaruriyati munosabati bilan katta matematik qiyinchiliklar yuzaga keladi. Shu bilan birga, fizik xarakterdagi mulohazalardan amalda jism s sirtining sirt kuchlari taqsimoti berilgan deb hisoblanuvchi ba’zi s_i qismlarida sirt kuchlarining aniq taqsimotini amalga oshirish mumkin bo‘lmaydi. Juda ko‘p masalalarda sirt kuchlari faqat umumiy holdagina, yoki bosh vektor va bosh momentlar sifatidagina ma’lum, sirt kuchlarining taqsimot qonuni esa faqat taqriban ma’lum yoki umuman ma’lum emas. Shunday qilib, elastiklik nazariyasi chegaraviy masalalarini yechishda matematik qiyinchiliklardan tashqari, chegaraviy shartlarni aniq ifodalash (formulirovka) muammosi ham paydo bo‘ladi. Bu qiyinchiliklar yuqoridagi Sen-Venan prinsipi asosida ancha kamayadi.

Sen-Venan prinsipini boshqacharoq qilib quyidagicha ifodalash foydali: *“Agar jism sirtining uncha katta bo‘lmagan qismiga bosh vektori va bosh momenti nolga teng kuchlar sistemasi qo‘yilgan bo‘lsa, u holda bunday kuchlar sistemasi, kuchlar qo‘yilgan qismdan uzoqlashib borish bilan juda tez kamayuvchi mahalliy (lokal) kuchlangan-deformatsialangan holatni vujudga keltiriladi”.*

Xuddi shu prinsip Sen-Veanandan o‘ttiz yil keyin 1885-yilda Bussinesk tomonidan ham taklif etilgan. Bussinesk o‘z prinsipini quyidagicha ifodalagan: *“Elastik jismga qo‘yilgan muvozanatlashgan tashqi kuchlar sistemasi, sistemaning kuchlari qo‘yilgan nuqtalar biror sferaning ichida yotgan holda, sferadan hisobga olmaslik mumkin bo‘lgan, lekin sfera radiusiga nisbatan yetarli darajada katta masofalardagina, deformatsiyalarni yuzaga keltiradi”.*

Sen-Venan prinsipini isbotlash uchun Bussinesk, to‘plangan kuchlar tekis chegarasiga perpendikulyar yo‘nalishda qo‘yilgan yarim cheksiz jismni qaragan. Sen-Venanning o‘zi esa bu prinsipni tasdiqlovchi o‘zining kauchukdan yasalgan sterjen bilan o‘tkazgan tajribalarini keltiradi. Lekin ta’kidlash lozimki, shu kungacha Sen-Venan prinsipining qat’iy isboti yo‘q.

Ikki teng va qarama-qarshi yo‘nalgan kuchlarning kauchuk sterjenga ta’sir qilib, amalda faqat mahalliy deformatsiani yuzaga keltirishi va sterjenning qolgan qismlari amalda deformatsialanmasligi misoli 6.1- rasimda keltirilgan.



1-rasm.

Elastiklik nazariyasi masalalarini yechishda Sen-Venan prinsipiga tez-tez murojaat qiladilar. Tashqi yuk qo‘yilgan joyda kuchlanish tenzorini aniqlash masalasi elastiklik nazariyasining alohida masala-larini tashkil etadi va kontakt masalalari yoki mahalliy kuchlanishlarni aniqlash masalalari deb ataladi.

IV. TERMODINAMIKANING ASOSIY TUSHUNCHA VA TENGLAMALARI

1-Ma’ruza.
TIRIK KUCH HAQIDAGI TEOREMA VA ICHKI SIRT KUCHLARINING ISHI

Reja:

1. *V* hajmdagi tutash muhitning kinetik energiyasi.
2. Ichki va tashqi massaviy kuchlarning ishi.
3. Tashqi sirt kuchlarining ishi. Ichki sirt kuchlarini ishini aniqlash.
4. Chekli hajmdagi tutash muhit uchun tirik kuch teoremasi.
5. Simmetrik kuchlanish tenzori holida ichki sirt kuchlari ishining ifodasi.
6. Tutash mihitning cheksiz kichik hajmi uchun tirik kuch teoremasi.
7. Ideal suyuqlik uchun ichki kuch ishining zichligi.

***Tayanch iboralar*:** kuch, sirt kuchlari, ichki va tashqi kuchlar, massaviy kuchlar, hajm simmetrik tenzor, ideal suyuqlik, kinetik energiya, simmetrik kuchlanish tenzori, cheksiz kichik hajm, tirik kuch, ish, elementar ish, ish zichligi.

1. V hajmdagi tutash muhitning kinetik energiyasi

Tutash muhit harakatining dinamik tenglamalarining eng ahamiyatli umumiy xulosalaridan biri bu tirik kuch haqidagi teoremadir.

Faraz qilaylik *V*-material muhit zarrachalari bilan birga harakatlanuvchi ixtiyoriy chekli hajm, *Σ* esa uni chegaralovchi sirt bo’lsin. Bundan tashqari *V* hajm ichida $P = p^{ij} э_i э_o$ -kuchlanish tenzori komponentalari hamda $v = v^i э_i = v_i э^i$-tezlik vektori komponentalari fazoviy koordinata va vaqtning uzluksiz differensiallanuvchi funksiyasi bo’lsin.

dt vaqt ichida cheksiz kichik hajmdagi tutash muhitning cheksiz kichik dτ-hajmning ko’chish vektori

$$d\vec{r} = \vec{v}dt$$

vektorni olamiz. Impulslar tenglamasini $d\vec{r}$ -ga skalyar ravishda ko’paytiramiz va V hajm bo’yicha integrallaymiz. U holda

$$\int_V \rho\vec{a}\vec{v}dtd\tau = \int_V \rho\vec{F}d\vec{r}d\tau + \int_V (\Delta_j p^{ij})v_i dtd\tau \tag{1.1}$$

bo’ladi. Bu munosabatga kiruvchi integrallarni almashtiramiz.

Skalyar (invariant) $\vec{v}\cdot\vec{a}$ miqdorni *V* koordinatalar sistemasini qo’llab hisoblash mumkin. Masalan, dekart koordinatalar sistemasida quyidagini osongina hosil qilish mumkin

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{v}^2$$

$dm = \rho d\tau$ -massa o’zgarmas bo’lganligi uchun

$$\int_V \vec{a}\vec{v}\rho d\tau dt = \int_M d\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right)dm = d\int_M \frac{\vec{v}^2}{2}dm = dE,$$

bu yerda ta’rifga ko’ra

$$E = \int_V \frac{\rho\vec{v}^2}{2}d\tau \tag{1.2}$$

V hajmdagi tutash muhitning kinetik energiyasi.

2. Ichki va tashqi massaviy kuchlarning bajargan ishi

Massaviy $\vec{F}$ kuchlarni ikkita gruppaga bo'lamiz: butun V hajmga nisbatan $\vec{F}^{(i)}$-ichki va $\vec{F}^{(l)}$-tashqi kuchlarga. U holda

$$\int_V \rho\vec{F}\cdot d\vec{r}d\tau = \int_V \rho\vec{F}^{(l)}\cdot drd\tau + \int_V \rho\vec{F}^{(i)}\cdot d\vec{r}d\tau = dA_m^{(l)} + dA_m^{(i)}, \tag{1.3}$$

bu yerda $dA_m^{(l)}$ va $dA_m^{(i)}$-cheksiz kichik ko'chishda V hajmga ta'siz qiluvchi va bu hajmga nisbatan tashqi va ichki massaviy kuchlarning elementar ishi.

Aytish kerakki, butun V hajmga ta'siz qiluvchi barcha ichki kuchlar yig'indisi hamma vaqt nolga teng, bu kuchlarning ishi esa noldan farqli bo'lishi mumkin.

(1.1) ifodadagi oxirgi integralni quyidagicha yozib olamiz

$$\int_V (\nabla_j p^{ij})v_i dt\, d\tau = \int_V \nabla_j (p^{ij}v_i)dt\, d\tau - \int_V p^{ij}\nabla_j v_i dt\, d\tau\,. \tag{1.4}$$

(1.4) ifodadaning o'ng tomonida turgan birinchi integralni almashtirish uchun Gauss-Ostrogradskiy teoremasidan foydalanamiz, ikkinchisini esa quyidagi ayniyat yordamida almashtiramiz

$$\nabla_j v_i = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) + \frac{1}{2}(\nabla_j v_i - \nabla_i v_j) = e_{ij} + \omega_{ij}\,.$$

Natijada

$$\int_V (\nabla_j p^{ij})v_i dtd\tau = \int_\Sigma p^{ij}v_i n_j d\tau dt - \int_V p^{ij}e_{ij}d\tau dt - \int_V p^{ij}\omega_{ij}dtd\tau \tag{1.5}$$

ni hosil qildik, bu yerda Σ - V hajmni chegaralovchi sirt, n_i esa Σga tushilgan (V hajimga nisbatan tashqi) normal birlik vektorining kovariant komponentalari $\omega_{ij}\mathfrak{I}^i\mathfrak{I}^j$ tenzor antisimmetrik bo'lganligi uchun

$$p^{ij}\omega_{ij} = p^{ij}\omega_{ij} \underset{[i<j]}{+} p^{ij}\omega_{ij} = \left(p^{ij} \underset{[i<j]}{-} p^{ji}\right)\omega_{ij} \tag{1.5'}$$

tenglik o'rinli. Shuning uchun klassik holda, kuchlanish tenzori simmetrik $(p^{ij} = p^{ji})$ bo'lganda, (1.5) da oxirgi integral nolga teng.

3. *Tashqi sirt kuchlarining ishi. Ichki sirt kuchlarining ishini aniqlash*

Ma'lumki $p^{ij}\eta_j\mathfrak{I}_i = \vec{p}_n$, u holda

$$\int_\Sigma p^{ij}v_i\, n_j d\sigma\, d\,t = \int_\Sigma \vec{p}_n\cdot d\vec{r}d\sigma = dA_{sirt}^{(l)} \tag{1.6}$$

bo'ladi, bu yerda $dA_{sirt}^{(l)}$ orqali $\sum$ sirt nuqtalarining cheksiz kuchik $d\bar{r} = \bar{v}dt$ ko'chishlaridagi V hajmdan ajratilgan $\sum$ sirtga ta'sir qiluvchi tashqi sirt kuchlarining ishi belgilangan.

(1.4) ifodadagi oxirgi integral invariand miqdor bo'lib, ta'rifga ko'ra *V hajmdagi ichki sirt kuchi kuchlanishlarning kuchi* deyiladi va

$$-\int_v p^{ij}\nabla_j v_i dtdr = dA^{(i)}{}_{sirt} \tag{1.7}$$

4. Chekli hajmdagi tutash muhit uchun tirik kuchlar teoremasi

Shunday qilib (1.1) tenglikni quyidagicha yozish mumkin

$$dE = dA^{(e)}{}_m + dA^{(i)}{}_m + dA_{sirt}{}^{(e)} + dA_{sirt}{}^{(i)}, \tag{1.8}$$

ya'ni haqiqiy harakat uchun tutash muhit chekli individual hajmining kinetik energiyasining differensiali, bu hajmga ta'sir qiluvchi tashqi massaviy, ichki massaviy, tashkqi sirt va ichki sirt kuchlarining elementar ishlari yig'indisiga teng.

(1.8) munosabat *deformatsiyalanivchi tutash muhitning chekli hajmiga qo'llaganda tirik kuchlar teoremasi* deyiladi. (1.8) tirik kuchlar teoremasini ifodasida dE - E funksiyaning to'liq differensiali (bu yerda E-tutash muhit hajmining kinetik energiyasi) qolgan $dA_m^{(e)}$, $dA_m^{(i)}$, $dA_{sirt}^{(e)}$, $dA_{sirt}^{(e)}$ hadlar esa umumiy holda oddiy cheksiz kichik miqdorlar – tutash muhitning har bir nuqtasida aniqlangan

$$d\vec{n} = \vec{v}dt$$

uzliksiz cheksiz kichik ko'chishlar sistemasida mos kuchlarning elementar ishlari.

5. Simetrik kuchlanish tenzori holida ichki sirt kuchlari ishining ifodasi

Yuqoridagi (1.4),(1.5),(1.5') ifodalardan ko'rinadiki, ichki sirt kuchlari ishi uchun ifodani qo'yidagicha yozish mumkin:

$$dA_{sirt}^{(i)} = -\int_V p^{ij} e_{ij} dt\, d\tau - \int_V p^{ij} \omega_{ij} dt\, d\tau \qquad (1.9)$$

yoki simmetrik kuchlanish tenzori holida

$$dA_{sirt}^{(i)} = -\int_V p^{ij} e_{ij} dt\, d\tau\,. \qquad (1.10)$$

Ma'lumki, uch o'lchovli fazoda ω_{ij} -antisimmetrik tenzorga mos qilib aksial vektor ωni (tezlikning uyrma vektori) qo'yish mumkin. Yuqorida keltirilgan xulosalarga ko'ra, harakatlanuvchi tutash muhitda uyurmalarning borligi kuchlanishlarning simmetrik tenzori holida (xususan, harakat muqdorining ichki momentlari, tashqi massaviy va sirt kuchlari bo'lmagan holda) ichki sirt kuchlari bajargan elementar ishining miqdoriga va demak, kinetik energiyaning o'zgarishiga tog'ridan-tog'ri ta'sir qilmaydi.

6.Tutash muhitning cheksiz kichik hajmi uchun tirik kuch teoremasi

Endi cheksiz kichik hajmdagi tutash muhit uchun tirik kuch teoremasini yozamiz. Buning uchun tutash muhitning biz qarayotgan biror bir nuqtasini o'z ichiga olgan kichik ΔV hajmni olamiz. Hajmni bu nuqtagacha toraytirganimizda (1.1) tenglikni ΔV uchun yozib uni ΔV hajm ichidagi zarrachaning Δm massasiga bo'lsak, u holda (1.2) va (1.4) larni hisobga olib quyidagiga ega bolamiz:

$$\frac{dv^2}{2} = \vec{F}\cdot d\vec{r} + \frac{1}{\rho}\cdot\nabla_j(p^{ij}v_i)dt - \frac{1}{\rho}\cdot p^{ij}\nabla_j v_i\, dt,$$

bu yerda $v^2/2$ miqdorni kinetik energiyaning zichligi deyish mumkin, $\vec{F}\cdot d\vec{r},\ \frac{1}{\rho}\nabla_j(p^{ij}v_i)dt,\ -\frac{1}{\rho}p^{ij}v_i dt$ -miqdorlar esa massaviy va sirt tashqi va ichki kuchlari ishining zichligi.

Tutash muhitning cheksiz kichik hajmi uchun tirik kuchlar teoremasiga ichki massaviy kuchlarning elementar ishi kirmaydi, sababi V hajmi nuqtagacha taraytirganda va $M\to 0$ da u nolga intiladi. Bu esa to'g'ridan to'g'ri massoviy kuchlarning zichligi bu hajmga ta'sir qiluvchi tashqi massoviy kuchlarning hajmining massasiga nisbati sifatida mavjud degan farazdan kelib chiqadi.

Fazar qilaylik, masalan, ichki massaviy kuchlar V hajm zarrachalari orasidagi N'yutonning o'zaro tortish kuchlaridan iborat bo'lsin. U holda ichki massaviy kuchlarning M massali V hajmdagi ishi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$f\int_M\int_M \frac{dm_1 dm_2}{(r_1 - r_2)}\cdot\frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|}\cdot dr_2\,.$$

Bu ifodani M ga bo'lib, V ni nuqtagacha toraytirsak, hosil bo'lgan nisbatning limiti nolga teng bo'ladi.

Shunday qilib, har bir cheksiz kichik zarracha uchun o'rinli bo'lgan tirik kuchlar teoremasi quyidagicha ta'riflanadi: *tutash muhitning har bir nuqtasida kinetik energiya zichligining differensiali bu cheksiz kichik* *zarrachaga ta'sir qiluvchi tashqi massaviy, tashqi sirt va ichki sirt kuchlari bajargan elementar ish zichliklarining yig'indisiga teng.*

Yuqorida ko'rganimizga ko'ra tirik kuchlar teoremasi impulslar tenglamasining natijasidir va u mexanik energiya balansi tenglamalarini ifogalaydi. Tirik kuchlar teoremasi energetik tabiatga ega, ammo bu munosabatlar umumiy holda energiyani saqlanish qonunini ifodalamaydi. Faqatgina mexanik energiya issiqlik yoki boshqa turdagi energiyaga o'tmagan holda energiyani saqlanish qonunini ifodalaydi. Aytib otish kerakki, energiyaning saqlanish qonuni bu holda ikkiga bo'linadi: mexanik va nomexanik energiyalarning (har biri aloxida) saqlanish qonunlari. Ba'zi bir xususiy hollarda, $\frac{1}{dm}dA^{(i)}_{sirt}$ ko'rinishdagi ichki sirt kuchlari ishining zichligi ifodalarini hosil qilamiz. Quyidagiga egamiz

$$\frac{1}{dm}dA^{(i)}_{sirt} = -\frac{1}{\rho}p^{ij}e_{ij}dt - \frac{1}{\rho}p^{ij}\omega_{ij}dt = -\frac{1}{\rho}p^{ij}e_{ij}dt - \frac{1}{\rho}(p^{ij} - p^{ji})\omega_{ij}dt\,.$$

Agarda muhit qattik jism sifatida harakatlanayongan bo'lsa, u holda barcha $e_{ij}=0$ va

$$\frac{1}{dm}dA^{(i)}_{sirt} = -\frac{1}{\rho}(p^{ij} \underset{[i<j]}{-} p^{ji})\omega_{ij}dt\,.$$

Agarda kuchlanish tenzori simmetrik bo'lmasa, $(p^{ij} \neq p^{ji})$, u holda muhitning absolyut qattiq jism sifatida harakatlanayonganida ishchi sirt kuchlari ishi nolgan farqli bo'lishi mumkin, sababi aylanishda burchak tezligi $\vec{u}$ va demak w_{ij} noldan farqli bo'lishi mumkin.

Agarda kuchlanish tenzori simmetrik bo'lsa, u holda quyidagi tenglik orinli

$$\frac{1}{dm}dA^{(i)}_{sirt} = -\frac{1}{\rho}P^{ij}e_{ij}dt, \tag{1.11}$$

ya'ni bu holda ichi sitr kuchlarini ishi, umuman olganda, deformasiyalarga bo'g'liq. Agarda sistemani kuchlanish tenzoriga ega bo'lgan muhit absolyut qattiq jism sifatida harakatlansa, u holda undagi ichki sirt kuchlarining ishi hamma vaqt nolga teng.

7. Ideal suyuqlik uchun ichki kuch ishining zichligi

Ideal suyuqlik uchun $P^{ij} = -pg^{ij}$, shuning uchun

$$\frac{1}{dm}dA^{(i)}{}_{sirt} = \frac{p}{\rho}g^{ij}e_{ij}dt = \frac{p}{\rho}e^{i}_{i}dt = \frac{p}{\rho}div\,\vec{v}\,dt.$$

Oxirgi ifodada div $\vec{v}$ ni uzviylik tenglamasi yordamida almashtirib,

$$\frac{1}{dm}dA^{(i)}{}_{sirt} = -\frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}dt = pd\frac{1}{\rho} = pdV \tag{1.12}$$

ni hosil qilamiz, bu yerda V-solishtirma hajm. Muhitning cheksiz kuchik zarrachasi uchun tirik kuchlar teoremasi quyidagicha bo'ladi:

$$d\frac{v^2}{2} = \frac{1}{dm}dA^{(e)}{}_m + \frac{1}{dm}dA^{(l)}{}_{sirt} + pd\frac{1}{\rho} = \vec{F}^{(l)}\vec{v}\,dt - \frac{1}{\rho}\nabla_k(pv^k)dt + pd\frac{1}{\rho}\,. \tag{1.13}$$

Xulosa

Tutash muhit chekli hajmi uchun kinetik energiya va unga ta'sir qiluvchi kuchlar aniqlanib, tirik kuchlar haqidagi teorema keltirib chiqarildi. Bu teorema ba'zi muhitlar uchun konkretlashtirildi.

2-Ma’ruza.

TERMODINAMIKANING BIRINCHI BOSHLANISHI (ENERGIYANING SAQLANISH QONUNI) VA ISSIQLIK OQIMI TENGLAMASI

Reja:

1. Holat parametrlari.
2. Tutash muhit uchun holat parametrlarining soni.
3. Aniqlovchi parametrlarinig to’liq sistemasi.
4. Golonom va golonommas termodinamik sistemalar.
5. Holatlar fazoi. Proseslar va sikllar.
6. Sistemaning tashqi ob’ektlar bilan o’zaro ta’siri.
7. Energiyaning saqlanish qonuni.

Tayanch iboralar: energya, tutash muhit, holat parametrlari, prosess, sikl, o’zaro ta’sir, cheksiz kichik zarracha, ichki holat, deformatsiya tenzori, komponentalari, kontinium, temperatura, tezlik, zichlik, issiqlik o’tkazish koeffisienti, golonom va golonommas sistema, tashqi kuch ishi, kuch.

1.Holat parametri

Termodinamikaning va shu bilan birga butun tutash muhitning asosida yotuvchi tushunchalardan boshlaymiz, bular sistemaning ,,holati” va ,,holat parametri” tushunchalaridir. Biz qarayotgan ***sistemaning (masalan biror chekli hajmdagi tutash muhit)holati berilgan deyiladi, agarda sistemaning (muhitning) bizni qiziqtiruvchi xarakteristikalarini to’liq aniqlovchi biror bir*** $\mu^1, \mu^2, \ldots \mu^n, \ldots$ ***parametrlari berilgan bo’lsa.***

Biror bir diapazonda ixtiyoriy qiymatlarni qabul qila oladigan μ - aniqlovchi parametrlar ***holat parametrlari*** deyiladi. Tutash muhitni har xil modellari uchun holat parametri va ularning soni har xil .

Muhit holatini bilish nimadan iborat. Bu savolga quyidagi javobni berish mumkin. Barcha jismlar atom va molekylalardan iborat va agarda vaqtning har bir momentida (paytida) jismni tashkil qiluvchi barcha elementar zarrachalarning harakati va holati ma’lum bo’lsa, u holda butun jism holati ham ma’lum bo’ladi. Haqiqat agarda biz, masalan *1 sm* hajmdagi tinch havoning holatini bermoqchi bo’lsak, u holda biz bu hajmdagi molekula koordinatalarining vaqtdan bog’liq $3\cdot 10^{27}$ ta funksialarini berishimiz kerak chunki hatto tinch halotdagi molekulalar ham harakatlanadi. Shu bilan birga ma’lumki makroskopik nuqtai nazarga ko’ra ko’p hollarda tinch holatdagi havo(va boshqa gazlar)ning holati faqat 2 ta parametrlarning - p bosim va ρ zichlikning berilishi bilan aniqlanadi.

Makroskopik nuqtai nazar - bu shunday nazarki bunga ko’ra tabiat va texnikada biz kuzatayotgan har xil hodisalarida faqat chekli jismlar uchun ahamiatli bo’lgan effektlar, hossalar va jarayonlar hisobga olinadi.

Diskret sistema sifatida qaralayotgan muhit holatini aniqlovchi ko’p sonli parametrlardan muhitning makroskopik holatini aniqlovchi kamroq sondagi (masalan gaz uchun ρ va P) parametrlarga o’tish muommosi trivial emas va u suyuqlik, gaz va qattiq jismlar fizikasining muhim muommosi hisoblanadi. Bu muommoni yechish hamma vaqt qushimcha gipotezalar bilan bog’liq – bular nisbiylik qonuni va boshqa tabiatga ega bo’lgan gipotezalar.

Makroskopik parametrlar harakatlanuvchi va umuman ixtiyory joylashgan ko’p sonli molekula to’plamiga nisbattan biror bir farazlarda hisoblangan o’rta statik miqdorlar sifatiga qurulishi mumkin. Masalan, gazlarda, makroskopik tezlik $\vec{v}$ ni fizik jihatdan kichik hajmdagi molekulalar to’plamining og’irlik markazi tezligi sifatiga kiritish mumkin, T temperaturani atom va molekulalarning xaotik harakatining erkinligi birga teng makroskopik harakatga nisbattan o’rtacha energiya sifatida olish mumkin; biror bir yuzachadagi P_n kuchlanishni esa molekulalarning xaotik harakatida bu yuzachadan molekulalr bilan o'tayotgan implusning o'rtacha xarakteristikasi sifatida qarash mumkin va xakazo.

Umumiy holda aniqlovchi parametrlar aniq qaralayotgan masalalar sinfi uchun gipotezalar yordamida kiritiladi shu bilan birga ular nazariy tadqiqotlarga hamda tajriba natijalariga asoslanadi. Ko'pgina murakkab holatlarda aniqlovchi parametr kiritish muommosi ochiq holatda turibdi va hali o'rganilmagan. Masalan, qovushoq-plastik qattiq jism uchun murakkablashgan fizik, kimyoviy yoki biologik sistemalardagi muvozanatsiz hodisalarda va ko'pgina boshqa muommolar.

2. Tutash muhit uchun holat parametrlari soni

Material muhit kichik zarrachasining ichki holatini, umuman olganda diskret(sanoqli) sistema elementar zarrachalariga nisbatan chekli va ancha kamroq sondagi aniqlovchi parametrlar bilan xarakterlash mumkin. Masalan klassik elastiklik nazariyasida deformatsiyalanuvchi qattiq jism zarrachasining ichki holati faqat ettita parametr bilan ε_{ij} - deformasiya tenzorining 6 ta komponentasi va *T*-temperaturasi hamda berilgan konkret muhit uchun o'zgarmas fizik konstantalar – *E* - Yung moduli, ν - Puasson koeffisienti va *c* - issiqlik sig'imi bilan xarakterlanadi. Shu bilan birga shunday holatlar ham bo'lishi mumkinki, kontiniumning bir modelida hatto kontiniumning cheksiz kichik zarrachasining holatini aniqlovchi parametrlar soni cheksiz bo'ladi.

Bu turdagi modellarga misol qilib "наследственность-nasl" ga ega jism modellarini olish mumkin. Bunday modellarni kiritishda P_{ij} kuchlanishlar nafaqat ayni paytdagi deformatsiya va temperaturadan bog'liq, balkim jism deformatsiyalanishining tarixiga bog'liq, ya'ni $P_{ij}(t)$ va $T(t)$ funksiyalarga bog'liq. Bu esa P_{ij} kuchlanishlar ε_{ij}, T va ularning vaqt bo'yicha hosilalariga bog'liq degan tasdiqqa ekvivalent, ya'ni bunday muhit holatining parametrlari soni cheksiz ko'p. Boshqa ancha murakkabroq misol qilib statistik fizikaning kinetik nazariyasida uchraydigan kontiniumlarini qarash mumkin, masalan Bolsman tenglamasi bilan ifodalanuvchi gaz. Ammo bu turdagi modellar ancha murakkab va nazariy va amaliy tajribalar shuni ko'rsatayaptiki, ko'pgina amaliy jihatdan muhim hollarda kichik zarracha holatini berish uchun chekli va umuman kichik sondagi parametrlar bilan chegaralanish mumkin.

Chekli hajmdagi tutash muhitni holatini aniqlash uchun, umuman olganda parametrni chekli soni emas balkim har doim funksiyalar berilishi kerak - deformatsiyalarning, temperaturaning va h.k. taqsimlanishi.

Funksiyaning berilishi cheksiz ko'p parametrlarning berilishiga ekvivalent. Shuning uchun umumiy holda tutash muhitning ixtiyoriy modellari uchun aniqlovchi parametrlar soni cheksiz. Keyinchalik (quyida) biz cheksiz kichik zarracha uchun chekli xarakteristikalar sistemasi mavjud deb qabul qilamiz. Bu sistema ishlatilayotgan koordinatalar sistemasida berilgan aniqlovchi parametrlardan iborat. μ^i orqali biz qabul qilingan hisob sistemasida o'zgaruvchi bo'lishi mumkin bo'lgan parametrlarni belgilaymiz, R^i orqali fizik o'zgarmaslarni belgilaymiz.

3. Aniqlovchi parametrlarning to'liq sistemasi

Ta'rifga ko'ra ***fiksirlangan kichik zarracha uchun*** $\mu^1, \mu^2, \ldots \mu^n, k^1, k^2, \ldots k^m$ ***miqdorlar ba'zisni, ya'ni aniqlovchi parametrlarning to'liq sistemasini tashkil qiladi deyiladi, agarda ular o'zaro bog'lanmagan (erkli) va ma'lum oraliqda diapazonda ixtiyoriy bo'lsa.***

Masalan, gaz zarrachasi uchun zichlik va temperatura ma'lum chegaralarida ixtiyoriy berilishi mumkin, boshqa termodinamik funksiyalar, masalan, entropiya va bosim ular orqali aniqlanadi.

4.Golonom va golonommas termodinamik sistemalar

Nazariy mexanikadagi erkinlik darajasi soni bilan tutash muhitlar mexanikasida aniqlovchi parametrlar soni orasida analogiyani (o'xshashlikni) kiritish mumkin. Haqiqatan erkinlik darajasi mexanik sistemaning holatini aniqlovchi erkli parametrlar soni sifatida aniqlanadi. Masalan absolyut qattiq jismning erkinlik darajasi 6 ga teng. Agarda absolyut qattiq jismni fizik sistema sifatida qarasak, u holda uni aniqlash uchun yana 10 ta o'zgarmas parametrlarni - massani, jismda massalar markazining joylashishini va inersiya tenzori komponentalarining massalar markazidagi holatini berishimiz kerak bo'ladi.

Nazariy mexanikada golonommas sistemalar qaraladi. Tutash muhitlar mexanikasida ham, agarda μ^i - aniqlovchi parametrlar aniq chegaralarda ixtiyoriy ravishda o'zgarib, ularning $\delta\mu^i$ ortirmasi qaralayotgan masalalar sinfining shartlariga ko'ra *m* ta

$$A_i\delta\mu^i=0$$

ko'rinishdagi erkli integrallanmaydigan munosobatlar bilan o'zaro bog'liq bo'lsa, bunday holat o'rinli, bu yerda A_i - aniqlovchi parametrlarning bazi bir funksiyalari. U holda *n - m ta* $\delta\mu^i$*erkin orttirmalar soni* μ^i *- aniqlovchi parametrlarning erkin o'zgaruvchilar sonidan kichik bo'ladi va termodinamik sistema golonommas deyiladi.*

Golonommas sistemaning erkinlik darajasi $\delta\mu^i$erkin orttirmalar soni sifatida aniqlanadi. Faraz qilaylik, masalan $\mu^1(\xi^1,\xi^2,\xi^3,t)$ - zarracha zichligi ρning biror bir skalyar parametri, *t* - vaqt, ξ^1, ξ^2, ξ^3 - ajratilgan zarracha markazining Lagranj koordinatalari, μ^2 va μ^3 parametrlar esa μ^1ning *t* bo'yicha birinchi va ikkinchi hosilasidan iborat bo'lsin, ya'ni

$$\mu^2=\partial\mu^1/\partial t; \qquad \mu^3=\partial\mu^2/\partial t=\partial^2\mu^1/\partial t^2. \tag{2.1}$$

Tabiiy fizik shartlarga ko'ra, t vaqt μ^i sistemaga kirmaydi. Har xil tashqi shartlarda biror bir chegaradagi har xil ixtiyoriy μ^1,μ^2,μ^3 qiymatli holatlar o'rinli, $d\mu^1$ va $d\mu^2$ orttirmalar esa *dt* vaqtning o'zgarishi hisobiga $\xi,^1\xi^2$, ξ^3 o'zgarmaslarda hamma vaqt bitta

$$\mu^2 d\mu^2 - \mu^3 d\mu^1=0 \tag{2.2}$$

ko'rinishdagi golonommas munosabat bilan bog'langan.

5*. Holatlar fazosi. Prosesllar va sikllar*

Holatlar fazosi deganda koordinatalari μ_i holat parametrlaridan iborat fazo (fazaviy fazo) tushuniladi.

Termodinamik sistemaning har xil holatlariga holatlar fazosining har xil nuqtalari mos keladi. Holat parametrining biron bir ketma-ket qiymatlariga mos keluvchi muhit holatining majmuasi prosess yoki *jarayon* deyiladi. *Jarayon uzluksiz bo'lishi mumkin, agarda berilgan zarracha uchun* $\mu^1,\mu^2,\ldots\mu^n$ *holatlar majmuasi holatlar fazosida uzluksiz egri chiziqni hosil qilsa.*

6. Sistemaning tashqi ob'ektlar bilan o'zaro ta'siri

Biz jarayonni bajarsak, sistema umumiy holda tashqi jism va maydonlar bilan o'zaro ta'sirda bo'ladi. Tutash muhit modellarini qurishda asosiy masala tutash tuhitning ajratilgan zarrachasi bilan unga nisbattan tashqi bo'lgan jism va maydonlar orasida, xususiy holda o'zaro ta'sir qonunlari va mexanizmlarini o'rnatishdan iborat.

Hozirgi vaqtda ajratilgan zarracha va o'rab turuvchi muhit orasida energiya almashinuvining yangi makroskopik mexanizmlari va elementar zarrachalar orasida energiya almashuvi qonunlari o'rganilmoqda.

Ushbu $d\mu^1,d\mu^2,\ldots d\mu^n$elementar zarrachaning kichik zarrachaga energiyaning to'liq tashqi oqimini quyidagicha tasvirlash mumkin:

$$DA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}, \tag{2.3}$$

bu yerda $dA^{(e)}$- tashqi makroskopik massaviy va sirt kuchlarining ishi, $dQ^{(e)}$- issiqlik oqimi; dQ^{**} - energiyaning zarrachaga nisbattan tashqi oqimi.

Tashqi kuchlarning elementar ishi uchun aniqlovchi parametrlar sistemasining asosiy manosiga ko'ra $d\mu^1; d\mu^2,\ldots d\mu^n$parametrlarning o'zgarishiga mos keluvchi cheksiz kichik elementar jarayon uchun

$$DA^{(e)} = P_i(\mu^1, \mu^2, \mu^3,\ldots \mu^n, k^1, k^2,\ldots k^m)d\mu^i \tag{2.4}$$

ko'rinishidagi formulani yozish mumkin. Bu formulada $dA^{(e)}$ tashqi kuchning ishi qaralayotgan zarrachaning ichki parametrlari va ularning orttirmalari orqali tasvirlangan.

Tutash muhitning cheksiz kichik zarrachasi uchun (2.4) formulani quyidagi $\vec{v}$ tezlik bilan harakatlanuvchi m massali material nuqta uchun

$$dA^{(e)} = m\nu\, d\nu \tag{2.5}$$

formulaning yoki chekli o'lchamdagi ixtiyoriy absalyut qattiq jism uchun

$$dA^{(e)}=m\nu\, d\nu^* + Apdp + Bqdq + Crdr \tag{2.6}$$

formulani umumlashgani sifatida qarash mumkin, bu yerda m - jism massasi; ν^*- jism massalar markazi tezligi, A, B, C lar inersiyaning markaziy o'qlariga nisbattan inersiya momenti; p, q, r - oniy burchak tezligining markaziy o'qqa proeksiyalari.

Ideal suyuqlik uchun tirik kuchlar teoremasiga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$\frac{dA^{(e)}}{dm}=vdv - pd\,\frac{1}{S}\,. \tag{2.7}$$

Yuqoridagi (2.4)-(2.7) munosabatlarni har birini $dA^{(e)}$ni muhitning uchki parametrlari orqali aniqlaydi.

Xuddi (2.4) munosobat kabi fizik xususiyatlar asosida va umuman, qaralayotgan muhit modelining ta'rifiga kiruvchi maxsus fizik farazlar asosida quyidagini yozish mumkin:

$$dQ^* = dQ^{(e)} + dQ^{**} = Q_i(\mu,\mu,\ldots\mu,\kappa,\ldots\kappa^m)d\mu^i\,. \tag{2.8}$$

Masalan deformatsiyalanayotgan qatiq jism yoki ideal siqilmaydigan suyuqlik uchun

$$DQ^* = dQ^{(e)} = C(T)dT \tag{2.9}$$

bo'ladi, bu yerda $C(T)$ - issiqlik sig'imi koeffisenti, T-temperatura.

7. Sistemaning saqlanish qonuni

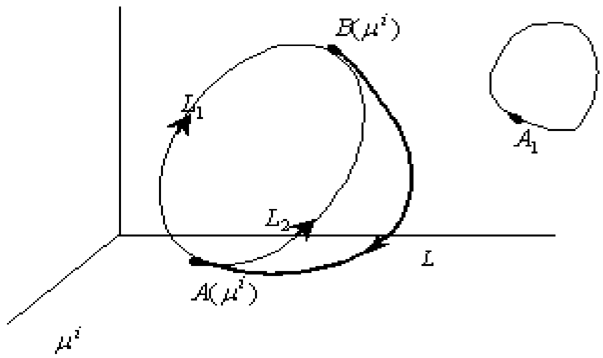
Faraz qilaylik holatlar fasosida holat parametri μ_0^i qiymatli A nuqtadan, μ^i parametrli B nuqtagacha L_1 egri chiziq bo'lab o'tayotgan jarayon sodir bo'lgan bo'lsin. Bu jarayonda sistema tashqaridan qabul qilayotgan energiyaning to'liq oqimi tushunchasini kiritamiz, u quyidagiga teng:

$$A^{(e)}+Q^* = \int_{AB(L_1)} P_i d\mu^i + \int_{AB(L_1)} Q_i d\mu^i\,. \tag{2.10}$$

Faraz qilaylik sistema C-siklni bajarsin, u holda energiyaning saqlanish qonuni qo'yidagicha ta'riflanadi:

$$\int_C (P_i + Q_i)d\mu^i = 0, \tag{2.11}$$

ya'ni ixtiyoriy siklni bajaruvchi sistemaga tashqaridan keluvchi energiyaning to'liq oqimi 0 ga teng.



2.1.-chizma

Bu yerdan to'g'ridan-to'gri quyidagi xulosa kelib chiqadi: sistema qabul qilayotgan energiyaning to'liq oqimi L_1 jarayondan emas, balkim faqat sistemaning boshlang'ich va keyingi holatiga bog'liq. Haqiqat agar A va B holatlar orasida ixtiyoriy L_1 jarayondan
tashqari L_2 jarayonni va B holatdan A holatga o'tuvchi L jarayonni qarasak, u holda L_1L va L_2L jarayonlar yopiq siklni hosil qiladi va energiyaning saqlanish qonuniga ko'ra

$$A^{(e)} + Q^* = \int_{L_1} (P_i + Q_i) d\mu^i = \int_{L_2} (P_i + Q_i) d\mu^i = -\int_{L} (P_i + Q_i) d\mu^i \ . \qquad (2.12)$$

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Sistema holati va holat parametrlari tushunchasini bering.
2. Tutash muhit uchun holat parametrlari soni nimaga bog'liq.
3. Kichik zarracha uchun aniqlovchi parametrlarning to'liq sistemasini yo'zing.
4. Tutash muhitlar sistemasida qanday termodinamik sistemalar qaraladi.
5. Golonom termodinamik sistema deb nimaga aytiladi.
6. Golonommas termodinamik sistema ta'rifini bering.
7. Holat fazosi deganda nimani tushunasiz.
8. Jarayon va sikl tushunchalarini bering.
9. Energiyaning saqlanish qonuni yozing va uni sikllar yordamida tushuntiring.
10. Termodinamik sistemaning tashqi ob'ektlar bilan o'zaro ta'siri qay tarzda sodir bo'ladi?
11. Termodinamik jaraypnda sistema tashqaridan qabul qilayotgan energiyaning to'liq oqimi nimaga teng?

Xulosa

Tutash muhit uchun termodinamikaning birinchi qonuni, asosiy termodinamik paramtrlar, ish, energiya haqida tushunchalar berildi. Ular orasidagi ba'zi zarur munosabatlar keltirildi

3-Ma’ruza.

TERMODINAMIK MUVOZANAT, QAYTAR VA QAYTMAS JARAYONLAR

Reja:

1) Termodinamik muvozanat:
2) Muvozanatli va muvozanatsiz jaroyanlar;
3) Qaytar va qaytmas jarayonlar;
4) Amaliy jihatdan qaytar deb hisoblash mumkin bo’lgan jarayonga misol;
5) Muvozanatli va ehtimoli ko’proq bo’lgan jarayonlar ;
6) Ehtimoli o’rtacha va qaytmas mikroskopik jarayonlar;
7) Temperatura haqida tushuncha;

***Tayanch iboralar**:* jarayon, holat parametrlari, sikl, muvozanat, temperatura, tezlik, zichlik, issiqlik o’tkazish koeffisienti.

1.Bizga malumki absalyut qattiq jismning mexanik muvozanatini qarash mumkin . Jism tanlangan biror sanoq sistemasiga nisbatan **muvozanatda** deyiladi, agar barcha tashqi shartlar uzoq vaqt davomida o’zgarmasdan qolsa. **Termodinamik muvozanat** deb shunday holatga aytiladiki , sistema ichki holatining barcha xarakteristikalari (mexanik xarakteristikalari ham) tashqi shartlar saqlanib turgan o’z qiymatlarini uzoq vaqt saqlab tursalar . Holatlar fazosida termadinamik muvozanat xolati nuqta orqali ifodalanadi . kichik hajmdagi sistemaning muvozana tholati uning temprатura xarakteristikasidan ko’proq bog’liq .

2.Termadinamik jarayon tez yoki sekin sodir bo’lishi mumkin . juda sekin bo’lgan termadinamik jarayonlarn iqaraylik , bunda barcha parametrlarning o’zgarish tezligi cheksiz kichik bo’ladi.
Holatlar fazosida bunday jarayon egri chiziq orqali ifodalanadi ,uning har bir nuqtasi muvozanat holati bo’ladi. Juda sekin jarayonlarning har bir oraliq holat imuvozanat holati bo’ladi va bunday jarayonlar **muvozanatli jarayon** deyiladi; Muvozanatli jarayonlarni ifodalovchi munosabatlarda parametrlarning o’zgarish tezligining qiymati ahamiyatga ega emas , faqat ularning o’zgarish yo’nalishi ahamiyatga ega bo’lishi mumkin.

Chekli tezlikda sodir bo’luvchi jarayonlar (agar tezliklar fizik bog’lanishlarga tasir ko’rsatsa) **muvozanatsiz jarayonlar** deb ataladi .

Muvozanatli va o’rnashgan (statsionar) jarayonlar umumiy holda ustma ust tushmaydi.Jarayon o’rnashgan bo’lishi mumkin yani geometric fazodagi berilgan nuqtada holat parametrlari vaqt o’tishi bilan o’zgarmaydi

$$\frac{\partial \mu^i}{\partial t} = 0 .$$

Shu vaqtning o’zida muvozanatsiz bo’lishi ham mumkin , yani parametrlarning o’zgarish tezliklari muhit zarrachalaridagi jarayonlarga sezilarli tasir ko’rsatadi.

$$\frac{\partial \mu^k}{dt} = 0 .$$

3. Biror A holatdan B holatga o’zgaruvchi jarayon qaytar jarayon deyiladi, agar parametrlarning cheksiz kichik ortirmasida oraliq holatlar uchun barcha tenglamalar shu ortirmalar qarama –qarshi ishora bilan olinganda ham o’rinli bo’lsa .Shunday qilib holatlar fazosida biror holatlar ketma-ketligi qaytar jarayonni tashkil qilsa, unga mos keluvchi energiya oqimlari $dA^{(e)}$, $dQ^{(e)}$ va dQ^{**} lar to’g’ri va qaytuvchi jarayonlarda faqat ishorasi bilan farq qilar ekan.

4.Tadqiqotlar shuni ko’rsatadiki bazan juda tez sodir bo’luvchi jarayon -reaktiv dvigatel soplavidan gaz tashqariga chiqishini qayatr jarayon deb atash mumkin , bunda gaz zarrachalari muvozanat holatidagi 70 atm bosimli kameradan tartibi $3000 \, {}^{m}\!/_{s}$ bo’lgan tezlik bilan xarakatlanuvchi va bosim deyarli nol bo’lgan holatga o’tadi.

Bunday jarayonlar yuqori balandliklarda uchayotgan raketalarda sodir bo’ladi. Bu jarayonda issiqlik energiyasi turli tempraturali zarrachalar aro o’zoro almashishga ulgurmaydi; zarrachadagi termadinamik parametrlar faqat boshlang’ich muvozanat holatdan bog’liq bo’ladi.

5.Molekulalar mikroskopik harakatiga mos keluvchi o’rta statistic parametrlardan T tempratura va ρ zichlikni qaraylik. Bizgamalumki T va ρ ning aniq qiymati mikroskopik harakat harakteristikalarining cheksiz ko’p taqsimlanishlari mos kelishi mumkin.

Demak makroskopik parametrlarning muvozanat qiymatiga juda ko’p mikro holatlar to’g’ri kelar ekan. Shu sababli, agar termodinamik sistema mumkin bo’lgan holatlardan eng ehtimolli holatda bo’lsa, uni muvozanat holatda deb hisoblash mumkin. Bularga ko’ra izomerlangan sistemani ham muvozanatda yoki unga yaqin holatda deb hisoblash mumkin.

4.Ma’ruza.
IKKI PARAMETLI MUHITLAR. MUKAMMAL GAZ. KARNO SIKLI

Reja

1. Ideal gazda issiqlik oqimi tenglamasi;
2. Mukammal gazning holat tenglamasi;
3. Mukamal gazning ichki energiyasi;
4. O’zgarmas hajm va bosimda issiqlik sig’imlari, Mayer formulasi;
5. Muhitga issiqlik uzatishning fizik mexanizmlari;
6. Adiabatik va izotermik jarayonlar;
7. Politrop jarayonlar;
8. Mukammal gaz izotermalari;
9. Puasson adiabatasi;
10. Mukammal gaz uchun izoterma va adiabatalarning o’zoro joylashishi;
11. Sistemaning bajargan ishi;
12. Sistemaga tashqaridan keluvchi issiqlikning to’liq oqimi;
13. Karno sikli;
14. Karno sikli bo’yicha ishlovchi mashinalar;
15. Isitish va sovutish ko’rinishdagi karno siklini bajaruvchi sistema

Tayanch iboralar: jarayon, holat parametrlari, sikl, muvozanat, temperatura, tezlik, zichlik, issiqlik o’tkazish koeffitsienti.

Ikki parametrli muhitlar deb shunday muhitlarga aytiladiki unda barcha termodinamik funksiyalar faqat ikkita termodinamik parametrlardan bog’liq bo’ladi. Agar bu ikkki paramtrlar P bosim va ρ zichlik bo’lsa, u holda bunday muhitlarga solishtirma energiya $u = u(p, \rho)$ kabi ifodalanadi.

1. Agar muhit o’zini ideal siquluvchan suyiqlik kabi tutsa u holda birlik massaga to’g’ri keluvchi sirt kuchlarining bajargan ishi quyidagi ko’rinishda bo’ladi:

$$\frac{1}{dm}dA_{sirt} = pd\frac{1}{\rho}$$

va issiqlik oqimi tenglamasi $dq^{**} = 0$ deb olinganda quyidagi ko'rinishga yoziladi:

$$du = pd\frac{1}{\rho} = dq \qquad (4.1)$$

2.Mukammal gazda bosim, zichlik va tempratura Klepeyron tenglamasi orqali bog'langan:

$$p = \rho RT\ ; \qquad (4.2)$$

R-turli gazlaruchun turli qiymat qabul qiluvchi gaz o'zgarmasi. (4.2) ko'rinishdagi bosim, tempratura, zichlik muhitning boshqa fizik harakateriskalarini bog'lovchi tenglamalar holat tenglamalari deyiladi. Havo uchun $R = 287{,}042\frac{m^2}{sek^2 gradus}$

Quyidagi tenglik orqali universal gaz doimiysi R_0 va Bolsman doimiysi k larni kiritish mumkin : $R = \frac{R_0}{M} = \frac{k}{m}$, bu yerda m-molekulalarining o'rtacha massasi (grammda), M-o'rtacha molyar massa bo'lib, quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$nM = n_1M_1 + n_2M_2 + ... + n_nN_n = \sum_{i=1}^{N} n_iM_i\ ,$$

bu yerda $n - N$ ta komponentadan iborat berilgan hajmdagi modda miqdori mollar soni M_i - molyar massa

$$R_0 = 8{,}3144\cdot 10^{17}\frac{erg}{mol\cdot grad}\ , \quad k = 1.38\cdot 10^{-16}\frac{erg}{mol}$$

3. Mukammal gazni molekulalari o'zaro itarish kuchi bilan o'zaro ta'sirlashuvchi gaz deb qarash mumkin. Shuning uchun bir atomli mukammal gazning ichki energiyasi undagi (zarrachalarning) atomlarning xaotik harakati kinetik energiyalari yig'indisi sifatida qaraymiz.
Birlik massadagi ichki energiya uni quyidagigi formula orqali ifodalash mumkin:

$$u = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_iv_i^2}{2} + const$$

M-atomlarning umumiy massasi, $m_1\ v_a\ v_i$ -atomning massasi va massalar markaziga nisbatan tezligi, N esa berilgan hajmdagi atomlar soni. Agar hamma atomlar bir xil bo'lsa, u holda $M = Nm$ va

$$u = \frac{v_{ort}^2}{2} + const$$

bu yerda $v_{o'rt}^2$ - atomlar xaotik harakatning o'rtacha tezligi kvadrati. Mukammal gaz o'rtacha energiyasi tempratura orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$u = c_vT + const \qquad (4.3)$$

bu yerda $c_v - \frac{v_{o'rt}^2}{2}$ va T orasidagi o'lchovli proparsionallik kaiffisienti. Ichki energiya u ning (4.3) ko'rinishida Klepeyron tenglamasi bilan berilishi mukammal gazning aniq modelini ifodalaydi.

4. Issiqlik oqimi tenglamasi (4.1) ga asosan mukammal ideal gaz uchun solishtirma hajm o'zgarmas bo'lgan jarayonlarda $(d\frac{1}{\rho}=0)$ $dq^{(e)}_{N=const}=du=c_v dt$ yoki $\frac{dq^{(e)}}{dT}=c_v$ ekanligi keltirib chiqarish mumkin .

c_v hajm o'zgarmas bo'lganda birlik massadagi muhit harakatini $1^0 c$ ga ko'tarish uchun kerak bo'gan issiqlik miqdorini bildiradi va hajm o'zgarmas bo'lgandagi solishtirma issiqlik sig'imi deyiladi.

Bosim o'zgarmas bo'lganda ideal mukammal gaz uchun issiqlik oqimi tenglamasidan

$$(dq^{(e)})_{p=const}=du+p\frac{1}{\rho}=c_v dT+d\frac{p}{\rho}=(c_v+R)dT \tag{4.4}$$

Bosim o'zgarmas bo'lganda birlik massadagi muhit harakatini $1^0 c$ ga ko'tarish uchun zarur bo'lgan issiqlik miqdoriga o'zgarmas bosimdagi solishtirma issiqlik sig'imi deyiladi va c_p orqali belgilanadi

$$c_p=(\frac{dq^{(e)}}{dT})_{p=const}$$

(4.4) dan c_p va c_v ni bog'lovchi Mayer formulasini keltirib chiqarish mumkin.

$$c_p-c_v=R. \tag{4.5}$$

5. Issiqlik oqimi kelishi yoki u qaytishi turli fizik holatlardan bog'liq bo'lishi mumkin:

1. Issiqlik o'tkazuvchanlik
2. Issiqlik nurlanishi yutilishi
3. Issiqlik ajralib chiqishi
4. Ba'zan esa ichki energiya yoki ichki kuchlarning bajargan ishlarining bir qismi hisobidan issiqlik ajralib chiqishi mumkin.

6.(I). Tashqi issiqlik oqimi yo'q ya'ni va zarralar o'zaro issiqlik almashmaydigan jarayonlar adiabatik jarayonlar deyiladi. Adiabatik jarayonlar haqidagi g'oya issiqlikdan isolizlangan yoki tez sodir bo'luvchi (lekin ba'zida qaytar) issiqlik almashishga yetarli darajada ulgurmaydigan jarayonlar bilan bog'liq.

(II). Issiqlik almashuvi issiqlik o'tkazuvchanlik yoki nurlanish orqali sodir bo'luvchi yetarlicha sekin sodir bo'luvchi hamma zarrachalarda tempratura o'zgarmas bo'lgan jarayonlar izotermik jarayonlar deyiladi.

Izotrop jarayon tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{dT}{dt}=0$$

Bu tenglama holat tenglamasi bilan birgalikda issiqlik oqimi tenglamasining o'zini bosadi, umuman olganda muhit harakatini o'rganishda nazariy yechimni juda soddalashtiradi.

Issiqlik oqimi tenglamasidan faqat izotermik jarayonni tashlab turish uchun zarur bo'lgan issiqlik miqdorida ni hisoblash mumkin.

Shuni aytib o'tish kerakki $\frac{dT}{dt}=0$ shart muhitning har bir individual zarrachasida tempratura vaqt o'tishi bilan o'zgarmasligini bildiradi, turli individual zarrachalarda tempratura turlicha bo'lishi mumkin.

Ba’zida esa izotermik jarayon deb zarrachalardagi tempratura vaqt o’tishi bilan o’zgarishi mumkin, lekin barcha zarrachalarda bir xil bo’lgan jarayonga aytiladi. Bu holda $\frac{dT}{dt}=0$ shartning o’rniga

$$gradT=0, \quad T=T(t)$$

shart bajarilishi faraz qilinadi.

(III). Ikki paramtrli muhitlar uchun fiksirlangan jarayonda issiqlik oqimi tenglamasi o’rniga zichlik va bosim orasidagi biror bog’lanish olinishi mumkin. Agar bu bog’lanish hamma zarrachalar uchun bir xil bo’lsa, u holda bunday jarayon borotrop jarayon deyiladi.

7.Ko’pincha quyidagi shart bajariladigan jarayonlarga politrop jarayon deyiladi.

$P=c\rho^n$

bu yerda n-politrop ko’rsatkichi deb ataluvchi o’zgarmas son, c – biror o’zgarmas.

Berilgan $p=f(\rho)$ bog’lanish uchun issiqlik oqimi tenglamasidan shu bog’lanishni ta’minlovchi tashqi issiqlik oqimini aniqlash qiyin emas.

Agar gaz mukammal issiqlik oqimi tenglamasidan $n>1$ bo’lganda quyidagini topamiz

$$dq=du+c\rho^n d\frac{1}{\rho}=c_v dT-\frac{dRT}{n-1}$$

Bundan Mayer formulasi

$$R=c_p-c_v$$

gaasosan R o’zgarmas bo’lganda issiqlik oqimi uchun quyidagi formulani hosil qilamiz

$$dq=c_v\frac{n-\frac{c_p}{c_v}}{n-1}dT=c^* dT$$

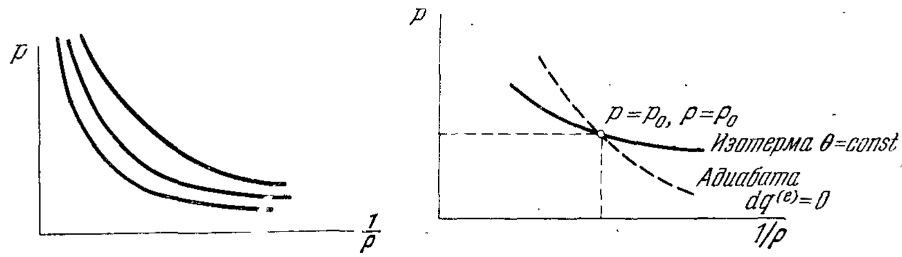
Agar $n>\frac{c_p}{c_v}>1$ bo’lsa, u holda temperaturaning ko’tarilish $dT>0$ issiqlik kelishi bilan bog’liq. Agar $1<n<{}^{c_p}\!/_{c_v}$ bo’lsa, $dT>0$ bo’lganda $dq<0$ bo’lishi temperatura ko’tarilishi issiqlik chiqishi bilan bo’liq.

Agar $n=\frac{c_p}{c_v}$ bo’lsa, u holda $dq=0$, ya’ni bunday politrop jarayon adiabatik jarayon bo’ladi. Ko’rsatilgan xususiyat politrop ko’rsatkichi n ning fizik ma’nosini xarakterlaydi.

8. Ikki parametrli muhitning p va $v=\frac{1}{\rho}$ holat parametrlari bilan brilgan holatlar fazosini qaraylik. Bunday muhitning barcha termodinamik funksiyalari xususan temperatura ham ulrni θ bilan belgilasak p va $\frac{1}{\rho}$ ning funksiyasi bo’lishi kerak

$$\theta=\theta(p,\frac{1}{\rho})$$

Bunday muhitdagi muvozanatlar izotermik $(\theta=const)$ jarayonni qaraylik. Holatlar fazosi $(p,\frac{1}{\rho})$ da $(\theta=const)$ egri chiziqlarni yasaymiz.(4.1a)



4.1.-chizma a) Mukammal gaz izotermasi b) Puasson adiabatasi va izotermaning o'zaro joylashishi.

Mukammal gaz uchun $(p,\frac{1}{\rho})$ tekislikdagi izoterma giperpoladan iborat bo'ladi

$$\frac{p}{\rho} = const \tag{4.6}$$

Issiqlik oqimi tenglamasidan jarayon izotertmik bo'lishi uchun zarur bo'lgan issiqlik oqimini topish mumkin. Bu issiqlik oqimi ideal mukammal gaz uchun quyidagiga teng

$$(dq)_{izot} = pd\frac{1}{\rho} = R\theta\rho d\frac{1}{\rho}$$

Izotermik kengayishda $dq > 0$, izotermik siqilishda $dq < 0$.

Shuni aytib o'tish kerakki, biror-bir $\theta = const$ izotermada, masalan suvning qaynash yoki muzlash temperaturalari mos kelishi mumkin, suvning qaynash va muzlash temperaturalari esa bosimdan bog'liq bo'ladi.

9. Adiabatik jarayonlarda $dq = o$ quyidagi ko'rinishga keladi.

$$du + pd\frac{1}{\rho} = 0 \tag{4.7}$$

Bundan, agar $u(p,\frac{1}{\rho})$ ma'lum bo'lsa, uzluksiz adiabatik jarayonlardagi p va ρ orasidagi bog'lanishni topish mumkin. Mukammal gaz uchun (4.7) tenglik

$$\frac{c_v}{R}d\frac{p}{\rho} + pd\frac{1}{\rho} = 0$$

Ko'rinishini oladi. Agar $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ munosabatni kiritsak

$$\frac{1}{\gamma - 1}(\frac{dp}{\rho} + pd\frac{1}{\rho}) + pd\frac{1}{\rho} = 0$$

bundan

$$\frac{1}{\rho}dp + \gamma \cdot p \cdot d\frac{1}{\rho} = 0$$

Bu tenglikni integrallaymiz

$$\frac{p}{\rho\gamma} = const \qquad (4.8)$$

$(p, \frac{1}{\rho})$ tekisligidagi bu egri chiziq Puasson adiabatasi deb ataladi, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ esa adiabata ko'rsatkichi yoki Puasson koeffitsiyenti deyiladi. Ko'rinib turibdiki, $(p, \frac{1}{\rho})$ holatlar fazosining har bir $p_0, \frac{1}{\rho}$ nuqtasidan (4.6) izoterma va (4.8) adiabatani o'tkazish mumkin.

10. Izoterma va Puasson adiabatalarining $(p, \frac{1}{\rho})$ tekislikda o'zaro qanday joylashishini qaraylik nuqtadan o'tuvchi izoterma uchun

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \quad \text{, yani} \quad \frac{p_{izotrop}}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

xuddi shu nuqtadan o'tuvchi adibata uchun

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = \frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}} \quad \text{yani} \quad \frac{p_{ad}}{p_0} = (\frac{\rho}{\rho_0})^{\gamma}$$

Adiabata ko'rsatkichi $\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1$ shuning uchun $p_{izot} > p_{adiab}$ $\frac{\rho}{\rho_0} < 1$ bo'lganda $p_{izot} < p_{adiab}$ $\frac{\rho}{\rho_0} > 1$ bo'lganda , ya'ni izoterma $(p_0, \frac{1}{\rho_0})$ nuqtadan o'ng tomonda katta chap tomonda kichik.

11. Agar $p(\rho)$ bog'lanish (funksiya) ya'ni $(p, \frac{1}{\rho})$ tekislikdagi egri chiziq berilgan bo'lsa ichki kuchlarning bajargan ishi $\int pd\frac{1}{\rho} = \frac{1}{m}A$ ni har doim hisoblash mumkin. Bundan holatlar fazosidagi A holatdan B holatga o'tuvchi ixtiyoriy L_1 jarayon uchun ichki kuchlarning bajargan ishini hisoblash mumkin. Shunday qilib L_1 yo'nalish bo'yicha hisoblangan integral

$$\int_{AB(m)} pd\frac{1}{\rho} = \frac{1}{m}A \qquad (4.9)$$

da $A > 0$ bo'lsa tashqi jism ustidan ish bajargan bo'ladi, $A < 0$ bo'lsa tashqi kuchlar L_1 jarayonni sodir etish uchun sistema ustida ish bajargan bo'ladi.

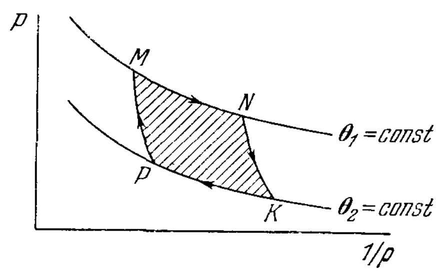
12. Xuddi shunday ixtiyoriy $L_1(p = p(\frac{1}{\rho}))$ jarayon uchun agar muhitning ichki energiyasi $(u = u(p, 1/\rho))$ berilgan bo'lsa to'liq issiqlik oqimini hisoblash mumkin.

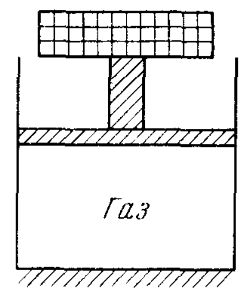
$$Q^{(e)} = \int_{AB(L_1)} dQ^{(e)} \qquad (4.10)$$

agar $Q^{(e)} > 0$ bo'lsa tashqi muhitdan issiqlik oladi, $Q^{(e)} < 0$ bo'lsa muhitga issiqlik uzatadi. Issiqlik oqimi tenglamasiga ko'ra

$$Q^{(e)} = \int\limits_{AB(L_1)} (du + pd\frac{1}{\rho})dm = \int\limits_A^B du_m + A = u_{mB} - u_{mA} + A \qquad (4.11)$$

13. Karno sikli deb ataluchi muvozanatli qaytar yopiq jarayonni qaraymiz. Bu jarayonda ishchi jism ya'ni muhit sifatida p va $\frac{1}{\rho}$ parametrlar orqali aniqlanuvchi mukammal gaz yoki ixtiyoriy ikki parametrli muhitni olish mumkin. Holatlar fazosidagi $M(p_0, \frac{1}{\rho_0})$ gaz $\theta_1 = const$ izoterma





4.2-rasm

a) Karno sikli b) Karno sikli bo'yicha ishlovchi mashina

bo'ylab N holatgacha sekin kengayadi, keyin K holatgacha $\theta_2 < \theta_1$ tempertura bilan adiabatik kengayadi va K dan P holatgacha izotermik siqiladi, bundan adiabata bo'yicha dastlabki M holatga qaytadi.

14. Karno sikli sodir bo'luvchi sistemani mashina deb ataymiz. Bu mashina quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

Temperaturasi θ_1 bo'lgan. Bir tomoni qo'zg'almas devor bilan berkitilgan ikkinchi esa porshen o'rnatilgan silindr temperaturasi θ_1 bo'lgan gaz bilan to'ldirilgan. Dastlab gaz silidrda M dan N gacha $\theta_1 = const$ temperaturada kengaysin Bunda silindrning yon tomonlari va porshen issiqlik o'tkazmaydigan va uning tubi issiqlikni yaxshi o'tkazuvchi bo'lib, θ_1 Temperatura o'zgarmasdan saqlab turish uchun isitkich ustida turibdi deb faras qilamiz. Porshendan yuklarni sekinlik bilan olib θ_1 temperaturani o'zgartirmasdan gazning hajmini oshiramiz va N holatgacha kelamiz. Silindr tagini issiqlik o'tkazmaydigan qoplama bilan qoplaymiz va porshendan yukni yana sekin olib borib K holatga kelamiz. Endi porshenga yuk qo'yib θ_2 o'zgarmas temperaturada gazni siqamiz, bunda temperatura ko'tarilishga harakat qiladi, shuning uchun silindr tagiga isitgich emas sovutgich o'rnatiladi. p holatga yetgandan so'ng uni dastlabki qiymatigacha ortirib borib adiabatiksiqamiz va M boshlang'ich holatga kelamiz.

5.Ma’ruza.
TERMODINAMIKANING IKKINCHI BOSHLANISHI
Reja:

1. Karno siklining foydali ish koeffitsiyenti va Karno teoremasi;
2. Termodinamika ikkinchi qonunining qaytar jarayonlarga qo’llaniluvchi miqdoriy formulirovkasi;
3. Entropiya;
4. Termodinamika ikkinchi qonunining qaytmas jarayonlarda ko’p parametrli muhitlarga qo’llanilishi;
5. Termodinamika ikkinchi ikkinchi qonuni formulirovkalarining ekvivalentligi;
6. Ko’p parametrli muhitlardagi qaytar jarayonlar uchun entropiyaning kiritilishi;
7. Issiqlik mashinasining $dQ^{**}=0$ bo’lgandagi ishi.

Tayanch iboralar: Karno sikli, foydali ish koeffitsiyenti, entropiya, issiqlik mashinasi.

Endi termodinamikaning 1-qonuni kabi fizik hodisalar haqidagi tajriba ma’lumotlari va nazariy ifodlarda o’z tasdog’ini topgan termodinamikaning ikkinchi boshlanishini qarab o’tamiz. Termodinamikaning ikkinchi qonuni shuni tasdiqlaydiki, temperaturasi past bo’lgan M jismdan temperaturasi yuqori bo’lgan N jimga boshqa jismlarda biror o’zgarish qilmay turib issiqlik o’tkazib bo’lmaydi (termodinamika 2-qonunining birinchi ifodasi).

Termodinamikaning ikkinchi qonunini yana quyidagicha ham ifodalash mumkin: ikkinchi tur abadiy dvigatelni yaratish mumkin emas, ya’ni termodinamikaning 1-qonuni bo’yicha davriy siklda faqat biror issiqlik manbasi sovushi hisobidan ishlovchi mashina yaratib bo’lmaydi.

Termodinamika ikkinchi qonunining bu ikki formulirovkasi ekvivalent ekanligini ko\rsatamiz.

Karno sikli yordamida termodinamika ikkinchi qonunining muhim natijasi va sifat formulirovkasini olamiz.

1. Karno sikli bo’yicha ishlovchi mashinaning foydali ish koeffitsiyenti (FIK) tushunchasini kiritamiz. FIK bu siklda bajarilgan A>0 mexanik ishning sistemaga sikl davomida keluvchi issiqlik miqdori $Q_1>0$ ga nisbatidir

$$\eta = f\frac{A}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1}<1. \tag{5.1}$$

Karno sikli uchun olingan $\eta<1$ xossa termodinamika birinchi qonunining natijasidir.

Karno siklining foydali ish koeffitsiyentining xossasi haqidagi Karno teoremasi termodinamika ikkinchi qonunining natijasidir:

Orqaga qaytuvchi Karno siklining foydali ish koeffitsiyenti η faqat MN va KP izotermalarda berilgan θ_1 va θ_2 temperaturalardan bog’liq,na sikl sodir bo’layotgan ishchi jismning xususiyatlaridan, na siklning sodir etish yo’lidan, masalan ishchi jism o’lchovlaridan va izoterma bo’ylab kengayish darajasidan bog’liq.

Agar fiksirlangan θ_1 va θ_2 temperaturalarda orqaga qaytmaydigan Karno siklining FIK η' unga mos orqaga qaytuvchi Karno siklining FIK η dan katta bo’la olmaydi

$$\eta'<\eta. \tag{5.2}$$

Karno teoremasini isbot qilishda ishchi jism xususiyatlari va kengayish darajasidan umuman foydalanailmaydi. U faqat θ_1 va θ_2 temperaturalarning universal funksiyasi bo’ladi $\eta=\eta(\theta_1,\theta_2)$.

Karno siklining foydali ish koeffitsiyenti ta’rifiga ko’ra

$$\eta=\eta(\theta_1,\theta_2)=\frac{A}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1}.$$

Quyidagi almashtirish olamiz

$$f(\theta_1,\theta_2)=1-\eta=\frac{Q_2}{Q_1}.$$

Temperaturasi θ_1,θ_2 va θ_2 bo'lgan uchta jismni *v*a uchta orqaga qaytuvchi Karno siklini qaraylik, bu jismlar isitgich yoki sovutgich vazifasini o'taydi. Ma'lumki

$$f=\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{Q_2}{Q_3}\frac{Q_3}{Q_1}=f(\theta_3,\theta_2)f(\theta_1,\theta_3). \tag{5.3}$$

$\theta_1=\theta_2$ bo'lgan holda (5.3) quyidagi ko'rinishga keladi

$$1=f(\theta_3,\theta_1)f(\theta_1,\theta_3),$$

Ya'ni argumentlarning o'rni almashganda *f* funksiya 1/*f* ga aylanadi.Bu xossadan foydalanib quyidagini topamiz

$$\frac{Q_2}{Q_1}=f(\theta_1,\theta_2)=\frac{f(\theta_3,\theta_2)}{f(\theta_3,\theta_1)}. \tag{5.4}$$

(5.4) ning yechimi

Demak

$$\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{\omega(\theta_2)}{\omega(\theta_1)}.$$

$\omega(\theta)$ funksiya qiymatini absolyut temperatura T deb ataymizva quyidagiga ega bo'lamiz

$$\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{T_2}{T_1}, \tag{5.5}$$

(5.5) ni qaytar jarayonlar uchun quyidagicha ifodalaymiz

$$\frac{Q_1}{T_1}-\frac{Q_2}{T_2}=0.$$

2. Bundan keyin sistema olgan issiqlik miqdorini musbat $Q_1=Q_1^{(e)}$, tashqariga chiqargan issiqlik miqdorini manfiy $-Q_2=Q_2^{(e)}$ deb olsak quyidagi tenglikka ega bo'lamiz

$$\frac{Q_1^{(e)}}{T_1}+\frac{Q_2^{(e)}}{T_2}=0. \tag{5.6}$$

U holda ixtyoriy orqaga qaytuvchi jarayon uchun quyidagi munosabatga ega bo'lamiz

$$\sum_i\frac{Q_i}{T_i}=0. \tag{5.7}$$

Adiabata va izotermalardan iborat siklni qarasak adiabatada qashqi issiqlik oqimi nolga teng bo'lgani uchun (5.7) quyidagi ko'rinishni oladi

$$\sum_i\frac{Q_i^{izot}}{T_i}=0.$$

Uni integral ko'rinishida quyidagicha yozish mumkin

$$\oint_L\frac{dQ^{(e)}}{T}=0. \tag{5.8}$$

Yuqoridagi tenglikdan quyidagi xulosani qilish mumkin: A va B holatlar orasidagi orqaga qaytuvchi L jarayon uchun $\int\limits_{AB(L)} \frac{dQ^{(e)}}{T}$ integrallash yo'lidan bog'liq emas.

3. Ikki parametrli muhitning boshlang'ich A va ixtiyoriy B holatlarini holat parametrlari orqali kiritilgan entropiya deb ataluvchi quyidagi funksiya orqali bog'lash mumkin

$$S(B) = S\left(p, \frac{1}{\rho}\right) = \int_A^B \frac{dQ^{(e)}}{T} + S(A). \tag{5.9}$$

(5.9) ga ko'ra B nuqtaning koordinatalari ixtiyoriy o'zgarganda entropiya orttirmasi uchun quyidagi formula o'rinli bo'ladi

$$dS = \frac{dQ^{(e)}}{T}.$$

Agar issiqlik oqimi tenglamasidan foydalansak entropiya differensiali uchun quyidagi formulaga ega bo'lamiz

$$dS = \frac{dQ^{(e)}}{T} = \frac{dU_m + dU^{(i)}}{T}, \tag{5.10}$$

yoki birlik massa uchun

$$ds = \frac{dq}{T} = \frac{dU + pd\frac{1}{\rho}}{T}. \tag{5.11}$$

Solishtirma issiqlik sig'imi o'zgarmas bo'lgan mukammal gaz ($p=\rho RT$, $U=C_V T$) uchun quyidagiga ega bo'lamiz

$$ds = \frac{c_V dT}{T} + \frac{Rd\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{\rho}},$$

yoki

$$s = c_V \ln\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} + const = c_p \ln\frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} + const_1 = c_V \ln\frac{p}{\rho^{\gamma}} + const_2 = c_p \ln\frac{p}{p^{\gamma}} - c_V \ln\frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}} + const_3. \tag{5.12}$$

(5.11) tenglik muhit holatining asosiy termodinamik funksiyalari $U(p,\rho)$ va $T(p,\rho)$ larga cheklanishlar qo'yadi. ds to'liq differensial bo'lishi kerak, u holda (5.11) ning integrallanuvchanlik sharti quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho^2 T}\right)$$

yoki

$$\frac{\partial T}{\partial \rho}\frac{\partial U}{\partial p}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho^2}\right) + \frac{T}{\rho^2}. \tag{5.13}$$

Berilgan $U(p,\rho)$ va $T(p,\rho)$ funksiyalar (5.13) ning yechimi bo'lishi kerak,

Xulosa

Tutash muhit uchun termodinamikaning ikkinchii qonuni, asosiy termodinamik paramtrlar, ish, entropiya haqida tushunchalar berildi. Ular orasidagi ba'zi zarur munosabatlar keltirildi

6-Ma’ruza.
IKKI PARAMETRLI MUHITLARNING TERMODINAMIK POTENSIALLARI
Reja

1. Ichki energiya va entropiya termodinamik potensiallar sifatida;
2. Erkin energiya;
3. Issiqlik tarkibi yoki entalpiya;
4. Gibbsning termodinamik potensiali;
5. Termodinamik potensiallarni tajribadan aniqlash.

Tayanch iboralar: *temperetura, ichki energiya, entropiya, issiqlik oqimi, bosim, zichlik, entalpiya, holat funksiyasi, potensial*

Bundan oldingi mavzuda ikki parametrli muhitlar uchun *U*,*s* va *T* holat funksiyalari ixtiyoriy bo’la olmasligini qarab o;tgan edik. Masalan, agar ichki *U* energiya p va ρ larning funksiyasi sifatida berilgan bo’lsa, u holda $T(p,\rho)$ (5.13) ni qanoatlantirishi kerak bo’ladi, ya’ni $T(p,\rho)$ ga nisbatan berilgan xususiy hosilali differensial tenglamani yechish kerak.

Ikki parametrli muhitlar uchun termodinamik o’zgaruvchilar sifatida quyidagi parametrlar juftlarini olish mumkin: ρ va s, p va s, ρ va T va h.k. Shunday savol teg’iladi: U ichki energiya orqali bu parametrlarni ifodalash mumkinmi, bu holda boshqa termodinamik funksiyalar to’liq va bir qiymatli aniqlanadimi? Bu esa mumkin ekan.

1. U ichki energiya ρ va s larning funksiyasi bo’lsin. U holda differensiallash qoidasiga ko’ra va qaytar jarayonlar uchun termodinamikaning ikkinchi qonuni hisobga olingan (5.11) issiqlik oqimi tenglamasidan quyidagiga ega bo’lamiz.

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_\rho ds + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_s d\rho = Tds - pd\frac{1}{\rho}. \tag{6.1}$$

Bundan

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_\rho, \quad p = \rho^2\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_s \tag{6.2}$$

ya’ni T va p lar ρ va s ning funksiyasi sifatida bir qiymatli aniqlanadi. Bu holda ichki energiya U termodinamik potensial deb ataladi. (6.1) dan ko’rinadiki, *s* entropiya U va ρ ning funksiyasi sifatida berilsa

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial U}\right)_\rho, \ \frac{p}{\rho} = \left(\frac{\partial s}{\partial 1/\rho}\right)_U,$$

ya’ni bu holda U va ρ o’zgaruvchilar uchu entropiya termodinamik potensial bo’ladi.

2. Agar aniqlanuvchi termodinamik o’zgaruvchilar ρ va T bo’lsa, u holda (6.1) ni quyidagi ko’rinishda yozish mumkin

$$d(U - Ts) = -sdT + \frac{p}{\rho^2}d\rho \ \text{ yoki } \ dF = -sdT + \frac{p}{\rho^2}d\rho, \tag{6.3}$$

bu yerda *F* orqali erkin energiya deb ataluvchi holat funksiyasi ifodalangan

$$F \equiv U - Ts \tag{6.4}$$

Agar F ρ va T ning funksiyasi sifatida ma'lum bo'lsa, u holda (6.3) dan p va s ni bir qiymatli aniqlash mumkin. Haqiqatan ham (6.3) dan

$$s = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_\rho, \quad p = \rho^2\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_T. \tag{6.5}$$

ρ va T o'zgaruvchilardan foydalanganimizda erki energiya $F(\rho, T)$ potensial bo'ladi.

3. Xuddi yuqoridagiga o'xshash agar aniqlanuvchi parametrlar p bosim va s entalpiya bo'lsa (6.1) munosabatni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$d\left(U + \frac{p}{\rho}\right) = Tds + \frac{dp}{\rho}$$

yoki

$$di = Tds + \frac{dp}{\rho}. \tag{6.6}$$

Bunda issiqlik tarkibi yoki entalpiya deb ataluvchi holat funksiyasi

$$i(p, s) \equiv U + p/\rho \tag{6.7}$$

termodinamik potensial bo'ladi

$$T = \left(\frac{\partial i}{\partial s}\right)_p, \quad \frac{1}{\rho} = \left(\frac{di}{\partial p}\right)_s. \tag{6.8}$$

4. Agar aniqlanuvchi parametrlar p bosim va T temperatura bo'lsa, u holda (6.1) ni quyidagi ko'rinshda yozish mumkin

$$d\left(U - Ts + \frac{p}{\rho}\right) = -sdT + \frac{dp}{\rho}$$

yoki

$$d\Psi = -sdT + \frac{dp}{\rho}.$$

Termodinamik potensial yoki Gibbsning termodinamik potensiali deb ataluvchi holat funksiyasi

$$\Psi(p, T) = U - sdT + p/\rho \tag{6.9}$$

orqali ρ va s lar bir qiymatli aniqlanadi

$$s = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_p, \quad \frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p}\right)_T. \tag{6.10}$$

Agar ichki energiya va entropiya additiv qo'shiluvchigacha aniqlikda berilgan bo'lsa, u holda erki energiya F va termodinamik potensial Ψ temperaturaning chiziqli funksiyasi sifatida aniqlanadi.

Ko'rinib turibdiki, yuqorida qarab o'tilgan hollarda ko'rsatilgan o'zgaruvchilarning kiritilishi barcha holat funksiyalarini aniqlash haqidagi masala faqat bitta potensialni kiritish masalasiga keltirilar ekan.

5. Real suyuqlik va gazlarga mos keluvchi potensiallarni aniqlash uchun statistik fizikaning fizik modellar yoki tajribalar orqali aniqlangan ma'lumotlaridan foydalanish mumkin.

6. Ko'pincha issiqlik sig'imini aniqlash muhim ahamiyatga ega bo'ladi. Issiqlik sigimi bu birlik massadagi moddaning temperaturasini 1 gradusga ko'tarish uchun zarur bo'lgan issiqlik miqdoridir.

Ikki parametrli muhitlar uchun issiqlik sig'imi ikkala parametrlarning o'zgarishidan bog'liq bo'ladi. Issiqlik sig'imi temperatura o'zgarishi bilan sodir bo'ladugan jarayonning o'zgarishiga bir qiymatli mos keladi.

Siqiluvchan muhitlar uchun o'zgarmas bosimdagi c_p va o'zgarmas hajmdagi c_v solishtirma issiqlik sig'imlari muhim ahamiyatga ega. Ular uchun quyidagi formulalar o'rinli

$$c_p = \left(\frac{dq}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p - \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\rho - \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \quad (6.11)$$

va

$$c_V = \left(\frac{dq}{dT}\right)_\rho = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\rho = \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_\rho - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho . \quad (6.12)$$

$c_p - c_V$ ayirma uchun (6.11) va (6.12) formulalardan quyidagi tenglik kelib chiqadi

$$c_p - c_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T - \frac{p}{\rho^2}\right]\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\left[\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T - \frac{1}{\rho}\right]\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_\rho . \quad (6.13)$$

(6.13) va issiqlik oqimi tenglamasidan yana quyidagi tenglik kelib chiqadi

$$c_p - c_V = -\frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p , \quad (6.14)$$

bu esa $$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho dT + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T d\rho ,$$

formuladan kelib chiquvchi $$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho = -\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$$

tenglikka asosan quyidagi ko'rinishga keladi

$$c_p - c_V = \frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p^2 . \quad (6.15)$$

(6.13)-(6.15) tenglik ixtiyoriy ikki parametrli muhitlar uchun o'rinli.

Tajribalarda aniqlangan issiqlik sig'imlari c_p va c_V larning qiymatlai, o'zgarmas bosimda zichlikning o'zgarish koeffitsiyenti $(\partial\rho/\partial T)_p = k_\rho$ va o'zgarmas hajmdagi bosimning ko'tarilish koeffitsiyenti $(\partial p/\partial T)_\rho = k_p$ larda ichki energiya va entalpiyadan hosilalarni quyidagi formulalar yordamida aniqlash mumkin

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T = \frac{c_p - c_V}{k_\rho} + \frac{p}{\rho^2} = -\frac{1}{\rho^2}\left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho - p\right], \qquad \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_\rho = c_V \quad (6.16)$$

va

$$\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p = c_p , \qquad \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T = -\frac{c_p - c_V}{k_p} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho^2}\left[T\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p + \rho\right]. \quad (6.17)$$

Bunda termodinamikaning birinchi va ikkinchi qonunlariga ko'ra quyidagi integrallanuvchanlik shartlari bajarilishi kerak

$$-\frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_\rho = \left(\frac{\partial c_V}{\partial \rho}\right)_T \quad (6.18)$$

$$\text{va}\quad \left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial T^2}\right)_p , \tag{6.19}$$

bulardan tajribalar sonini kamaytirish yoki tajriba natijalarini tekshirishda foydalanish mumkin.

Bundan oldingi paragraflarda barcha termodinamik sistemalar uchun har doim ikkita holat funksiyasi: ichki energiya U va entropiya s larni, muvozanatli jarayonlar uchun esa yana bitta holat funksiyasi absolyut temperatura T ni kirtildi; issiqlik oqimi tenglamasining yangi - universal tenglamasi olindi

$$dU = \frac{p^{ij}}{\rho}\nabla_j v_i dt + dq + dq^{**} \tag{6.20}$$

yoki $p^{ij} = p^{ji}$ bo'lganda

$$dU = \frac{p^{ij}}{\rho}e_{ij}dt + dq + dq^{**},$$

va termodinamikaning ikkinchi qonuni qaraldi

$$TdS = dQ^{(e)} + dQ', \quad dQ' \geq 0,$$

yoki (birlik massa uchun)

$$Tds = dq + dq', \quad dq' = \frac{dQ'}{dm} \geq 0. \tag{6.21}$$

Bular tutash muhitning konkret modellarini tuzishda zarur bo'ladi.

Xulosa

Ikki parametrli muhit uchun issiqlik oqimi tenglamasi, termodinamikaning ikkinchi qonunidan foydalangan holda, potensial funksiyalar kiritish orqali holat parametrlari orasidagi o'zaro bir qiymatli mosliklar o'rganildi.

7-Ma'ruza.

IDEAL VA QOVUSHOQ MUHITLARGA MISOLLAR, HAMDA ULARNING TERMODINAMIK XUSUSIYATLARI. ISSIQLIK O'TKAZUVCHANLIK

Reja

1. Ideal siqilmas suyuqlik modeli;
2. Ideal siqilmas suyuqlikning entropiyasi va ichki energiyasi;
3. Ideal siqiluvchan suyuqlik modeli;
4. Adiabatik va izotermik jarayonlarda ideal siqilmas suyuqlik yoki gaz harakatining to'liq tenglamalar sistemasi;
5. Mukammal gaz modeli;
6. Van-der-Vaals gazi;
7. Qovushoq suyuqlik modeli;
8. Qovushoq suyuqlikda ichki kuchlarning bajargan ishi;
9. Qovushoq suyuqlikda bosim va temperature;
10. Qovushoq suyuqlikda mexanik energiyaning dissipatsiyasi;
11. Issiqlik oqimi vektori;
12. Furyening issiqlik o'tkazuvchanlik qonuni;
13. Issiqlik o'tkazuvchan qovushoq suyuqlik uchun issiqlik oqimi tenglamasi;
14. Qovushoq suyuqlik harakatining to'liq tenglamalar sistemasi.

Oldin o'rganib chiqilgan universal tenglamalar (uzviylik, harakat miqdori, klassik holda $p^{ij} = p^{ji}$ bo'lgan harakat miqdori momenti tenglamalari, issiqlik oqimi tenglamasi va termodinamikaning ikkinchi qonuni) yordamida tutash muhitlarning harakati haqidagi xususiy masalalar qaralishida muhit xususiyatlarining konkret modelini beruvchi qo'shimcha munosabatlar bilan to'ldirish kerak b'ladi.

1. Har zarrachadagi siqilmaslik shartidan

$$\rho = \rho_0 = const\,.$$

Agar suyuqlik bir jinslimas bo'lsa ρ zichlikni ξ^1, ξ^2, ξ^3 Lagranj koordinatalarining funksiyasi sifatida qarash mumkin; bir jinsli suyuqlik uchun hamma zarrachalarda zichlik bir xil.

Oldin berilgan ta'rifga ko'ra agar $p^{ij} = -pg^{ij}$ bo'lsa suyuqlik ideal deb ataladi.

Bizga ma'lumki, ideal siqilmaydigan bir jinsli suyuqlik holida
uzviylik tenglamasi

$$div\,\vec{v} = 0\,,$$

Eyler tenglamalari

$$a_i = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$p = p(x^i, t)$ bosim va $\vec{v} = \vec{v}(x^i, t)$ tezlik vektorini aniqlash uchun tenglamalarning yopiq sistemasini tashkil qiladi. Agar ideal siqilmas suyuqlik bir jinslimas bo'lsa, bu tenglamalarga

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

beshinchi shartni qoshish kerak bo'ladi va undan $\rho(x^1, x^2, x^3, t)$ ni topishda foydalaniladi.

Ideal siqilmaydigan suyuqlikda ichki bosim kuchlarining bajargan ishi har doim nolga teng

$$dA^{(i)} = -\frac{p^{ij}}{\rho}e_{ij}dt = \frac{p}{\rho}g^{ij}e_{ij}dt = \frac{p}{\rho}e^{i}_{.j}dt = \frac{p}{\rho}div\vec{v}dt = 0\,.$$

U holda issiqlik oqimi tenglamasi

$$dU = dq\,.$$

Bu tenglamani ichki energiya zichligini aniqlovchi tenglama yoki suyuqlik oqimida issiqlik tarqalishi tenglamasi sifatida qarash mumkin.

2. Ideal siqilmaydigan suyuqlik modelini aniqlashda undagi mexanik jarayonlar orqaga qaytuvchi deb faraz qilamiz, shuning uchun

$$dq = Tds, \qquad dq' = 0\,. \tag{7.1}$$

(7.1) hisobga olinganda issiqlik oqimi tenglamasi

$$dU = Tds\,.$$

Bundan kelib chiqadiki, agar $s = const$ bo'lsa, $U = const$, shuning uchun U faqat s ning funksiyasi $U = U(s)$. Boshqa tomondan esa

$$\frac{dU}{ds} = T\,,$$

korinib turibdiki $T = T(s)$ yoki $U = U(T)$ va $s = s(T)$.

Siqilmaydigan suyuqlik solishtirma issiqlik sig'imi uchun quyidagini yozish mumkin

$$c = \frac{dq}{dT} = \frac{dU}{dT} = c(T)\,.$$

Ideal siqilmaydigan suyuqlik entropiyasi va ichki energiyasi temperaturaning funksiyasi bo'lgan $c(T)$ issiqlik sig'imi orqali quyidagi formulalardan aniqlanadi

$$U = \int c(T)dT, \qquad s = \int \frac{c(T)dT}{T}. \tag{7.2}$$

Agar $c = const$ bo'lsa, u holda

$$U = cT + const, \qquad s = c\ln T + const.$$

Issiqlik oqimi tenglamasi

$$\frac{dq}{dt} = c(T)\frac{dT}{dt} = c(T)\left[\frac{\partial T}{\partial t} + v^i \frac{\partial T}{\partial x_i}\right] \tag{7.3}$$

temperatura taqsimlaishini aniqlash uchun xizmat qilishi mumkin.

Shunday qilib, tutash muhit mexanikasi nuqtai nazarida ideal siqilmaydigan suyuqlik holatini (harakatini) aniqlash uchun uning zichligi va issiqlik sig'imi $c(T)$ ni bilish yetarli.

Bundan tashqari aniq masalalarni yechishda xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasining bir qiymatli yechimini olish uchun tashqi massaviy kuchlar, issiqlik oqimi, hamda chegaraviy, boshlang'ich yoki boshqa shartlarni berish zarur.

Xulosa qilib shuni aytish kerakki, berilgan tashqi kuchlar ta'sirida ideal siqilmaydigan suyuqlik harakatini aniqlash haqidagi mexanik masala yechimi suyuqlik hajmida temperatura taqsimlanishi haqidagi masala yechimidan bog'liq emas va ichki energiyani bilishni talab qilmaydi.

Aksincha, (7.3) tenglama yechimi esa mexanik masala yechimi $\vec{v}(x^i, t)$ aniqlangandan keyingina aniqlanishi mumkin.

Demak, muhit harakatida issiqlik masalasi yechimi mexanik masala yechimidan bog'liq bo'ladi.

3. Ideal deb shunday muhitga aytiladiki, birinchidan, unda kuchlanish tenzori sharsimon bo'ladi

$$p^{ij} = -pg^{ij};$$

ikkinchidan ikki parametrli muhit sifatida undagi ichki energiya faqat ikkita parametrdan bog'liq bo'ladi, masalan ρ va s dan

$$U = U(\rho, s),$$

uchunchidan uzluksiz harakatda barcha mexanik jarayonlar orqaga qaytuvchi muhit sifatida qaraladi, bundan

$$dq' = 0.$$

Bu uchta faraz $U(\rho, s)$ berilganda ideal siqiluvchan suyuqlik yoki ideal gaz modelini ham termodinamik, ham mexanik ma'noda to'liq belgilaydi.

Haqiqatan, agar $\vec{F}$ massaviy kuchlar va tashqi issiqlik oqimi dq berilgan bo'lsa, u holda (6.2) dagi holat tenglamalari deb ataluvchi ikkita tenglama, termodinamikaning ikkinchi qonuni $Tds = dq$ yoki issiqlik oqimi tenglamasi

$$dU = -pd\frac{1}{\rho} + dq,$$

uzviylik tenglamasi

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v} = 0,$$

Eyler tenglamalari

$$a_i = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

yettita noma’lum $\rho,\ v_i,\ p,\ s$ va T funksiyalarga nisbatan tenglamalarning yopiq sistemasini hosil qildik

Xulosa

Ideal siqilmaydigan va siqilmas suyuqlikning, mukammal gazning va qovushoq suyuqlikning to’liq tenglamalar sistemasi hosil qilindi.

TUTASH MUHITLAR MEXANIKASI MASALALARINING QO’YILISHI

1-Ma’ruza.
ANIQ MASALALAR QO’YILISHINING UMUMIY ASOSLARI

Reja:

1. Modellar va sanoq sistemasi;
2. Alohida harakatlarni ajratuvchi qo’shimcha shartlarning zarurligi;
3. Tutash jism egallagan soha va harakat vaqti intervali;
4. Cheksizlikdagi shartlar;
5. Muhit ichidagi maxsus nuqtalar;
6. Boshlang’ich shartlar va chegaraviy shartlar;
7. Chegaralarda ko’chish va tezlik uchun yopishish shartlari;
8. Ideal suyuqlikning oqib o’tish (yopishish) sharti;
9. Erkin sirtdagi shartlar.

Tayanch iboralar: Koordinatalar, vaqt, chegara, erkin sirt, ko’chish, tezlik, kuchlanish, bosim, harakat tenglamalari.

1.TMM ning konkret masalalarini nazariy jihatdan o’rganishda uning harakati va holatini ifodalovchi oshkor yoki oshkormas ko’rinishda biror sanoq sistemasi tanlanishi zarur. Faqat har doim inersial sanoq sistemasini ko’rsatish zarur bo’ladi, chunki u yordamida inersiya kuchlarini ifodalash mumkin. Zarur hollarda tutash muhit zarrachalarini individuallashtiruvchi va mohiyatiga ko’ra har doim muhit zarrachalari harakati va holatnini aniqlovchi xarateristikalar beradigan Lagranj koordinatalarini kiritish ham talab qilinadi. Biz shu paytgacha mexanikaning universal tenglamalari, termodinamika tenglamalarini va elektrodinamika tenglamalarini o’rganib chiqdik. Bu tenglamalar ixtiyoriy konkret tutash muhit modellarini tuzishning fundamental munosabatlari hisoblanadi. Ular shu paytgacha aniqlangan hamma modellarning mumkin bo’lgan barcha harakatlari va fizik jarayonlarni o’zida saqlaydi. Bu tenglamalarni ixtiyoriy uzluksiz silliq taqsimlanishlardagi xususiy hosilali differensial tenglamalar sifatida yozish mumkin. Differensial tenglamalar bilan bir qatorda yuqoridagi fizik holatlar uchun ularning integral ko’rinishlari ham mavjud.

2. Modellar va harakatlarning alohida ko’rinishlari tanlangandan keyin qo’shimcha shartlar qo’yish talab qilinadi. Siqilmaydigan suyuqlik nazariy modellari doirasida suv, neft boshqa suyuqliklarni olish mumkin va xatto havoni ham kerak bo’lgan joylarda siqiluvchanligini e’tiborga olmaslik mumkin. Masalan: suvning turli oqimlari, dengiz va okeanlardagi to’lqinlar harakati, suyuqlikning naychalardagi harakati va hokazo. Yuqorida keltirilgan harakatlarda ham anna shu differensial tenglamalarning yopiq sistemasidan foydalanish mumkin.

3. Endi alohida harakatlarni ajratuvchi turli qo'shimcha tipik shartlarni qaraymiz. Matematik masalalarning yechimlari muhit egallagan hajmning nuqtalarida harakat qaralayotgan vaqt intervalida aniqlangan biror funksiya ko'rinishida beriladi.

Vaqt intervali chekli bo'lishi yoki biror $t = t_0$ vaqtdan boshlanishi yoki unga bog'liq bo'lishi mumkin. Tutash muhit harakatini o'rganish vaqti ixtiyoriy $t \geq t_0$ yoki $t \leq t_0$ yoki umuman olganda $t \leq\geq t_0$ bo'lishi mumkin.

Harakatlanuvchi muhit egallagan hajmiy *D* soha ba'zi hollarda oldindan berilgan boshqa hollarda noma'lum bo'lishi mumkin. Masalan: agar suyuqlik biror idishni to'ldirib oqayotgan bo'lsa, *D* sohani oldindan ma'lum deb hisoblash mumkin. Ko'p hollarda *D* soha oldindan berilmagan bo'ladi. Masalan: tashqi kuch ta'sirida deformasiyalanuvchi idish o'rganilayotgan bo'lsa, unda qolgan suyuqlik hajmi masalani yechish davomida aniqlanadi. Ba'zi hollarda *D* sohaning chegarasi aniq qismlardan iborat bo'ladi. Masalan: dengiz tubi, idish devorlari yoki umumiyroq olganda suyuqlikda harakatlanuvchi jism sirti va hokazolar TM egallagan soha chegarasi bo'lishi mumkin.

4. Masalalarning qo'yilishida ko'pincha suyuqlik yoki qattiq jism egallagan sohadan cheksiz uzoqlashgan nuqta ham qaraladi. Cheksizlikni o'z ichiga olgan *D* soha uchun masalalarni yechishda faraz qilingan fizik xarakter asosidacheksizlikdagi shartlarni kiritish zaruriyati paydo bo'ladi. Ko'p hollarda bunday shart sifatida muhit harakati va holati cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi ko'chishlar mahalliy ko'chishlar orqali ifodalanadi. Masalan: chegaralanmagan suyuqlik hajmi harakatini o'rganishda cheksiz uzoqlashgan nuqtada tezliklar nolga teng deb olinadi.

5. Cheksizlikdagi shartni cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi maxsuslik deb qarash mumkin. Muhit yoki maydonga ta'sir qiluvchi turli effektlarni hisobga olgan holda chekli *D* sohaningmaxsus nuqtalari va maxsus qismlarini ham kiritish mumkin. Masalan: suyuqlik manbasi va stokini, elektr maydonning dipol va multipollarini, tashqi kuchlar konsentirlangan sohani, shuningdek energiya manbaalarini kiritish mumkin. Bunday maxsusliklarni va qaralayotgan muhitdan tashqaridagi jismlarning ta'siri sifatida ham qarash mumkin.

6. Oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasida Koshi masalasi kata ahamiyatga ega, masalan,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{1.1}$$

tenglama uchun $t = t_0$ bo'lganda quyidagi shartlar olinishi mumkin.

$$x_{t=t_0} = x_0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0} = x_0', \tag{1.2}$$

bu yerda t_0, x_0 va x_0' - berilgan sonlar. Differensial tenglamalar nazariyasidan ma'lumki Koshi maslasi yagona yechimga ega. (1.2) qo'shimcha shartlar boshlang'ich qiymatlar yoki Koshi qiymatlari deyiladi. Shunga o'xshash nostasionar harakatni tavsiflovchi xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun ham vaqtning biror $t = t_0$ momentada izlanayotgan funksiya va uning vaqtga nisbatan hosilalarining qiymati berilishi mumkin. Masalan, elastik jism uchun dinamik masalalarni Lame tenglamalari yordamida qaralayotganda boshlang'ich ko'chish va boshlang'ich tezliklarni butun jism bo'yicha berish kerak bo'ladi.

D soha chekli yoki cheksiz bo'lganda *S* chegaraga ega bo'ladi. Boshlang'ich shartlardan tashqari aniq yechimni olish uchun *S* chegarada maxsus shartlardan foydalanish zarur. Bu shartlar chegaraviy shartlar deyiladi. Chegaraviy shartla turli ko'inishda bo'lishi mumkin. Ular fizik tasavvurlar asosida chiqariladi.

7. Endi chegaraviy shartlarning ba'zi tipik va zarur hollarini qaraymiz. Faraz qilaylik chegaraviy sirt *S* yoki uning biror qismi S_1 ning holat va harakati ma'lum bo'lsin. S_1 sirtga urinma yo'nalishda siljishlar bo'lmagan holda muhit ko'chish vektori $\vec{w}_{muhit}$ va S_1 sirt ko'chish vektori $\vec{w}_{cheg}$ bir xil bo'ladi.

Ko'rinib turibdiki, agar chegara harakati berilgan bo'lsa, S_1 chegarada quyidagi shartlar o'rinli bo'ladi

$$\vec{w}_{muhit} = \vec{w}_{cheg}, \quad \vec{v}_{muhit} = \vec{v}_{cheg}. \qquad (1.2')$$

(1.2') ko'rinishdagi shartlar DQJM va suyuqliklar mexanikasida qo'llaniladi va yopishish sharti deb ataladi.

8. Boshlang'ich va chegaraviy shartlarning soni tenglama tartibidan bog'liq. Shuning uchun ular soni turli modellar uchun tarlicha bo'ladi. Masalan: ideal suyuqlik uchun Eyler tenglamalarida koordinata bo'yicha birinchi tartibli xususiy hosilalar qatnashadi.

Navye-Stoks tenglamasida esa ikkinchi tartibli hosilalar qatnashadi. Ikala holda ham tezlik uchun (1.2') shartdan foydalanish tabiiy va qulay. Faqat ideal suyuqlik uchun bu shart juda ham kuchli. Devorga to'liq yopishish shartida Eyler tenglamalarining yechimi mavjud emas. Shuning sababli ideal suyuqliklar uchun chegarada siljish sodir bo'ladi deb olish zarur.

Ideal suyuqliklar uchun (1.2') shart soddalashadi va bita skalyar shart bilan almashtiriladi

$$v_{n\,suyuqlik} = v_{n\ chegara} S_1 \text{ da} \qquad (1.3)$$

v_n, v_n - S_1 ga normal tezliklar.

Shuningdek ideal suyuqlikda quyidagi shart ham o'rinli

$$v_{\tau\ suyuq} \neq v_{\tau\ jism} \qquad (1.4)$$

Agar ideal suyuqlik harakati potensialli ya'ni $\vec{v} = grad\varphi$ bo'lsa, u holda (1.3)

$$v_{n\ suyuq} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = v_{n\,chegara} \quad S_1 \text{ da}$$

ko'rinishni oladi. Agar chegara qo'zg'almas bo'lsa, u holda

$$v_{n\ suyuq} = 0, \ \ S_1 \text{ da}$$

yoki

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \ S_1 \text{ da}$$

Berilgan chegaralarda (1.2') va (1.3) dan boshqa turli shartlarni qo'yish mumkin. Masalan S_1 datemperatura yoki issiqlik oqimini berish mumkin.

9. Ko'pgina masalalarda *S* sirt yoki uning bir qsmida S_2 da tashqi kuch beriladi. Elastiklik nazarisi va boshqa nazariyalarda S_2 da sirt kuchlari zichligi beiladi

$$\vec{p}_n = p_{nn}\vec{n} + p_{n\tau}\vec{\tau} = f(M,t) \qquad (1.5)$$

bu yerda *M* - S_2 sirt nuqtasi. Elastik va seysmik to'lqin tarqalishi masalalaridaerkin sirtdagi kuchlanish atmosfera bosimiga teng deb olinadi. Bu holda

$$p_{nn} = -p_0, \quad p_{n\tau} = 0 \qquad (1.6)$$

shartga ega bo'lamiz, bu yerda p_0 - atmosfera bosimi. (1.5) yoki (1.6) ko'rinishdagi shartlar yopishqoq suyuqlik harakatini o'rganishda ham qo'llaniladi. Ideal suyuqlikda esa

$$p = p_0 \tag{1.7}$$

shart o’rinli bo’ladi.

Xulosa

O’quv yili davomida o’rganilgan tutash muhit dinamikasi, termodinamikasi va elektrodinamikasiga doir asosiy tenglama va munosabatlar takrorlandi va tahlil qilindi. Muhit chegaralari uchun shartlar kiritildi.

2.Ma’ruza.
MASALALARNING QO’YILISHIDA NOMA’LUMLAR SONINI KAMAYTIRISH BILAN BOG’LIQ TIPIK SODDALASHTIRISHLAR

Reja

1. O’rnashgan harakat;
2. Tekis parallel harakat;
3. Siqilmaydigan suyuqlikning tekis parallel potensialli harakati;
4. O’qqa nisbatan simmetrik harakat;
5. Bir o’lchovli o’rnashmagan harakat:
   a) Tekis to’lqinli harakat,
   b) silindrik to’lqinli harakat,
   c)sferik to’lqinli harakat;
6. Avtomodelli harakat.

Tayanch iboralar:*koordinata, vaqt, potensial funksiya, harakat, ko’chish, tezlik, to’lqin tarqalishi.*

Harakat va boshqa fizik jarayonlarni ifodalovchi tenglamalarning yechimini topish haqidagi matematik masalalar Eyler nuqtai nazarida x^1, x^2, x^3, t 4 ta o’zgaruvchilardan bog’liq noma’lum funksiyalarni aniqlashga keltiriladi. Masalan, tezliklar, bosim, temperatura, zichlik va h.k.

Noma’lum o’zgaruvilarning sonini kamaytirish bilan bog’liq bo’lgan soddalashtiruvchi farazlar va koordinatalarning tanlanishi masalalarni yechish imkoniyatini oshiradi. Quyida bular bilan bog’liq bo’lgan ba’zi hollarni qarab o’tamiz.

1. O’rnashgan harakat. Har doim bo’lmasada ba’zi hollarda biz qaralayotgan harakat va jarayonlarni mos koordinatalar sistemasida o’rnashgan deb olishimiz mumkin. Bu esa Eyler nuqtai nazaridan foydalanishda t vaqtni yo’qotish bilan noma’lum o’zgaruvchilarning sonini bittaga kamaytirish imkonini beradi. O’rnashgan harakat uchun vaqt bo’yicha boshlang’ich shartlarni qo’yish zaruriyati yo’q. Chunki tenglamalarda vaqt bo’yicha hosilalar yo’qolib ketadi. Bu esa matematik masalalarning yechimini soddalashtiradi.

2. Agar x, y, z Dekart koordinatalar sistemasida tutash muhit hamma zarrachalarining tezliklari x, y tekisligiga parallel bo’lsa, bunday harakatga tekis parallel harakat deyiladi. Bunda esa harakat va holatning barcha xarakteristikalari faqat x, y koordinata va t vaqtdan bog’liq bo’ladi. Bu harakat va holat z koodinatadan bog’liq bo’lmaydi. Tekis parallellik haqidagi faraz faqat xususiy masalalardagina o’rinli. Masalan: cheksiz uzunlikdagi silindrik qanotning suyuqlik yoki gazdagi o’z yasovchisiga perpendikulyar harakati haqidagi aerodinamika masalasi, Og’ suyuqliklarda sirt to’lqini tarqalishi haqidagi masala, sterjenlarning cho’zilishi yoki siqilishi haqidagi masalalar. Tekis parallel harakat haqidagi masalalarning effektiv yechimlari matematik nazariyasi hozirgi kunda kuchli rivojlangan ko’pgina fazoviy masalalarni ikki o’lchovli masalalarga keltirish uchun taqribiy usullar ishlab chiqilgan.

3. Siqilmaydigan suyuqlik tekis parallel harakatini o’rganishdagi kata yutuq potensialli harakatlarni o’rganiщdagi tezlik potensiali $\varphi(x, y, t)$ ning garmonik funksiyadan iboratligidir

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.1}$$

$\varphi(x, y, t)$ garmonik funksiya uchun unga qo’shma bo’lgan $\psi(x, y, t)$ funksiyani Koshi-Riman shartiga ko’ra topamiz

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{2.2}$$

ya’ni

$$d\psi=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy \tag{2.3}$$

(2.3) ning integrallanish shartini (2.1) taxminlaydi. $\psi(x,y,t)$ funksiya oqim funksiyasi deb ataladi. (2.3) ga ko’ra $\psi=const$ biror oqim chizig’ini ifodalaydi. (2.2) Koshi-Riman shartiga asosan $z=x+iy$ kompleks o’zgaruvchidan bog’liq bo’lgan quyidagi analitik funksiyani kiritish mumkin

$$w(z,t)=\varphi+i\psi \tag{2.4}$$

Bu funksiya xarakteristik funksiya deb ataladi.

4. O’qqa nisbatan simmetrik bo’lgan masalalar muhim masalalardan hisoblanadi. Bunday masalalarni silindrik koordinatalarda qarash tavsiya etiladi. Bunda izlanayotgan funksiyalar r,z,t ga bog’liq bo’ladi. θ koordinata esa hyech qanday ahamiyatga ega bo’lmaydi. Hamma tenglama va munosabatlar z o’qi atrofida aylanishga nisbatan invariant bo’ladi. Ko’pgina aylanish jismlarining mustahkamligi masalalari masalan: trubalar, baklar, maxsus qobiqlar va h.k. yoki aylanish jismlarining suyuqlik bylab harakati yoki ularning simmetriya o’qi atrofidagi aylanishi haqidagi masalalar TMMning o’qqa nisbatan simmetrik harakati nazariyasi doirasida o’rganiladi.

5. Harakat va jaayonlar uchun faqat bita η koordinata ahamiyatga ega bo’lsa bunday harakatla bir o’lchovli deb ataladi. Bunday nomlanishga harakat t vaqtdan bog’liq bo’lgan holda o’rnashmagan so’zini ham qo’shishi mumkin. Suyuqliklar uchun bir o’lchovli harakatda tezliklar $\eta=const$ tekislikka perpendikulyar yo’nalgan bo’ladi va uning uchun quyidagi uchta holni qarab o’tish mumkin:

a) Tekis to’lqinli harakat. Bunda harakatni Dekart koordinatalarida o’rganish maqsadga muvofiq. Ahamiyatga ega bo’lgan bog’liqmas argument sifatida faqat x koordinata (bundan keyin $x=r$ belgilash kiritamiz) va t vaqtni olamiz. Bu holda $x=const$ tekislikda (to’lqin fazalari tekisligida) harakatning hamma xarakteristikalari bir xil, ya’ni harakat va jarayonning izlanayotgan xarakteristikalarining x va y bo’yicha hosilalari nolga teng.

b) Silindrik to’lqinli harakatni o’rganish uchun silindrik koordinatalarni tanlash mumkin. Ahamiyatga ega bo’lgan bog’liqmas o’zgaruvchi argument simmetriya o’qigacha bo’lgan masofani ifodalovchi r masofa va t vaqt bo’ladi. Bu holda $r=const$ (to’lqin fazalari sirti) sirtda harakatning barcha xarakteristikalari o’zgarmas, ya’ni z va φ bo’yicha hosilalar nolga teng.

c)Sferik to’lqinli harakatni o’rganish uchun silindrik koordinatalarni tanlash mumkin. Ahamiyatga ega bo’lgan bog’liqmas o’zgaruvchi argument simmetriya markazigacha bo’lgan masofani ifodalovchi r masofa va t vaqt bo’ladi. Bu holda $r=const$ (to’lqin fazalari sirti) sirtda harakatning barcha xarakteristikalari o’zgarmas, ya’ni θ uzoqlik va φ kenglik bo’yicha hosilalar nolga teng.

Ko’pgina nazariy va amaliy masalalar bir o’lchovli harakat nazariyasi doirasida qaraladi. Masalan: yorug’lik va tovush to’lqinlari tarqalishi nazariyasi, portlash to’lqinlari va detonasiya.

Shunday qilib, yuqorida keltirilgan soddalashtirishlar bitta, ikkita yoki xatto uchta (o’rnashgan bir o’lchovli harakatda faqat r ahamiyatga ega, nol o’lchovli o’rnashmagan harakatda esa t) bog’limas o’zgaruvchilarni yo’qotishga keltirilar ekan.

6. Bog’liqmas o’zgaruvchilarning ba’zi kombinatsiyalari hisobidan argumentlar sonini kamaytirish muhim ahamiyatga ega. Bunday yechimlarga avtomodelli harakat misol bo’la oladi, bunda to’rtta x,y,z,t

o’zgaruvchilar o’rniga uchta bog’liqmas o’zgaruvchilarni kiritish mumkin $\frac{x}{t^{\alpha}}, \frac{y}{t^{\alpha}}, \frac{z}{t^{\alpha}}$, bu yerda α - biror o’zgarmas.

Bir o’lchovli o’rnashmagan harakatlarda ikkita r va t o’zgaruvchilar o’rniga faqat bitta o’zgaruvchini quyidagicha kiritish mimkin $\lambda = \frac{r}{t^{\alpha}}$.

Ko’rinib turibdiki, bu holda r va t bo’yicha xususiy hosilali differensial tenglamalar bitta bog’liqmas λ o’zgaruvchili oddiy differensial tenglamaga keladi.

Xulosa

Shunday qilib, tutash muhit harakatiga ko’ra tenglamalarni soddalashtirish o’rganib chiqildi. Ba’zi harakatlar uchun soddalashgan tenglamalar keltirildi.

O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA FAKULTETI

«MATEMATIK MODELLASHTIRISH» KAFEDRASI

1.2. «TUTASH MUHITLAR MEXANIKASI» FANINING AMALIY MASHG’ULOTLARI MATERIALLARI

«5130200 – Amaliy matematika va informatika» ta’lim yo’nalishi 3 kurs talabalari uchun

Samarqand – 2019

Amaliyot mashg'ulotlarining kalendar tematik rejasi
5-semestr (36 soat)

№	MAVZUNING NOMI	Soat
I.	**Tenzor hisobi elementlari**	**16**
1	Koordinatalarni almashtirish	4
2	Vektor maydonini differensiallash	4
3	Tenzorlar ustida amallar	4
4	Ortogonal egri chiziqli koordinatalar sistemalari	4
II.	**Deformatsiyalanuvchi muhit kinematikasi**	**20**
5	Harakatning Lagranj va Eyler ko'rinishidagi ifodalari, ularning biridan ikkinchisiga o'tish	4
6	Ko'chish va deformatsiya. Deformasiya tenzori.	4
7	Nisbiy ko'chish. Chiziqli burilish tenzori. Burilish vektori	4
8	Bosh deformasiyalar. Deformatsiya invariantlari.	2
9	Chiziqli deformasiya uchun birgalik tenglamalari	2
10	Tezlik. Tezlanish. Trayektoriya. Oqim chiziqlari	2
11	Deformasiya tezliklari. Uyurma. Deformatsiya orttirmasi	2
	Jami	**36**

6-semestr (72 soat)

№	MAVZUNING NOMI	Soat
III.	**TMMning dinamik tenglamalari.**	**16**
1	Siqiluvchan va siqilmas suyuqlik uchun uzviylik tenglamalari	2
2	Ortogonal egri chiziqli koordinatalarda uzviylik tenglamasi	2
3	Kuchlanish vektori va tenzori. Normal va urinma kuchlanish	2
4	Kuchlanish tenzorini almashtirish. Kuchlanish tenzori sirti. Kuchlanish tenzorining sharsimon va deviatr qismlari	4
5	Kuchlanish tenzorining invariantlari, bosh qiymatlari va bosh yo'nalishlari	2
6	Maksimal va minimal urinma kuchlanishlar. Mor doirasi	2
7	Harakat miqdori o'zgarishi haqidagi teorema.	2
IV.	**Tutash muhit ba'zi sodda modellarining yopiq tenglamalari sistemasi**	**14**
8.	Ideal suyuqlik va gaz	2
9.	Chiziqli elastik jism va chiziqli qovushoq – elastik suyuqlik	2
10.	Navye-Stoks tenglamasi.	4
11.	Lame tenglamasi	2
12.	Egri chiziqli koordinatalar sistemasida tenglamalarga misollar	4
V.	**Gidromexanika**	**10**
13.	Gidrostatika tenglamalari va eng sodda masalalar	2
14.	Arximed qonuni	4
15.	Bernulli integrali va uning tadbiqiga oid ayrim masalalar	2

16.	Potensialli harakat	2
VI.	**Elastiklik nazariyasi**	**4**
17.	To’g’ri brusning cho’zilishi.	2
18.	To’g’ri brusning buralishi.	2
VII.	**Qovushoq siqilmas suyuqlikning harakati**	**4**
19.	Qovushoq siqilmas suyuqlik harakatiga doir misollar	2
20.	Stoks formulasini qo’llashga misollar	2
VIII	**Termodinamikaning asosiy tushunchalari va tenglamalari**	**18**
21.	Chiziqli va hajmiy kengayish	2
22.	Erish, bug’lanish, yonishda issiqlik miqdorlari	2
23.	Issiqlikning balans tenglamasi	2
24.	Termodinamikaning birinchi qonuni	2
25.	Mendeleyev-Klapeyron tenglamasining masalalar yechishga tadbiqi	2
26.	Van-der-Vaals tenglamasiga doir masalalar	2
27.	Izotermik va adiabatik jarayonlar	2
28.	Issiqlikning oqimi tenglamasi	2
29.	Karno sikli	2
IX.	**Tutash muhit harakati universal tenglamalar sistemasi va ayrim muhitlarning modellari**	**4**
30.	Aniq masalalar qo’yilishining umumiy asoslari.	2
31.	Erkli noma’lumlar sonini kamaytirish. Ba’zi masalalarning qo’yilishida tipik soddalashtirishlar	2
X.	**Uzilish sirtlari nazariyasi**	**2**
32.	Kuchli va kuchsiz uzilish sirtlari; tutash muhit mexanikasi asosiy qonunlarining uzilish sirtlarida yozilishi; bir o’lchovli hollarda ayrim asosiy munosabatlar; Gyugoniyu adiabatas	2
	Jami	**72**

TUTASH MUHITLAR MEXANIKASIDAN AMALIY MASHG'ULOTLAR

KOORDINATALARNI ALMASHTIRISH

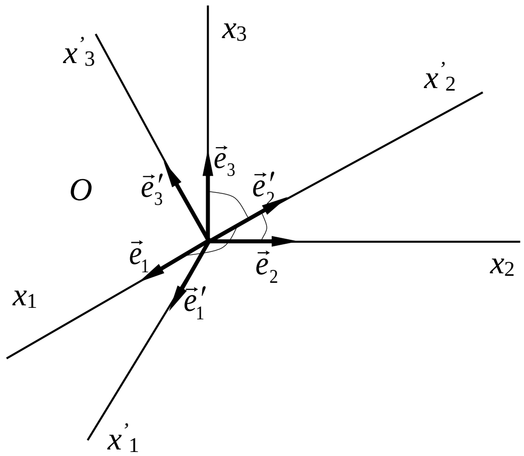
Koordinatalar sistemasini markazi atrofida burish natijasida yangi koordinatalar sistemasi hosil bo'ladi (1-chizma). Hosil bo'lgan koordinatalar sistemasining $\vec{e}_i'$ bazis vektorlarini eski $\vec{e}_j$ bazis vektorilari orqali quyidagicha ifodalash mumkin

$$\vec{e}_i' = \alpha_{ij}\vec{e}_j, \tag{1}$$

bu yerda α_{ij} yangi bazis vektorilarining eski bazis bilan tashkil qilgan burchaklari kosinuslari. Xuddi shunday eski bazislarni ham yangi bazislar orqali ifodalash mumkin

$$\vec{e}_i = \alpha_{ij}'\vec{e}_j', \tag{2}$$

bu yerda α_{ij}' eski bazis vektorilarining yngi bazis bilan tashkil qilgan burchaklari kosinuslari.



1-chizma

1-masala. Tarkibida δ_{ij}- Kroneker simvolidan iborat bo'lgan quyidagi ifodalarni hisoblang: (a) δ_{ii}, (b) $\delta_{ij}\,\delta_{ij}$, (c) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$, (d) $\delta_{ij}\delta_{jk}$, (e) $\delta_{ij}\,A_{ik}$.

<u>Yechish</u>. Ta'rifga ko'ra δ_{ij}- Kroneker simvoli quyidagicha aniqlanadi

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & agar\ i = j \\ 0, & agar\ i \neq j \end{cases}$$

Bundan foydalanib berilgan ifodalarni baholaymiz:

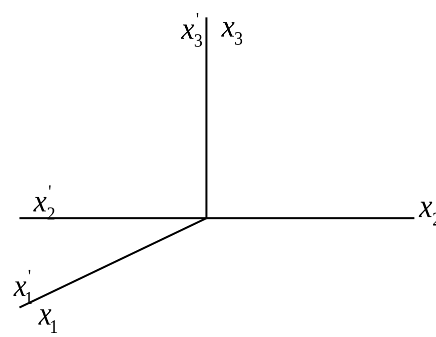
(a) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1+1+1 = 3$,

(b) $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{1j}\delta_{1j} + \delta_{2j}\delta_{2j} + \delta_{3j}\delta_{3j} = 3$,

(c) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{1j}\delta_{1k}\delta_{jk} + \delta_{2j}\delta_{2k}\delta_{jk} + \delta_{3j}\delta_{3k}\delta_{jk} = 3$,

(d) $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{i1}\delta_{1k} + \delta_{i2}\delta_{2k} + \delta_{i3}\delta_{3k} = \delta_{ik}$,

(e) $\delta_{ij}\,A_{ik} = \delta_{1j}\,A_{1k} + \delta_{2j}\,A_{2k} + \delta_{3j}\,A_{3k} = A_{jk}$.



2-masala. Quyidagi chizmada keltirilgan o'qlarning yo'nalishi va joylashishiga qarab almashtirish ortoganalligini ko'rsating.

<u>Yechish</u>: Chizmadan aniqlash mumkinki, o'tish matrisasi quyidagi korinishga ega

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ortogonallik shartlari $\alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk}$ or $\alpha_{ji}\alpha_{ki} = \delta_{jk}$ aynan bajariladi va matritsaviy shaklda quyidagi ko'rinishga ega

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3-Masala. $Ox_1^{'}x_2^{'}x_3^{'}$ va $Ox_1x_2x_3$ koordinatalar sistemasini orasidagi bog'lanish munosabat bog'lovchi koordinat almashtirishlar quyidagi jadval shaklida berilgan:

	X_1	X_2	X_3
X_1'	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$
X_2'	4/5	0	-3/5
X_3'	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$

1. Ortogonallik sharti bajarilishini ko'rsating.
2. Berilgan $A(1,2,4)$ nuqtaning shtrixli koordinatalar sistemasidagi koordinatalarini aniqlang.
3. $a(a_1, a_2, a_3)$ vektorni shtrixli koordinatalar sistemasida ifodalang.
4. $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik tenglamasini shtrixli koordinatalar sistemasida ifodalang.

Yechish

1. Ortogonallikni ixtiyoriy satr(ustun)ning komponentalarini boshqa ixtiyoriy satr(ustun)ning mos komponentalariga ko'paytmalari yig'indisi nolga tengligidan topamiz

$$-\frac{3}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{4}{5}\cdot 0+\frac{3}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=0;$$

$$-\frac{3}{5\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)+\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{3}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{5\sqrt{2}}=0;$$

$$-\frac{3}{5\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{4}{5}\cdot 0+\frac{3}{5\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=0;$$

$$-\frac{3}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{5\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{4}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{5\sqrt{2}}=0.$$

Demak ortogonallik sharti bajarilar ekan.

2. Shtrixli koordinatalar sistemasida A nuqtaning koordinatalarini topamiz

$$x_1'=-\frac{3}{2\sqrt{5}}\cdot 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2-\frac{4}{5\sqrt{2}}\cdot 4=-\frac{23}{5\sqrt{2}};$$

$$x_2'=-\frac{4}{5}\cdot 1+0\cdot 2-\frac{3}{5}\cdot 4=-\frac{16}{5};$$

$$x_3'=\frac{3}{2\sqrt{5}}\cdot 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2+\frac{4}{5\sqrt{2}}\cdot 4=\frac{19+\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}.$$

Demak, shtrixli koordinatalar sistemasida $A\left(-\frac{23}{5\sqrt{2}},-\frac{16}{5},\frac{19+\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}\right).$

TOPSHIQRIQLAR.

1. Agar $(a_{ij})=\begin{pmatrix}2&0&3\\5&1&2\\4&5&7\end{pmatrix}$, $(x_i)=(2,1,4)$, $(y_i)=(3,7,-1)$ bo'lsa, quyidagilarni toping.

a) $a_{ij}x_j$, $a_{ij}x_i$, a_{ij}, y_j, $a_{ij}, y_i, a_{ij}, x_i y_j, a_{ij}, \delta_{ij}$, $a_{ij}-\frac{2}{5}\delta_{ij}a_{ll}$, $\left(a_{ij}-\frac{2}{5}\delta_{ij}a_{ll}\right)x_i$, $\left(a_{ij}-\frac{2}{5}\delta_{ij}a_{ll}\right)x_i y_j$

2. Eski va yangi koordinatalar sistemasi orasidagi burchaklar quyidagicha berilgan almashtirish koeffitsiyentlarini aniqlang va ortogonalligini tekshiring.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	135º	60º	120º
x'_3	90º	45º	45º
x'_3	45º	60º	120º

VEKTOR MAYDONINI DIFFERENSIALLASH

Reja

1. Skalayar va vektor maydonlari;
2. Skalyar maydon gradienti;
3. Vektor maydonining divergensiyasi;
4. Vektor maydonining rotori.

Maqsad. Tutash muhitlar mexanikasini o'rganishda juda ko'p ishlatiladigan differerensial operatorlar haqida tushunchalarni shakllantirish.

Qisqacha nazariy ma'lumotlar.

1. Nabla vector

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k};$$

2. Laplas operatori

$$\Delta = \vec{\nabla}\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

3. Skalyar funksiyaning gradienti

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{k};$$

4. Vektor maydonning divergensiyasi

$$div\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z};$$

5. Vektor maydonining rotori

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

1-misol. Quyidagi munosabatlarning to'g'riligini ko'rsating

(a) $grad(\varphi+\psi) = grad\,\varphi + grad\psi$,

(b) $div(\bar{a}+\bar{b}) = div\,\bar{a} + div\,\bar{b}$,

(c) $rot(\bar{a}+\bar{b}) = rot\,\bar{a} + rot\,\bar{b}$.

Yechish:

(a)

$$grad(\varphi+\psi) = (\varphi+\psi)_{,i}\,\bar{e}_i = \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial x}\bar{e}_1 + \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial y}\bar{e}_2 + \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial z}\bar{e}_3 =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{e}_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x}\bar{e}_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\bar{e}_2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\bar{e}_3 \qquad (*)$$

$$grad\,\varphi + grad\psi = \varphi_{,i}\,\bar{e}_i + \psi_{,i}\,\bar{e}_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{e}_3 + \frac{\partial\psi}{\partial x}\bar{e}_1 + \frac{\partial\psi}{\partial y}\bar{e}_2 + \frac{\partial\psi}{\partial z}\bar{e}_3 \qquad (**)$$

Bu lardan kelib chiqadiki (*) va (**) munosabatlar ekvivalent, ya'ni $grad(\varphi+\psi)=grad\,\varphi+grad\psi$ munosabat o'rinli.

(b)

Faraz qilaylik $\bar{a}(a_1,a_2,a_3)$ va $\bar{b}(b_1,b_2,b_3)$ vektorlar berilgan bo'lsin

$$div\,\bar{a}=\frac{da_1}{dx}+\frac{da_2}{dy}+\frac{da_3}{dz};\quad div\,\bar{b}=\frac{db_1}{dx}+\frac{db_2}{dy}+\frac{db_3}{dz};$$

$$div(\bar{a}+\bar{b})=\frac{d(\bar{a}+\bar{b})}{dx}+\frac{d(\bar{a}+\bar{b})}{dy}+\frac{d(\bar{a}+\bar{b})}{dz}=\frac{da_1}{dx}+\frac{db_1}{dx}+\frac{da_2}{dy}+\frac{db_2}{dy}+\frac{da_3}{dz}+\frac{db_3}{dz}.$$

Demak, $div(\bar{a}+\bar{b})=div\,\bar{a}+div\,\bar{b}$ munosabat o'rinli.

(c)

$$rot(\bar{a}+\bar{b})=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3\end{vmatrix}=\left[\frac{\partial(a_3+b_3)}{\partial y}-\frac{\partial(a_2+b_2)}{\partial z}\right]\bar{i}+\left[\frac{\partial(a_1+b_1)}{\partial z}-\frac{\partial(a_3+b_3)}{\partial x}\right]\bar{j}+$$

$$+\left[\frac{\partial(a_2+b_2)}{\partial x}-\frac{\partial(a_1+b_1)}{\partial y}\right]\bar{k}=\left[\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right]\bar{i}+\left[\frac{\partial b_3}{\partial y}-\frac{\partial b_2}{\partial z}\right]\bar{i}+\left[\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right]\bar{j}+\left[\frac{\partial b_1}{\partial z}-\frac{\partial b_3}{\partial x}\right]\bar{j}+$$

$$+\left[\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right]\bar{k}+\left[\frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}\right]\bar{k}=rot\,\bar{a}+rot\,\bar{b}$$

VAZIFA

Ayniyatlarni isbotlang

1. $grad(\varphi\psi)=\varphi\,grad\psi+\psi\,grad\varphi$;
2. $div(\varphi\vec{a})=\varphi\,div\vec{a}+\vec{a}grad\varphi$;
3. $rot(\varphi\vec{a})=\varphi\,rot\vec{a}+grad\varphi\times\vec{a}$;
4. $divrot\vec{a}=0$;
5. $rotgrad\varphi=0$;
6. $rotrot\vec{a}=graddiv\vec{a}-\Delta\vec{a}$.

Adabiyotlar

1. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
3. М.А.Акивес, В.В. Гольдберг. Тензорное исчисление. -М.:Изд. Наука.1972.

TENZOR MAYDONINI DIFFERENSIALLASH

Reja

1. Ko'phadni differensiallash;
2. Egri chiziqli koordinatalar bazislarini differensiallash;
3. Kontravariant komponentadan kovariant hosila.

1-masala. $\lambda=A_{ij}x_ix_j$ (bu erda A_{ij} =*const*) funksiya uchun $\partial\lambda/\partial x_i=(A_{ij}+A_{ji})x_j$ va $\partial^2\lambda/\partial x_i\partial x_j=A_{ij}+A_{ji}$ ekanligini ko'rsating va bu hosilalarni $A_{ij}=A_{ji}$ hol uchun soddalashtiring.

Yechish: Quyidagi hosilani qarab chiqamiz

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}=A_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial x_k}x_j+A_{ij}x_i\frac{\partial x_j}{\partial x_k}.$$

Ushbu tenglik $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_k} \equiv \delta_{ik}$ o'rinli bo'lgani uchun

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_k} = A_{kj}x_j + A_{ik}x_i = \left(A_{kj} + A_{jk}\right)x_j .$$

Differensiallashni davom ettirib

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_p \partial x_k} = \left(A_{kj} + A_{jk}\right)\frac{\partial x_j}{\partial x_p} = A_{kp} + A_{pk}$$

ni hosil qilamiz. Agarda $A_{ij} = A_{ji}$ bo'lsa, u holda $\dfrac{\partial \lambda}{\partial x_k} = 2A_{kj}x_j$ va $\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial x_p \partial x_k} = 2A_{pk}$ bo'ladi.

2-masala. Quyidagi munosabat o'rinli ekanligini ko'rsating

$$e_{pqs}e_{mnr} = \begin{vmatrix} \delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{ms} \\ \delta_{np} & \delta_{nq} & \delta_{ns} \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & \delta_{rs} \end{vmatrix}. \qquad (*)$$

Yechish: Faraz qilaylik A_{ij} ning determinanti quyidagicha aniqlangan bo'lsin

$$\det A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinantning qator va ustunlarini o'zgarishi ishorani o'zgartiradi, shuning uchun

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{11} & A_{13} \\ A_{22} & A_{21} & A_{23} \\ A_{32} & A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} = -\det A$$

va qatorlar almashtirishning itiyoriy soni uchun

$$\begin{vmatrix} A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} \\ A_{r1} & A_{r2} & A_{r3} \end{vmatrix} = e_{mnr} \det A$$

yoki ustunlar almashuvi uchun

$$\begin{vmatrix} A_{1p} & A_{1q} & A_{1s} \\ A_{2p} & A_{2q} & A_{2s} \\ A_{3p} & A_{3q} & A_{3s} \end{vmatrix} = e_{pqs} \det A$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Demak, ixtiyoriy sondagi qator va ustun almashishlari quyidagi munasabatga olib keladi

$$\begin{vmatrix} A_{mp} & A_{mq} & A_{ms} \\ A_{np} & A_{nq} & A_{ns} \\ A_{rp} & A_{rq} & A_{rs} \end{vmatrix} = e_{mnr}e_{pqs} \det A \cdot$$

Agarda $A_{ij} = \delta_{ij}$ bo'lsa $\det A = 1$ gbo'ladi va (*) munosabat o'rinli bo'ladi.

3-masala. Quyidagi vektor ifodalarning f_2 komponentasini hisoblang:

(a) $f_i = e_{ijk}T_{jk}$, (b) $f_i = c_{i,j}b_j - c_{j,i}b_j$, (c) $f_i = B_{ij} f_j^*$

Yechish.

(a) $f_i = e_{ijk} T_{jk}$

$f_2 = e_{2jk} T_{jk} = e_{213} T_{13} + e_{231} T_{31} = -T_{13} + T_{31}$,

(b) $f_i = c_{i,j} b_j - c_{j,i} b_j$,

$f_2 = c_{2,1} b_1 + c_{2,2} b_2 + c_{2,3} b_3 - c_{1,2} b_1 - c_{2,2} b_2 - c_{3,2} b_3 = (c_{2,1} - c_{1,2}) b_1 + (c_{2,3} - c_{3,2}) b_3$,

(c) $f_i = B_{ij} f_j^*$

$f_2 = B_{21} f_1^* + B_{22} f_2^* + B_{23} f_3^*$.

4-masala. Quyida keltirilgan hollarda $D_{ij} x_i x_j$ ifodani yoyib chiqing va imkon bo'lgan hollarda soddalshtiring:

(a) $D_{ij} = D_{ji}$,

(b) $D_{ij} = -D_{ji}$.

Yechish:

Avval $D_{ij} x_i x_j$ ifodani yoyib chiqamiz

$$D_{ij} x_i x_j = D_{1j} x_1 x_j + D_{2j} x_2 x_j + D_{3j} x_3 x_j = D_{11} x_1 x_1 + D_{12} x_1 x_2 + D_{13} x_1 x_3 +$$
$$+ D_{21} x_2 x_1 + D_{22} x_2 x_2 + D_{23} x_2 x_3 + D_{31} x_3 x_1 + D_{32} x_3 x_2 + D_{33} x_3 x_3,$$

(a) $D_{ij} x_i x_j = D_{11} (x_1)^2 + D_{22} (x_2)^2 + D_{33} (x_3)^2 + 2D_{12} x_1 x_2 + 2D_{23} x_2 x_3 + 2D_{13} x_1 x_3$,

(b) $D_{ij} x_i x_j = 0$, chunki $D_{11} = -D_{11}$, $D_{12} = -D_{21}$, va hokazo.

5-masala. Quyida keltirilgan tenzorlarning kovariant hosilalarini hisoblang:

(a) $\overline{A} = A_i \bar{Э}^i$; (b) $T = T^{ijk} Э_i Э_j Э_k$; (c) $H = H_{ij}^k \bar{Э}^i \bar{Э}^j Э_k$

Yechish:

(a) $$\frac{\partial \overline{A}}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial A_j}{\partial \zeta^i} \bar{Э}^j + A_j \frac{\partial \bar{Э}^j}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial A_j}{\partial \zeta^i} \bar{Э}^j - A_j \Gamma_{ki}^j Э^k,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \zeta^n} = \frac{\partial T^{ijk}}{\partial \zeta^n} Э_i Э_j Э_k + T^{ijk} \frac{\partial Э_i}{\partial \zeta^n} Э_j Э_k + T^{ijk} Э_i \frac{\partial Э_j}{\partial \zeta^n} Э_k + T^{ijk} Э_i Э_j \frac{\partial Э_k}{\partial \zeta^n} = \frac{\partial T^{ijk}}{\partial \zeta^n} Э_i Э_j Э_k +$$

(b) $$+ T^{ljk} \Gamma_{in}^l Э_l Э_j Э_k + T^{ljk} Э_i \Gamma_{jn}^p Э_p Э_k + T^{ljk} Э_i Э_j \Gamma_{kn}^q Э_q = \frac{\partial T^{ijk}}{\partial \zeta^n} Э_i Э_j Э_k + T^{ljk} \Gamma_{\ln}^i Э_i Э_j Э_k +$$

$$+ T^{ipk} \Gamma_{pn}^j Э_i Э_j Э_k + T^{ijq} \Gamma_{qn}^k Э_i Э_j Э_k = \left(\frac{\partial T^{ijk}}{\partial \zeta^n} + T^{ljk} \Gamma_{\ln}^i + T^{ipk} \Gamma_{pn}^j + T^{ijq} \Gamma_{qn}^k \right) Э_i Э_j Э_k,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta^n} = \frac{\partial H_{ij}^k}{\partial \zeta^n} \bar{Э}^i \bar{Э}^j Э_k + H_{ij}^k \frac{\partial \bar{Э}^i}{\partial \zeta^n} \bar{Э}^j Э_k + H_{ij}^k \bar{Э}^i \frac{\partial \bar{Э}^j}{\partial \zeta^n} Э_k + H_{ij}^k \bar{Э}^i \bar{Э}^j \frac{\partial Э_k}{\partial \zeta^n} = \frac{\partial H_{ij}^k}{\partial \zeta^n} \bar{Э}^i \bar{Э}^j Э_k -$$

(c) $$- H_{ij}^k \Gamma_{mn}^i \bar{Э}^m \bar{Э}^j Э_k - H_{ij}^k \bar{Э}^i \Gamma_{ln}^j \bar{Э}^l Э_k + H_{ij}^k \bar{Э}^i \bar{Э}^j \Gamma_{kn}^\nu Э_\nu =$$

$$= \left(\frac{\partial H_{ij}^k}{\partial \zeta^n} - H_{mj}^k \Gamma_{in}^m - H_{il}^k \Gamma_{jn}^l + H_{ij}^\nu \Gamma_{\nu n}^k \right) \bar{Э}^i \bar{Э}^j Э_k$$

VAZIFA (a) $A = A_i^j \bar{Э}^i Э_j$; (b) $T = T_{ik}^{jl} \bar{Э}^i Э_j \bar{Э}^k Э_l$;

Adabiyotlar

1. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
3. М.А.Акивес, В.В. Гольдберг. Тензорное исчисление. -М.:Изд. Наука.1972.

HARAKATNING LAGRANJ VA EYLER KO'RINISHIDAGI IFODALARI VA ULARNING BIRIDAN IKKINCHISIGA O'TISH

Reja

1. Tutash muhit harakatining berilish usullari;
2. Ko'chisj vektori;
3. Lagranj va Eyler koordinatalarining biridan ikkinchisiga o'tish.

Maqsad. Talabalrga tutash muhit harakatini o'tganishda Lagranj va Eyler nuqtai nazarlarini tushuntirish ma salalar yechish.

Nazariy ma'lumotlar

Agar harakat $x_i = x_i(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3, t)$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, Lagranj ko'rinishida, Agar harakat $\xi_i = \xi_i(x_1,\ x_2,\ x_3, t)$ ko'rinishida berilgan bo'lsa, Eyler ko'rinishida berilgan deyiladi. Ular bir ko'rinishda berilgan bo'lsa uni ikkinchi ko'rinishga o'tkazish uchun dastlab bir qiymatli moslik bajarilishini tekshirishimiz kerak, ya'ni yakobian noldan farqli bo'lishi kerak

Lagranjdan Eylerga otish uchun *Lagranjdan Eylerga otish uchun*

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right| \neq 0 \qquad \left|\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right| \neq 0 \tag{1}$$

Agar boshlang'ich holatda Lagranj va Eyler koordinatalari ustma-ust tushsa, u holda ko'chish vektori

$$w_i = x_i - \xi_i \tag{2}$$

kabi aniqlanadi.

1-masala. Tutash muhitning harakati Lagranj ko'rinishida quyidagicha berilgan:

(a) $x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2 + A\xi_3, \quad x_3 = \xi_3 + A\xi_2.$

(b) $x_1 = \xi_1 + \xi_3(e^2 - 1), \quad x_2 = \xi_2 + \xi_3(e^2 - e^{-2}), \quad x_3 = e^2\xi_3$

Harakatni Eyler o'zgaruvchilari orqali ifodalang.

__Yechish:__ Ma'lumki Lagranj va Eyler o'zgaruvchilari orasida bir qiymatli moslik bajarilishi uchun

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \neq 0$$

shart bajarilishi zaruriyati etarli,

(a) J o'tish yakobianini hisoblaymiz

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & A & 1 \end{vmatrix} = 1 - A^2 \neq 0,$$

bundan $A \neq \pm 1$ bo'lganda o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Eyler o'zgaruvchilarida harakat quyidagicha aniqlanadi

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1, \\ x_2 = \xi_2 + A\xi_3, \\ x_3 = \xi_3 + A\xi_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = x_1, \\ x_2 = \xi_2 + A\xi_3, \\ \xi_3 = x_3 - A\xi_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = x_1, \\ x_2 = \xi_2 + A\xi_3 - A^2\xi_2, \\ \xi_3 = x_3 - A\xi_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = x_1, \\ \xi_2 = \dfrac{1}{A^2-1}(Ax_3 - x_2), \\ \xi_3 = x_3 - \dfrac{A}{A^2-1}(Ax_3 - x_2). \end{cases}$$

(b) Bu holda ham $J \neq 0$ o'tish yakobiani noldan farqli bo'ladi. Eyler o'zgaruvchilarida harakat quyidagicha aniqlanadi

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 + \xi_3(e^2 - 1), \\ x_2 = \xi_2 + \xi_3(e^2 - e^{-2}), \\ x_3 = e^2\xi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \xi_1 + \xi_3(e^2 - 1), \\ x_2 = \xi_2 + \xi_3(e^2 - e^{-2}), \\ \xi_3 = e^{-2}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \xi_1 + e^{-2}x_3(e^2 - 1), \\ x_2 = \xi_2 + e^{-2}x_3(e^2 - e^{-2}), \\ \xi_3 = e^{-2}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = x_1 + x_3(1 - e^{-2}), \\ \xi_2 = x_2 - x_3(1 - e^{-4}), \\ \xi_3 = e^{-2}x_3. \end{cases}$$

2-Masala. Tutash muhit harakati Lagranj o'zgaruvchilarida $x_1 = \xi_1 e^t + \xi_3(e^t - 1)$; $x_2 = \xi_2 + \xi_3(e^t - e^{-t})$; $x_3 = \xi_3$ ko'rinishda berilgan. Uni Eyler ko'rinishga o'tkazing. Lagrang va Eyler koordinatalarida ko'chish vektori komponentalarini toping. Lagrang koordinatalarida tezlik, tezlanish, deformatsiya va deformatsiya tezliklari tenzori komponentalarini toping.

Yechish. Harakatni Eyler ko'rinishida ifodalash uchun dastlab yakobianning noldan farqliligini tekshiramiz

$$J = \left|\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right| = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^t - 1 \\ 0 & 1 & e^t - e^{-t} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^t \neq 0$$

Demak, Eyler koordinatalariga o'tish mumkin.

$x_1 = \xi_1 e^t + \xi_3(e^t - 1)$; $x_2 = \xi_2 + \xi_3(e^t - e^{-t})$; $x_3 = \xi_3$ tenglamalarni ξ_j larga nisbatan yechamiz.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 e^{-t} - x_3(1 - e^{-t}); \\ \xi_2 &= x - x_3(e^t - e^{-t}); \\ \xi_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Endi ko'chish vektori komponentalarini topamiz. $w_i = x_i - \xi_i$ formulaga ko'ra

Lagranj koordinatalarida	Eyler koordinatalarida
$w_1 = \xi_1(e^t - 1) + \xi_3(e^t - 1)$;	$w_1 = x_1(1 - e^{-t}) + x_3(1 - e^{-t})$;
$w_2 = \xi_3(e^t - e^{-t})$;	$w_2 = x_3(e^t - e^{-t})$;
$w_3 = 0.$	$w_3 = 0.$

Vazifa

Muhit harakati $x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ qonuniyat bilan berilgan. Lagrang va Eyler koordinatalarida ko'chish vektori komponentalarini toping.

1. $x_1 = \xi_1 e^{-t}$; $x_2 = (\xi_2 + A\xi_3)e^t$; $x_3 = \xi_3 + A\xi_2$,

2. $x_1 = (\xi_1 A + \xi_3)e^{-t}$; $x_2 = \xi_2$; $x_3 = (\xi_3 + A\xi_1)e^{-t}$,

3. $x_1 = \xi_1 + A\xi_2 e^t$; $x_2 = A\xi_1 e^t$; $x_3 = \xi_3$,

4. $x_1 = \xi_1 + \xi_3(e^2 - 1)$; $x_2 = \xi_2 + \xi_3(e^2 - e^{-2})$; $x_3 = \xi_3$,

5. $x_1 = e^{-t}\xi_3$; $x_2 = k\xi_1$; $x_3 = k\xi_3(e^{-t} + e^t)$,

6. $x_1 = 3\xi_1\xi_3 e^{-t^2}$; $x_2 = 2\xi_1\xi_2 e^{-t^2}$; $x_3 = 5\xi_2\xi_3 e^{-t}$,

Adabiyotlar

1. «Механика сплошной среды в примерах и задачах». Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
2. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах..
4. Худойназаров Х., Амиркулова Ф. Деформацияланувчи муҳит кинематикаси. Маърузалар матни. – Самарқанд: СамДУ нашри, 2003.

Mavzu: DEFORMATSIYA TENZORI

1-misol. Muhit zarralarining boshlang'ich $\overset{\circ}{x}{}^i$ va oxirgi x^i koordinatalari Dekart koordinatalari sistemasida quyidagi munosabatlar bilan bog'langan

$$x^1 = \overset{\circ}{x}{}^1 + e\overset{\circ}{x}{}^1, \quad x^2 = \overset{\circ}{x}{}^2, \quad x^3 = \overset{\circ}{x}{}^3, \quad e = const.$$

a) Boshlang'ich holatda x^1 koordinata o'qiga parallel va perpendicular bo'lgan kesmalar (*e>0 va -1<e<0*) deformasiyalanish natijasida qanday o'zgaradi?

b) Boshlang'ich holatda Lagranj va Eyler koordinatalari ustma-ust tushsin. Deformasiyalanganlik holatda Lagranj va Eyler koordinatalari orasidagi bog'lanishni hamda Lagranj koordinatalar sistemasi uchun bazis vektorlari va metrik tenzor komponentalarini toping.

c) Boshlang'ich holatda Lagranj va Eyler koordinatalari bilan ushtma-ust tushsa, uning koordinata chiziqlari, bazis vektorlari va boshlang'ich holat uchun metrik tenzor komponentalarini toping.

Yechish:

(a) Kesmalar o'z-o'ziga parallel ko'chadi. Nisbiy uzayish esa $S = S^0(1+e)$ da quyidagiga teng

$$l = \frac{S - S^0}{S^0} = \frac{S^0(1+e) - S^0}{S^0},$$

$l > 0$ bo'lsa cho'zilish, $1 < l < 0$ bo'lsa siqilish sodir bo'ladi.

(b) $x^1 = \xi^1(1+e), \quad x^2 = \xi^2, \quad x^3 = \xi^3$

Lagranj sistemasi koordinatalari tog'ri chiziqdan iborat va Eyler koordinatalariga parallel bo'ladi:

$$\hat{э}_1 = (1+e)э_1, \quad \hat{э}_2 = э_2, \quad \hat{э}_3 = э_3, \qquad \hat{g}_{11} = (1+e)^2, \quad \hat{g}_{22} = \hat{g}_{33} = 1, \quad \hat{g}_{ij} = 0$$

(c) $\xi^1 = \overset{\circ}{x}{}^1 + e\overset{\circ}{x}{}^1, \quad \xi^2 = \overset{\circ}{x}{}^2, \quad \xi^3 = \overset{\circ}{x}{}^3,$

$$\overset{\circ}{э}_1 = э_i \frac{\partial \overset{\circ}{x}^i}{\partial \xi^i} = \frac{1}{1+e} э_1, \quad \overset{\circ}{э}_2 = э_2, \quad \overset{\circ}{э}_3 = э_3, \qquad g_{11} = (1+e)^2, \quad g_{22} = g_{33} = 1.$$

2-misol. Ichki bosim ta'sirida doiraviy silindrik truba kengayadi. Boshlang'ich va oxirgi holat koordinatalari quyidagi munosabat bilan berilgan

$$r = \overset{\circ}{r} + f(\overset{\circ}{r}, t), \quad \varphi = \overset{\circ}{\varphi}.$$

Ixtiyoriy kesmaning uzayishi va koordinata o'qlari urinmasi bo'ylab yo'nalgan kesmalar nisbiy uzayishini toping.

Yechish: $ds_0^2 = dr_0^2 + r_0^2 d\varphi_0^2 + dz_0^2$; $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$

$$2\varepsilon_{ij}\xi^i\xi^j = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 - dr_0^2 - r_0^2 d\varphi_0^2 - dz_0^2 = \left[d\left(\overset{\circ}{r} + f(r_0, t)\right)\right]^2 + \left(r_0 + f(r_0, t)\right)^2 d\varphi^2 +$$

$$+ dz^2 - dr_0^2 - r_0^2 d\varphi_0^2 - dz_0^2 = \left[d\overset{\circ}{r}\left(1 + \frac{\partial f}{\partial r_0^2}\right)\right]^2 + \left(r_0 + f\right)^2 d\varphi^2 + dz^2 - dr_0^2 - r_0^2 d\varphi_0^2 - dz_0^2 =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{\partial f}{\partial \overset{\circ}{r}}\right) - 1\right] d\overset{\circ}{r}^2 + \left[\left(r_0 + f\right)^2 - \overset{\circ}{r}^2\right] d\varphi^2.$$

Koordinata o'qlari urinmasi bo'ylab yo'nalgan kesmalar uzayishi quyidagicha topiladi:
r_0 bo'yicha

$$l = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{dr - dr_0}{dr_0} = \frac{d(\overset{\circ}{r} + f) - dr_0}{dr_0} = \frac{\partial f}{\partial \overset{\circ}{r}},$$

φ_0, bu kesma uzunligi yoy uzunligi bilan teng bo'ladi

$$ds_0 = d\varphi_0 dr_0, \quad ds = d\varphi\, dr = d\varphi_0 (1 + \frac{\partial f}{\partial r_0}) dr_0,$$

$$l = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{(1 + \frac{\partial f}{\partial r_0}) d\varphi_0 dr_0 - d\varphi_0 dr_0}{d\varphi_0 dr_0} = \frac{\partial f}{\partial r_0}$$

$z = 0$ bo'ylab $l = 0$ bo'ladi.

DEFORMATSIYA TENZORINING BOSH O'QLARI VA BOSH KOMPONENTALARI. KO'CHISH VEKTORI.

1-misol. Muhitning ko'chish vektori

$$\overline{w} = \left(3\xi_2 - 4\xi_3,\, 2\xi_1 - \xi_3,\, 4\xi_2 - \xi_1\right)$$

berilgan. Harakatni (a) $x_i = x_i(\xi_p)$ - Lagranj va (b) $\xi_i = \xi_i(x_p)$ Eyler ko'rinishida ifodalang

<u>Yechish:</u> Ko'chish vektori komponentalari $w_1 = 3\xi_2 - 4\xi_3$, $w_2 = 2\xi_1 - \xi_3$, $w_3 = 4\xi_2 - \xi_1$ lardan iborat, bulardan foydalanib quyidagilarga ega bo'lamiz

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} 3\xi_2 - 4\xi_3 = x_1 - \xi_1, \\ 2\xi_1 - \xi_3 = x_2 - \xi_2, \\ 4\xi_2 - \xi_1 = x_3 - \xi_3, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \xi_1 + 3\xi_2 - 4\xi_3, \\ x_2 = 2\xi_1 + \xi_2 - \xi_3, \\ x_3 = -\xi_1 + 4\xi_2 + \xi_3, \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 3\xi_2 - 4\xi_3 = x_1 - \xi_1, \\ 2\xi_1 - \xi_3 = x_2 - \xi_2, \\ 4\xi_2 - \xi_1 = x_3 - \xi_3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \xi_1 + 3\xi_2 - 4\xi_3, \\ x_2 - 2x_1 = -5\xi_2 + 7\xi_3, \\ x_1 + x_3 = 7\xi_2 - 3\xi_3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{71}{5}x_2 + x_1, \\ \xi_2 = -\dfrac{4}{3}x_1 - \dfrac{27}{15}x_2, \\ \xi_3 = -(10x_2 + x_1). \end{cases}$$

2-misol. Tutash muhitning harakati quyidagi ko'rinishda berilgan:

(a) $x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2 + A\xi_3, \quad x_3 = \xi_3 + A\xi_2$.

(b) $x_1 = \xi_1 + \xi_3(e^2 - 1), \quad x_2 = \xi_2 + \xi_3(e^2 - e^{-2}), \quad x_3 = e^2\xi_3$.

Ko'chish vektori komponentalarini Lagranj va Eyler o'zgaruvchilari orqali ifodalang.

<u>Yechish:</u> (a) J - o'tish yakobiani noldan farqli bo'ladi. Avval harakatni Eyler o'zgaruvchilarida yozib olamiz

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1, \\ x_2 = \xi_2 + A\xi_3, \\ x_3 = \xi_3 + A\xi_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = x_1, \\ \xi_2 = \dfrac{1}{A^2 - 1}(Ax_3 - x_2), \\ \xi_3 = x_3 - \dfrac{A}{A^2 - 1}(Ax_3 - x_2). \end{cases}$$

Ko'chish vektori komponentalarini Lagranj o'zgaruvchilarida quyidagicha aniqlanadi

$$w_1(\xi_p) = x_1 - \xi_1 = 0,$$

$$w_2(\xi_p) = x_2 - \xi_2 = A\xi_3,$$

$$w_3(\xi_p) = x_3 - \xi_3 = A\xi_2.$$

Eyler o'zgaruvchilarida esa quyidagicha aniqlanadi

$$w_1(x_p) = x_1 - \xi_1 = 0,$$

$$w_2(x_p) = x_2 - \xi_2 = \left(1 + \frac{1}{A^2 - 1}\right)x_2 - \frac{A}{A^2 - 1}x_3,$$

$$w_3(x_p) = x_3 - \xi_3 = \frac{A}{A^2 - 1}(Ax_3 - x_2).$$

(b) Bu holda ham $J \neq 0$. Eyler o'zgaruvchilarida harakat quyidagicha aniqlanadi

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 + \xi_3(e^2 - 1), \\ x_2 = \xi_2 + \xi_3(e^2 - e^{-2}), \\ x_3 = e^2\xi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = x_1 + x_3(1 - e^{-2}), \\ \xi_2 = x_2 - x_3(1 - e^{-4}), \\ \xi_3 = e^{-2}x_3. \end{cases}$$

Ko'chish vektori komponentalarini Lagranj va Eyler o'zgaruvchilarida mos ravishda quyidagicha aniqlanadi

$$\begin{cases} w_1(\xi_p) = x_1 - \xi_1 = \xi_3(e^2 - 1), \\ w_2(\xi_p) = x_2 - \xi_2 = \xi_3(e^2 - e^{-2}), \\ w_3(\xi_p) = x_3 - \xi_3 = \xi_3(e^2 - 1), \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1(x_p) = x_1 - \xi_1 = x_3(1 - e^{-2}), \\ w_2(x_p) = x_2 - \xi_2 = x_3(1 - e^{-4}), \\ w_3(x_p) = x_3 - \xi_3 = x_3(1 - e^{-2}). \end{cases}$$

DEFORMATSIYALARNING BIRGALIK TENGLAMALARI

1-misol. ε_{ij} deformatsiya tenzori komponentalarini va uning $\varepsilon_{ij}{}^{D} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_k^k g_{ij}$ deviator qismini hisoblang:

a) $u^1 = Ax^1, \quad u^2 = Bx^2, \quad u^3 = 0,$ bu yerda $A, B -$ o’zgarmas, x^i -Dekart koordinatalari;
b) $u^1 = \alpha\, t\, x^1, \quad u^2 = u^3 = 0, \quad \alpha = const;$
c) $u^1 = \alpha\, t\, x^3, \quad v^2 = v^3 = 0, \quad \beta = const;$

Yechish: Deformatsiya tenzori komponentalari quyidagi formula bo’yicha aniqlanadi:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{ui}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \qquad (*)$$

u holda

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = A, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = B, \quad \varepsilon_{33} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = 0\ (i, j \neq 0),$$

$$\varepsilon_{11}^{D} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{3}\varepsilon_{11} - \frac{1}{3}\varepsilon_{22} = A - \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}B; \qquad \varepsilon_{22}^{D} = B - \frac{1}{3}(A+B) = \frac{2}{3}B - \frac{1}{3}A;$$

$$\varepsilon_{33}^{D} = 0 - \frac{1}{3}(A+B) = -\frac{1}{3}(A+B).$$

2-misol. Ushbu

$$v_1 = \frac{2x_2}{t}; \quad v_2 = \frac{2x_1}{t}; \quad v_3 = 0$$

tezliklar maydoni uchun deformatsiya tenzori komponentalarini hisoblang.

Yechish: Deformatsiya tenzori komponentalari yuqoridagi (*) formula bo’yicha aniqlanadi, bulardan foydalanib quyidagini hosil qilamiz

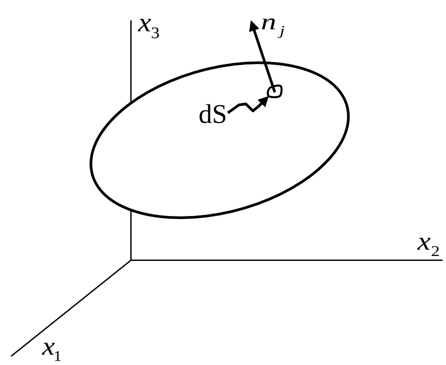
$$e_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0, \quad e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{t} + \frac{2}{t}\right) = \frac{2}{t}, \quad e_{13} = e_{22} = e_{32} = e_{33} = 0.$$

SOLENOIDAL MAYDONLAR. GAUSS-OSTROGRADSKIY TEOREMASI. O’ZGARUVCHAN HAJM BO’YICHA INTEGRALNI VAQT BO’YICHA DIFFERENSIALLASH

1-misol. Gauss-Ostradskiy teoremasidan foydalanib,

$$\int_s x_i\, n_j\, dS = V\delta_{ij}$$

munosabat o’rinli bo’lishini ko’rsating, bu erda dS - 12… chizmada keltirilgan V hajmni chegaralovchi S yuzaning elementi, x_i - $n_j\, dS$ vektorning joylashishini bildiradi, n_i uning tashqi normali.



Chizma 1.20

Yechish: Gauss-Ostragradskiy teoremasi ixtiyoriy tartibdagi tenzor maydoni uchun ummumlashishi mumkin, masalan $T_{ijk....}$ maydoni uchun quyidagicha yozilishi mumkin

$$\int_V T_{ijk...,p} dV = \int_S T_{ijk..} n_p dS \,. \qquad (***)$$

Bunga ko'ra

$$\int_S x_i n_j dS = \int_V x_{i,j} dV = \int_V \delta_{ij} dV = \delta_{ij} V \,.$$

2-misol. Gaussning divirgensiya teoremasini hisobga olib

$$\int_S \vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{x}) dS = 2aV$$

ekanligini ko'rsating, bu erda V- normali $\vec{n}$ bo'lgan S-sirt bilan chagaralangan sohaning hajmi, $\vec{a}$ - ixtiyoriy o'zgarmas vektor, $\vec{x}$ - V hajm ixtiyoriy nuqtasining radius vektori.

<u>Yechish</u>: Sirt integralini quyidagicha yozib olish mumkin:

$$\int_S e_{qpi} n_p e_{ijk} \alpha_j x_k dS$$

Oldingi misolda keltirilgan Gauss-Ostragradskiy teoremasini tenzor maydoni uchun umumlashgan (***) ko'rinishiga ko'ra bu intergalni hajm bo'yicha integralga quyidagicha o'tkazamiz:

$$\int_V e_{qpi} e_{ijk} \alpha_j x_{k,p} dV \,,$$

$\vec{a}$ o'zgarmas vektor bo'lganligi uchun oxirgi ifoda quyidagi ko'rinishni oladi

$$\int_V e_{qpi} e_{ijk} \alpha_j x_{k,p} dV = \int_V (\delta_{qi}\delta_{pk} - \delta_{qk}\delta_{pj}) \alpha_j x_{k,p} dV = \int_V (a_q x_{p,p} - a_p x_{q,p}) dV =$$

$$= \int_V (a_q \delta_{pp} - a_p \delta_{pq}) dV = \int_V (3a_q - a_q) dV = 2a_q V.$$

SIQILUVCHAN VA SIQILMAS SUYUQLIKLAR UCHUN UZVIYLIK TENGLAMASI

Asosiy tushunchalar

Siqiluvchan suyuqlik uchun uzviylik tenglamasi

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k} = 0, \qquad (1)$$

Siqilmas suyuqlik uchun uzviylik tenglamasi

$$v_{k,k} = 0, \quad \text{yoki} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \qquad (2)$$

1 - Masala. Berilgan tezliklar maydoni siqilmaydigan suyuqlik uchun uzviylik tenglamasini qanoatlantirishini ko'rsating. $v_i = Ax_i/r^3$, $x_i x_i = r^2$, A=const.

Yechish. Bizga ma'lumki, siqilmaydigan suyuqlik uchun uzviylik tenglamasi (2) ko'rinishda bo'ladi. Shunga asosan biz qarayotgan holda

$$v_{i,k} = A\,(x_{i,k}/r^3 - 3x_i x_k/r^5) = A\,(\delta_{ik}/r^3 - 3x_i x_k/r^5);$$

Bundan esa $v_{k,k} = (3 - 3)/r^3 = 0$. Demak Berilgan tezliklar maydoni uchun uzviylik tenglamasi qanoatlantirilar ekan.

2 - Masala. $v_i = x_i/(1 + t)$ tezliklar maydoni uchun $\rho x_1 x_2 x_3 = \rho_0 \xi_1 \xi_2 \xi_3$ shart bajarilishini ko'rsating.

Yechish. Bu holda $v_{k,k} = 3/(1+t)$ bo'ladi. Hosil bo'lgan ifodani (1) uzviylik tenglamsiga olib borib qo'yamiz va uni integrallaymiz

$$\ln \rho = -\ln(1+t)^3 + \ln C$$

bu yerda C – integrallash o'zgarmasi.

Agar $t = 0$ da $\rho = \rho_0$ ekanligini hisobga olsak

$$\rho = \rho_0 / (1+t)^3 .$$

Shundan so'ng tezlik ifodasi $\frac{dx_i}{x_i} = \frac{dt}{(1+t)}$ ni integrallab topamiz

$$x_i = \xi_i / (1+t).$$

Bundan $\rho x_1 x_2 x_3 = \rho_0 \xi_1 \xi_2 \xi_3 .$

TOPSHIRIQLAR

Darsda 6.13,6.14,6.18 [2], Uyga vazifa 6.16, 6.19[2],8.15 [3]

ORTOGONAL EGRI CHIZIQLI KOORDINATALARDA UZVIYLIK TENGLAMASI

REJA

1. SILINDRIK KOORDINATALARDA UZVIYLIK TENGLAMASIGA DOIR MASALALAR;

2. Sferik koordinatalarda uzviylik tenglamasi doir masalalar.

Tutash muhitning berilgan tezliklar maydoni uchun uzviylik tenglamasi

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \, div\vec{V} = 0 \tag{1}$$

Siqilmaydigan suyuqlik uchun esa

$$div\vec{V} = 0 \tag{2}$$

Bu tenglama Dekart koordinatalar sistemasida ushbu ko'rinishni oladi

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial\rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial\rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) = 0 \tag{3}$$

Siqilmaydigan suyuqlik uchun

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) = 0 \tag{4}$$

Silindrik koordinatalarda

$$r\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho U_\varphi)}{\partial\varphi} + r\frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

Siqilmaydigan suyuqlik uchun

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(U_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

Sferik koordinatalarda

$$r2\, sin\varphi\frac{\partial\rho}{\partial t} + sin\varphi\frac{\partial(\rho U_r r2)}{\partial r} + r\frac{\partial(\rho U_\varphi\, sin\varphi)}{\partial\varphi} + r\frac{\partial\rho U_\theta}{\partial\theta} = 0 \tag{7}$$

Siqilmaydigan suyuqlik uchun

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(U_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r\, sin\varphi}\frac{\partial(U_\varphi\, sin\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\, sin\varphi}\frac{\partial\rho U_\theta}{\partial\theta} = 0 \tag{8}$$

1-masala. Agar zichlik o'zgarmas bo'lsa, Berilgan tezliklar maydoni silindrik koordinatalar sistemasida uzviylik tenglamasini qanoatlantirishini ko'rsating:

$$\vartheta_r = \frac{1-r^2}{r^2}\cos\theta,\ \vartheta_\theta = \frac{1+r^2}{r^2}\sin\theta,\ \vartheta_z = 0.$$

Yechish. Zichlik o'zgarmas bo'lganda silindrik koordinatalarda uzviylik tenglamasi quyidagicha bo'ladi

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(U_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$$

Tezlik komponentalarini bu tenglamaga olib borib qo'yamiz

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}-r\right)\cos\theta+\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r^2}+r^2\right)\sin\theta=\left(-\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r}\right)\cos\theta+\left(\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r}\right)\cos\theta=0$$

Demak berilgan tezliklar maydoni uzviylik tenglamasini qanoatlantirar ekan.

KUCHLANISH TENZORI VA KUCHLANISH VEKTORI

REJA

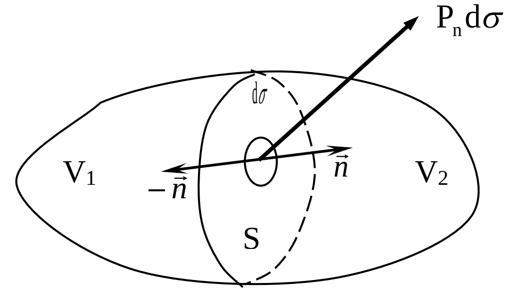
1. **BERILGAN YUZADA KUCHLANISH VEKTORI;**
2. **KUCHLANISH TENZORI.**

1-rasmda tasvirlangan $\vec{\mathrm{P}}_{\mathrm{n}}$ vektor kuchlanish vektori bo'ladi. Kuchlanish vektori uchun quyidagi formula o'rinli

$$\vec{\mathrm{P}}_{\mathrm{n}}=\vec{P}_1 n_1+\vec{P}_2 n_2+\vec{P}_3 n_3 \qquad (1)$$

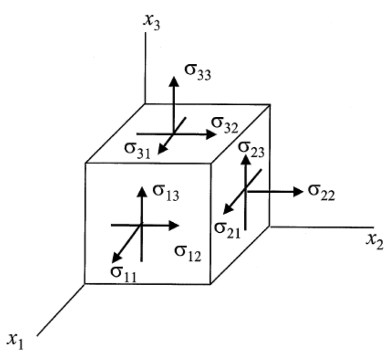
bunda n_i - byerilgan yuza normali yo'naltiruvchi kosinuslari; $\vec{P}_i$ - M nuqtaga qo'yilgan va koordinata o'qlariga parallel yo'nalgan kuchlanish vektorlari. $\vec{P}_i$ vektorlarni $\vec{e}_j$ bazislar bo'yicha yoyib chiqamiz.

$$\vec{P}_i=P_{ij}\vec{e}_j$$



1 - расм

Bundan



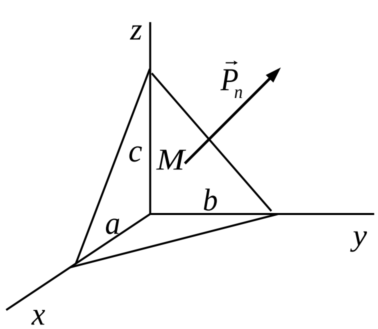
$$\begin{aligned}P_{n1}&=P_{11}n_1+P_{12}n_2+P_{13}n_3\\P_{n2}&=P_{21}n_1+P_{22}n_2+P_{23}n_3\\P_{n3}&=P_{31}n_1+P_{32}n_2+P_{33}n_3\end{aligned} \qquad (2)$$

P_{ij} miqdorlar majmuasi ikkinchi rang tenzorni tashkil qiladi va kuchlanish tenzori deb ataladi

$$P=\begin{pmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\P_{21}&P_{22}&P_{23}\\P_{31}&P_{32}&P_{33}\end{pmatrix} \qquad (3)$$

Ichki harakat miqdori momentlar va juftlar mavjud bo'lmagan holda kuchlanish tenzori simmyetrik bo'ladi va P_{11}, P_{22}, P_{33} lar x_1, x_2, x_3 koordinata o'qlariga pyerpyendikulyar yuzalardagi normal kuchlanishlar, $P_{12}=P_{21},\ \ P_{13}=P_{31}, P_{23}=P_{32}$ esa urinma kuchlanishlar deyiladi.

Masala. Tutash muhitning M nuqtasida P kuchlanish tenzori berilgan x, y, z koordinata o'qlarini koordinata boshidan mos ravishda a, b, c masofalarda kesib o'tuvchi yuzada kuchlanish vektorini, normal va urinma kuchlanishlarni, shuningdek kuchlanish tenzorining bosh qiymatlari va unga mos bosh yo'nalishlarini toping.



$$P=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-1&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \qquad a=4,\ b=6,\ c=2$$

Yechish. *Analitik geometriya kursidan ma'lumki, koordinata o'qlarini kesib o'tuvchi tekislik tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Ushbu tenglamaga berilganlarni qo'yib, uni kanonik ko'rinishga keltiramiz

$$3x + 2y + 6z - 12 = 0$$

Ko'rinib turibdiki berilgan tekislikka $\vec{N}(3,2,6)$ vektor perpendikulyar bo'ladi. Unga mos birlik vektori quyidagicha aniqlanadi

$$\vec{n} = \left(\frac{N_1}{N}, \frac{N_2}{N}, \frac{N_3}{N}\right)$$

va demak $\vec{n} = \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$

Endi (3) formulalar yordamida kuchlanish vektori komponentalarini topamiz

$$P_{n1} = 3.\frac{3}{7} - 1.\frac{2}{7} + 0.\frac{6}{7} = 1,\ P_{n2} = -1.\frac{3}{7} + 3.\frac{2}{7} + 0.\frac{6}{7} = \frac{3}{7},\ P_{n3} = 0.\frac{3}{7} + 0.\frac{2}{7} + 1.\frac{6}{7} = \frac{6}{7}.$$

$$\vec{P}_n = \left(1, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$$

Demak berilgan nuqtadan o'tuvchi yuzadagi kuchlanish vektorui topildi.

TOPSHIRIQLAR

Darsda 2.2, 2.3,2.5,2.7 [3], Uyga vazifa 9.7,9.8 [2]

Adabiyotlar

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
2. «Механика сплошной среды в примерах и задачах». Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979.
3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
4. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 310 с.
5. Механика сплошных сред в задачах. В двух томах. М.: «Московский лицей», 1996. Под ред. М.Э. Эглит.

KUCHLANISH TENZORINI ALMASHTIRISH

REJA

1. Bazis vektorlari;
2. Koordinatalarni markaz atrofida aylantirish;
3. Kuchlanish tenzori komponentalarini almashtirish.

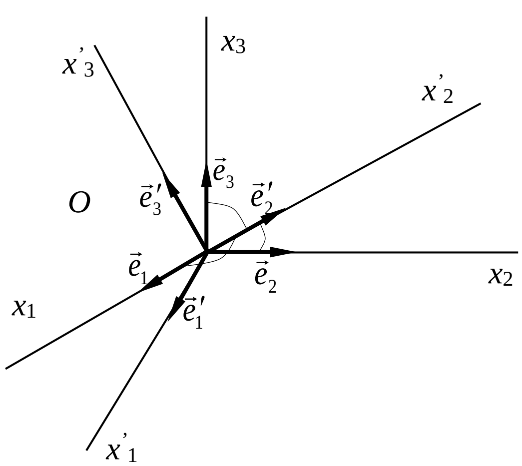
Koordinatalar sistemasini markazi atrofida burish natijasida yangi koordinatalar sistemasi hosil bo'ladi (1-chizma). Hosil bo'lgan koordinatalar sistemasining $\vec{e}_i'$ bazis vektorlarini eski $\vec{e}_j$ bazis vektorilari orqali quyidagicha ifodalash mumkin

$$\vec{e}_i' = \alpha_{ij}\vec{e}_j\,, \tag{1}$$

bu yerda α_{ij} yangi bazis vektorilarining eski bazis bilan tashkil qilgan burchaklari kosinuslari. Xuddi shunday eski bazislarni ham yangi bazislar orqali ifodalash mumkin

$$\vec{e}_i = \alpha_{ij}'\vec{e}_j'\,, \tag{2}$$

bu yerda α_{ij}' eski bazis vektorilarining yngi bazis bilan tashkil qilgan burchaklari kosinuslari.



1-chizma

Endi koordinatalarni almashtirganda kuchlanish tenzori komponentalarini almashtirishni qaraylik. Bu holda (P_{ij}) kuchlanish tenzorining komponentalari yangi koordinatalarda quyidagicha ifodalanadi

$$(P'_{ij}) = (\alpha_{ij})(P_{ij})(\alpha'_{ij}). \qquad (3)$$

Masala. $Ox_1x_2x_3$ Dekart koordinatalar sistemasida kuchlanish tenzori berilgan

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Almashtirish matritsasi quyidagicha bo'lgan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

koordinatalrni burish natijasida hosil bo'lgan $Ox'_1x'_2x'_3$, koordinatalarda kuchlanish tenzorini aniqlang.

Yechish. (3) formulaga ko'ra koordinatalarni burish natijasida hosil bo'lgan yangi koordinatalarda kuchlanish tenzori (3) formulaga ko'ra topiladi

$$[\sigma'_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & -1 \\ 2 & -1 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

TOPSHIRIQLAR

Darsda 2.11, 2.12 [3], Uyga vazifa 9.14 [2]

KUCHLANISH TENZORI SIRTI. KUCHLANISH TENZORINING SHARSIMON VA DEVIATR QISMLARI

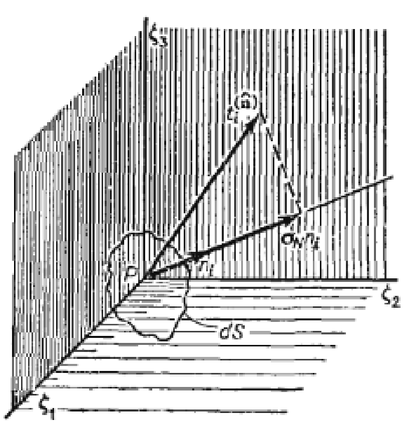
REJA

1. KUCHLANISH TENZORI SIRTI

2. Kuchlanishning sharsimon va deviatr qismlari.

Tutash muhitning P nuqtasidagi kuchlanish tenzorining Dekart koordinatalar sistemasining $P\xi_1\xi_2\xi_3$ o'qlariga parallel yo'nalishdagi komponentalari σ_{ij} bo'lsin.

$$\sigma_{ij}\xi_i\xi_j = \pm k^2 \qquad (k\text{-const}) \qquad (1)$$



tenglamaning geometrik ma'nosi P nuqta umumiy markazga ega bo'lgan ikkinchi tartibli o'xshash sirtlarni ifodalaydi. Tenglamdagi + yoki – ishoraning olinishi sirtning haqiqiyligini ifodalaydi. n_i birlik normal joylashgan maydonchada $t_i^{(\hat{n})}$ kuchlanish vektorini qaraymiz. $\hat{n}$ vektorning yo'nalishida r radius-vektor $\xi_i = rn_i$ komponentalarga ega. P nuqtadagi $t_i^{(\hat{n})}$ kuchlanish vektorining $\sigma_N n_i$ normal tashkil qiluvchilari

$$\sigma_N = t_i^{(\hat{n})}n_i = t^{(\hat{n})} \cdot n = \sigma_{ij}n_in_j. \qquad (2)$$

qiymatga ega.

$$\sigma_N r^2 = const = \pm k^2$$

ya’ni

$$\sigma_{ij}\xi_i\xi_j = \sigma_N r^2 = \pm k^2. \qquad (3)$$

Geometrik nuqtalar o’rni ***Koshi kuchlanishining sirti*** deyiladi ***(Koshi kvadrati deyiladi)***. Bu tarifdan, dS maydonchadagi kuchlanishning vektorlarining P nuqtadagi r radius vektoriga perpendikulyar bo’lgan σ_N qiymati r vektor bo’ylab P nuqtadan Koshi kuchlanishi sirtigacha bo’lgan masofaning kvadratiga teskari proporsianal ekanligi kelib chiqadi, ya’ni $\sigma_N = \pm k^2 / r^2$, bundan tashqari dS maydonchadagi kuchlanish vektorining radius-vektori $t_i^{(\hat{n})}$ radiusi r bo’lgan Koshi kuchlanish sirtining nuqtasiga o’tkazilgan urinma tekislikning narmaliga parallel bo’lishini ko’rsatish mumkin.

Umumiy holda kuchlanish tenzori sharsimon va deviator qismlarga quyidagi formula bo’yicha ajratiladi

$$T_{ij} = T_{ij}^{shar} + T_{ij}^{dev}, \qquad T_{ij}^{shar} = \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33})\delta_{ij}, \quad T_{ij}^{dev} = T_{ij} - T_{ij}^{shar}. \qquad (4)$$

1-Masala. Quyidagi kuchlanganlik holatlari uchun kuchlanish tenzori sirtini toping

a) hamma tomonlama tekis kengayish

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0;$$

b) bir o’qli cho’zilish (siqilish)

$$\sigma_{11} = \sigma, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0;$$

c) sof siljish

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0;$$

d) tekis kuchlangan holat

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau, \quad \sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = 0.$$

Yechish. a) (1) formulaga ko’ra

$$[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3]\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \sigma\zeta_1^2 + \sigma\zeta_2^2 + \sigma\zeta_3^2 = \pm k^2.$$

Demak hamma tomonlama tekish kengayishda kuchlanish tenzori sirti quyidagi sferadan iborat bo’lar ekan

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = \pm k^2/\sigma.$$

2-Masala. Quyodagi kuchlanish tenzorini sharsimon va deviatr qismlarga ajrating

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Yechish. (4)ga ko’ra kuchlanish tenzorining sharsimon qismi quyidagicha topiladi

$$\sigma_M = \sigma_{kk}/3 = (12 + 9 + 3)/3 = 8;$$

Bundan esa

$$\sigma_{ij} = \sigma_M\delta_{ij} + s_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

3-Masala. Kuchlanish tenzorining deviatr qismi sof siljishning beshta holi superpozitsiyasidan iboratligini ko’rsating.

Yechish. Deviatrni quyidagi qismlarga ajratamiz

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & 0 \\ s_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{23} \\ 0 & s_{32} & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -s_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_{33} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{pmatrix},$$

Qo’shiluvchilarning har biri sof siljishning biror holini ifodalaydi.

TOPSHIRIQLAR

Darsda 2.12,2.29 [3],
Uygavazifa2.13,2.14 [3]

Adabiyotlar

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
2. «Механика сплошной среды в примерах и задачах». Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
4. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 310 с.
5. Механика сплошных сред в задачах. В двух томах. М.: «Московский лицей», 1996. Под ред. М.Э. Эглит.

KUCHLANISH TENZORINING INVARIANTLARI, BOSH QIYMATLARI VA BOSH YO’NALISHLARI

REJA

1. KUCHLANISH TENZORINING INVARIANTLARI

2. Bosh kuchlanish va bosh deformatsiyalar

Bizga ma’lumki koordinatalar sistemasini almashtirishda o’zgarmasdan qoladigan parametrlarga invariantlar deyiladi. Kuchlanish tenzorlarida bunday parametrlar uchta bo’lib, ular quyidagicha aniqlanadi

$$I_1 = p_\alpha^\alpha,\ I_2 = \begin{vmatrix} p_2^2 & p_2^3 \\ p_3^2 & p_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_3^3 & p_3^1 \\ p_1^3 & p_1^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1^1 & p_1^2 \\ p_2^1 & p_2^2 \end{vmatrix},\ I_3 = Det\left\| p_k^i \right\|. \qquad (1)$$

Koordinatalarni burish natijasida ba’zi kuchlanish tenzori komponentalarini faqat diagonal ko’rinishga keltirish mumkin. Bu diagonaldagi komponentalar quyidagi tenglamaning ildizlaridan iborat bo’ladi

$$\begin{vmatrix} P_{11}-\lambda & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22}-\lambda & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Bu tenglama yechimlari kuchlanish tenzorining bosh qiymatlari (komponentalari) deyiladi.

Agar (1) tenglamadagu determinantni yoyib yozsak quyidagi tenglamani hosil qilamiz

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \qquad (3)$$

Bu yerda I_1, I_2, I_3 kuchlanish tenzori invariantlari.

Koordinatalarni burish natijasida hosil bo’lgan yangi koordinata o’qlarining eski koordinata o’qlari bilan tashkil qilgan burchaklarining kosinuslari esa bosh yo’nalishlar (koordinatalar) deyiladi.

Bosh yo’nalishlar quyidagi tenglamalardan topiladi

$$\begin{aligned}&(P_{11}-\lambda)n_1+P_{12}n_2+P_{13}n_3=0\\&P_{21}n_1+(P_{22}-\lambda)n_2+P_{23}n_3=0\\&P_{31}n_1+P_{32}n_2+(P_{33}-\lambda)n_3=0\\&n_1^2+n_2^2+n_3^2=1\end{aligned} \qquad (4)$$

Masala. Tutash muhitning M nuqtasida P kuchlanish tenzori berilgan. Kuchlanish tenzorining bosh qiymatlari va unga mos bosh yo'nalishlarini, hamda invariantlarini toping.

$$P=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Yechish. (7) formula yordamida berilgan kuchlanish tenzorining bosh qiymatlarini topamiz

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 3-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Bu tenglama yechimlari $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=4$

Demak kuchlanish tenzorini almashtirirsh natijasida hosil bo'lgan tenzorning diagonal komponentalari 1, 2, 4 dan iborat. Qolgan komponentalar esa) ga teng.

Yuqoridagi tenglamada determinantni yoyib chiqib quyidagi tenglamani hosil qilamiz

$$\lambda^3-7\lambda^2+14\lambda-8=0.$$

(3) ga kora kuchlanish tenzorining invariantlari

$$I_1=7,\ I_2=14,\ I_3=8.$$

Topilgan bosh qiymatlarga mos bosh yo'nalishlar (o'qlar) ni topamiz

$\lambda_1=1$ uchun

$$\begin{cases}2\mathrm{n}_1-n_2=0\\ -n_1+2n_2=0\\ n_1^2+n_2^2+n_3^2=1\end{cases} \Rightarrow \vec{n}=(0,0,\pm1)$$

$\lambda_2=2$ uchun

$$\begin{cases}\mathrm{n}_1-n_2=0\\ -n_1+n_2=0\\ -n_3=0\\ n_1^2+n_2^2+n_3^2=1\end{cases} \Rightarrow \vec{n}=\left(\pm\frac{\sqrt2}{2},\pm\frac{\sqrt2}{2},0\right)$$

$\lambda_3=4$ uchun

$$\begin{cases}\text{-}\,\mathrm{n}_1-n_2=0\\ -n_1-n_2=0\\ -3n_3=0\\ n_1^2+n_2^2+n_3^2=1\end{cases} \Rightarrow \vec{n}=\left(\pm\frac{\sqrt2}{2},\mp\frac{\sqrt2}{2},0\right)$$

Masalada topish so'ralganlar topildi.

TOPSHIRIQLAR

Darsda 2.15,2.17,2.19 [3],
Uygavazifa 2.16,2.18,2.20 [3]

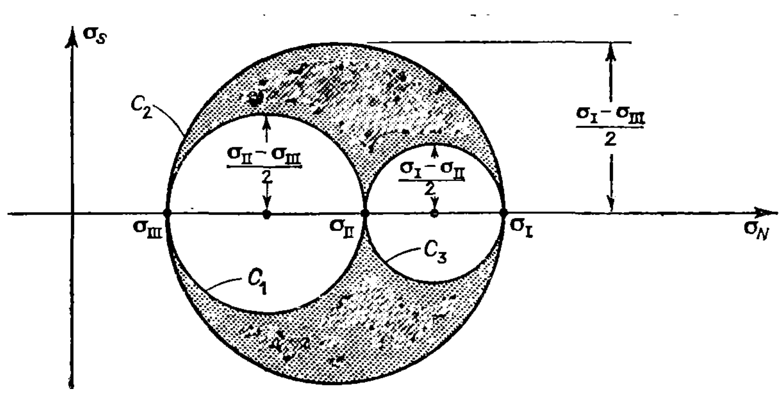
Adabiyotlar

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
2. «Механика сплошной среды в примерах и задачах». Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
4. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 310 с.
5. Механика сплошных сред в задачах. В двух томах. М.: «Московский лицей», 1996. Под ред. М.Э. Эглит.

MAKSIMAL VA MINIMAL URINMA KUCHLANISHLAR. MOR DOIRASI

Kuchlanish tenzorining bosh qiymatlari uchun $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ munosabat o'rinli bo'lsin. U holda radiuslari quyidagilardan iborat bo'lgan doiralarni chizamiz

$$C_1 = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}; \quad C_2 = \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}; \quad C_3 = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}. \qquad (1)$$



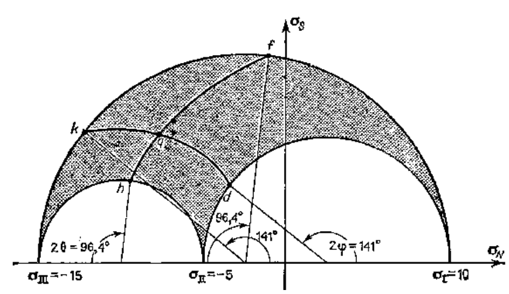
Chizmadan ko'rinadiki, doiralar urinish nuqtasida urinma kuchlanish minimal qiymatga erishadi. Eng katta doiraning yuqori nuqtasida esa maksimal qiymatga erishadi.

Masala. Biror nuqtadagi kuchlangalik holat $Ox_1x_2x_3$ koordinatalar sistemasida quyidagicha berilgan. Normali $\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$ bo'lgan yuzadagi kuchlanish vektori komponentalarini toping. Olingan natijalarni Mor doirasi yordamida tekshiring

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Kuchlanish vektori komponentalarini topish formulasiga ko'ra quyidagini topamiz

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10/3 \\ -10 \\ -10/3 \end{bmatrix}.$$



Demak kuchlanish vektori $\vec{P}_n = \left(-\frac{10}{3}; -10; -\frac{10}{3}\right)$.

Normal kuchlanish $\sigma_N = -\frac{70}{9}$,

Urinma kuchlanish $\sigma_N = \frac{70,7}{9}$.

Berilgan kuchlanish tenzori

uchun bosh kuchlanishlar $\sigma_I = 10,\ \sigma_{II} = -5,\ \sigma_{III} = -15,$

Yangi va eski koordinatalar orasidagi bog'lanish

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	0	$-3/5$	$4/5$
x_2^*	1	0	0
x_3^*	0	$4/5$	$3/5$

TOPSHIRIQLAR

Darsda 2.24, 2.47 [3],

Uyga vazifa 2.26,2.48 [3]

Adabiyotlar

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
2. «Механика сплошной среды в примерах и задачах». Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
4. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 310 с.
5. Механика сплошных сред в задачах. В двух томах. М.: «Московский лицей», 1996. Под ред. М.Э. Эглит.

TUTASH MUHIT HARAKAT MIQDORI TENGLAMASI

REJA

1. **TM HARAKAT MIQDORI TENGLAMASI;**
2. **HARAKAT MIQDORI TENLAMASIGA DOIR MASALALAR**

Σ sirt bilan chegaralangan tutash muhitning chekli individual V hajmi uchun umumlashtiramiz. Ushbu

$$\int_V \frac{d}{dt}(\vec{v}\rho d\tau) = \int_M \frac{d\vec{v}}{dt}dm = \frac{d}{dt}\int_M \vec{v}dm = \frac{d}{dt}\int_V \vec{v}\rho d\tau$$

munosabat o'rinli bo'lganligi uchun quyidagi ifoda

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \vec{F}\rho dr + \int_\Sigma \vec{p}_n \rho d\tau, \text{ bu yerda } \left(\vec{Q} = \int_V \vec{v}\rho d\tau\right)$$

ta'rifga ko'ra V hajmni egallagan tutash muhitning harakat miqdorini ifodalaydi.

$$\int_V \vec{F}\rho d\tau \quad va \quad \int_\Sigma \vec{P}_n d\tau$$

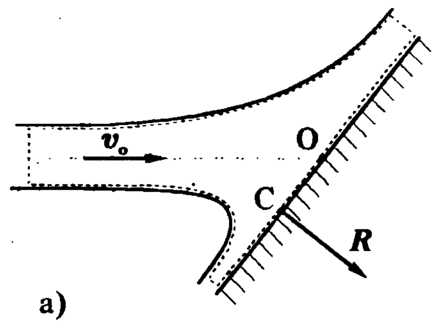
lar esa mos ravishda *Vhajmdagi muhitga ta'sir qiluvchi tashqi massaviy va sirt kuchlari yig'indilari.*

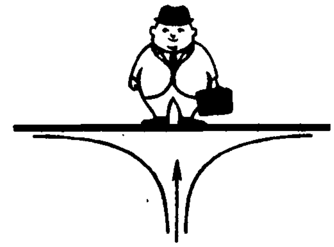
Shunday qilib *tutash muhitning ixtiyoriy hajm uchun inersial koordinatalar sistemasiga nisbatan harakat miqdori tenglamalarini* yozish mumkin

$$\frac{d}{dt}\int_V \vec{v}\rho dr = \int_V \vec{F}\rho d\tau + \int_\Sigma \vec{p}_n d\sigma, \tag{1}$$

ya'niVhajmdagi tutash muhitining harakat miqdoridan vaqt boyicha olingan hosila unga tasir qiluvchi barcha tashqi massaviy va sirt kuchlari yig'indisiga teng.

Masala.





TOPSHIRIQLAR

Darsda 2.15,2.17,2.19 [3],

Uygavazifa 2.16,2.18,2.20 [3]

Adabiyotlar

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
2. «Механика сплошной среды в примерах и задачах». Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.

HOLAT TENGLAMALARI

Ideal siqiluvchan suyuqlik uchun holat tenglamasi (Mendeleyev-Klapeyron tenglamasi)

$$\mathrm{pV} = \frac{m}{\mu} RT \tag{1}$$

m - gaz massasi, μ - bir kilomol (kmol) gaz massasi, $R = 8{,}31.10^3 \dfrac{Ж}{кмоль.K}$ - universal gaz doimiysi.

Masala Hajmi *1,5.10³ см³* bo’lgan kolbadagi gazning bosimini *1.10⁵ Па* dan *10 Па* gacha o’zgartirish uchun ishlash tezligi $180\dfrac{см^3}{с}$ bo’lgan nasos yordamida gaz so’rib olinadi yoki quyiladi. Buning uchun nasos qancha vaqt ishlashi kerak? Temperatura o’zgarmas deb olinsin.

Yechish Masalani yechish uchun Mendeleyev-Klapeyron tenglamasidan foydalanamiz. Havo so’rib olinmasdan oldingi holat uchun

$$1.10^5\,Па.1{,}5.10^3\,см^3 = \frac{m}{\mu} RT$$

Keyingi holat uchun $m = \rho V$ formuladan foydalanamiz

$$10Па.1{,}5.10^3\,см^3 = \frac{\rho\left(1{,}5.10^3\,см^3 - 180\,см^3/с.t\right)}{\mu} RT$$

Ikkala holat uchun ham hajm bir xil bo’lgani uchun ularni tenglaymiz

$$\frac{1{,}5.10^3\,см^3}{10^5} = \frac{1{,}5.10^3\,см^3 - 180\,см^3/с.t}{10} \qquad t = 8с$$

TOPSHIRIQLAR Darsda 6.13,6.14,6.18 [2], Uyga vazifa 6.16, 6.19 [2]

Adabiyotlar

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
2. «Механика сплошной среды в примерах и задачах». Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
4. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 310 с.
5. Механика сплошных сред в задачах. В двух томах. М.: «Московский лицей», 1996. Под ред. М.Э. Эглит.

VAN-DER-VAALS TENGLAMASIGA DOIR MASALALAR

Bir mol miqdordagi real gaz holat tenglamasi (Ван-дер-Ваальстенгламаси)

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT \qquad (1)$$

bu yerda a va b - molekulalar orasidagi tortishish va itarish kuchlarini ifodalovchi o'zgarmaslar.

1. Изотерма $\quad f\left(p,V,T=const\right)=0 \qquad (3)$

Изобара $\quad f\left(p=const,V,T\right)=0 \qquad (4)$

Изохора $\quad f\left(p,V=const,T\right)=0 \qquad (5)$

<u>Масала</u> 280 g azot bilan to'ldirilgan, hajmi $1m^3$ va $5\cdot 10^{-4}\,m^3$, harorati $300K$ bo'lgan idishdagi bosimni aniqlang Azot uchun Van-der-Vaals o'zgarmaslari $a=1{,}36\cdot 10^5\,N\cdot m^4/kmol^2$, $b=3{,}85\cdot 10^{-2}\,m^3/kmol$.

<u>Ечиш</u> .

BERILGANLAR

$m=280g=0{,}28kg;\;\; V_1=1\frac{kg}{m^3};\; a=1{,}36\cdot 10^5\,N\cdot m^4/kmol^2,\; b=3{,}85\cdot 10^{-2}\,m^3/kmol;$

$R=8{,}31\cdot 10^3\,\frac{J}{kmol\cdot K};\; T=300K.$

Masalani yechish uchun Van-der-Vaals tenglamasidan foydalanamiz

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$$

$$\left(p+\frac{1{,}36\cdot 10^5\,\frac{N\cdot m^4}{kmol^2}}{1\frac{m^6}{kmol^2}}\right)\left(1\frac{m^3}{kmol}-3{,}85\frac{m^3}{kmol}\right)=8{,}31\cdot 10^3\,\frac{J}{kmol\cdot K}300K$$

$$\left(p+\frac{1{,}36\cdot 10^5\,\frac{N\cdot m^4}{kmol^2}}{1\frac{m^6}{kmol^2}}\right)=\frac{8{,}31\cdot 10^3\,\frac{J}{kmol\cdot K}300K}{\left(1\frac{m^3}{kmol}-3{,}85\frac{m^3}{kmol}\right)}$$

$$p=\frac{8{,}31\cdot 10^3\,\frac{J}{kmol\cdot K}300K}{\left(1\frac{m^3}{kmol}-3{,}85\frac{m^3}{kmol}\right)}-\frac{1{,}36\cdot 10^5\,\frac{N\cdot m^4}{kmol^2}}{1\frac{m^6}{kmol^2}}=2364\cdot 10^3\,Pa$$

Nazorat uchun savollar

1. Yuqoridagi masalani Mendeleyev-Klapeyron tenglamasidan foydalanib yeching va natijalarni taqqoslang?
2. Ikki xil hajmlar uchun olingan natijalarni taqqoslang?

TOPSHIRIQLAR Darsda 6.25, 6,27[3], Uyga vazifa 6.26 [3]

Adabiyotlar

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
2. «Механика сплошной среды в примерах и задачах». Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.

3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
4. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 310 с.
5. Механика сплошных сред в задачах. В двух томах. М.: «Московский лицей», 1996. Под ред. М.Э. Эглит.

IZOJARAYONLAR

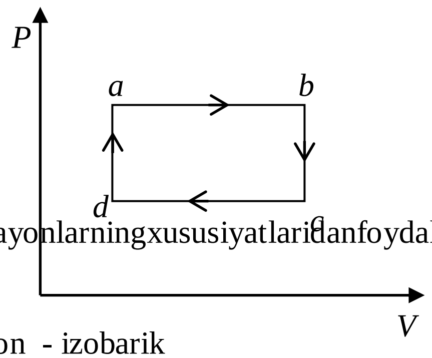
Izojarayonlarni tavsiflovchi tenglamalar quyidagicha bo’ladi

Изотерма $$f\left(p,V,T=const\right)=0 \qquad (1)$$

Изобара $$f\left(p=const,V,T\right)=0 \qquad (2)$$

Изохора $$f\left(p,V=const,T\right)=0 \qquad (3)$$

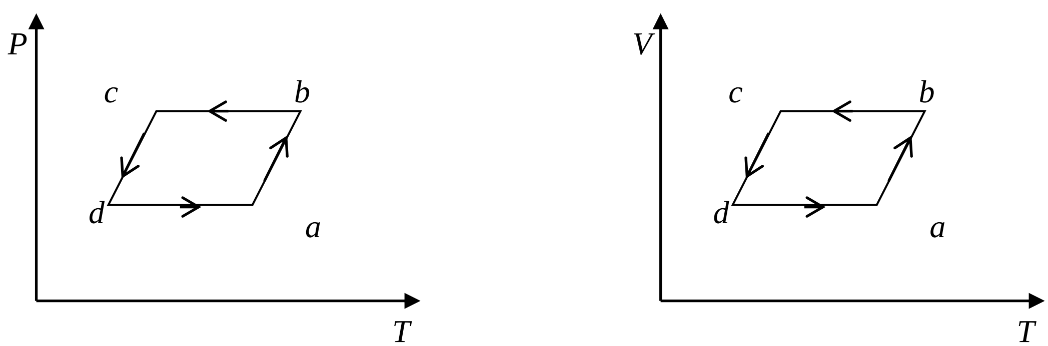
Masala. 6.35[3]. Chizmada tasvirlangan gaz holati o’zgarishi grafigini (P,T) va (V,T) koordinatalarida tasvirlang.



Yechish. Berilganizojarayonlarningxususiyatlaridanfoydalanib (P,T) va (V,T) koordinatalardaifodalaymiz.

a→bjarayon - izobarik
b→c jarayon - izoxorik
c→d jarayon - izobarik
d→a jarayon - izoxorik.

Bulardan esa



TOPSHIRIQLAR

Darsda 6.36, 6,30[3], Uyga vazifa 6.37[3]

Nazorat uchun savollar

1. Izotermik jarayon?
2. Izobarik jarayon?
3. Izoxorik jarayon?
4. Adiabatik jarayon?
5. Politrop jarayonlar?

6. Qaytar va qaytmas jarayonlar?

Adabiyotlar

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
2. «Механика сплошной среды в примерах и задачах». Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
4. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 310 с.
5. Механика сплошных сред в задачах. В двух томах. М.: «Московский лицей»1996. Под ред. М.Э. Эглит.

O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA FAKULTETI

«MATEMATIK MODELLASHTIRISH» KAFEDRASI

2. «TUTASH MUHITLAR MEXANIKASI» FANINING MUSTAQIL TA’LIM MASHG’ULOTLARI MATERIALLARI

«5130200 – Amaliy matematika va informatika» ta’lim yo’nalishi 3 kurs talabalari uchun

Samarqand – 2019

1-MUSTAQIL ISH
Mavzu: Koordinatalarni almashtirish

Maqsad: Talabalarga koordinatalarni almashtitrish va ular orasidagi munosabatlarni chuqurroq o’rgatish. Topshiriqlar orqali ularning bilimini sinash.

REJA:

1. Koordinatalar sistemasi, bazis vektorlari, radius vektor;
2. Koordinatalarni burish;
3. Yangi va eski koordinatalar orasidagi o’zaro munosabat.

Asosiy tushunchalar

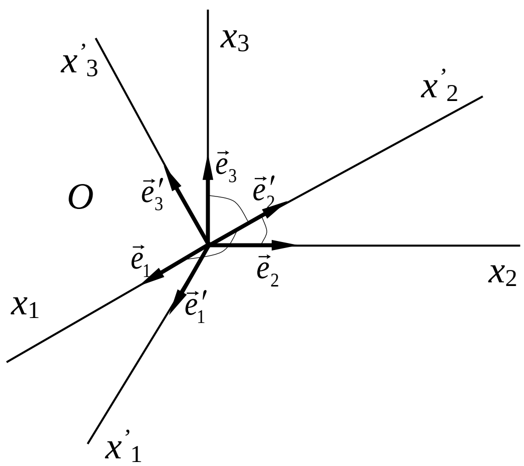
Koordinatalar sistemasini biror burchakka burish natijasida yangi koordinatalar sistemasi hosil bo’ladi (1-chizma*). Hosil bo’lgan koordinatalar sistemasining $\vec{e}_i'$ bazis vektorlarini eski $\vec{e}_j$ bazis vektorilari orqali quyidagicha ifodalash mumkin

$$\vec{e}_i' = \alpha_{ij}\vec{e}_j\,, \tag{1}$$

bu yerda α_{ij} yangi bazis vektorilarining eski bazis bilan tashkil qilgan burchaklari kosinuslari. Xuddi shunday eski bazislarni ham yangi bazislar orqali ifodalash mumkin

$$\vec{e}_i = \alpha_{ij}'\vec{e}_j'\,, \tag{2}$$

bu yerda α_{ij}' eski bazis vektorilarining yngi bazis bilan tashkil qilgan burchaklari kosinuslari.



1-chizma

Masala. $Ox_1'x_2'x_3'$ va $Ox_1x_2x_3$ koordinatalar sistemasini orasidagi bog’lanish munosabat bog’lovchi koordinat almashtirishlar quyidagi jadval shaklida berilgan:

5. Ortogonallik sharti bajarilishini ko’rsating.
6. Berilgan $A(1,2,4)$ nuqtaning shtrixli koordinatalar sistemasidagi koordinatalarini aniqlang.
7. $a(a_1,a_2,a_3)$ vektorni shtrixli koordinatalar sistemasida ifodalang.
8. $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik tenglamasini shtrixli koordinatalar sistemasida ifodalang.

	X_1	X_2	X_3
X_1'	$-\dfrac{3}{5\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$-\dfrac{4}{5\sqrt{2}}$
X_2'	$\dfrac{4}{5}$	0	$-\dfrac{3}{5}$
X_3'	$\dfrac{3}{5\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{4}{5\sqrt{2}}$

Yechish

3. Ortogonallikni ixtiyoriy satr(ustun)ning komponentalarini boshqa ixtiyoriy satr(ustun)ning mos komponentalariga ko’paytmalari yig;indisi nolga tengligidan topamiz

$$-\frac{3}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{4}{5}\cdot 0+\frac{3}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=0;$$

$$-\frac{3}{5\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)+\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{3}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{5\sqrt{2}}=0;$$

$$-\frac{3}{5\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{4}{5}\cdot 0+\frac{3}{5\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=0;$$

$$-\frac{3}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{5\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{4}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{5\sqrt{2}}=0.$$

Demak ortogonallik sharti bajarilar ekan.

4. Shtrixli koordinatalar sistemasida A nuqtaning koordinatalarini topamiz

$$x_1' = -\frac{3}{2\sqrt{5}}\cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2 - \frac{4}{5\sqrt{2}}\cdot 4 = -\frac{23}{5\sqrt{2}};$$
$$x_2' = -\frac{4}{5}\cdot 1 + 0\cdot 2 - \frac{3}{5}\cdot 4 = -\frac{16}{5};$$
$$x_3' = \frac{3}{2\sqrt{5}}\cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2 + \frac{4}{5\sqrt{2}}\cdot 4 = \frac{19+\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}.$$

Demak, shtrixlikoordinatalarsistemasida $A\left(-\frac{23}{5\sqrt{2}}, -\frac{16}{5}, \frac{19+\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}\right)$.

3. Tekisliktenglamasinishtrixlikoordinatalardaifodalaymiz

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = A\left(-\frac{3}{5\sqrt{2}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' - \frac{4}{5\sqrt{2}}x_3'\right) + B\left(\frac{4}{5}x_1' - \frac{3}{5}x_3'\right) +$$
$$+C\left(\frac{3}{5\sqrt{2}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' + \frac{4}{5\sqrt{2}}x_3'\right) + D = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\left(-\frac{3A}{5\sqrt{2}} + \frac{4B}{5} + \frac{3C}{5\sqrt{2}}\right)x_2' + \left(\frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{C}{\sqrt{2}}\right)x_2' + \left(-\frac{4A}{5\sqrt{2}} - \frac{3B}{5} + \frac{4C}{5\sqrt{2}}\right)x_3' + D = 0$$

1-MUSTAQIL ISH TOPSHIRIQLARI

$Ox_1'x_2'x_3'$ va $Ox_1x_2x_3$ koordinatalar sistemasini bog'lovchi koordinat almashtirishlar quyidagi jadval shaklida berilgan:

1. Ortogonallik sharti bajarilishini ko'rsating.
2. Berilgan $A(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning har ikkala koordinatalar sistemasida radius vektorini aniqlang.
3. $a(a_1, a_2, a_3)$ vektorni shtrixli koordinatalar sistemasida ifodalang.
4. $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik tenglamasini shtrixli koordinatalar sistemasida ifodalang.

1-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x_2'	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3'	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$

2-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	*0*
x_2'	0	0	*1*
x_3'	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	*0*

3-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2'	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
x_3'	0	0	1

4-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x_2'	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3'	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$

5-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_2'	1	0	0
x_3'	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

6-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2'	0	0	1
x_3'	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0

7-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x_2'	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3'	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$

8-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0
x_2'	0	0	1
x_3'	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0

9-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2'	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
x_3'	0	0	1

10-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x_2'	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3'	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$

11-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_2'	1	0	0
x_3'	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

12-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2'	0	0	1
x_3'	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0

13-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x_2'	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3'	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$

14-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0
x_2'	0	0	1
x_3'	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0

15-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

x_2’	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
x_3’	0	0	1

16-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1’	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x_2’	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3’	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$

17-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1’	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_2’	1	0	0
x_3’	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

18-variant

	x_1	x_2	x_3
$_1$’	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2’	0	0	1
x_3’	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0

19-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1’	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x_2’	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3’	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$

20-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1’	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0
x_2’	0	0	1
x_3’	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0

21-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1’	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2’	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
x_3’	0	0	1

22-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1’	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x_2’	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3’	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$

23-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1’	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_2’	1	0	0
x_3’	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

24-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1’	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2’	0	0	1
x_3’	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0

25-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1’	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2’	$-\frac{2}{3}$	0	0
x_3’	0	$-\frac{1}{3}$	1

26-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1’	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x_2’	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
X_3’	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$

Adabiyotlar

1. «Механика сплошной среды в примерах и задачах» У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
2. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
4. М.А.Акивес, В.В. Гольдберг. Тензорное исчисление. -М.:Изд. Наука.1972.

2 – MUSTAQIL ISH Mavzu: Tenzorlar va ular ustida amallar

Maqsad: Talabalarda tenzorlar ustida amallarni bajarish ko'nikmalarini shakllantirish. Mavzu bo'yicha masala yechish orqali ularning bilimini mustahkamlash va bilimini sinash.

REJA:

1. Tenzor va uning komponentalari;
2. Tenzorni simmetrik va antisimmetrik qismlarga ajratish;
3. Tenzorning sharsimon va deviatr qismlari;
4. Tenzorning bosh qiymatlari va bosh yo'nalishlari.

Asosiy tushunchalar

Komponentalariquyidagichaaniqlanuvchiob'ektgatenzordeyiladi

$$T=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}=T_{11}\vec{\mathrm{Э}}^1\vec{\mathrm{Э}}^1+T_{12}\vec{\mathrm{Э}}^1\vec{\mathrm{Э}}^2+T_{13}\vec{\mathrm{Э}}^1\vec{\mathrm{Э}}^3+T_{21}\vec{\mathrm{Э}}^2\vec{\mathrm{Э}}^1+T_{22}\vec{\mathrm{Э}}^2\vec{\mathrm{Э}}^2+T_{23}\vec{\mathrm{Э}}^2\vec{\mathrm{Э}}^3+T_{31}\vec{\mathrm{Э}}^3\vec{\mathrm{Э}}^1+T_{32}\vec{\mathrm{Э}}^3\vec{\mathrm{Э}}^2+T_{33}\vec{\mathrm{Э}}^3\vec{\mathrm{Э}}^3. \quad (1)$$

Agar bu tenzor uchun $T_{ij}=T_{ji}$ shart bajarilsa simmetrik, $T_{ij}=-T_{ji}$ shart bajarilsa antisimmetrik deyiladi.

Tenzor simmetrik va antisimmetrik qismlarga quyidagicha ajratiladi

$$T_{ij}=T_{ij}^{sim}+T_{ij}^{antisim}, \qquad T_{ij}^{sim}=\frac{1}{2}\left(T_{ij}+T_{ji}\right), \qquad T_{ij}^{antisim}=\frac{1}{2}\left(T_{ij}-T_{ji}\right). \quad (2)$$

Umumiy holda tenzor sharsimon va deviator qismlarga quyidagi formula bo'yicha ajratiladi

$$T_{ij}=T_{ij}^{shar}+T_{ij}^{dev}, \qquad T_{ij}^{shar}=\frac{1}{3}\left(T_{11}+T_{22}+T_{33}\right)\delta_{ij}, \quad T_{ij}^{dev}=T_{ij}-T_{ij}^{shar}. \quad (3)$$

Tenzorning bosh qiymatlari (komponentalari) quyidagi tenglamadan topiladi

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0. \quad (4)$$

Bosh qiymatlarga mos bosh yo'nalishlar esa quyidagi tenglamalardan topiladi

$$\begin{aligned} &\left(T_{11}-\lambda\right)n_1+T_{12}n_2+T_{13}n_3=0; \\ &T_{21}n_1+\left(T_{22}-\lambda\right)n_2+T_{23}n_3=0; \\ &T_{31}n_1+T_{32}n_2+\left(T_{33}-\lambda\right)n_3=0; \\ &n_1^2+n_2^2+n_3^2=1. \end{aligned} \quad (5)$$

Tenzor sirti esa quyidagi tenglamadan aniqlanadi

$$T_{ij}x_ix_j=\pm c^2. \quad (6)$$

<u>Masala.</u> $T=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ tenzor uchun quyidagilarni aniqlang

1. Tenzornimatritsashaklidabo'lsa, univektorshaklidavaaksinchayozing;
2. Tenzornisimmetrikvaantisimmetriktenzorlargaajratingvaularningyig'indisidaniboratekanliginiko'rsating;
3. Tenzorning bosh komponentalarini toping;

4. Tenzorning bosh o’qlarini toping;
5. Tenzorni sharsimon va deviator qismlariga ajrating;
6. Tenzor sirti tenglamasini va shaklini toping.

Yechish. 1. Tenzorni vektor ko’rinishga o’tkazamiz

$$T = 4\vec{э}^1\vec{э}^1 + 6\vec{э}^1\vec{э}^2 + 3\vec{э}^1\vec{э}^3 + 3\vec{э}^2\vec{э}^1 + 4\vec{э}^2\vec{э}^2 + \vec{э}^3\vec{э}^1 + 4\vec{э}^3\vec{э}^3;$$

2. Simmetrik va antisimmetrik qismlarga ajratamiz va ularning yig’indisi sifatida ifodalaymiz

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 4{,}5 & 2 \\ 4{,}5 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{simmetrik} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 1 \\ -1{,}5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{antisimmetrik};$$

3. Tenzorning sharsimon va deviator qismlari

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{sharsimon} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{deviator}.$$

4. Tenzorning bosh komponentalarini topish uchun

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 3 \\ 3 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

tenglamani yechamiz. Bu kubik tenglamaga keladi

$$(4-\lambda)^3 - 3(4-\lambda) - 18(4-\lambda) = 0,$$

$$(4-\lambda)\left((4-\lambda)^2 - 21\right) = 0,$$

Uning ildizlari $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 4 + \sqrt{21}, \quad \lambda_3 = 4 - \sqrt{21}.$

5. Bosh qiymatlarga mos bosh yo’nalishlarni topish uchun esa quyidagi tenglamalarni yechamiz

$\lambda = 4$ uchun $\qquad \lambda = 4 + \sqrt{21}$ uchun $\qquad \lambda = 4 - \sqrt{21}$ uchun

$$\begin{cases} 6n_2 + 3n_3 = 0; \\ 3n_1 = 0; \\ n_1 = 0; \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 0; \\ n_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}; \\ n_3 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}. \end{cases} \quad \begin{cases} -\sqrt{21}n_1 + 6n_2 + 3n_3 = 0; \\ 3n_1 - \sqrt{21}n_2 = 0; \\ n_1 - \sqrt{21}n_3 = 0; \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = \pm\sqrt{\dfrac{21}{31}}; \\ n_2 = \pm\dfrac{3}{\sqrt{31}}; \\ n_3 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{31}}. \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{21}n_1 + 6n_2 + 3n_3 = 0; \\ 3n_1 + \sqrt{21}n_2 = 0; \\ n_1 + \sqrt{21}n_3 = 0; \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = \pm\sqrt{\dfrac{21}{31}}; \\ n_2 = \mp\dfrac{3}{\sqrt{31}}; \\ n_3 = \mp\dfrac{1}{\sqrt{31}}. \end{cases}$$

6. Tenzor sirtini topamiz

$$T_{ij}x_i x_j = 4x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_1x_3 + 3x_2x_1 + 4x_2^2 + 0\cdot x_1x_3 + x_3x_1 + 0\cdot x_3x_2 + 4x_3^2 = \pm c^2$$

yoki $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 9x_1x_2 + 4x_1x_3 = \pm c^2.$

Demaktenzorsirtiyuqoridagitenglamabilanifodalanuvchiellipsoiddaniboratekan.

2-MUSTAQIL ISH TOPSHIRIQLARI

1. Tenzornimatritsashaklidabo’lsa, univektorshaklidavaaksinchayozing.
2. Tenzorni simmetrik va antisimmetrik tenzorlarga ajrating.
3. Tenzorning simmetrik va antisimmetrik tenzorlari yig’indisidan iborat ekanligini ko’rsating.
4. Tenzorning bosh komponentalarini toping.
5. Tenzorning bosh o’qlarini toping.
6. Tenzorni sharsimon va deviator qismlariga ajrating.
7. Tenzor sirtini va shaklini aniqlang.

1-variant $(T^{ij})=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

2-variant $(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3-variant

$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

4-variant $(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 12 & 13 \end{pmatrix}$

5-variant

$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 9 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

6-variant

$A = 2\,\vec{э}^1\vec{э}^1 + 3\,\vec{э}^1\vec{э}^2 + 5\,\vec{э}^2\vec{э}^2 + 6\,\vec{э}^3\vec{э}^1 +$
$+ 4\,\vec{э}^3\vec{э}^2 + \vec{э}^3\vec{э}^3$

7-variant

$A = 4\,\vec{э}^1\vec{э}^1 + 2\,\vec{э}^1\vec{э}^2 + 5\,\vec{э}^2\vec{э}^1 + 6\,\vec{э}^2\vec{э}^2 +$
$+ 4\,\vec{э}^3\vec{э}^1 + 7\,\vec{э}^3\vec{э}^2$

8-variant

$A = \vec{э}^1\vec{э}^1 + 2\,\vec{э}^1\vec{э}^2 + 5\,\vec{э}^1\vec{э}^3 + 6\,\vec{э}^2\vec{э}^1 +$
$+ 4\,\vec{э}^2\vec{э}^3 + 7\,\vec{э}^3\vec{э}^1 + 4\,\vec{э}^3\vec{э}^2 + 6\,\vec{э}^3\vec{э}^3$

9-variant

$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

10-variant

$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

12-variant

$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ 7 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

13-variant

$A = 2\,\vec{э}^1\vec{э}^1 + 2\,\vec{э}^1\vec{э}^3 + 3\,\vec{э}^2\vec{э}^3 + 5\,\vec{э}^3\vec{э}^1 +$
$+ 6\,\vec{э}^3\vec{э}^2 + 4\,\vec{э}^3\vec{э}^3$

14-variant

$A = 2\,\vec{э}^1\vec{э}^1 + 3\,\vec{э}^1\vec{э}^2 + 5\,\vec{э}^2\vec{э}^2 + 6\,\vec{э}^3\vec{э}^1 +$
$+ 4\,\vec{э}^3\vec{э}^2 + \vec{э}^3\vec{э}^3$

15-variant

$A = 4\,\vec{э}^1\vec{э}^1 + 2\,\vec{э}^1\vec{э}^2 + 5\,\vec{э}^2\vec{э}^1 + 6\,\vec{э}^2\vec{э}^2 +$
$+ 4\,\vec{э}^3\vec{э}^1 + 7\,\vec{э}^3\vec{э}^2$

16-variant

$A = \vec{э}^1\vec{э}^1 + 2\,\vec{э}^1\vec{э}^2 + 5\,\vec{э}^1\vec{э}^3 + 6\,\vec{э}^2\vec{э}^1 +$
$+ 4\,\vec{э}^2\vec{э}^2 + 2\,\vec{э}^2\vec{э}^2 + 3\,\vec{э}^2\vec{э}^3 + 6\,\vec{э}^3\vec{э}^1 + 4\,\vec{э}^3\vec{э}^3$

17-variant

$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

18-variant

$A = 2\,\vec{э}^1\vec{э}^1 + 2\,\vec{э}^1\vec{э}^3 + 3\,\vec{э}^2\vec{э}^3 + 5\,\vec{э}^3\vec{э}^1 +$
$+ 6\,\vec{э}^3\vec{э}^2 + 4\,\vec{э}^3\vec{э}^3$

19-variant

$A = 2\,\vec{э}^1\vec{э}^1 + 3\,\vec{э}^1\vec{э}^2 + 5\,\vec{э}^2\vec{э}^2 + 6\,\vec{э}^3\vec{э}^1 +$
$+ 4\,\vec{э}^3\vec{э}^2 + \vec{э}^3\vec{э}^3$

20-variant

$A = 4\,\vec{э}^1\vec{э}^1 + 2\,\vec{э}^1\vec{э}^2 + 5\,\vec{э}^2\vec{э}^1 + 6\,\vec{э}^2\vec{э}^2 +$
$+ 4\,\vec{э}^3\vec{э}^1 + 7\,\vec{э}^3\vec{э}^2$

21-variant

$A = \vec{э}^1\vec{э}^1 + 2\,\vec{э}^1\vec{э}^2 + 5\,\vec{э}^1\vec{э}^3 + 6\,\vec{э}^2\vec{э}^1 +$
$+ 4\,\vec{э}^2\vec{э}^3 + 7\,\vec{э}^3\vec{э}^1 + 4\,\vec{э}^3\vec{э}^2 + 6\,\vec{э}^3\vec{э}^3$

22-variant

$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

23-variant

$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

25-variant

$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

26- variant

$A = \vec{э}^1\vec{э}^1 + 2\,\vec{э}^1\vec{э}^2 + 5\,\vec{э}^1\vec{э}^3 + 6\,\vec{э}^2\vec{э}^1 +$
$+ 4\,\vec{э}^2\vec{э}^3 + 7\,\vec{э}^3\vec{э}^1 + 4\,\vec{э}^3\vec{э}^2 + 6\,\vec{э}^3\vec{э}^3$

Adabiyotlar

1. «Механика сплошной среды в примерах и задачах» . Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
2. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механики сплошной среды. - М. : Изд. МГУ, 1973 г.
3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
5. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 310 с.
6. М.А.Акивес, В.В. Гольдберг. Тензорное исчисление. -М.:Изд. Наука.1972.

3-MUSTAQIL ISH

Mavzu: Tutash muhit kinematikasiga doir masalalar

Мақсад: Tutash muhit harakat qonunining berilish usullari, tezliklar va tezlanishlar maydonlari, hamda deformatsiyasi haqid tasavvurlarni yanada kengaytirish. Mavzu bo'yicha masala yechish orqali ularning bilimini mustahkamlash va sinash.

REJA:

1. Tutash muhit harakatininig Lagranj va Eyler ko'rinishlari, ularning biridan ikkinchisiga o'tish;
2. Ko'chish vektori, tezlik va tezlanishlar maydoni;
3. Deformatsiya va deformatsiya tezliklari.

Ma'lumki tutash muhit harakatini o'rganishda Lagranj va Eyler nuqtai nazarlari mavjud. Agar harakat $x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, Lagranj ko'rinishida, Agar harakat $\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3, t)$ ko'rinishida berilgan bo'lsa, Eyler ko'rinishida berilgan deyiladi. Ular bir ko'rinishda berilgan bo'lsa uni ikkinchi ko'rinishga o'tkazish uchun dastlab bir qiymatli moslik bajarilishini tekshirishimiz kerak, ya'ni yakobian noldan farqli bo'lishi kerak

LagranjdanEylergaotishuchunLagranjdanEylergaotishuchun

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right| \neq 0 \quad \left|\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right| \neq 0 \tag{1}$$

Agar boshlang'ich holatda Lagranj va Eyler koordinatalari ustma-ust tushsa, u holda ko'chish vektori

$$w_i = x_i - \xi_i \tag{2}$$

kabi aniqlanadi.

Tezlik vektori komponentalari

Lagranj koordinatalarida

$$v_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{\partial w_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t}; \tag{3}$$

Eyler koordinatalarida

$$v_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial w_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} + v_k(x_1, x_2, x_3, t)\frac{\partial w_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_k}. \tag{4}$$

(4) da tezlik vektori komponentalari oshkormas ko'rinishda berilgan.

Tezlanish vektori komponentalari

Lagranj koordinatalarida

$$a_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{\partial v_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t}; \tag{5}$$

Eyler koordinatalarida

$$a_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial v_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} + v_k(x_1, x_2, x_3, t)\frac{\partial v_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_k}. \tag{6}$$

Deformatsiya tenzori komponentalari

Lagranj koordinatalarida $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial w_j}{\partial \xi_i} + \frac{\partial w_k}{\partial \xi_i}\frac{\partial w_k}{\partial \xi_j}\right);$ (7)

Eyler koordinatalarida

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{\partial w_k}{\partial x_i}\frac{\partial w_k}{\partial x_j}\right). \qquad (8)$$

Cheksiz kichik deformatsiya holida (5) va (6) dagi kvadratik hadlar tashlab yuborilishi mumkin.

Deformatsiya tezliklari tenzori komponentalari

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_j}{\partial \xi_i}\right). \qquad (8)$$

Masala. Tutash muhit harakati Lagranj o'zgaruvchilarida $x_1 = \xi_1 e^t + \xi_3(e^t - 1)$; $x_2 = \xi_2 + \xi_3(e^t - e^{-t})$; $x_3 = \xi_3$ ko'rinishda berilgan. Uni Eyler ko'rinishga o'tkazing. Lagrang va Eyler koordinatalarida ko'chish vektori komponentalarini toping. Lagrang koordinatalarida tezlik, tezlanish, deformatsiya va deformatsiya tezliklari tenzori komponentalarini toping.

Yechish. Harakatni Eyler ko'rinishida ifodalash uchun dastlab yakobianning noldan farqliligini tekshiramiz

$$J = \left|\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right| = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^t - 1 \\ 0 & 1 & e^t - e^{-t} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^t \neq 0$$

Demak, Eyler koordinatalariga o'tish mumkin.

$x_1 = \xi_1 e^t + \xi_3(e^t - 1)$; $x_2 = \xi_2 + \xi_3(e^t - e^{-t})$; $x_3 = \xi_3$ tenglamalarni ξ_j larga nisbatan yechamiz.

$$\xi_1 = x_1 e^{-t} - x_3(1 - e^{-t});$$
$$\xi_2 = x - x_3(e^t - e^{-t});$$
$$\xi_3 = x_3.$$

Endi ko'chish vektori komponentalarini topamiz. $w_i = x_i - \xi_i$ formulaga ko'ra

Lagranj koordinatalarida

$$w_1 = \xi_1(e^t - 1) + \xi_3(e^t - 1);$$
$$w_2 = \xi_3(e^t - e^{-t}) ;$$
$$w_3 = 0.$$

Eyler koordinatalarida

$$w_1 = x_1(1 - e^{-t}) + x_3(1 - e^{-t});$$
$$w_2 = x_3(e^t - e^{-t});$$
$$w_3 = 0.$$

Tezlik vektori komponentalari

$$v_1 = \xi_1(e^t + 1) + \xi_3(e^t - 1);$$
$$v_2 = \xi_3(e^t + e^{-t});$$
$$v_3 = 0.$$

Tezlanish vektori komponentalari

$$a_1 = \xi_1(e^t + 1) + \xi_3(e^t - 1);$$
$$a_2 = x_3(e^t - e^{-t});$$
$$a_3 = 0.$$

Deformatsiya tenzori komponentalari

$$\varepsilon_{11} = (e^t - 1), \; \varepsilon_{22} = 0, \; \varepsilon_{33} = 0, \; \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0, \; \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = (e^t - 1), \; \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = (e^t - e^{-t}).$$

Deformatsiya tezliklari tenzori komponentalari

$$e_{11} = (e^t + 1), \; e_{22} = 0, \; e_{33} = 0, \; e_{12} = e_{21} = 0, \; e_{13} = e_{31} = (e^t - 1), \; e_{23} = e_{32} = (e^t + e^{-t}).$$

3-MUSTAQIL ISH TOPSHIRIQLARI

Muhit harakati $x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ qonuniyat bilan berilgan. Lagrang va Eyler koordinatalarida:

1. ko'chish vektori komponentalarini;
2. tezlik vektori komponentalarini;
3. tezlanish vektori komponentalarini;
4. deformatsiya tezliklari tenzori komponentalarinitoping.

1. $x_1 = \xi_1$; $x_2 = \xi_2 e^{-t} + A\xi_3$; $x_3 = \xi_3 e^{-t} + A\xi_2$,

2. $x_1 = \xi_1 A + \xi_3 e^{-t}$; $x_2 = \xi_2 e^{kt}$; $x_3 = \xi_3 + A\xi_1$,

3. $x_1 = \xi_1 e^{t} + A\xi_2$; $x_2 = A\xi_1$; $x_3 = \xi_3 e^{-t}$,

4. $x_1 = \xi_1 + \xi_3 (e^{t} - 1)$; $x_2 = \xi_2 + \xi_3 (e^{2t} - e^{-2t})$; $x_3 = e^{t}\xi_3 + A\xi_2$,

5. $x_1 = 3\xi_1\xi_3 e^{-t^2}$; $x_2 = 2\xi_1\xi_2 e^{-t^2}$; $x_3 = 5\xi_2\xi_3 e^{-t}$,

6. $x_1 = (3\xi_2 - 4\xi_3) e^{-t}$; $x_2 = (2\xi_1 - \xi_3) e^{-t}$; $x_3 = (4\xi_2 - \xi_1) e^{-t}$,

7. $x_1 = (\xi_1 A + \xi_3) e^{-t}$; $x_2 = \xi_2 e^{-t^2}$; $x_3 = (\xi_3 + A\xi_1) e^{t}$,

8. $x_1 = (\xi_1 + A\xi_2) e^{-t}$; $x_2 = A\xi_1 e^{-t^2}$; $x_3 = \xi_3$,

9. $x_1 = \xi_1 e^{t} + \xi_3 (e^{t} - 1)$; $x_2 = \xi_2 + \xi_3 (e^{t} - e^{-t})$; $x_3 = \xi_3$,

10. $x_1 = k\xi_1\xi_3 e^{-t}$; $x_2 = k\xi_1\xi_2 e^{t}$; $x_3 = k\xi_2\xi_3$,

11. $x_1 = \xi_1 e^{-t}$; $x_2 = (\xi_2 + A\xi_3) e^{t}$; $x_3 = \xi_3 + A\xi_2$,

12. $x_1 = (\xi_1 A + \xi_3) e^{-t}$; $x_2 = \xi_2$; $x_3 = (\xi_3 + A\xi_1) e^{-t}$,

13. $x_1 = \xi_1 + A\xi_2 e^{t}$; $x_2 = A\xi_1 e^{t}$; $x_3 = \xi_3$,

14. $x_1 = \xi_1 + \xi_3 (e^{2} - 1)$; $x_2 = \xi_2 + \xi_3 (e^{2} - e^{-2})$; $x_3 = \xi_3$,

15. $x_1 = e^{-t}\xi_3$; $x_2 = k\xi_1$; $x_3 = k\xi_3 (e^{-t} + e^{t})$,

16. $x_1 = 3\xi_1\xi_3 e^{-t^2}$; $x_2 = 2\xi_1\xi_2 e^{-t^2}$; $x_3 = 5\xi_2\xi_3 e^{-t}$,

17. $x_1 = \xi_2 e^{-t}$, $x_2 = (\xi_2 + A\xi_3) e^{t}$, $x_3 = \xi_3$,

18. $x_1 = (3\xi_2 - 4\xi_3) e^{-t}$, $x_2 = (2\xi_1 - \xi_3) e^{-2t}$, $x_3 = 4\xi_2 e^{-t}$,

19. $x_1 = \xi_1 + \xi_3 (e^{t} - 1)$; $x_2 = \xi_2 + \xi_3 (e^{2t} - e^{-2t})$; $x_3 = e^{t}\xi_3 + A\xi_2$,

20. $x_1 = (\xi_1 A + \xi_3) e^{-t}$; $x_2 = \xi_2 e^{-t^2}$; $x_3 = (\xi_3 + A\xi_1) e^{t}$,

21. $x_1 = k\xi_1\xi_3 e^{-t}$; $x_2 = \xi_1\xi_2 e^{t}$; $x_3 = k\xi_2\xi_3$,

22. $x_1 = \xi_1 + \xi_2 e^{t}$; $x_2 = A\xi_1 e^{t}$; $x_3 = k\,\xi_3$,

23. $x_1 = \xi_1 + \xi_3 e^{-t}$; $x_2 = \xi_2 e^{kt}$; $x_3 = \xi_3 + A\xi_1$,

24. $x_1 = (\xi_1 A + \xi_3) e^{-kt}$; $x_2 = \xi_2$; $x_3 = (\xi_3 + A\xi_1) e^{-kt}$,

Adabiyotlar

1. «Механика сплошной среды в примерах и задачах» . Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
2. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механики сплошной среды. - М. : Изд. МГУ, 1973 г.
3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В I,II-т.

4 – MUSTAQIL ISH

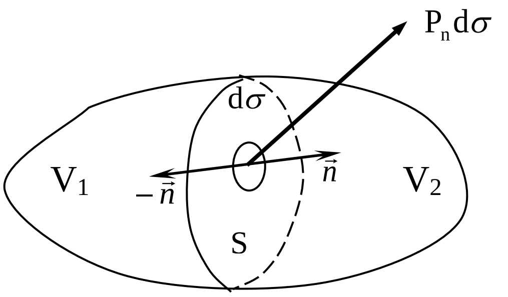
MAVZU: KUCHLANISH TENZORI VA KUCHLANISH VEKTORI

I. NAZARIY QISM

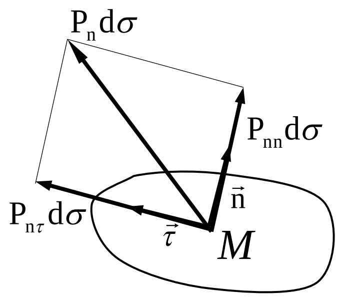
Tutash muhit mexanikasi fani bo'yicha ma'ruzalardan ma'lumki 1-chizmada tasvirlangan $\vec{P}_n$ vektor kuchlanish vektori bo'ladi. Uni $d\sigma$ elementar yuzachaning normali $\vec{n}$ $(|\vec{n}| = 1)$ va urinmasi $\vec{\tau}$ $(|\vec{\tau}| = 1)$ bo'yicha tuzuvchilarga ajratish mumkin (2-chizma).

$$\vec{P}_n = P_{nn}\vec{n} + P_{n\tau}\vec{\tau} \qquad (1)$$

bu yerda $\vec{P}_n$ - M nuqtaga qo'yilgan normali $\vec{n}$ bo'lgan yuzachadagi kuchlanish vektori, P_{nn} va $P_{n\tau}$ lar mos ravishda normal va urinma kuchlanishlar deyiladi.



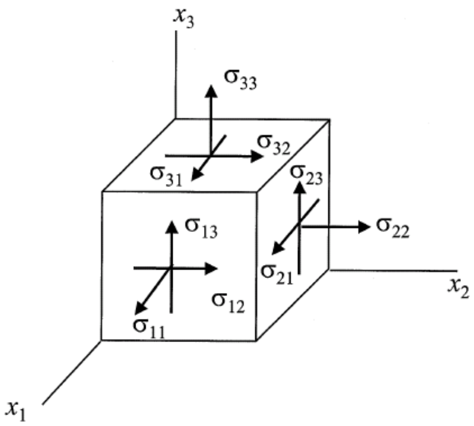
1-chizma



2-chizma

Kuchlanish vektori uchun quyidagi Koshi formulasi o'rinli

$$\vec{P}_n = \vec{P}_1 n_1 + \vec{P}_2 n_2 + \vec{P}_3 n_3 \tag{2}$$



3-chizma

bunda n_i - berilgan yuza normali yo'naltiruvchi kosinuslari; $\vec{P}_i$ - M nuqtaga qo'yilgan va koordinata o'qlariga parallel yo'nalgan kuchlanish vektorlari. $\vec{P}_i$ vektorlarni $\vec{e}_j$ bazislar bo'yicha yoyib chiqamiz

$$\vec{P}_i = \sigma_{ij}\vec{e}_j$$

Bundan

$$\begin{aligned} P_{n1} &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3; \\ P_{n2} &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3; \\ P_{n3} &= \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Koshi formulasidan foydalanib, kuchlanishning normal va urinma tuzuvchilarini topamiz

$$P_{nn} = \left(\vec{P}_n \vec{n}\right) = \sigma_{ij} n_j n_i = (\mathrm{n}_1, n_2, n_3)(\sigma_{ij})\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$P_{n\tau} = \left((P_{n1})^2 + (P_{n2})^2 + (P_{n3})^2 - (P_{nn})^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

$Ox_1x_2x_3$ Dekart koordinatalar sistemasida berilgan (σ_{ij}) miqdorlar majmuasi ikkinchi rang tenzorni tashkil qiladi va kuchlanish tenzori deb ataladi

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Ichki harakat miqdori momentlar va juftlar mavjud bo'lmagan holda kuchlanish tenzori simmetrik bo'ladi va $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ lar x_1, x_2, x_3 koordinata o'qlariga perpendikulyar yuzalardagi normal kuchlanishlar, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32}$ esa urinma kuchlanishlar deyiladi.

Kuchlanish tenzorining koordinatalarni almashtirishga nisbatan invariantlari 3 ta bo'lib, ular quyidagicha aniqlanadi

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix};$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Kuchlanish tenzorining bosh qiymatlari

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}-\sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

yoki

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

Tenglamaningyechimlaribo’ladiva $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ kabibelgilanadi.

Topilganboshqiymatlargamosboshyo’nalishlaresaquyidagitenglamalardantopiladi

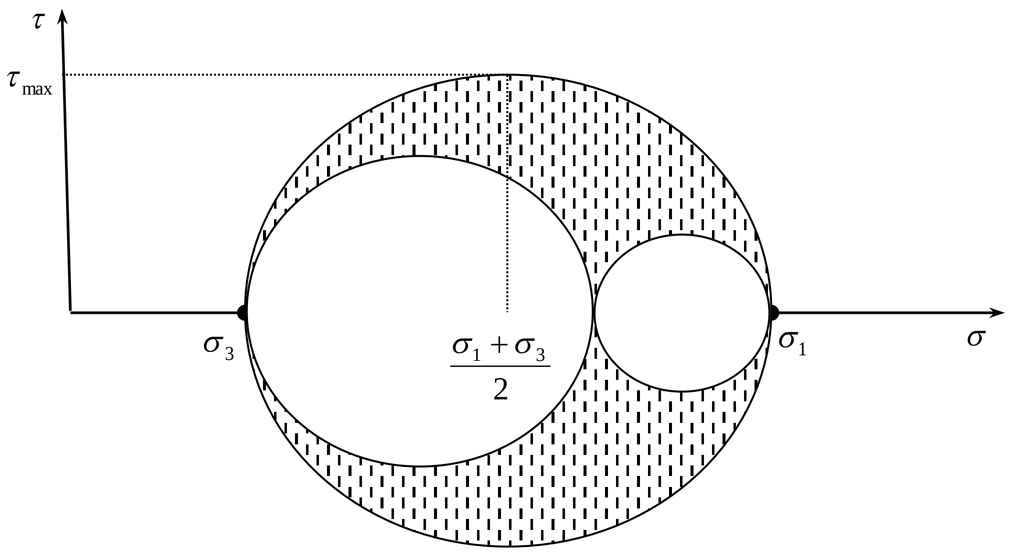
$$\begin{aligned} &(\sigma_{11}-\sigma)n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = 0; \\ &\sigma_{21}n_1 + (\sigma_{22}-\sigma)n_2 + \sigma_{23}n_3 = 0; \\ &\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + (\sigma_{33}-\sigma)n_3 = 0; \\ &n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Demak koordinatalarni $A = \begin{pmatrix} n_1^{(1)} & n_2^{(1)} & n_3^{(1)} \\ n_1^{(2)} & n_2^{(2)} & n_3^{(2)} \\ n_1^{(3)} & n_2^{(3)} & n_3^{(3)} \end{pmatrix}$ kabi almashtirganda kuchlanish tenzori

$(\sigma'_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ ko’rinishga keladi.

Bosh kuchlanishlarni kamayish tartibida raqamlab $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ va ular yordamida radiuslari $\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$; $\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$; $\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$ ga teng bo’lgan doiralarni chizamiz

Chizmada σ normal, τ urinma kuchlanishni bildiradi. Shtrixlangan sohadagi qiymatlarni urinma kuchlanish qabul qilishi mumkin. Ko’rinib turibdiki, normal kuchlanish $\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}$ ga teng bo’lganda, urinma kuchlanish $\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$ ga teng bo’lgan maksimal qiymatga erishadi.

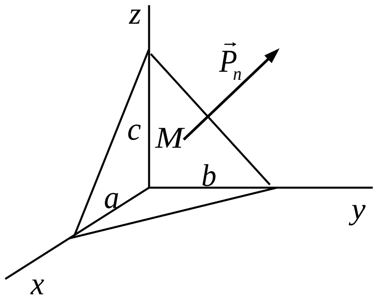


4-chizma

II.TOPSHIRIQNI BAJARISH NAMUNASI

Masala. $Oxyz$ Dekart koordinatalar sistemasida tutash muhitning M nuqtasidagi (σ_{ij}) kuchlanish tenzori berilgan. Koordinata o'qlarini koordinata boshidan mos ravishda a, b, c masofalarda kesib o'tuvchi yuzachadagi kuchlanish vektorini, normal va urinma kuchlanishlarni, shuningdek kuchlanish tenzorining invariantlarini, bosh qiymatlari va unga mos bosh yo'nalishlarini toping. Mor doirasi yordamida maksimal va minimal urinma kuchlanishlarni aniqlang.

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a = 4,\ b = 6,\ c = 2$$



5-chizma

Yechish. *Analitik geometriya kursidan ma'lumki, koordinata o'qlarini kesib o'tuvchi tekislik tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Ushbu tenglamaga berilganlarni qo'yib, uni kanonik ko'rinishga keltiramiz

$$3x + 2y + 6z - 12 = 0$$

Ko'rinibturibdiki, berilgantekislikka $\vec{N}(3,2,6)$vektorperpendikulyarbo'ladi. Unga mos birlik vektori quyidagicha aniqlanadi

$$\vec{n} = \left(\frac{N_1}{N}, \frac{N_2}{N}, \frac{N_3}{N} \right)$$

va demak $\quad \vec{n} = \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right)$

Endi (3) formulalar yordamida kuchlanish vektori komponentalarini topamiz

$$P_{n1} = 3.\frac{3}{7} - 1.\frac{2}{7} + 0.\frac{6}{7} = 1,$$

$$P_{n2} = -1.\frac{3}{7} + 3.\frac{2}{7} + 0.\frac{6}{7} = \frac{3}{7},$$

$$P_{n3} = 0.\frac{3}{7} + 0.\frac{2}{7} + 1.\frac{6}{7} = \frac{6}{7}.$$

$$\vec{P}_n = \left(1, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right)$$

(4) va (5) formulalarga ko'ra normal va urinma kuchlanishlarni topamiz

$$P_{nn} = \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix} = \frac{9}{7} \quad P_{n\tau} = \left(1^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 - \left(\frac{9}{7}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{7}$$

(7) formula yordamida berilgan kuchlanish tenzorining bosh qiymatlarini topamiz

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Butenglamayechimlari $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$

Topilganboshqiymatlargamosboshyo'nalishlar (o'qlar) nitopamiz

$\lambda_1 = 4$ uchun

$$\begin{cases} -n_1 - n_2 = 0 \\ -n_1 - n_2 = 0 \\ -3n_3 = 0 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$\lambda_2 = 2$ uchun

$$\begin{cases} n_1 - n_2 = 0 \\ -n_1 + n_2 = 0 \\ -n_3 = 0 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$\lambda_3 = 1$ uchun

$$\begin{cases} 2n_1 - n_2 = 0 \\ -n_1 + 2n_2 = 0 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = (0, 0, \pm 1)$$

Natijaning to'g'riligini bitta holda koordinatalarni almashtirish yordamida tekshiramiz

$$(p'_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demak koordinatalarni $A = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & \mp\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ kabi almshtirganimizda kuchlanish tenzori

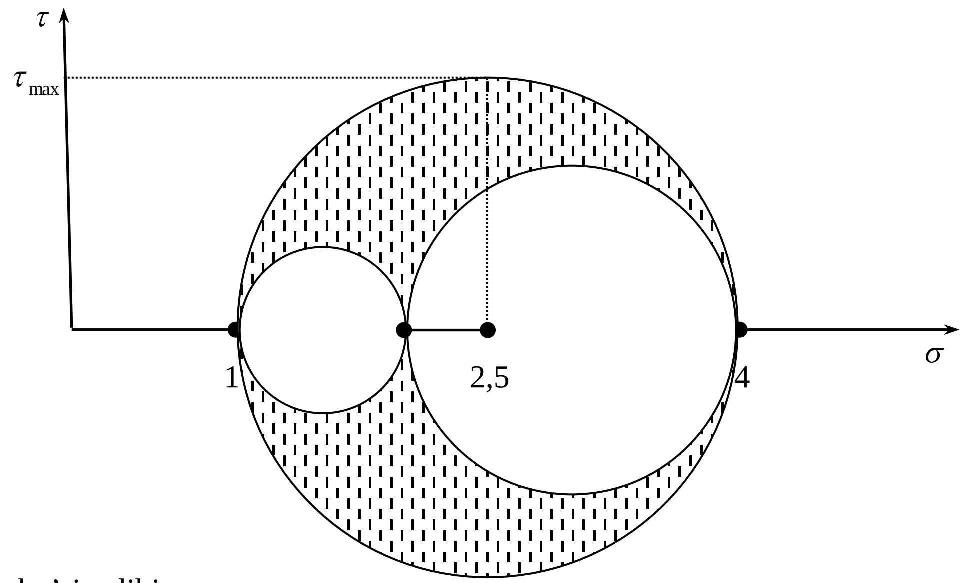
$$(p'_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ko'rinishniolarekan.

Endiboshkuchlanishlaryordamidamaksimalurinmakuchlanishlarnianiqlaymiz. Buning uchun radiuslari

$$\frac{p_1-p_3}{2}=\frac{4-1}{2}=1{,}5;\quad \frac{p_1-p_2}{2}=\frac{4-2}{2}=1;\quad \frac{p_2-p_3}{2}=\frac{2-1}{2}=0{,}5$$

bo’lgan doiralarni chizamiz



Chizmadanko’rinadiki, urinmakuchlanish $\sigma=2{,}5$ bo’lganda $\tau_{\max}=1{,}5$ maksimalqiymatgaerishadi. Shuningdek, normalkuchlanishboshkuchlanishlargatengbo’lgandaurinmakuchlanishlarnolgatengbo’ladi.

III. 4-MUSTAQIL ISH TOPSHIRIQLARI

Masala Tutashmuhitning M nuqtasida P kuchlanishtenzoriberilgan x, y, z koordinatao’qlarini koordinataboshidanmosravishda $a,\ b, c$ masofalardakesibo’tuvchiyuzadakuchlanishvektorini, normalvaurinmakuchlanishlarni, shuningdekkuchlanishtenzoriningboshqiymatlarivaungamosboshyo’nalishlarinitoping.

1. $P=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad a=4,\ b=6,\ c=2$

2. $P=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad a=3,\ b=3,\ c=2$

3. $P=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad a=-4,\ b=3,\ c=2$

4. $P=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad a=5,\ b=4,\ c=2$

5. $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad a=4,\ b=4,\ c=3$

6. $P=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad a=4,\ b=1,\ c=1$

7. $P=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad a=4,\ b=4,\ c=4$

8. $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -0 & 5 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad a=3,\ b=5,\ c=5$

9. $P=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad a=3,\ b=3,\ c=2$

10. $P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad a=2,\ b=4,\ c=2$

11. $P=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad a=4,\ b=6,\ c=2$

12. $P=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad a=4,\ b=-6,\ c=-2$

13. $P=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $a=4,\ b=6,\ c=2$ 14. $P=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $a=4,\ b=6,\ c=2$

15. $P=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $a=-4,\ b=-6,\ c=2$ 16. $P=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -2\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $a=-3,\ b=6,\ c=-2$

17. $P=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -6 & -12\\ 0 & -12 & 8\end{pmatrix}$, $a=-1,\ b=-6,\ c=1$ 18. $P=\begin{pmatrix}3 & -3 & 0\\ -3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 8\end{pmatrix}$, $a=4,\ b=-6,\ c=2$

19. $P=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $a=4,\ b=6,\ c=2$ 20. $P=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $a=3,\ b=-6,\ c=-2$

21. $P=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ -5 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $a=4,\ b=-4,\ c=4$ 22. $P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$, $a=1,\ b=1,\ c=1$

23. $P=\begin{pmatrix}4 & 1 & 4\\ 1 & 4 & 0\\ 4 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $a=4,\ b=-3,\ c=2$ 24. $P=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $a=-4,\ b=1,\ c=2$

25. $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $a=-1,\ b=-1,\ c=1$ 26. $P=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $a=4,\ b=8,\ c=2$

27 $P=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $a=2,\ b=-2,\ c=2$ 28 $P=\begin{pmatrix}7 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $a=3,\ b=1,\ c=1$

Adabiyotlar

1.«Механика сплошной среды в примерах и задачах» . Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.

2.Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механики сплошной среды. - М. : Изд. МГУ, 1973 г.

3.Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.

4.Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.

5.Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 310 с.

6.М.А.Акивес, В.В. Гольдберг. Тензорное исчисление. -М.:Изд. Наука.1972.

5 – MUSTAQILISH
MAVZU: KUCHLANISH TENZORI VA KUCHLANISH VEKTORI

Maqsad: Mavzu bo'yicha talabalar bilimini sinash, ko'chish va deformasiya, deformasiya va kuchlanish tenzori komponentalari orasidagi munosabatlarni topish davomida ortogonal egri chiziqli koordinatalarda ishlash ko'nikmalarini hosil qilish, ularning bilimini mustahkamlash.

I. NAZARIY QISM
R E J A

1. Dekart koordinatalarida ko'chish va deformasiya orasidagi munosabatlar.
2. Silindrik koordinatalarda ko'chish va deformasiya orasidagi munosabatlar.
3. Sferik koordinatalarda ko'chish va deformasiya orasidagi munosabatlar.

4. Deformasiya va kuchlanish orasidagi munosabatlar.

Tutash muhitlar mexanikasi ma'ruzalaridan ma'lumki, deformasiyalar kichik bo'lganda chiziqlimas hadlarni hisoblamaslik mumkin. Tutash muhit ko'chish vektori komponentalari va deformasiya tenzori komponentalari orasida quyidagi geometrik munosabatlar (Koshi munosabatlari) o'rinli:

Dekart koordinatalarida

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial U_x}{\partial x},\ \varepsilon_{yy}=\frac{\partial U_y}{\partial y},\ \varepsilon_{zz}=\frac{\partial U_z}{\partial z},\ \varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y}+\frac{\partial U_y}{\partial x}\right),$$
$$\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial z}+\frac{\partial U_z}{\partial x}\right),\ \varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial z}+\frac{\partial U_z}{\partial y}\right);\qquad (1)$$

Silindrik koordinatalarda

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial U_r}{\partial r},\quad \varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{U_r}{r},\quad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial U_z}{\partial z},\quad 2\varepsilon_{r\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial \varphi}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U_\varphi}{r}\right),$$
$$2\varepsilon_{\varphi z}=\frac{\partial U_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial \varphi},\quad 2\varepsilon_{rz}=\frac{\partial U_z}{\partial r}+\frac{\partial U_r}{\partial z}\qquad (2)$$

Sferik koordinatalarda

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial U_r}{\partial r},\varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{U_r}{r},\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{r\,sin\varphi}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}+\frac{U_r}{r}+\frac{U_\varphi ctg\varphi}{r},2\varepsilon_{r\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial \varphi}+\frac{\partial U_\varphi}{\partial r}-\frac{U_\varphi}{r},$$
$$2\varepsilon_{\theta r}=\frac{\partial U_\theta}{\partial r}+\frac{1}{rsin\varphi}\frac{\partial U_r}{\partial \varphi}-\frac{U_\theta}{r},\qquad 2\varepsilon_{\theta\varphi}=\frac{1}{r\,sin\varphi}\frac{\partial U_\varphi}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \varphi}-\frac{U_\theta ctg\varphi}{r}.\qquad (3)$$

Deformasiya va kuchlanish tenzori komponentalari orasida quyidagi fizik munosabatlar (Guk qonuni o'rinli):

$$\sigma_{ii}=\lambda I_1(\varepsilon)+2\mu\varepsilon_{ij},\qquad \sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}\quad (i\neq j)\qquad (4)$$

bunda dekart koordinatalarida $I_1(\varepsilon)=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}$, silindrik koordinatalarda $I_1(\varepsilon)=\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\varphi\varphi}+\varepsilon_{zz}$, sferik koordinatalarda $I_1(\varepsilon)=\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\varphi\varphi}+\varepsilon_{\theta\theta}$, $\lambda,\ \mu$ - Lame koeffisiyentlari.

II. TORSHIRIQNI BAJARISH NAMUNASI

Masala Tutash muhit ko'chish vektori komponentalari U_i Dekart, silindrik va sferik koordinatalar sistemasida berilgan. Deformasiya va kuchlanish tenzori komponentalarini toping.

Dekart koordinatalarida $U_x=\frac{x^2}{y},\ U_y=\frac{y^2}{z},U_z=\frac{z^2}{x};$

Silindrik koordinatalarda $U_r=r\,sin\varphi,U_\varphi=\frac{z^2}{r}cos\varphi,U_z=\frac{r^2}{z}cos\varphi;$

Sferik koordinatalarda $U_r=r\,sin\varphi cos\theta,\ U_\varphi=r\,cos\varphi sin\theta,\ U_\theta=r\,sin\theta.$

Yechish Masalani yechishda dekart koordinatalari uchun

$$U_x=x^2y,\ U_y=yz,\ U_z=xyz$$

(1) ga ko'ra deformasiya tenzori komponentalarini topamiz

$$\varepsilon_{xx}=\frac{2x}{y},\ \varepsilon_{yy}=\frac{2y}{z},\ \varepsilon_{zz}=\frac{2z}{x},\ \varepsilon_{xy}=-\frac{x^2}{2y^2},\ \varepsilon_{yz}=-\frac{y^2}{2z^2},\ \varepsilon_{xz}=-\frac{z^2}{2x^2}$$

(4) formulalardan foydalanib kuchlanish tenzori komponentalarini topamiz

$$\sigma_{xx}=\lambda\left(\frac{2x}{y}+\frac{2y}{z}+\frac{2z}{x}\right)+4\mu\frac{x}{y},\ \sigma_{yy}=\lambda\left(\frac{2x}{y}+\frac{2y}{z}+\frac{2z}{x}\right)+4\mu\frac{y}{z},$$
$$\sigma_{zz}=\lambda\left(\frac{2x}{y}+\frac{2y}{z}+\frac{2z}{x}\right)+4\mu\frac{z}{x},\ \sigma_{xy}=-\mu\frac{x^2}{2y^2},\ \sigma_{yz}=-\mu\frac{y^2}{2z^2},\ \sigma_{xz}=-\mu\frac{z^2}{2x^2}$$

Silindrik koordinatalarda

$$U_r = r\,sin\varphi,\qquad U_\varphi = \frac{z^2}{r}cos\,\varphi,\qquad U_z = \frac{r^2}{z}cos\,\varphi$$

(2) ga ko'ra deformasiya tenzori komponentalarini topamiz

$$\varepsilon_{rr} = sin\varphi,\quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = -\frac{z^2}{r^2}sin\varphi,\quad \varepsilon_{zz} = -\frac{r^2}{z^2}cos\,\varphi,\quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2z^2}{r^2}\right)cos\,\varphi,$$

$$\varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2}\left(\frac{2z}{r}cos\,\varphi - \frac{r}{z}sin\varphi\right),\quad \varepsilon_{zr} = \frac{r}{z}cos\,\varphi$$

(4) formulalardan foydalanib kuchlanish tenzori komponentalarini topamiz

$$\sigma_{rr} = \lambda\left(sin\varphi - \frac{z^2}{r^2}sin\varphi - \frac{r^2}{z^2}cos\,\varphi\right) + 2\mu\,sin\varphi,\qquad \sigma_{r\varphi} = \mu\left(1-\frac{2z^2}{r^2}\right)cos\,\varphi,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\left(sin\varphi - \frac{z^2}{r^2}sin\varphi - \frac{r^2}{z^2}cos\,\varphi\right) - 2\mu\frac{z^2}{r^2}sin\varphi,\qquad \sigma_{\varphi z} = \mu\left(\frac{2z}{r}cos\,\varphi - \frac{r}{z}sin\varphi\right),$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\left(sin\varphi - \frac{z^2}{r^2}sin\varphi - \frac{r^2}{z^2}cos\,\varphi\right) - 2\mu\frac{r^2}{z^2}sin\varphi,\qquad \sigma_{zr} = \mu\frac{r}{z}cos\,\varphi.$$

Sferik koordinatalarda

$$U_r = r\,sin\varphi\,cos\,\theta,\; U_\varphi = r\,cos\,\varphi\,sin\theta,\; U_\theta = r\,sin\theta$$

(2) ga ko'ra deformasiya tenzori komponentalarini topamiz

$$\varepsilon_{rr} = sin\varphi\,cos\,\theta,\; \varepsilon_{\varphi\varphi} = 0,\; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{cos\,\theta}{sin\varphi} + sin\varphi\,cos\,\theta + \frac{cos^2\varphi\,sin\theta}{sin\varphi}$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}cos\,\varphi\,cos\,\theta,\; \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(sin\theta + ctg\,\varphi - cos\,\theta\right),\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}\left(ctg\,\varphi\,cos\,\theta - sin\theta\,ctg\,\varphi\right)$$

(4) formulalardan foydalanib kuchlanish tenzori komponentalarini topamiz

$$\sigma_{rr} = \lambda\left(2sin\varphi\,cos\,\theta + \frac{cos\,\theta}{sin\varphi} + \frac{cos^2\varphi\,sin\theta}{sin\varphi}\right) + 2\mu\,sin\varphi\,cos\,\theta,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\left(2sin\varphi\,cos\,\theta + \frac{cos\,\theta}{sin\varphi} + \frac{cos^2\varphi\,sin\theta}{sin\varphi}\right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda\left(2sin\varphi\,cos\,\theta + \frac{cos\,\theta}{sin\varphi} + \frac{cos^2\varphi\,sin\theta}{sin\varphi}\right) + 2\mu\left(\frac{cos\,\theta}{sin\varphi} + sin\varphi\,cos\,\theta + \frac{cos^2\varphi\,sin\theta}{sin\varphi}\right),$$

$$\sigma_{r\varphi} = \mu\,cos\,\varphi\,cos\,\theta,\qquad \sigma_{\theta r} = \mu\left(sin\theta + ctg\,\varphi - cos\,\theta\right),\qquad \sigma_{\theta\varphi} = \mu\left(ctg\,\varphi\,cos\,\theta - sin\theta\,ctg\,\varphi\right)$$

Adabiyotlar

1. «Механика сплошной среды в примерах и задачах» . Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
2. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механики сплошной среды. - М. : Изд. МГУ, 1973 г.
3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
5. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 310 с.

5 – MUSTAQIL ISH VARIANTLARI

	Dekart koordinatalarida	Silindrik koordinatalarda	Sferik koordinatalarda
1.	$U_x = \frac{x^2}{y+z}, U_y = -\frac{y^2}{x+z}, U_z = \frac{z^2}{x+y};$	$U_r = r\cos\varphi, U_\varphi = r\sin\varphi, U_z = \frac{r^2}{z}\cos\varphi$	$U_r = r\sin\varphi\sin\theta, U_\varphi = r\sin\varphi\cos\theta, U_\theta = r\sin\theta$
2.	$U_x = \frac{y^2}{x}, U_y = \frac{z^2}{x+z}, U_z = \frac{x^2}{z+y};$	$U_r = r\sin\varphi, U_\varphi = r\cos\varphi, U_z = -r\cos\varphi$	$U_r = r\sin\varphi\cos\theta, U_\varphi = r\cos\varphi\sin\theta, U_\theta = r\cos\varphi$
3.	$U_x = \frac{x^3}{y^2+z^2}, U_y = -\frac{y^2}{z}, U_z = \frac{z^2}{y};$	$U_r = r\,sh\varphi, U_\varphi = r\cos\varphi, U_z = \frac{r^2}{z}\cos\varphi$	$U_r = r\sin\varphi\cos\theta, U_\varphi = r\cos\varphi\sin\theta, U_\theta = r\sin\theta\cos\varphi$
4.	$U_x = \frac{x^2}{y+z}, U_y = \frac{z^2}{x+y}, U_z = \frac{y^2}{x+z};$	$U_r = r\,ch\varphi, U_\varphi = r\sin\varphi, U_z = r\cos\varphi$	$U_r = -r\sin\varphi\cos\theta, U_\varphi = r\cos^2\varphi, U_\theta = r\sin\theta\cos\varphi$
5.	$U_x = \frac{x^3}{y^2}, U_y = \frac{y^2}{x+z}, U_z = \frac{z^3}{x^2+y^2};$	$U_r = r\sin\varphi, U_\varphi = -r\,ch\varphi, U_z = z\sin\varphi$	$U_r = r\sin^2\varphi, U_\varphi = r\cos\varphi\sin\theta, U_\theta = r\,sh\theta\cos\varphi$
6.	$U_x = \frac{yx^2}{z^2}, U_y = \frac{zy^2}{x^2}, U_z = \frac{z^2}{x+y};$	$U_r = r\sin^2\varphi, U_\varphi = r\sin^2\varphi, U_z = z\cos^2\varphi$	$U_r = r\cos\varphi\cos\theta, U_\varphi = -r\cos\varphi\sin\theta, U_\theta = r\cos^2\varphi$
7.	$U_x = \frac{yz}{x+z}, U_y = \frac{y^2}{x+z}, U_z = \frac{x^2+y^2}{x+y};$	$U_r = r\,ch\varphi, U_\varphi = \frac{z^2}{r}\cos\varphi, U_z = r\cos\varphi$	$U_r = r\cos^2\varphi, U_\varphi = r\cos\varphi\sin\theta, U_\theta = -r\sin^2\theta$
8.	$U_x = \frac{y^2}{x}, U_y = \frac{yz}{x}, U_z = \frac{xy}{z};$	$U_r = \frac{r^2}{z}\sin^2\varphi, U_\varphi = \frac{z^2}{r}\cos\varphi, U_z = z\cos^2\varphi$	$U_r = -r\cos^2\theta, U_\varphi = -r\cos\varphi\sin\theta, U_\theta = r\cos\theta\cos\varphi$
9.	$U_x = \frac{xy}{z}, U_y = \frac{xz}{y}, U_z = \frac{xy}{z};$	$U_r = r\sin^2\varphi, U_\varphi = \frac{z^2}{r}\cos\varphi, U_z = \frac{z^2}{r}\cos\varphi$	$U_r = r\sin\varphi\cos\theta, U_\varphi = r\cos^2\varphi\sin\theta, U_\theta = -r\sin\theta\cos\varphi$
10.	$U_x = \frac{x^2}{z}, U_y = \frac{xy}{z}, U_z = \frac{xz}{y};$	$U_r = \frac{r^2}{z}\sin\varphi, U_\varphi = r\cos\varphi, U_z = z\cos^2\varphi$	$U_r = r\sin^2\varphi, U_\varphi = r\cos^2\varphi, U_\theta = -r\cos\theta\cos\varphi$
11.	$U_x = \frac{xz}{y}, U_y = -\frac{yx}{z}, U_z = \frac{yz}{x};$	$U_r = r\cos^2\varphi, U_\varphi = (r+z)\cos\varphi, U_z = \frac{r^2}{z}\sin\varphi$	$U_r = r\,sh\varphi\cos\theta, U_\varphi = r\cos\varphi\sin\theta, U_\theta = r\sin\theta\,sh\varphi$
12.	$U_x = \frac{x^2y}{z^2}, U_y = \frac{xy^2}{z^2}, U_z = \frac{yz^2}{x^2};$	$U_r = (r+z)\sin\varphi, U_\varphi = r\cos^2\varphi, U_z = r\cos\varphi$	$U_r = r\cos^2\theta, U_\varphi = -r\cos\varphi\,sh\theta, U_\theta = -r\sin\theta\cos\varphi$
13.	$U_x = \frac{xy^2}{z^2}, U_y = \frac{x^2y}{z^2}, U_z = \frac{yz^2}{x^2};$	$U_r = \left(r + \frac{z^2}{r}\right)\sin\varphi, U_\varphi = r\cos\varphi, U_z = \frac{r^2}{z}\sin\varphi$	$U_r = -r\sin^2\theta, U_\varphi = r\cos\varphi\,sh\theta, U_\theta = -r\sin\theta\cos\varphi$
14.	$U_x = \frac{yz^2}{x^2}, U_y = \frac{x^2z}{y^2}, U_z = \frac{yx^2}{z^2};$	$U_r = r\sin^2\varphi, U_\varphi = \frac{r^2}{z}\cos\varphi, U_z = -z\sin^2\varphi$	$U_r = r\,sh\varphi\cos\theta, U_\varphi = r\,ch\varphi\sin\theta, U_\theta = r\,sh\theta\cos\varphi$
15.	$U_x = \frac{xy}{z}, U_y = \frac{zy}{x}, U_z = \frac{xz}{y};$	$U_r = \frac{r^2}{z}\cos\varphi, U_\varphi = r\sin^2\varphi, U_z = (z+r)\cos\varphi$	$U_r = -r\cos^2\varphi, U_\varphi = r\cos\varphi\,sh\theta, U_\theta = r\sin^2\theta$

16. $U_x = \frac{yz^2}{x^2}, U_y = \frac{x^2y}{z^2}, U_z = \frac{zx^2}{y^2};$	$U_r = r\,ch^2\varphi, U_\varphi = \frac{z^2}{r}\cos\varphi, U_z = \frac{r^2}{z}sh\varphi$	$U_r = -r\sin\varphi\cos\theta, U_\varphi = r\cos^2\varphi\sin\theta, U_\theta = r\sin^2\theta\cos\varphi$
17. $U_x = \frac{zy^2}{x^2}, U_y = \frac{yz^2}{x^2}, U_z = \frac{xy^2}{z^2};$	$U_r = \frac{r^2}{z}\sin\varphi, U_\varphi = r\sin^2\varphi, U_z = z\sin\varphi$	$U_r = rsh\varphi\cos\theta, U_\varphi = -r\cos\ \varphi, U_\theta = -r\sin\theta\cos\varphi$
18. $U_x = \frac{zy^2}{x^2}, U_y = \frac{yx^2}{z^2}, U_z = \frac{xz^2}{y^2};$	$U_r = r\sin^2\varphi, U_\varphi = \frac{r^2}{z}\cos\varphi, U_z = \frac{z^2}{r}\sin\varphi$	$U_r = r\sin\varphi\cos\theta, U_\varphi = -r\cos\varphi\sin\theta, U_\theta = r\sin^2$
19. $U_x = \frac{x^2}{y}, U_y = \frac{z^3}{xy}, U_z = \frac{x^3}{zy};$	$U_r = r\,ch\varphi, U_\varphi = -\frac{z^2}{r}\cos\varphi, U_z = \frac{r^2}{z}sh\varphi$	$U_r = rsh\varphi\,ch\theta, U_\varphi = rch^2\theta, U_\theta = r\sin\theta\cos\varphi$
20. $U_x = \frac{x^3}{yz}, U_y = \frac{y^2}{z}, U_z = \frac{z^3}{xy};$	$U_r = \left(r - \frac{r^2}{z}\right)\sin\varphi, U_\varphi = \frac{z^2}{r}\cos\varphi, U_z = \frac{r^2}{z}ch\varphi$	$U_r = r\cos^2\theta, U_\varphi = -r\cos^2\varphi, U_\theta = -r\sin\theta\cos\varphi$
21. $U_x = \frac{yx^2}{z^2}, U_y = \frac{y^2z}{x^2}, U_z = \frac{x^2y^2}{z^3};$	$U_r = \frac{r^2}{z}\sin\varphi, U_\varphi = z\cos\varphi, U_z = \frac{r^2}{z}\cos\varphi$	$U_r = -r\sin\varphi\cos\theta, U_\varphi = -r\cos\varphi\sin\theta, U_\theta = -r\sin^2\theta$
22. $U_x = \frac{y^2}{x}, U_y = \frac{yz}{x}, U_z = -\frac{xy}{z};$	$U_r = r\sin^2\varphi, U_\varphi = r\cos^2\varphi, U_z = \frac{r^2}{z}\cos\varphi$	$U_r = r\sin\varphi\cos\theta, U_\varphi = r\cos\varphi\sin\theta, U_\theta = r\sin\theta\cos\varphi$
23. $U_x = \frac{x^2y}{z^2}, U_y = -\frac{x^2y^2}{z^3}, U_z = \frac{y^2z^2}{x^3};$	$U_r = \frac{r^2}{z}\sin\varphi, U_\varphi = \frac{z^2}{r}ch\varphi, U_z = \frac{r^2}{z}\cos\varphi$	$U_r = r\sin\varphi\cos\theta, U_\varphi = r\cos\varphi\sin\theta, U_\theta = r\sin\theta\cos\varphi$
24. $U_x = \frac{xy}{z+y}, U_y = \frac{yz}{x}, U_z = \frac{y^2}{z+x};$	$U_r = r\,sh\varphi, U_\varphi = \frac{z^2}{r}\cos\varphi, U_z = \frac{r^2}{z}\cos^2\varphi$	$U_r = r\sin^2\theta, U_\varphi = -r\cos^2\varphi, U_\theta = r\sin^2\theta$
25. $U_x = \frac{x^2y}{z^2}, U_y = \frac{x^3}{y^2+z^2}, U_z = \frac{z^2}{x+y};$	$U_r = \frac{z^2}{r}\sin\varphi, U_\varphi = r\cos^2\varphi, U_z = -z\cos\varphi$	$U_r = r\sin\varphi\cos\theta, U_\varphi = rch^2\varphi\sin\theta, U_\theta = rsh\theta\cos\varphi$
26. $U_x = -\frac{xy}{z}, U_y = \frac{x^3}{y^2+z^2}, U_z = \frac{y^2}{x+z};$	$U_r = z\sin^2\varphi, U_\varphi = r\cos\varphi, U_z = r(\cos\varphi - \sin\varphi)$	$U_r = -r\sin^2\varphi, U_\varphi = rsh^2\theta, U_\theta = rsh\theta\,ch\varphi$
27. $U_x = \frac{x^3}{y^2+z^2}, U_y = \frac{y^2}{x+z}, U_z = \frac{x^2}{z+y};$	$U_r = \frac{r^2}{z}\sin\varphi, U_\varphi = -r\sin^2\varphi, U_z = z\sin\varphi$	$U_r = r\cos^2\theta, U_\varphi = r\cos\varphi\sin\theta, U_\theta = r\sin^2\theta$
28. $U_x = \frac{x^2}{y+z}, U_y = \frac{z^2}{x+y}, U_z = \frac{y^2}{x+z};$	$U_r = r\sin^2\varphi, U_\varphi = \frac{r^2}{z}\sin\varphi, U_z = \frac{z^2}{r}ch\varphi$	$U_r = r\sin\varphi sh\theta, U_\varphi = -r\cos^2\varphi\sin\theta, U_\theta = rsh\theta\cos\varphi$
29. $U_x = \frac{xy}{z}, U_y = \frac{x^2+y^2}{z}, U_z = \frac{y^2+z^2}{x};$	$U_r = \frac{r^2}{z}\cos\varphi, U_\varphi = r\cos^2\varphi, U_z = \frac{r^2}{z}\sin\varphi$	$U_r = r\sin\varphi\cos\theta, U_\varphi = r(ch\varphi - sh\theta), U_\theta = r\sin\theta\cos\varphi$
30. $U_x = \frac{x^2+z^2}{y}, U_y = \frac{y^2+z^2}{x}, U_z = \frac{x^2}{z};$	$U_r = -r\sin\varphi, U_\varphi = \frac{r^2}{r}\cos^2\varphi, U_z = \frac{r^2}{z}ch\varphi$	$U_r = r\sin\varphi\cos\theta, U_\varphi = r(\cos\varphi - \sin\theta), U_\theta = r\sin\theta\cos\varphi$

MAVZU: DEKART VA ORTOGONAL KOORDINATALAR SISTEMASIDA SUYUQLIKLAR UCHUN ASOSIY MUNOSABATLAR

R E J A

1. Tezliklar maydoni;
2. Uzviylik tenglamasi;
3. Tezliklar maydoni uyurmasi;
4. Tezlanishlar maydoni;
5. Nav'e-Stoks qonuni.

Asosiy tushunchalar

Tezliklar maydoni koordinatalar va vaqtdan bog'liq bo'lsin. Tutash muhitning berilgan tezliklar maydoni uchun uzviylik tenglamasi quyidagicha bo'ladi

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\vec{V} = 0 \qquad (1)$$

Siqilmaydigan suyuqlik uchun esa

$$div\vec{V} = 0 \qquad (2)$$

Bu tenglama Dekart koordinatalar sistemasida ushbu ko'rinishni oladi

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + V_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + V_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + V_z\frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) = 0 \qquad (3)$$

Siqilmaydigan suyuqlik uchun

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) = 0 \qquad (4)$$

Silindrik koordinatalarda

$$r\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho U_\varphi)}{\partial\varphi} + r\frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} = 0 \qquad (5)$$

Siqilmaydigan suyuqlik uchun

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(U_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \qquad (6)$$

Sferik koordinatalarda

$$r2\, sin\varphi\frac{\partial\rho}{\partial t} + sin\varphi\frac{\partial(\rho U_r r2)}{\partial r} + r\frac{\partial(\rho U_\varphi\, sin\varphi)}{\partial\varphi} + r\frac{\partial\rho U_\theta}{\partial\theta} = 0 \qquad (7)$$

Siqilmaydigan suyuqlik uchun

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(U_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r\, sin\varphi}\frac{\partial(U_\varphi\, sin\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\, sin\varphi}\frac{\partial\rho U_\theta}{\partial\theta} = 0 \qquad (8)$$

Tezlik vektori uyurmasi Dekart koordinatalarida

$$\omega = \frac{1}{2}rot\vec{V} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \qquad (9)$$

Silindrik koordinatalarda

$$\omega = \frac{1}{2}rot\vec{V} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z\right] \qquad 10)$$

Sferik koordinatalarda

$$\omega = \frac{1}{2}rot\vec{V} = \frac{1}{2r\, sin\varphi}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(V_\theta\, sin\varphi) - \frac{\partial V_\varphi}{\partial\theta}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{sin\varphi}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} - \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_\theta\right] \qquad (11)$$

Tezlanish vektori komponentalari Dekart koordinatalarida

$$a_j = \frac{\partial V_j}{\partial t} + V_i\frac{\partial V_j}{\partial x_i} \qquad (12)$$

Silindrik koordinatalarda

$$a_r = \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varphi^2}{r},$$
$$a_\varphi = \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{V_r V_\varphi}{r}, \tag{13}$$
$$a_z = \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z};$$

Sferik koordinatalarda

$$a_r = \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{V_\theta}{r sin\varphi}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\varphi^2 + V_\theta^2}{r},$$
$$a_\varphi = \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_\theta}{r\, sin\varphi}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\varphi - V_\theta^2 ctg\varphi}{r}, \tag{14}$$
$$a_\theta = \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} + \frac{V_\theta}{r\, sin\varphi}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta + ctg\varphi V_\varphi V_\theta}{r};$$

Deformasiya tezliklari tenzori Dekart koordinatalarida

$$e_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x},\ e_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y},\ e_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z},\ e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_r}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right),$$
$$e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right),\ e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) \tag{15}$$

Silindrik koordinatalarda

$$e_{rr} = \frac{\partial V_r}{\partial r},\quad e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r},\quad e_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z},\quad 2e_{r\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\varphi}{r}\right),$$
$$2e_{\varphi z} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi},\quad 2e_{rz} = \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \tag{16}$$

Sferik koordinatalarda

$$e_{rr} = \frac{\partial V_r}{\partial r}, e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r}, e_{\theta\theta} = \frac{1}{r\, sin\varphi}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} + \frac{V_\varphi ctg\varphi}{r}, 2e_{r\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r},$$
$$2e_{\theta r} = \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r sin\varphi}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\theta}{r},\qquad 2e_{\theta\varphi} = \frac{1}{r\, sin\varphi}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} - \frac{V_\theta ctg\varphi}{r}. \tag{17}$$

Navye-Stoks qonuni

$$p_{ij} = -pg_{ij} + \lambda g_{ij} div\vec{V} + 2\mu e_{ij} \tag{18}$$

Masala Berilgan tezliklar maydoni $\vec{V} = \left(\frac{Ax^2}{y} sin\,\omega t, \frac{By^2}{z} cos\,\omega t, \frac{Az^2}{x} sin\,\omega t\right)$ uchun tutash muhit zichligi o'zgarishini aniqlang, uyurma vektorini, tezlanishni va kuchlanish tenzori komponentalarin aniqlang.

Yechish Zichlikning o'zgarishini topish uchun uzviylik tenglamasidan foydalanamiz. Tezliklar maydoni divergensiyasini topamiz

$$div\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{2Ax}{y} sin\,\omega t + \frac{2By}{z} cos\,\omega t + \frac{2Az}{x} sin\,\omega t \neq 0$$

Demak, muhitsiqilmasekan.

(9) gako'ratezliklarmaydoniuyurmasinitopamiz

$$\omega = \frac{1}{2} rot\vec{V} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{Ax^2}{y} sin\,\omega t & \frac{By^2}{z} cos\,\omega t & \frac{Az^2}{x} sin\,\omega t \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{By^2}{z^2} cos\,\omega t\,\vec{i} + \frac{Az^2}{x^2} sin\,\omega t\,\vec{j} + \frac{Bx^2}{y^2} sin\,\omega t\,\vec{k}\right)$$

tezlanish vektori komponentalari

$$a_x = \frac{Ax^2\omega}{y}\cos\omega t + \frac{2A^2x^3}{y}\sin^2\omega t - \frac{ABx}{2z}\sin 2\omega t$$
$$a_y = -\frac{By^2\omega}{z}\sin\omega t + \frac{2B^2y^3}{z^2}\cos^2\omega t - \frac{ABy^2}{2x}\sin 2\omega t$$
$$a_z = \frac{Az^2\omega}{x}\cos\omega t - \frac{A^2z^2}{y}\sin^2\omega t + \frac{2A^2z^2}{x^2}\sin^2\omega t$$

Deformasiya tezliklari tenzori komponentalari

$$e_{xx} = \frac{2Ax}{y}\sin\omega t,\ e_{yy} = \frac{2Ay}{z}\cos\omega t,\ e_{zz} = \frac{2Az}{x}\sin\omega t,\ e_{xy} = e_{yx} = -\frac{Ax^2}{2y^2}\sin\omega t,$$
$$e_{xz} = e_{zx} = -\frac{Az^2}{2x^2}\sin\omega t,\ e_{yz} = e_{zy} = -\frac{By^2}{2z^2}\cos\omega t$$

Kuchlanish tenzori komponentalari

$$p_{xx} = -p + \lambda\left(\frac{2Ax}{y}\sin\omega t + \frac{2By}{z}\cos\omega t + \frac{2Az}{x}\sin\omega t\right) + \frac{4\mu Ax}{y}\sin\omega t,$$
$$p_{yy} = -p + \lambda\left(\frac{2Ax}{y}\sin\omega t + \frac{2By}{z}\cos\omega t + \frac{2Az}{x}\sin\omega t\right) + \frac{4\mu Ay}{z}\cos\omega t,$$
$$p_{zz} = -p + \lambda\left(\frac{2Ax}{y}\sin\omega t + \frac{2By}{z}\cos\omega t + \frac{2Az}{x}\sin\omega t\right) + \frac{4\mu Az}{x}\sin\omega t,$$
$$p_{xy} = -\frac{\mu Ax^2}{y^2}\sin\omega t,\quad p_{xz} = -\frac{\mu Az^2}{x^2}\cos\omega t,\quad p_{yz} = -\frac{\mu Ay^2}{z^2}\sin\omega t,$$

TOPSHIRIQ

Berilgantezliklarmaydoni $\vec{V} = (V_i)$ uchunDekart, silindrikvasferikkoordinatalardatutashmuhitzichligio’zgarishinianiqlang, uyurmavektorini, tezlanishnivakuchlanishtenzorikomponentalarinaniqlang.

1. $V_x = A\frac{y^2}{x}\sin\omega t,\ V_y = A\frac{yz}{x}\sin\omega t,\ V_z = A\frac{xy}{z}\sin\omega t;$

$V_r = -Ar\sin\varphi\sin\omega t,\ V_\varphi = A\frac{r^2}{z}\cos^2\varphi\sin\omega t,\ V_z = A\frac{r^2}{z}ch\varphi\sin\omega t$

$V_r = Ar\sin\varphi\cos\theta\sin\omega t,\ V_\varphi = Ar(\cos\varphi - \sin\theta)\sin\omega t,\ V_\theta = Ar\sin\theta\cos\varphi\sin\omega t$

2. $V_x = \frac{xy}{tz},\ V_y = \frac{x^2+y^2}{tz},\ V_z = \frac{y^2+z^2}{tx};$

$V_r = \frac{r^2}{tz}\cos\varphi,\ V_\varphi = \frac{r}{t}\cos^2\varphi,\ V_z = \frac{r^2}{tz}\sin\varphi$

$V_r = Ar\sin\varphi\cos\theta\sin\omega t,\ V_\varphi = Ar(ch\varphi - sh\theta)\sin\omega t,\ V_\theta = Ar\sin\theta\cos\varphi\sin\omega t$

3. $V_x = \frac{x^2}{(y+z)t},\ V_y = \frac{z^2}{(x+y)t},\ V_z = \frac{y^2}{(x+z)t};$

$V_r = Ar\sin^2\varphi\sin\omega t,\ V_\varphi = A\frac{r^2}{z}\sin\varphi\cos\omega t,\ V_z = A\frac{z^2}{r}ch\varphi\sin\omega t$

$V_r = Ar\sin\varphi\, sh\theta\cos\omega t,\ V_\varphi = -Ar\cos^2\varphi\sin\theta\sin\omega t,\ V_\theta = Ar\,sh\theta\cos\varphi\cos\omega t$

4. $V_x = A\frac{x^3}{y^2+z^2}\sin\omega t,\ V_y = A\frac{y^2}{x+z}\sin\omega t,\ V_z = \frac{Ax^2}{z+y}\sin\omega t;$

$V_r = \frac{r^2}{tz}\sin\varphi,\ V_\varphi = -\frac{r}{t}\sin^2\varphi,\ V_z = \frac{z}{t}\sin\varphi$

$V_r = Ar\cos^2\theta\sin\omega t,\ U_\varphi = Ar\cos\varphi\sin\theta\sin\omega t,\ U_\theta = Ar\sin^2\theta\sin\omega t$

5. $V_x = -\frac{xy}{tz}, V_y = \frac{x^3}{(y^2+z^2)t}, V_z = \frac{y^2}{(x+z)t};$

$V_r = Az\,sin^2\varphi\,sin\,\omega t, V_\varphi = Ar\cos\varphi\sin\omega t, V_z = Ar(\cos\varphi - \sin\varphi)\sin\omega t$

$V_r = -Ar\,sin^2\varphi\,sin\,\omega t, V_\varphi = Arsh^2\theta\sin\omega t, V_\theta = Arsh\theta\,ch\varphi\sin\omega t$

6. $V_x = \frac{x^2y}{tz^2}, V_y = \frac{x^3}{(y^2+z^2)t}, V_z = \frac{z^2}{(x+y)t};$

$V_r = \frac{Az^2}{r}\sin\varphi\cos\omega t, V_\varphi = Ar\cos^2\varphi\cos\omega t, V_z = -Az\cos\varphi\cos\omega t$

$V_r = Ar\sin\varphi\cos\theta\sin\omega t, V_\varphi = Arch^2\varphi\sin\theta\sin\omega t, V_\theta = Arsh\theta\cos\varphi\sin\omega t$

7. $V_x = \frac{xy}{(z+y)t}, V_y = \frac{yz}{tx}, V_z = \frac{y^2}{t(z+x)};$

$V_r = Ar\,sh\varphi\sin\omega t, V_\varphi = A\frac{z^2}{r}\cos\varphi\sin\omega t, V_z = \frac{Ar^2}{z}\cos^2\varphi\sin\omega t$

$V_r = Ar\sin^2\theta\sin\omega t, V_\varphi = -Ar\cos^2\varphi\sin\omega t, V_\theta = Ar\sin^2\theta\sin\omega t$

8. $V_x = \frac{x^2y}{tz^2}, V_y = -\frac{x^2y^2}{tz^3}, V_z = \frac{y^2z^2}{tx^3}; V_r = \frac{r^2}{tz}\sin\varphi, V_\varphi = \frac{z^2}{tr}ch\varphi, V_z = \frac{r^2}{tz}\cos\varphi$

$V_r = Ar\sin\varphi\cos\theta\sin\omega t, V_\varphi = Ar\cos\varphi\sin\theta\sin\omega t, V_\theta = Ar\sin\theta\cos\varphi\sin\omega t$

9. $V_x = \frac{x^2}{ty}, V_y = \frac{z^3}{txy}, V_z = \frac{x^3}{tzy};$

$V_r = \frac{r}{t}ch\varphi, V_\varphi = -\frac{z^2}{tr}\cos\varphi, V_z = \frac{r^2}{tz}sh\varphi$

$V_r = Ar\sin\varphi\cos\theta\sin\omega t, V_\varphi = Ar\cos\varphi\sin\theta\sin\omega t, V_\theta = Ar\sin\theta\cos\varphi\sin\omega t$

10. $V_x = \frac{x^3}{tyz}, V_y = \frac{y^2}{tz}, V_z = \frac{z^3}{txy};$

$V_r = A\left(r - \frac{r^2}{z}\right)\sin\varphi\sin\omega t, V_\varphi = \frac{Az^2}{r}\cos\varphi\sin\omega t, V_z = \frac{Ar^2}{z}ch\varphi\sin\omega t$

$V_r = Ar\cos^2\theta\cos\omega t, V_\varphi = -Ar\cos^2\varphi\cos\omega t, V_\theta = -Ar\sin\theta\cos\varphi\cos\omega t$

11. $V_x = \frac{yx^2}{tz^2}, V_y = \frac{y^2z}{tx^2}, V_z = \frac{x^2y^2}{tz^3};$

$V_r = \frac{r^2}{tz}\sin\varphi, V_\varphi = Az\cos\varphi\sin\omega t, V_z = \frac{r^2}{tz}\cos\varphi$

$V_r = -Ar\sin\varphi\cos\theta\sin\omega t, V_\varphi = -Ar\cos\varphi\sin\theta\sin\omega t, V_\theta = -Ar\sin^2\theta\sin\omega t$

12. $V_x = \frac{y^2}{xt}, V_y = \frac{yz}{xt}, V_z = \frac{xy}{zt};$

$V_r = Ar\sin^2\varphi\sin\omega t, V_\varphi = Ar\cos^2\varphi\sin\omega t, V_z = A\frac{r^2}{z}\cos\varphi\sin\omega t$

$V_r = Ar\sin\varphi\cos\theta\cos\omega t, V_\varphi = Ar\cos\varphi\sin\theta\cos\omega t, V_\theta = Ar\sin\theta\cos\varphi\cos\omega t$

13. $V_x = \frac{xz}{ty}, V_y = -\frac{yx}{tz}, V_z = \frac{yz}{tx};$

$V_r = Ar\cos^2\varphi\sin\omega t, V_\varphi = A(r+z)\cos\varphi\sin\omega t, V_z = \frac{Ar^2}{z}\sin\varphi\sin\omega t$

$V_r = Arsh\varphi\cos\theta\cos\omega t, V_\varphi = Ar\cos\varphi\sin\theta\cos\omega t, V_\theta = Ar\sin\theta\,sh\varphi\cos\omega t$

14. $V_x = \frac{x^2y}{tz^2}, V_y = \frac{xy^2}{tz^2}, V_z = \frac{yz^2}{tx^2};$

$V_r = A(r+z)\sin\varphi\cos\omega t, V_\varphi = Ar\cos^2\varphi\cos\omega t, V_z = Ar\cos\varphi\cos\omega t$

$V_r = Ar\sin\varphi\cos\theta\sin\omega t, V_\varphi = Ar\cos\varphi\sin\theta\sin\omega t, V_\theta = Ar\sin\theta\cos\varphi\sin\omega t$

15. $V_x = \frac{xy^2}{tz^2},\ V_y = \frac{x^2y}{tz^2},\ V_z = \frac{yz^2}{tx^2};$

$V_r = A\left(r + \frac{z^2}{r}\right)\sin\varphi \sin\omega t,\ V_\varphi = Ar\cos\varphi \sin\omega t,\ V_z = \frac{Ar^2}{z}\sin\varphi \sin\omega t$

$V_r = -Ar\sin^2\theta \sin\omega t,\ V_\varphi = Ar\cos\varphi\, sh\theta \sin\omega t,\ V_\theta = -Ar\sin\theta\cos\varphi \sin\omega t$

16. $V_x = \frac{yz^2}{tx^2},\ V_y = \frac{x^2z}{ty^2},\ V_z = \frac{yx^2}{tz^2};$

$V_r = Ar\sin^2\varphi \cos\omega t,\ V_\varphi = \frac{Ar^2}{z}\cos\varphi \cos\omega t,\ V_z = -Az\sin^2\varphi \cos\omega t$

$V_r = Arsh\varphi \cos\theta \sin\omega t,\ V_\varphi = Arch\varphi \sin\theta \sin\omega t,\ V_\theta = Arsh\theta \cos\varphi \sin\omega t$

17. $V_x = \frac{xy}{tz},\ V_y = \frac{zy}{tx},\ V_z = \frac{xz}{ty};\ V_r = \frac{r^2}{tz}\cos\varphi,\ V_\varphi = Ar\sin^2\varphi \sin\omega t,\ V_z = A(z+r)\cos\varphi \sin\omega t$

$V_r = -Ar\cos^2\varphi \sin\omega t,\ V_\varphi = Ar\cos\varphi\, sh\theta \sin\omega t,\ V_\theta = Ar\sin^2\theta \sin\omega t$

18. $V_x = \frac{y^2}{tx},\ V_y = \frac{yz}{tx},\ V_z = \frac{xy}{tz};$

$V_r = Ar\, ch^2\varphi \cos\omega t,\ V_\varphi = \frac{Az^2}{r}\cos\varphi \cos\omega t,\ V_z = \frac{Ar^2}{z} sh\varphi \cos\omega t$

$V_r = -Ar\sin\varphi \cos\theta \sin\omega t,\ V_\varphi = Ar\cos^2\varphi \sin\theta \sin\omega t,\ V_\theta = Ar\sin^2\theta \cos\varphi \sin\omega t$

19. $V_x = \frac{zy^2}{tx^2},\ V_y = \frac{yz^2}{tx^2},\ V_z = \frac{xy^2}{tz^2};$

$V_r = \frac{Ar^2}{z}\sin\varphi \cos\omega t,\ V_\varphi = Ar\sin^2\varphi \cos\omega t,\ V_z = Az\sin\varphi \cos\omega t$

$V_r = Arsh\varphi \cos\theta \sin\omega t,\ V_\varphi = -Ar\cos\varphi \sin\omega t,\ V_\theta = -Ar\sin\theta \cos\varphi \sin\omega t$

20. $V_x = \frac{zy^2}{tx^2},\ V_y = \frac{yx^2}{tz^2},\ V_z = \frac{xz^2}{ty^2};$

$V_r = Ar\sin^2\varphi \sin\omega t,\ V_\varphi = \frac{Ar^2}{z}\cos\varphi \sin\omega t,\ V_z = \frac{Az^2}{r}\sin\varphi \sin\omega t$

$V_r = Ar\sin\varphi \cos\theta \cos\omega t,\ V_\varphi = -Ar\cos\varphi \sin\theta \sin\omega t,\ V_\theta = Ar\sin\theta \sin\omega t$

21. $V_x = \frac{x^2}{(y+z)t},\ V_y = -\frac{y^2}{(x+z)t},\ V_z = \frac{z^2}{(x+y)t};$

$V_r = Ar\cos\varphi \sin\omega t,\ V_\varphi = Ar\sin\varphi \sin\omega t,\ V_z = \frac{Ar^2}{z}\cos\varphi \sin\omega t$

$V_r = Ar\sin\varphi \sin\theta \cos\omega t,\ V_\varphi = Ar\sin\varphi \cos\theta \sin\omega t,\ V_\theta = Ar\sin\theta \cos\omega t$

22. $V_x = \frac{y^2}{xt},\ V_y = \frac{z^2}{t(x+z)},\ V_z = \frac{x^2}{(z+y)t};$

$V_r = Ar\sin\varphi \cos\omega t,\ V_\varphi = Ar\cos\varphi \cos\omega t,\ V_z = -Ar\cos\varphi \sin\omega t$

$V_r = Ar\sin\varphi \cos\theta \sin\omega t,\ V_\varphi = Ar\cos\varphi \sin\theta \cos\omega t,\ V_\theta = Ar\cos\varphi \sin\omega t$

23. $V_x = \frac{x^3}{(y^2+z^2)t},\ V_y = -\frac{y^2}{tz},\ V_z = \frac{z^2}{ty};$

$V_r = Ar\, sh\varphi \cos\omega t,\ V_\varphi = Ar\cos\varphi \cos\omega t,\ V_z = \frac{Ar^2}{z}\cos\varphi \cos\omega t$

$V_r = Ar\sin\varphi \cos\theta \sin\omega t,\ V_\varphi = Ar\cos\varphi \sin\theta \sin\omega t,\ V_\theta = Ar\sin\theta \cos\varphi \sin\omega t$

24. $V_x = \frac{x^2}{(y+z)t},\ V_y = \frac{z^2}{(x+y)t},\ V_z = \frac{y^2}{(x+z)t};$

$V_r = Ar\, ch\varphi \sin\omega t,\ V_\varphi = Ar\sin\varphi \sin\omega t,\ V_z = Ar\cos\varphi \sin\omega t;$

$V_r = -Ar\sin\varphi \cos\theta \cos\omega t,\ V_\varphi = Ar\cos^2\varphi \cos\omega t,\ V_\theta = Ar\sin\theta \cos\varphi \cos\omega t.$

25. $V_x = \frac{x^3}{ty^2}, V_y = \frac{y^2}{(x+z)t}, \; V_z = \frac{z^3}{(x^2+y^2)t};$

$$V_r = Ar\,sin\,\varphi\,cos\,\omega t,\, V_\varphi = -Arch\varphi\,cos\,\omega t,\, V_z = Az\,sin\,\varphi\,cos\,\omega t\,;$$

$$V_r = Ar\,sin^2\,\varphi\,sin\,\omega t\,,\, V_\varphi = Ar\,cos\,\varphi\,sin\,\theta\,sin\,\omega t,\, V_\theta = Arsh\theta\,cos\,\varphi\,sin\,\omega t\,;$$

26. $V_x = \frac{yx^2}{tz^2}, V_y = \frac{zy^2}{tx^2}, \; V_z = \frac{z^2}{(x+y)t};$

$$V_r = Ar\,sin^2\,\varphi\,e^{-\omega t}\,,\, V_\varphi = Ar\,sin^2\,\varphi\,e^{-\omega t}\,,\, V_z = Az\,cos^2\,\varphi\,e^{-\omega t}\,;$$

$$V_r = Ar\,cos\,\varphi\,cos\,\theta\,e^{-\omega t}\,,\, V_\varphi = -Ar\,cos\,\varphi\,sin\,\theta\,e^{-\omega t}\,,\, V_\theta = Ar\,cos^2\,\varphi\,e^{-\omega t}$$

Adabiyotlar

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
2. «Механика сплошной среды в примерах и задачах». Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
4. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 310 с.
5. Механика сплошных сред в задачах. В двух томах. М.: «Московский лицей», 1996. Под ред. М.Э. Эглит.

KURS ISHLARI MAVZULARI VA ULARNI BAJARISH BO'YICHA TAVSIYALAR

Kurs ishining maqsadi talabalarni mustaqil ishlash qobiliyatini rivojlantirish, olgan nazariy bilimlarini mustahkamlash, amaliy ishlarga qo'llash ko'nikmalarini hosil qilish. Kurs ishini bajarishda nazariy bilimlarni mustaqil tahlil qilish, tanlangan mavzuga oid adabiyotlardan foydalanish ko'nikmasini hosil qilish.

- Kurs ishlarida o'qitilgan mavzularni chuqurroq o'rganilishi va ularga doir kamida o'nta yangi masala yechilishi shart;
- *Kurs ishi ustida ishlash tartibi*: mavzuni tanlash; mavzu bo'yicha asosiy manbalarni o'rganish; zaruriy materiallarni konspektlashtirish; tadqiqot rejasini tuzish; yig'ilgan materiallarni tartibga solish va yozish; foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatini rasmiylashtirish; kurs ishini rasmiylashtirish;
- *Kurs ishini rasmiylashtirish tartibi*: A4 shakldagi qog'ozga 12-shrift, 1,5 interval, qog'ozning bir tomonida chapdan – 3 sm, o'ngdan – 1,5 sm, yuqori va pastdan – 2 sm xoshiya qoldiriladi; matn sahifalariga tartib raqami beriladi, 1-titul varag'i, 2-reja, 3-betdan boshlab sahifalanadi;
- *Kurs ishining* hajmi 20-25 betdan oshmasligi lozim;
- *Kurs ishi matnini rasmiylashtirish tartibi*: titul varag'i; ish rejasi; kirish; asosiy qism (kamida 3 ta banddan iborat bo'lishi lozim); xulosa; foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati; ilova (jadval, diagramma, grafik, rasm, sxema va hokazo).

Kurs ishining mavzulari

1. Eyler va uzluksizlik tenglamalarini silindrik va sferik koordinatalarda yozilishi.
2. Silliq quvurlarda qarshilik formulalari.
3. Laplas formulasi.
4. Anizotrop materiallar uchun Guk qonunini xususiy hollari.
5. Vektor maydoni xossalari va Stoks, Gauss-Ostragradskiy formulalari.
6. Jismni suyuqlikdagi harakati kinematikasi masalasi.
7. Cheksiz katta massali ideal suyuqlikda jism harakati, unga ta'sir kuchi.
8. Tekis to'lqinlar, progressiv to'lqinlar.
9. Ichki bosimli ekssentrik quvurlarda kuchlanish taqsimoti.
10. Uyurma vektori, Bio-Savar formulasi. Uyurma vektorlar tizimi.
11. Kulon ishqalanishidagi kvazistatik yuklanish.
12. Jemichkin masalasi (egri to'sin egilishi masalasi).
13. Elastik-plastik sterjenlar buralishiga doir masala tahlili.

14. Elastik-plastik sterjenlar egilishiga doir masala tahlili.
15. Trubaning ichki va tashqi bosimlari uchun (Lyame masalasi) kuchlanish tenzori va uning fizik komponentalari.
16. Tekis kuchlanganlik holati uchun elastiklik nazariyasi masalalarining qo'yilishi.
17. Chekli deformasiyalanish holati kuchlanish tenzori.
18. Yopishqoq suyuqlik modeli.
19. Qayishqoq-elastik jism modeli
20. Plastik jism modeli
21. Umumlashgan Guk qonuni
22. T.M.M. masalalarining qo'yilishi umumiy asoslari.
23. T.M.M. masalalariva chiziqlashtirilgan tenglamalari.
24. Ikki parametrli muhitlar termodinamik potenyiallari.
25. Qaytar jarayonlarda aralashmalarni modellashtirish.
26. Qaytmas jarayonlarda aralashmalarni modellashtirish.

BITIRUV MALAKAVIY ISHLAR BANKI

1. Og'irlik kuchini hisobga olgan holda suyuqliklarda sirt to'lqini tarqalishini tadqiq etish;
2. Yopishqoq suyuqlikning aylanma harakat tenglamalari va uning yechimlari;
3. Tutash muhit uzilish sirtlariga doir amaliy masalalar;
4. Og'ir suyuqliklarda sirt to'lqini tarqalishi
5. Qayishqoq-elastik material deformatsiyalarini sodda mexanik modellar yordamida o'rganish
6. Ixtiyoriy ko'ndalang kesimli prizmatik brusning buralishi
7. Silindrik sterjenda bo'ylama to'lqin tarqalishini Poxgammer tenglamasi bo'yicha tahlil qilish
8. Silindrik strejenda buralмa to'lqin tarqalishini Poxgammer tenglamasi bo'yicha tahlil qilish
9. Qattiq jismning suyuqlik sirtiga kelib urilishi va unga botishi
10. Erkinlik darajasi chekli sistema harakat tenglamalarining ko'p qavatli bino tebranishlarini o'rganishga tadbiqi;
11. Ko'ndalang kesimi o'zgaruvchan bir jinslimas sterjenda bo'ylama to'lqin tarqalishi.
12. Silindrik qobiqning ko'ndalang tebranishlariga uning ichidagi suyuqlikning ta'siri
13. Ko'p qatlamli balkaning ko'ndalang ;
14. Elastik sferik qobiqning tashqi kuch ta'sirida deformatsiyalanishi;
15. Ikki qatlamli silindrik qobiq tebranishlari;
16. Elastik sharning radial tebranishlari;
17. Bo'ylama yo'nalishda harakatlanuvchi egiluvchan sterjenning ko'ndalang tebranishlari;
18. Suyuqlik oqimida joylashgan doiraviy elastik sterjenning ko'ndalang tebranishlari;
19. Ko'p qatlamli balkaning o'q bo'ylab qo'yilgan kuch ta'sirida egilishi;
20. Balka ko'ndalang tebranishlarini turli mexanik effektlarni hisobga olgan holda tahlil qilish;
21. Ichidan suyuqlik oqib o'tuvchi silindrik qobiqning tebranishlari;
22. Tashqi kuchning turli ko'rinishlarida doiraviy plastinka o'qqa nisbatan simmetrik egilishi;
23. Prizmatik brusning egilishini sonli tahlil qilish
24. Simmetriya o'qi atrofida aylanuvchi transversal-izotrop doiraviy sterjenning buralma tebranishlari
25. Harakatlanuvchi yuklanish ta'sirida balkaning ko'ndalang tebranishlari
26. Balka tebranishlariga tayanch silkinishining ta'siri
27. Aylanuvchi doiraviy silindrik transversal-izotrop qobiqning buralma tebranishlari
28. Aylanuvchi doiraviy silindrik qobiqning buralma tebranishlariga qovushoq-elastiklik xususiyatining ta'siri
29. Ichki bosim ta'sirida quvurning elastik-plastik deformatsiyalanishi
30. To'g'ri to'rtburchakli va doiraviy membrana tebranishlari

O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND
DAVLAT
UNIVERSITETI

AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA FAKULTETI

«MATEMATIK MODELLASHTIRISH» KAFEDRASI

3. «TUTASH MUHITLAR MEXANIKASI» FANINI BO’YICHA GLOSSARIY

«5130200 – Amaliy matematika va informatika» ta’lim yo’nalishi 3 kurs talabalari uchun

Samarqand – 2019

GLOSSARIY (lug'at, sharhlar, izohlar)

АТМОСФЕРА – Yer yuzidagi og'irlik kuchi ta'sir qiluvchi havo qatlami.

ВАКУУМ–*vakuum*; berk idishdagi havoning yoki gazning atmosfera bosimiga nisbatan siyraklashgan holati: $P_v = P_{atm.} - P_t$, bu yerda P_{at}– atmosfera havo bosimi; P_t – to'la bosim.

ВЯЗКАЯЖИДКОСТЬ– *qovushoq suyuqlik*; harakati jara-yonida suyuqlik zarrachalarining deformatsiyalanishidan bog'liq ham normal va ham urinma kuchlanishlari paydo bo'ladigan suyuqlik.

ВЯЗКОСТЬ– *qovushoqlik* (*ichki gidravlik ishqalanish kuchi*); suyuqlikning uning zarrachalari nisbiy harakatiga qarshilik ko'rsatish xossasi, boshqacha aytganda, suyuqlik bir bo'lagining boshqa bir bo'lagi harakatiga qarshilik ko'rsatuvchanlik xossasi. Suyuqlikning qovushoqligi harorat (u oshganda suyuqlikning qovushoqligi kamayadi, gazniki esa oshadi va aksincha) va bosimdan bog'liq bo'lib, u uchta miqdor bilan baholanadi: dinamik koeffisiyent (μ, N·s/m^2), kinematik koeffisiyent (υ, m^2/s), Engler gradusi (°E). Qovushoqlik ikki turga ajraladi: hajmiy va tangensial qovushoqliklar. Hajmiy qovushoqlik deb suyuqlikning o'zida cho'zuvchi zo'riqishlarini paydo qilish xususiyatiga aytiladi. Masalan, suvning bunday qovushoqligi unda tovush va asosan ultratovush to'lqinlar tarqalganda namoyon bo'ladi. Tangensial qovushoqlik suyuqlikning siljish zo'riqishlariga qarshilik ko'rsatish xususiyatini xarakterlaydi.

ГИДРОСТАТИКА – *gidrostatika*;bu suyuqlik va gazlar mexanikasi fanining tanlangan koordinata boshiga nisbatan suyuqlik muvozanati va suyuqlikka to'la yoki qisman botirilgan qattiq jism muvozanatini o'rganuvchi bo'limi.

ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕДАВЛЕНИЕ– *gidrostatik bosim*; gidrostatik kuchning u ta'sir qilayotgan yuzaga nisbating shu yuza nolga intilgandagi limiti gidrostatik bosim deyiladi yoki tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan muvozanat (tinch) holatda turgan suyuqlikdagi bosim.

ГЛАВНЫЕНАПРЯЖЕНИЯ– *bosh kuchlanishlar*; qaralayotgan nuqtada kuclanishning bosh o'qlariga perpendikulyar yuzalardagi normal kuchlanishlar.

ГЛАВНЫЕОСИДЕФОРМАЦИИ– *deformatsiyalarning bosh o'qlari*;berilgan nuqta orqali o'tuvchi va suyuqlik zarrachalarining deformatsiyasi natijasida o'zaro perpendikulyar bo'lib qoladigan uchta chiziqli elementlari bilan mos keluvchi uchta o'zaro perpendikulyar to'g'ri chiziqlar.

ГЛАВНЫЕОСИНАПРЯЖЕНИЙ– *kuchlanishlarning bosh o'qlari*; fazoning berilgan nuqtasi orqali o'tuvchi, urinma kuchlanishlari nolga teng bo'lgan o'zaro perpendikulyar uchta tekisliklar normallari bo'yicha yo'nalgan uchta to'g'ri chiziq.

ДВИЖЕНИЕ НЕРАВНОМЕРНОЕ–*notekis harakat*; oqimning turlicha kesimida tezlik miqdori turlicha bo'lgan harakat.

ДВИЖЕНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ– *beqaror* (*nobarqaror*) *harakat*; harakatlanayotgan suyuqlik zarrachalarining tezligi miqdori va uning yo'nalishi vaqt bo'yicha o'zgarib turadigan hol.

ДВИЖЕНИЕ РАВНОМЕРНОЕ или ПАРАЛЛЕЛЬНОСТРУЙНОЕ–*tekis yoki oqimlari parallel harakat*; bu shunday harakatki, unda harakat kesimi tezlik epyurasining shakli va o'lchamlari berilgan vaqtda oqim bo'yicha o'zgarmaydi.

ДВИЖЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЕ или ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ– *turbilent harakat yoki turbulent tartibli harakat.*

ДИВЕРГЕНЦИЯ – *divergensiya*; tarqalish (berilgan nuqtadagi vektor maydon oqimining o'zgarishini tavsiflovchi kattalik).

ДИНАМИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ВЯЗКОСТИ или КОЭФФИЦИЕНТ ВЯЗКОСТИ– *yopishqoqlik* (*qovu-shoqlik*) *dinamik koeffisiyenti yoki yopishqoqlik* (*qovushoqlik*) *koeffisiyenti*; (yoki Nyuton suyuqligi urinma kuchlanishlarining deformatsiya tezliklari tenzori orqali $\sigma_{ij} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij}$) ifodasiga kiruvchi proporsionallik koeffisiyenti, bunda τ – harakatlanayotgan suyuqlikdagi urinma kuchlanish; Bu koeffisiyent temperaturadan kuchli darajada bog'liq, bosimdan esa deyarli bog'liq emas.

ДИФФУЗИЯ – *diffuziya*; issiqlik harakati natijasida idishdagi ikki aralashuvchan suyuqliklar molekulalarining ajralish sirti orqali asta sekin biridan ikkinchisiga o'tishi hodisasi (natijada suyuqliklar o'zaro aralashishadi). Bu hodisa boshqa agregan holatidagi moddalarda ham sodir bo'ladi.

ЖИДКОСТЬ– *suyuqlik*; moddaning agregat holatlaridan biri bo'lib, xoxlagancha kichik kuch ta'sirida o'z shaklini o'zgartirish xususiyatiga ega uzluksiz muhit (fizik jism), ya'ni oquvchanlik xossasiga ega va o'z shakliga ega bo'lmagan ixtiyoriy muhit. *Izoh*: gaz «siqiluvchan suyuqlik» (havo, kislorod, azot, propan va hokazo) deb atalgan holda suyuqlikni gazdan ajratish maqsadida «tomchili suyuqlik» (suv, neft, kerosin, yog’ va hokazo) atamasi ishlatiladi. Tomchili suyuqliklar (sodda qilib, suyuqliklar) va gazsimon suyuqliklar (gazlar) bir biridan siqiluvchanlik (hajmini o’zgartiruvchanlik) xususiyati bilan ajralib turadi.

ЖИДКОСТЬ ИДЕАЛЬНАЯ –*ideal suyuqlik*; yopishqoqligi (ichki ishqalanishi) yo’q va harorat o’zgarganda hajmi sira o’zgarmaydi deb faraz qilingan (ideallashtirilgan) suyuqlik.

ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ–*harakat miqdori o’garishi qonuni*; individual hajm harakat miqdorining o’zgarish tezligi unga ta’sir etayotgan tashqi kuchlar yig’indisiga teng.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ– *massaning saqlanish qonuni*; individual hajmning massasi ozgarmaydi, ya’ni massaning vaqt bo’yicha o’zgarishi nolga teng.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ (первыйзаконтермодинамики)–*energiyaning saqlanish qonuni*; individual hajm to’la energiyasining o’zgarish tezligi vaqt birligi ichida unga tashqaridan kelayotgan energiya oqimiga (tashqi kuchlar, issiqlik va boshqalar ishi shaklida) teng.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНТРОПИИ(второйзаконтермодинамики) –*entropiyaning saqlanish qonuni*; individual hajm entropiyasining o’zgarish tezligi vaqt birligi ichida unga tashqaridan kelayotgan entropiya oqimi va hajm ichida ishlab chiqilgan entropiya yig’indisiga teng (faqat qaytarilmaydigan jarayonlar uchun).

ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ– *ideal suyuqlik*; harakati davomida faqat normal kuchlanish paydo bo’ladigan suyuqlik, boshqacha aytganda, qovushoqligi e’tiborga olinmagan (ichki urinma kuchlanishlari nolga teng) real suyuqlik modeli.

КАСАТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ– *urinma kuchlanish yoki urinma zo’riqish*; kuchlanish vektorining qaralayotgan nuqtada aniq oriyentirlangan elementar yuzaga urinma tekislikdagi proyeksiyasi: $\sigma_{nt} = \sigma_n \cdot t$. *Izoh*: agar yuza x_1 o’q boyicha normalga oriyentirlangan bo’lsa, u holda x_2 va x_3 yo’nalishlardagi urinma kuchlanishlar σ_{12} va σ_{13} kabi belgilanadi, $\sigma_t = (\sigma^2_{12} + \sigma^2_{13})^{1/2} = (\sigma^2_1 - \sigma^2_{11})^{1/2}$ miqdor esa «to’la urinma kuchlanish» deb ataladi.

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ВЯЗКОСТИ– *yopishqoqlik*(*qovushoqlik*)*ning kinematik koeffisiyenti*; miqdor jihatidan μ - qovushoqlik dinamik koeffisiyentining ρ - suyuqlik zichligiga nisbati, yani $\upsilon = \mu/\rho$.

КОЭФФИЦИЕНТ ОБЪЕМНОГОСЖАТИЯ ЖИДКОСТИ–*suyuqlikning hajmiy siqilish koeffisiyenti*; suyuqlik hajmining nisbiy kamayishi berilgan hajmni har tomonlama tekis siquvchi normal zo’riqishga nisbati.

ЛИНИЯТОКА– *oqim chizig’i*; urinmasi tezlik vektori bilan mos keluvchi chiziq, boshqacha aytganda, har bir nuqtasiga o’tkazilgan urinma suyuqlik tezligiga parallel bo’lgan chiziq (bu shunday chiziqki, berilgan vaqt momentida uning har bir nuqtasida suyuqlik lahzaviy tezlik vektori shu chiziqqa o’tkazilgan urinmaga mos tushadi). *Izoh*: 1. Barqaror harakatda oqim chizig’i va suyuqlik zarrachasining harakat traektoriyasi o’zaro mos tushadi. 2. Bir o’lchovli harakatda oqim chizig’i va zarrachaning fizik fazodagi traektoriyasi o’zaro mos tushadi, ular to’g’ri chiziqlardan iborat bo’ladi. 3) oqimda o’tkaziladigan chiziq bo’ylab, qaralayotgan vaqtda suyuqlik zarrachalarining tezligi shu chiziqqa urinma bo’ylab yo’nalgan bo’ladi.

МАТЕРИАЛЬНАЯТОЧКА – *moddiy nuqta*; o’lchamlari hisobga olinmaydigan massaga ega obyekt (o’rganilayotgan harakatda jismning nuqtalari o’tgan masofaga nisbatan uning o’lchamlarini e’tiborga olmaslik mumkin bo’lgan holdagina o’rinli).

МЕСТНАЯ СКОРОСТЬ – *mahalliy tezlik*; suyuqlik fazosi nuqtasining qaralayotgan vaqt momentidagi tezligi.

НАПРЯЖЕНИЕ В ЖИДКОСТИ – *suyuqlikdagi kuchlanish*; suyuqlikning tutash zarrachalari orasidagi o’zaro ta’sir kuchlarining ular tutashgan sirt yuzasiga (bu yuza konturi, uning orientatsiyasi o’zgatmagan holda, berilgan nuqtagacha tortiladi) nisbatining limitiga teng vektor. *Izoh*: Masalan, agar yuza x_1 o’q boyicha normalga oriyentirlangan bo’lsa, u holda undagi kuchlanish σ_1 bilan, uning proeksiyalari esa σ_{11}, σ_{12}, σ_{13} bilan belgilanadi.

НЕВЕСОМАЯ ЖИДКОСТЬ– *vaznsiz suyuqlik*; harakati va muvozanati og’irlik kuchidan yoki inertsiyaning ko’chirma kuchlaridan bog’liq bo’lmagan suyuqlik.

НЕВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ– *qovushoqmas suyuqlik*; harakati jarayonida faqat normal kuchlanishlar paydo bo’ladigan suyuqlik.

НЕСЖИМАЕМАЯЖИДКОСТЬ– *siqilmaydigan suyuqlik*; zichligi bosimdan bog’liq bo’lmagan, ya’ni barcha zarrachalarining zichligi o’zgarmaydigan suyuqlik.

НОРМАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ– *normal kuchlanish*; kuchlanish vektorining qaralayotgan nuqtada aniq oriyentirlangan elementar yuzaga qo'yilgan tashqi $\vec{n}$ normalidagi proyeksiyasi: $\sigma_{nn} = \sigma_n \vec{n}$. *Izoh*: agar yuza x_1 o'q boyicha normalga oriyentirlangan bo'lsa, u holda $\sigma_{nn} = \sigma_{11}$.
НЬЮТОНОВСКАЯ И ЛИЛИНЕЙНО-ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ– *Nyuton suyuqligi yoki qovushoqligi chiziqli suyuqlik*; ichki ishqalanishning urinma zo'riqishi tezlik gradientiga to'g'ri proporsional: $\tau = \mu \frac{du}{dr}$. Nyuton suyuqliklari uchun tezliklarning chiziqli taqsimoti o'rinli, bunda *du*/*dy* – tezlik gradienti (suyuqlik ko'ndalang qatlamining siljish tezligi) o'zgarmas bo'lib qoladi. Grafikning burchak koeffisiyenti – siljish kuchlanishining tezlik gradiyentidan bog'liqligi μ – suyuqlikning qovushoqlik koeffisiyentiga mos keladi. U faqatgina temperatura va bosimdan bog'liq, siljish tezligidan esa bog'liq emas.
ОБРАТИМЫЙ ПРОЦЕСС– *qaytariluvchan jarayon*; agar tizim vaqt o'sishida ikkala taraflama yo'nalishda ham biror holatlar ketma-ketligidan o'tsa, u holda bunday holatlar ketma-ketligi *qaytariluvchan jarayon*, aks holda esa u *qaytarilmaydigan jarayon* deyiladi;
ОБЬЕМНЫЕ СИЛЫ–*hajmiy kuchlar*;zichligi hamma yerda birxil bo'lgan suyuqlikka ta'sir etayotgan massaviy kuchlar.
ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ– *bir o'lchovli harakat*; bunday harakatda muhitning barcha harakteristikalari faqatgina biror tekislikkacha bo'lgan *x* masofadan (tekis to'lqinli harakat) yoki biror to'g'ri chiziq – simmetriya o'qigacha bo'lgan *x* masofadan (silindrik to'lqinli harakat) yoki biror nuqta – simmetriya markazigacha bo'lgan *x* masofafan (sferik to'lqinli harakat) va vaqtdan (agar harakat nobarqaror bo'lsa) bog'liq bo'ladi. Sferik to'lqinli bir o'lchovli harakatda tezlik vektori mos sferik koordinatalar sitemasida noldan farqli faqatgina bitta radial komponentaga ega.
ОДНОРОДНАЯ ЖИДКОСТЬ– *bir jinsli suyuqlik*; barcha nuqtalarida tarkibi va zichligi bir xil, ya'ni qo'zg'almagan holatida zichligi o'zgarmas bo'lgan suyuqlik.
ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ– *o'qqa nisbatan simmetrik harakat*; simmetriya o'qi deb ataluvchi biror to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi ixtiyoriy tekislik uchun barcha parametrlari bir xil bo'lgan suyuqlik harakati (suyuqlikning ikki o'lchovli harakati bo'lib, silindrik koordinatalar sistemasida tezlik burchak koordinatadan bog'liq emas). *Izoh*: Silindrik koordinatalar sistemasida oqimning parametrlari burchak koordinatadan bog'liq emas, o'qqa nisbatan simmetrik harakat tezligi ikki yoki uchta komponentaga ega bo'lishi mumkin.
ПЕРЕМЕННЫЕ ЛАГРАНЖА– *Lagranj o'zgaruvchilari*; suyuqlik harakatini tavsiflashda erkin o'zgaruvchilar sifatida qo'llaniladigan fazoviy nuqtalar koordinalari va vaqt.
ПЕРЕМЕННЫЕ ЭЙЛЕРА– *Eyler o'zgaruvchilari*; suyuq-lik harakatini tavsiflashda erkin o'zgaruvchilar sifatida qo'llaniladigan fazoviy nuqtalar koordinalari va vaqt.
ПИТОТРУБКА–*Pito naychasi*; uchi to'g'ri burchak ostida qayrilgan kichik diametrli naycha, u oqimga qarshi qo'yiladi,naychada suyuqlikning ko'tarilishi tezlik naporini (damini) beradi.
ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ– *Tekis parallel harakat*; suyuqlik zarrachalari barcha parametrlari bilan biror qo'zg'almas tekislikka (zarrachalardan bu tekislikkacha bo'lgan masofadan bog'liq bo'lmagan holda) parallel harakat qilayotgan suyuqlik harakati (suyuqlikning tezligi qo'zg'almas tekislikka parallel va shu tekislikkacha bo'lgan masofadan bog'liq bo'lmagan holdagi ikki o'lchovli harakati).
ПЛОСКОСТЬ ТЕЧЕНИЯ– *oqish tekisligi*; tekis oqimda suyuqlik zarrachalari tezliklariga parallel tekislik.
ПЛОТНОСТЬ ЖИДКОСТИ–*suyuqlik zichligi*; suyuqlikning hajm birligidagi massasi.
ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ– *chegaraviy qatlam*; suyuqlik ta'siri paydo bo'ladigan qattiq jism sirtiga tutash qatlam yoki ikkita suyuqliklarning ajralish chegarasidagi qatlam yoki suyuqlikning erkin sirtidagi qatlam yoki suyuqlikning qovushoqligi namoyon bo'ladigan yupqa qatlami bo'lib, u katta Reynold sonlarida paydo bo'ladi.
ПОТЕНЦИАЛСКОРОСТИ– *tezlik potensiali*; *x*, *y*, *z* fazoviy koordinatalardan va *t* vaqtdan bog'liq $\varphi(x, y, z, t)$ skalyar funksiya bo'lib, uning gradiyenti suyuqlikning potensial harakati tezlik vektori bilan mos tushadi: $\vec{v} = \text{grad}\,\varphi$.
ПОТЕНЦИАЛЬНОЕДВИЖЕНИЕ– *potensial harakat*; tezlik potensialiga ega suyuqlik harakati. *Izoh*: Potensial harakatdagi suyuqlik oqimining barcha nuqtalarida tezlikning uyurma vektori nolga teng.

РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ – *muvozanat holati*; tashqi shartlar saqlanganda tizimning holat parametrlari uzoq vaqt oʻzgarmasdan oʻzgarmas qiymatlarni qabul qilib turadigan holat.
РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ– *tekis, bir me'yordagi harakat*; suyuqlik zarrachalari o'zgarmas tezlikka ega bo'lgandagi barqaror harakat (suyuqlikning tezligi koordinatadan bog'liq bo'lmagan holdagi barqaror harakati). *Izoh*: Oqimning parametrlari to'g'ri burchakli (x,y,z) dekart koordinatalari sistemasida qaysidir bitta koordinatadan bog'liq emas va tezlikning shu koordinata yo'nalishidagi komponentasi nolga eng.
РАСХОД (ОБЬЕМНЫЙ РАСХОД) ЖИДКОСТИ–*suyuqlikning sarfi yoki suyuqlikning hajm birligidagi sarfi;* oqim ko'ndalang kesimidan vaqt birligida oqib o'tgan suyuqlik hajmi:$Q=\omega\upsilon$.
СВОБОДНАЯПОВЕРХНОСТЬЖИДКОСТИ– *suyuqlikning erkin sirti*; aniq amaliy masalaga xos bo'lgan kinematik va dinamik shartlarga bo'ysingan holda erkin deformatsiyalanuvchan sirt bo'lib, u suyuqlik va gazsimon muhit yoki vakuum orasini ajratadi (boshqacha aytganda, suyuqlikning gaz yoki vakuum bilan tutash sirti bo'lib, u kinematik va dinamik shartlar saqlanilgan holda erkin deformasiyalanuvchan bo'ladi).
СЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ– *siqiluvchan suyuqlik*; zichligi bosimdan bog'liq suyuqlik.
СЖИМАЕМОСТЬ– *siqiluvchanlik*; suyuqlikning bosim o'zgarganda o'z zichligini o'zgartirish xossasi, boshqacha aytganda, suyuqlikning har tomonlama bosim ta'sirida o'z hajmini o'zgartirish (qayta tiklanuvchan) qobiliyati.
СИЛЫ ВНЕШНИЕ–*tashqi kuchlar*; suyuqlik biror hajmining moddiy zarrachasiga bosqa biror jism hajmidagi moddalarning ta'sir qilayotgan kuchlar, chunonchi, shu qarlayotgan suyuqlik hajmining moddiy zarrachalariga shu hajmni har tomondan o'rab turgan suyuqlikning ta'sir kuchlari. Ular ikki guruhga bo'linadi: massali kuchlar va sirt kuchlari.
СИЛЫ ВНУТРЕННИЕ– *ichki kuchlar*; suyuqlik moddiy zarrachalarining o'zaro ta'sir kuchlari.
СИЛЫ МАССОВЫЕ– *massali kuchlar*; qaralayotgan hajm birligi massasiga proporsional kuchlar (xususan, suyuqlik zarrachasining zichligi ozgarmaganda massaviy kuchlar hajmiy kuchlar deb ataladi), bu kuhlar Nyutonning 2-qonuniga bo'ysunadi (masalan,og'irlik kuchi, inertsiya kuchi).
СИЛЫ ОБЪЕМНЫЕ– *hajmiy kuchlar*; hajmni tashkil etuvchi barcha moddiy zarrachalarga qo'yilgan kuchlar (og'irlik kuchi; markazdan qochma kuchlar; magnit kuchlari; elektr kuchlari).
СИЛЫ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ–*sirt taranglik kuchlari*; suyuqlikning erkin sirtiga ta'sir etuvchi, shu sirtga urinma va erkin sirtning chegatasiga normal yo'nalgan, suyuqlikni sferik shaklga keltirishga intiluvchi kuchlar.Miqdor jihatidan suyuqlik sirti konturining uzun-ligi bilan sirt tarangligi koeffisienti ko'paytmasiga teng.
СИЛЫ ПОВЕРХНОСТНЫЕ–*sirt kuchlari*; suyuqlik hajmining sirtida joylashgan zarrachalariga ta'sir etuvchi kuchlar (masalan, atmosfera bosim kuchi, isnqalanish kuchi va b.). Sirt kuchlari va tashqi kuchlar suyuqlikda kuchlanishni paydo qiladi.
СКОРОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ– *deformatsiya tezligi*; berilgan nuqta orqali o'tuvchi suyuqlik zarrachalari barcha elementlari o'zgarishining tezligi bo'yicha aniqlanuvchi suyuqlik zarrachalari shakli va hajmining o'zgarish tezligi.
СКОРОСТЬ ЗВУКА– *tovush tezligi*; havoda 0^0C harorat (temperatura)da 331 m/s ga teng. Suvda tovush tezligi havodagiga qaraganda taxminan 5 marta, metallarda esa 15 marta katta.
СКОРОСТЬ ОБЪЕМНОГОРАСШИРЕНИЯ– *hajmiy kengayish tezligi*; harakatlanayotgan suyuqlik elementar hajmi o'zgarish tezligining shu hajm miqdoriga nisbati bo'lib, uning miqdori tezlik divergensiyasiga teng: $\dot{\theta} = \operatorname{div} \vec{v} = \dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33}$. *Izoh*: Siqilmaydigan suyuqlikda hajmiy kengayish tezligi nolga teng.
СКОРОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНОГО УДЛИНЕНИЯ– *nisbiy cho'zilish tezligi*; $\dot{\varepsilon}_i = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{1}{\Delta x_i}\dfrac{dx_i}{dt}$ yoki $\dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_{ii} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}$ formula bilan aniqlanuvchi, berilgan suyuq chiziq elementar kesmasi uzunligining shu kesma uzunlik birligiga nisbati o'zgarishining ε_i tezligi, bunda Δx_i – x o'q bo'ylab olingan chiziqli element uzunligi; t – vaqt; v_i – tezlikning x_i o'qdagi proyeksiyasi.
СТРУЯ– *sharracha*; oqimning biror belgisi (tezligi, zichligi, tarkibi va shu kabi)ga qarab chek-langan bo'lagi. *Izoh*: 1. Qovushoqmas suyuqlikda sharrachani cheklovchi sirtda tezlikning urinma komponentasi uziladi. 2. Erkin sirt bilan chegaralangan charracha «erkin sharracha» deb ataladi.
ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТЬ – *temperatura o'tka-zuvchanlik*; moddaning, xususan suvning, fizik parametri bo'lib, issiqlik uzatish xususiyatiga ko'ra har bir nuqtaning temperaturasi shu vaqt momentiga mos keluvchi barqaror holatga intiladi. Temperatura o'tkazuvchanlikning

xarakte-ristikasi temperatura o'tkazuvchanlik koeffisiyenti $a= =\lambda/(c\rho)$, bu yerda λ – issiqlik o'tka-zuvchanlik koeffisiyenti. Suvning temperatura o'tkazuvchanlik koeffisiyenti tempe-raturadan sust bog'liq, masalan, 0 va 10°C temperaturada u mos ravishda $0{,}485\cdot10^{-3}$ va $0{,}504\cdot10^{-3}$ m^2soat ga teng.

ТЕМПЕРАТУРНОЕ РАСШИРЕНИЕ ЖИДКОСТИ– *suyuqlikning harorat bo'yicha* (*temperaturaviy*) *kengayishi*; bosim o'zgarmas bo'lganda haroratning 1°C ga oshganida suyuqlik hajmining nisbiy o'zgarishi, ya'ni suyuqlik hajmi elementar orttirmasining harorat elementar orttirmasiga nisbati. U temperaturaviy kengayish koeffisiyenti bilan xarakterlanadi. Tomchili suyuqliklar uchun bu koeffisiyent-ning qiymati juda ham kichik bo'lganligi uchun hisoblashlarda u e'tiborga olinmaydi.

ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ ЖИДКОСТИ– *suyuqlikning kuchlanish tenzori*;x_i (i=1,2,3) to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida o'zaro perpendikulyar uchta tekisliklardagi uchta $\sigma_i=\sigma_{ij}$ normal kuchlanishlarga va, umuman olganda, σ_{ij} ($i\neq j$) urinma kuchlanishlarning shu yuzalardagi oltita proeksiyalariga teng, koordinata va vaqtning funksiyasi bo'lgan σ_{ij}tashkil etuvchilarli $\{\sigma_{ij}\}$ ikkinchi rang tenzor. *Uzoh*: 1.Kuchlanish tenzorining σ_{ij} tashlik etuvchilari – x_j o'qqa perpensikulyar yuzada-gi σ_j kuchlanishning x_io'qdagi proyeksiyasi. Taqsimlangan juftliklar (momentlar) bo'lmagan holda kuchlanish tenzori simmetrik bo'ladi, $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ ya'ni. 2.Chiziqli-qovushoq suyuqlikda (Nyuton suyuq-ligida) simmetrik kuchlanish tenzori deformatsiyalar tezliklari tenzoridan chiziqli bog'liq bo'ladi.

ТЕНЗОР СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИИ– *deformatsiya tezliklari tenzori*; x_i (i=1,2,3) to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida qaralayotgan nuqtadan o'tuvchi o'zaro perpen-dikulyar elementar suyuq chiziqlarning uchta $\dot{\varepsilon}_i=\dot{\varepsilon}_{ii}=\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}$ nisbiy cho'zilish tezliklariga va mos yuzalardagi uchta $\dot{\varepsilon}_{ij}=\dot{\varepsilon}_{ji}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ siljish tezliklari yarimlariga teng, suyuqlik zarrachalari deformatsiyalari tezliklarini aniqlovchi, koordinata va vaqtning funksiyasi bo'lgan $\dot{\varepsilon}_{ij}$ tashkil etuvchilarli $\{\dot{\varepsilon}_{ij}\}$ ikkinchi rang simmetrik tenzor. *Izoh*: Deformatsiya tezliklari tenzori deformatsiya tenzoridan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng.

ТРАЕКТОРИЯ–*traektoriya*; suyuqlik zarrachalarining vaqt o'tishi bilan bosib o'tgan yo'lining izi.

ТРУБКАТОКА– *oqim naychasi*; bu sodda yopiq konturdan oqib o'tuvchi suyuqlik oqimi sirti.

УДЕЛЬНЫЙВЕС ЖИДКОСТИ–*suyuqlikning solishtirma og'irligi*; hajm birligidagi suyuqlikning og'irlik miqdori: $\gamma=G/V$, bu yerda $G=mg$ – og'irlik; V –suyuqlikning hajmi.

УКЛОН ДНА РУСЛА–*o'zan tubining qiyaligi.*Bosimsiz oqim o'zani asosi chizig'ining gorizont bilan hosil qilgan burchagi sinusi.

УКЛОН КРИТИЧЕСКИЙ–*kritik qiyalik;* berilgan sarf va tekis harakatli bosimsiz oqim uchun me'yordagi chuqurligi kritik chuqurlikka teng o'zanlarga berilgan taxminiy qiyalik

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ– *barqaror harakatlanyotgan oqim uchun Bernulli tenglamasi*; siqilmaydigan suyuqlikning barqaror harakatida o'sha oqim naychasidagi barcha suyuqlik zarrachalari uchun geometrik, tezlik va p'ezometrik balandliklar yig'indisi o'zgarmaydi.

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ИЛИ СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ– *barqaror yoki statsionar harakat*; suyuqlik bilan band hajmning ixtiyoriy nuqtasining o'rtalashtirilgan mahalliy tezliklari miqdori va ularning yo'nalishi vaqt bo'yicha o'zgarmaydigan suyuqlik harakati(suyuqlikning tezligi vaqtdan bog'liq bo'lmagan holdagi harakati). Bunda suyuqlik har bir nuqtasining harakat tartibi o'zgarmaydi; tezliklar maydoni, uyurmalar maydoni, gidrodinamik bosimlar maydoni, massaviy kuchlar maydoni o'zgarmas yoki statsionar; oqim chizig'i suyuqlik zarrachalarining traektoriyasi bilan mos tushadi. Aks holda esa *beqaror yoki nobarqaror harakat.*

ФУНКЦИЯТОКА– *oqim funksiyasi*; suyuqlikning tekis parallel yoki o'qqa nisbatan simmetrik harakatida ψ funksiya koordinata va vaqtning skalyar funksiyasi bo'lib, u har bir oqim chizig'ida ixtiyoriy vaqt momentida o'zgarmas qiymat qabul qiladi, u dastlavki (ψ=0) va berilgan oqim sirtlari orasidagi suyuqlik massaviy sarfiga proporsional.

ЦЕНТРДАВЛЕНИЯ– *bosim markazi*; suyuqlik oqimiga nisbatan oriyentatsiyasi juda kam o'zgaruvchan suyri jismga ta'sir etayotgan barcha bosim kuchlarining teng ta'sir etuvchisi (agar u mavjud bo'lsa) qo'yilgan nuqta.

ЧАСТИЦАЖИДКОСТИ– *suyuqlik zarrachasi*; suyuqlik-ning qaralayotgan nuqtani o'z ichiga olgan va limiti nolga intiluvchi elementar hajmi, boshq. aytganda, suyuqlik-ning qaralayotgan nuqtani o'rab turuvchi cheksiz kichik hajmi.

ЧИСЛОРЕЙНОЛЬДСА (Re) – *Reynold soni* (Re); qovushoq suyuqlik harakati rejimini ifodalovchi o'lchamsiz miqdor bo'lib, u berilgan masaladagi *v* o'rtacha tezlik va *l* masofa ko'paytmasining *υ* kinematik qovushoqlik koeffisi-yentiga nisbatiga teng, ya'nu Re=*vl*/*υIzoh*: 1. Berilgan sharoitda suyuqlikning turbulent harakatidan laminar harakatiga yoki uning laminar harakatidan turbulent harakatiga otish momentini ifodalovchi Reynolds sonining qiymati «Reynoldsning kritik soni» deb ataladi. 2. Agar, zarur bo'lganda, suyuqlikning turbulent harakatidan laminar harakatiga yoki uning laminar harakatidan turbulent harakatiga otishi joyi borligini ta'kidlash lozim bo'lsa, u holda mos ravishda «Reynoldsning kritik sonidan quyi» va «Reynoldsning kritik sonidan yuqori» degan atama qo'llaniladi.

O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA FAKULTETI

«MATEMATIK MODELLASHTIRISH» KAFEDRASI

4. «TUTASH MUHITLAR MEXANIKASI» FANI BO’YICHA ILOVALAR

«5130200 – Amaliy matematika va informatika» ta’lim yo’nalishi 3 kurs talabalari uchun

Samarqand – 2019

TMMNING ASOSIY MUNOSABATLARI

Vektor maydonini differensiallash

1. Nabla vektor

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k};$$

2. Laplas operatori

$$\Delta = \vec{\nabla}\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

3. Skalyar funksiyaning gradienti

$$grad\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{k};$$

4. Vektor maydonning divergensiyasi

$$div\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z};$$

5. Vektor maydonining rotori

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

TMM kinematikasi

Harakatning Lagranj ko'rinishida berilishi $x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$.

Tezlik vektori $\vec{v} = \frac{\partial x^i}{\partial t}\vec{\jmath}_i = v^i \vec{\jmath}_i$

Tezlanish vektori $w^1 = \frac{\partial v^i}{\partial t} \Rightarrow w^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2}$

Harakatning Lagranj ko'rinishida berilishi $\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t)$.

Harakat qonuni va tezlik orasidagi munosabat

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x,y,z,t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x,y,z,t), \quad \frac{dz}{dt} = v_z(x,y,z,t)$$

Tezlanish vektori komponentalari $a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_j}{\partial t}$.

Deformatsiya tenzori komponentalari

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(g_{ij} - g'_{ij}\right) \text{ yoki } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i + \nabla_i w_k \cdot \nabla_j w^k\right).$$

Asriy tenglama $\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda + I_3 = 0$

Invariantlar $I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_j^i$,

$$I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\varepsilon_j^i\right)^2 - \varepsilon_\beta^\alpha \varepsilon_\alpha^\beta\right], I_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = Det\left\|\varepsilon_j^i\right\|.$$

Deformatsiyaning birgalik tenglamalri

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu}-\frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu}-\frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu}=0.$$

Deformatsiya tezliklari va deformatsiya tenzori orasidagi bog'lanish

$$e_{ij}=\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}.$$

Deformatsiya tezliklari tenzori komponentalarining tezlik vektori komponentalri orasidagi bog'lanish

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j+\nabla_j v_i\right).$$

Koshi-Gelmgols teoremasi

$$\vec{v}_1=\vec{v}_0+\vec{\omega}\times\vec{\rho}+grad\Phi.$$

Tezlik divergensiyasining mexanik ma'nosi

$$div\vec{v}=\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta V_o\to 0}}\frac{V-V_0}{V_0\Delta t}.$$

Stoks teoremasi

$$\int_C \vec{v}_s d\bar{s}=2\int_\Sigma \omega_n d\sigma.$$

Gauss-ostrogradskiy teoremasi

$$\int_S \vec{v}\,\vec{n}d\sigma=\int_V div\,\vec{v}d\tau.$$

TMM dinamikasi

Eyler o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamasi

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\, div\vec{v}=0.$$

Lagranj o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamasi

$$\rho=\rho_0\frac{V_0}{V}=\rho_0\left|\frac{\vec{\mathrm{Э}}_1^0\cdot(\vec{\mathrm{Э}}_2^0\times\vec{\mathrm{Э}}_3^0)}{\vec{\mathrm{Э}}_1\cdot(\vec{\mathrm{Э}}_2\times\vec{\mathrm{Э}}_3)}\right|,\quad \rho=\rho_0\frac{\Delta_0}{\Delta}=\rho_0\det\left\|\frac{\partial x_0^i}{\partial x^k}\right\|,\quad \rho=\rho_0\sqrt{\frac{g^0}{g}}.$$

Kuchlanish vektori komponentalarining kuchlanish tenzori komponentalari orqali ifodasi

$$p_n^1=p^{11}\cos(\bar{n},x)+p^{12}\cos(\bar{n},y)+p^{13}\cos(\bar{n},z)=p^{1i}n_i,$$
$$p_n^2=p^{21}\cos(\bar{n},x)+p^{22}\cos(\bar{n},y)+p^{23}\cos(\bar{n},z)=p^{2i}n_i,$$
$$p_n^3=p^{31}\cos(\bar{n},x)+p^{32}\cos(\bar{n},y)+p^{33}\cos(\bar{n},z)=p^{3i}n_i.$$

Kuchlanish vektorining normal va urinma tuzuvchilari

$$\vec{p}_n d\sigma=p_{nn}\vec{n}d\sigma+p_{n\tau}\vec{\tau}\,d\sigma.$$

Harakat miqdori tenglamasi $\frac{d}{dt}\int_V \vec{v}\rho dr=\int_V \vec{F}\rho d\tau+\int_\Sigma \vec{p}_n d\sigma.$

Kuchlanishlarga nisbatan harakat tenglamasi

$$\rho\frac{du}{dt}=\rho F_x+\frac{\partial p^{11}}{\partial x}+\frac{\partial p^{12}}{\partial y}+\frac{\partial p^{13}}{\partial z},$$
$$\rho\frac{dv}{dt}=\rho F_y+\frac{\partial p^{21}}{\partial x}+\frac{\partial p^{22}}{\partial y}+\frac{\partial p^{23}}{\partial z},$$
$$\rho\frac{dw}{dt}=\rho F_z+\frac{\partial p^{31}}{\partial x}+\frac{\partial p^{32}}{\partial y}+\frac{\partial p^{33}}{\partial z},$$

Harakat miqdori momentlari tenglamasi

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V \vec r\times\vec v\rho d\tau+\int_V \vec k\rho d\tau\right)=\int_V \vec r\times\vec F\rho d\tau+\int_\Sigma \vec r\times\overline{p}_n d\sigma+\int_V \vec h\rho d\tau+\int_\Sigma \overline{Q}_n d\sigma\cdot$$

Ideal suyuqlik harakati uchun Eyler tenglamalari

$$\rho\vec a=\rho\vec F-grad\ \ p.$$

Fgromeki-Lemb tenglamasi

$$\frac{\partial\vec v}{\partial t}+\frac{1}{2}gradv^2+2\overline{\omega}\times\vec v=\vec F-\frac{1}{\rho}\cdot gradp.$$

Elastik jism uchun umumlashgan Guk qonuni

$$p^{ij}=A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\,.$$

Chiziqli izotrop elastik jism uchun Guk qonuni

$$p^{ij}=\lambda I_1(\varepsilon)g^{ij}+2\mu g^{i\alpha}g^{j\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Lame tenglamasi

$$(\lambda+\mu)\,grad\,div\ \vec w+\mu\Delta\vec w+\rho\vec F=\rho\vec a\,.$$

Izotrop qovushoq suyuqlik uchun Nav'e-Stoks qonuni

$$p^{ij}=-pg^{ij}+\lambda_1 g^{ij}div\,\vec v+2\mu_1 g^{i\alpha}g^{j\beta}e_{\alpha\beta}\,.$$

Nav'e-Stoks tenglamasi

$$\frac{d\vec v}{dt}=\vec F-\frac{1}{\rho}grad\ \ p+\frac{\lambda+\mu}{\rho}grad\ div\,\vec v+\nu'\Delta\vec v\,.$$

Termodinamika

Tirik kuchlar teoremasi $dE=dA^{(e)}{}_m+dA^{(i)}{}_m+dA_{sirt}{}^{(e)}+dA_{sirt}{}^{(i)}\,.$

$$E=\int_V\frac{\rho\vec v^{\,2}}{2}d\tau\,,\ \int_V\rho\vec F\cdot d\vec r d\tau=\int_V\rho\vec F^{(l)}\cdot drd\tau+\int_V\rho\vec F^{(i)}\cdot d\vec r d\tau=dA_m^{(e)}+dA_m^{(i)},$$

$$\int_\Sigma p^{ij}v_i\ n_j d\sigma d\,t=\int_\Sigma\vec p_n\cdot d\vec r d\sigma=dA_{sirt}^{(l)}-\int_v p^{ij}\nabla_j v_i dtdr=dA^{(i)}{}_{sirt}\ .$$

Holat tenglamalari

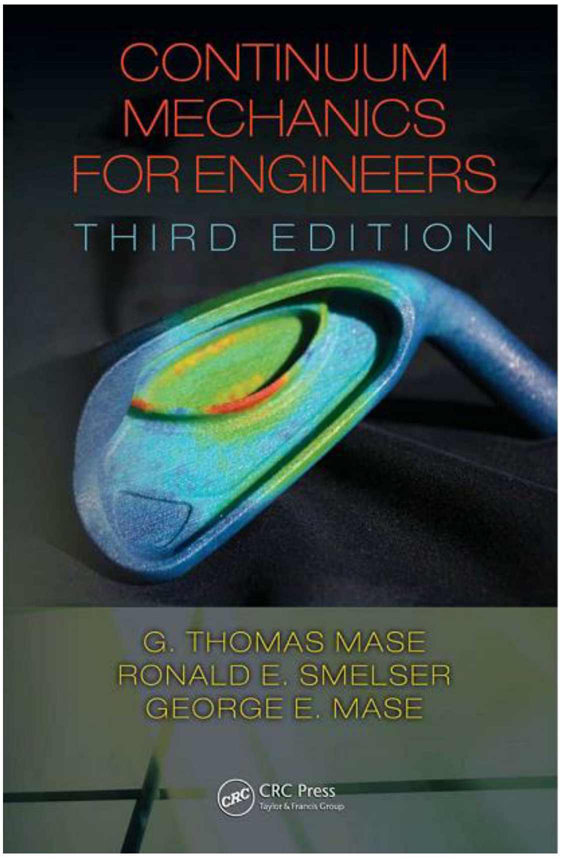
Mendeleev-Klapeyron tenglamasi $pv=\dfrac{m}{\mu}RT$

Van-der-Vaals tenglamasi $\left(p-\dfrac{a}{V^2}\right)(V+b)=RT\,.$

Entalpiya $J=E=U+pV$ Issiqlk sig'imi $C=\dfrac{dQ}{dT},$

Termodinamikaning birinchi qonuni $dQ=dK+d\Pi+dL$

Horijiy manbalardan olingan materiallar



Contents

Квеско Наталья Геннадьевна

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Механика сплошной среды

Часть 1

Лекция 3

ОДНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ – СПОСОБ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ КОГДА ПРОДОЛЬНЫЕ РАЗМЕРЫ ПОТОКА ВО МНОГО РАЗ ПРЕВОСХОДЯТ ЕГО ПОПЕРЕЧНЫЕ РАЗМЕРЫ

УСЛОВИЕ ПРИЛИПАНИЯ

НА ГРАНИЦАХ СКОРОСТЬ ЖИДКОСТИ $U_{ГР} = 0$ (равны нулю нормальная к границе и касательная к ней составляющие).

НА ГРАНИЦАХ КОНТРОЛЬНОГО ОБЪЕМА V, КОТОРЫЕ СОВПАДАЮТ С ТВЕРДЫМИ ГРАНИЦАМИ ПОТОКА, ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ СКОРОСТЬ U ИЛИ ЕЕ ПРОЕКЦИИ, ОБРАЩАЮТСЯ В НОЛЬ

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ, ПРИ КОТОРОМ ЛИНИИ ТОКА ПРЕДСТАВЛЯЮТ СОБОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ НАЗЫВАЕТСЯ *РАВНОМЕРНЫМ, ИЛИ ПАРАЛЛЕЛЬНО-СТРУЙНЫМ*

ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ ПОТОКА, ОРТОГОНАЛЬНОЕ ЛИНИЯМ ТОКА, НАЗЫВАЮТ ЖИВЫМ СЕЧЕНИЕМ

ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ

1. ***плавноизменяющееся*** движение – можно пренебречь кривизной линий тока и их непараллельностью (построить плоское живое сечение);
2. ***резкоизменяющееся*** движение – нельзя использовать указанные условия

при равномерном движении

1. **Нормальное напряжение p_{nn} в каждой точке живого сечения равно гидродинамическому давлению p в этой точке со знаком (-) (положительным считается растягивающее нормальное напряжение);**
2. **Гидродинамическое давление p в живом сечении распределено по гидростатическому закону ρU – p = const**

Виды потоков

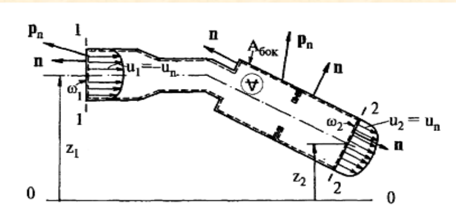
- **Напорные**
- **Безнапорные**
- **Струйные**

Напорный поток со всех сторон ограничен твердыми стенками (поток воды в водопроводных трубах).

Безнапорный поток – если только часть потока ограничена твердыми стенками, а на остальной жидкость граничит с газом т.е. ограничена свободной поверхностью

Струя – когда поток не ограничен твёрдой поверхностью

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ НАПОРНОГО ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ



1. **Выделим в трубопроводе сечениями 1–1 и 2–2, в которых движение равномерное или плавноизменяющееся контрольный объем V, ограниченный контрольной поверхностью A, показанной штриховой линией.**

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{\rho u^2}{2} dV = \int_V \rho(\overline{u}\cdot p_n)dV + \int_A (u\cdot p_n)dA - \int_V \rho\varepsilon dV \quad (1)$$

Закон изменения кинетической энергии для выделенного объёма

- **представим объемные интегралы в виде поверхностных (используем условия на контрольной поверхности A, которую запишем в виде суммы $A = \omega_1 + \omega_2 + A_{бок}$**

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{\rho u^2}{2} dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{\rho u^2}{2} dV + \int_A \frac{\rho u^2}{2} u_n dA \quad (2)$$

субстанциальная производная

$$\left.\begin{aligned} &\text{на } \omega_1: \quad u = u_1;\ \ u_n = -u_1;\\ &\text{на } \omega_2: \quad u = u_2;\ \ u_n = u_2;\\ &\text{на } A_{бок}: \quad u = 0;\ \ u_n = 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

условия на контрольной поверхности

преобразование второго слагаемого

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{\rho u^2}{2} dV = Q_k = \int_A \frac{\rho u^2}{2} u_n dA = \int_{\omega_1} \frac{\rho u_1^2}{2}(-u_1)dA + \int_{\omega_2} \frac{\rho u_2^2}{2} u_2 dV +$$

$$\int_{A_{бок}} \frac{\rho 0^2}{2} 0 dA = -\int_{\omega_1} \frac{\rho u_1^3 dA}{2} + \int_{\omega_2} \frac{\rho u_2^3 dA}{2} = -\frac{\alpha_1 \rho v_1^3 \omega_1}{2} + \frac{\alpha_2 \rho v_2^3 \omega_2}{2} =$$

$$= -\frac{\alpha_1 \rho v_1^2 Q}{2} + \frac{\alpha_2 \rho v_2^2 Q}{2}. \quad (4)$$

Мощность внешней массовой силы

Предположения:

1. **Внешняя массовая сила имеет потенциал (существует скалярная функция U, для которой f = gradU);**
2. **Используем теорему Остроградского - Гаусса**

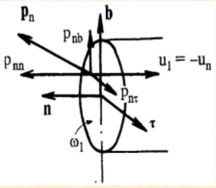
$$\int_A (u\cdot f)\rho dV = \int_V \rho(u\cdot \mathrm{grad}U)dV = \quad (5)$$

$$= \int_A \rho U u_n dA = -\int_{\omega_1} \rho u_1 U_1 dA + \int_{\omega_2} \rho u_2 U_2 dA.$$

МОЩНОСТЬ ВНЕШНЕЙ МАССОВОЙ СИЛЫ ЧЕРЕЗ ПОТОК ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ СКВОЗЬ ЖИВЫЕ СЕЧЕНИЯ

$$\int_A (u\cdot p_n)dA = \int_{\omega_1} (u\cdot p_1)dA + \int_{\omega_2} (u\cdot p_n)dA + \int_{A_{бок}} (u\cdot p_n)dA \quad (6)$$

мощность внешней поверхностной силы



все три проекции напряжения p_n могут быть отличны от нуля

1. Зададим в произвольной точке живого сечения ω_1 систему ортогональных координат, определяемую тремя единичными векторами (n, b, τ), из которых n – нормален к живому сечению, a b и τ лежат в его плоскости;
2. Проектируя на эти координатные оси векторы u и p_n, находим $u = (u_n, u_b, u_\tau) = (u_n, 0, 0)$; $p_n = (p_{nn}, p_{nb}, p_{n\tau})$

$$u \cdot p_n = u_n p_{nn} + u_b p_{nb} + u_\tau p_{n\tau} = u_n p_{nn} \qquad (7)$$

(по определению скалярного произведения)

Для живого сечения ω_2

$$\begin{aligned} &на\ \omega_1: && u_n = -u_1; && p_{nn} = -p_1; \\ &на\ \omega_2: && u_n = u_2; && p_{nn} = -p_2; \\ &на\ A_{бок}: && \bar{u} = 0; && (u \cdot p_n) = 0. \end{aligned} \qquad (8)$$

$$\int_A (u \cdot p_n) dA = \int_{\omega_1} u_1 p_1 dA - \int_{\omega_2} u_2 p_2 dA \qquad (9)$$

мощность внешней поверхностной силы – поток потенциальной энергии сквозь живое сечение

Мощность внешних сил ≡ поток потенциальной энергии Q_p, обусловленный внешними силами (массовой и поверхностной)через контрольную поверхность:

$$Q_p = \int_V \rho(u - f) dV + \int_A (u - p_n) dA =$$

$$= -\int_{\omega_1} (\rho U_1 - p_1) u_1 dA + \int_{\omega_2} (\rho U_2 - p_2) u_2 dA$$

1. В сечениях 1-1 и 2-2 движение плавноизменяющееся, поэтому давление подчиняется гидростатическому закону
$\rho U - p = const$

2. Сила тяжести является единственной внешней массовой силой: $U = -g z$

$$Q_p = -(\rho U_1 p_1) \int_{\omega_1} u_1 dA + (\rho U_2 p_2) \int_{\omega_2} u_2 dA =$$

$$(\rho g z_1 + p_1) Q - (\rho g z_2 + p_2) Q. \qquad (10)$$

Подставляем (4) и (10) в исходное уравнение (1) и делим все слагаемые на весовой расход $Q_в = \rho g Q$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f \qquad (11)$$

Уравнение БЕРНУЛЛИ

$\gamma = \rho g Q$ - удельный вес

$$h_f = \frac{1}{Q_в} \int_V \varepsilon \rho dV \qquad (12)$$

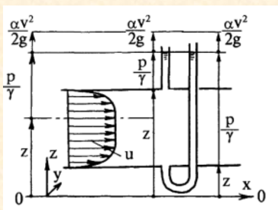
МОЩНОСТЬ ВНУТРЕННИХ СИЛ (ДИССИПАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ЕДИНИЦУ ВРЕМЕНИ) В ПРЕДЕЛАХ КОНТРОЛЬНОГО ОБЪЕМА, ОТНЕСЕННАЯ К ВЕСОВОМУ РАСХОДУ

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho_1 g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho_2 g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f \qquad (13)$$

Уравнение БЕРНУЛЛИ для сжимаемой жидкости (газа)

ρ_1 и ρ_2 – плотности жидкости (газа) в сечениях 1 – 1 и 2 – 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИИ СЛАГАЕМЫХ, ВХОДЯЩИХ В УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ



Z – превышение над плоскостью сравнения (геодезическая отметка) любой точки живого сечения потока;

$\frac{p}{\gamma}$ – пьезометрическая высота в этой же точке (высота, на которую поднимается вода в открытой трубке, присоединенной к этой точке);

$\frac{\alpha v^2}{2g}$ – всегда положительна и имеет размерность длины

в соответствии с уравнением (11) эту величину $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$ откладывают вверх от отметки

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ И ПОЛНЫЙ (ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ) НАПОРЫ. ПЬЕЗОМЕТРИЧЕСКАЯ И НАПОРНАЯ ЛИНИИ

НАПОР - удельный поток энергии, отнесенный к весовому расходу жидкости

$$H_p = z + \frac{p}{\gamma} = \frac{Q_p}{Q_в}$$

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ

$$H_k = \frac{\alpha v^2}{2g} = \frac{Q_k}{Q_в}$$

СКОРОСТНОЙ

$$H_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} = \frac{Q_p + Q_k}{Q_в} = \frac{Q_e}{Q_в}$$

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ или ПОЛНЫЙ

$$h_f = \frac{1}{Q_в} \int_V \varepsilon \rho dV$$

$$H_{e1} = H_{e2} + h_f$$

Уравнение БЕРНУЛЛИ

ПЬЕЗОМЕТРИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ, РАСПОЛАГАЕТСЯ ВСЕГДА НИЖЕ НАПОРНОЙ, ЭТО ПРЯМАЯ, ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ НАПОРНОЙ ЛИНИИ

$$\frac{\alpha v^2}{2g} > 0$$

ПРОДОЛЬНЫЕ УКЛОНЫ – ОТНОШЕНИЕ РАЗНОСТИ НАПОРОВ НА УЧАСТКЕ РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ К РАССТОЯНИЮ МЕЖДУ СЕЧЕНИЯМИ, В КОТОРЫХ ЭТИ НАПОРЫ ВЫЧИСЛЕНЫ

Уклон напорной линии называется ***гидравлическим*** J_e, уклон пьезометрической линии называется ***пьезометрическим*** J_p

Потери напора – величина положительная поэтому

1. Полный напор в сечениях, расположенных ниже по течению, всегда меньше напора в сечениях, расположенных выше по течению. отметки напорной линии вдоль потока всегда уменьшаются, и гидравлический уклон всегда положителен ($j_e > 0$).
2. Если часть кинетической энергии жидкости при её движении переходит в потенциальную, то потенциальный напор может возрастать, при этом отметки пьезометрической линии возрастают.

TEST

1. $c_i = (1,0,1)$ bo'lsa, $\delta_{ij} c_i c_j$ nechaga teng? A)2; B)3; C)4; D)1;
2. $\delta_{ij}\delta_{ij}$ yig'indini hisoblang A) 3; B) 2; C)4; D)1
3. Kroneker simvoli δ_{ij} ning qiymati nimaga teng? A) $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \; i = j \\ 0, \; i \neq j \end{cases}$; B)0; C)1; D)2;
4. $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ vektorning modulini toping. A) 6; B)4; C)3; D)2;
5. Quyidagi tenzorning simmetrik qismini toping $(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   A) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Quyidagi tenzorning antisimmetrik qismini toping $(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   A) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
7. $\vec{\nabla}$ differensial operator Dekart koordinatalar sistemasida nimaga teng?

   A) $\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$; B) $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$; C) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{k}$; D) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;
8. $\varphi = x^2 y + zx$ funksiyaning gradiyentini toping.

   A) $(2xy + z)\vec{i} + x^2\vec{j} + x\vec{k}$; B) $2x\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$; C) $(2xy + z)\vec{i} + x\vec{j} + 2yx\vec{k}$; D)2;
9. $div(2x\vec{i} + y\vec{j} + 3z\vec{k})$ ifodaning qiymatini toping. A)6; B)3; C)4; D)5;
10. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ vektorning rotorini toping. A)0; B)3; C)1; D)2;
11. Ayniyatning o'ng tomonini toping: $grad(\varphi + \psi) =$

    A) $grad\varphi + grad\psi$; B) $divgrad(\varphi + \psi)$; C) $\frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial z}$; D)0;
12. Ayniyatning o'ng tomonini toping: $grad(\varphi\psi) =$

    A) $\varphi\, grad\psi + \psi\, grad\varphi$; B) $grad\varphi \cdot grad\psi$; C) $rot(\varphi + \psi)$; D) $divgrad(\varphi + \psi)$.
13. Ayniyatning o'ng tomonini toping: $div\, rot\vec{a} =$

    A)0; B) a; C) $graddiv\vec{a}$; D) $divgrada$;
14. Ayniyatning o'ng tomonini toping: $div(\varphi\vec{a}) =$

    A) $\varphi\, div\vec{a} + \vec{a} grad\varphi$; B) a; C) 0; D) $divgrada$;
15. Tutash muhit tezliklar maydoni $\vec{v}$ uchun $rot\vec{v} = 0$ bo'lsa, u ... .

    A) uyurmasiz; B)uyurmali; C) potensialli; D) tekis oqim;
16. Agar tezliklar maydonini $\vec{v} = grad\varphi$ (φ ixtiyoriy skalyar funksiya) ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, bu tezliklar maydoni … bo'ladi.

    A)potensialli; B)uyurmali; C)uyurmasiz; D) tekis oqim;
17. Tutash muhit harakati Lagranj o'zgaruvchilarida quyidagicha berilgan $x_1 = \xi_1,\ x_2 = \xi_2 + A\xi_3,\ x_3 = \xi_3 + A\xi_2$. Ko'chish vektorini toping.

    A) $w_1 = 0,\ w_2 = A\xi_3,\ w_3 = A\xi_2$; B) $w_1 = \xi_1,\ w_2 = A\xi_2,\ w_3 = A\xi_3$;

    C) $w_1 = 0,\ w_2 = 0,\ w_3 = A\xi_2$; D) $w_1 = 0,\ w_2 = A\xi_2,\ w_3 = A\xi_3$;

18. Tutash muhit harakati Lagranj o'zgaruvchilarida $x_1 = \xi_1,\ x_2 = \xi_2 + A\xi_3,\ x_3 = \xi_3$ ko'rinishda berilgan. Harakatni Eyler ko'rinishida ifodalang. A) $\xi_1 = x_1,\ \xi_2 = x_2 - Ax_3,\ \xi_3 = x_3$
B) $\xi_1 = x_1,\ \xi_2 = x_2 + Ax_3,\ \xi_3 = x_3$; C) $\xi_1 = x_1 + Ax_2,\ \xi_2 = x_2 + Ax_3,\ \xi_3 = x_3$;
D) $\xi_1 = x_1,\ \xi_2 = x_2 + Ax_3,\ \xi_3 = x_3$;

19. Massaning saqlanish qonuni matematik ifodasini ko'rsating. A) $\frac{dm}{dt} = 0$;
B) $grad\vec{v} = 0$; C) $div\vec{v} = 0$; D) $rot\vec{v} = 0$;

20. Quyidagilardan qaysi biri siqilmaydigan suyuqlik uchun uzviylik tenglamasini ifodalaydi?
A) $div\vec{v} = 0$; B) $grad\vec{v} = 0$; C) $rot\vec{v} = 0$; D) $\frac{d\rho}{dt} = 0$;

21. Eyler o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamasini ko'rsating.
A) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0$; B) $\frac{d\rho}{dt} + div(\rho\vec{v}) = 0$; C) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho div\vec{v} = 0$; D) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{v} = 0$;

22. Berilgan tezliklar maydonlaridan qaysilari siqilmaydigan suyuqlik uchun uzviylik tenglamasini qanoatlantradi? 1) $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$; 2) $\vec{v} = y\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$;
3) $\vec{v} = x^2\vec{i} + 2xy\vec{j} - 4xz\vec{k}$. A)1,3 ;
B)1; C)2, 3; D)1, 2, 3.

23. *A* va *B* ning qanday qiymatlarida $\vec{v} = Ax\vec{i} + By\vec{j} - 4z\vec{k}$ tezliklar maydoni siqilmaydigan uyuqlik uchun uzviylik tenglamasini qanoatlantiradi? A) $A+B=4$; B) $A-B=4$; C) $A=2$, $B=2$; D) $A+B=2$;

24. Kuchlanishning o'lchov birligi nima? A) Paskal; B)Nyuton; C)Joul; D)O'lchovsiz;

25. Deformatsiyaning o'lchov birligi nima? A) O'lchovsiz; B)Joul; C)Nyuton; D)Paskal;

26. Berilgan ko'chishlar maydoni uchun ε_{12} deformatsiya tenzori komponentasini toping
$u_1 = Ay,\ u_2 = Bx,\ u_3 = ABxy$, *A,B=const.* A) $\frac{1}{2}(A+B)$; B) A; C) B; D) $\frac{1}{2}(A-B)$;

27. Jismning biror *M* nuqtasidagi kuchlanganlik holati quyidagicha berilgan
$\sigma_{11} = \sigma_{33} = 0, \sigma_{22} = 2,\ \sigma_{12} = 1,\ \sigma_{23} = 1,\ \sigma_{31} = 2$. Normali $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ bo'lgan yuzadagi kuchlanish vektorini toping.
A) $\vec{P}_n = \sqrt{3}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{3}}\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}$; B) $\vec{P}_n = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; C) $\vec{P}_n = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$;
D) $\vec{P}_n = \sqrt{3}\vec{i} - \frac{4}{\sqrt{3}}\vec{j} - \sqrt{3}\vec{k}$;

28. Normali $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ bo'lgan yuzadagi $\vec{P}_n = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ kuchlanish vektorining normal va urinma tuzuvchilarini toping.
A) $P_{nn} = 2\sqrt{3},\ P_{n\tau} = \sqrt{2}$; B) $P_{nn} = 3, P_{n\tau} = 4$; C) $P_{nn} = \sqrt{3},\ P_{n\tau} = 4$; D) $P_{nn} = 3,\ P_{n\tau} = \sqrt{5}$.

29. Berilgan kuchlanish tenzorining deviatr qismini toping $P = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A) $S = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$; B) $S = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; C) $S = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; D) $S = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 0 \\ -6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;

30. Berilgan kuchlanish tenzorining sharsimon qismini toping $(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A) $\sigma=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; B) $\sigma=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; C) $\sigma=\begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; D) $\sigma=\begin{pmatrix} 7 & -6 & 0 \\ -6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;

31. $\sigma_{ij}=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ kuchlanish tenzorining bosh qiymatlarini toping.

A) $\sigma=-6,\ \sigma=-3,\ \sigma=9$; B) $\sigma=1,\ \sigma=2,\ \sigma=3$; C) $\sigma=6,\ \sigma=3,\ \sigma=9$;
D) $\sigma=-6,\ \sigma=-3,\ \sigma=5$;

32. Nuqtada berilgan $\sigma_{11}=\sigma_{33}=\sigma_{22}=2,\ \sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$ kuchlanganlik holati uchun kuchlanish sirtini nima? A)Sfera; B)Paraboloid; C)Tekislik; D)Ellipsoid;

33. Massaviy kuchlar hisobga olinmagan va muhit muvozanatda bo'lsin. Agar $p_{11}=2x_2x_3$, $p_{13}=x_1$ bo'lsa, p_{12} ni toping. A) 0; B) x_3; C) $x_3x_2^2$; D1;

34. Nazariy mexanika masalalarining TMM masalalaridan farqi nimada?
A)Jism absolyut qattiq deb hisoblanadi; B)Kuchlar faqat nuqtaga qo'yiladi;
C)Faqat statik masalalar qaraladi; D)Dinamik masalalar qaraladi;

35. Quyidagi kuchlarning qaysi biri massaviy kuchga misol bo'la oladi? A)
Og'irlik kuchi; B)Jismning biror nuqtasiga ta'sir qiluvchi kuch; C)
Qorning tomga tushgan og'irligi; D)Shamolning devorga ta'siri;

36. Quyidagi kuchlarning qaysi biri sirt kuchiga misol bo'la oladi?
A)C va D, B)Og'irlik kuchi; C)Qorning tomga tushgan og'irligi;
D)Shamolning devorga ta'siri;

37. Tezliklar maydoni quyidagicha berilgan $v_1=x_1/(1+t),\ v_2=2x_2/(1+t),\ v_3=3x_3/(1+t)$.
Tezlanish komponentalarini toping.
A) $a_1=0,\ a_2=2x_2/(1+t)^2, a_3=6x_3(1+t)^2$; B) $a_1=0,\ a_2=2x_2/(1+t), a_3=6x_3(1+t)$;
C) $a_1=x_1/(1+t)^2,\ a_2=2x_2/(1+t)^2, a_3=6x_3(1+t)^2$; D) $a_1=0,\ a_2=x_2/(1+t), a_3=6_3(1+t)$;

38. TMning harakat qonuni quyidagicha berilgan $x_1=A+\left(e^{-B\lambda}/\lambda\right)\sin\lambda(A+\omega t)$,
$x_1=-B-\left(e^{-B\lambda}/\lambda\right)\cos\lambda(A+\omega t),\ x_3=\xi_3$. Harakat traektoriyasi nima?
A) Radiusi $e^{-B\lambda}/\lambda$ teng aylana; B)To'g'ri chiziq; C)Parabola;
D)O'qlari A va B ga teng bo'lgan ellips;

39. TMning harakat qonuni quyidagicha berilgan $x_1=\left(e^{-B\lambda}/\lambda\right)\sin\lambda(A+\omega t)$,
$x_1=-\left(e^{-B\lambda}/\lambda\right)\sin\lambda(A+\omega t),\ x_3=\xi_3$. Muhit tezligi modulini toping. A) $\omega e^{-B\lambda}$;
B) $v=A+B$; C) $\omega e^{-B\lambda}(\sin\lambda(A+\omega t)+\cos\lambda(A+\omega t))$; D)0;

40. Tezliklar maydoni vektor ko'rinishida berilgan $\vec{v}=x_1^2t\vec{i}+x_2t^2\vec{j}+x_1x_3t\vec{k}$. $t=1$ moment va $P(1,3,2)$ nuqtadagi tezlanish vektorini toping.
A) $\vec{a}=3\vec{i}+9\vec{j}+6\vec{k}$; B) $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$; C) $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$; D) $\vec{a}=3\vec{i}+9\vec{j}$.

41. μ - Lame koeffitsiyentining o'lchov birligi nima?
A) Pa; B)Joul; C)Pa · s; D)N · m;

42. μ' yopishqoqlik koeffitsiyentining o'lchov birligi nima?
A) Pa · s; B)Joul; C)N'yuton; D)N · m;

43. Elastik jism uchun Lame tenglamalari qaysi kattaliklarga nisbatan beriladi?
A)Ko'chishlar; B)Tezliklar; C) Kuchlanish; D) Deformatsiya;

44. $\varphi = A\left(-x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2\right)$ potensial funksiya berilgan. Tezliklar maydonini aniqlang.

A) $\vec{v} = -2Ax_1\vec{i} - 2Ax_2\vec{j} + 4Ax_3\vec{k}$; B) $\vec{v} = Ax_1\vec{i} + Ax_2\vec{j} - 4Ax_3\vec{k}$;

C) $\vec{v} = 2Ax_1^2\vec{i} + Ax_2^2\vec{j} - 4Ax_3^2\vec{k}$; D($\vec{v} = 2Ax_1\vec{i} + Ax_2\vec{j} - 4Ax_3\vec{k}$;

45. Yopishqoq suyuqliklar uchun kuchlanish tenzori komponentalarini aniqlovchi munosabat qanday ataladi?

A) Nav'e-Stoks qonuni; B)Guk qonuni; C)Nav'e-Stoks tenglamasi; D)Eyler tenglamasi;

46. Berilgan tezliklar maydoni uchun e_{23} deformatsiya tezliklari tenzori komponentasini toping

$u_1 = Ay,\ u_2 = Bx,\ u_3 = ABxy$, $A,B=const.$ A) $\dfrac{ABx}{2}$; B) A; C) B; D) $\dfrac{1}{2}(A-B)$;

47. Tutash muhit muvozanatda bo'lsin. Agar $p_{11} = 2x_2x_3$, $p_{12} = x_1x_3$ $p_{13} = x_1$ bo'lsa, massaviy kuchlarning x o'qdagi proeksiyasini toping. A)0; B) x_3; C) $x_3x_2^2$; D)1;

48. Agar suyuqlik tezlik vektorining faqat ikkita komponentasi mavjud bo'lsa, bunday harakat ... deyiladi? A) Tekis oqim; B)Uyurmali; C)Potensialli; D)Uyurmasiz;

49. Yopishqoq suyuqlik uchun Nav'e-Stoks tenglamasini ko'rsating

A) $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \dfrac{1}{\rho}\,gradp + \nu\Delta\vec{v}$; B) $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \dfrac{1}{\rho}\,gradp + \dfrac{\lambda+\mu}{\rho}\,grad\ div\vec{v} + \nu\Delta\vec{v}$;

C) $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \dfrac{1}{\rho}\,gradp + \dfrac{\lambda+\mu}{\rho}\,grad\ div\vec{v}$;

D) $0 = \vec{F} - \dfrac{1}{\rho}\,gradp + \dfrac{\lambda+\mu}{\rho}\,grad\ div\vec{v} + \nu\Delta\vec{v}$;

50. Elastik jism muvozanat holati uchun Lame tenglamalarini ko'rsating.

A) $(\lambda+\mu)graddiv\vec{w} + \mu\,\Delta\vec{w} + \rho\vec{F} = 0$; B) $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \dfrac{1}{\rho}\,gradp + \nu\ \Delta\vec{v}$;

C) $(\lambda+\mu)graddiv\vec{w} + \rho\vec{F} = \rho\vec{a}$; D) $\mu\,\Delta\vec{w} + \rho\vec{F} = \rho\vec{a}$;

51. Ta'rifni to'ldiring: Vektorning orthogonal sistemasi deb shunday $\{\bar{x}_\alpha\}$ vektorlar to'plamiga aytiladiki,

A) bu to'plamning ixtiyoriy vektorlari orasidagi skalyar ko'paytma nolga teng bo'lishi kerak, ya'ni $(\bar{x}_\alpha \cdot \bar{x}_\beta) = 0, (\alpha \neq \beta)$.

B)bu to'plamning vektorlari orasidagi vector ko'paytma nolga teng bo'lsa, ya'ni $[\bar{x}_\alpha \cdot \bar{x}_\beta] = 0, (\alpha \neq \beta)$.

C)bu to'plamning vektorlari orasidagi skalyar ko'paytma noldan farqli bo'lsa , ya'ni $(\bar{x}_\alpha \cdot \bar{x}_\beta) \neq 0, (\alpha \neq \beta)$.

D)bu to'plamning vektorlari uchun quyidagi shart bajariladi: $[\bar{x}_\alpha \cdot \bar{x}_\beta] = 1, (\alpha \neq \beta)$.

52. δ_{ij} - Kroneker simvoli quyidagiga teng

A) $\delta_{ij} = \bar{\mathfrak{z}}^{i} \times \bar{\mathfrak{z}}_j = \begin{cases} 1, & agar\ i = j\,bo'lsa; \\ 0, & agar\ i \neq j\,bo'lsa; \end{cases}$ B) $\delta_{ij} = \bar{\mathfrak{z}}^{i} \times \bar{\mathfrak{z}}_j$;; C) $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & agar\,i \neq j\quad bo'lsa, \\ 1, & agar\ i > j\quad bo'lsa, \\ \infty, & agar\ i < j\,bo,\ lsa. \end{cases}$

D) $\delta_{ij} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}$.

53. Quyidagi yozuvda "gung" va erkin indekslarni ko'rsating: $\sigma_{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}$

A) i va j – erkin, α va β – gung indekslar; B) j va β – erkin, α va i – gung indekslar;

C) i va α erkin , j va β –gung indekslar; D) α va β – erkin, i va j – gung indekslar;

54. $T = T^{ijkl}\vec{\mathfrak{z}}_i\vec{\mathfrak{z}}_j\vec{\mathfrak{z}}_k\vec{\mathfrak{z}}_l$ tenzor i va j indekslar bo'yicha simmetrik deyiladi, agar quyidagi shart bajarilsa. A) $T^{ijkl} = T^{jikl}$; B) $T^{ijkl} = T^{klij}$; C) $T^{ijkl} = T^{ijlk}$; D) $T^{ijkl} = T^{lkij}$.

55. $\vec{A}=A^i\vec{э}_i$ Vektorning kontravariant komponentasidan olingan kovariant hosilasi nimaga teng.

A) $\nabla_j A^i=\frac{\partial\vec{A}}{\partial\xi^j}+A^k\Gamma^i_{kj}$; B) $div\vec{A}=\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}=\Delta_\alpha A^\alpha$; C) $\frac{\partial\vec{A}}{\partial\xi^j}=\frac{\partial A^i}{\partial\xi^j}\vec{э}_i$;

D) $\frac{\partial\vec{A}}{\partial\xi^j}=A^i\Gamma^k_{ij}\vec{э}_k$;

56. Tutash muhitning harakati Lagranj ko'rinishda berilgan:

$x_1=\xi_1$; $x_2=\xi_2+A\xi_3$; $x_3=\xi_3+A\xi_3$. Harakatni Eyler o'zgaruvchilarida ifoydalang.

A) $\xi_1=x_1$; $\xi_2=\frac{1}{A^2-1}(Ax_3-x_2)$; $\xi_3=x_3-\frac{A}{A^2-1}(Ax_3-x_2)$;

B) $\xi_1=x_2$; $\xi_2=x_1$; $\xi_3=A(Ax_3-x_2)+x_3$; C) $\xi_1=x_2$; $\xi_2=x_2+\frac{1}{A^2-1}x_3$; $\xi_3=x_1$;

D) $\xi_1=x_1$; $\xi_2=x_3$; $\xi_3=x_2-x_1$;

57. Deformatsiya tenzori komponentalari qanday ifodalanadi: A) $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(g_{ij}-\dot{g}_{ij})$;

B) $\varepsilon_{ij}=g_{ij}-\dot{g}_{ij}$; C) $\varepsilon_i^{\cdot j}=g_{ij}-\dot{g}_{ij}$; D) $e^{ij}=\frac{1}{2}\frac{dg_{ij}}{dt}$;

58. Asriy tenglamani ko'rsating:

A)

$\lambda^3+I_1\lambda^2-I_2\lambda-I_3=0,\quad bu\ yerda\quad I_1=\varepsilon^i_j; I_2=\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2+\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3+\varepsilon_3\cdot\varepsilon_1; I_3=\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3;$

B)

$\lambda^3 I_3-\lambda^2 I_2+\lambda\ I_1-\lambda=0,\quad bu\ yerda\quad I_1=\varepsilon^i_j;\ ,\ I_2=\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2+\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3+\varepsilon_3\cdot\varepsilon_1,\ I_3=\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3;$

C)

$\lambda+\lambda^2 I_1-\lambda^3 I_2+I_3=0,\quad bu\ yerda\quad I_1=\varepsilon^i_j; I_2=\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3,\ I_3=\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2+\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3+\varepsilon_3\cdot\varepsilon_1;$

D)

$\lambda^2+I_1\lambda^3-I_2\lambda+I_3=0,\quad bu\ yerda\quad {}_1=\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3;\ I_2=\varepsilon^i_j;\ I_3=\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2+\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3+\varepsilon_3\cdot\varepsilon_1;$

59. Deformasiya tenzorini ko'chish vektori komponentalari orqali ifodalang:

A) $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_i w_j+\nabla_j w_i)$; B) $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(g_{ij}-\dot{g}_{ij}\right)$; C) $\sigma_{ij}=A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}$; D) $e_{ij}=\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}$;

60. Muhitning ko'chish vektori: $\vec{w}=(3\xi_2-4\xi_1;2\xi_1-\xi_3;4\xi_2-\xi_1)$ berilgan. Harakatni $x_i=x_i(\xi_p)$ - Lagrang ko'rinishida ifodalang:

A) $x_1=\xi_1+3\xi_2-4\xi_3; x_2=2\xi_1+\xi_2-\xi_3$; $x_3=-\xi_1+4\xi_2+\xi_3$

B) $x_1=\xi_1; x_2=\xi_1+\xi_2$; $x_3=\xi_3-\xi_1$; C) $x_1=\xi_1+\xi_2+\xi_3$; $x_2=\xi_1-\xi_2-\xi_3$; $x_3=\xi_3$;

D) $x_1=\xi_1+\xi_2; x_2=\xi_1$; $x_3=\xi_3+\xi_1-\xi$;

61. Cheksiz deformatsiya holida birgalik tenglamalarini (Sen Vinan shartlari) ko'rsating:

A) * $\frac{\partial^2\varepsilon_{vi}}{\partial\xi^j\partial\xi^\mu}+\frac{\partial^2\varepsilon_{\mu j}}{\partial\xi^i\partial\xi^v}-\frac{\partial^2\varepsilon_{\mu i}}{\partial\xi^j\partial\xi^v}-\frac{\partial^2\varepsilon_{vj}}{\partial\xi^i\partial\xi^\mu}=0$ B) $\frac{\partial^2\varepsilon_{\mu j}}{\partial\xi^\mu\partial\xi^j}-\frac{\partial^2\varepsilon_{i\mu}}{\partial\xi^v\partial\xi^j}=0,$

C) $\frac{\partial^2\varepsilon_{vi}}{\partial\xi^j\partial\xi^\mu}-\frac{\partial^2\varepsilon_{vj}}{\partial\xi^i\partial\xi^\mu}=0,$ D) $\frac{\partial^2\varepsilon_{vi}}{\partial\xi^j\partial\xi^\mu}+\frac{\partial^2\varepsilon_{\mu j}}{\partial\xi^i\partial\xi^v}=0,$

62. Deformatsiya tezliklari tenzori nimaga teng.

A)* $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Delta_i v_j + \Delta_j v_i\right)$; B) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Delta_i w_j + \Delta_j w_i\right)$; C) $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Delta_i v_i - \Delta_j w_i\right)$;

D) $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Delta_i v_j - \Delta_i v_i\right)$;

63. Ushbu $v_1 = \frac{2x_2}{t}, \quad v_2 = \frac{2x_1}{t}; \quad v_3 = 0$ tezliklar maydoni uchun deformatsiya tenzori komponentalarini hisoblang :

A)* $e_{11} = 3, \quad e_{12} = 2, \quad e_{13} = 1; \quad e_{22} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{33} = 0$;

B) $e_{11} = 2, \quad e_{12} = 0, \quad e_{13} = e_{22} = e_{32} = 0, \quad e_{33} = 1;$

C) $e_{11} = 1, \quad e_{12} = 2, \quad \varepsilon_{13} = 1, \quad \varepsilon_{22} = e_{32} = 0; \quad e_{33} = 2;$

D) $e_{11} = 0, \quad e_{12} = \frac{2}{t}, \quad e_{13} = e_{22} = e_{32} = e_{33} = 0;$

64. $\vec{A}$ vektorning rotasiyasi quyidagiga teng:

A) $\Omega = rot\ \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{c} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$; B) $rot\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$; C) $rot\ \vec{A} = \Delta_\alpha A^\alpha$;

D) $rot\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial A_2}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\vec{k};$

65. Uyurma vektori quyidagiga teng.

A)* $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\ \vec{v}$; B) $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\Delta_i w_j + \Delta_j w_i\right)$; C) $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\Delta_i \vartheta_j + \Delta_j \vartheta_i\right)$; D) $\vec{\omega} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}$;

66. $\vec{A} = \vec{A}(A_1^1, A_2^2, A_3^3)$ vektorni divergensiyasi dekart koordinatalarida quyidagiga teng :

A)* $div\ \vec{A} = \Delta_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^1}{\partial x} + \frac{\partial A^2}{\partial y} + \frac{\partial A^3}{\partial z}$; B) $div\ \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial A_2}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\vec{k};$

C) $div\ \vec{A} = \frac{\partial^2 A^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A^3}{\partial z^2}$; D) $grad\ \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial A_2}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\vec{k};$

67. Stoks teoremasi quyidagilarning qaysi birida to'g 'i ifodalangan:

A) $\int_c \vec{v}_s d\vec{s} = 2\int_\Sigma w_n d\sigma$; B) $\int_{ck} \left(\vec{\rho} \times d\vec{\rho}\right) = 2\vec{n}d\sigma$; C) $\int_\Sigma w_n d\sigma = \int_C \vec{A}_s d\vec{s}$;

D) $\int_S \vec{v}\ \vec{n}\ d\sigma = \int_V div\,\vec{v}\,d\tau$;

68. Gauss – Ostrogradskiy formulasini ko'rsating:

A)* $\int_S \vec{A} \cdot \vec{n}\ d\tau = \int_V div\ \vec{A}\ d\tau = \int_V \nabla_k A^k d\tau$; B) $\int_V div\ \vec{v}\ d\tau = \int_C grad\ n_i d\sigma$;

C) $\int_S \vec{A} \cdot \vec{n} d\tau = \int_C rot\vec{A}\ d\tau$; D) $\int_V \nabla_k A^k d\tau = \int_C \vec{A}_s d\vec{s}$;

69. Eyler o'zgaruvchilarda uzviylik tenglamalarini ko'rsating:

A) * $\frac{d\rho}{dt} + div\ \vec{v} = 0$; B) $\frac{d\rho}{dt} = 0$; C) $\rho = \rho_0 \cdot \frac{V_0}{V}$; D) $\frac{d\rho}{dt} + \rho\ div\ \vec{v} = 0$;

70. Lagranj o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamalarini ko'rsating.

A)* $\rho = \rho_0 \frac{V_0}{V}$; B) $\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v} = 0; \rho = \sqrt{\frac{g_0}{g}}; \rho = \rho_0 \frac{\Delta_0}{\Delta}$; C) $\frac{d\rho}{dt} = 0$;

D) $\rho = f_0 + f_1\sqrt{\frac{g_0}{g}}$;

71. m massali nuqta uchun harakat miqdori tenglamalari quyidagi ko'rinishga ega:

A)* $m\dfrac{d\rho}{dt} = \vec{F}$; B) $\dfrac{dm\ \vec{v}}{dt} = \vec{F}$; C) $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_i^{(e)}$; D) $\dfrac{dm}{dt} = \vec{F}$;

72. Chekli individual hajm uchun harakat miqdori tenglamalari quyidagi ko'rinishga ega.

A)* $\dfrac{dm\vec{v}}{dt} = \vec{F}$; B) $\dfrac{dQ}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)}$; C) $\int_V \overline{F}\rho\ d\tau = \dfrac{dQ}{dt} + \int_V \vec{p}\ d\sigma$; D) $\int_V v\rho\ d\tau = mv^*$;

73. Dekart koordinatalar sistemasida harakat tenglamalarini ko'rsating. A) $\int_V v\rho\ d\tau = mv^*$ B) $\dfrac{dQ}{dt} = \int_V \vec{F}\rho\, d\tau + \int_\Sigma \overline{P}_n d\sigma$; C) $\dfrac{dm\ \vec{v}}{dt} = \vec{F}$; D) $\dfrac{dQ}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)}$;

74. n ta nuqtalar sistemasi uchun harakat momenti tenglamalarini yozing.

A) $\dfrac{d\vec{k}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \overline{F}_i^{(e)}\right), (\vec{k} = \sum_{i=1}^{n}(r_i \times m_i v_i))$; B) $\dfrac{dm\ \vec{v}}{dt} = \vec{F}$; C) $\dfrac{d(\vec{r} \times m\,\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$;

D) $K = \int_V \vec{r} \times \vec{v}\rho d\tau + \int_V \vec{e}\overline{k}\rho d\tau$;

75. Chekli individual V hajmdagi Σ sirt bilan chegaralangan tutash muhit harakati miqdori momentlari tenglamalarini ko'rsating:

A) $\dfrac{d}{dt}\left(\int_V \vec{r} \times \vec{v}\rho\, d\tau + \int_V \vec{k}\rho\, d\tau\right) = \int_V \vec{r} \times \overline{F}\rho\, d\tau + \int_V \vec{r} \times \vec{v} P_n\, d\sigma + \int_V \vec{n}\rho\, d\tau + \int_V \vec{Q}\, d\sigma$;

B) $K = \dfrac{d}{dt}\int_V \vec{r} \times \vec{v}\rho d\tau + \int_V \vec{k}\rho d\tau$; C) $\dfrac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}\right)$; D) $\dfrac{d}{dt}\int_V \vec{r} \times v\rho d\tau = \int_\Sigma \vec{r} \times \vec{p}_n d\sigma$.

76. Klassik holda harakat miqdori momenti tenglamalarini ko'rsating.

A) $\dfrac{d}{dt}\int_V \vec{r} \times \vec{\upsilon}\rho\, d\tau = \int_V \vec{r} \times \vec{F}\rho\, d\tau + \int_V \vec{r} \times \vec{P}_n\, d\sigma$; B) $\dfrac{dk}{dt} = 0$; C) $\int_V \overrightarrow{Q_n}\, d\sigma = \int_V \nabla_i \overrightarrow{Q_n}\, d\tau$; D) $(\vec{\ni}_i \times \vec{\ni}_k)P^{ki} = 0$;

77. Ideal suyuqlik yoki ideal gaz deb shunday muhitga aytiladiki;

A) unda $\vec{n}$ normalli $\forall$ yuzachada $\vec{p}_n$ kuchlanish vektori yuzachaga ortogonal; B) unda $\vec{n}$ normali $\forall$ yuzachada $\vec{p}_n$ vektor osha yuzachada yotadi; C) undagi $\vec{\tau}$ urinmali $\forall$ yuzachada $\vec{p}_\tau$ vektor osha yuzachada yotadi; D) unda $\vec{n}$ vektor $\vec{p}_n$ kuchlanish vektoriga ortogonal.

78. Eyler tenglamalarini vektor ko'rinishi quyida berilgan:

A)* $\rho\,\vec{a} = \rho\vec{F} - gradp$; B) $\dfrac{d\vec{v}}{dt} + \dfrac{1}{2}grad\vec{v}^2 + 2\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{F} - \dfrac{1}{\rho}gradp$; C) $\dfrac{d\rho}{dt} = 0$;

D) $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho div\ \vec{v} = 0$;

79. Ideal suyuqlik uchun Gromeki – Lemb shaklidagi harakat tenglamalarini ko'rsating:

A)* $\dfrac{d\vec{v}}{dt} + \dfrac{1}{2}\ grad\ \vec{v}^2 + 2\vec{w} \times \vec{v} = \vec{F} - \dfrac{1}{\rho}\ gradp$; B) $\rho\vec{a} = \rho\vec{F} - gradp$;

C) $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho\ div\ \vec{v} = 0$; D) $\dfrac{d\rho}{dt} + \vec{v}grad\rho = 0$;

80. Guk va Nav'e – Stoks qonunlarni ifodalovchi formulalarni ko'rsating:

A) $\sigma^{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\tau_{ij} = B^{ij\alpha\beta}e_{\alpha\beta}$; B) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(w_{i,j} + w_{j,i}\right)$; C) $\rho\vec{a} = \rho\vec{F} - grad\ \ p'$

D) $\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\ \ \vec{v} = 0$;

81. Lame tenglamalarini ko'rsating:

A) $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}grad\ p + \frac{\lambda+\mu}{\rho}grad\, div\,\vec{v} + v'\Delta\vec{v}$; B) $\rho\vec{a} = \rho\vec{F} - grad\quad p$;

C) $(\lambda+\mu)grad\, div\,\vec{w} + \mu\Delta\vec{w} + \rho\vec{F} = \rho\vec{a}$; D) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\, div\vec{v} = 0$;

82. Nav'e-Stoks tenglamalarini ko'rsating:

A) $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}grad\ p + \frac{\lambda+\mu}{\rho}grad\, div\,\vec{v} + v'\Delta\vec{v}$. B) $(\lambda+\mu)grad\, div\,\vec{w} + \mu\Delta\vec{w} + \rho\vec{F} = \rho\vec{a}$;

C) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}\, grad\ \rho = 0$; D) $\sigma_{i,j} + \rho f_i = \ddot{U}_i$.

83. Umumiy holda izolirlangan sistema uchun energiyani saqlanish qonuni quyidagicha bo'ladi:

A) $\Delta E = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} + \Delta u = 0$; B) $\Delta U = Q - L$; C) $du = \left(\frac{du}{dt}\right)_V dT + \left(\frac{du}{dv}\right)_T dT$;

D) $c_x = c_v = \left(\frac{du}{dT}\right)_v$.

84. Quyidagi tenglama termodinamikaning 1-qonunini ifodalaydi:

A) $dQ = dk + d\Pi + dL\ \ yoki\ dQ = dU + dL$; B) $Q = mq;\ \ U = mu;\ L = ml;\ V = mv$;

C) $\Delta U = mc_v(T_2 - T_1)$; D) $\Delta I = mc_p(T_2 - T_1)$.

85. Termodinamikaning ikkinchi qonunining matematik ifodasini ko'rsating:

A) $dQ=TdS$; B) $dQ = dU + dL$, C) $TdS = dU + dL$; D) $\oint\frac{dQ}{dt} = 0$;

86. Asosiy termodinamik ayniyatni ko'rsating:

A) $TdS = dU + dL$; B) $dQ = dU + dL$; C) $\oint\frac{dQ}{dt} = 0$; D) $dS = \left(\frac{dS}{dT}\right)_V dT + \left(\frac{dS}{dV}\right)_T dV$;

87. Izotrop jism uchun Guk qonuni deformatsiya tenzori va kuchlanish tenzorining bosh oqlarida quyidagicha:

A) $P_i = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_i\left(i = \overline{1,3}\right)$, bu yerda $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$; B) $\tau_{i\,j} = B^{i\,j\,\alpha\,\beta}e\alpha\beta$;

C) $\rho\ \vec{a} = \rho\vec{F} - grad\vec{P}$; D) $P_{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}$;

88. Izotrop muhir uchun Nav'e-Stoks qonuni deformatsiya tezliklari va kuchlanish tenzorining bosh o'qlarida quyidagi ko'rinishni oladi:

A) $\tau_i = \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_i, (i = \overline{1,3})$; B) $\tau_{i\,j} = B^{i\,j\,\alpha\,\beta}e_{\alpha\beta}$ C) $P_{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}$;

D) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho v = 0$;

89. Mos ravishda Yung moduli va Puasson koeffisientning Lame koeffisientlari orqali ifodasini ko'rsating:

A) $E = \mu\frac{3\lambda + \mu}{\lambda + \mu}$; $v = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$. B) $v = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$; $v^1 = \mu / \rho$;

C) $P_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}$; $E = \mu\frac{(3\lambda+\mu)}{\lambda+\mu}$; D) $E = \mu\cdot\frac{\lambda+\mu}{3\lambda+\mu}$; $\xi = \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1$;

90. Dinamik yopishqoqlik koeffisienti, kinematik koeffisienti hamda 2-yopishqoqlik koeffisienti Lame koeffisienti orqali ifodalang:

A) $\mu = \mu_1, v^1 = \mu_1 / \rho; \ \xi = \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1;$

B) $E = \mu \cdot \frac{\lambda + \mu}{3\lambda + \mu}; \xi = \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1; v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)};$

C) $\xi = \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1, E = \mu\frac{(3\lambda + \mu)}{\lambda + \mu}, v^1 = \mu_1 / \rho;$ D) $v^1 = \mu_1 / \rho, v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}; E = \mu\frac{(3\lambda + \mu)}{\lambda + \mu}$

91. Izotrop tutash muhitning harakat tenglamalari ko'chishlarda quyidagi ko'rinishga ega:

A) $(\lambda + \mu)$ $grad \ \ div \ \vec{w} + \mu\Delta\vec{w} + \rho\vec{F} = \rho\vec{a};$ B) $\rho \ \vec{a} = \rho\vec{F} - grad \ P;$

C) $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad \ \ P + \frac{\lambda + \mu}{\rho} grad \ div \ \vec{v} + v^1\Delta\vec{v};$ D) $\sigma_{ij,\,j} + \rho f_i = \ddot{U}_i.$

92. Ideal suyuqlikning harakat tenglamalari quyidagi ko'rinishga ega:

A) $\rho\vec{a} = \rho\vec{F} - gradP;$ B) $\dot{o} = \rho\vec{F} - gradP;$

C) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0;$ D) $\sigma_{ij,\,j} + \rho f_i = \ddot{U}_i.$

93. Muhit uchun siqilmaslik sharti quyidagicha bo'ladi:

A) $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v} grad\rho = 0;$ B) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho\vec{v} = 0;$ C) $\rho \ \vec{a} = \rho\vec{F} - gradP;$

D) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(w_{ij} + w_{j,i});$

94. Barotrop prosseslarda ideal suyidlikning to'liq tenglamalar sistemasi:

A) $\rho\vec{a} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \ grad \ P; \ \ \frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho\vec{v} = 0; \ \ P = f(\rho);$ B) $P = f(\rho);$

C) $\frac{d\rho}{dt} = 0; \ \ \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad \ \ P; \ \ Pf(\rho);$ D) $P = R\rho T;$

95. Uzviylik tenglamalarini Dekart koordinatalar sistemasidagi proektsiyalardagi ifodasini ko'rsating:

A) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} + \frac{\partial\rho w}{\partial z} = 0;$ B) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho div\vec{v} = 0;$ C) $P = \partial x(\rho), P = R\rho T;$

D) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v} grad\rho = 0.$

96. To'rtinchi rang tenzorning nechta komponetasi mavjud: A)81; B) 9; C)12; D)27;

97. Egri chiziqli koordinatalar sistemasida Nav'e-Stoks qonuni quyidagi ko'rinishga ega:

A) $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad \ P + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \cdot grad \ div \ \vec{v} + v^1 \cdot \Delta\vec{v};$

B) $f_{ij} = \lambda I, \ (\varepsilon)g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij};$ C) $(\lambda + \mu) grad \ div \ \vec{w} + \mu\Delta\vec{w} + \rho\vec{F} = \rho\vec{a};$

D) $\rho a^k = \rho F^k + P^{ki}.$

98. Material nuqtalar sistemasi harakat miqdori momenti quyidagi ko'rinishga ega:

A) $\vec{k} = 0\vec{r} \times m\vec{v}^* + \sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_{i\,nisb} \times m_i\vec{v}_{i\ nisb});$ B) $\vec{k} = \int_v \vec{r} \times \vec{v}\rho d\tau;$ C) $k = \vec{r} \times m\vec{v};$ D) $M = \vec{r} \times \vec{F}.$

99. Chekli hajm harakat miqdori quyidagiga teng:

A) $\vec{k} = \int_v \vec{r} \times \vec{v}\rho d\tau;$ B) $\vec{k} = \vec{r}^* \times \overline{Q} + \int_\tau \vec{r}_{nisb} \times \vec{v}_{nisb}\rho \ d\tau.$

C) $k = \vec{r} \times m\vec{v};$ D) $k = \int_{\vec{v}} h\rho d\tau.$

100. Klassik holda harakat miqdori tenglamalarida quyidagi hadlar qatnashmaydi:

A) $\int\limits_{v} \bar{k}\rho\, d\tau, \int\limits_{v} \bar{h}\rho d\tau, \int\limits_{\Sigma} \overline{Q}_n d\sigma,$ B) $\int\limits_{v} \bar{k}\rho d\tau, \int\limits_{v} \vec{r} \times \overline{P}_n d\sigma, \int\limits_{\Sigma} \overline{Q}_n d\sigma$;

C) $\int\limits_{v} \vec{r} \times \overline{P}_n d\sigma, \int\limits_{v} \bar{k}\rho d\tau, \int\limits_{\Sigma} \overline{Q}_n d\sigma$ D) $\int\limits_{v} \bar{k}\rho\, d\tau$.

TALABALAR BILIMINI REYTING TIZIMI ASOSIDA BAHOLASH MEZONI

Fan bo’yicha reyting jadvallari, nazorat turi, shakli, soni hamda har bir nazoratga ajratilgan maksimal ball, shuningdek joriy va oraliq nazoratlarining saralash ballari haqidagi ma’lumotlar fan bo’yicha birinchi mashg’ulotda talabalarga e’lon qilinadi.

Fan bo’yicha talabalarning bilim saviyasi va o’zlashtirish darajasining Davlat ta’lim standartlariga muvofiqligini ta’minlash uchun quyidagi nazorat turlari o’tkaziladi:

- joriy nazorat (JN) – talabaning fan mavzulari bo’yicha bilim va amaliy ko’nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Joriy nazorat fanning xususiyatidan kelib chiqqan holda amaliy mashg’ulotlarda og’zaki so’rov, test o’tkazish, suhbat, nazorat ishi, kollekvium, uy vazifalarini tekshirish va shu kabi boshqa shakllarda o’tkazilishi mumkin;
- oraliq nazorat (ON) – semestr davomida o’quv dasturining tegishli (fanlarning bir necha mavzularini o’z ichiga olgan) bo’limi tugallangandan keyin talabaning nazariy bilim va amaliy ko’nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Oraliq nazorat bir semestrda ikki marta o’tkaziladi va shakli (yozma, og’zaki, test va hokazo) o’quv faniga ajratilgan umumiy soatlar hajmidan kelib chiqqan holda belgilanadi;
- yakuniy nazorat (YaN) – semestr yakunida muayyan fan bo’yicha nazariy bilim va amaliy ko’nikmalarni talabalar tomonidan o’zlashtirish darajasini baholash usuli. Yakuniy nazorat asosan tayanch tushuncha va iboralarga asoslangan “Yozma ish” shaklida o’tkaziladi.

ON o’tkazish jarayoni kafedra mudiri tomonidan tuzilgan komissiya ishtirokida muntazam ravishda o’rganib boriladi va uni o’tkazish tartiblari buzilgan hollarda, **ON** natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda **ON** qayta o’tkaziladi.

Oliy ta’lim muassasasi rahbarining buyrug’i bilan ichki nazorat va monitoring bo’limi rahbarligida tuzilgan komissiya ishtirokida **YaN** ni o’tkazish jarayoni muntazam ravishda o’rganib boriladi va uni o’tkazish tartiblari buzilgan hollarda, **YaN** natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda **YaN** qayta o’tkaziladi.

Talabaning bilim saviyasi, ko’nikma va malakalarini nazorat qilishning reyting tizimi asosida talabaning fan bo’yicha o’zlashtirish darajasi ballar orqali ifodalanadi.

«Informatika » fani bo’yicha talabalarning semestr davomidagi o’zlashtirish ko’rsatkichi 100 ballik tizimda baholanadi.

Ushbu 100 ball baholash turlari bo’yicha quyidagicha taqsimlanadi:

Ya.N.-30 ball, qolgan 70 ball esa J.N.-35 ball va O.N.-35 ball qilib taqsimlanadi.

Ball	Baho	Talabalarning bilim darajalari
86 - 100	A’lo	Xulosa va qaror qabul qilish. Ijodiy fikrlay olish. Mustaqil mushohada yurita olish. Olgan bilimlarini amalda qo’llay olish. Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo’lish.
71 - 85	Yaxshi	Mustaqil mushohada qilish. Olgan bilimlarini amalda qo’llay olish. Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo’lish.
55 – 70	Qoniqarli	Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish.

		Tasavvurga ega bo'lish.
0 - 54	Qoniqarsiz	Aniqtasavvurgaegabo'lmaslik. Bilmaslik.

- Fan bo'yicha saralash bali 55 ballni tashkil etadi. Talabaning saralash balidan past bo'lgan o'zlashtirishi reyting daftarchasida qayd etilmaydi.
- Talabalarning o'quv fani bo'yicha mustaqil ishi joriy, oraliq va yakuniy nazoratlar jarayonida tegishli topshiriqlarni bajarishi va unga ajratilgan ballardan kelib chiqqan holda baholanadi.
- Talabaning fan bo'yicha reytingi quyidagicha aniqlanadi: $R = \frac{V \bullet O'}{100}$, bu yerda: V - semestrda fanga ajratilgan umumiy o'quv yuklamasi (soatlarda); O' - fan bo'yicha o'zlashtirish darajasi (ballarda).
- Fan bo'yicha joriy va oraliq nazoratlarga ajratilgan umumiy ballning 55 foizi saralash ball hisoblanib, ushbu foizdan kam ball to'plagan talaba yakuniy nazoratga kiritilmaydi.
- Joriy JN va oraliq ON turlari bo'yicha 55 bal va undan yuqori balni to'plagan talaba fanni o'zlashtirgan deb hisoblanadi va ushbu fan bo'yicha yakuniy nazoratga kirmasligiga yo'l qo'yiladi.
- Talabaning semestr davomida fan bo'yicha to'plagan umumiy bali har bir nazorat turidan belgilangan qoidalarga muvofiq to'plagan ballari yig'indisiga teng.
- **ON** va **YaN** turlari kalendar tematik rejaga muvofiq dekanat tomonidan tuzilgan reyting nazorat jadvallari asosida o'tkaziladi. **YaN** semestrning oxirgi 2 haftasi mobaynida o'tkaziladi.
- JN va ON nazoratlarda saralash balidan kam ball to'plagan va uzrli sabablarga ko'ra nazoratlarda qatnasha olmagan talabaga qayta topshirish uchun, navbatdagi shu nazorat turigacha, so'nggi joriy va oraliq nazoratlar uchun esa yakuniy nazoratgacha bo'lgan muddat beriladi.
- Talabaning semestrda JN va ON turlari bo'yicha to'plagan ballari ushbu nazorat turlari umumiy balining 55 foizidan kam bo'lsa yoki semestr yakuniy joriy, oraliq va yakuniy nazorat turlari bo'yicha to'plagan ballari yig'indisi 55 baldan kam bo'lsa, u akademik qarzdor deb hisoblanadi.
- Talaba nazorat natijalaridan norozi bo'lsa, fan bo'yicha nazorat turi natijalari e'lon qilingan vaqtdan boshlab bir kun mobaynida fakultet dekaniga ariza bilan murojaat etishi mumkin. Bunday holda fakultet dekanining taqdimnomasiga ko'ra rektor buyrug'i bilan 3 (uch) a'zodan kam bo'lmagan tarkibda apellyatsiya komissiyasi tashkil etiladi.
- Apellyatsiya komissiyasi talabalarning arizalarini ko'rib chiqib, shu kunning o'zida xulosasini bildiradi.
- Baholashning o'rnatilgan talablar asosida belgilangan muddatlarda o'tkazilishi hamda rasmiylashtirilishi fakultet dekani, kafedra muduri, o'quv-uslubiy boshqarma hamda ichki nazorat va monitoring bo'limi tomonidan nazorat qilinadi.

Talabalar ON dan to'playdigan ballarining mezonlari (2 ta ON)

№	**Ko'rsatkichlar**	**ON ballari**		
		max	**1-O**	**2-O**

			N	N
1	Darslarga qatnashganlik darajasi. Ma’ruza darslaridagi faolligi, konspekt daftarlarining yuritilishi va to’liqligi	15	0-7	0-8
2	Talabalarningmustaqilta’limtopshiriqlarinio’zvaqtidavasifatlibajarishivao’zlashtirish.	10	0-5	0-5
3	Og’zaki savol-javoblar, kollokvium va boshqa nazorat turlari natijalari bo’yicha	10	0-5	0-5
Jami ON ballari		**35**	**0-17**	**0-18**

Talabalar JN dan to’playdigan ballarining namunaviy mezonlari

№	**Ko’rsatkichlar**	**JN ballari**		
		max	**1-JN**	**2-JN**
1	Darslarga qatnashganlik va o’zlashtirishi darajasi. Amaliymashg’ulotlardagifaolligi, amaliymashg’ulotdaftarlariningyuritilishivaholati	15	0-7	0-8
2	Mustaqilta’limtopshiriqlariningo’zvaqtidavasifatlibajarilishi. Mavzular bo’yicha uy vazifalarini bajarilish va o’zlashtirishi darajasi.	10	0-5	0-5
3	YOzma nazorat ishi yoki test savollariga berilgan javoblar	10	0-5	0-5
Jami ON ballari		**35**	**0-17**	**0-18**

Yakuniynazorat “Yozmaish” shaklidabelgilanganbo’lsa, uholdayakuniynazorat 30 ballik “Yozmaish” variantlariasosidao’tkaziladi.

Agar yakuniy nazorat markazlashgan test asosida tashkil etilgan bo’lsa, u holda yakuniy nazorat 30 ballik “Test” variantlari asosida o’tkaziladi.

№	**Ko’rsatkichlar**	**YaN ballari**		
		maks	**Har bir variantdagi savollar yoki testlar soni**	**Har bir savol yoki test chun ballning o’zgarish oralig’i**
1.	Fan bo’yicha yakuniy yozma ish nazorati	30	5	0 - 6
2.	Fan bo’yicha yakuniy test nazorati	30	30	0 yoki 1

Yakuniy nazoratda “Yozma ish”larni baholash mezoni

Yakuniy nazorat “Yozma ish” shaklida belgilangan bo’lsa, u holda yakuniy nazorat 30 ballik “Yozma ish” variantlari asosida o’tkaziladi.

Yakuniy nazorat “Yozma ish” shaklida amalga oshirilganda, sinov ko’p variantli usulda o’tkaziladi. Har bir variant 3 ta nazariy savol va 2 ta amaliy topshiriqdan iborat. Nazariy savollar fan bo’yicha tayanch so’z va iboralar asosida tuzilgan bo’lib, fanning barcha mavzularini o’z ichiga qamrab olgan.

Har bir yozilgan javoblar bo’yicha o’zlashtirish ko’rsatkichi 0-6 ball oralig’ida baholanadi. Talaba maksimal 30 ball to’plashi mumkin.